MANUAL DO PROFESSOR

Bonjorno • Giovanni Jr. • Paulo Câmara

Matemática Completa 1

ENSINO MÉDIO
COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA

FTD

Matemática Completa

1

ENSINO MÉDIO
COMPONENTE CURRICULAR
MATEMÁTICA

José Roberto Bonjorno

Licenciado em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Professor Carlos Pasquale"
Bacharel e licenciado em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Professor de Matemática e Física em escolas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio desde 1973

José Ruy Giovanni Júnior

Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo
Professor e assessor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio desde 1985

Paulo Roberto Câmara de Sousa

Mestre em Educação pela Universidade Federal da Paraíba
Especialização em Educação Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco.
Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco
Professor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio desde 1974
Professor de programas de formação continuada e pós-graduação desde 1990
Professor do Departamento de Matemática do Centro Acadêmico do Agreste – UFPE

4ª edição
São Paulo – 2016

FTD

MANUAL DO PROFESSOR

Diretor editorial Lauri Cericato
Gerente editorial Flávia Renata P. A. Fugita
Editora Cibeli de Oliveira Chibante Bueno
Editores assistentes Juliana Montagner, Adriano Rosa Lopes, Marcos Antônio Silva; Thais B. Moura, Janaina B. Pereira e Carlos Eduardo B. S. Esteves
Assessoria Rodolfo Campos
Gerente de produção editorial Mariana Milani
Coordenador de produção editorial Marcelo Henrique Ferreira Fontes
Coordenadora de arte Daniela Máximo
Projeto gráfico Casa Paulistana
Projeto de capa Bruno Attili
Foto de capa Thais Falcão/Olho do Falcão
Modelos da capa: Andrei Lopes, Angélica Souza, Beatriz Raielle, Bruna Soares, Bruno Guedes, Caio Freitas, Denis Wiltemburg, Eloá Souza, Jardo Gomes, Karina Farias, Karoline Vicente, Letícia Silva, Lilith Moreira, Maria Eduarda Ferreira, Rafael Souza, Tarik Abdo, Thaís Souza
Supervisora de arte Isabel Cristina Corandin Marques
Diagramação Adriana M. Nery de Souza, Eduardo Benetorio, Gabriel Basaglia, José Aparecido A. da Silva, Lucas Trevelin, Nadir Fernandes Racheti, Márcia Sasso, Sara Slovac Savero
Tratamento de imagens Eziquiel Racheti
Coordenadora de ilustrações e cartografia Marcia Berne
Ilustrações Alex Argozino, Luis Moura, Alberto De Stefano, Alexandre Argozino Neto, Alexandre S. Paula
Cartografia Allmaps
Coordenadora de preparação e revisão Lilian Semenichin
Supervisora de preparação e revisão Izabel Cristina Rodrigues
Revisão Aline Araújo, Carolina Manley, Cristiane Casseb, Desirée Araújo, Dilma Dias Ratto, Iara R. S. Mletchol, Juliana Rochetto, Jussara Gomes, Kátia Cardoso, Lilian Vismari, Pedro Fandi, Regina Barrozo, Renato Colombo Jr., Solange Guerra.
Coordenador de Iconografia e licenciamento de textos Expedito Arantes
Supervisora de licenciamento de textos Elaine Bueno
Iconografia Paloma Klein
Diretor de operações e produção gráfica Reginaldo Soares Damasceno

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bonjorno, José Roberto
Matemática Completa 1º ano / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa. – 4. ed. – São Paulo: FTD, 2016. – (Coleção Matemática Completa)

Componente curricular: Matemática.
ISBN 978-85-96-00324-7 (aluno)
ISBN 978-85-96-00325-4 (professor)

1. Matemática (Ensino Médio) I. Giovanni Júnior, José Ruy. II. Sousa, Paulo Roberto Câmara de. III. Título. IV. Série.

16-03480 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

EDITORA FTD S.A.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo-SP
CEP 01326-010 – Tel. (0-XX-11) 3598-6000
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
E-mail: central.atendimento@ftd.com.br

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD S.A.
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

Apresentação

Este livro tem o objetivo de auxiliar e estimular você a compreender a Matemática para utilizá-la em seu dia a dia e na continuação dos seus estudos.

Após cada conceito, com a intenção de ampliar, aprofundar e integrar os conhecimentos adquiridos, os capítulos trazem exercícios resolvidos e propostos que priorizam a compreensão e aplicação do conteúdo abordado.

Além dos conteúdos matemáticos específicos, o livro ainda traz possibilidades de explorar o uso de recursos tecnológicos, como *softwares* de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e de refletir sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

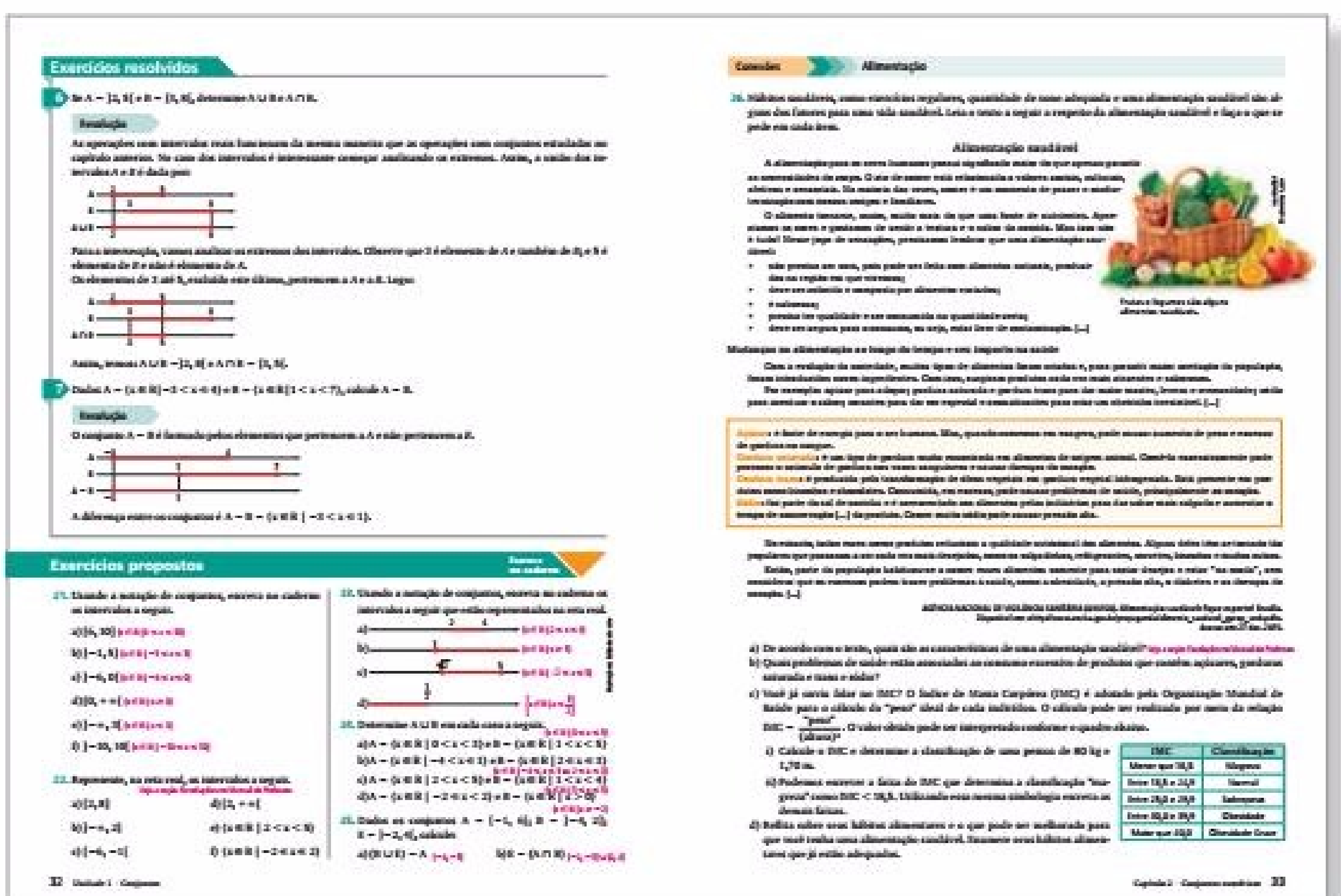
Bons estudos!

Os Autores

Conheça o seu livro

Abertura de unidade

Apresenta por meio de imagens, de um pequeno texto e algumas questões um tema relacionado ao conteúdo matemático que será desenvolvido na unidade.

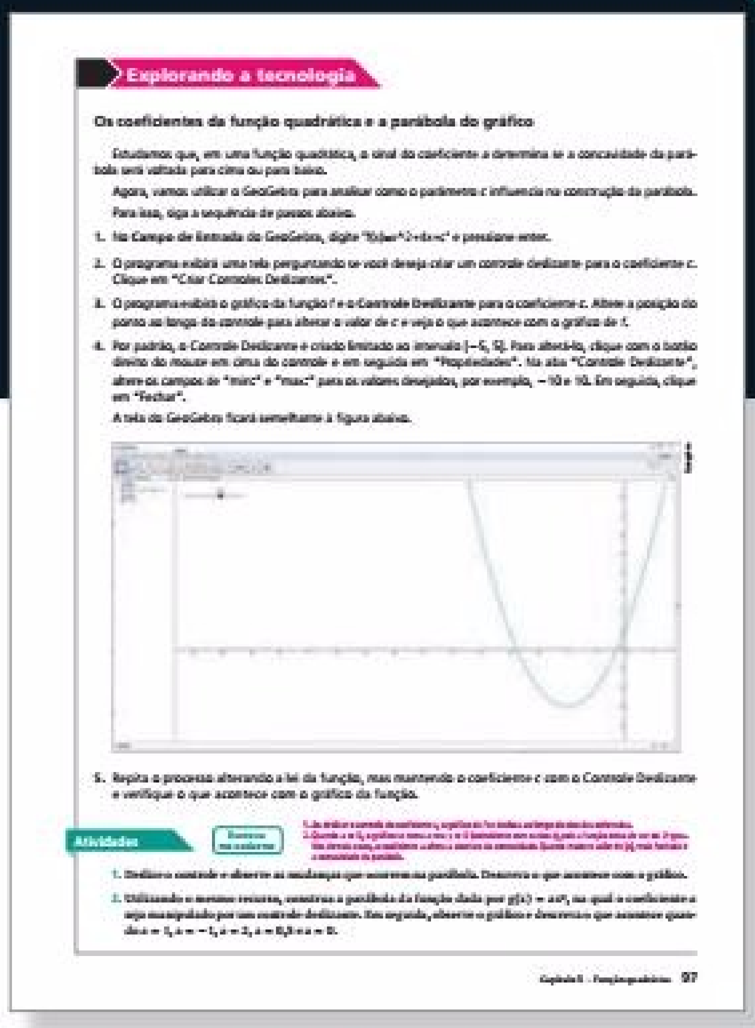


Exercícios resolvidos e propostos

Os exercícios resolvidos aparecem após a apresentação de cada conteúdo, seguidos de exercícios propostos para consolidar a teoria abordada. Em cada capítulo, há uma atividade diferenciada, denominada *Conexões*, que apresenta textos que exploram a aplicação da Matemática em diversas áreas do conhecimento.

História da Matemática

Esta seção relaciona os conteúdos abordados à História da Matemática por meio de um texto acompanhado de questões.

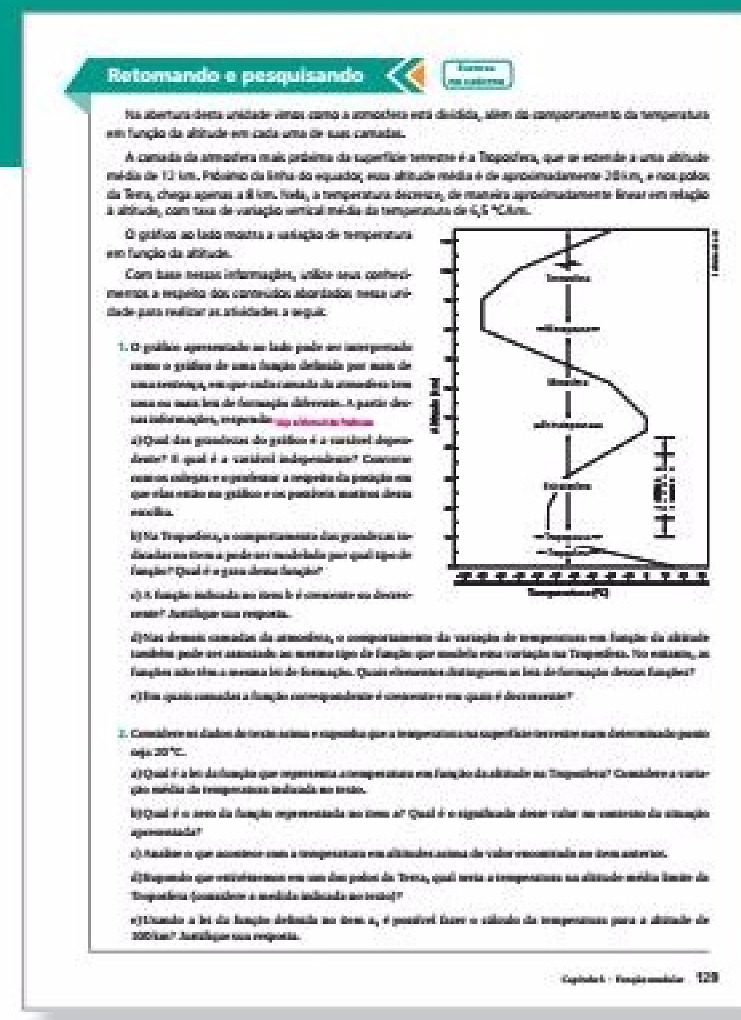


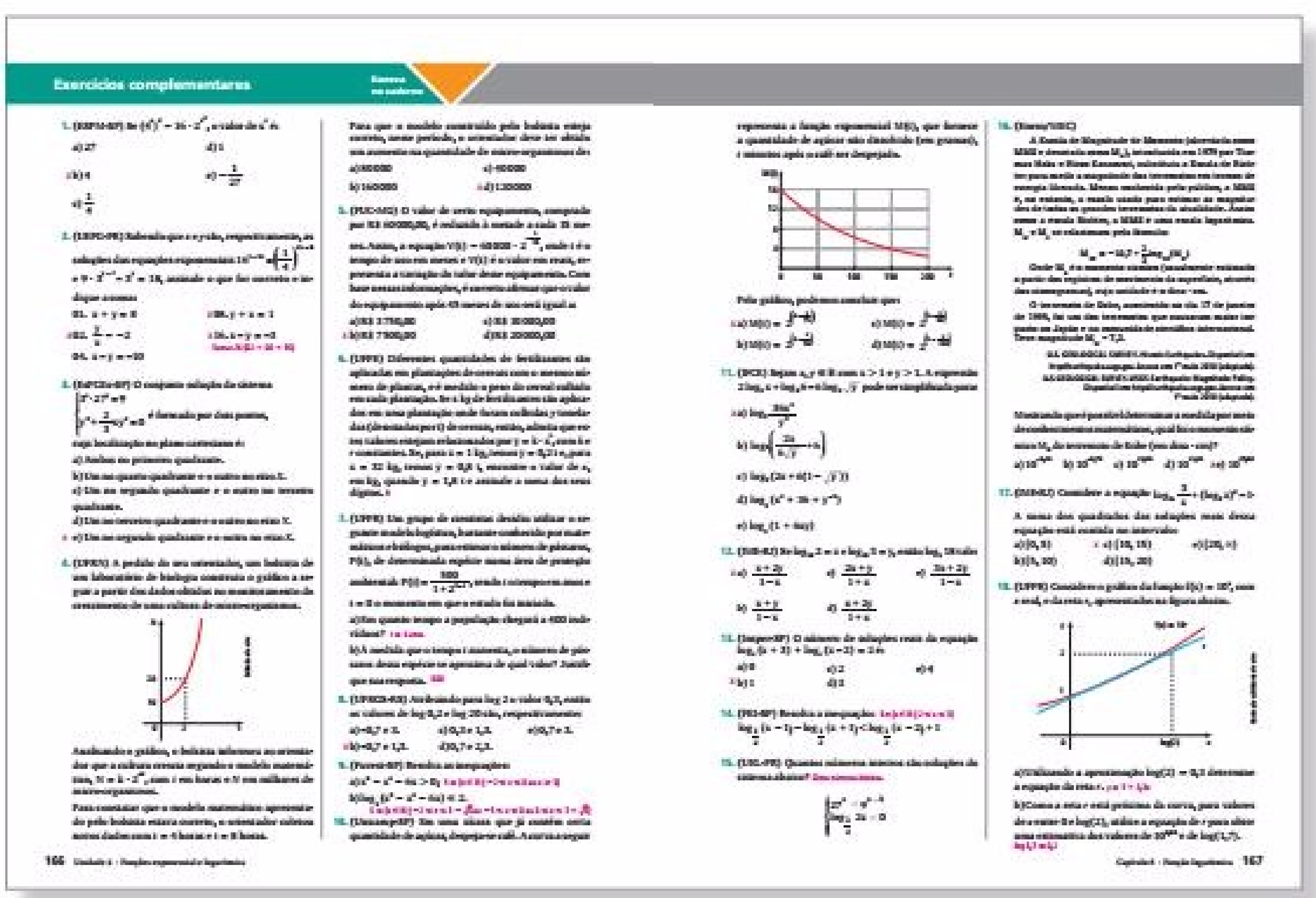
Explorando a tecnologia

Nesta seção são apresentadas atividades relacionadas ao conteúdo em estudo utilizando *software* de geometria dinâmica e planilha eletrônica.

Retomando e pesquisando

Retoma e discute o tema da abertura da unidade, relacionando-o aos conteúdos estudados ao longo da unidade.



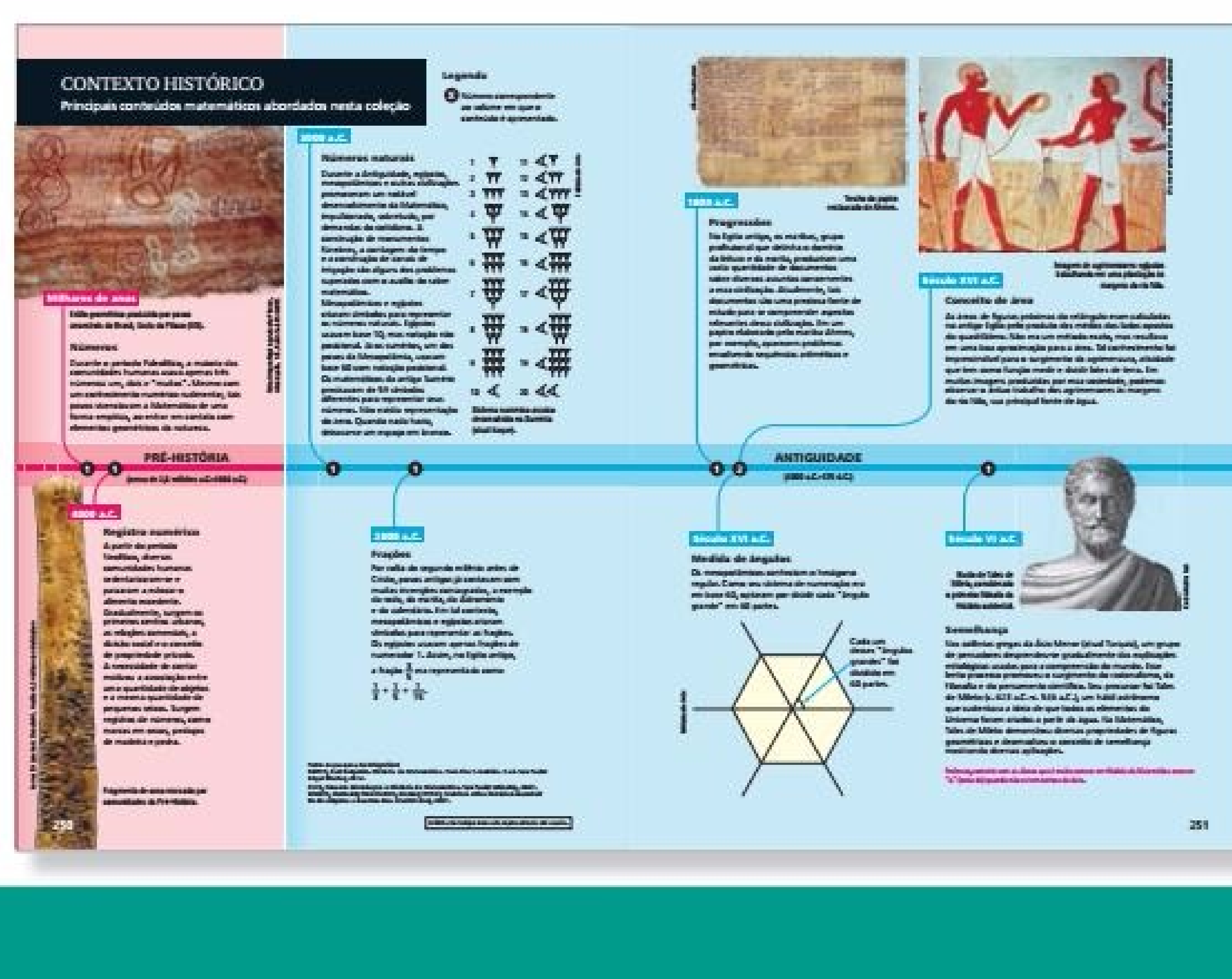


Exercícios complementares

No final de cada unidade, esta seção apresenta questões relacionadas aos conteúdos trabalhados ao longo da unidade. São apresentadas questões autorais, de vestibulares, do Enem e de outros concursos nacionais.

Infográfico: Contexto histórico

Ao final do volume há um infográfico que apresenta uma linha do tempo relacionando os conteúdos abordados na coleção com tópicos da história da Matemática.



Sumário

Unidade 1

Conjuntos

A **taxonomia** é o ramo da Biologia que estuda a classificação dos seres vivos. Ao classificá-los, os cientistas utilizam critérios de semelhança, organizando-os em grupos. Assim, é possível estabelecer, por exemplo, a existência de um ancestral comum entre grupos diferentes.

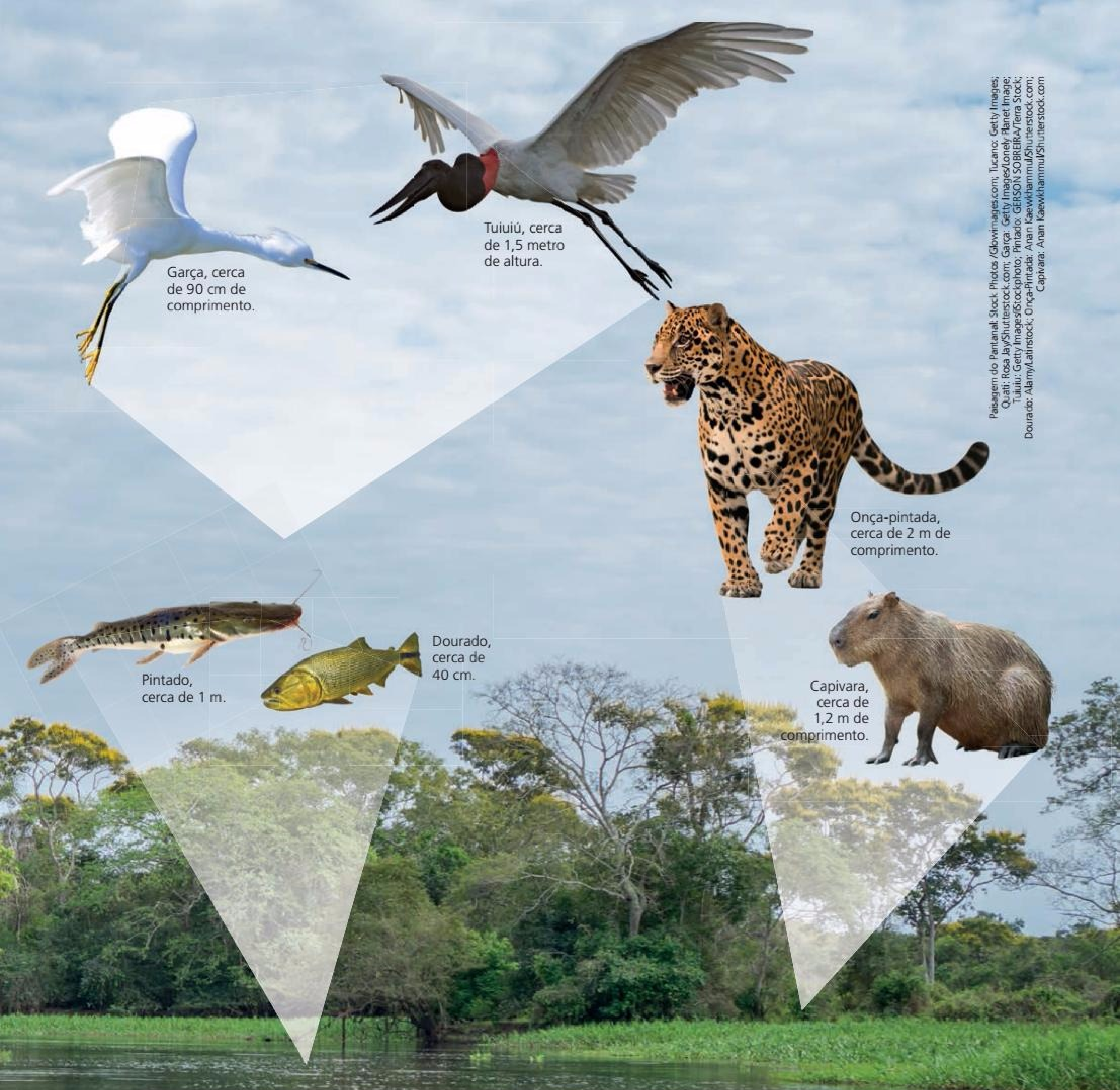
Todos os seres vivos podem ser classificados em seis grupos, chamados reinos. Cada reino é dividido em filos, que incluem uma ou mais classes. As classes são formadas por ordens, que contêm famílias. As famílias são constituídas de gêneros, que contêm uma ou diversas espécies. Assim como na taxonomia, é possível fazer agrupamentos de acordo com uma ou mais características comuns em diversas situações do cotidiano. No supermercado, por exemplo, os produtos são distribuídos de acordo com algumas características, como alimentos, bebidas, produtos de limpeza, utilidades domésticas etc. Dentro desses grupos é possível ainda criar subgrupos. Para o caso dos alimentos, por exemplo, podemos ter: em conservas, não perecíveis, que necessitam de refrigeração e assim por diante.

Os agrupamentos auxiliam na organização dos dados, produtos, elementos, e são especialmente úteis quando há uma grande quantidade de dados para ser analisada.

Tucano, cerca de 55 cm de comprimento.

Quati, cerca de 50 cm.

Paisagem com rio no Pantanal, Brasil (2014). Em destaque, alguns animais típicos da região.



Garça, cerca de 90 cm de comprimento.

Tuiuiú, cerca de 1,5 metro de altura.

Onça-pintada, cerca de 2 m de comprimento.

Pintado, cerca de 1 m.

Dourado, cerca de 40 cm.

Capivara, cerca de 1,2 m de comprimento.

Paisagem do Pantanal: Stock Photos /Glowimages.com; Tucano: Getty Images; Quati: Rosa Jay/Shutterstock.com; Garça: Getty Images/Lonely Planet Image; Tuiuiu: Getty Images/iStockphoto; Pintado: GERSON SOBREIRA/Terra Stock; Dourado: Alamy/Latinstock; Onça-Pintada: Anan Kaewkhammul/Shutterstock.com; Capivara: Anan Kaewkhammul/Shutterstock.com

1. Você já conhecia a taxonomia? Qual é a classificação taxonômica do ser humano? Converse com os colegas a respeito.

Escreva no caderno

2. Pense em três situações em que usamos os agrupamentos no dia a dia e faça o que se pede.

a) Conte aos colegas as situações pensadas. Vocês pensaram nas mesmas situações?

b) Como seriam essas situações sem os agrupamentos?

3. Observe as imagens destas páginas e elabore:

a) um agrupamento possível para os animais.

b) um esquema que ilustre esse agrupamento.

c) com o auxílio do esquema, uma explicação sobre sua divisão e compare com os esquemas feitos por seus colegas.

Veja o Manual do Professor.

CAPÍTULO 1

Introdução aos conjuntos

Phillip Minnis/Shutterstock/Glow Images

Parte de barraca de feira na qual as frutas estão organizadas por especialidade.

Nos mercados e feiras livres os produtos geralmente são organizados por semelhança, ou seja, produtos que possuem alguma característica em comum ficam juntos.

O mesmo raciocínio é utilizado na formação de conjuntos, em que agrupamos elementos que tenham um ou mais atributos em comum.

Usamos a ideia de conjunto em várias situações do dia a dia. Ao organizar a lista de amigos para uma festa, ao preparar o material escolar, ao formar um time, por exemplo, estamos constituindo conjuntos.

Neste capítulo estudaremos os conjuntos do ponto de vista matemático, analisando algumas propriedades e operações.

Conceitos iniciais

Um **conjunto** é uma coleção de objetos, chamados de **elementos**, que possuem uma propriedade comum ou que satisfazem determinada condição.

Representações de um conjunto

Um conjunto pode ser representado de várias maneiras. Geralmente indicamos os conjuntos utilizando letras maiúsculas (A, B, C, D, ...) e adotamos letras minúsculas para representar seus elementos (a, b, c, d, ...).

Há outras formas de representação de um conjunto. Por exemplo, podemos representar o conjunto *A*, formado pelas vogais do nosso alfabeto, das seguintes maneiras:

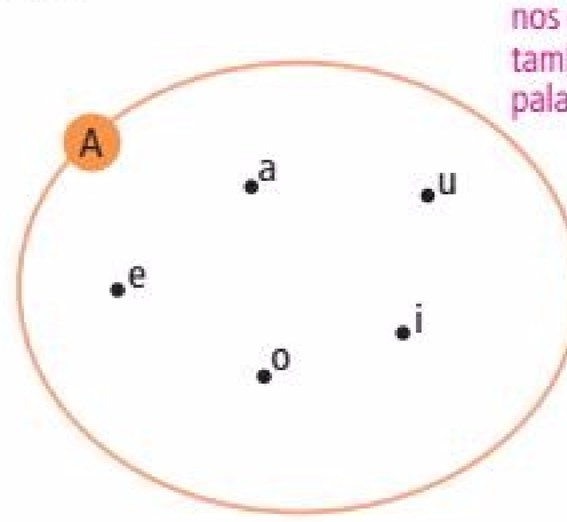
a) os elementos do conjunto são colocados entre chaves separados por vírgula, ou ponto e vírgula: $A = \{a, e, i, o, u\}$

b) os elementos do conjunto são representados por uma ou mais propriedades que os caracterize: $A = \{x \mid x \text{ é vogal do nosso alfabeto}\}$

Este símbolo significa **tal que**.

c) os elementos do conjunto são representados por meio de um esquema denominado diagrama de Venn:

Caso julgue necessário, comente com os alunos que dois-pontos (:) ou ponto e vírgula (;) também podem ser usados para representar as palavras "tal que" ou "tais que".



Editoria de arte

Bridgemanimages/Keystone

O **diagrama de Venn** foi desenvolvido pelo matemático inglês John Venn (1834-1923).

Para indicar que um elemento faz parte de determinado conjunto, usamos o símbolo **∈ (pertence)** e para indicar que ele não faz parte, usamos o símbolo **∉ (não pertence)**. Por exemplo, tomando $A = \{a, e, i, o, u\}$, conjunto das vogais de nosso alfabeto, temos:

- $i \in A$ (lê-se: *i* pertence a *A*);
- $d \notin A$ (lê-se: *d* não pertence a *A*).

Tipos de conjuntos

Quanto ao número de elementos, os conjuntos podem ser classificados como **finitos** ou **infinitos**.

Um conjunto é **finito** quando tem um número determinado de elementos. Por exemplo, o conjunto *A* das vogais de nosso alfabeto:

$$A = \{a, e, i, o, u\}$$

Utilizamos a notação n(A) para indicar o **número de elementos do conjunto** *A*. Nesse exemplo, temos $n(A) = 5$.

Um conjunto é **infinito** quando não é finito, ou seja, não é possível a contagem de todos os seus elementos. Por exemplo, o conjunto *B* dos números naturais ímpares:

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$$

As reticências antes ou depois de todos os elementos indicam que o conjunto é infinito.

Embora conjunto passe uma ideia de coleção, existem dois conjuntos muito especiais para a Matemática que não correspondem a essa noção, o **conjunto unitário** e o **conjunto vazio**.

Um conjunto é **unitário** quando é formado por um único elemento. Por exemplo:

$$H = \{x \mid x \text{ é um número natural maior que 6 e menor que 8}\}$$

Como só existe um número natural maior do que 6 e menor do que 8, temos que $H = \{7\}$. Logo, *H* é um conjunto unitário.

