

Módulo 01



A MATEMÁTICA E OS AXIOMAS

1.1. As regras do jogo

“Premissa considerada necessariamente evidente e verdadeira, fundamento de uma demonstração, porém ela mesma indemonstrável, originada, segundo a tradição racionalista, de princípios inatos da consciência”

AXIOMAS
OU
POSTULADOS

 Os axiomas são as regras do jogo matemático!

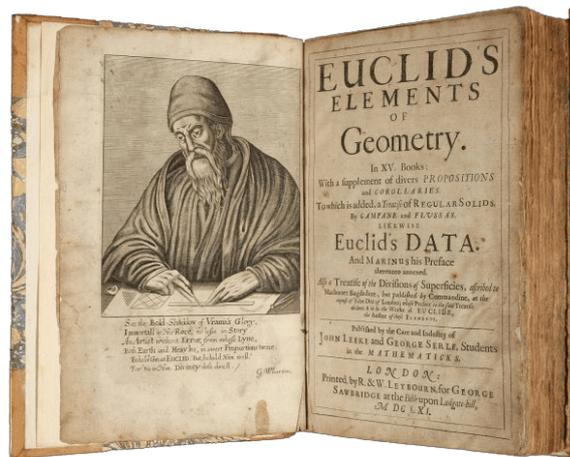
 Tudo que for feito em matemática deve respeitar os axiomas

 Cada área da matemática possui seus próprios axiomas



As noções comuns de Euclides

→ Matemático grego
(Alexandria)
→ 300 a.C.



“ OS ELEMENTOS ”

um dos
tratados
gregos mais
antigos

tratado
sobre geometria
plana

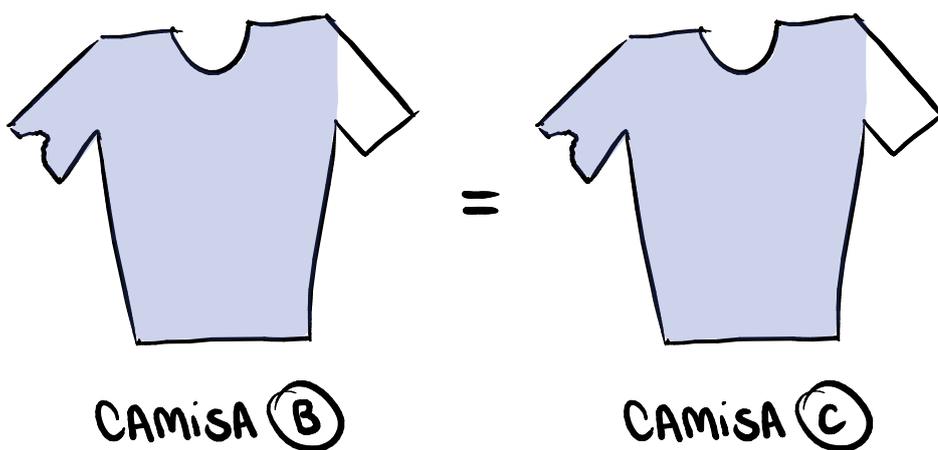
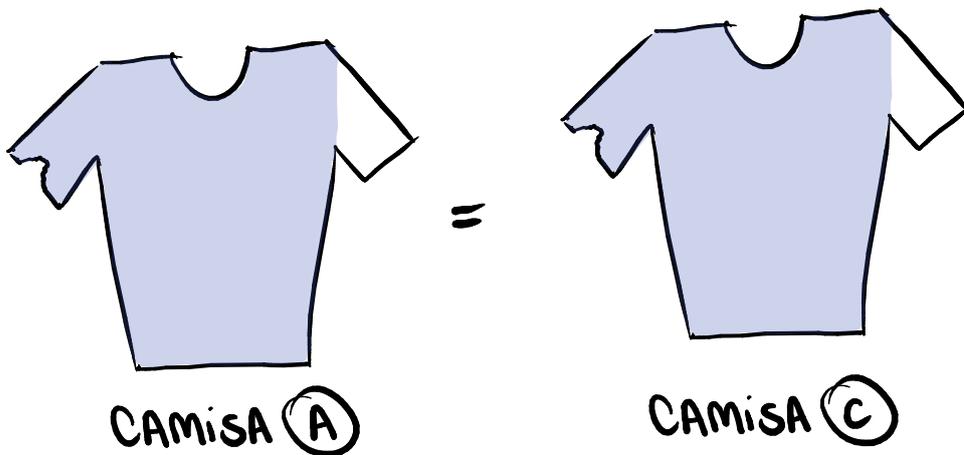
ao enunciar os
axiomas ele
separa alguns, as
“noções comuns”



