Exercícios Dissertativos

1. (2000) Um investidor quer aplicar 120 mil reais. Seu corretor lhe oferece um investimento, em duas fases, com as seguintes regras:

   - Na 1ª fase do investimento, ocorrerá um dentre os dois eventos seguintes: com probabilidade p, o investidor ganha metade do que investiu; com probabilidade $(1-p)$, o investidor perde um terço do que investiu.
   - Na 2ª fase do investimento, a quantia final da 1ª fase será reinvestida, de forma independente da 1ª fase. Neste novo investimento, ocorrerá um dentre os dois eventos seguintes: com probabilidade $\frac{1}{2}$, o investidor ganha a quarta parte do que foi reinvestido; com probabilidade $\frac{1}{2}$, o investidor perde metade do que foi reinvestido.

   a) Se o investidor aplicar seu dinheiro desta forma, com que valores pode ficar ao término do investimento? Qual a probabilidade, em função de p, de ficar com cada um desses valores?

   b) Uma revista especializada informa que, neste investimento, a probabilidade de perder dinheiro é 70%. Admitindo como correta a informação da revista, calcule p.

---

2. (2001) Um dado, cujas faces estão numeradas de um a seis, é dito perfeito se cada uma das seis faces tem probabilidade 1/6 de ocorrer em um lançamento. Considere o experimento que consiste em três lançamentos independentes de um dado perfeito. Calcule a probabilidade de que o produto desses três números seja

   a) par;

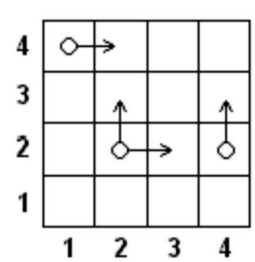
   b) múltiplo de 10.

---

3. (2002) Um tabuleiro tem 4 linhas e 4 colunas. O objetivo de um jogo é levar uma peça da casa inferior esquerda (casa $(1,1)$) para a casa superior direita (casa $(4,4)$), sendo que esta peça deve mover-se, de cada vez, para a casa imediatamente acima ou imediatamente à direita. Se apenas uma destas casas existir, a peça irá mover-se necessariamente para ela. Por exemplo, dois caminhos possíveis para completar o trajeto são $(1,1) \to (1,2) \to (2,2) \to (2,3) \to (3,3) \to (3,4) \to (4,4)$ e $(1,1) \to (2,1) \to (2,2) \to (3,2) \to (4,2) \to (4,3) \to (4,4)$.

   a) Por quantos caminhos distintos pode-se completar esse trajeto?

   b) Suponha que o caminho a ser percorrido seja escolhido da seguinte forma: sempre que houver duas opções de movimento, lança-se uma moeda não viciada; se der cara, a peça move-se para a casa à direita e se der coroa, ela se move para a casa acima. Desta forma, cada caminho contado no item a) terá uma certa probabilidade de ser percorrido. Descreva os caminhos que têm maior probabilidade de serem percorridos e calcule essa probabilidade.



4. (2003) Em uma equipe de basquete, a distribuição de idades dos seus jogadores é a seguinte:

idade	Nº de jogadores
22	1
25	3
26	4
29	1
31	2
32	1

Será sorteada, aleatoriamente, uma comissão de dois jogadores que representará a equipe junto aos dirigentes.

a) Quantas possibilidades distintas existem para formar esta comissão?

b) Qual a probabilidade da média de idade dos dois jogadores da comissão sorteada ser estritamente menor que a média de idade de todos os jogadores?

---

5. (2005) Uma pessoa dispõe de um dado honesto, que é lançado sucessivamente quatro vezes. Determine a probabilidade de que nenhum dos números sorteados nos dois primeiros lançamentos coincida com algum dos números sorteados nos dois últimos lançamentos.

---

6. (2007) Uma urna contém 5 bolas brancas e 3 bolas pretas. Três bolas são retiradas ao acaso, sucessivamente, sem reposição. Determine

a) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca.

b) a probabilidade de que tenham sido retiradas 2 bolas pretas e 1 bola branca, sabendo-se que as três bolas retiradas não são da mesma cor.

---

7. (2008) Em um jogo entre Pedro e José, cada um deles lança, em cada rodada, um mesmo dado honesto uma única vez. O dado é cúbico, e cada uma de suas 6 faces estampa um único algarismo de maneira que todos os algarismos de 1 a 6 estejam representados nas faces do dado.

Um participante vence, em uma certa rodada, se a diferença entre seus pontos e os pontos de seu adversário for, no mínimo, de duas unidades. Se nenhum dos participantes vencer, passa-se a uma nova rodada. Dessa forma, determine a probabilidade de

a) Pedro vencer na primeira rodada.

b) nenhum dos dois participantes vencer na primeira rodada.

c) um dos participantes vencer até a quarta rodada.

8. (2009) Um apreciador deseja adquirir, para sua adega, 10 garrafas de vinho de um lote constituído por 4 garrafas da Espanha, 5 garrafas da Itália e 6 garrafas da França, todas de diferentes marcas.

   a) De quantas maneiras é possível escolher 10 garrafas desse lote?

   b) De quantas maneiras é possível escolher 10 garrafas do lote, sendo 2 garrafas da Espanha, 4 da Itália e 4 da França?

   c) Qual é a probabilidade de que, escolhidas ao acaso, 10 garrafas do lote, haja exatamente 4 garrafas da Itália e, pelo menos, uma garrafa de cada um dos outros dois países?