O conjunto **vazio** é aquele que não possui elementos. Ele é representado por { } ou $\varnothing$. Por exemplo:

$$V = \{x \mid x \text{ é um número natural menor que zero}\} = \varnothing$$

Igualdade de conjuntos

Analisando os conjuntos A = {vogais da palavra LIVRO} e B = {I, O}, observamos que eles possuem exatamente os mesmos elementos. Nesse caso, dizemos que *A* e *B* são iguais.

Agora, observe os conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{0, 1, 2\}$. Como existem elementos diferentes em cada conjunto, dizemos que *X* e *Y* são diferentes.

Dois conjuntos *A* e *B* são **iguais**, indicamos $A = B$, quando possuem os mesmos elementos.

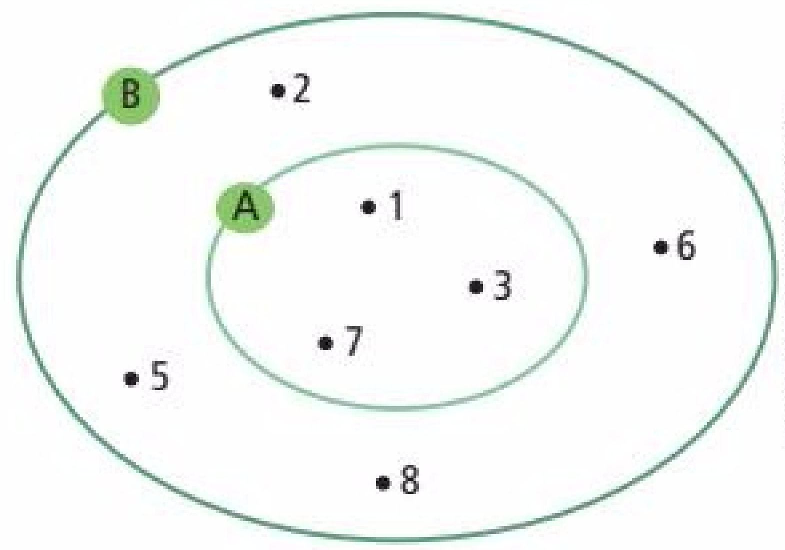
Dois conjuntos *A* e *B* são **diferentes**, indicamos $A \neq B$, se pelo menos um dos elementos de um dos conjuntos não pertence ao outro.

A ordem em que os elementos estão dispostos em um conjunto não o diferencia. Por exemplo, os conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$ e $W = \{2, 3, 1\}$ possuem os mesmos elementos, então $X = W$.

Da mesma maneira, os conjuntos $P = \{1, 5, 6\}$ e $Q = \{1, 5, 6, 5\}$ também são iguais, ou seja, têm os mesmos elementos, pois, apesar de o número 5 aparecer duas vezes em *Q*, elementos repetidos não diferenciam um conjunto do outro.

Subconjuntos

Considerando os conjuntos $A = \{1, 3, 7\}$ e $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, observamos que todo elemento do conjunto *A* também é elemento de *B*. Nesse caso, dizemos que *A* é um subconjunto de *B*. Veja ao lado a representação desses conjuntos por diagramas.



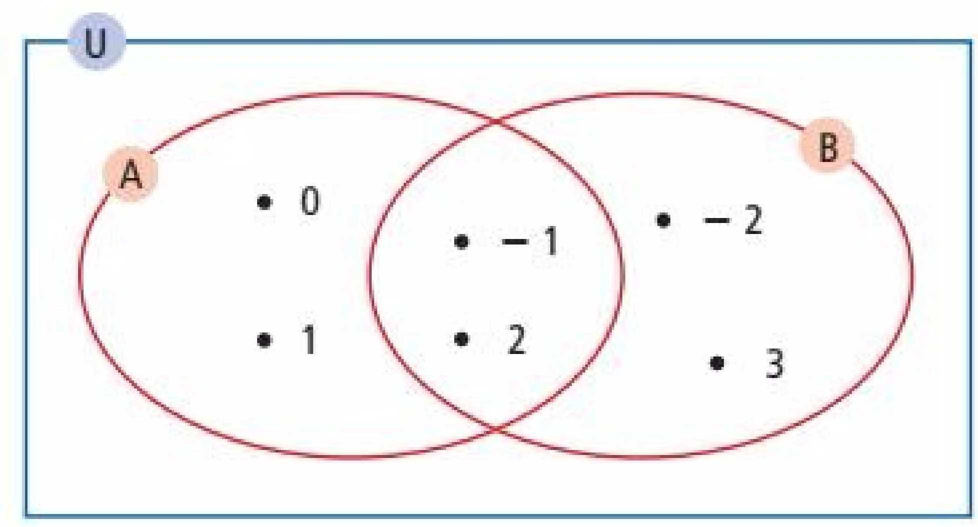
Ilustrações: Editoria de arte

De maneira geral, temos:

> Um conjunto *A* é **subconjunto** de outro conjunto, *B*, quando qualquer elemento de *A* também pertence a *B*.

Em algumas situações envolvendo conjuntos, todos os conjuntos considerados são subconjuntos de um mesmo conjunto, denominado **conjunto universo** e representado por *U*. Nos diagramas, é usual representar o conjunto universo por um retângulo. Por exemplo:

a) Ao lado representamos os conjuntos $U = \mathbb{Z}$, $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ e $B = \{-2, -1, 2, 3\}$:



b) No conjunto universo $U = \mathbb{N}$, a equação $x + 3 = 1$ não tem solução. No entanto, sendo $U = \mathbb{Z}$, a equação tem solução $x = -2$.

Quando um conjunto *A* é subconjunto de um conjunto *B*, temos uma **relação de inclusão** e dizemos que *A* **está contido** em *B* ou, ainda, que *A* é parte de *B*. Podemos dizer também que *B* **contém** *A*.

Indica-se: $A \subset B$ (lê-se: *A* está contido em *B* ou *A* é parte de *B*)

Este símbolo significa **está contido**.

$B \supset A$ (lê-se: *B* contém *A*)

Este símbolo significa **contém**.

Veja alguns exemplos:

a) Sendo $A = \{1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3\}$, tem-se $A \subset B$.

b) $\{3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c) $\{4, 5, 6\} \subset \{4, 5, 6\}$

d) $\{8\} \subset \{2, 4, 6, 8\}$

Propriedades da relação de inclusão

É possível demonstrar que são válidas as seguintes propriedades para a relação de inclusão entre conjuntos:

1ª) Propriedade reflexiva: $A \subset A$, para qualquer *A*, ou seja, um conjunto sempre é subconjunto dele mesmo.

2ª) Propriedade antissimétrica: Se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$.

3ª) Propriedade transitiva: Se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

Observações:

- A relação de pertinência ($x \in A$) é entre elemento e conjunto, enquanto a relação de inclusão ($A \subset B$) é entre dois conjuntos.
- Se existir pelo menos um elemento de *A* que não pertença a *B*, dizemos que *A* **não está contido** em *B* ou que *B* **não contém** *A*.
- O símbolo $\not\subset$ significa **não está contido**.
- O símbolo $\not\supset$ significa **não contém**.
- O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, ou seja, $\varnothing \subset A$, qualquer que seja o conjunto *A*.

Exercícios resolvidos

1 Descreva os conjuntos a seguir, enumerando seus elementos:

a) V = {x é vogal da palavra ESTACIONAMENTO}

b) P = {x é um número natural primo menor que 50}

Resolução

a) As vogais do nosso alfabeto são: a, e, i, o, u. Na palavra ESTACIONAMENTO, as vogais são: a, e, i, o.
Portanto, V = {a, e, i, o}.

b) Os números primos são aqueles que possuem apenas dois divisores distintos, o número 1 e ele mesmo. Logo, os números primos menores que 50 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.
Portanto, P = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47}.

2 Verifique se o conjunto A = {0, 3, 5} é subconjunto de B = {0, 1, 2, 3, 4}.

Resolução

Comparando, um a um, os elementos dos conjuntos *A* e *B*, verificamos que o elemento 5 do conjunto *A* não pertence a *B*, ou seja, $5 \notin B$. Logo, *A* não está contido em *B*, isto é, $A \not\subset B$. Portanto, *A* não é subconjunto de *B*.

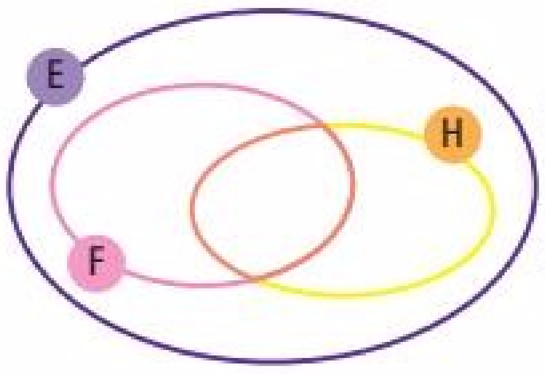
3 Determine todos os subconjuntos de A = {1, 2, 3}.

Resolução

Os subconjuntos de *A* são os seguintes:

- o conjunto vazio: ∅
- os conjuntos com apenas 1 elemento: {1}, {2}, {3}
- os conjuntos com 2 elementos: {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}
- o próprio conjunto *A*, com 3 elementos: {1, 2, 3}

4 Observe o diagrama:



Editoria de arte

Quais afirmativas são verdadeiras? Justifique sua resposta.

a) $E \not\subset F$

b) $F \supset E$

c) $H \subset F$

d) $E \supset H$

e) $F \not\subset H$

f) $H \subset E$

Resolução

Analisando as afirmativas, uma a uma, temos:

a) Verdadeira, pois existem elementos que pertencem a *E* e não pertencem a *F*.

b) Falsa, pois existem elementos que pertencem a *E* e não pertencem a *F*.

c) Falsa, pois existem elementos que pertencem a *H* e não pertencem a *F*.

d) Verdadeira, pois todos os elementos de *H* pertencem a *E*.

e) Verdadeira, pois existem elementos que pertencem a *H* e não pertencem a *F*.

f) Verdadeira, pois todos os elementos de *H* pertencem a *E*.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Escreva no caderno os conjuntos descritos abaixo:

a) O conjunto A representado pelos números naturais múltiplos de 3 menores que 20. $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

b) O conjunto B representado pelos números naturais primos menores que 27. $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

c) O conjunto C representado pelos números naturais menores que 50 e múltiplos de 7. $C = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

2. Dado o conjunto $B = \{1, \{1\}, 2, \{2\}\}$, responda se as proposições abaixo são verdadeiras ou falsas:

a) $1 \in B$ Verdadeira.

b) $\{1\} \in B$ Verdadeira.

c) $\{\{2\}\} \notin B$ Verdadeira.

d) $2 \in B$ Verdadeira.

e) $\{\{1\}\} \notin B$ Verdadeira.

f) $1 \notin B$ Falsa.

3. Observe o conjunto $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Represente os subconjuntos de A formados:

a) pelos números maiores que 5 e menores que 10; $\{6, 7, 8, 9\}$

b) pelos números pares; $\{4, 6, 8, 10\}$

c) pelos números ímpares maiores ou iguais a 7. $\{7, 9, 11\}$

4. Dado o conjunto $E = \{2, 4, 6, 8\}$, escreva no caderno todos os subconjuntos de E formados por:

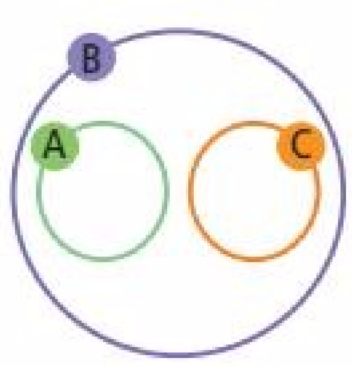
a) 3 elementos; $\{2, 4, 6\}$; $\{2, 4, 8\}$; $\{2, 6, 8\}$; $\{4, 6, 8\}$

b) 4 elementos. $\{2, 4, 6, 8\}$

5. Sejam a e b números naturais, determine o valor de $a + b$, tal que $\{0, 1, 2\} = \{2, a, b\}$. 1

6. Uma pessoa tem quatro opções de música para escutar: A, B, C e D. Se ela quiser ouvir apenas duas músicas diferentes por dia, quais possibilidades de pares ela tem para escolher?
$\{A, B\}$; $\{A, C\}$; $\{A, D\}$; $\{B, C\}$; $\{B, D\}$; $\{C, D\}$

7. No diagrama abaixo, A, B e C são três conjuntos não vazios.



Editoria de arte

Associe no caderno V ou F a cada uma das seguintes sentenças, conforme ela seja verdadeira ou falsa.

V a) $A \subset B$

V b) $C \subset B$

F c) $B \subset A$

F d) $A \subset C$

V e) $B \not\subset A$

V f) $A \not\subset C$

V g) $B \supset A$

V h) $A \not\supset B$

8. Dados os conjuntos $A = \{1\}$, $B = \{0, 1\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ e $D = \{0, 1, 2, 4\}$, relacione cada par de conjuntos a seguir usando o símbolo $\subset$ ou $\not\subset$.

a) A e B $A \subset B$

b) A e C $A \subset C$

c) A e D $A \subset D$

d) B e C $B \not\subset C$

e) B e D $B \subset D$

f) C e D $C \not\subset D$

9. Sejam A, B e C os conjuntos a seguir:

$A = \{x \mid x$ é número natural par compreendido entre 3 e 15$\}$;

$B = \{x \mid x$ é número natural par menor que 15$\}$;

$C = \{x \mid x$ é número natural par diferente de 2$\}$.

Relacione cada par a seguir usando o símbolo $\subset$ ou $\not\subset$.

a) A e B $A \subset B$

b) A e C $A \subset C$

c) B e C $B \not\subset C$

10. Dado o conjunto $A = \{0, 2, \{3\}\}$, diga se as proposições a seguir são verdadeiras ou falsas.

V a) $0 \in A$

F b) $1 \subset A$

V c) $\{3\} \in A$

V d) $\{3\} \subset A$

F e) $\{1, 2\} \subset A$

V f) $\varnothing \subset A$

F g) $\varnothing \in A$

F h) $3 \in A$

11. Copie no caderno apenas as afirmações verdadeiras.

X a) $\{5\} \subset \{0, 5, 10, 15\}$

X b) $\{a, b, c\} \supset \{b, a, c\}$

c) $2 \subset \{0, 2, 4\}$

X d) $8 \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$

X e) $\{1, 2, 3\} \supset \{1, 2\}$

X f) $\{-1, 6\} \not\subset \{$números naturais$\}$

X g) $3 \in \{0, 3, 6, 9\}$

X h) $\frac{1}{2} \notin \{$números naturais$\}$

12. Sendo P e Q dois conjuntos não vazios, de modo que $P \subset Q$, copie no caderno apenas as afirmações verdadeiras.

a) Sempre existe x, $x \in P$, tal que $x \notin Q$.

b) Sempre existe x, $x \in Q$, tal que $x \notin P$.

c) Se $x \in Q$, então $x \in P$.

X d) Se $x \notin Q$, então $x \notin P$.

e) P e Q não têm elementos em comum.

13. Quantos conjuntos M satisfazem à sentença:

$\{1, 2\} \subset M \subset \{1, 2, 3, 4\}$ 4 conjuntos.

14. Qual deve ser a relação entre os conjuntos A, B e C para que $A \subset B$, $B \subset C$ e $C \subset A$? $A = B = C$

15. (UFF-RJ) Dado o conjunto $P = \{\{0\}, 0, \varnothing, \{\varnothing\}\}$, considere as afirmativas:

(I) $\{0\} \in P$

(II) $\{0\} \subset P$

(III) $\varnothing \in P$

Com relação a estas afirmativas conclui-se que:

X a) Todas são verdadeiras.

b) Apenas a I é verdadeira.

c) Apenas a II é verdadeira.

d) Apenas a III é verdadeira.

e) Todas são falsas.

Operações entre conjuntos

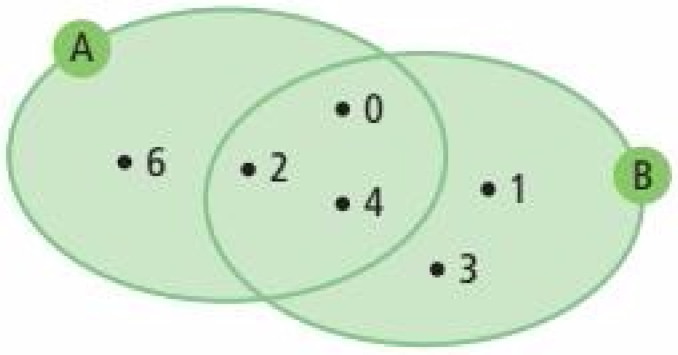
União de conjuntos

A **união** ou **reunião de dois conjuntos** *A* e *B*, que indicamos por $A \cup B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a *A* **ou** a *B*:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, a **união** $A \cup B$ é formada pelos elementos que pertencem a *A* e os elementos que pertencem a *B*, isto é:

$$\underbrace{A \cup B}_{\text{Lê-se: } A \text{ união } B \text{ ou } A \text{ reunião } B.} = \{0, 1, 2, 3, 4, 6\}$$



A parte pintada dos conjuntos indica $A \cup B$.

Ilustrações: Editoria de arte

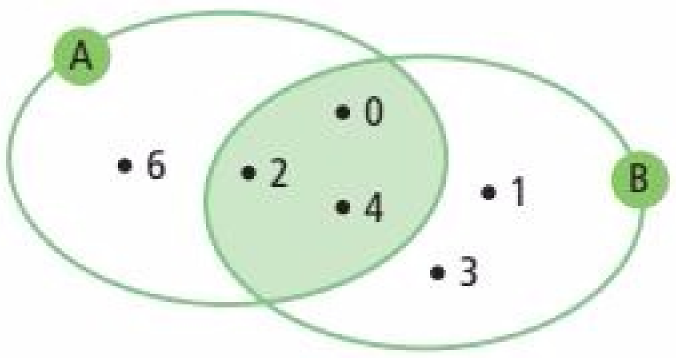
Intersecção de conjuntos

A **intersecção de dois conjuntos** *A* e *B*, que indicamos por $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* **e** também pertencem a *B*:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Por exemplo, dados os conjuntos *A* e *B* do exemplo anterior, a intersecção $A \cap B$ é formada pelos elementos que são comuns ao conjunto *A* e ao conjunto *B*. Veja:

$$\underbrace{A \cap B}_{\text{Lê-se: } A \text{ intersecção } B.} = \{0, 2, 4\}$$



A parte pintada dos conjuntos indica $A \cap B$.

Observação:

Se os conjuntos *A* e *B* não possuem elementos comuns ($A \cap B = \varnothing$), dizemos que *A* e *B* são conjuntos **disjuntos**.

Propriedades da união e da intersecção de conjuntos

Dados três conjuntos, *A*, *B* e *C*, é possível demonstrar que valem as seguintes propriedades:

1ª) Propriedade comutativa

$A \cup B = B \cup A \longrightarrow$ comutativa da união

$A \cap B = B \cap A \longrightarrow$ comutativa da intersecção

2ª) Propriedade associativa

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \longrightarrow$ associativa da união

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \longrightarrow$ associativa da intersecção

3ª) Propriedade distributiva

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \longrightarrow$ distributiva da intersecção em relação à união

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \longrightarrow$ distributiva da união em relação à intersecção

4ª) Propriedade

Se $A \subset B$, então $A \cup B = B$ e $A \cap B = A$.

Da mesma maneira, se $A \cup B = B$ ou $A \cap B = A$, então $A \subset B$.

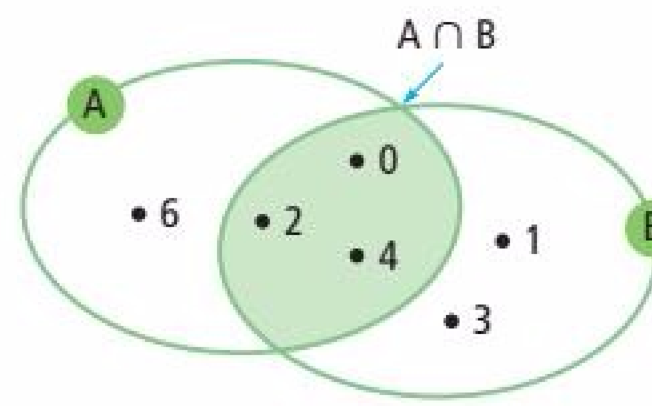
Número de elementos da união de conjuntos

Sendo *A* e *B* dois conjuntos finitos, o número de elementos do conjunto $A \cup B$, que indicamos por $n(A \cup B)$, é dado pela seguinte relação:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Por exemplo, dados $A = \{0, 2, 4, 6\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, ao adicionarmos o número de elementos de *A* ao número de elementos de *B*, o número de elementos de $A \cap B$ é contado duas vezes. É por isso que subtraímos $n(A \cap B)$. Assim:

$$n(A \cup B) = 4 + 5 - 3 \Rightarrow n(A \cup B) = 6$$



Ilustrações: Editoria de arte

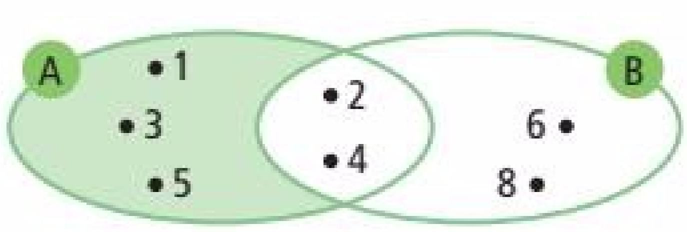
Observação:

Para $A \cap B = \varnothing$, temos: $n(A \cap B) = 0$ e $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Diferença de conjuntos

A **diferença** de dois conjuntos *A* e *B*, que indicamos por $A - B$, nessa ordem, é o conjunto dos elementos que pertencem a *A* e não pertencem a *B*:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



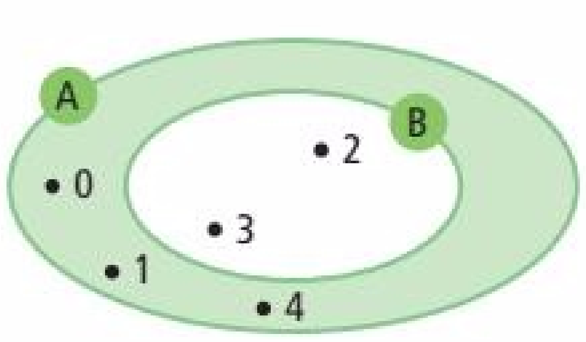
A parte pintada nos conjuntos indica $A - B$.

Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8\}$, a diferença $A - B$ é formada por todos os elementos que pertencem a *A*, mas não pertencem a *B*.

$$\underbrace{A - B}_{\text{Lê-se: } A \text{ menos } B.} = \{1, 3, 5\}$$

Se $B \subset A$, a diferença $A - B$ é denominada **complementar** de *B* em relação a *A* e pode ser indicada por:

$$\complement_A^B = A - B$$



A parte pintada nos conjuntos indica $\complement_A^B$.

Por exemplo, se $B = \{2, 3\}$ e $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, o complementar de *B* em relação a *A* é o que falta para o conjunto *B* ficar igual ao conjunto *A*, ou seja:

$$\complement_A^B = A - B = \{0, 1, 4\}$$

No caso de termos um determinado conjunto universo *U*, do qual *A* é subconjunto, o complementar de *A* em relação a *U* pode ser indicado por:

$$A' = \overline{A} = A^C = \complement_U^A = U - A$$

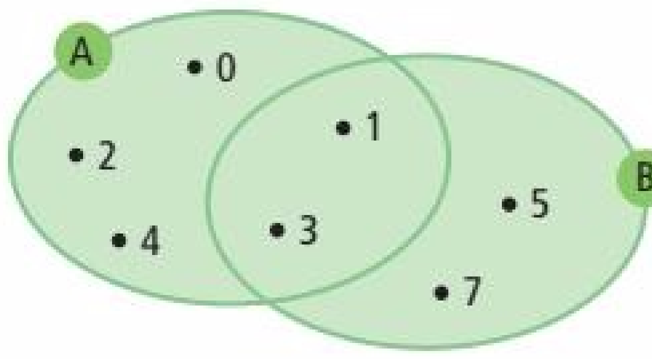
Exercícios resolvidos

5 Dados os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {1, 3, 5, 7}, determine A ∪ B, A ∩ B, A − B e represente cada um desses conjuntos por meio de um diagrama.

Resolução

Juntando todos os elementos que pertencem a *A* ou a *B*, temos:

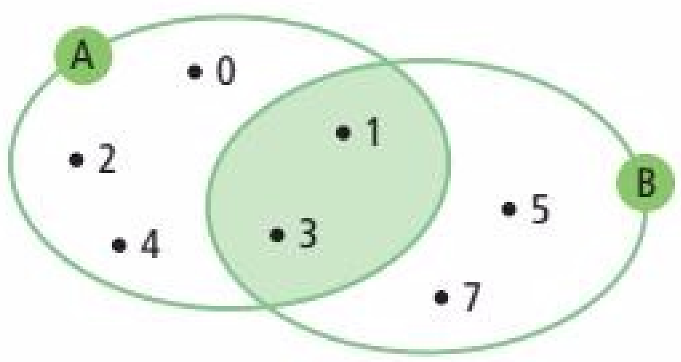
A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}



Ilustrações: Editoria de arte

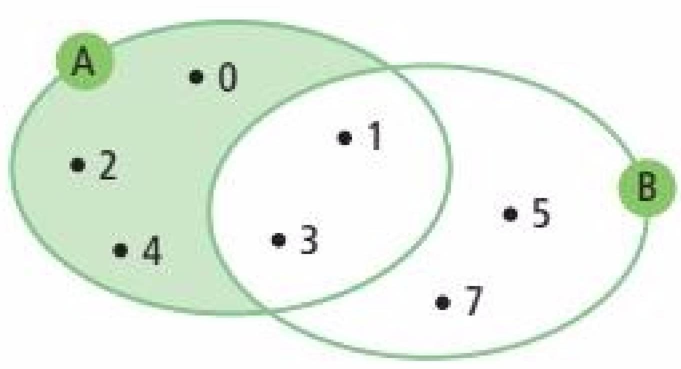
Tomando os elementos comuns a *A* e a *B*, temos:

A ∩ B = {1, 3}



Considerando os elementos que pertencem a *A* e não pertencem a *B*, temos:

A − B = {0, 2, 4}



6 Em uma cidade são consumidos dois produtos, *S* e *P*, sendo *S* um tipo de sabonete e *P* um tipo de perfume. Uma pesquisa de mercado sobre o consumo desses produtos levantou os seguintes dados.

Produto consumido	S	P	S e P	Nenhum dos dois
Número de consumidores	210	180	50	40

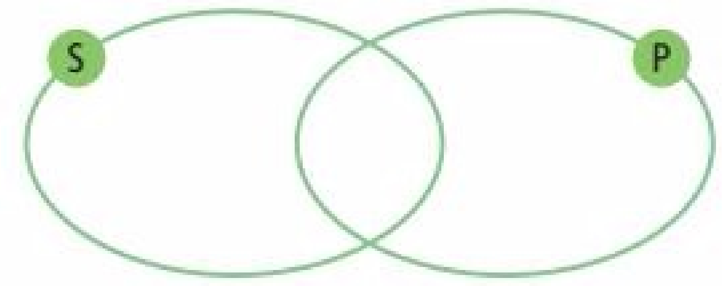
Fonte: Dados fictícios.

Quantas pessoas foram consultadas nessa pesquisa?

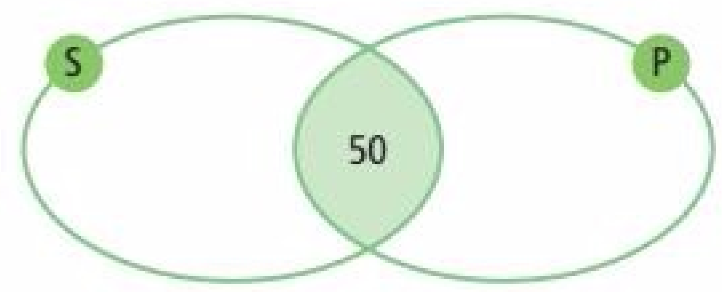
Resolução

Em primeiro lugar, vamos considerar os conjuntos *S* e *P*, que correspondem aos consumidores dos produtos *S* e *P*, respectivamente, e fazer um diagrama.

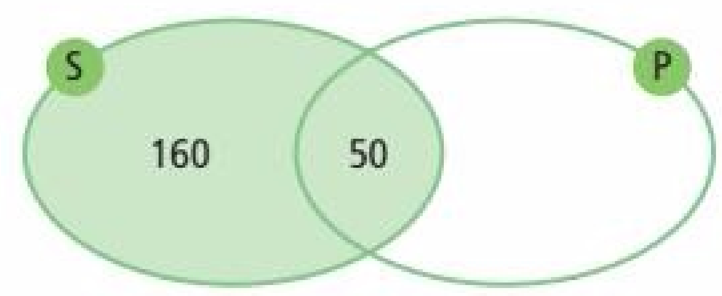
O diagrama deve apresentar intersecção, pois existem pessoas que consomem os dois produtos (*S* e *P*) ao mesmo tempo.



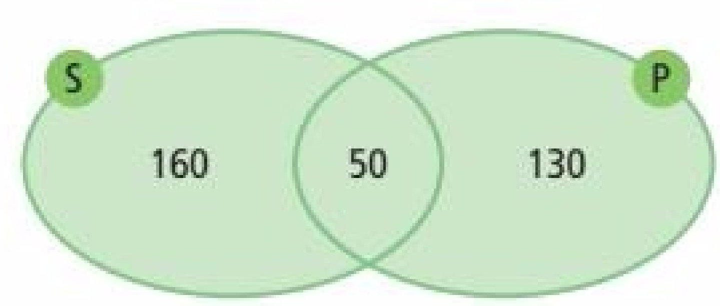
Em seguida, colocamos o valor 50 na intersecção de *S* e *P*, que representa as pessoas que consomem os dois produtos. É importante começar pela intersecção, pois assim não corremos o risco de contar mais de uma vez essas 50 pessoas.



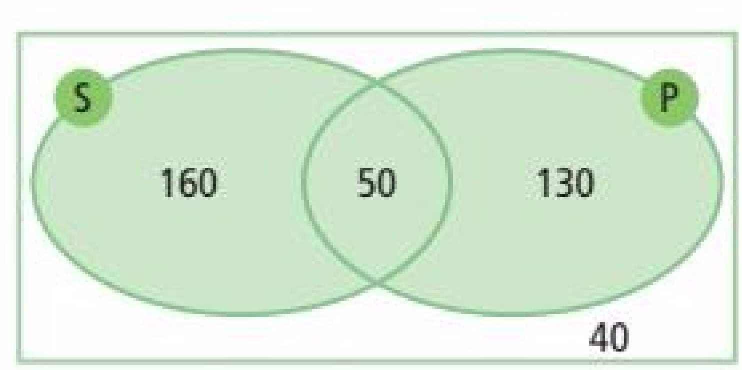
Depois, calculamos o número de pessoas que consomem somente o produto *S*, ou seja, 210 − 50 = 160. Assim, das 210 pessoas que consomem o produto *S*, 50 pessoas, que já estão representadas no diagrama, também consomem o produto *P*. Então, colocamos 160 na parte do diagrama que representa somente *S*.



Em seguida, calculamos o número de pessoas que consomem somente o produto *P*, ou seja, 180 − 50 = 130. Assim, das 180 pessoas que consomem o produto *P*, as 50 pessoas que também consomem o produto *S* já estão representadas no diagrama, então colocamos o valor 130 somente em *P*.



Por último, acrescentamos as 40 pessoas que não consomem nenhum dos produtos.