NOÇÕES COMUNS

 Coisas iguais às mesmas coisas são iguais entre si.

$$\left. \begin{array}{l} A = C \\ B = C \end{array} \right\} A = B$$

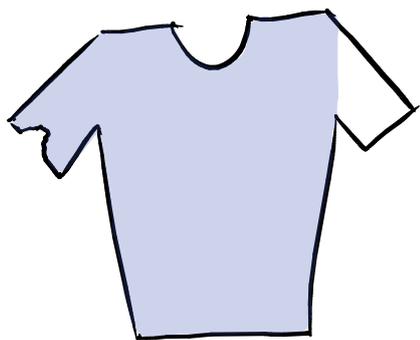


Conclusão : $A = B$



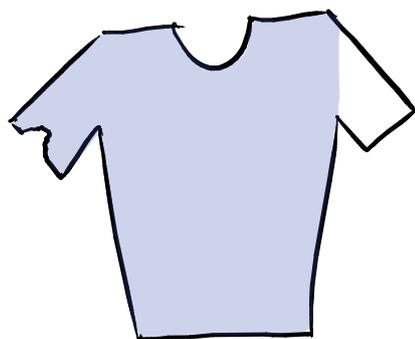


Coisas iguais adicionadas a coisas iguais formam coisas iguais.

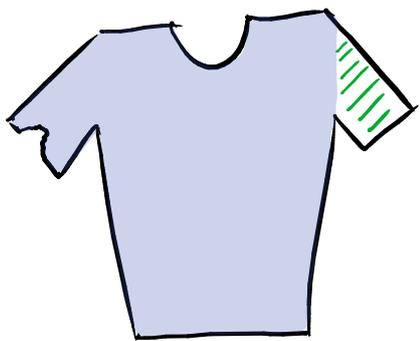


CAMISA (A)

=

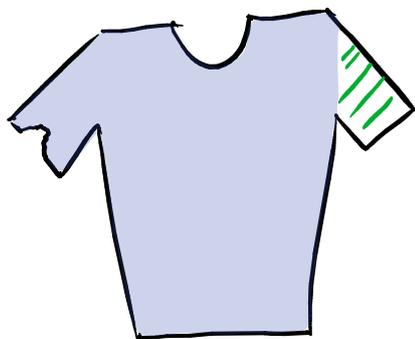


CAMISA (B)



CAMISA (A)

=

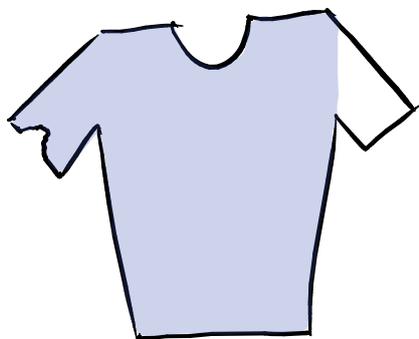


CAMISA (B)



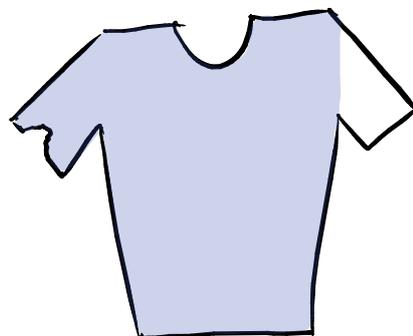


Coisas iguais subtraídas de coisas iguais formam coisas iguais.