---

9. (2010) Seja um número inteiro, $n \geq 0$.

   a) Calcule de quantas maneiras distintas n bolas idênticas podem ser distribuídas entre Luís e Antônio.

   b) Calcule de quantas maneiras distintas n bolas idênticas podem ser distribuídas entre Pedro, Luís e Antônio.

   c) Considere, agora,um número natural k tal que $0 \leq k \leq n$. Supondo que cada uma das distribuições do item b) tenha a mesma chance de ocorrer, determine a probabilidade de que, após uma dada distribuição, Pedro receba uma quantidade de bolas maior ou igual a k.

   Observação:Nos ítens a) e b), consideram-se válidas as distribuições nas quais uma ou mais pessoas não recebam bola alguma.

---

10. (2011) Para a prova de um concurso vestibular, foram elaboradas 14 questões, sendo 7 de Português, 4 de Geografia e 3 de Matemática. Diferentes versões da prova poderão ser produzidas, permutando-se livremente essas 14 questões.

    a) Quantas versões distintas da prova poderão ser produzidas?

    b) A instituição responsável pelo vestibular definiu as versões classe A da prova como sendo aquelas que seguem o seguinte padrão: as 7 primeiras questões são de Português, a última deve ser uma questão de Matemática e, ainda mais: duas questões de Matemática não podem aparecer em posições consecutivas. Quantas versões classe A distintas da prova poderão ser produzidas?

    c) Dado que um candidato vai receber uma prova que começa com 7 questões de Português, qual é a probabilidade de que ele receba uma versão classe A?

---

11. (2012)

    a) Dez meninas e seis meninos participarão de um torneio de tênis infantil. De quantas maneiras distintas essas 16 crianças podem ser separadas nos grupos A, B, C e D, cada um deles com 4 jogadores, sabendo que os grupos A e C serão formados apenas por meninas e o grupo B, apenas por meninos?

    b) Acontecida a fase inicial do torneio, a fase semifinal terá os jogos entre Maria e João e entre Marta e José. Os vencedores de cada um dos jogos farão a final. Dado que a probabilidade de um menino ganhar de uma menina é $\frac{3}{5}$, calcule a probabilidade de uma menina vencer o torneio.

---

12. (2013) Sócrates e Xantipa enfrentam-se em um popular jogo de tabuleiro, que envolve a conquista e ocupação de territórios em um mapa. Sócrates ataca jogando três dados e Xantipa se defende com dois. Depois de lançados os dados, que são honestos, Sócrates terá conquistado um território se e somente se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

    1) o maior valor obtido em seus dados for maior que o maior valor obtido por Xantipa;

    2) algum outro dado de Sócrates cair com um valor maior que o menor valor obtido por Xantipa.

    a) No caso em que Xantipa tira 5 e 5, qual é a probabilidade de Sócrates conquistar o território em jogo?

    b) No caso em que Xantipa tira 5 e 4, qual é a probabilidade de Sócrates conquistar o território em jogo?

---

13. (2014) Um recipiente hermeticamente fechado e opaco contem bolas azuis e bolas brancas. As bolas de mesma cor sao idênticas entre si e ha pelo menos uma de cada cor no recipiente. Na tentativa de descobrir quantas bolas de cada cor estão no recipiente, usou-se uma balança de dois pratos. Verificou-se que o recipiente com as bolas pode ser equilibrado por:

    (i) 16 bolas brancas idênticas as que estão no recipiente ou

    (ii) 10 bolas brancas e 5 bolas azuis igualmente idênticas as que estão no recipiente ou

    (iii) 4 recipientes vazios também idênticos ao que contem as bolas.

    Sendo P_A, P_B e P_R, respectivamente, os pesos de uma bola azul, de uma bola branca e do recipiente na mesma unidade de medida, determine

    (a) os quocientes $\dfrac{P_A}{P_B}$ e $\dfrac{P_R}{P_B}$;

    (b) o número n_A de bolas azuis e o número n_B de bolas brancas no recipiente.

---

14. (2015) Um "alfabeto minimalista" é constituído por apenas dois símbolos, representados por $*$ e $\#$. Uma palavra de comprimento n, $n \geq 1$, é formada por n escolhas sucessivas de um desses dois símbolos. Por exemplo, $\#$ é uma palavra de comprimento 1 e $\# * * \#$ é uma palavra de comprimento 4.
    Usando esse alfabeto minimalista,

    (a) quantas palavras de comprimento menor do que 6 podem ser formadas?

    (b) qual é o menor valor de n para o qual é possível formar 1.000.000 de palavras de tamanho menor ou igual a n?

15. (2016) João e Maria jogam dados em uma mesa. São cinco dados em forma de poliedros regulares: um tetraedro, um cubo, um octaedro, um dodecaedro e um icosaedro. As faces são numeradas de 1 a 4 no tetradro, de 1 a 6 no cubo, etc. Os dados são honestos, ou seja, para cada um deles, a probabilidade de qualquer uma das faces ficar em contato com a mesa, após o repouso do dado, é a mesma. Num primeiro jogo, Maria sorteia, ao acaso, um dos cinco dados, João o lança e verifica o número da face que ficou em contato com a mesa.

a) Qual é a probabilidade de que esse número seja maior do que 12?

b) Qual é a probabilidade de que esse numero seja menor do que 5?

Num segundo jogo, João sorteia, ao acaso, dois dos cinco dados. Maria os lança e anota o valor da soma dos números das duas faces que ficaram em contato com a mesa, após o repouso dos dados.

c) Qual é a probabilidade de que esse valor seja maior do que 30?

Poliedros regulares	
Tetraedro	4 faces
Cubo	6 faces
Octaedro	8 faces
Dodecaedro	12 faces
Icosaedro	20 faces