Para determinar quantas pessoas foram consultadas, adicionamos os números marcados no diagrama:

$$160 + 50 + 130 + 40 = 380$$

Assim, foram consultadas 380 pessoas nessa pesquisa.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

16. Sendo $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 2, 3, 5\}$, $C = \{x \mid x$ é número natural par menor que $10\}$ e $D = \{x \mid x$ é número ímpar compreendido entre 4 e $10\}$, determine: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $A \cup B$
b) $A \cup D$
c) $B \cup C$
d) $C \cup D$
e) $(A \cup B) \cup C$
f) $(B \cup C) \cup D$

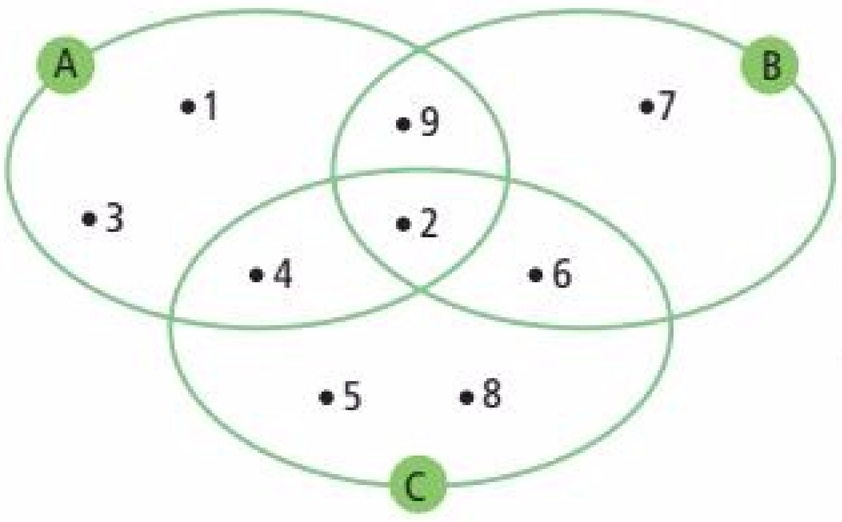
17. Sendo $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2\}$, $C = \{x \mid x$ é número par menor que $10\}$, $D = \{x \mid x$ é número ímpar compreendido entre 0 e $6\}$, determine:

a) $A \cap B$ $\{0, 1, 2\}$
b) $A \cap C$ $\{0, 2, 4\}$
c) $A \cap D$ $\{1, 3\}$
d) $B \cap C$ $\{0, 2\}$
e) $(A \cap B) \cap C$ $\{0, 2\}$
f) $(A \cap C) \cap D$ $\varnothing$

18. Dados $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e $C = \{2, 3, 4, 5\}$, determine:

a) $A - B$ $\{0\}$
b) $A - C$ $\{0, 1\}$
c) $B - C$ $\{1\}$
d) $(A \cap B) - C$ $\{1\}$
e) $(A - C) \cap (B - C)$ $\{1\}$
f) $A - \varnothing$ $\{0, 1, 2, 3\}$

19. Considere o diagrama a seguir.



Ilustrações: Editoria de arte

Determine:

a) $A \cup B$ $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$
b) $A \cup C$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
c) $A \cup B \cup C$ $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
d) $B \cap C$ $\{2, 6\}$
e) $A \cap B \cap C$ $\{2\}$
f) $A - C$ $\{1, 3, 9\}$
g) $(A \cap C) - B$ $\{4\}$

20. Os conjuntos A, B e E são tais que $\complement_A^E = A - E = \{3, 4, 5\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$, $E - B = \{1, 2\}$, $B - A = \{6, 7\}$, $E \cap B = \varnothing$ e $E \subset A$.
Calcule $\complement_A^E$.

21. Enumere os conjuntos:

a) $\{10, 11, 12\} \cap \{7, 8, 9, 10, 11\}$ $\{10, 11\}$
b) $\{-3, -2, -1, 0\} \cap \{0, 1, 2, 3\}$ $\{0\}$
c) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\} \cap \left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$ $\varnothing$

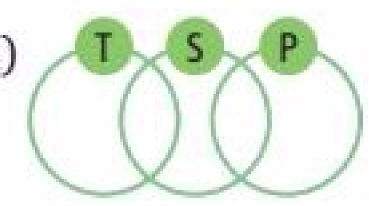
22. Dados $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{0, 2, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ e $E = \{2, 4, 6\}$, determine:

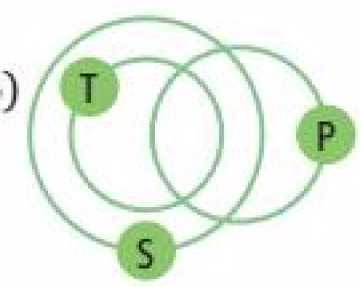
a) $\complement_U^A$ $\complement_U^A = U - A = \{1, 3, 4, 6, 7\}$
b) $\complement_U^B$ $\complement_U^B = U - B = \{0, 2, 4, 6\}$
c) $\complement_U^E$ $\complement_U^E = U - E = \{0, 1, 3, 5, 7\}$

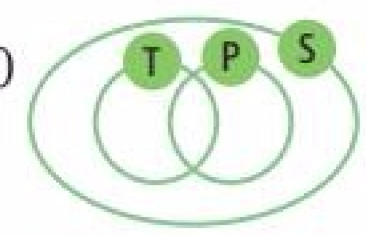
23. Representa-se por M(a) o conjunto dos múltiplos de a e por D(a) o conjunto dos divisores de a. Enumere os conjuntos a seguir:

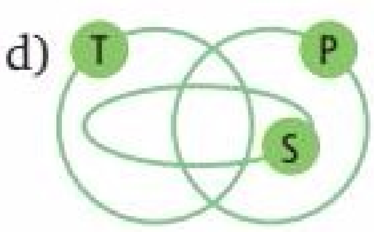
a) $M(3) \cap D(30)$ $\{3, 6, 15, 30\}$
b) $M(2) \cap M(4)$ $\{0, 4, 8, ...\}$
c) $D(100) \cap D(50)$ $\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$
d) $M(7) \cap M(5)$ $\{0, 35, 70, ...\}$

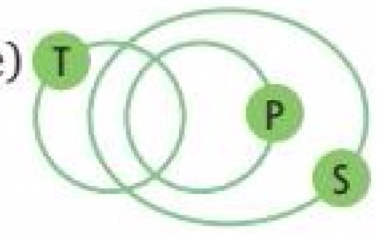
24. (UFF-RJ) Os conjuntos S, T e P são tais que todo elemento de S é elemento de T ou P. O diagrama que pode representar esses conjuntos é:

a)


b)


c)


x d)


e)


25. Em uma pesquisa, verificou-se que, das pessoas consultadas, 100 liam o jornal A, 150 liam o jornal B, 20 liam os dois jornais (A e B) e 110 não liam jornal.

Quantas pessoas foram consultadas? 340

26. Em uma escola, há 630 alunos, dos quais 350 estudam Português, 210 estudam Espanhol e 90 estudam as duas disciplinas (Português e Espanhol). Pergunta-se:

a) Quantos alunos estudam apenas Português? 260
b) Quantos alunos estudam apenas Espanhol? 120
c) Quantos alunos estudam Português ou Espanhol? 470
d) Quantos alunos não estudam nenhuma das duas matérias? 160

27. Em um grupo de 99 esportistas, 40 jogam vôlei, 20 jogam vôlei e xadrez, 22 jogam xadrez e tênis, 18 jogam vôlei e tênis, 11 jogam as três modalidades.

O número de pessoas que jogam xadrez é igual ao número de pessoas que jogam tênis. Quantos jogam:

a) tênis e não jogam vôlei? 36
b) xadrez ou tênis e não jogam vôlei? 59
c) vôlei e não jogam xadrez? 20

28. Atualmente, o Brasil é uma república democrática, em que o voto constitui um dos principais símbolos do exercício da cidadania. Exercer esse direito e dever com responsabilidade é importante para a constituição de um país melhor a todos os brasileiros. Leia o texto a seguir a respeito do voto e faça o que se pede em cada item.

Voto Consciente: um forte instrumento de mudança política e social

[...] [A] República Federativa do Brasil constitui-se em Estado democrático de direito no qual "todo poder emana do povo, que o exerce por meio de representantes eleitos ou diretamente" (art. 1º, parágrafo único, da Constituição Federal de 1988).

Assim, o sentido da democracia está na possibilidade de o cidadão exercer a soberania popular, que se concretiza pelo sufrágio universal e pelo voto direto e secreto na escolha dos governantes. Daí, o eleitor tem em suas mãos um importante instrumento de mudança política e social: o voto.

O Brasil é um país reconhecido pela sua ampla representatividade democrática. No entanto, nem sempre foi assim. Houve momentos em nossa história de grandes restrições ao direito de participação popular no processo de escolha dos governantes: as mulheres não tinham direito de votar; o voto era definido pela renda (voto censitário — direito apenas dos ricos) e, ainda, controlado por coronéis (voto de cabresto).

Desse modo, no atual contexto político e social do Brasil, os dias destinados à realização das eleições representam um dos raros momentos em que todos se igualam, pois não há diferença de raça, sexo, condição financeira, classe ou grupo social, já que existe igualdade de valor no voto dado por cada cidadão. [...] Conhecer o funcionamento do processo eleitoral brasileiro, entender o sistema por meio do qual os candidatos são eleitos, perceber o que é legítimo e aquilo que ofende a moralidade da disputa eleitoral contribui para a conscientização do eleitor na escolha de seus representantes. [...] O eleitor deve estar atento à atuação de cada candidato. Aqueles que possam tentar comprar votos ou oferecer alguma vantagem em troca de apoio político certamente continuarão a promover a corrupção se forem eleitos.

Precisamos entender, contudo, que nem todo político é igual ou corrupto. Existem candidatos interessados em promover uma mudança social e política, por isso devemos buscar conhecer as propostas do candidato e do seu partido, assim como o seu passado. [...] Diante das considerações apresentadas, conclui-se que o cidadão, no pleno exercício da democracia, tem um forte papel no destino do seu país, cujo instrumento é o voto consciente. Logo, o eleitor que exercer o seu direito ao voto — a partir de uma decisão madura, refletida e consciente — contribuirá para impedir a eleição de maus políticos e possibilitará o alcance de uma maior legitimidade no processo eleitoral.

Fonte: DIAS, Renata Livia Arruda de Bessa. Voto Consciente: um forte instrumento de mudança política e social. **Revista Eletrônica da EJE**, Brasília, n. 5, ano II, ago./set. 2012. Disponível em: < http://www.tse.jus.br/institucional/escola-judiciaria-eleitoral/revistas-da-eje/artigos/revista-eletronica-ano-ii-no-5/voto-consciente-um-forte-instrumento-de-mudanca-politica-e-social>. Acesso em: 24 jan. 2016.

Constituição Federal de 1988

Constitui a lei suprema do Brasil, promulgada em 5 de outubro de 1988, atribuindo efetividade aos direitos fundamentais de todo cidadão brasileiro.

Sufrágio, voto e escrutínio

Sufrágio é o direito de votar e de ser votado; **voto** é a forma de exercer o direito ao sufrágio; e **escrutínio** é a forma como se pratica o voto, seu procedimento.

Fonte: DELITTI, Luana Souza. Qual a diferença entre sufrágio, voto e escrutínio? **Jusbrasil**. Disponível em: <http://lfg.jusbrasil.com.br/noticias/2157529/qual-a-diferenca-entre-sufragio-voto-e-escrutinio-luana-souza-delitti>. Acesso em: 24 jan. 2016.

Luciana Whitaker/Pulsar

De acordo com a Constituição Federal, o voto é obrigatório para os cidadãos brasileiros alfabetizados, maiores de 18 e menores de 70 anos, e facultativo para quem tem 16 e 17 anos, para os maiores de 70 anos e para as pessoas analfabetas.

a) Após a leitura do texto e utilizando seus conhecimentos pessoais, responda: que ações devem ser tomadas pelo eleitor antes do momento do voto para que a escolha dos candidatos seja consciente? Converse com os colegas a respeito.

b) Pesquise quais são as condições para que ocorra segundo turno nas eleições. Quais são as regras para a decisão em segundo turno? Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

c) Agora que você já sabe o significado de 2º turno, suponha que uma pesquisa de intenção de votos, realizada uma semana antes do 2º turno de uma eleição para presidente, tenha indicado os seguintes resultados:

- 67% votariam no candidato A;
- 56% votariam no candidato B;
- 4% votariam branco ou nulo.

A pesquisa revela qual porcentagem de eleitores ainda está indecisa, podendo votar em A ou em B? Suponha que esses eleitores indecisos não votariam em branco ou nulo e indique qual é essa porcentagem.

CAPÍTULO 2

Conjuntos numéricos

Ábaco e calculadora: instrumentos de cálculo.

O surgimento dos números deu-se pela necessidade do ser humano em contar. Com o passar do tempo, novas necessidades exigiram a ampliação da ideia de número e assim surgiram as diferentes concepções de número em Matemática. Esses números foram organizados em **conjuntos numéricos**.

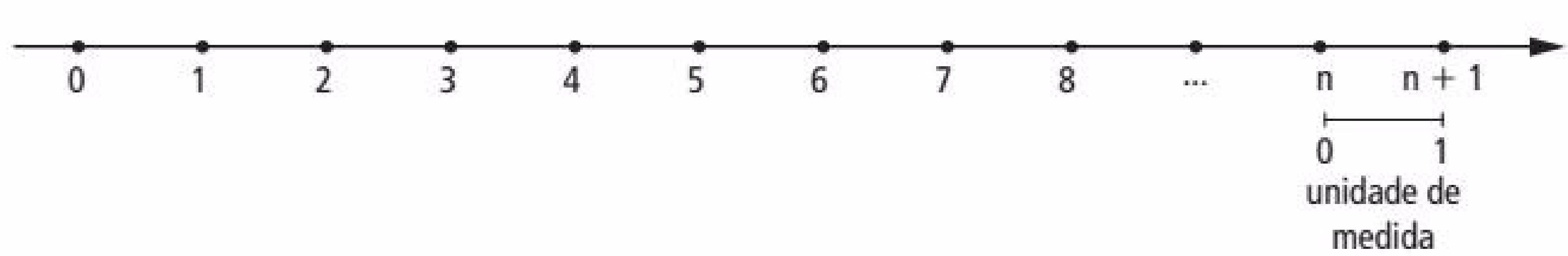
Neste capítulo estudaremos os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, com algumas propriedades e aplicações.

Conjunto dos números naturais

Começando por zero e acrescentando sempre uma unidade, obtemos os elementos do **conjunto dos números naturais**, o qual é indicado pela letra $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$$

O conjunto dos números naturais é infinito e podemos representá-lo em uma reta orientada sobre a qual marcamos pontos equidistantes e, a cada ponto marcado, fazemos corresponder, ordenadamente, um número natural, como mostra a figura a seguir.



Editoria de arte

Apresentamos a seguir algumas considerações a respeito dos números naturais.

- Todo número natural *n* tem seu **sucessor** $n + 1$, que é o número natural que vem imediatamente depois dele.
  Por exemplo, o sucessor de 5 é 6.
- O número natural que vem imediatamente antes de um número natural diferente de zero é denominado **antecessor**.
  Por exemplo, o antecessor de 9 é 8 e o antecessor de 1000 é 999.
- Dois ou mais números naturais que se seguem são denominados **consecutivos**.
  Por exemplo, 4 e 5 são consecutivos e 18, 19 e 20 também são consecutivos.
- O subconjunto de $\mathbb{N}$ formado por todos os números naturais diferentes de zero é denotado assim:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} = \mathbb{N} - \{0\}$$

O **asterisco** (*) colocado junto ao símbolo que representa um conjunto numérico significa que o número zero não pertence ao conjunto.

No conjunto $\mathbb{N}$, são definidas as operações de adição e multiplicação. Quaisquer que sejam dois números naturais, essas operações sempre resultam em um número natural. Porém, a subtração entre dois números naturais nem sempre resulta em um número natural. Por exemplo, $5 - 7 = -2 \notin \mathbb{N}$.

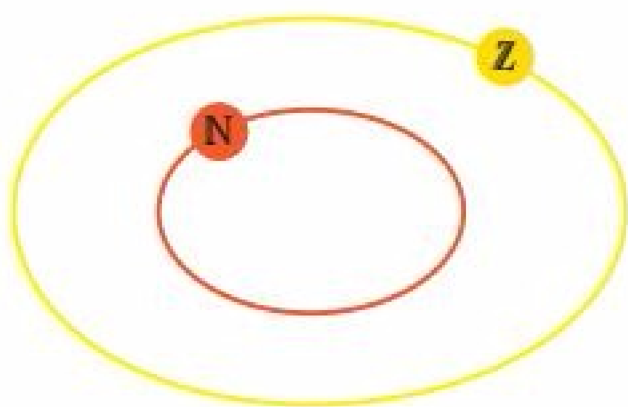
Conjunto dos números inteiros

Com base em cada número natural diferente de zero e utilizando os símbolos + e − obtemos, respectivamente, um número positivo e um número negativo. Por exemplo, para o número natural 1, obtemos +1 (positivo) e −1 (negativo). Os números positivos +1, +2, +3, ... são identificados como os números naturais 1, 2, 3, ..., respectivamente.

O conjunto formado por esses números e pelo zero é denominado **conjunto dos números inteiros** e representado pela letra $\mathbb{Z}$.

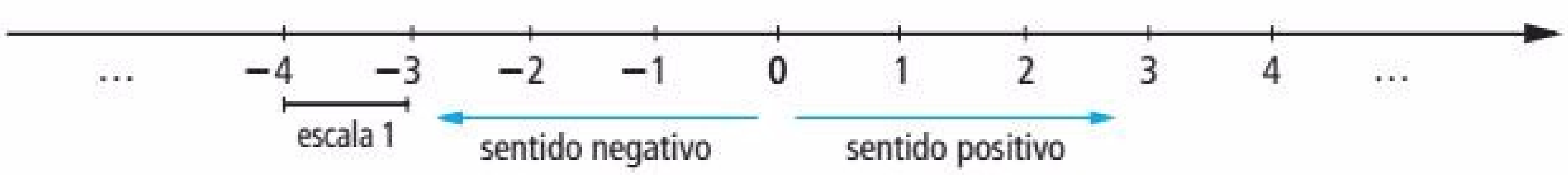
$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Todos os números naturais também são números inteiros, ou seja, o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos números inteiros como mostra o diagrama ao lado. Além disso, podemos escrever $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.



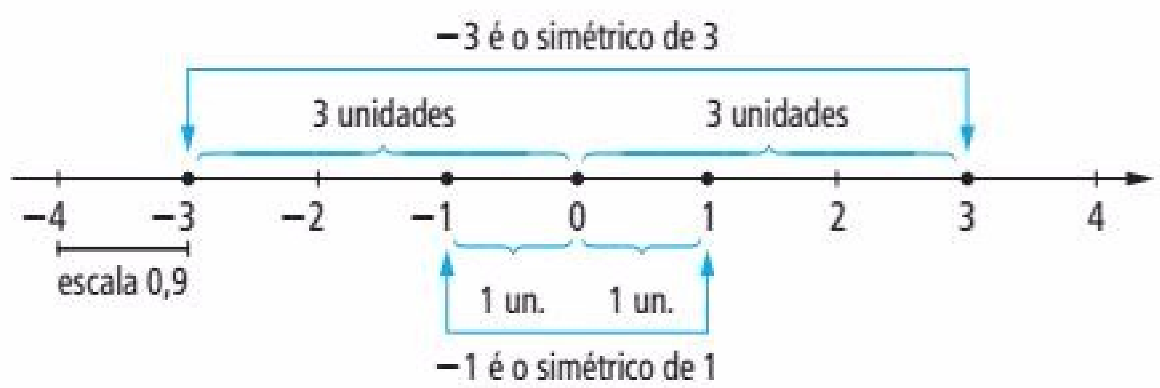
Ilustrações: Editoria de arte

Na reta orientada, o conjunto $\mathbb{Z}$ pode ser representado na forma:



Apresentamos a seguir algumas considerações sobre os números inteiros:

- Todo número inteiro tem um antecessor e um sucessor. Por exemplo: o antecessor de −10 é −11 e o sucessor de −1 é 0.
- Dois números inteiros são **opostos** ou **simétricos** quando a soma entre eles é igual a zero. Por exemplo: o oposto de 1 é −1 e o oposto de −3 é 3. O oposto de zero é o próprio zero.
  Na reta orientada, identificamos dois números opostos quando eles são simétricos em relação ao zero, ou seja, estão a uma mesma distância da origem. Observe:



Junior Lago/UOL/Folhapress

Termômetro de rua marca temperatura negativa em São Joaquim (SC), fotografia de 2014.

Destacamos, agora, importantes subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

- números inteiros não nulos:
  $\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{Z} - \{0\}$
- números inteiros não negativos: $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- números inteiros não positivos: $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, -3, -4, ...\}$
- números inteiros positivos: $\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
- números inteiros negativos: $\mathbb{Z}_-^* = \{-1, -2, -3, -4, ...\}$

Exercícios resolvidos

1 Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant x < 3\}$, faça o que se pede em cada item.

a) Enumere os elementos dos conjuntos *A* e *B*.

b) Determine $A \cup B$.

c) Determine $A \cap B$.

Resolução

a) No conjunto *A* a notação $x \leqslant 5$ significa que *x* situa-se entre 0 e 5, incluindo os dois extremos, sendo $x \in \mathbb{N}$. Logo, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

No conjunto *B*, a notação $-2 \leqslant x < 3$ significa que $x \geqslant -2$ e, também, $x < 3$, sendo $x \in \mathbb{Z}$, ou seja, *x* situa-se entre –3 e 3. Assim, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

b) A união entre os conjuntos *A* e *B* é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a *A* ou a *B*. Logo:

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

c) A intersecção entre os conjuntos *A* e *B* é o conjunto formado pelos elementos que pertencem a *A* e também pertencem a *B*.

Portanto: $A \cap B = \{0, 1, 2\}$.

2 (PUC-SP) Considerando:

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}, A = \left\{x \in N^* \mid \frac{24}{x} = n, n \in N\right\}$

e $B = \{x \in N \mid 3x + 4 < 2x + 9\}$.

Podemos afirmar que:

a) $A \cup B$ tem 8 elementos.

b) $A \cap B$ tem 4 elementos.

c) $A \cup B = A$

d) $A \cap B = A$

e) n.r.a.

Resolução

Primeiro vamos enumerar os conjuntos *A* e *B*.

Pela condição $\frac{24}{x} = n$, com $x \in \mathbb{N}^*$ e $n \in \mathbb{N}$, o conjunto *A* será formado pelos divisores naturais de 24. Assim, podemos escrever o conjunto *A* na forma: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.

Pela propriedade do conjunto *B*, $3x + 4 < 2x + 9$, com $x \in \mathbb{N}$, temos:

$3x + 4 < 2x + 9$

$3x - 2x < 9 - 4$

$x < 5$

Logo, o conjunto *B* será formado pelos números naturais menores que 5 e pode ser escrito na forma: $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Analisando cada item, temos:

a) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \rightarrow 9$ elementos (falsa)

b) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow 4$ elementos (verdadeira)

c) $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \neq A$ (falsa)

d) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \neq A$ (falsa)

e) n.r.a. (falsa)

Portanto, **b** é a alternativa correta.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Escreva no caderno os seguintes conjuntos, listando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}$ $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $B = \{y \in \mathbb{N} \mid 2 < y \leqslant 5\}$ $B = \{3, 4, 5\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{Z}^* \mid -3 < z < 4\}$ $C = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$

d) $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leqslant -2\}$ $D = \{..., -5, -4, -3, -2\}$

2. Escreva no caderno cada um dos conjuntos de números a seguir, definindo-os por uma propriedade de seus elementos. Respostas possíveis:

a) $M = \{6, 7, 8\}$ $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leqslant x \leqslant 8\}$

b) $S = \{4, 5, 6, 7, ...\}$ $S = \{y \in \mathbb{N} \mid y > 3\}$

c) $T = \{..., -5, -4, -3, -2, -1\}$ $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leqslant -1\}$

d) $V = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $V = \{y \in \mathbb{Z} \mid -2 \leqslant y \leqslant 3\}$

3. Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é par e } x < 9\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ é ímpar e } x < 9\}$. Utilize os símbolos $\in$ ou $\notin$ para relacionar no caderno cada par a seguir:

a) 4 e A $\in$

b) 5 e A $\notin$

c) 8 e A $\in$

d) 2 e B $\notin$

e) 1 e B $\in$

f) 7 e A $\notin$

4. Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leqslant x < 4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 5\}$, determine:

a) $A \cup B \cup C$ $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $A \cap B \cap C$ $\{0, 1, 2, 3\}$

5. Sendo $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, escreva no caderno os seguintes conjuntos, listando seus elementos:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ $A = \{0, 2, 4, ...\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x = k^2, k \in \mathbb{N}\}$ $B = \{0, 1, 4, 9, ...\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + x - 42 = 0\}$ $C = \{6\}$

6. Dois conjuntos são iguais quando têm os mesmos elementos. Verifique se os conjuntos a seguir são iguais:

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leqslant x < 4\}$ $A = \{2, 3\}$ e $B = \{2, 3\}$; portanto, são iguais.

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$

7. Sendo *A* o conjunto dos divisores naturais de 18 e *B* o conjunto dos divisores naturais de 30, escreva no caderno:

a) o conjunto *A*; $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

b) o conjunto *B*; $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

c) o conjunto *C* dos divisores comuns de 18 e 30. $C = \{1, 2, 3, 6\}$

8. (UFAL) No universo $\mathbb{N}$, sejam *A* o conjunto dos números pares, *B* o conjunto dos números múltiplos de 3 e *C* o conjunto dos números múltiplos de 5. Determine os 10 menores números que pertencem ao conjunto $B - (A \cup C)$. $\{3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57, 63, 69\}$

9. (Unicamp-SP) Ache dois números inteiros positivos e consecutivos sabendo que a soma de seus quadrados é 481. 15 e 16

Conjunto dos números racionais

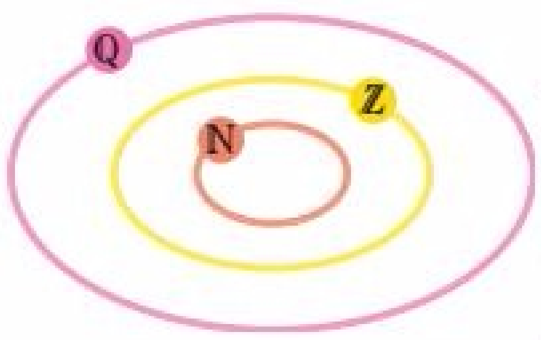
No conjunto dos números inteiros, a divisão 1 : 3 não tem solução. Assim, da divisão não exata de números inteiros surgiu a necessidade de ampliar o conjunto $\mathbb{Z}$, criando-se os números racionais, que são agrupados no **conjunto dos números racionais**.

O conjunto dos números racionais, que indicamos por $\mathbb{Q}$, é o conjunto formado pelos números que podem ser expressos na forma $\frac{a}{b}$, sendo *a* e *b* inteiros e $b \neq 0$:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b}, \text{com } a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Exemplos: $7 = \frac{7}{1}$ $\quad 0{,}6 = \frac{3}{5}$ $\quad -0{,}13 = -\frac{13}{100}$

Podemos escrever os números inteiros como frações com denominador 1. Assim, todo número inteiro também é um número racional, ou seja, o conjunto $\mathbb{Z}$ é um subconjunto do conjunto $\mathbb{Q}$, como mostra o diagrama abaixo. Podemos escrever $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.



Ilustrações: Editoria de arte

Para representar uma fração na forma decimal, dividimos o numerador pelo denominador.

Exemplos: $\frac{1}{4} = 0{,}25$ $\quad \frac{14}{5} = 2{,}8$ $\quad \frac{13}{6} = 2{,}1666...$

Ao realizar essa divisão, temos duas possibilidades:

- O resultado é um número decimal com uma quantidade finita de algarismos, ou seja, um número finito de casas decimais. Nesse caso, a representação decimal dessa divisão é um **número decimal exato**.

  Exemplos: $\frac{12}{4} = 3$ $\quad \frac{9}{2} = 4{,}5$ $\quad \frac{3}{4} = 0{,}75$ $\quad -\frac{3}{8} = -0{,}375$

- O resultado é um número decimal com uma quantidade infinita de algarismos (número infinito de casas decimais), alguns deles se repetindo periodicamente. Nesse caso, a representação decimal dessa divisão é um número decimal infinito e periódico ou uma **dízima periódica**, e o grupo de algarismos que se repetem indefinidamente é chamado de **período** da dízima.

  $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$ (o período é 3) $\quad \frac{13}{6} = 2{,}1666... = 2{,}1\overline{6}$ (o período é 6) $\quad \frac{40}{99} = 0{,}4040... = 0{,}\overline{40}$ (o período é 40)

A fração cuja divisão resulta em uma dízima periódica é chamada de **fração geratriz** da dízima. Acompanhe a seguir como obter a fração geratriz da dízima 2,3131... .

$$x = 2{,}3131... \quad \text{I}$$

$$100x = 231{,}3131... \quad \text{II} \rightarrow$$ como o período tem 2 algarismos, multiplicamos por 10^2 ambos os lados da igualdade

$$100x - x = 231{,}3131... - 2{,}3131... \rightarrow$$ fazemos II − I, subtraindo membro a membro as duas igualdades

$$99x = 229 \Rightarrow x = \frac{229}{99}$$

Logo, $\frac{229}{99}$ é a fração geratriz da dízima periódica 2,3131....

Assim, podemos dizer que o conjunto dos números racionais é formado pelos decimais exatos e pelas dízimas periódicas.

Apresentamos a seguir algumas considerações a respeito dos números racionais.

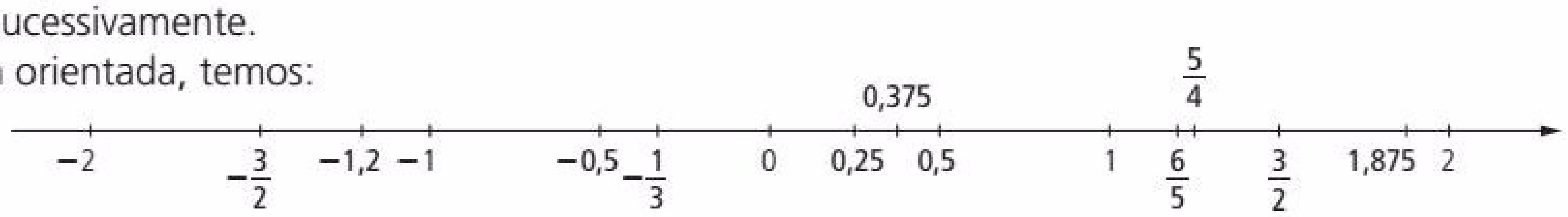
- Todo número racional também possui um **oposto** ou **simétrico**.

  Por exemplo, o oposto de 0,5 é $-0{,}5$ e o oposto de $-\frac{3}{2}$ é $\frac{3}{2}$.

- Entre dois números racionais distintos sempre existe outro número racional. Daí a impossibilidade de escrever um a um todos os números racionais situados entre dois números quaisquer.

  Por exemplo, entre 0 e 0,5 existe o número racional 0,25; entre 0,25 e 0,5 existe o número racional 0,375 e assim sucessivamente.

  Na reta orientada, temos:



- Todo número racional não nulo admite **inverso**.

  Por exemplo, o inverso de $\frac{4}{5}$ é $\frac{5}{4}$; o inverso de 3 é $\frac{1}{3}$; o inverso de -7 é $-\frac{1}{7}$.
- O produto entre um número racional não nulo e seu inverso é sempre igual a 1.

  Por exemplo: $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$; $\frac{7}{3} \cdot \frac{3}{7} = 1$; $0{,}75 \cdot \frac{4}{3} = 1$.

  Destacamos, agora, importantes subconjuntos de $\mathbb{Q}$:
- números racionais não nulos: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$
- números racionais não negativos: $\mathbb{Q}_+$
- números racionais não positivos: $\mathbb{Q}_-$
- números racionais positivos: $\mathbb{Q}_+^*$
- números racionais negativos: $\mathbb{Q}_-^*$

Exercício resolvido

3 Escreva em ordem crescente os números racionais: $-\frac{2}{3}$; $\frac{17}{8}$; 1,333...; $-\frac{9}{4}$; $\frac{7}{2}$ e $\frac{43}{20}$.

Resolução

Primeiro vamos determinar a forma decimal das frações:

$-\frac{2}{3} = -0{,}666...$ $\quad \frac{17}{8} = 2{,}125$ $\quad -\frac{9}{4} = -2{,}25$ $\quad \frac{7}{2} = 3{,}5$ $\quad \frac{43}{20} = 2{,}15$

Agora, observando os números decimais, escrevemos esses números racionais em ordem crescente:

$-\frac{9}{4} < -\frac{2}{3} < 1{,}333... < \frac{17}{8} < \frac{43}{20} < \frac{7}{2}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

10. Usando os símbolos $\in$ ou $\notin$, relacione, no caderno:

a) -7 e $\mathbb{N}$ $\notin$

b) 4 e $\mathbb{Z}$ $\in$

c) $\frac{1}{2}$ e $\mathbb{Z}$ $\notin$

d) $\sqrt{10}$ e $\mathbb{Q}$ $\notin$

e) 0,166... e $\mathbb{Q}$ $\in$

f) $\sqrt[3]{8}$ e $\mathbb{N}$ $\in$

11. Determine a fração geratriz dos números a seguir.

a) 0,323232... $\frac{32}{99}$

b) 1,2222... $\frac{11}{9}$

c) 2,715715715... $\frac{2713}{999}$

d) 0,88888... $\frac{8}{9}$

12. Determine os seguintes conjuntos, enumerando seus elementos:

a) $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid -2x^2 - 9x + 5 = 0\}$ $M = \left\{-5, \frac{1}{2}\right\}$

b) $N = \left\{a \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{a} + a = 2\right\}$ $N = \{1\}$

c) $P = \{y \in \mathbb{Z} \mid (y-1)(y+2)(y-3) = 0\}$ $P = \{-2, 1, 3\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 - 25 = 0\}$ $S = \{5\}$

13. (Epcar-MG) Considere três números naturais *a*, *b* e *c*, nessa ordem. A soma desses números é 888, a diferença entre o primeiro e o segundo é igual ao terceiro. O terceiro deles excede o segundo em 198.