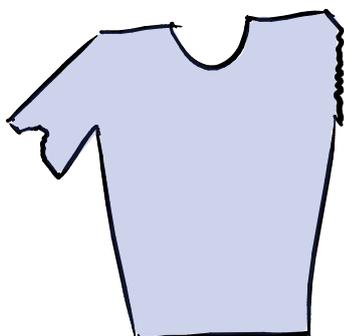


CAMISA (A)

=

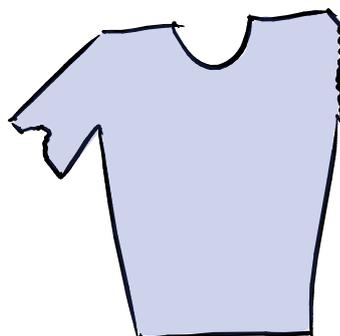


CAMISA (B)



CAMISA (A)

=



CAMISA (B)



Aplicação : equações do primeiro grau

Exemplo #01

Calcule o valor de x :

$$4x + 3 = 11$$

$$4x + 3 - 3 = 11 - 3$$

$$4x = 8$$

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$



Exemplo #02

Calcule o valor de x :

$$12x - 4 = 7x + 6$$

$$12x - 4 + 4 = 7x + 6 + 4$$

$$12x - \cancel{7x} = \cancel{7x} + 10 - \cancel{7x}$$

$$5x = 10$$

$$\frac{\cancel{5}x}{\cancel{5}} = \frac{10}{5}$$

$$x = 2$$



Exemplo #03

Calcule o valor de x :

$$5x - 1 = 2 - x$$

$$5x - 1 + x = 2 - x + x$$

$$6x - 1 + 1 = 2 + 1$$

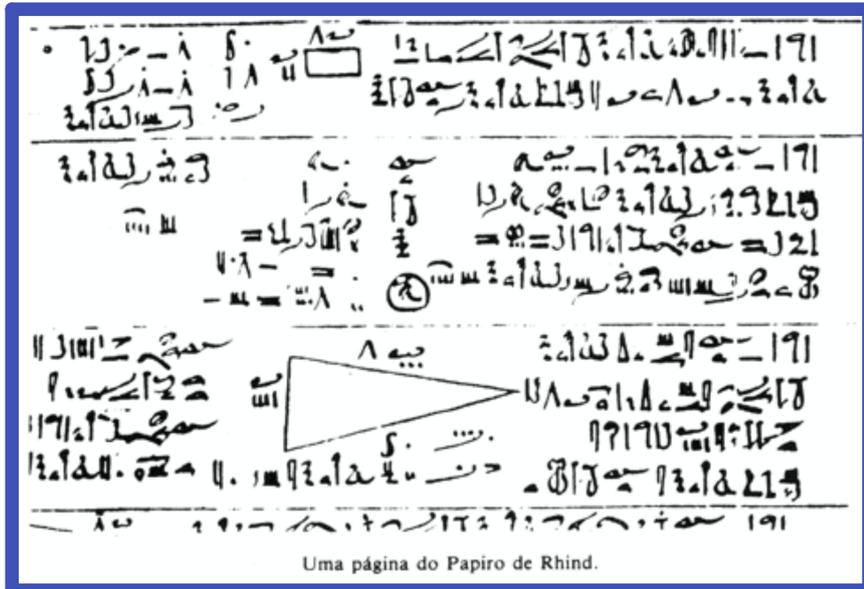
$$6x = 3$$

$$\frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{3}{6}$$

$$x = \frac{1}{2}$$



1.2 . A matemática antes dos axiomas



Papiro de Ahmes (Rhind)



1650 a.C.



Egito



Exemplos de problemas matemáticos do papiro

#01 Qual é o número que somado à sua terça parte dá 8?

↪ Regra da Falsa Posição:

PASSO 1: chutar uma resposta (vamos chutar 3)

↓ teste: $3 + \frac{3}{3} = 4$ (X)

PASSO 2: ver se a resposta chutada está muito distante



PASSO 3: chutar uma resposta mais realista

chute: 6

↪ teste: $6 + \frac{6}{3} = 8$ (✓)

R: 6



Em notação matemática atual :

$$x + \frac{x}{3} = 8$$

$$3x + \frac{\cancel{3} \cdot x}{\cancel{3}} = 8 \cdot 3$$

$$3x + x = 24$$

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{24}{4}$$

$$\boxed{x = 6}$$



#02 Qual é o número que somado ao seu triplo dá 24?

chute: 2

$$2 + 3 \cdot 2 = 8 \quad (\text{X})$$

↳ Novo chute: $6 + 3 \cdot 6 = 24$ (✓)