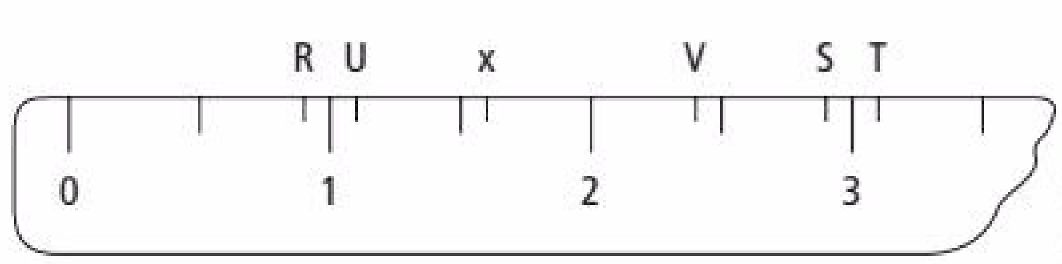
O valor da diferença entre o primeiro e o terceiro é tal que excede 90 em:

a) 23 X b) 33 c) 43 d) 53

14. (Cesgranrio-RJ) Em Floresta, no interior de Pernambuco, um tonel de 200 litros de água custa R$ 4,00. Na região central do Brasil, a água que abastece residências custa $\frac{1}{4}$ desse valor. Qual é, em reais, o preço de 100 litros da água que abastece residências na região central do Brasil?

X a) 0,50 b) 1,00 c) 1,50 d) 2,00

15. (OBMEP) A figura representa parte de uma régua graduada de meio em meio centímetro, onde estão marcados alguns pontos. Qual deles melhor representa o número $2x - 2$?



Editoria de arte

a) *R*

b) *S*

c) *T*

X d) *U*

e) *V*

16. (Fuvest-SP) Os números *x* e *y* são tais que $5 \leqslant x \leqslant 10$ e $20 \leqslant y \leqslant 30$. O maior valor possível de $\frac{x}{y}$ é:

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

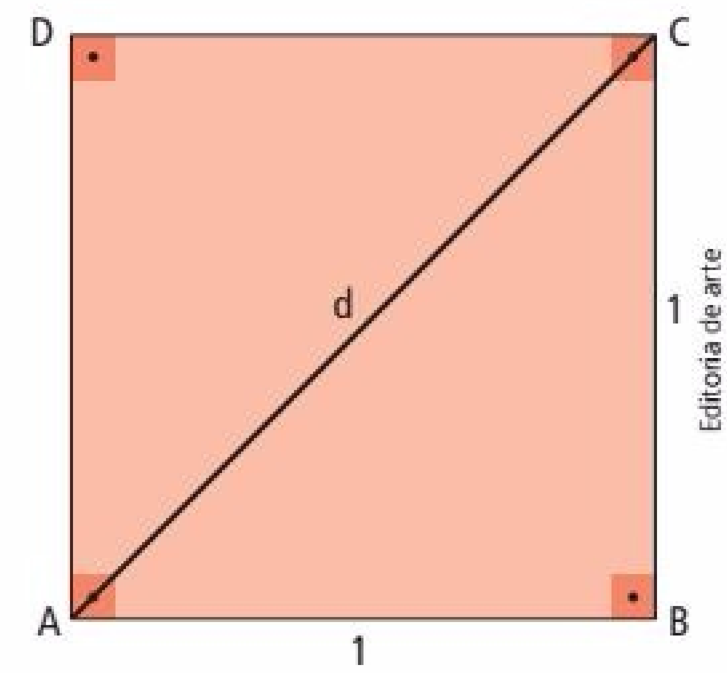
X d) $\frac{1}{2}$

e) 1

Conjunto dos números irracionais

Durante algum tempo acreditou-se que os números racionais dariam conta de resolver todos os problemas referentes às medições. No entanto, já na época de Pitágoras e seus discípulos, cerca de VI a. C., alguns problemas desafiavam essa teoria, como o apresentado a seguir.

Queremos calcular a medida da diagonal *d* do quadrado ABCD cujo lado mede 1 unidade de comprimento.



Usando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2$$

Para determinar o valor de *d*, devemos responder à seguinte questão: qual é o número cujo quadrado é igual a 2?

Inicialmente, vamos calcular:

$$1^2 = 1 \qquad 2^2 = 4$$

Logo, *d* está entre 1 e 2 ($1 < d < 2$).

Em seguida, vamos determinar a primeira casa decimal de *d*.

$(1,1)^2 = 1,21$ $\quad$ $(1,3)^2 = 1,69$ $\quad$ $(1,5)^2 = 2,25$

$(1,2)^2 = 1,44$ $\quad$ $(1,4)^2 = 1,96$

Logo, *d* está entre 1,4 e 1,5, ou seja, $1,4 < d < 1,5$.

Então, 1,4 é o valor aproximado de *d*, por falta, com uma casa decimal.

Usando o mesmo procedimento, determinamos a segunda casa decimal de *d*.

$$(1,41)^2 = 1,9881 \qquad (1,42)^2 = 2,0164$$

Logo, *d* está entre 1,41 e 1,42, ou seja, $1,41 < d < 1,42$.

Aqui, 1,41 é o valor aproximado de *d*, por falta, com duas casas decimais.

Mediante outras tentativas, percebemos que a medida *d* da diagonal está entre 1,414 e 1,415, ou seja, $1,414 < d < 1,415$.

Observe:

$$(1,414)^2 = 1,999396 \qquad (1,415)^2 = 2,002225$$

Nesse caso, 1,414 é o valor aproximado de *d*, por falta, com três casas decimais.

Se continuarmos repetindo esse processo, vamos obter quantas casas decimais quisermos, mas encontraremos sempre um valor aproximado para *d*, por falta, pois esse valor, elevado ao quadrado, é sempre um número menor que 2.

Representamos o valor exato para a medida da diagonal do quadrado de lado 1 por $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = 1,414213562...$$

Esse número tem uma infinidade de casas decimais que não apresentam padrão de repetição. Logo, não é uma dízima periódica e, por isso, não pode ser escrito na forma de fração de inteiros (com denominador não nulo). Portanto, $\sqrt{2}$ não é um número racional, é um número irracional, que faz parte do **conjunto dos números irracionais**.

O conjunto dos números irracionais, que indicamos por $\mathbb{I}$, é o conjunto formado pelos números que têm uma representação decimal infinita e não periódica.

Para realizar cálculos, usualmente aproximamos os números irracionais para sua representação decimal com duas casas decimais. Por exemplo:

$$\sqrt{2} \simeq 1,41$$

Este símbolo significa "aproximadamente igual a".

O número representado pela letra grega π (pi) é um dos números irracionais mais conhecidos no meio matemático. O número π é a constante obtida da razão entre o comprimento de uma circunferência e a medida de seu diâmetro. Por ser um número irracional, a representação decimal de π é infinita e não periódica: $\pi = 3{,}141592653\ldots$.

Essa relação constante entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro já era conhecida por muitas civilizações antigas, como a babilônica e a egípcia, que sabiam que essa razão era maior que 3. Por exemplo, essa constante aparece com o valor 3,16 (na notação atual) no papiro de Ahmes (cerca de 1600 a.C.), e com o valor 3,14 no papiro de Moscou (cerca de 1850 a.C.).

No entanto, a designação dessa constante pela letra grega π apareceu apenas em 1706, quando o matemático inglês William Jones (1675-1749) usou esse símbolo pela primeira vez para expressar essa razão.

Até hoje o número π é motivo de interesse de muitos estudiosos; com o auxílio de computadores já é possível determiná-lo com centenas de milhões de casas decimais.

Apresentamos a seguir algumas considerações a respeito dos números irracionais.

- As raízes quadradas dos números naturais que não são quadrados perfeitos são números irracionais.

  Exemplos:

  $\sqrt{3} = 1{,}732050807\ldots$ $\qquad$ $\sqrt{10} = 3{,}16227766\ldots$

  $\sqrt{7} = 2{,}645751311\ldots$ $\qquad$ $\sqrt{61} = 7{,}810249675\ldots$

Número quadrado perfeito é aquele cuja raiz quadrada é um número natural. Assim, 1, 9, 25 e 64 são exemplos de quadrados perfeitos, pois:

$\sqrt{1} = 1$ $\quad$ $\sqrt{25} = 5$

$\sqrt{9} = 3$ $\quad$ $\sqrt{64} = 8$

- Todo número irracional também possui um **oposto** ou **simétrico**.

  Por exemplo, o oposto de $\sqrt{2}$ é $-\sqrt{2}$ e o oposto de $\sqrt{11}$ é $-\sqrt{11}$.

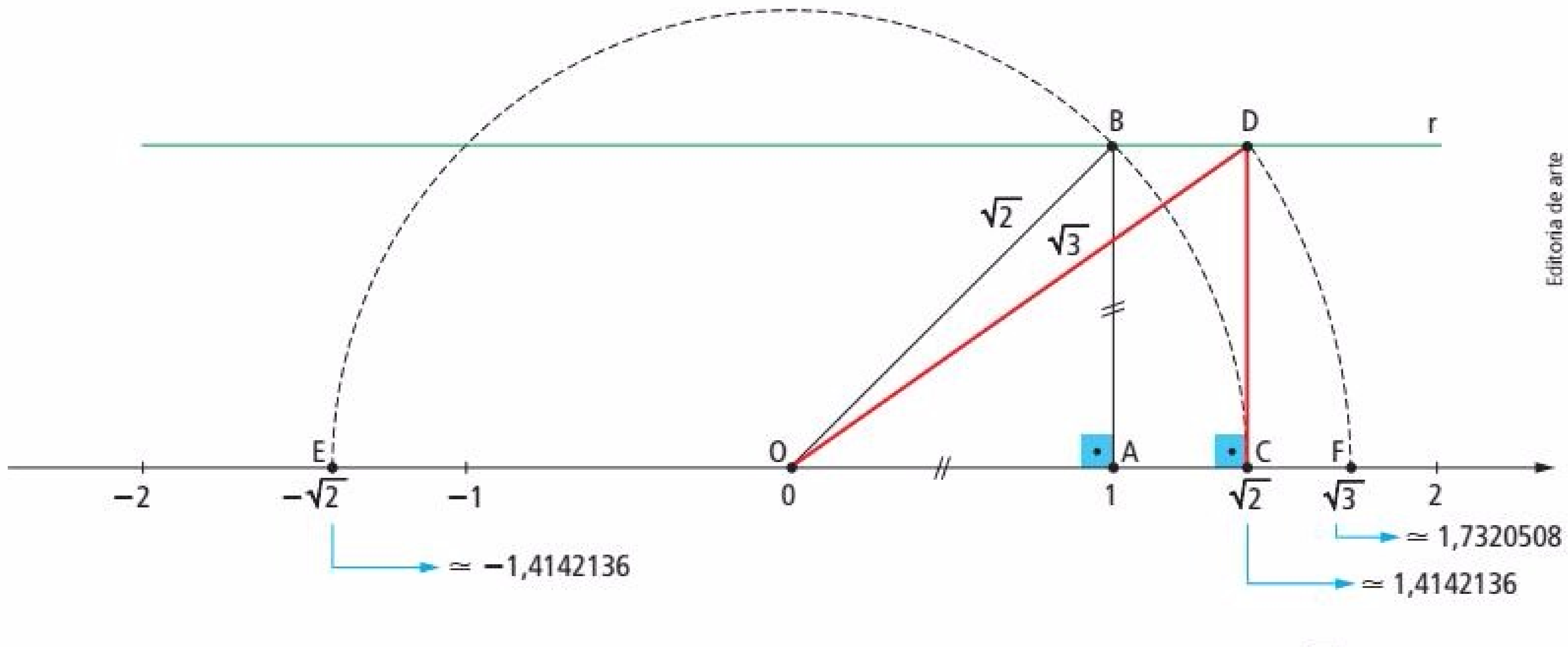
Destacamos, agora, importantes subconjuntos de $\mathbb{I}$:

- números irracionais positivos: $\mathbb{I}_+$
- números irracionais negativos: $\mathbb{I}_-$

Observe, a seguir, como representamos os números irracionais $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{2}$ na reta orientada, em que *r* é uma reta paralela à reta orientada considerada, com distância de uma unidade entre elas.

Inicialmente, traçamos o segmento AB, perpendicular à reta orientada no ponto *A* e com medida 1 unidade. Em seguida, traçamos o segmento BO, hipotenusa do triângulo retângulo isósceles ABO. Observe que OB $= \sqrt{2}$, pois $\overline{OB}$ é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos medindo 1 unidade.

Agora, usando um compasso com a ponta-seca sobre o ponto *O*, projetamos a medida da hipotenusa OB sobre a reta orientada, determinando assim o ponto *C*, correspondente a $\sqrt{2}$ como mostra a figura a seguir.



De maneira análoga, projetamos o ponto *E*, correspondente a $-\sqrt{2}$. Utilizando o mesmo procedimento, determinamos o ponto *F*, correspondente a $\sqrt{3}$, a partir do segmento OD, de medida $\sqrt{3}$ unidades e hipotenusa do triângulo retângulo CDO, de catetos medindo $\sqrt{2}$ unidades e 1 unidade.

Exercícios resolvidos

4 Localize na reta orientada os seguintes números: $-3{,}5$; $-0{,}8$; $\frac{9}{2}$; $\sqrt{5}$ e $1{,}4$.

Resolução

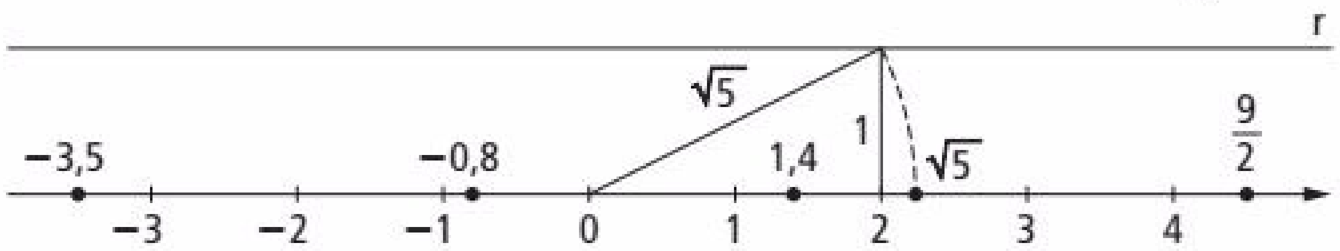
Colocando os números dados em ordem crescente temos: $-3{,}5$; $-0{,}8$; $1{,}4$; $\sqrt{5}$ e $\frac{9}{2}$.

Para construir a reta orientada, iniciamos marcando os números inteiros de -3 a 4, assim temos uma escala para localizar todos os números.

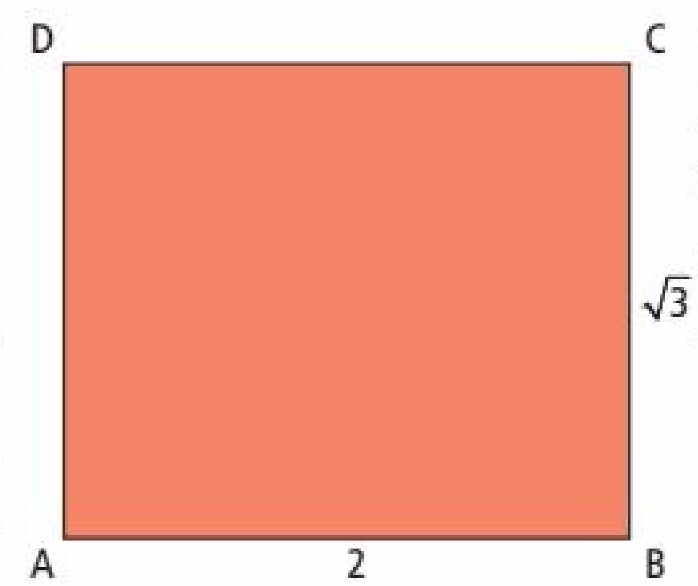
Em seguida, marcamos os números racionais dados, calculando as proporções em relação à unidade de medida utilizada entre dois números inteiros consecutivos.

Por fim, empregando o processo apresentado anteriormente, localizamos o ponto correspondente ao número irracional $\sqrt{5}$.

A reta orientada com os números localizados ficará da seguinte maneira:



5 Considere o retângulo ao lado. Determine a área, o perímetro e a diagonal do retângulo ABCD. As medidas encontradas são números irracionais?



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

Vamos calcular a área A do retângulo dada pelo produto da medida da base pela medida da altura:

$A = 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \rightarrow$ a medida da área do retângulo é irracional, pois o produto de um número racional (não nulo) por um número irracional é um número irracional.

O perímetro P do retângulo é dado pela soma de seus lados:

$P = 2 + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} \Rightarrow P = 4 + 2\sqrt{3} \rightarrow$ a medida do perímetro do retângulo é irracional, pois a soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.

Para determinarmos a diagonal d do retângulo, aplicamos o teorema de Pitágoras no triângulo ABD:

$d^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow d^2 = 4 + 3 = 7 \Rightarrow d = \sqrt{7} \rightarrow$ a medida do perímetro do retângulo é irracional, pois a raiz quadrada de um número primo positivo é um número irracional.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

17. Localize os números $-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{4}, \sqrt{4}$, na reta orientada. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

18. Determine os elementos dos conjuntos abaixo:

a) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 3x^2 - 4x - 4 = 0\}$ $\{2\}$

b) $C = \{y \in \mathbb{I} \mid y^2 - 7 = 0\}$ $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

c) $D = \left\{a \in \mathbb{N} \mid \frac{2}{a} + a = 3\right\}$ $\{1, 2\}$

d) $E = \{x \in \mathbb{Q} \mid 3 + x^2 = 4\}$ $\{-1, 1\}$

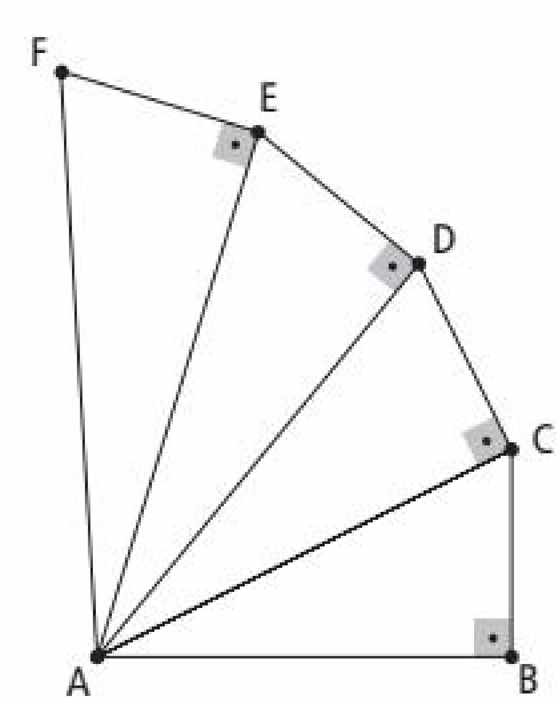
e) $F = \{x \in \mathbb{Q} \mid y^2 - y - 1 = 0\}$ $\varnothing$

19. Sendo $\sqrt{3} \simeq 1{,}732$ calcule o valor aproximado de:

a) $\frac{\sqrt{3} + 2}{2}$ $\simeq 1{,}866$

b) $\frac{2\sqrt{3} - 1}{4}$ $\simeq 0{,}616$

20. Sabendo que $BC = CD = DE = EF = 2$ e que $AB = 2BC$, calcule:



a) as medidas AC, AD e AF; $AC = 2\sqrt{5}$; $AD = 2\sqrt{6}$; $AF = 4\sqrt{2}$

b) o perímetro do quadrilátero ABCD. $P_{ABCD} = 8 + 2\sqrt{6}$

Explorando a tecnologia

Conhecendo o GeoGebra

Professor, oriente os alunos a navegar no *site* do GeoGebra, pois há muitas informações disponíveis, inclusive alguns tutoriais, materiais produzidos por professores e uma comunidade de discussão.

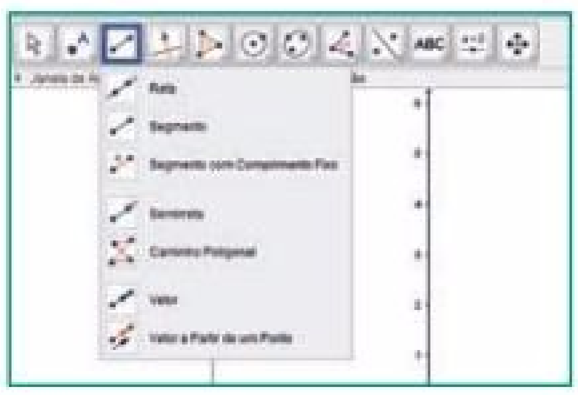
O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Ele é multiplataforma, ou seja, possui portabilidade em todos os sistemas operacionais e pode ser instalado em computadores, *tablets* e também em *smartphones*.

Sua instalação pode ser feita pelo *site* oficial <www.geogebra.org> (acesso em: 6 nov. 2015) baixando o *software* na aba *Downloads*, e seguindo as orientações de instalação.

Uma vez instalado, ao iniciar o *software*, a tela inicial é exibida. Ela é composta de várias janelas, com ferramentas e exibições específicas de acordo com a utilização. A seguir apresentamos a tela inicial com algumas de suas funções.

Barra de Ferramentas

A **Barra de Ferramentas** é composta por 12 submenus contendo ferramentas diversas, relacionadas de alguma maneira dentro do seu subgrupo. Para acessá-las, basta clicar no triângulo localizado no canto inferior direito de cada submenu. Por exemplo, ao clicar no terceiro submenu, as seguintes opções estão disponíveis:

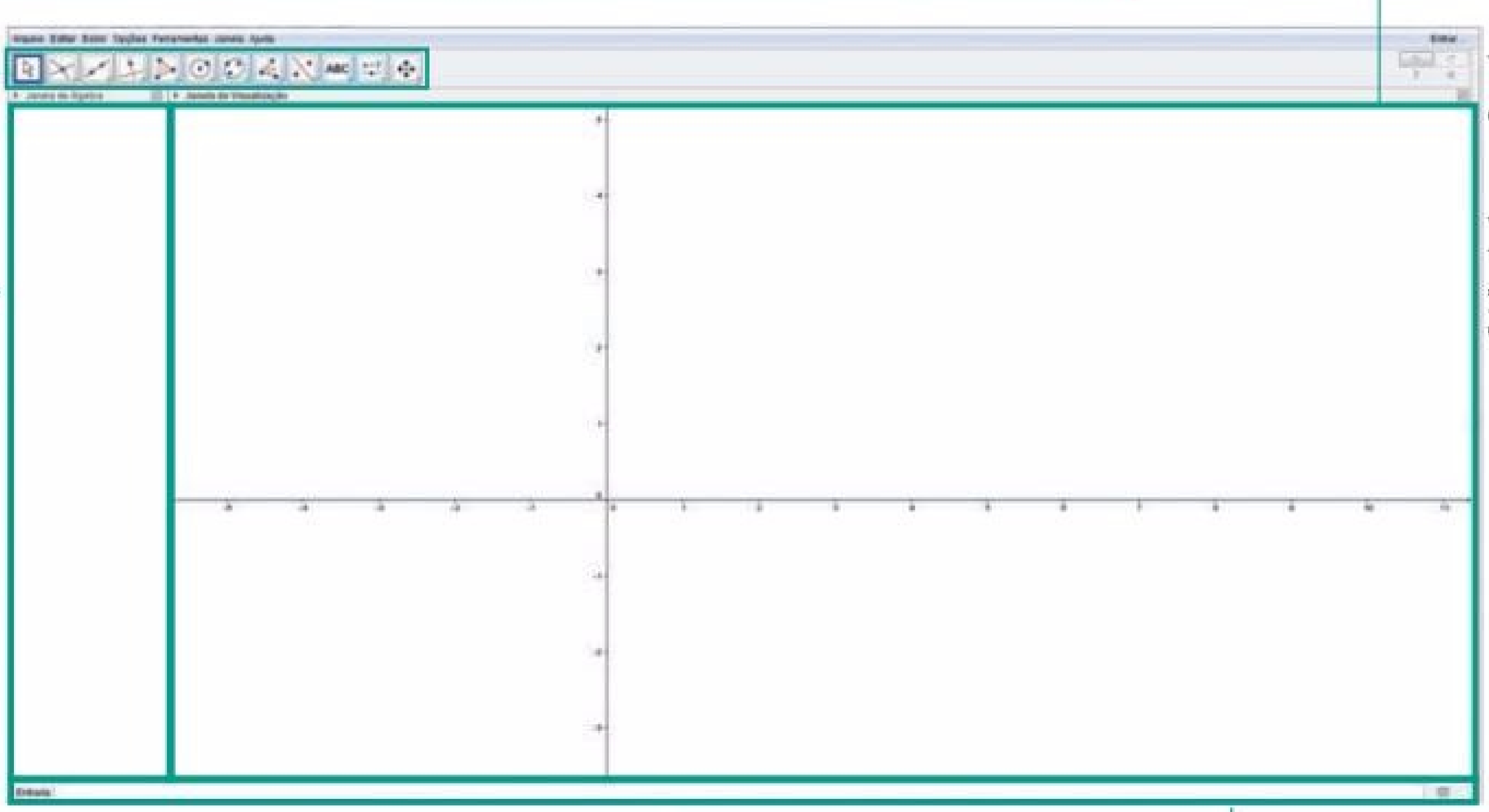


Ao escolher uma das ferramentas do submenu, ela aparece no início da barra de ferramentas, como "capa" daquele submenu.

Ao sobrepor o cursor do mouse sobre um submenu, surge um boxe com orientações a respeito da ferramenta que está na "capa" daquele submenu.

Janela de Visualização

A **Janela de Visualização** mostra as representações gráficas, como polígonos, circunferências e gráficos de funções, das construções feitas.



Crédito das imagens: Geogebra

Janela de Álgebra

A **Janela de Álgebra** mostra as representações algébricas, como equações e coordenadas, das construções feitas.

Campo de Entrada

No **Campo de Entrada** é possível inserir coordenadas, equações comandos ou funções. Ao pressionar a tecla Enter, a representação algébrica do objeto é apresentada na **Janela de Álgebra**, enquanto que a representação gráfica é mostrada na **Janela de Visualização**.

Além da **Janela de Álgebra** e da **Janela de Visualização**, que são mostradas na tela inicial padrão, o GeoGebra possui outras janelas que, dependendo da construção que se deseje realizar, podem ser acionadas no menu "Exibir". Quando necessário, essas outras janelas serão exibidas durante a realização das atividades.

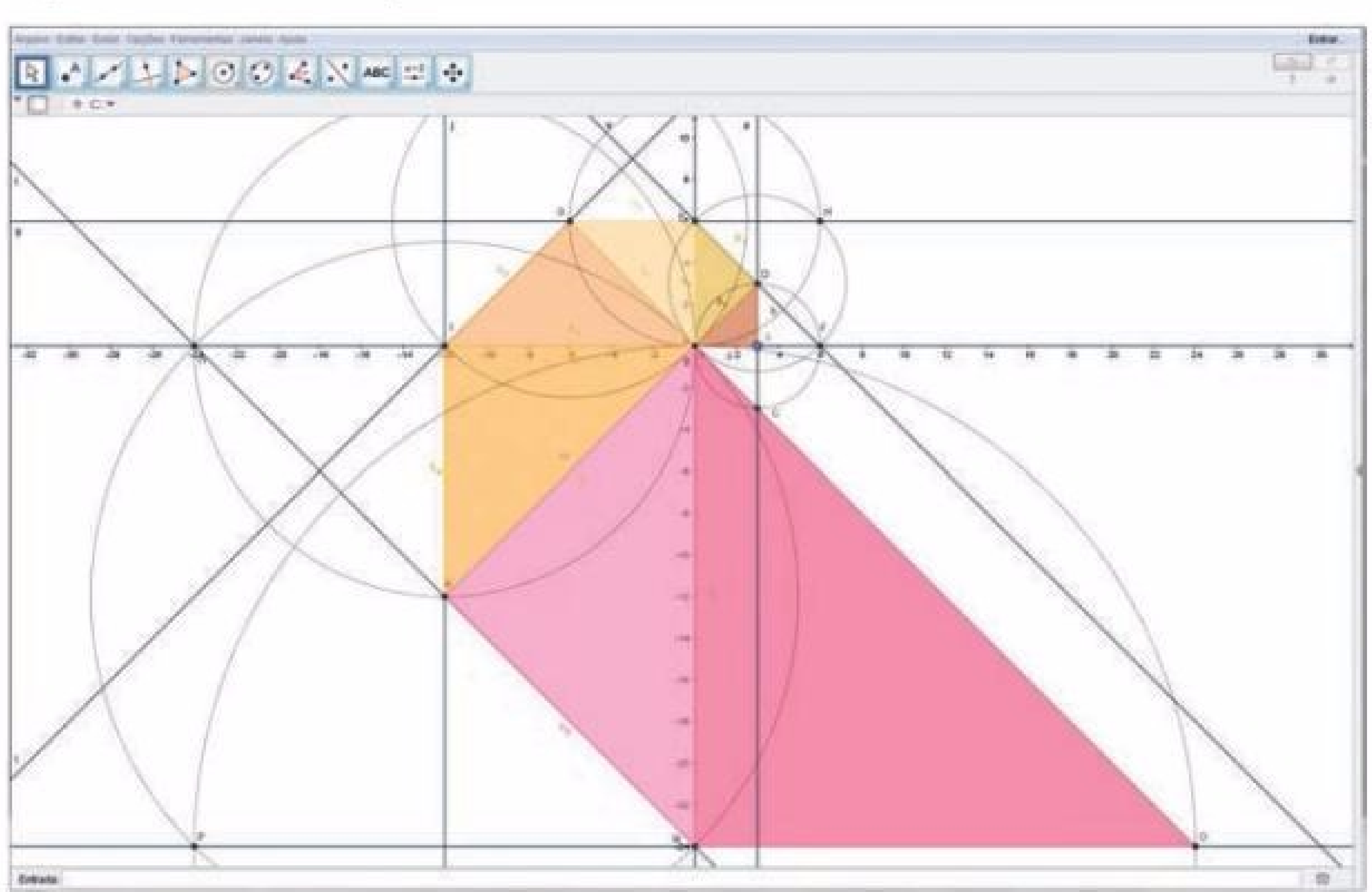
Todas as janelas do GeoGebra estão relacionadas dinamicamente, ou seja, ao realizar uma alteração em algum objeto em uma delas, todas as representações desse mesmo objeto nas demais janelas serão alteradas automaticamente.

O GeoGebra utiliza linguagem e notação próprias, que podem diferir um pouco das utilizadas nesta coleção. Por exemplo, para a separação da parte decimal de um número, o *software* usa o ponto no lugar da vírgula; para indicar as coordenadas de um ponto *A* qualquer, a notação é A = (0,0) no lugar de A(0, 0). Ao longo das atividades, conforme a necessidade, apresentaremos outras particularidades do GeoGebra.

Construção envolvendo medidas irracionais

Estudamos como representar os números irracionais em uma reta orientada. Agora, vamos utilizar o *software* GeoGebra para fazer uma construção envolvendo medidas irracionais. Para isso siga o roteiro abaixo.

1. Utilizando a ferramenta **Reta Perpendicular**, , clique sobre o eixo horizontal e sobre o ponto (3, 0). Serão criados o ponto A(3, 0) e a reta perpendicular ao eixo horizontal no ponto *A*.
2. Com a ferramenta **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**, , clique sobre o ponto *A* e, em seguida, sobre o ponto (0, 0). O ponto B(0, 0) será criado, além da circunferência de centro *A* e raio AB.
3. Selecione a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos**, , e clique na reta e na circunferência. Na construção serão demarcados os pontos *C* e *D*.
4. Escolha a ferramenta **Polígono**, , e crie o triângulo BAD, clicando sobre esses pontos, nessa ordem. Repare que o triângulo é retângulo em *A* e isósceles (AB = AD).
5. Agora, vamos construir outro triângulo utilizando o lado BD do triângulo BAD como um dos catetos. Usando a ferramenta **Reta Perpendicular**, , clique sobre o ponto *D* e o lado BD. A reta perpendicular ao lado BD no ponto *D* será criada.
6. Com a ferramenta **Círculo dados Centro e Um de seus Pontos**, , clique sobre o ponto *D* e, em seguida, sobre o ponto *B*.
7. Selecione a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos**, , selecione a última reta obtida e a circunferência e, na construção, aparecerão dois pontos: *E* e *F*.
8. Escolha a ferramenta **Polígono**, , e crie o triângulo BDE. Repare que o triângulo é retângulo em *D* porque a reta traçada é perpendicular ao lado BD. Além disso, BDE é isósceles, pois BD = DE.
9. Observe que o processo para a construção dos triângulos retângulos isósceles é sempre o mesmo, usando a hipotenusa do triângulo anterior como cateto do próximo. Além disso, ao traçar a reta perpendicular à hipotenusa, garantimos que o novo triângulo será retângulo. A construção da circunferência com centro no vértice de ângulo reto e raio de mesma medida do cateto garante que o triângulo será isósceles. Então, repita esse processo mais cinco vezes e você obterá uma figura semelhante à reproduzida abaixo, com exceção das cores. Esses triângulos lembram a forma de uma espiral e alguns dos segmentos de reta, cuja extremidade é o ponto *B*, terão comprimento irracional.