R: 6

Em notação matemática atual:

$$x + 3 \cdot x = 24$$

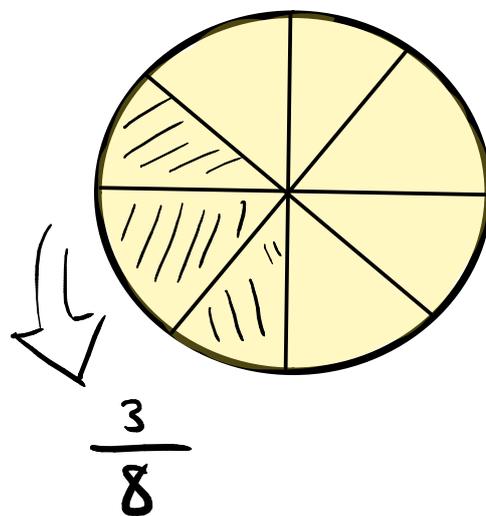
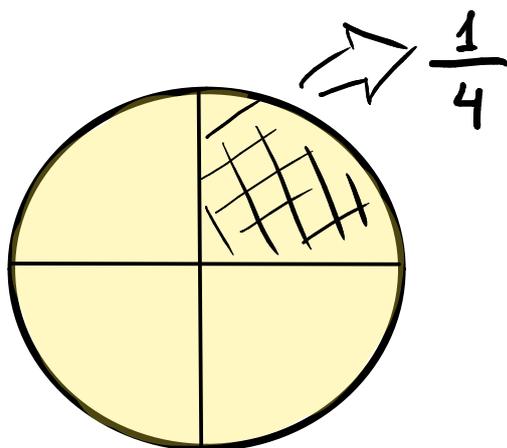
$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{24}{4}$$