Geogebra

Atividade Escreva no caderno

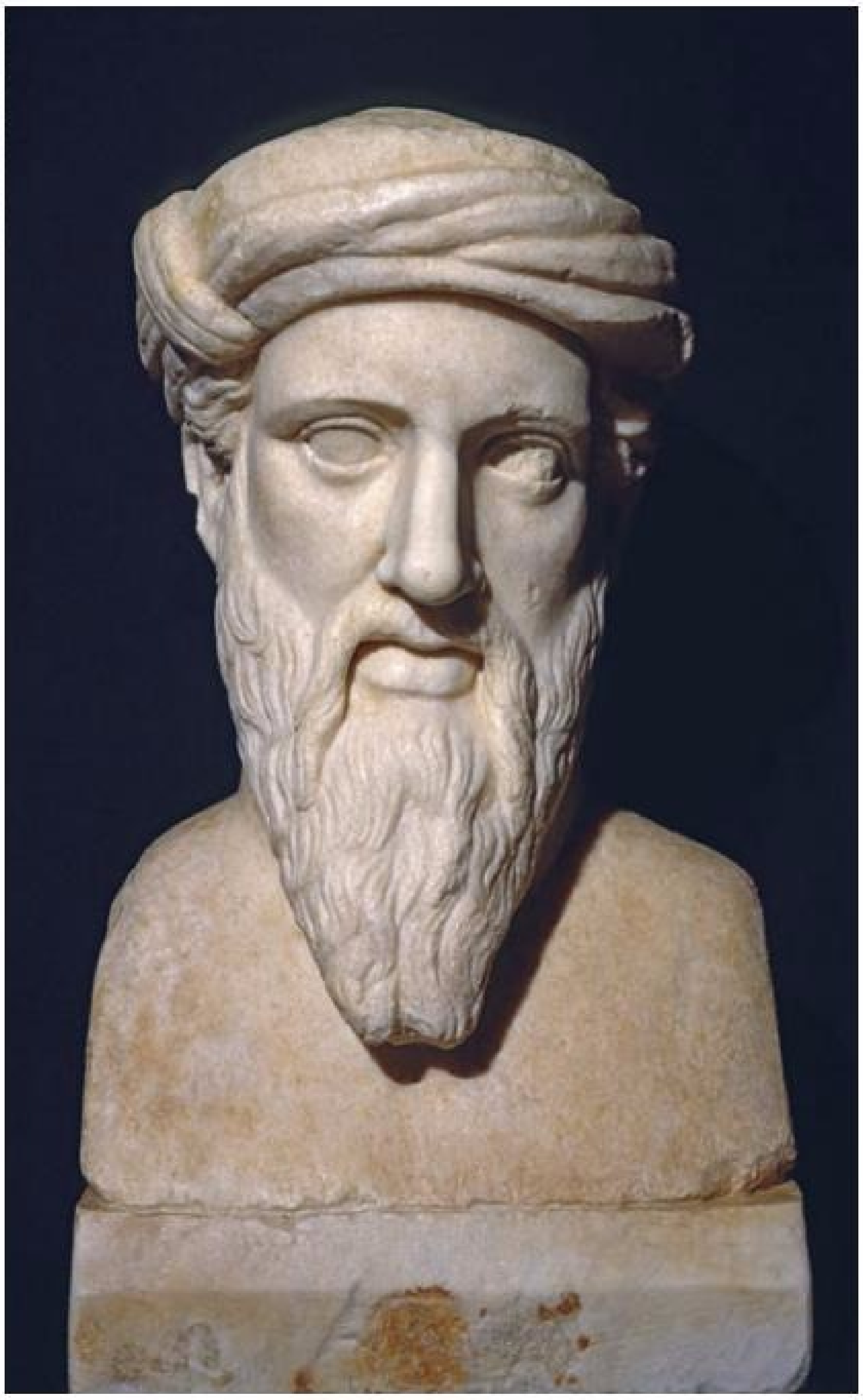
Na figura reproduzida acima, são 7 segmentos de reta: $\overline{BD}$, $\overline{DE}$, $\overline{BG}$, $\overline{GI}$, $\overline{BK}$, $\overline{KM}$ e $\overline{BO}$.

Observe a figura obtida e responda: quais são os segmentos de reta que possuem medida irracional?

História da Matemática

Os números irracionais e seu contexto histórico

BRIDGEIMAGES/KEYSTONE



Busto de Pitágoras de Samos (c. 569 a.C-c. 475 a.C.) no Museu Capitolino, em Roma (Itália).

Desde o século VI a.C., os matemáticos gregos, a começar por um certo Pitágoras, já tinham descoberto que a diagonal de um quadrado "não tem nenhuma medida comum" com o seu lado. De fato, tanto pela medida quanto pelo raciocínio, o comprimento de sua diagonal não corresponde a um número inteiro de metros. Ou seja, uma vez que tal é seu comprimento matemático, a $\sqrt{2}$ é um número "incomensurável". Foi a descoberta do que hoje denominamos "números irracionais", os que não são nem inteiros nem frações.

Esta descoberta provocou uma grande consternação no seio dos pitagóricos, que pensavam então que "o número rege o universo", pensando deste modo nos números "racionais", isto é, nos números naturais e nas suas combinações mais simples, que são as frações ordinárias. O próprio nome destas grandezas é uma prova, desde que foram denominadas "inexprimíveis". Assim, foi feito um juramento de nunca se divulgar junto aos profanos a existência desses "seres disformes": era absolutamente necessário guardar segredo desta inexplicável falha na obra do arquiteto supremo, para não despertar sua cólera.

Mas, depois de Pitágoras e de seus adeptos, este segredo logo se tornou propriedade de cabeças bem-pensantes que discutiram o inexprimível, nomearam o inominável e o entregaram aos profanos [...].

Livre destas contingências místicas, a existência de outros números além dos números naturais e das frações ordinárias foi admitida: os números "irracionais", dentre os quais $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{7}$ e o famoso p são apenas alguns exemplos.

No entanto, esta categoria de números ficou ainda pouco precisa durante séculos por causa das numerações imperfeitas de outrora, que não permitiam a representação destes números de modo coerente, já que eles eram designados por palavras e valores aproximados aparentemente sem nenhuma relação uns com os outros. [...]

Beneficiados por uma notação numérica muito eficaz e por uma ciência cada vez mais avançada, os matemáticos europeus dos tempos modernos conseguiram ter sucesso onde seus antecessores tinham falhado. Eles descobriram que *estes números eram identificáveis a números decimais sem fim, cujos algarismos após a vírgula nunca se reproduzem na mesma ordem.*

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$$

Descoberta fundamental, que permitiu uma melhor compreensão desta categoria de números, já que eles têm por característica esta propriedade.

Fonte: IFRAH, G. **Os números. História de uma grande invenção**. Título original: **Les Chiffres ou L'Histoire d'une Grande Invention**. Tradução de Stella Maria de Freitas Senra. 10. ed. São Paulo: Ed. Globo, 1985. p. 329-330.

Atividades

Escreva no caderno

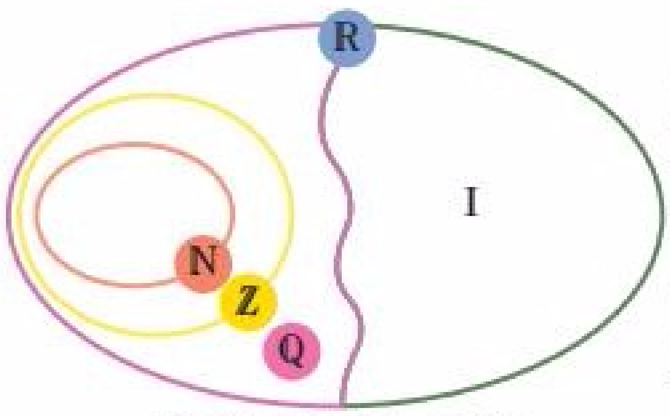
1. De acordo com o texto, qual foi a descoberta que provocou grande consternação entre os pitagóricos?
Que a medida da diagonal de um quadrado era incomensurável e não correspondia a um número inteiro ou a uma fração de metros.

2. Qual foi a descoberta dos matemáticos dos tempos modernos que permitiu melhor compreensão dos números irracionais? Os matemáticos descobriram que nos números irracionais, os algarismos após a vírgula são infinitos e nunca se reproduzem na mesma ordem.

Conjunto dos números reais

Reunindo os números racionais aos números irracionais, formamos o conjunto dos números reais, que representamos por $\mathbb{R}$.

Assim, os conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e irracionais estão contidos no conjunto dos números reais, ou seja, são subconjuntos de $\mathbb{R}$. Observe o diagrama ao lado.

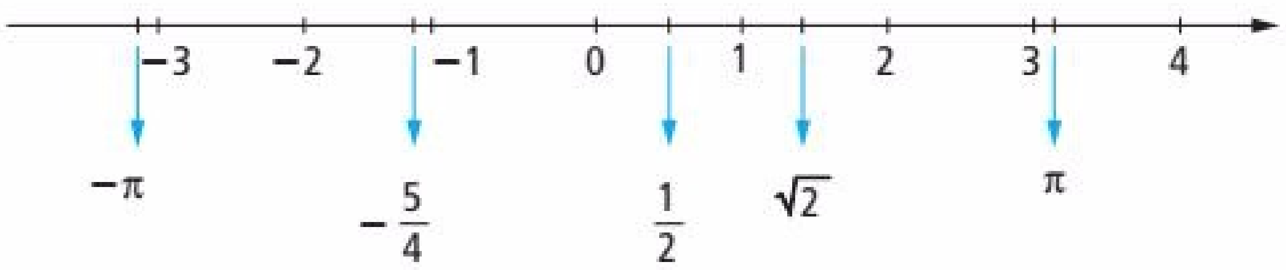


$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

Ilustrações: Editoria de arte

É possível demonstrar que, ao registrar os números racionais e os irracionais na reta orientada, ela fica completa, com todos os números reais. A reta assim construída é denominada **reta numérica** ou **reta real**.

Observe abaixo a reta real com alguns números racionais e irracionais indicados.



O ponto que representa o número zero também é chamado de origem da reta real.

Cada ponto da reta numérica pode ser associado a um único número real e cada número real pode ser associado a um único ponto da reta numérica, ou seja, dizemos que há uma correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta.

No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, destacamos os seguintes subconjuntos:

- números reais não nulos: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$
- números reais não negativos: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- números reais não positivos: $\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$
- números reais positivos: $\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- números reais negativos: $\mathbb{R}^*_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

As letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são as iniciais das palavras número (ou natural), quociente e real. A letra $\mathbb{Z}$ é inicial da palavra *zahl*, que significa número em alemão.

LIMA, Elon L. e outros. **A matemática do ensino médio.** Rio de Janeiro: SBM, 2012. v. 1. p. 66. (Coleção do Professor de Matemática).

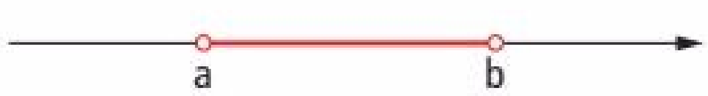
Intervalos reais

Existem, ainda, outros subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são determinados por desigualdades. Esses subconjuntos são chamados de **intervalos** e podem ser representados na reta real, na notação de conjuntos e na notação com colchetes.

Dados dois números reais *a* e *b*, chamados de extremos do intervalo, com $a < b$, temos:

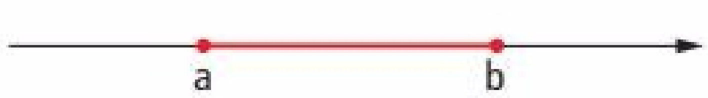
Intervalo aberto

$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} =]a, b[$



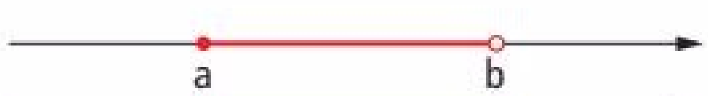
Intervalo fechado

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b]$



Intervalos semiabertos

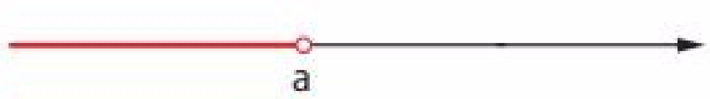
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\} = [a, b[$



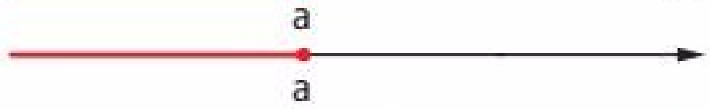
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\} =]a, b]$

Intervalos infinitos

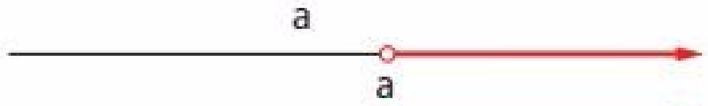
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} =]-\infty, a[$



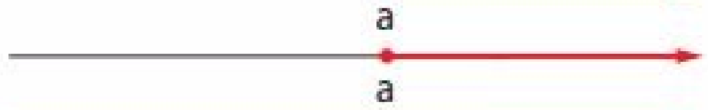
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\} =]-\infty, a]$



$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =]a, +\infty[$



$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\} = [a, +\infty[$



$\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Outra maneira de representar os intervalos abertos é utilizando parênteses. Veja:

$]a, b[= (a, b)$

$]a, b] = (a, b]$

$[a, b[= [a, b)$

Observações:

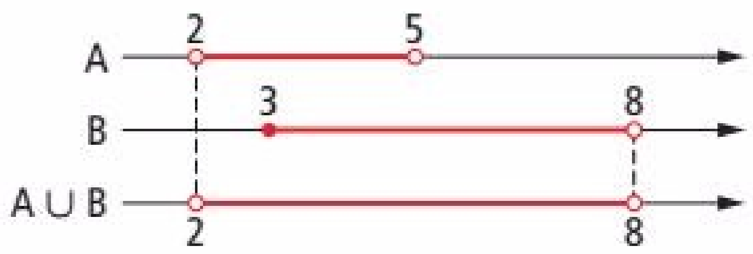
- A bolinha vazia (∘) indica que os extremos não pertencem ao intervalo.
- A bolinha cheia (•) indica que os extremos pertencem ao intervalo.
- O símbolo $+\infty$ (lê-se: mais infinito) indica que o intervalo cresce indefinidamente.
- O símbolo $-\infty$ (lê-se: menos infinito) indica que o intervalo decresce indefinidamente.
- Os símbolos $+\infty$ e $-\infty$ não são números reais, são apenas símbolos da notação de intervalos infinitos.

Exercícios resolvidos

6 Se A =]2, 5[e B = [3, 8[, determine $A \cup B$ e $A \cap B$.

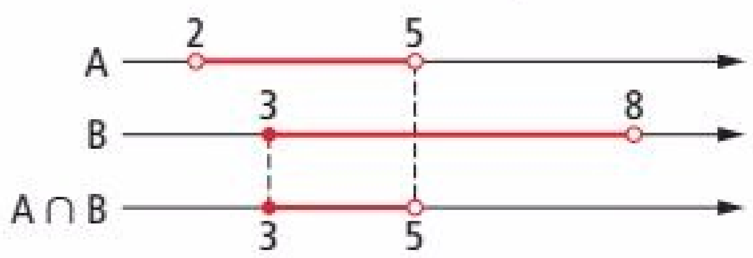
Resolução

As operações com intervalos reais funcionam da mesma maneira que as operações com conjuntos estudadas no capítulo anterior. No caso dos intervalos é interessante começar analisando os extremos. Assim, a união dos intervalos *A* e *B* é dada por:



Para a intersecção, vamos analisar os extremos dos intervalos. Observe que 3 é elemento de *A* e também de *B*; e 5 é elemento de *B* e não é elemento de *A*.

Os elementos de 3 até 5, excluído este último, pertencem a *A* e a *B*. Logo:

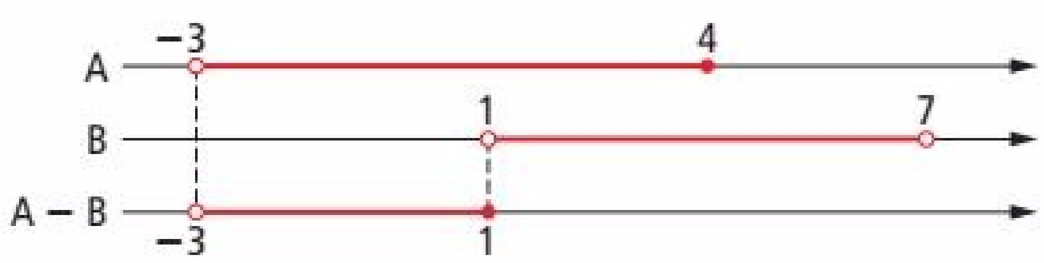


Assim, temos: $A \cup B =]2, 8[$ e $A \cap B = [3, 5[$.

7 Dados $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 4\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 7\}$, calcule $A - B$.

Resolução

O conjunto $A - B$ é formado pelos elementos que pertencem a *A* e não pertencem a *B*.



A diferença entre os conjuntos é $A - B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leqslant 1\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

21. Usando a notação de conjuntos, escreva no caderno os intervalos a seguir.

a) [6, 10] $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leqslant x \leqslant 10\}$

b)]−1, 5] $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 5\}$

c)]−6, 0[$\{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 0\}$

d) [0, +∞[$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

e)]−∞, 3[$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

f)]−10, 10[$\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 10\}$

22. Represente, na reta real, os intervalos a seguir.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) [2, 8]

b)]−∞, 2]

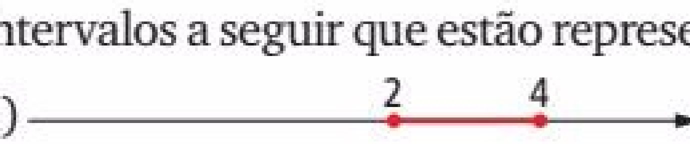
c) [−6, −1[

d) [2, +∞[

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2\}$

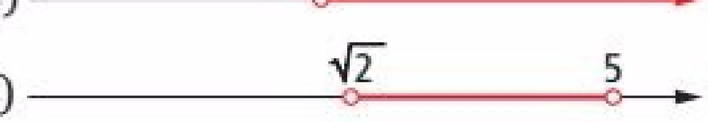
23. Usando a notação de conjuntos, escreva no caderno os intervalos a seguir que estão representados na reta real.

a) 

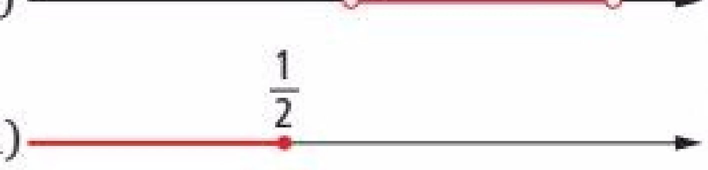
$\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$

b) 

$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

c) 

$\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 5\}$

d) 

$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

Ilustrações: Editoria de arte

24. Determine $A \cup B$ em cada caso a seguir.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$

d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$

25. Dados os conjuntos A = [−1, 6[; B =]−4, 2]; E =]−2, 4[, calcule:

a) $(B \cup E) - A$]−4, −1[

b) $E - (A \cap B)$]−2, −1[∪]2, 4[

26. Hábitos saudáveis, como exercícios regulares, quantidade de sono adequada e uma alimentação saudável são alguns dos fatores para uma vida saudável. Leia o texto a seguir a respeito da alimentação saudável e faça o que se pede em cada item.

Alimentação saudável

A alimentação para os seres humanos possui significado maior do que apenas garantir as necessidades do corpo. O ato de comer está relacionado a valores sociais, culturais, afetivos e sensoriais. Na maioria das vezes, comer é um momento de prazer e confraternização com nossos amigos e familiares.

O alimento torna-se, assim, muito mais do que uma fonte de nutrientes. Apreciamos as cores e gostamos de sentir a textura e o sabor da comida. Mas isso não é tudo! Nesse jogo de sensações, precisamos lembrar que uma alimentação saudável:

- não precisa ser cara, pois pode ser feita com alimentos naturais, produzidos na região em que vivemos;
- deve ser colorida e composta por alimentos variados;
- é saborosa;
- precisa ter qualidade e ser consumida na quantidade certa;
- deve ser segura para o consumo, ou seja, estar livre de contaminação. [...]


monticello/ Shutterstock.com

Frutas e legumes são alguns alimentos saudáveis.

Mudanças na alimentação ao longo do tempo e seu impacto na saúde

Com a evolução da sociedade, muitos tipos de alimentos foram criados e, para garantir maior aceitação da população, foram introduzidos novos ingredientes. Com isso, surgiram produtos cada vez mais atraentes e saborosos.

Por exemplo: açúcar para adoçar; gordura saturada e gordura trans para dar maior maciez, leveza e cremosidade; sódio para acentuar o sabor; corantes para dar cor especial e aromatizantes para criar um cheirinho irresistível. [...]

Açúcar: é fonte de energia para o ser humano. Mas, quando comemos em exagero, pode causar aumento de peso e excesso de gordura no sangue.
Gordura saturada: é um tipo de gordura muito encontrada em alimentos de origem animal. Comê-la excessivamente pode provocar o acúmulo de gordura nos vasos sanguíneos e causar doenças do coração.
Gordura trans: é produzida pela transformação de óleos vegetais em gordura vegetal hidrogenada. Está presente em produtos como biscoitos e chocolates. Consumida, em excesso, pode causar problemas de saúde, principalmente ao coração.
Sódio: faz parte do sal de cozinha e é acrescentado aos alimentos pelas indústrias para dar sabor mais salgado e aumentar o tempo de conservação [...] do produto. Comer muito sódio pode causar pressão alta.

No entanto, todos esses novos produtos reduziram a qualidade nutricional dos alimentos. Alguns deles têm se tornado tão populares que passaram a ser cada vez mais desejados, como os salgadinhos, refrigerantes, sorvetes, biscoitos e muitos outros.

Então, parte da população habituou-se a comer esses alimentos somente para saciar desejos e estar "na moda", sem considerar que os excessos podem trazer problemas à saúde, como a obesidade, a pressão alta, o diabetes e as doenças do coração. [...]

AGÊNCIA NACIONAL DE VIGILÂNCIA SANITÁRIA (ANVISA). **Alimentação saudável: fique esperto!** Brasília. Disponível em: <http://www.anvisa.gov.br/propaganda/alimento_saudavel_gprop_web.pdf>. Acesso em: 27 dez. 2015.

a) De acordo com o texto, quais são as características de uma alimentação saudável? Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Quais problemas de saúde estão associados ao consumo excessivo de produtos que contêm açúcares, gorduras saturada e trans e sódio?

c) Você já ouviu falar no IMC? O Índice de Massa Corpórea (IMC) é adotado pela Organização Mundial de Saúde para o cálculo do "peso" ideal de cada indivíduo. O cálculo pode ser realizado por meio da relação $\text{IMC} = \dfrac{\text{"peso"}}{(\text{altura})^2}$. O valor obtido pode ser interpretado conforme o quadro ao lado.

i) Determine a classificação de uma pessoa de 80 kg e 1,70 m.

ii) Podemos escrever a faixa do IMC que determina a classificação "magreza" como IMC $< 18,5$. Utilizando essa mesma simbologia escreva as demais faixas.

IMC	Classificação
Menor que 18,5	Magreza
Entre 18,5 e 24,9	Normal
Entre 25,0 e 29,9	Sobrepeso
Entre 30,0 e 39,9	Obesidade
Maior que 40,0	Obesidade Grave

Fonte: ABESO. **Diretrizes brasileiras de obesidade**. Disponível em: <http://abeso.org.br/pdf/diretrizes_brasileiras_obesidade_2009_2010_1.pdf>. Acesso em: 21 mai. 2016.

d) Reflita sobre seus hábitos alimentares e o que pode ser melhorado para que você tenha uma alimentação saudável.

Exercícios complementares

Escreva no caderno

1. (UFAC) Sejam *A* e *B* dois conjuntos distintos e não vazios tais que $A \cap B = A$ e $A - B = \varnothing$. Então, vale que:

a) $B \cap A = B$

b) $B \subset A$

x c) $A \subset B$

d) $B - A = \varnothing$

e) A e B são conjuntos disjuntos.

2. (Fuvest-SP) Se *x* e *y* são dois números inteiros, estritamente positivos e consecutivos, qual dos números abaixo é necessariamente um inteiro ímpar?

a) $2x + 3y$

b) $3x + 2y$

x c) $xy + 1$

d) $2xy + 2$

e) $x + y + 1$

3. (PUC-RJ) Uma prova com duas questões foi dada a uma classe de quarenta alunos. Dez alunos acertaram as duas questões, 25 acertaram a primeira e 20 acertaram a segunda questão. Quantos alunos erraram as duas questões?

a) 40

b) 10

c) nenhum

d) 8

x e) 5

4. (PUC-RJ) Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam pelo menos um dos produtos *A* ou *B*. Sabendo que 10 destas pessoas não usam o produto *B* e que 2 destas pessoas não usam o produto *A*, qual é o número de pessoas que utilizam os produtos *A* e *B*? 3 pessoas.

5. (UnB-DF) De 200 pessoas que foram pesquisadas sobre suas preferências em assistir aos campeonatos de corrida pela televisão, foram colhidos os seguintes dados: 55 dos entrevistados não assistem; 101 assistem às corridas de Fórmula 1 e 27 assistem às corridas de Fórmula 1 e de Motovelocidade. Quantas das pessoas entrevistadas assistem, exclusivamente, às corridas de Motovelocidade? 44

6. (ITA-SP) Sejam *X, Y, Z, W* subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \varnothing$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$

x c) $\{1, 3, 7, 8\}$

d) $\{1, 3\}$

e) $\{7, 8\}$

7. (FGV-SP) Uma pesquisa de mercado sobre determinado eletrodoméstico mostrou que 37% dos entrevistados preferem a marca *X*, 40% preferem a marca *Y*, 30% preferem a marca *Z*, 25% preferem *X* e *Y*, 8% preferem *Y* e *Z*, 3% preferem *X* e *Z* e 1% prefere as três marcas. Considerando que há os que não preferem nenhuma das três marcas, a porcentagem dos que não preferem nem *X* nem *Y* é:

a) 20%

b) 23%

c) 30%

d) 42%

x e) 48%

8. (UFJF-MG) Marque a alternativa incorreta:

a) Se *x* e *y* são números racionais, então $x + y$ é um número racional.

x b) Se *x* e *y* são números irracionais, então $x + y$ é um número irracional.

c) Se *x* e *y* são números racionais, então $x \cdot y$ é um número racional.

d) Se *x* é um número racional e *y* é um número irracional, então $x + y$ é um número irracional.

e) n.r.a.

9. (UFJF-MG) Marque a alternativa incorreta a respeito dos números reais:

a) Se a representação decimal infinita de um número é periódica então esse número é racional.

b) Se a representação decimal de um número é finita então esse número é racional.

c) Todo número irracional tem uma representação decimal infinita.

x d) Todo número racional tem uma representação decimal finita.

e) n.r.a.

10. (PUC-RJ) Para $a = 2{,}01$, $b = \sqrt{4{,}2}$ e $c = \dfrac{7}{3}$ temos:

x a) $a < b < c$

b) $b < c < a$

c) $c < b < a$

d) $c < a < b$

e) $b < a < c$

11. (UFF-RJ) O número $\pi - \sqrt{2}$ pertence ao intervalo:

a) $\left[1, \dfrac{3}{2}\right]$

b) $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right]$

x c) $\left]\dfrac{3}{2}, 2\right]$

d) $]-1, 1[$

e) $\left]-\dfrac{3}{2}, 0\right]$

12. (UFSM-RS) Assinale verdadeira (V) ou falsa (F) em cada uma das afirmações a seguir.

☐ A letra grega π representa o número racional que vale 3,14159265.

☐ O conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais são subconjuntos dos números reais e possuem apenas um ponto em comum.

☐ Toda dízima periódica provém da divisão de dois números inteiros, portanto é um número racional.

A sequência correta é:

a) F – V – V.

b) V – V – F.

c) V – F – V.

X d) F – F – V.

e) F – V – F.

13. (Fuvest-SP) Na figura abaixo estão representados geometricamente os números reais 0, x, y e 1. Qual a posição do número x · y?

Editoria de arte

a) À esquerda de 0.

X b) Entre 0 e x.

c) Entre x e y.

d) Entre y e 1.

e) À direita de 1.

14. (Unirio-RJ) Analisando a expressão

$E = \left[\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\right)\right] + \left[\left(\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\right)\right]$, podemos afirmar:

a) $E \in \mathbb{N}$

X b) $E \in \mathbb{R}_+$

c) $E \in \mathbb{Q}$

d) $E \in \mathbb{R}_-$

e) $E \in \mathbb{Z}$

15. (UFBA) Se $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < 3\}$, o conjunto $A \cap B$ é o intervalo:

X a) $[0, 2[$

b) $]0, 2[$

c) $[-1, 3]$

d) $[-1, 3[$

e) $]-1, 3[$

16. (UFMG) Se $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{8}\right\}$, $B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{2}{3}\right\}$, $C = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{8} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$ então $(A \cup C) \cap B$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$

X c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{8} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{5}{8}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{8} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\right\}$

Retomando e pesquisando

Escreva no caderno

Na abertura desta unidade você viu diversos agrupamentos e várias maneiras de agrupar um mesmo conjunto de dados. Utilize essas informações e seus conhecimentos a respeito dos conteúdos desta unidade para realizar as atividades a seguir. Veja no Manual no Professor

1. Retome o esquema feito por você no item **b** da atividade **3** da abertura da unidade. Com os conhecimentos sobre conjuntos e representação de conjuntos vistos no capítulo 1, você faria um esquema diferente? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, elabore esse novo esquema e indique semelhanças e diferenças entre as duas representações.

2. Pense em outra situação em que a classificação e/ou o agrupamento é utilizado e elabore um diagrama de Venn para representá-la. Agora responda:

a) Quantos conjuntos há nessa situação?

b) Eles são finitos ou infinitos?

c) Qual é a intersecção desses conjuntos? E a união?

3. Reúna-se com mais dois colegas e pesquisem a respeito da taxonomia. De que maneira essa classificação se relaciona com o conteúdo de conjuntos estudado nesta unidade? Elabore um diagrama de Venn da classificação taxonômica. Ao final, montem uma apresentação para os colegas da turma.

Unidade 2

Introdução às funções

Fred Cardoso/Shutterstock.com

O real, de plural réis, foi a primeira unidade monetária utilizada no Brasil e em todas as outras colônias portuguesas. Em 1942, ela foi substituída pelo cruzeiro, a fim de uniformizar o dinheiro em circulação. Um cruzeiro correspondia a mil réis. Em 1967, foi instituído o cruzeiro novo, em virtude da desvalorização do cruzeiro. Um cruzeiro novo era equivalente a mil cruzeiros. Em 1970, a moeda voltou a se chamar cruzeiro, mantendo a equivalência com o cruzeiro novo. Entre 1986 e 1994, por motivos políticos e econômicos, houve cinco trocas de moedas, indicadas a seguir com sua respectiva correspondência.

- 1986: de cruzeiro (Cr$) para cruzado (Cz$) – Cr$ 1 000,00 = Cz$ 1,00
- 1989: de cruzado (Cz$) para cruzado novo (NCz$) – Cz$ 1 000,00 = = NCz$ 1,00
- 1990: de cruzado novo (NCz$) para cruzeiro (Cr$) – NCz$ 1,00 = Cr$ 1,00
- 1993: de cruzeiro (Cr$) para cruzeiro real (CR$) – Cr$ 1 000,00 = CR$ 1,00
- 1994: de cruzeiro real (CR$) para real (R$) – CR$ 2 750,00 = R$ 1,00

A cédula do real é diferente das cédulas que haviam circulado no Brasil anteriormente, pois não traz personalidades da história nacional, e sim animais da fauna brasileira.

Frente da cédula de 5 000 cruzeiros, moeda vigente de 1942 a 1967.

Frente da cédula de 5 cruzeiros novos, moeda vigente de 1967 a 1970. As cédulas utilizadas eram as mesmas do cruzeiro, mas com um carimbo indicando seu novo valor.

Frente da cédula de 50 cruzeiros, moeda vigente de 1970 a 1986.

Moedas da segunda família de moedas do real.

Frente da cédula de 500 cruzados, moeda vigente de 1986 a 1989.

Frente da cédula de 500 cruzeiros reais, moeda vigente de 1993 a 1994. As cédulas utilizadas eram as mesmas do cruzeiro, mas com um carimbo indicando seu novo valor.

Notas: Captura via escâner
Foto de fundo: Frede Cardoso/Shutterstock.com

Frente da cédula de 100 cruzados novos, moeda vigente de 1989 a 1990.

Frente da cédula de 20 reais, moeda vigente a partir de 1994.

Frente da cédula de 500 000 cruzeiros, moeda vigente de 1990 a 1993.

1. Você já conhecia a história do sistema monetário brasileiro e a existência de tantas trocas de unidade monetária no Brasil em tão pouco tempo? Qual foi a troca de unidade monetária ocorrida em 1990? Veja o Manual do Professor.
2. Que operação uma pessoa que tinha Cr$ 24 569 000,00 em 1993 teria de fazer para transformar esse valor em cruzeiro real? Que valor essa pessoa teria na nova moeda?
3. Pesquise e liste quais são os animais estampados nas cédulas da segunda família do real.