$$x = 6$$

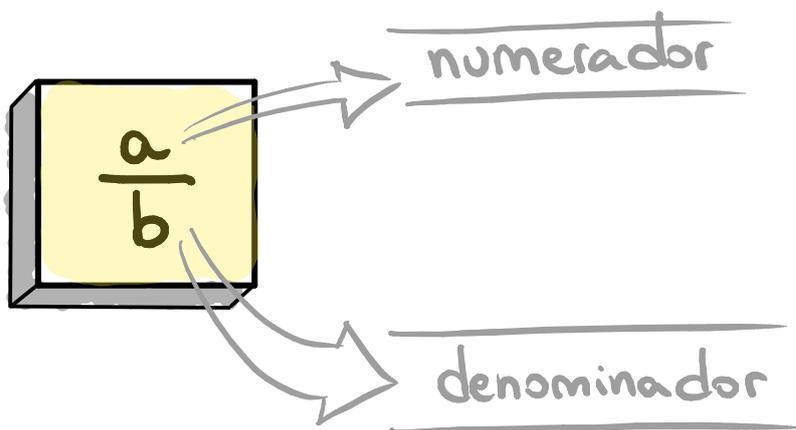


2.1

Frações

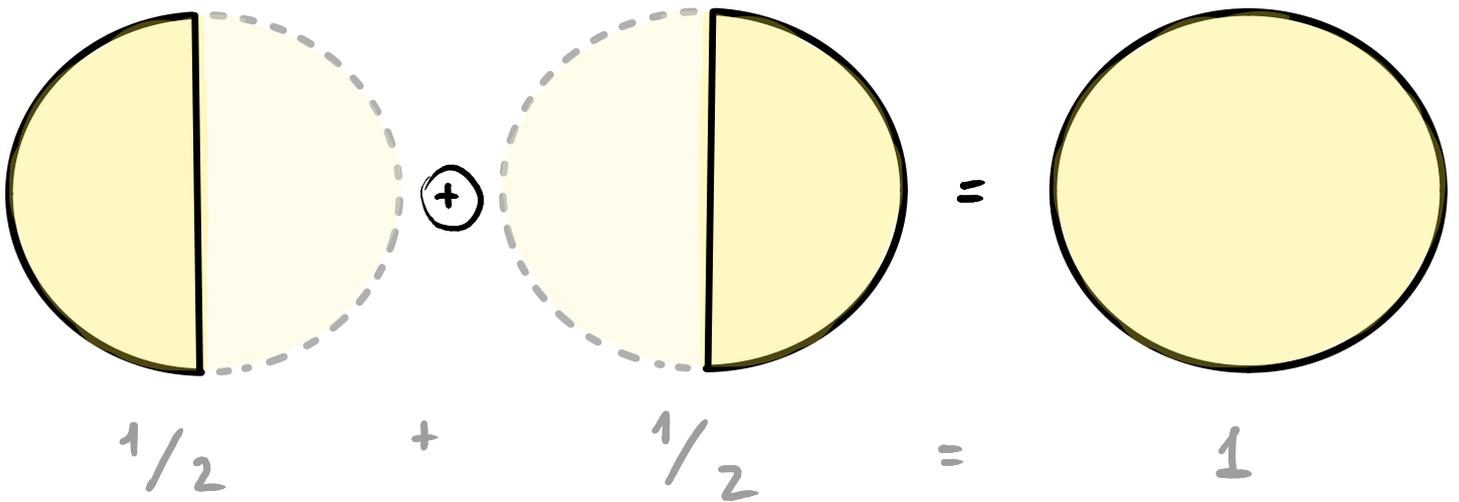


Frações são números da forma



2.2 · Soma/subtração de frações

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \times \quad \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}$$



Alerta:

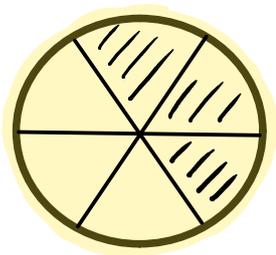
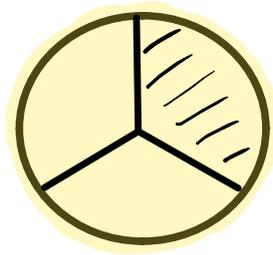
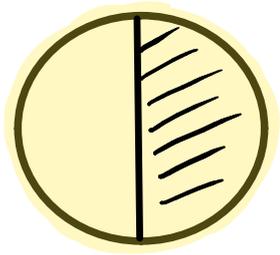
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$$



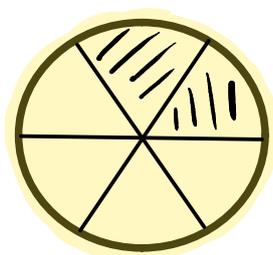
🗨️ Como fazer a soma de frações?

↳ colocando ambas na mesma base (denominador)

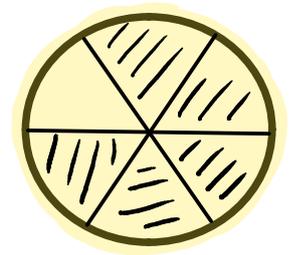
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$$



⊕



⊕



$$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$



Em notação matemática atual:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3}$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$$

↳ Princípio: $a \cdot 1 = a$

(todo número vezes 1 é igual a ele mesmo)



Exemplo #01

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{2} = ?$$

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} + \frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 5}$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{35}{10} = \frac{6 + 35}{10}$$

$$= \frac{41}{10} = \underline{4.1}$$



Exemplo #02

$$\frac{1}{7} + 2 + 0,5 = ?$$

$$\frac{1}{7} + 2 + 0,5 = \frac{1}{7} + \frac{2}{1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{2} + \frac{2}{1} \cdot \frac{14}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{7}$$

$$= \frac{2 + 28 + 7}{14}$$

$$= \frac{37}{14}$$



Exemplo #03

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = ?$$

//

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 5}$$

$$= \frac{12}{15} - \frac{5}{15} = \frac{7}{15}$$



ALERTA

$$x + \frac{x}{2} = 3$$

Caminho 01

$$x + \frac{x}{2} = 3$$

$$2x + \cancel{2} \frac{x}{\cancel{2}} = 3 \cdot 2$$

$$2x + x = 6$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{6}{\cancel{3}}$$

$$x = 2$$

Caminho 02

$$x + \frac{x}{2} = 3$$

$$\frac{x}{1} + \frac{x}{2} = 3$$

$$\frac{x}{1} \cdot \frac{2}{2} + \frac{x}{2} = 3$$

$$\frac{2x}{2} + \frac{x}{2} = 3$$

$$\cancel{2} \cdot \frac{3x}{\cancel{2}} = 3 \cdot 2$$

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = \frac{3 \cdot 2}{\cancel{3}}$$