Escreva no caderno

CAPÍTULO 3

Funções

No Ensino Fundamental você provavelmente estudou as funções. Neste capítulo, retomaremos esses conceitos, ampliando-os e apresentando algumas definições para o estudo de outras funções específicas nos capítulos seguintes.

A ideia de função

Chamamos de **grandeza** qualquer atributo que pode ser expresso por uma medida, por exemplo: comprimento, área, volume e temperatura.

Muitas vezes nos deparamos com situações em que diferentes grandezas estão associadas por uma relação de dependência, como no caso do cálculo do valor a ser pago pelo consumo mensal de energia elétrica.

O valor total da conta de energia elétrica é composto de várias taxas, entre elas o valor cobrado pela energia consumida e existe uma relação de dependência entre o valor correspondente ao consumo e a quantidade de energia consumida.

Além da conta de energia, outras situações podem ser representadas por relações entre grandezas. Por exemplo:

a) o valor a ser pago em um restaurante que oferece comida “por quilo” depende da quantidade, em quilograma, de comida consumida.

b) a comissão de um vendedor depende da quantia, em reais, paga pela mercadoria que ele vender.

Os valores que as grandezas podem assumir são representados genericamente por **variáveis**, que podem ser classificadas como **variável dependente** e **variável independente**. Para os exemplos dados, temos:

- na conta de energia elétrica, o valor correspondente ao consumo é a variável dependente e a quantidade de energia consumida é a variável independente.
- no restaurante “por quilo”, o valor a ser pago é a variável dependente, e a quantidade, em quilograma, de comida consumida é a variável independente.
- o valor da comissão do vendedor é a variável dependente e a quantia, em reais, relacionada à mercadoria vendida por ele é a variável independente.

Kondor83/Shutterstock.com

Geralmente, em restaurantes “por quilo”, há uma grande variedade de saladas e legumes, alimentos importantes para uma refeição saudável e balanceada.

Os exemplos apresentados têm duas características em comum:

- todos os valores da variável independente estão associados a valores da variável dependente.
- cada valor atribuído à variável independente está associado a um único valor da variável dependente.

As relações que possuem essas duas características são chamadas **funções**. Assim, podemos dizer que:

- o valor correspondente ao consumo é uma **função** da energia consumida.
- o valor a ser pago em um restaurante "por quilo" é uma **função** da quantidade, em quilograma, de comida consumida.
- a comissão de um vendedor é uma **função** da quantia, em reais, relacionada à mercadoria que ele vender.

Acompanhe outras situações que podem ser representadas por funções.

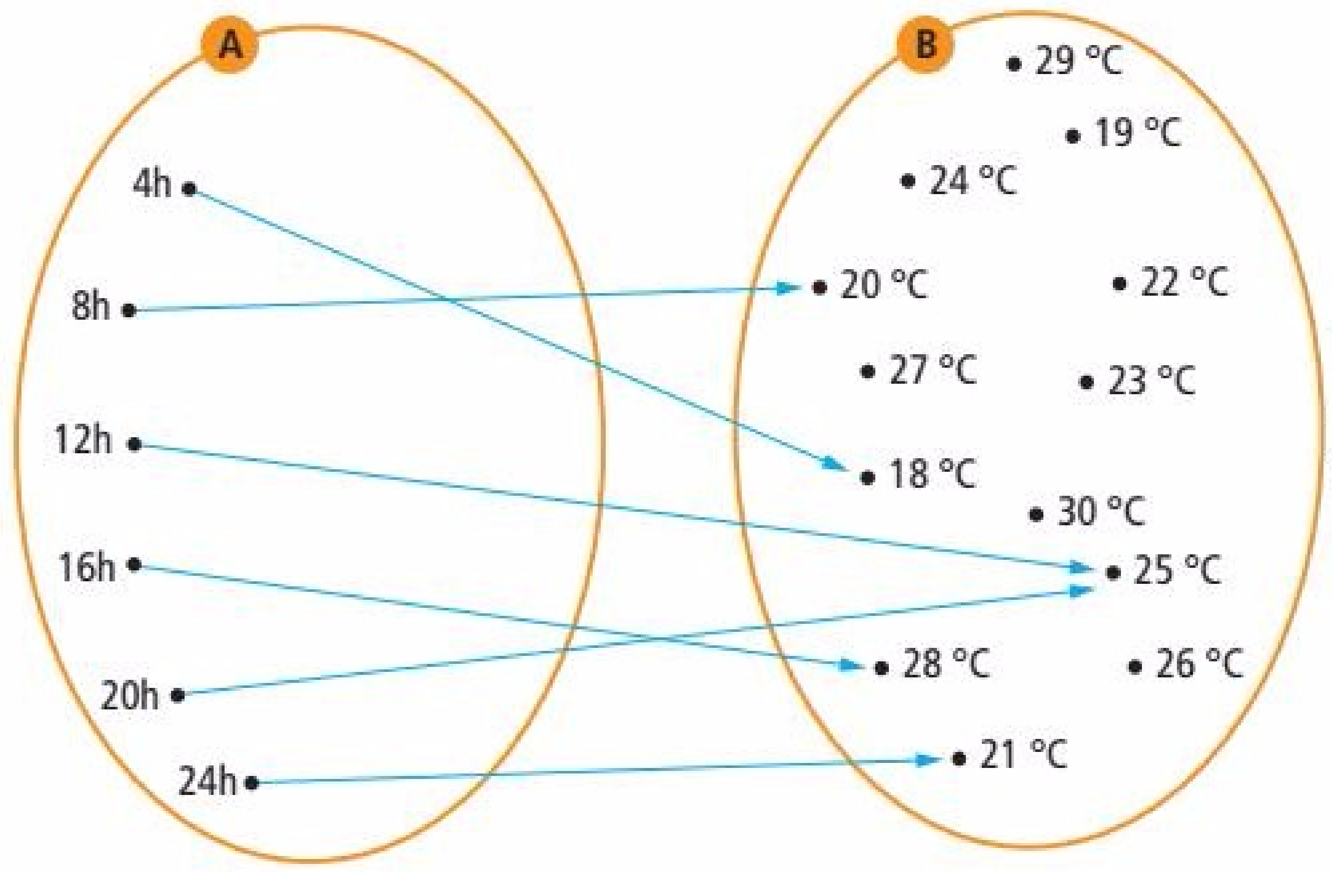
1ª situação

O Centro de Metereologia de determinada cidade realizou medições da temperatura no centro da cidade de quatro em quatro horas durante um dia. Sabe-se que nesse dia a variação de temperatura foi de 18 °C a 30 °C. Às 4h a temperatura registrada foi de 18 °C; às 8h, 20 °C; às 12h, 25 °C; às 16h, 28 °C; às 20h, 25 °C e às 24h, 21 °C.

Podemos representar essas informações por meio de um diagrama, chamado de **diagrama de flechas**, conforme mostra a imagem ao lado.

Os elementos do conjunto *A* são os horários do dia em que houve medição e os do conjunto *B* são os possíveis valores de temperatura obtidos nessa medição. Como cada um dos horários no conjunto *A* está relacionado a apenas um valor de temperatura no conjunto *B*, podemos dizer que essa relação é uma função. Além disso, o horário da medição é a variável independente e o valor da temperatura é a variável dependente.

A partir do diagrama podemos notar que em dois horários a temperatura foi 25 °C e que em nenhum dos horários medidos a temperatura registrada foi 19 °C, 22 °C, 23 °C, 24 °C, 26 °C, 27 °C, 29 °C ou 30 °C.



Editoria de arte

Professor, a palavra "peso" aqui está sendo usada em seu sentido coloquial, com a ideia de massa e não com o sentido de força-peso da Física.

2ª situação

A **tabela** ao lado mostra as tarifas praticadas pelo correio brasileiro para o envio de carta não comercial e cartão-postal.

Para observar como a forma dessa tabela determina a relação entre "peso" e preço, escolhemos um valor na coluna **peso** e lemos na horizontal para achar um valor correspondente na coluna **preço básico**. Por exemplo, ao escolhermos 25 g como valor de entrada, obtemos o preço de R$ 1,50 como valor da saída.

Com base na tabela, podemos obter outras informações a respeito da relação "peso" e preço básico, como:

- O valor a ser pago por uma carta que pesa 62 g é R$ 2,00;
- O "peso" máximo de uma carta para que sua tarifa não ultrapasse R$ 3,00 é 150 g;
- Não é possível que duas cartas com preços diferentes tenham o mesmo "peso".

Note que cada "peso" de carta a ser enviada corresponde a um único preço.

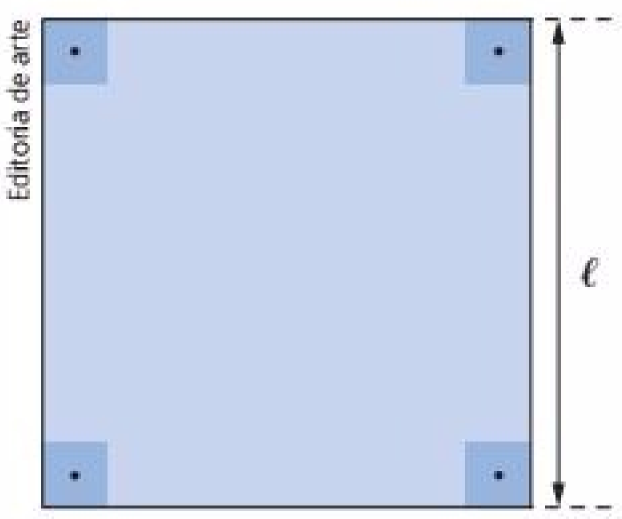
Como o preço é função do "peso" da carta, o "peso" é a variável independente e o preço é a variável dependente.

Carta não comercial e cartão-postal (vigência 10/4/2015)

Peso (g)	**Preço básico** (R$)
Até 20	0,95
Mais de 20 até 50	1,50
Mais de 50 até 100	2,00
Mais de 100 até 150	2,55
Mais de 150 até 200	3,10
Mais de 200 até 250	3,65
Mais de 250 até 300	4,20
Mais de 300 até 350	4,70
Mais de 350 até 400	5,25
Mais de 400 até 450	5,80
Mais de 450 até 500	6,35

Fonte: CORREIOS. **Carta não comercial e cartão-postal**. Você. Disponível em: <www.correios.com.br/para-voce/consultas-e-solicitacoes/precos-e-prazos/servicos-nacionais_pasta/carta>. Acesso em: 2 dez. 2015.

3ª situação



Você já deve ter estudado que para determinar a área *A* de um quadrado devemos multiplicar a medida ℓ do lado por ela mesma, ou seja, elevar ao quadrado. Essa situação pode ser representada pela fórmula $A = \ell^2$.

Sendo *A* e ℓ números reais positivos, essa fórmula determina uma correspondência entre esses valores, de modo que a área de um quadrado é uma função da medida do lado. Por exemplo, se ℓ for igual a 5 cm, a área *A* será 25 cm^2.

$$A = \ell^2 \Rightarrow A = 5^2 \Rightarrow A = 25$$

É possível observar na tabela a seguir que cada medida do lado do quadrado corresponde a uma única área para esse quadrado.

ℓ	1	2	3	10	50	100
A	1	4	9	100	2 500	10 000

Como a área do quadrado depende da medida de seu lado, a variável independente é a medida do lado e a variável dependente é a área.

Nem toda função pode ser expressa por uma lei de formação.

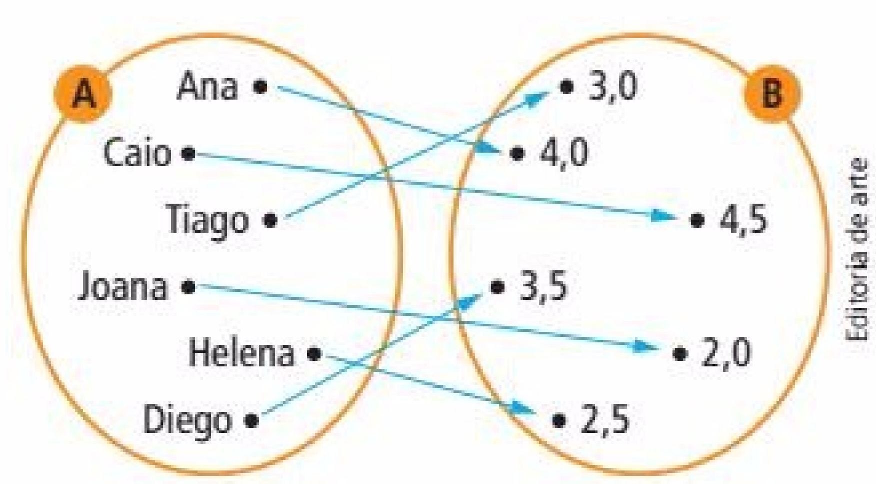
A fórmula da área de um quadrado pode ser interpretada como a **lei de formação** ou a **lei de correspondência** da função que relaciona a área *A* de um quadrado e a medida do lado ℓ.

Outra maneira de compreender a lei de formação de uma função é compará-la com uma máquina que transforma a matéria-prima (variável independente) em produto final (variável dependente). Observe abaixo um esquema que mostra como uma máquina "transforma" a medida do lado (ℓ) de um quadrado em sua respectiva área (*A*).

Professor, caso julgue interessante, cite outros exemplos de função:
a) Em um grupo de pessoas, a função que associa cada pessoa à sua idade.
b) Sendo *T* o conjunto de todos os triângulos, a função que associa cada triângulo ao seu perímetro.
c) A função que associa cada brasileiro ao seu primeiro nome.
d) A função que associa cada número natural ao seu dobro.

Exercícios resolvidos

1 A turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola recebeu as notas da primeira prova de História do ano. Para verificar o desempenho dos alunos, o professor montou o diagrama de flechas a seguir com as notas dos alunos que obtiveram nota menor do que 5,0, que foram Ana, Caio, Tiago, Joana, Helena e Diego.



A partir dessas informações, responda.

a) O diagrama apresentado relaciona quais grandezas?

b) Algum aluno citado ficou sem nota na prova de História?

c) Sobrou alguma nota sem aluno?

Resolução

a) O diagrama de flechas apresentado relaciona cada aluno à nota obtida na prova de História.

b) Não, todos os alunos citados têm uma nota atribuída.

c) Não, todas as notas consideradas foram atribuídas a um dos alunos.

2 Uma loja está liquidando seu estoque de DVDs e aplicou descontos nos preços conforme a tabela ao lado.

Preço dos DVDs em liquidação	
Quantidade de DVDs	**Preço** (em R$)
1	4,00
2	7,00
3	10,00
4	12,00
5 ou mais	2,50 cada DVD

Fonte: Dados fictícios.

Com base nos dados desta tabela, responda:

a) O que ela mostra?

b) O preço é uma função da quantidade de DVDs?

c) Quais são as variáveis dependente e independente nessa situação?

d) Qual é o preço a ser pago por 3 DVDs? E por 6 DVDs?

Resolução

a) A tabela mostra que o preço de cada DVD varia conforme a quantidade de DVDs comprada.

b) Sim. O preço a ser pago é uma função da quantidade de DVDs, pois cada quantidade de DVDs corresponde a um único preço.

c) A variável independente é a quantidade de DVDs comprados e a variável dependente é o preço a ser pago.

d) Por 3 DVDs, o preço é R$ 10,00 e por 6 DVDs, o preço é R$ 15,00, pois: $6 \cdot 2{,}50 = 15{,}00$.

3 Marina é vendedora de uma loja de roupas. Seu salário mensal bruto é calculado por meio da fórmula $S = 900 + 0{,}05x$, em que S é o salário mensal bruto, 900 é a parte fixa do salário (R$ 900,00) e x é o valor total das vendas efetuadas no mês, sobre o qual ela recebe 5% de comissão.

Com base no enunciado, responda:

a) Qual será o salário de Marina se ela vender R$ 5 000,00 de mercadorias?

b) Se, no mês passado, o salário bruto de Marina atingiu R$ 1 500,00, qual foi o valor total das vendas que ela efetuou?

Resolução

a) Sendo $x = 5000$, temos:

$$S = 900 + 0{,}05x \Rightarrow S = 900 + 0{,}05 \cdot 5000 \Rightarrow S = 900 + 250 \Rightarrow S = 1150$$

Portanto, se Marina vender R$ 5 000,00, seu salário bruto será R$ 1 150,00.

b) Fazendo $S = 1500$, temos:

$$S = 900 + 0{,}05x \Rightarrow 1500 = 900 + 0{,}05x \Rightarrow 0{,}05x = 1500 - 900 \Rightarrow 0{,}05x = 600 \Rightarrow x = 12000$$

Logo, as vendas de Marina no mês passado totalizaram R$ 12 000,00.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Nos itens abaixo estão descritas algumas relações entre variáveis. Em cada caso, identifique qual é a variável independente.

a) O número de barras de chocolate que alguém compra e a quantia paga por elas.

b) A duração de uma chamada local de um telefone público e o custo da chamada.

c) O andar do apartamento em que uma pessoa mora e o tempo necessário para o elevador, a partir do térreo e sem nenhuma parada, chegar até o apartamento. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

2. (Saresp-SP) As variáveis *s* e *t* estão relacionadas de acordo com a tabela abaixo:

t	1	2	3	4	5
s	0	3	8	15	24

A relação algébrica entre *s* e *t* é:

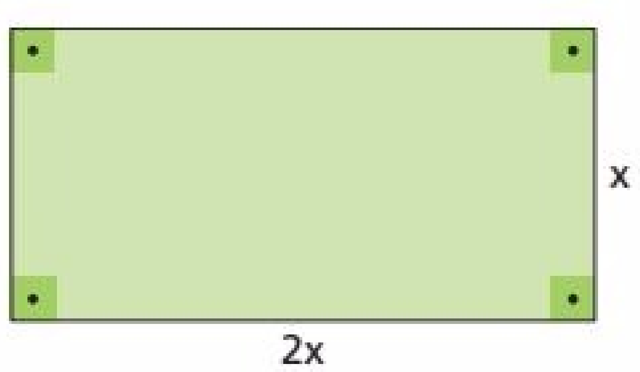
a) $s = 2t - 2$

b) $s = t - 1$

X c) $s = t^2 - 1$

d) $s = t^2$

3. O retângulo representado na figura tem lados que medem *x* e 2x.



Editoria de arte

Expresse o perímetro *P*, a área *A* e a medida *d* da diagonal desse retângulo em função de *x*.
$P = 6x$; $A = 2x^2$; $d = x\sqrt{5}$

4. Ao programar uma fórmula em uma planilha de cálculo, Arthur usou $y = ax + b$, em que *a* e *b* são números inteiros, e anotou alguns dos valores obtidos na tabela abaixo.

x (nº de entrada)	y (nº de saída)
0	3
1	5
2	7
3	9
4	11
5	13

Analisando a tabela, determine os valores de *a* e *b* e escreva a fórmula utilizada por Arthur. $y = 2x + 3$

5. (UFG-GO) Um padeiro fabrica 300 pães por hora. Considerando esse dado, pede-se:

a) a lei que representa o número de pães fabricados (*p*) em função do tempo (*t*); $p = 300t$

b) quantos pães são fabricados em 3 horas e 30 minutos? 1050 pães.

6. (Epcar-MG) Um pintor foi contratado para pintar a fachada do prédio do Comando da Epcar, em decorrência das comemorações do seu sexagésimo aniversário. Esse pintor cobra um valor fixo de 30 reais e mais uma quantia que depende da área pintada. A tabela seguinte indica o orçamento apresentado pelo pintor.

Área x pintada (em m^2)	Total y a pagar pela pintura (em reais) incluindo a parcela fixa
5	40
10	50
15	60
20	70
30	90
40	110

Com base nos dados acima, classifique em (**V**) verdadeiro ou (**F**) falso cada item a seguir.

O pintor cobra 30 reais mais 3 reais pelo metro quadrado pintado.

Se foram pagos pela pintura 530 reais, então a área pintada foi de 250 m^2.

Pela pintura de uma área correspondente a 150 m^2 seria cobrado menos de 300 reais.

Tem-se a sequência correta em:

a) V – F – F

b) V – F – V

X c) F – V – F

d) F – F – V

7. A relação entre um valor de temperatura expresso em grau Celsius (°C) e em grau Fahrenheit (°F) é dada pela fórmula $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$, em que *C* é o valor da temperatura em grau Celsius e *F* é o valor da temperatura em grau Fahrenheit. Sabe-se que em um período de 10 anos a média de temperatura no mês de dezembro, em Londres, variou de –2 °C a 10 °C. A partir dessas informações responda: o valor de 56 °F pertence a esse intervalo considerado? Não.

Definição de função

Agora que você já tem uma ideia e acompanhou alguns exemplos de funções, vamos conhecer a definição matemática desse tipo de relação entre grandezas e aprofundar o estudo desse tema.

Dados dois conjuntos não vazios, *A* e *B*, e uma correspondência *f* que associa os elementos de *A* com os elementos de *B*, dizemos que *f* é uma função de *A* em *B* quando cada elemento *x* de *A* está associado, por *f*, a um único elemento *y* de *B*.

- As letras x e y são muito utilizadas para representar as variáveis de uma função, mas podemos utilizar outras letras.
- A letra f, em geral, nomeia as funções, mas podemos ter também funções g, h etc. Assim, por exemplo, escrevemos $g: A \rightarrow B$ para designar a função g de A em B.

Indicamos uma função f de A em B, simbolicamente, por $f: A \rightarrow B$ e escrevemos $y = f(x)$ (lê-se: *y* é igual a *f* de *x*) ou seja, a função f transforma x de A em y de B.

Vamos agora utilizar diagramas para analisar algumas relações entre conjuntos de números e, com base nessa análise, classificá-las como **função** ou **não função**.

a) Dados os conjuntos $A = \{1, 4, 7\}$ e $B = \{0, 3, 12, 15, 21, 24\}$, seja a relação de A em B expressa pela lei $y = 3x$, com $x \in A$ e $y \in B$ (Figura 1).

Observamos que:

- todos os elementos de *A* estão associados a elementos de *B*;
- cada elemento de *A* está associado a um único elemento de *B*.

Nesse caso, a relação de *A* em *B* expressa pela lei $y = 3x$ é uma **função de *A* em *B***.

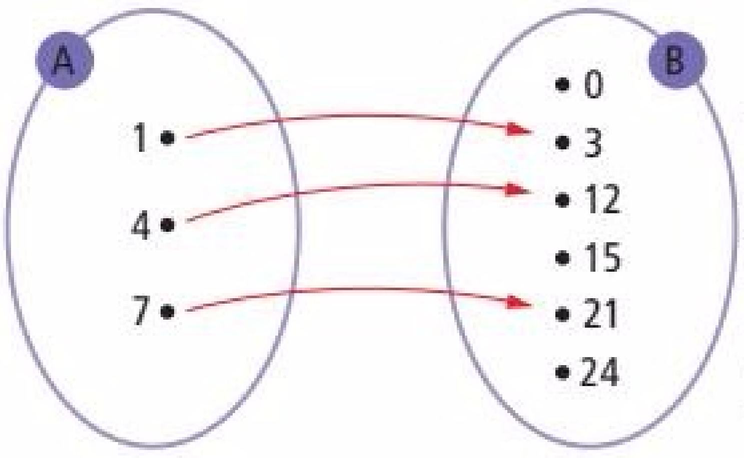


Figura 1

b) Dados os conjuntos $C = \{-2, 0, 2, 5\}$ e $D = \{0, 2, 5, 10, 20\}$, seja a relação de C em D expressa pela lei $y = x$, com $x \in C$ e $y \in D$ (Figura 2).

Esse exemplo **não representa uma função de *C* em *D***, pois o elemento -2 do conjunto *C* não tem correspondente em *D*.

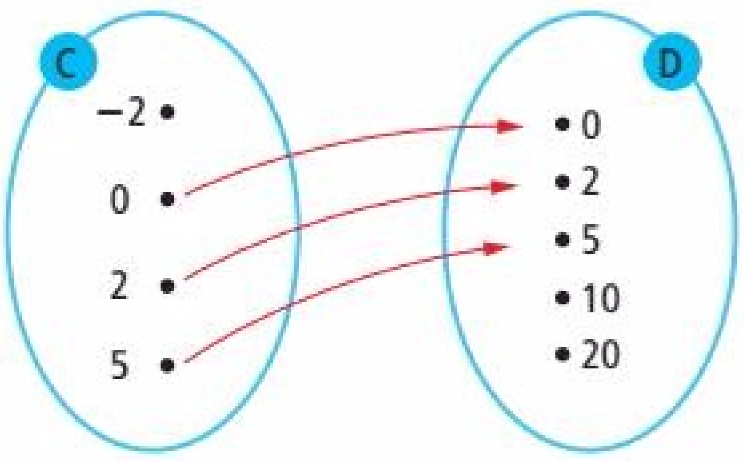


Figura 2

c) Dados os conjuntos $E = \{-3, -1, 1, 3\}$ e $F = \{1, 3, 6, 9\}$, seja a relação de E em F expressa pela lei $y = x^2$, com $x \in E$ e $y \in F$ (Figura 3).

A relação expressa pela lei $y = x^2$, nesse caso, representa uma **função de *E* em *F***, pois:

- todos os elementos de *E* estão associados a elementos de *F*;
- cada elemento de *E* está associado a um único elemento de *F*.

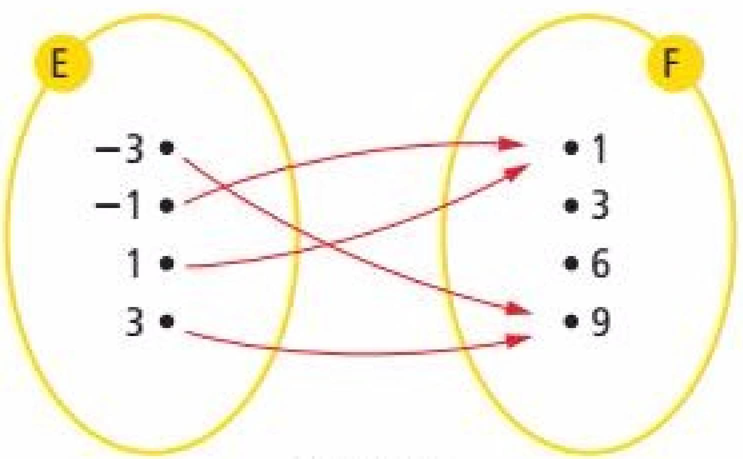


Figura 3

d) Dados os conjuntos $G = \{16, 81\}$ e $H = \{-3, -2, 2, 3\}$, seja a relação de G em H expressa pela lei $y = \pm\sqrt[4]{x}$, com $x \in G$ e $y \in H$ (Figura 4).

Esse exemplo **não representa uma função de *G* em *H***, pois o elemento 16 do conjunto *G* está associado a dois elementos distintos (-2 e 2) do conjunto *H*, assim como o elemento 81 de *G* está associado a dois elementos em *H* (-3 e 3).

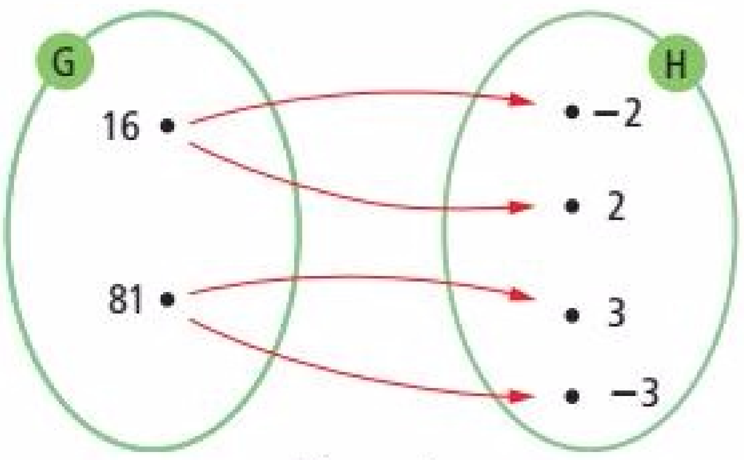
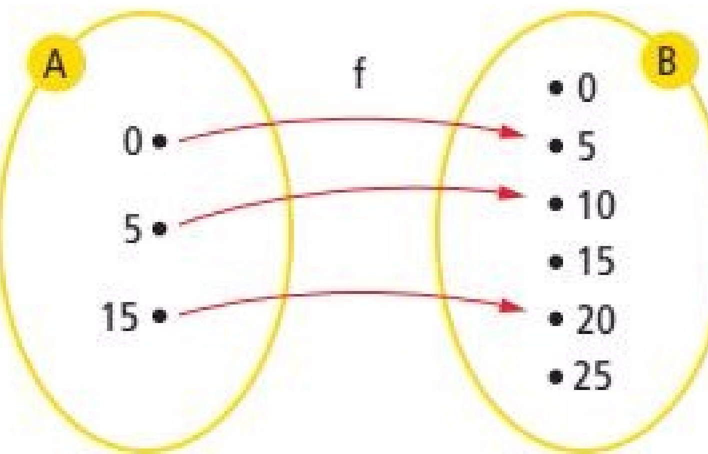


Figura 4

Domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função

Observe o diagrama que representa a função f: $A \to B$, definida por $y = x + 5$.



Editoria de arte

O conjunto *A* chama-se **domínio** da função. Esse conjunto é constituído de todos os valores dados a *x* (variável independente) e é indicado por **D(f)**.

O conjunto *B* é chamado de **contradomínio** da função. Esse conjunto é constituído de todos os valores possíveis que *y* (variável dependente) pode assumir e é indicado por **CD(f)**.

Assim, de acordo com o diagrama, temos:

- $D(f) = \{0, 5, 15\} = A$
- $CD(f) = \{0, 5, 10, 15, 20, 25\} = B$

Cada elemento *x* do domínio tem um correspondente *y* no contradomínio. A esse valor de *y* damos o nome de **imagem** de *x* pela função *f*, que indicamos por $\mathbf{y = f(x)}$.

Esse tipo de notação é muito útil. Por exemplo, em vez de dizermos: "Qual o valor de *y* quando $x = 5$?", dizemos simplesmente: "Qual o valor de f(5)?". Assim, f(0) significa o valor de *y* quando *x* é 0, ou seja:

$$f(0) = 0 + 5 \Rightarrow f(0) = 5 \text{ ou } y = 5$$

O conjunto de todos os valores de *y* que são imagens de valores de *x* é chamado de **conjunto imagem** da função. O conjunto imagem, que indicamos por **Im(f)**, é um subconjunto do contradomínio. Assim, nesse caso, temos que:

$$Im(f) = \{5, 10, 20\}$$

Uma função *f* é precisamente definida quando seu domínio, seu contradomínio e sua lei de formação são explicitamente estabelecidos.

Estudo do domínio de uma função real

Uma função em que o domínio e o contradomínio são subconjuntos de $\mathbb{R}$ é chamada de **função real de variável real**. Por exemplo:

a) A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x^2 - 1$, possui domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

b) A função g: $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = -\frac{x}{2} + 5$, possui domínio $D(g) = \mathbb{Z}$ e $CD(g) = \mathbb{R}$.

c) A função h: $[-2, 5[\to \mathbb{R}_+$, dada por $h(x) = 2^{x+3}$, possui domínio $D(h) = [-2, 5[$ e $CD(h) = \mathbb{R}_+$.

Vimos que uma função *f* fica precisamente definida quando são explicitados seu domínio, seu contradomínio e sua lei de formação. Contudo, quando uma função *f* tem uma lei de correspondência $y = f(x)$ entre conjuntos de números, sem menção explícita a seu domínio, convenciona-se que o domínio será constituído de todos os valores reais de *x* para os quais f(x) é um número real. Portanto, quando não há menção explícita ao domínio e ao contradomínio de uma função, subentende-se que $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$. Veja alguns exemplos:

d) Na função dada por $f(x) = x^3 - 2x^2 + 7$, *x* pode ser qualquer número real, ou seja: $D(f) = \mathbb{R}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

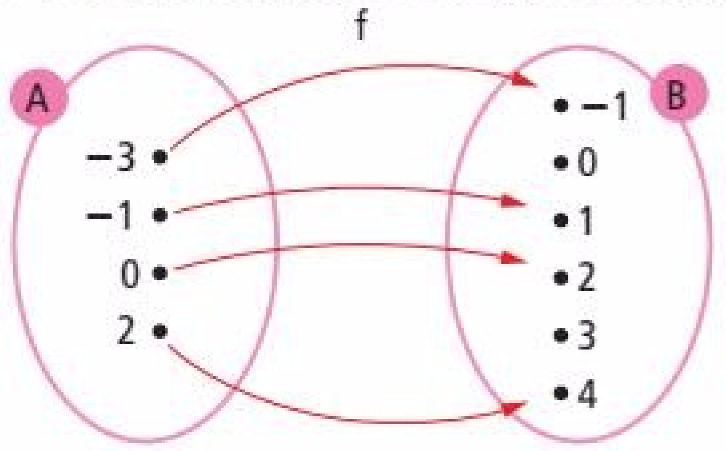
e) Seja a função dada por $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$. Verificamos que para $x = 3$ o denominador se anula, ou seja, a expressão $\frac{x+1}{x-3}$ não está definida em $\mathbb{R}$ quando $x = 3$. Portanto, devemos excluir o valor $x = 3$ do domínio dessa função.
Assim: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$ e $CD(f) = \mathbb{R}$.

f) Na função $g(x) = \sqrt{x+5}$, devemos desconsiderar qualquer valor de *x* que transforme o radicando em um número negativo, pois a raiz quadrada de um número negativo não está definida no conjunto dos números reais. Nesse caso, é preciso que $x + 5 \geqslant 0$ ou $x \geqslant -5$. Então, o domínio é $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -5\}$ e o contradomínio é $CD(g) = \mathbb{R}$.

Assim, para explicitar ou identificar o domínio de uma função apresentada apenas pela lei de formação $y = f(x)$, devemos considerar o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}$ em que *f* pode ser definida.

Exercícios resolvidos

4 Dada a função f: $A \to B$ definida por $f(x) = x + 2$ e representada no diagrama abaixo, identifique o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem de *f*.



Ilustrações: Editoria de arte

Resolução

Observando o diagrama, temos:

$D(f) = A = \{-3, -1, 0, 2\}$

$CD(f) = B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$Im(f) = \{-1, 1, 2, 4\}$

5 Um recipiente está completamente cheio com 20 litros de água. Abre-se uma torneira que o esvazia à razão de 2 litros por minuto.

a) Escreva a função que representa o volume de água *V* que resta no tanque em relação ao tempo *t* em minutos até que o tanque fique vazio.

b) Em quanto tempo o tanque ficará vazio?

c) Que valores *t* pode assumir nessa função? Qual é o domínio da função?

d) O valor $V = 30$ faz parte do conjunto imagem dessa função? Justifique sua resposta.

Resolução

a) Atribuindo alguns valores para *t*, podemos construir uma tabela:

t (min)	V (L)
0	20
1	$20 - 1 \cdot 2 = 18$
2	$20 - 2 \cdot 2 = 16$
3	$20 - 3 \cdot 2 = 14$
4	$20 - 4 \cdot 2 = 12$
⋮	⋮
t	$20 - t \cdot 2 = 20 - 2t$

Com base nessa tabela, obtemos $V(t) = 20 - 2t$.

b) O tanque fica vazio quando $V(t) = 0$. Assim, temos:

$V(t) = 20 - 2t \Rightarrow 0 = 20 - 2t \Rightarrow 2t = 20 \Rightarrow t = 10$

O tanque fica vazio após 10 minutos.

c) Como a função está definida apenas até o tanque ficar vazio, o tempo *t* pode assumir valores no intervalo de tempo igual a:

$$0 \leqslant t \leqslant 10$$

Portanto, o domínio da função é:

$D(f) = \{t \in \mathbb{R}_+ \mid 0 \leqslant t \leqslant 10\}$ ou $D(f) = [0, 10]$

d) Para saber se o valor $V = 30$ faz parte do conjunto imagem, o substituímos na lei da função e observamos o valor de *t* encontrado:

$V(t) = 20 - 2t \Rightarrow 20 - 2t = 30 \Rightarrow -2t = 10 \Rightarrow t = -5$

Como $t = -5$ não pertence ao domínio da função, então o valor $V = 30$ não pertence ao conjunto imagem da função.

6 Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 9}$

b) $y = \sqrt{1 - 6x}$

Resolução

a) A função dada por $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x^2 - 9}$ só está definida se $x^2 - 9 \neq 0$.

Resolvendo a desigualdade, temos:

$x^2 - 9 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 9 \Rightarrow x \neq 3$ e $x \neq -3$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3 \text{ e } x \neq -3\}$ ou $D(f) = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

b) A função dada por $y = \sqrt{1 - 6x}$ só está definida se $1 - 6x \geqslant 0$.

Resolvendo a inequação, temos:

$1 - 6x \geqslant 0 \Rightarrow -6x \geqslant -1 \Rightarrow 6x \leqslant 1 \Rightarrow x \leqslant \dfrac{1}{6}$

Portanto, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{1}{6}\right\}$.

7 Determinar o domínio da função:

$f(x) = \sqrt{x - 4} + \dfrac{1}{\sqrt{x - 2}}$

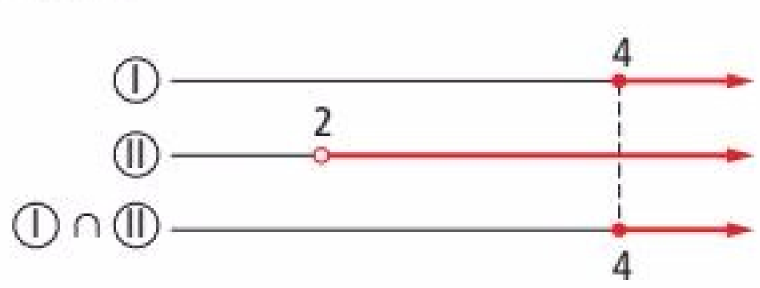
Resolução

Analisando cada uma das raízes, temos:

- $\sqrt{x - 4}$ só é possível se $x - 4 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 4$ (I)
- $\sqrt{x - 2}$ só é possível se $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (II)

Note que a raiz está no denominador, por isso não pode ser igual a zero.

Representando as condições (I) e (II) na reta real e determinando a intersecção dos respectivos intervalos, temos:



Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 4\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

8. Dado o conjunto $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, determine o conjunto imagem da função $f: A \to \mathbb{R}$ quando *f* for definida por:

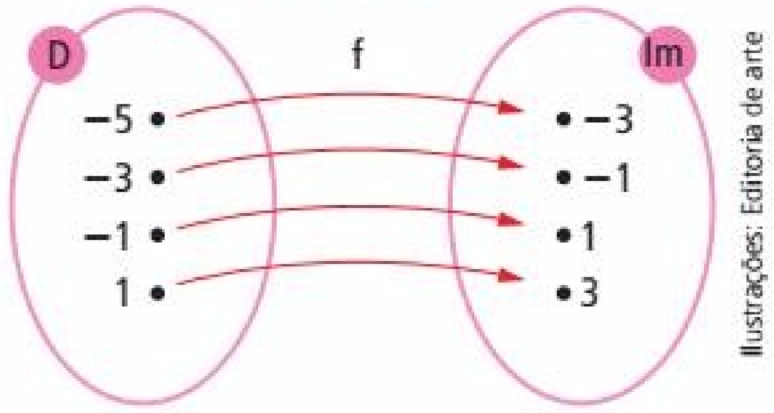
a) $f(x) = x^3$ $Im(f) = \{-8, -1, 0, 1\}$

b) $f(x) = -x + 3$ $Im(f) = \{2, 3, 4, 5\}$

c) $f(x) = 1 - x^2$ $Im(f) = \{-3, 0, 1\}$

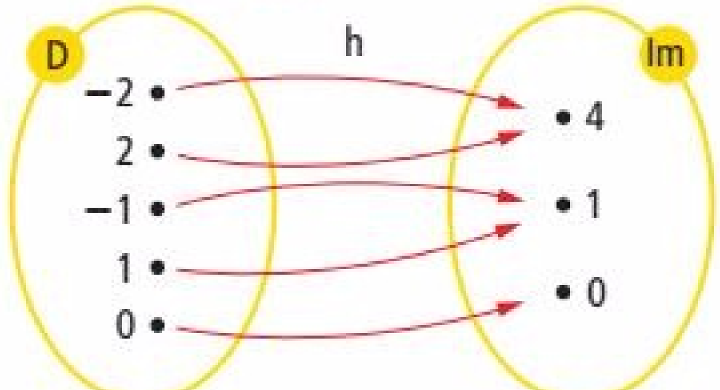
9. Os diagramas de flechas a seguir indicam o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f) de uma função. Em cada caso, escreva uma possível lei de formação da função. Respostas possíveis:

a) função *f* $y = x + 2$ ou $f(x) = x + 2$



Ilustrações: Editoria de arte

b) função *h* $y = x^2$ ou $h(x) = x^2$



10. Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = 4x - 5$ $D(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 1}$ $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

c) $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$

11. Observe a sequência de triângulos cujos lados são formados por palitos de fósforo.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Copie no caderno e complete a tabela.

Números de palitos em cada lado	1	2	3	4	5	6
Total de palitos em cada triângulo	3	6				

b) Chamando o número de palitos em cada lado de *x* e de *y* o total de palitos em cada triângulo, escreva a expressão matemática que expressa *y* em função de *x*.

c) Qual é o domínio dessa função? E a imagem?

d) Quantos palitos deve ter cada lado para se construir um triângulo com 45 palitos?

12. Determine o domínio das funções a seguir.

a) $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 9x + 20}$ $D = \mathbb{R} - \{4, 5\}$

b) $g(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{3-x}}$ $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

c) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^3} + \dfrac{2x}{\sqrt{x+4}}$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1 \text{ e } x \neq 0\}$

13. (Vunesp-SP) A unidade usual de medida para a energia contida nos alimentos é kcal (quilocaloria). Uma fórmula aproximada para o consumo diário de energia (em kcal) para meninos entre 15 e 18 anos é dada pela função $f(h) = 17 \cdot h$, onde *h* indica a altura em cm e, para meninas nessa mesma faixa de idade, pela função $g(h) = (15{,}3) \cdot h$. Paulo, usando a fórmula para meninos, calculou seu consumo diário de energia e obteve 2 975 kcal. Sabendo-se que Paulo é 5 cm mais alto que sua namorada Carla (e que ambos têm idade entre 15 e 18 anos), o consumo diário de energia para Carla, de acordo com a fórmula, em kcal, é:

a) 2 501
c) 2 770
e) 2 970
X b) 2 601
d) 2 875

14. O gerente de uma loja de computadores verificou que, quanto mais ele anuncia em *sites* de jornais, mais ele vende. Essa relação pode ser expressa pela função $y = \dfrac{3}{2}x + 80$, em que *y* representa o número de computadores vendidos durante a semana e *x* o número de anúncios publicados nos *sites* de jornais durante o mesmo período.

Nessas condições, quantas vezes o gerente deverá anunciar esta semana para que a loja venda 200 computadores? 80

15. (Unicamp-SP) O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada bandeirada, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,86, calcule:

a) o preço de uma corrida de 11 km; R$ 12,90

b) a distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21,50 pela corrida. 21 km

16. Uma empresa que fabrica componentes magnéticos para computadores afirmou que o número *N* de componentes montados por um trabalhador médio, *x* horas após iniciar o trabalho às 8 horas da manhã, é dado pela expressão $N(x) = -x^3 + 7x^2 + 14x$, com $0 \leqslant x \leqslant 4$. Com base nessas informações, quantos componentes um trabalhador médio montará:

a) entre 8h e 9h? 20 componentes

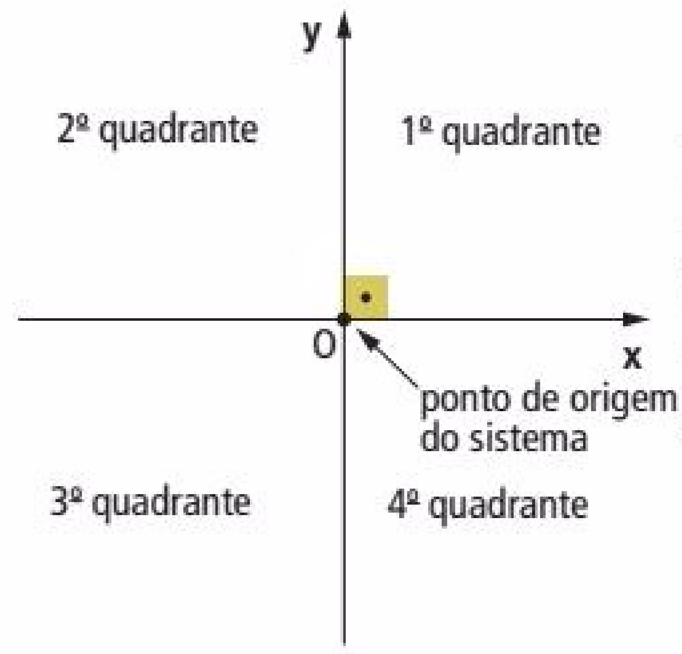
b) entre 9h e 10h? 28 componentes

Gráfico de uma função

De modo geral, as funções são representadas graficamente no **sistema cartesiano ortogonal**, que provavelmente já foi estudado no Ensino Fundamental. Vamos relembrar algumas ideias e conceitos desse sistema de coordenadas para, em seguida, apresentar o estudo dos gráficos de funções.

Sistema cartesiano ortogonal

Para determinar a localização de um ponto no plano, utilizamos o sistema cartesiano ortogonal, que é estabelecido por duas retas reais perpendiculares entre si, denominadas **eixos** do sistema cartesiano. O ponto de intersecção dos eixos é o ponto *O*, origem do sistema cartesiano.



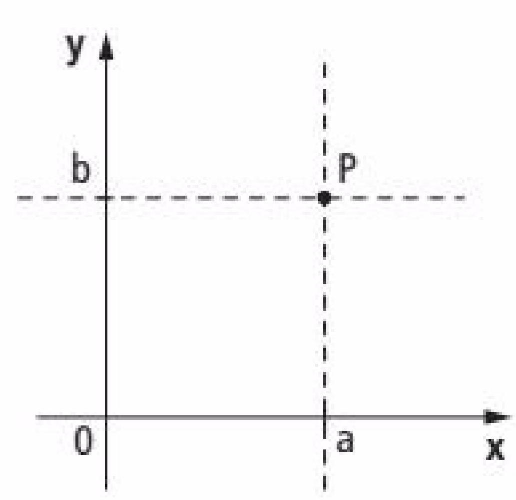
Ilustrações: Editoria de arte

Os eixos são identificados pelas letras *x* e *y*. O eixo horizontal (eixo *x*) é denominado **eixo das abscissas**. O eixo vertical (eixo *y*) é denominado **eixo das ordenadas**.

Esses eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas **quadrantes**, que são numeradas no sentido anti-horário, como indicado na figura ao lado.

Qualquer ponto do plano pode ser localizado por meio desse sistema.

Para localizarmos o ponto *P*, indicado na figura abaixo, traçamos por *P* uma reta paralela ao eixo *y* que cortará o eixo *x* em um ponto associado a um número que representaremos por *a*. Repetimos o procedimento traçando por *P* uma reta paralela ao eixo *x*, que vai cortar o eixo *y* em um ponto associado a um número que representaremos por *b*.

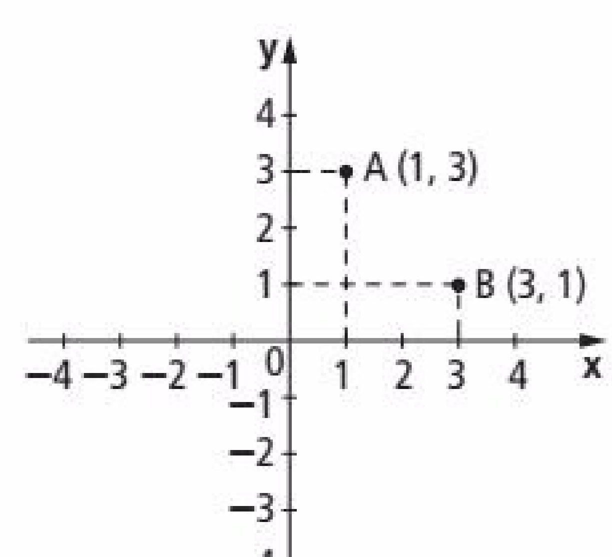


Então, dizemos que o ponto *P* tem abscissa *a* e ordenada *b*. Os números reais *a* e *b*, colocados entre parênteses e separados por vírgula, ou por ponto e vírgula, formam o que denominamos **par ordenado** e representam as **coordenadas** do ponto *P* no plano que indicamos por P(a, b).

Assim, para localizar um ponto qualquer no plano, usamos um par ordenado de números reais, que são suas coordenadas.

Para não haver dúvidas, convencionou-se que o primeiro elemento do par ordenado (1ª coordenada) sempre é a abscissa, *x*, e o segundo elemento (2ª coordenada) sempre é a ordenada, *y*.

No plano cartesiano ao lado, você pode verificar a diferença entre as localizações dos pontos correspondentes aos pares ordenados A(1, 3) e B(3, 1).



A(1, 3) $\neq$ B(3, 1)

Assim, dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se a = c e b = d, isto é, quando têm a mesma abscissa e a mesma ordenada.

Observações:

- O ponto *O* (origem) tem coordenadas (0, 0).
- Os pontos dos eixos *x* e *y* não pertencem a nenhum dos quadrantes.
- Todo ponto do eixo *x* tem ordenada igual a zero.
- Todo ponto do eixo *y* tem abscissa igual a zero.

Atenção:
(a, b) $\neq$ (b, a) se a $\neq$ b

Exercícios resolvidos

8 Os pares ordenados $(a - 1, 3)$ e $(-2, 2b + 1)$ representam o mesmo ponto P do plano cartesiano.

a) Determine os valores de a e b.

b) Escreva as coordenadas do ponto P.

Resolução

a) Para que ambos os pares ordenados representem o mesmo ponto, as abscissas $a - 1$ e -2 devem ser iguais, assim como as ordenadas 3 e $2b + 1$. Então, obtemos os valores de a e de b resolvendo as seguintes equações:

$a - 1 = -2 \Rightarrow a = -2 + 1 \Rightarrow a = -1$

$2b + 1 = 3 \Rightarrow 2b = 3 - 1 \Rightarrow b = 1$

b) As coordenadas de P são $(-2, 3)$.

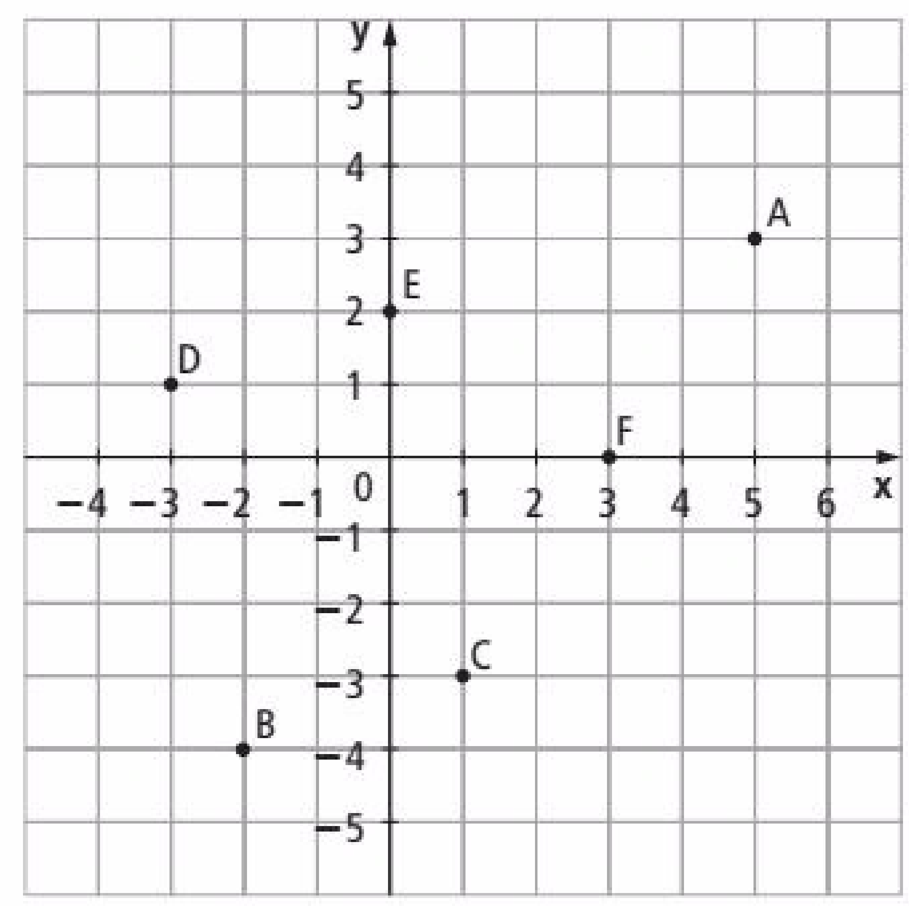
9 Dados os pontos a seguir, determine, quando possível, a que quadrante pertencem.

A(5, 3)	C(1, −3)	E(0, 2)
B(−2, −4)	D(−3, 1)	F(3, 0)

Resolução

Podemos determinar os quadrantes dos pontos indicados de duas maneiras: observando os sinais das coordenadas ou localizando os pontos no plano cartesiano.

Vamos optar pela segunda maneira. Assim:



Ilustrações: Editoria de arte

Então:

$A(5, 3) \rightarrow$ 1º quadrante

$B(-2, -4) \rightarrow$ 3º quadrante

$C(1, -3) \rightarrow$ 4º quadrante

$D(-3, 1) \rightarrow$ 2º quadrante

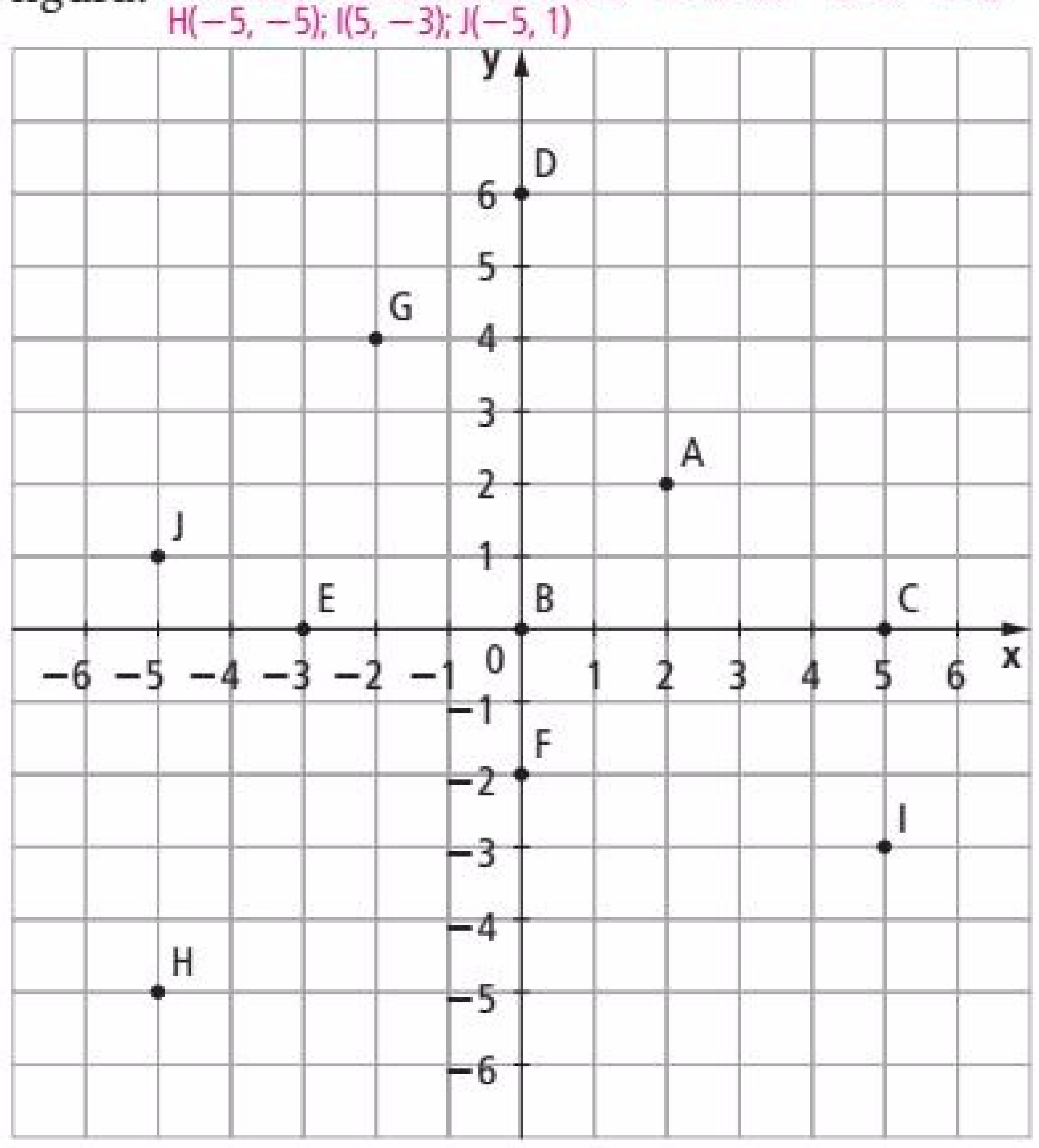
$E(0, 2) \rightarrow$ o ponto está sobre o eixo y; portanto não pertence a quadrante algum.

$F(3, 0) \rightarrow$ o ponto está sobre o eixo x; portanto não pertence a quadrante algum.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

17. Determine as coordenadas dos pontos indicados na figura. A(2, 2); B(0, 0); C(5, 0); D(0, 6); E(−3, 0); F(0, −2); G(−2, 4); H(−5, −5); I(5, −3); J(−5, 1)



18. Determine a e b para que os pares ordenados de números $(2a - 3, b + 2)$ e $(4a - 1, 2b - 3)$ sejam iguais. $a = -1$ e $b = 5$

19. (OBMEP) Manoel testa sua pontaria lançando 5 flechas que atingiram o alvo nos pontos A, B, C, D e E de coordenadas $A = (1, -1)$, $B = (2{,}5; 1)$, $C = (-1, 4)$, $D = (-4, -4)$ e $E = (6, 5)$.

A tabela mostra quantos pontos se ganha quando a flecha acerta um ponto dentro de cada uma das três regiões, conforme mostra a figura.

a) Marque os pontos A, B, C, D e E. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

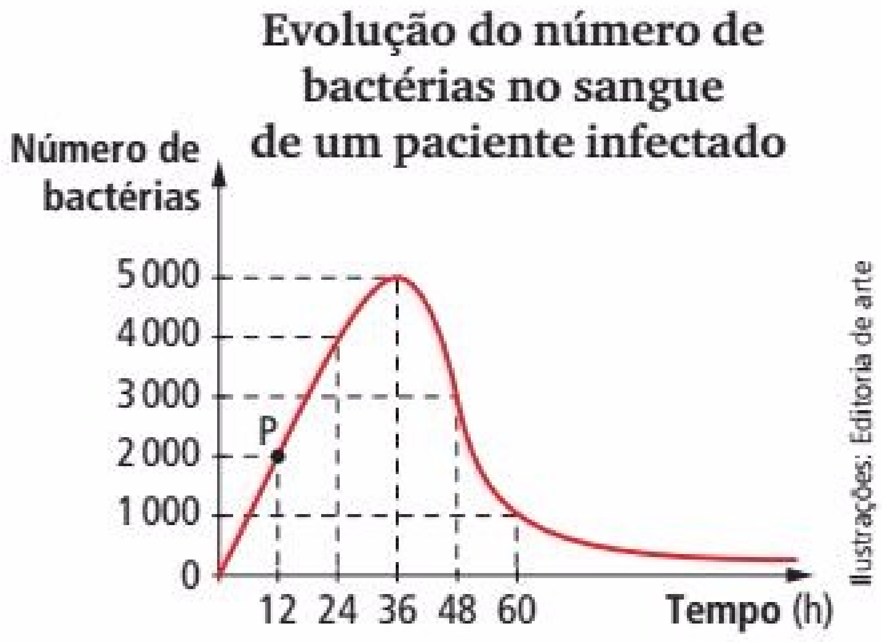
b) Quantas flechas ele acertou no interior do menor círculo? 1 flecha.

c) Ao todo, quantos pontos Manoel fez? 500 pontos.

Interpretação e leitura de gráficos

Um gráfico é uma representação geométrica de dados, que nos permite visualizar relações entre grandezas.

Por exemplo, ao analisar o caso de um paciente infectado por determinado tipo de bactéria, um médico detectou que o número dessas bactérias, por milímetro cúbico de sangue, variou com o passar do tempo, aproximadamente, conforme mostra o gráfico ao lado.



Fonte: Dados fictícios.

O tempo é dado em hora, e o instante zero corresponde ao momento do contágio.

Para observar como o gráfico determina a correspondência entre o tempo e o número de bactérias, escolhemos um ponto *P* qualquer do gráfico. Em seguida, traçamos uma reta vertical e uma horizontal que passem por *P*.

Observe que, nesse caso, essas retas intersectam o eixo *x* em 12 e o eixo *y* em 2 000, ou seja, as coordenadas do ponto *P* são (12, 2 000). Isso significa que 12 horas após o contágio havia 2000 bactérias por milímetro cúbico (mm^3) de sangue desse paciente.

De modo semelhante, podemos obter outras informações desse gráfico. Por exemplo:

- a quantidade máxima de bactérias é atingida, aproximadamente, 36 horas após o contágio;
- 60 horas após o contágio, a quantidade de bactérias é 1 000 por mm^3;
- o número de bactérias aumentou no intervalo de 0 a 36.

Note que a cada momento (em hora) corresponde um único número de bactérias. Como o número de bactérias depende do tempo transcorrido após o contágio, dizemos que o tempo é a variável independente e o número de bactérias é a variável dependente.

Construção de gráficos

Para construir gráficos de funções no sistema cartesiano ortogonal, devemos considerar os valores do domínio da função no eixo *x* (eixo das abscissas) e as respectivas imagens no eixo *y* (eixo das ordenadas).

O gráfico da função é o conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano tais que $y = f(x)$ com $x \in D(f)$.

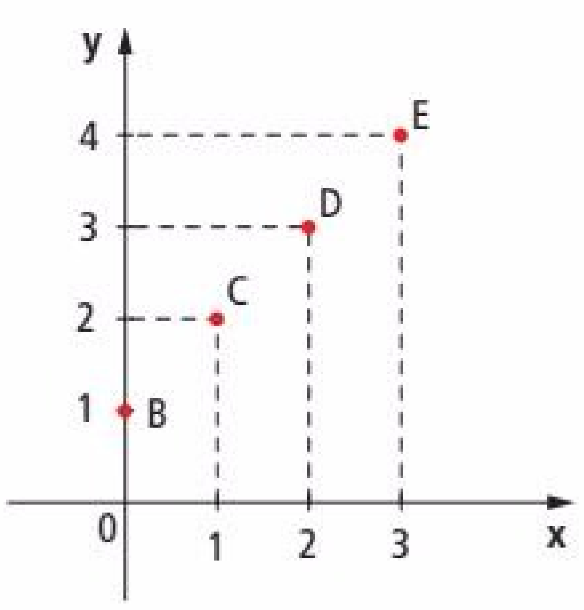
Como exemplo, vamos construir o gráfico da função $f: A \to \mathbb{R}$, dada por $y = x + 1$, em que $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

Iniciamos construindo a tabela ao lado com os valores de *x* do domínio e determinando os valores de $y = f(x)$.

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
1	2	(1, 2)
2	3	(2, 3)
3	4	(3, 4)

Observe que $D(f) = A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $Im(f) = \{1, 2, 3, 4\}$.

Como o conjunto *A* é finito, o gráfico de *f* é formado apenas pelos 4 pontos determinados na tabela:



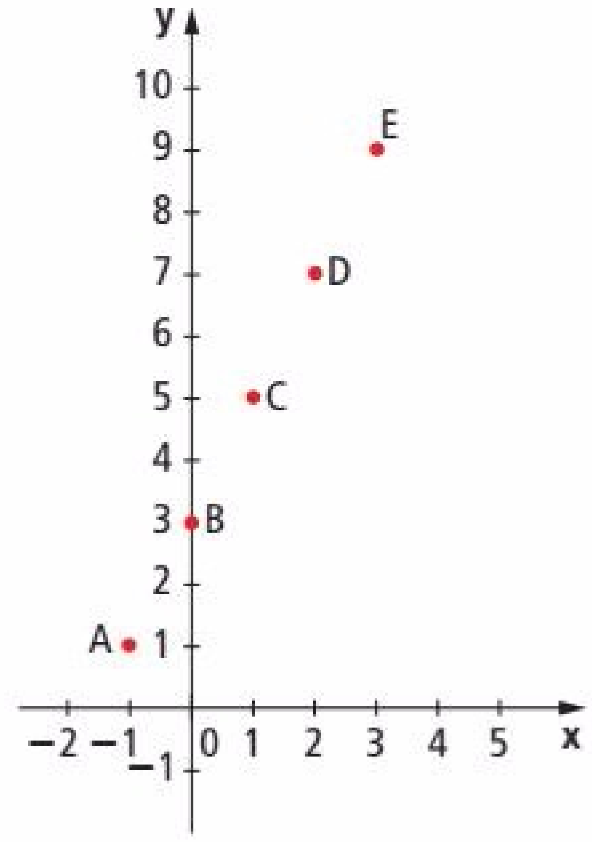
Os pontos *B*, *C*, *D* e *E* constituem o gráfico da função dada.