$$x = 2$$

Caminho 03

$$x + \frac{x}{2} = 3$$

$$4x + \frac{4 \cdot x}{2} = 4 \cdot 3$$

$$4x + 2x = 12$$

$$6x = 12$$

$$x = \frac{12}{6}$$

$$x = 2$$

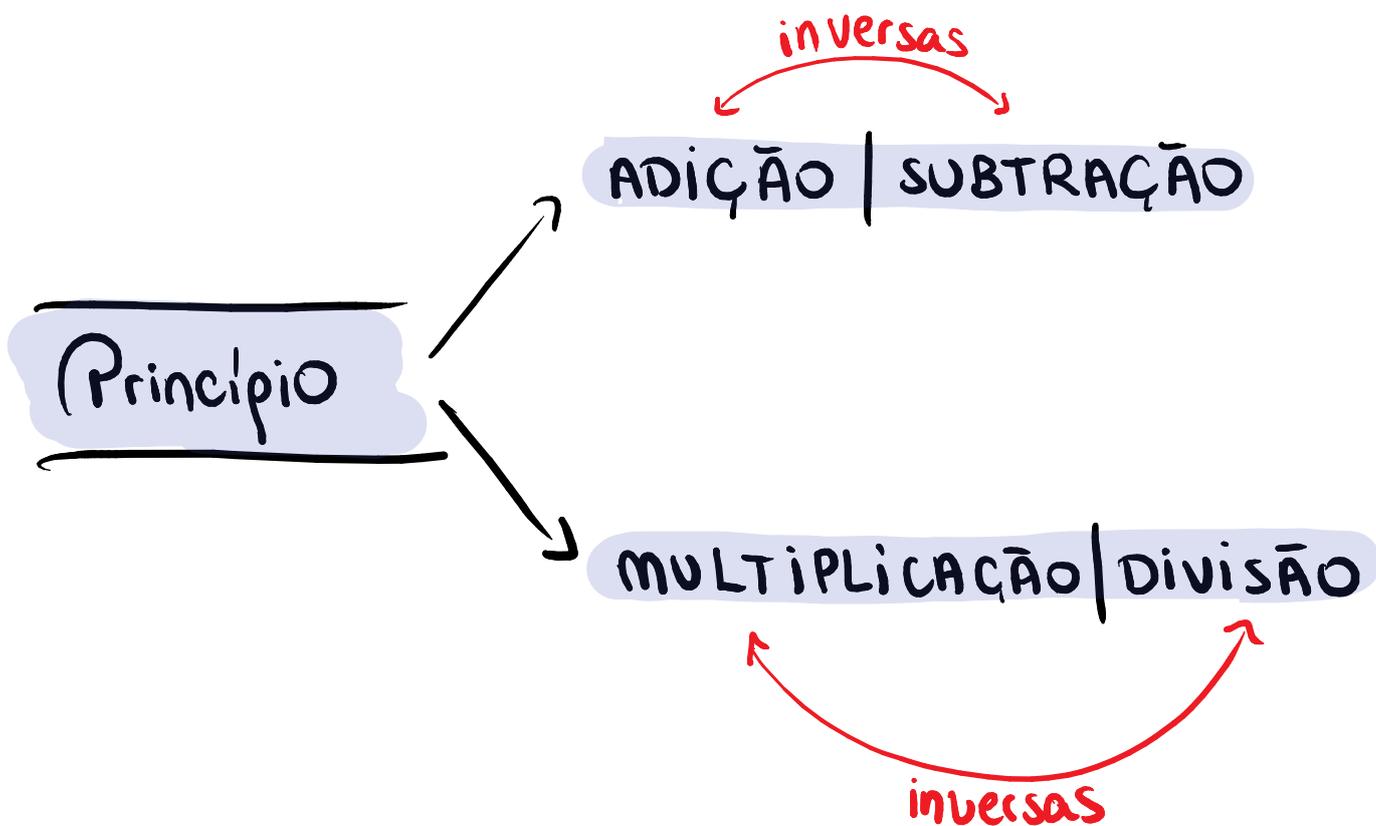


2.3. Multiplicação / Divisão de frações

Exemplo:

$$\frac{8}{2} \cdot \frac{15}{5} = \frac{8 \cdot 15}{2 \cdot 5} = 12$$
$$4 \cdot 3 = 12$$

} ✓



2.3.1. multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exemplos

a) $\frac{2}{4} \cdot \frac{10}{5} \rightarrow \frac{20}{20} = 1$
 $\searrow \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

b) $\frac{17}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{17}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{4} = \frac{17}{4}$



2.3.2. Divisão

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

↳ prova:

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{5}{11}} = \frac{\frac{3}{7} \cdot 11}{\frac{5}{11} \cdot 11} = \frac{\frac{3}{7} \cdot 11}{\frac{5}{\cancel{11}} \cdot \cancel{11}}$$

$$= \frac{\frac{3}{7} \cdot 11 \cdot \frac{1}{5}}{5 \cdot \frac{1}{5}} = \frac{\frac{3}{7} \cdot 11 \cdot \frac{1}{5}}{\cancel{5} \cdot \frac{1}{\cancel{5}}}$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{11}{5} = \frac{33}{35}$$



Exemplos

a)
$$\frac{\frac{15}{3}}{\frac{10}{2}} = \frac{\frac{15}{3} \cdot \frac{2}{10}}{\frac{10}{2} \cdot \frac{2}{10}} = \frac{15}{3} \cdot \frac{2}{10}$$
$$= \frac{\cancel{5} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\cancel{5} \cdot \cancel{2}} = \underline{\underline{1}}$$

b)
$$\frac{\frac{21}{4}}{\frac{7}{5}} = \frac{21}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{\cancel{7} \cdot 3}{4} \cdot \frac{5}{\cancel{7}} = \underline{\underline{\frac{15}{4}}}$$



$$c) 5 \div \frac{1}{25} =$$

$$= \frac{5}{\frac{1}{25}} = 5 \cdot \frac{25}{1} = \underline{125}$$

$$d) \frac{3x}{8} \div \frac{3}{(1-x)} = \frac{\frac{3x}{8}}{\frac{3}{(1-x)}} = \frac{\cancel{3}x}{8} \cdot \frac{(1-x)}{\cancel{3}}$$

$$= \frac{x(1-x)}{8}$$



Observação

↳ multiplicar uma equação "cruzado"

$$\frac{x}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{x}{4} \times \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = 12 \therefore \boxed{x = 6}$$

$$\frac{x}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\cancel{4} \cdot \frac{x}{\cancel{4}} = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \cdot 4$$

$$x \cdot 2 = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot 4 \cdot \cancel{2}$$

$$\boxed{2x = 4 \cdot 3}$$

$$\therefore x = 6$$

$$\frac{x}{4} = \frac{3}{2}$$

É como se
multiplicássemos
os termos da
equação cruzado



• ENEM 2016 •

QUESTÃO 150

O técnico de um time de voleibol registra o número de jogadas e de acertos, por atleta, em cada fundamento, para verificar os desempenhos dos jogadores. Para que o time tenha um melhor aproveitamento no fundamento bloqueio, ele decide substituir um dos jogadores em quadra por um dos que estão no banco de reservas. O critério a ser adotado é o de escolher o atleta que, no fundamento bloqueio, tenha apresentado o maior número de acertos em relação ao número de jogadas de que tenha participado. Os registros dos cinco atletas que se encontram no banco de reservas, nesse fundamento, estão apresentados no quadro.

Atleta	Participação em bloqueios	
	Número de acertos	Números de jogadas
I	20	30
II	10	34
III	19	32
IV	3	4
V	8	10

Qual dos atletas do banco de reservas o treinador deve colocar em quadra?

- A I
- B II
- C III
- D IV
- E V

$$1) \frac{20}{30} \cdot \frac{4}{4} = \frac{80}{120}$$

$$2) \frac{10}{34}$$

$$3) \frac{19}{32}$$

$$4) \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{10} = \frac{30}{40}$$

$$5) \frac{8}{10} \cdot \frac{4}{4} = \frac{32}{40}$$



3. Aprofundamento

○ problema das torneiras

Exemplo #01

- torneira (A) leva 6 horas para encher o tanque
- torneira (B) leva 8 horas para encher o tanque
- Quanto tempo leva com as duas ligadas?

↳ Supor: tanque tem $V = 24L$

$$(A) \quad \phi_A = \frac{24L}{6h} = 4L/h$$

$$(B) \quad \phi_B = \frac{24L}{8h} = 3L/h$$



$$\textcircled{A e B} : \phi = \phi_A + \phi_B$$

$$= 4L/h + 3L/h = 7L/h$$

$$\hookrightarrow \frac{7L}{1h} = \frac{14L}{2h} = \frac{21L}{3h} = \frac{24L}{x}$$

↑ ↑

$$\frac{7L}{1h} = \frac{24L}{x}$$

$$x \cdot \frac{7L}{1h} = \frac{24L}{x}$$

$$\frac{x \cdot \cancel{7}}{\cancel{7}} = \frac{24}{7}$$

$$x = \frac{24}{7} h \approx 3,4 \text{ horas}$$