Agora, vamos construir o gráfico da função *f* dada por $f(x) = 2x + 3$ para três domínios diferentes e observar as semelhanças e diferenças entre cada um deles.

a) $D(f) = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

Inicialmente, construímos uma tabela com os valores de *x* e de *y* e os respectivos pares ordenados.
Em seguida, marcamos os pontos cujas coordenadas são os pares ordenados da tabela no plano cartesiano, como mostra a imagem a seguir.

x	y = 2x + 3	(x, y)
−1	$y = 2 \cdot (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$	(−1, 1)
0	$y = 2 \cdot (0) + 3 = 0 + 3 = 3$	(0, 3)
1	$y = 2 \cdot (1) + 3 = 2 + 3 = 5$	(1, 5)
2	$y = 2 \cdot (2) + 3 = 4 + 3 = 7$	(2, 7)
3	$y = 2 \cdot (3) + 3 = 6 + 3 = 9$	(3, 9)

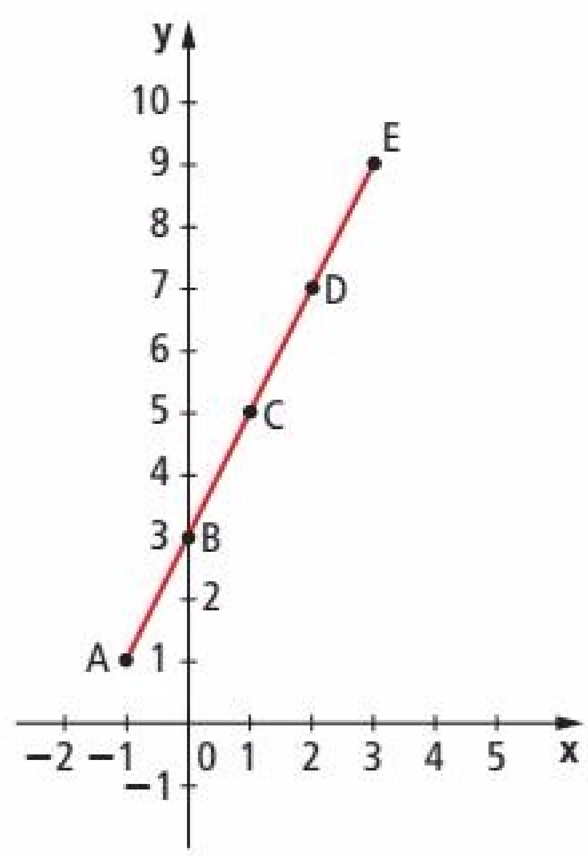


Ilustrações: Editoria de arte

Como o domínio da função é o conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$, o gráfico de *f* são os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* indicados na figura.

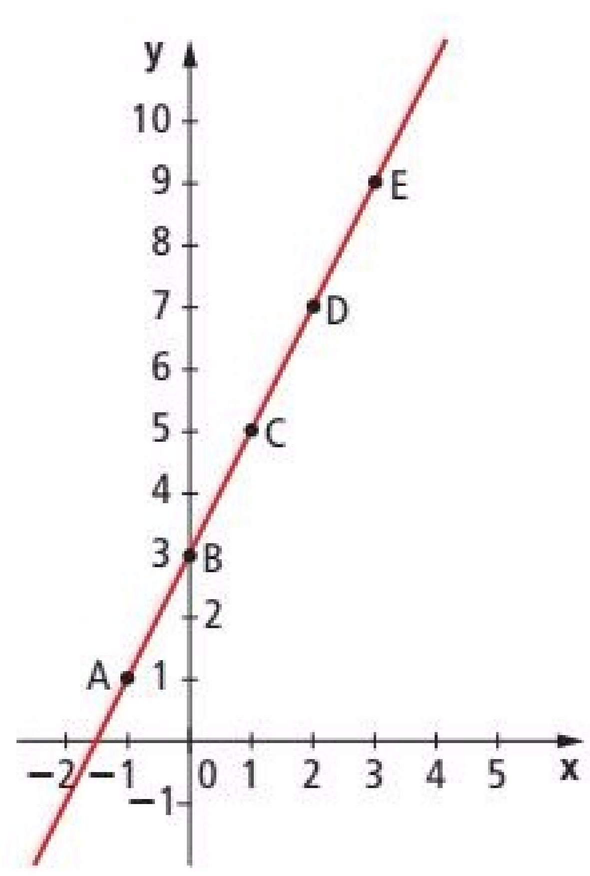
b) $D(f) = [-1, 3]$

Nesse caso o domínio é um intervalo, ou seja, um subconjunto do conjunto dos números reais. Os valores de *x* do exemplo anterior fazem parte do domínio da função, mas existem infinitos outros valores dentro desse intervalo que também têm um valor de *y* correspondente. Ao marcar esses infinitos pontos no plano cartesiano, um segmento de reta é formado, resultando no gráfico mostrado ao lado.
Os pontos $A(-1, 1)$ e $E(3, 9)$ são os extremos dessa função, ou seja, *f* não está definida para valores de *x* menores que -1 ou maiores que 3.



c) $D(f) = \mathbb{R}$

Aqui o domínio de *f* é todo o conjunto dos números reais e, como nos exemplos anteriores, os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* fazem parte do gráfico da função. Além desses, existe uma infinidade de outros pontos que satisfazem a lei da função, então o gráfico de *f* é uma reta em que todo valor de $x \in \mathbb{R}$ tem uma imagem $f(x)$. Veja ao lado o gráfico da função *f* quando $D(f) = \mathbb{R}$.



Portanto, apesar de a lei que define a função ser a mesma nos três casos, os gráficos são diferentes dependendo do domínio estipulado para a função.

Identificação do gráfico de uma função

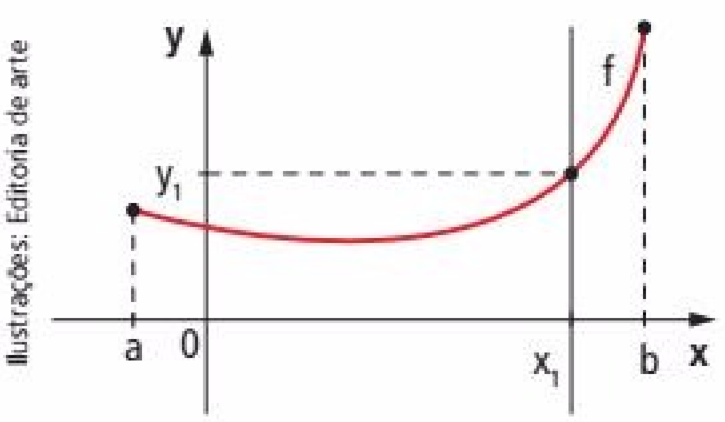
Sabemos que, dada a função $y = f(x)$, para cada x do domínio deve corresponder um único y no contradomínio. Assim, é possível identificar se um gráfico representa ou não uma função traçando retas paralelas ao eixo y.

Para que o gráfico analisado represente uma função, cada reta vertical traçada por pontos de abscissa $x \in D(f)$ deve cruzar o gráfico em um único ponto.

O gráfico abaixo, por exemplo, representa uma função f com domínio $D(f) = [a, b]$, pois qualquer reta vertical cruza o gráfico da função em um único ponto.

É o caso da abscissa $x_1 \in D(f)$, que está associada a uma única imagem y_1.

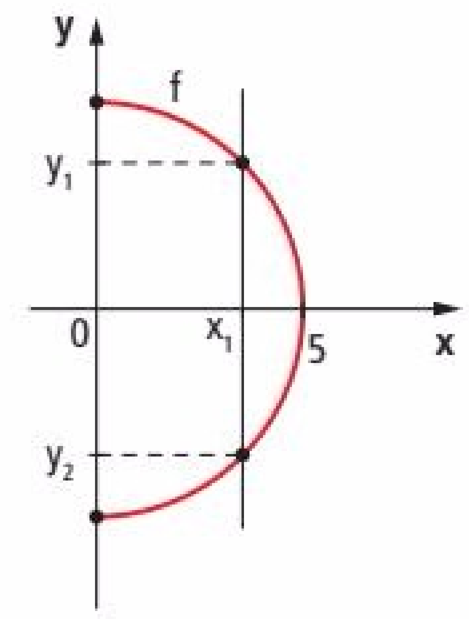
Ilustrações: Editoria de arte



Este gráfico representa uma função.

Se uma reta vertical cruza o gráfico em mais de um ponto, então esse gráfico **não** representa uma função, como mostrado no exemplo ao lado.

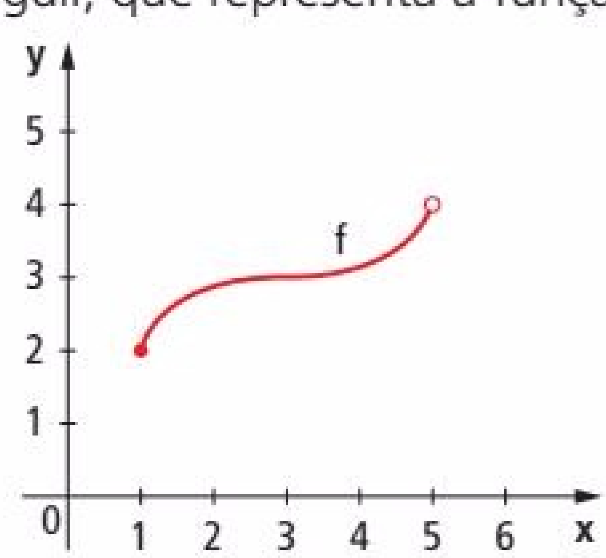
Nesse caso, existem retas paralelas ao eixo y que cruzam o gráfico em dois pontos; a abscissa $x_1 \in D(f)$ está associada a duas imagens diferentes, y_1 e y_2.



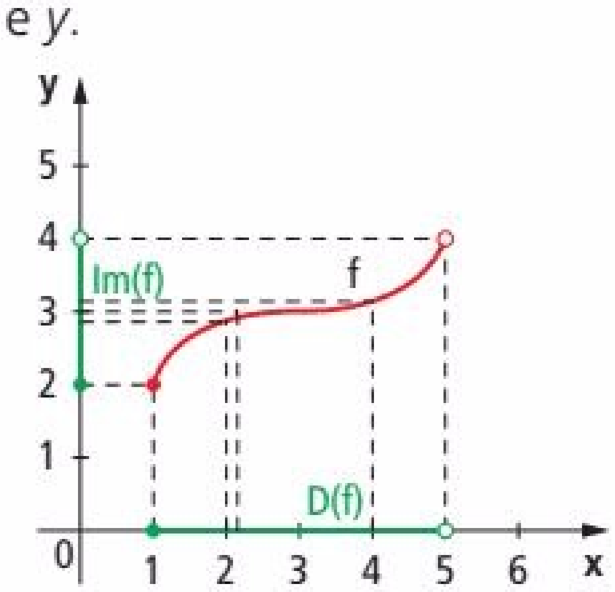
Este gráfico **não** representa uma função.

Determinação do domínio e do conjunto imagem de uma função com base no seu gráfico

Considere o gráfico a seguir, que representa a função f.



Para determinar o domínio e o conjunto imagem de f, projetamos os pontos do gráfico sobre os eixos x e y.



O domínio da função f é o conjunto das abscissas de todos os pontos do gráfico, ou seja:

$$D(f) = [1, 5[\text{ ou } D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 5\}$$

A imagem da função f é o conjunto das ordenadas de todos os pontos do gráfico, ou seja:

$$Im(f) = [2, 4[\text{ ou } Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant y < 4\}$$

História da Matemática

O surgimento dos gráficos

Na matemática são utilizados gráficos para visualizar funções. Em outros campos, como o da biologia e da economia, os gráficos são utilizados principalmente para a apresentação de dados. Normalmente, as curvas matemáticas são representadas em um conjunto de dois eixos perpendiculares, denominados *x* e *y*, em duas dimensões. Todo ponto do plano pode ser identificado a partir de um "par ordenado" (x, y) que especifica sua distância aos eixos *y* e *x*. O mesmo conceito é utilizado para apresentar uma informação em três dimensões, acrescentando um terceiro eixo que se denomina convencionalmente *z*.

Esse sistema recebe o nome de coordenadas cartesianas em homenagem ao seu inventor, o matemático e filósofo francês René Descartes. Seu contemporâneo, Pierre de Fermat, desenvolveu ao mesmo tempo ideias semelhantes. Entretanto, seria mais lógico conceder o crédito da invenção a Nicole d'Oresme, quem, três séculos antes, utilizou eixos horizontais e verticais para demonstrar graficamente uma lei relativa à distância percorrida por dois objetos que se moviam em velocidades diferentes.

O descobrimento de Descartes do potencial de gráficos foi fundamental para o desenvolvimento da história da matemática, já que relacionou números a figuras geométricas. O que tornou possível representar figuras por meio de equações, unindo a álgebra à geometria para criar o campo da geometria analítica.

Fonte: BROWN, Richard. **50 teorías matemáticas creadoras e imaginativas**. Título original: 30-Second Maths. Barcelona: Blume, 2012. p. 108. Tradução nossa.

Atividades

Escreva no caderno

1. De acordo com o texto, por que o sistema de coordenadas cartesianas recebe esse nome?
Em homenagem ao matemático e filósofo francês René Descartes.

2. O texto diz que: "Na matemática são utilizados gráficos para visualizar funções. Em outros campos, como o da biologia e da economia, os gráficos são utilizados principalmente para a apresentação de dados.". Pesquise em jornais, revistas ou na internet uma reportagem que contenha um gráfico. Que semelhanças e diferenças ele apresenta em relação ao gráfico de funções estudado neste capítulo? A resposta depende do gráfico escolhido. Os alunos podem mencionar como semelhanças a existência dos eixos coordenados (ou de somente um deles), a curva do gráfico e pontos destacados. Como diferença, podem citar a diferença na escala dos eixos, o visual, com outros elementos gráficos para chamar a atenção do leitor.

Exercício resolvido

10 Observe os gráficos a seguir.

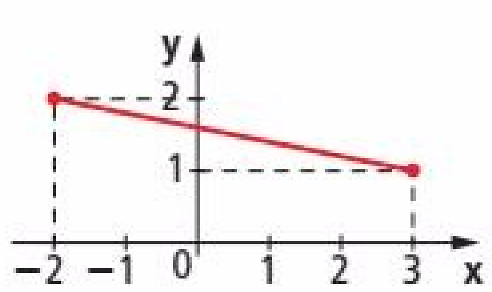


Gráfico I

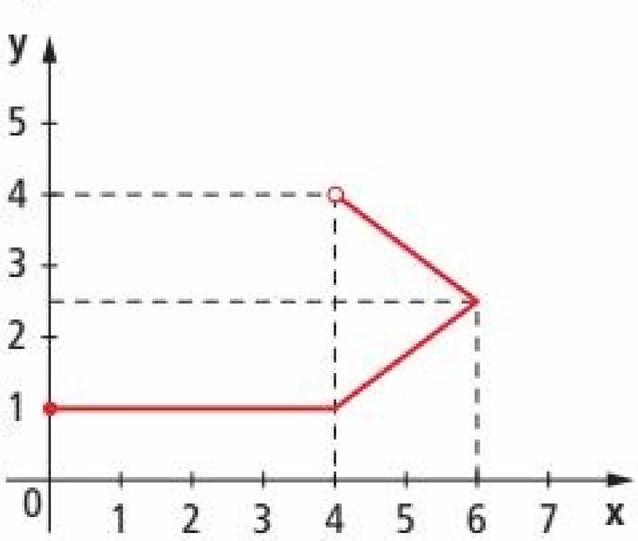


Gráfico II

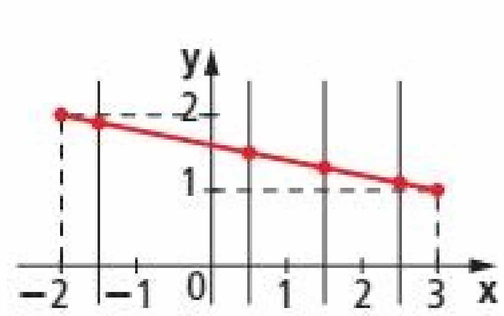
a) Quais desses gráficos representam funções? Justifique sua resposta.

b) Determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f) do gráfico que representa uma função.

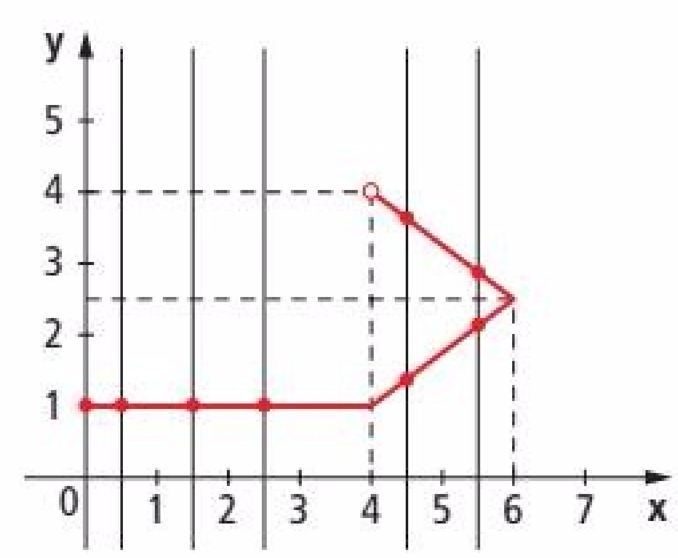
Resolução

a) Traçando retas paralelas ao eixo *y* que cruzam os gráficos, temos:

O gráfico I representa uma função, pois qualquer reta paralela ao eixo *y* que cruza o gráfico o faz em um único ponto.

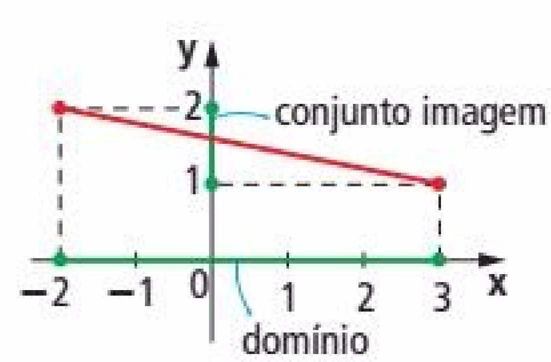


O gráfico II não representa uma função, pois existem retas paralelas ao eixo *y* que cruzam o gráfico em dois pontos.



Ilustrações: Editoria de arte

b) Projetando os pontos do gráfico I nos eixos *x* e *y*, obtemos:



A projeção dos pontos desse gráfico no eixo das abscissas é o segmento de reta, contido no eixo *x*, de extremidades em -2 e 3.

Portanto: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\} = [-2, 3]$.

A projeção dos pontos desse gráfico no eixo das ordenadas é o segmento de reta, contido no eixo *y*, de extremidades 1 e 2.

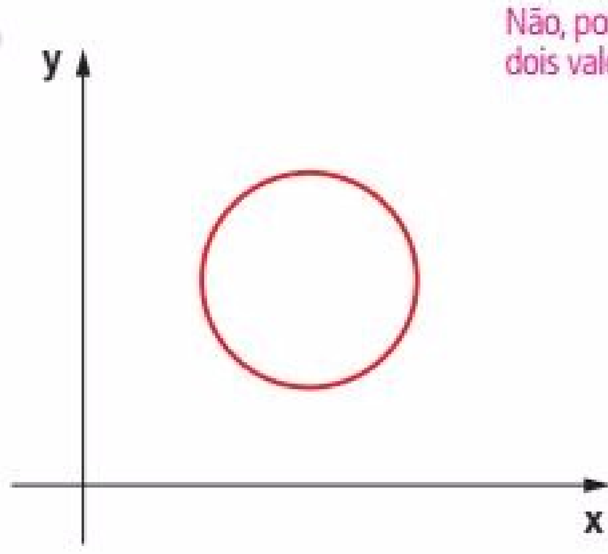
Portanto: $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant y \leqslant 2\} = [1, 2]$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

20. Verifique, justificando, se cada gráfico abaixo pode ou não representar uma função.

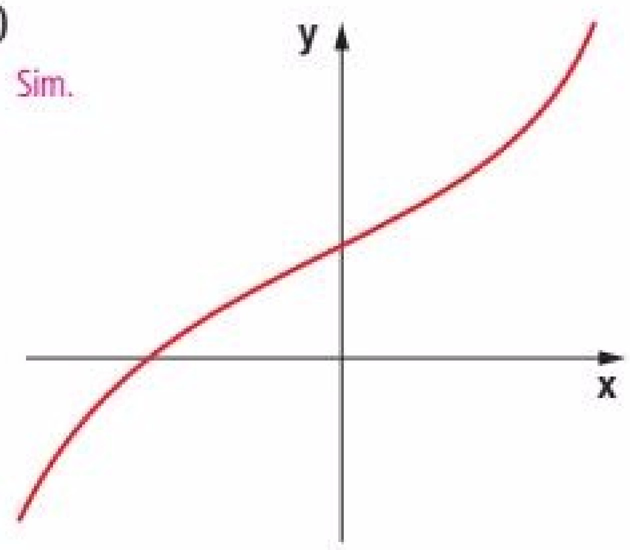
a)



Não, pois para alguns valores de *x* temos dois valores correspondentes de *y*.

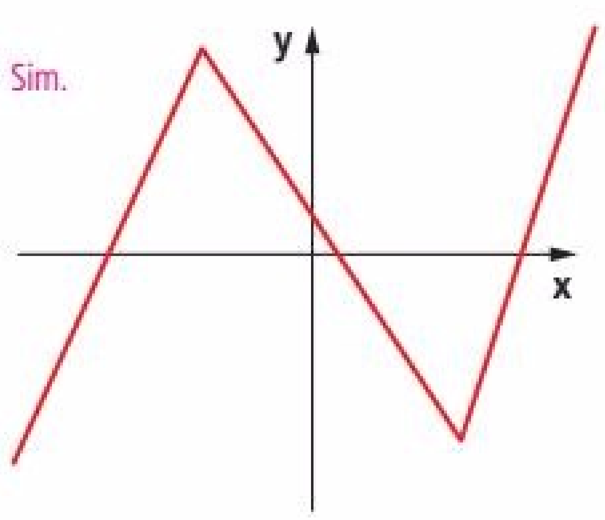
Ilustrações: Editoria de arte

b)



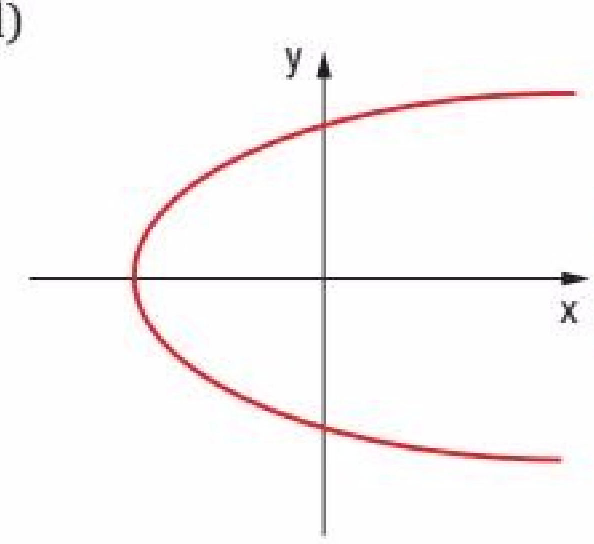
Sim.

c)



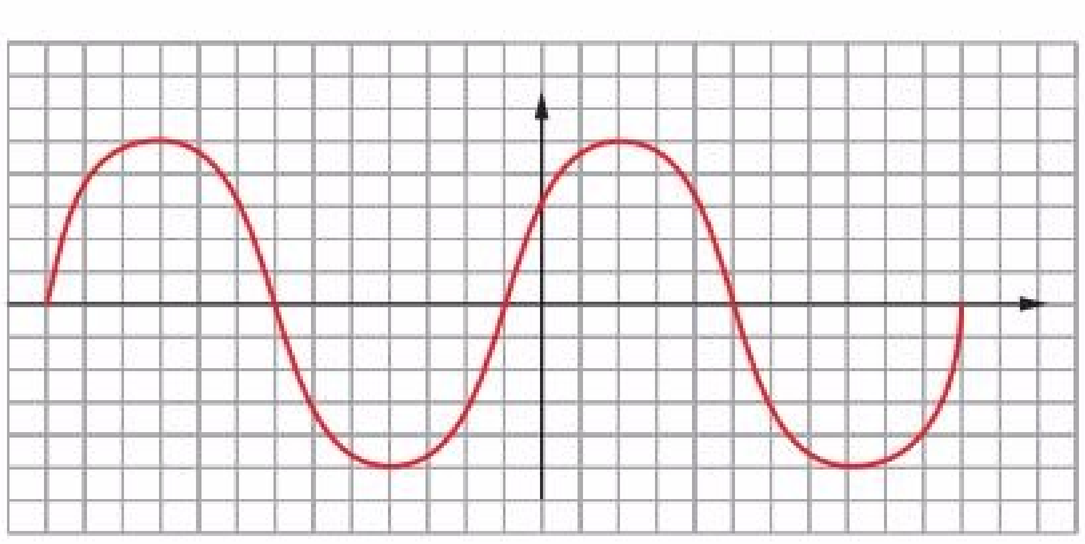
Sim.

d)



Não, pois para alguns valores de *x* temos dois valores correspondentes de *y*.

21. Observando uma curva que aparecia no monitor de um aparelho médico, Paulo questionou seu colega se ela poderia ou não representar uma função.

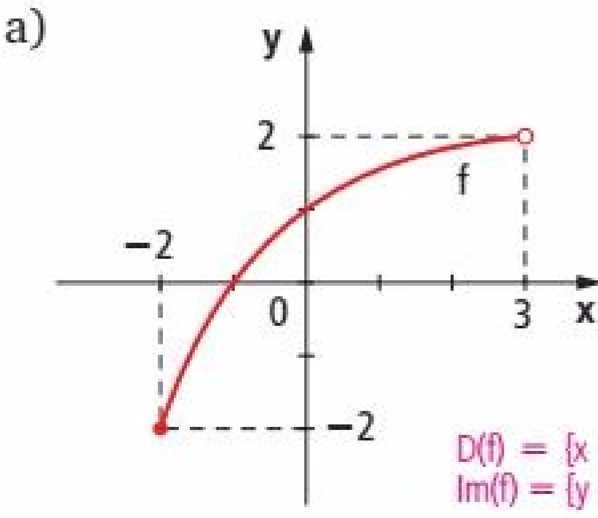


O que você responderia a Paulo? Justifique.

Sim, pode representar uma função, pois para cada *x* pertencente ao domínio existe apenas um *y* correspondente.

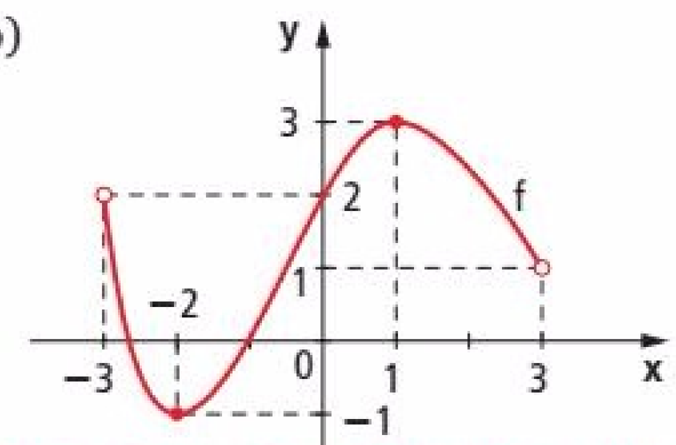
22. Os esboços a seguir representam funções. Observando-os, determine o domínio D(f) e o conjunto imagem Im(f) de cada função.

a)



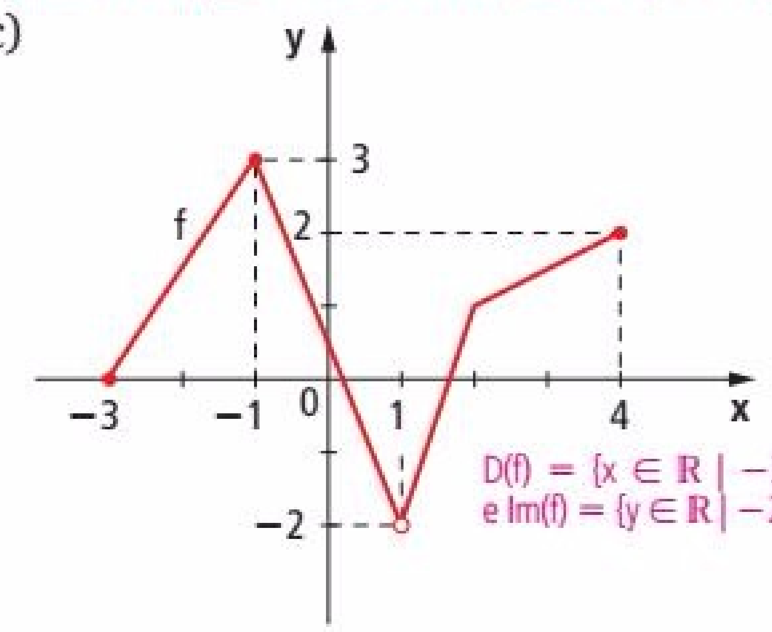
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 3\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y < 2\}$

b)



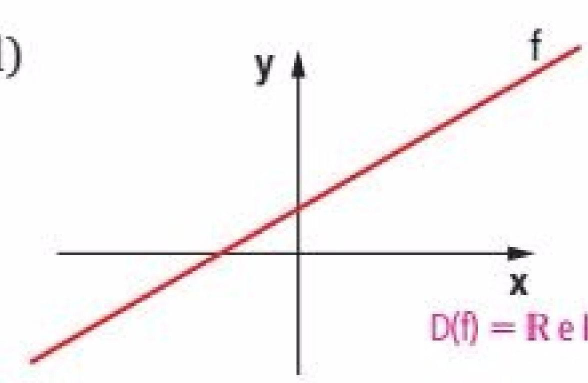
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 3\}$

c)



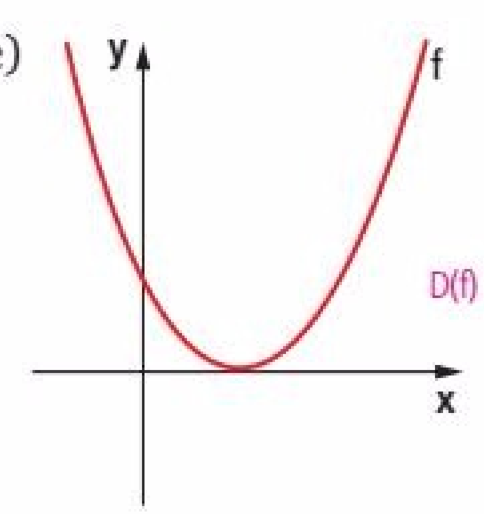
$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 4 \text{ e } x \neq 1\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y \leqslant 3\}$

d)



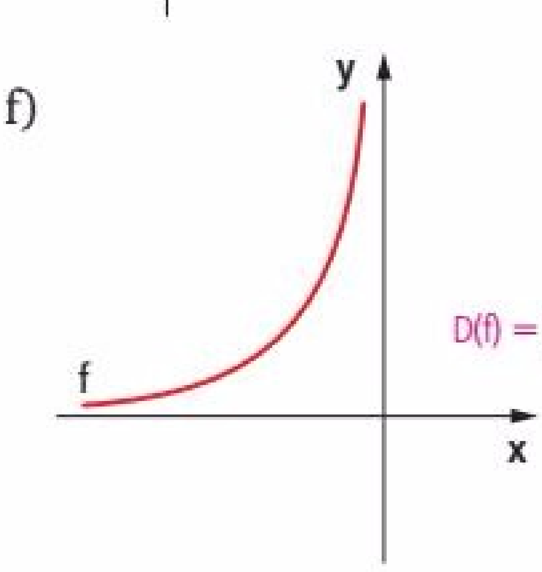
$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

e)



$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

f)



$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

23. A temperatura média do planeta vem aumentando ao longo dos últimos anos e traz consequências desastrosas para o meio ambiente e para a vida dos seres humanos. Uma das causas desse aquecimento é o fenômeno conhecido como efeito estufa. Leia o texto a seguir a respeito do efeito estufa e o aquecimento global e faça o que se pede em cada item.

Professor, converse com os alunos sobre a importância da conservação ambiental e da sustentabilidade. A conservação ambiental se refere ao uso ético e racional dos recursos naturais e a sustentabilidade, à capacidade de os sistemas biológicos manterem-se diversos, em equilíbrio e produtivos a longo prazo.

O que é o efeito estufa?

O fenômeno conhecido como "efeito estufa" ocorre quando a radiação solar, que chega ao Planeta Terra na forma de ondas curtas, passa pela atmosfera, aquece a superfície terrestre, refletindo de volta para a atmosfera parte dessa radiação na forma de calor, em comprimentos de onda na região do infravermelho.

No momento em que esse efeito ocorre, o calor é bloqueado por alguns constituintes químicos gasosos da atmosfera e, dessa forma, intensifica a sua retenção nas camadas mais baixas da atmosfera. Esse fenômeno natural é importante para a manutenção da temperatura, considerada dentro dos limites aceitáveis à vida no Planeta Terra (Figura 1).

Infravermelho

O infravermelho é uma das faixas de comprimento de ondas eletromagnéticas invisíveis ao olho humano. A luz visível ocupa uma faixa de comprimento entre frequências de aproximadamente 400 e 700 nanômetros, que correspondem ao espectro de luz entre a luz vermelha e a violeta. A faixa do infravermelho tem um comprimento de aproximadamente 1 000 nanômetros.

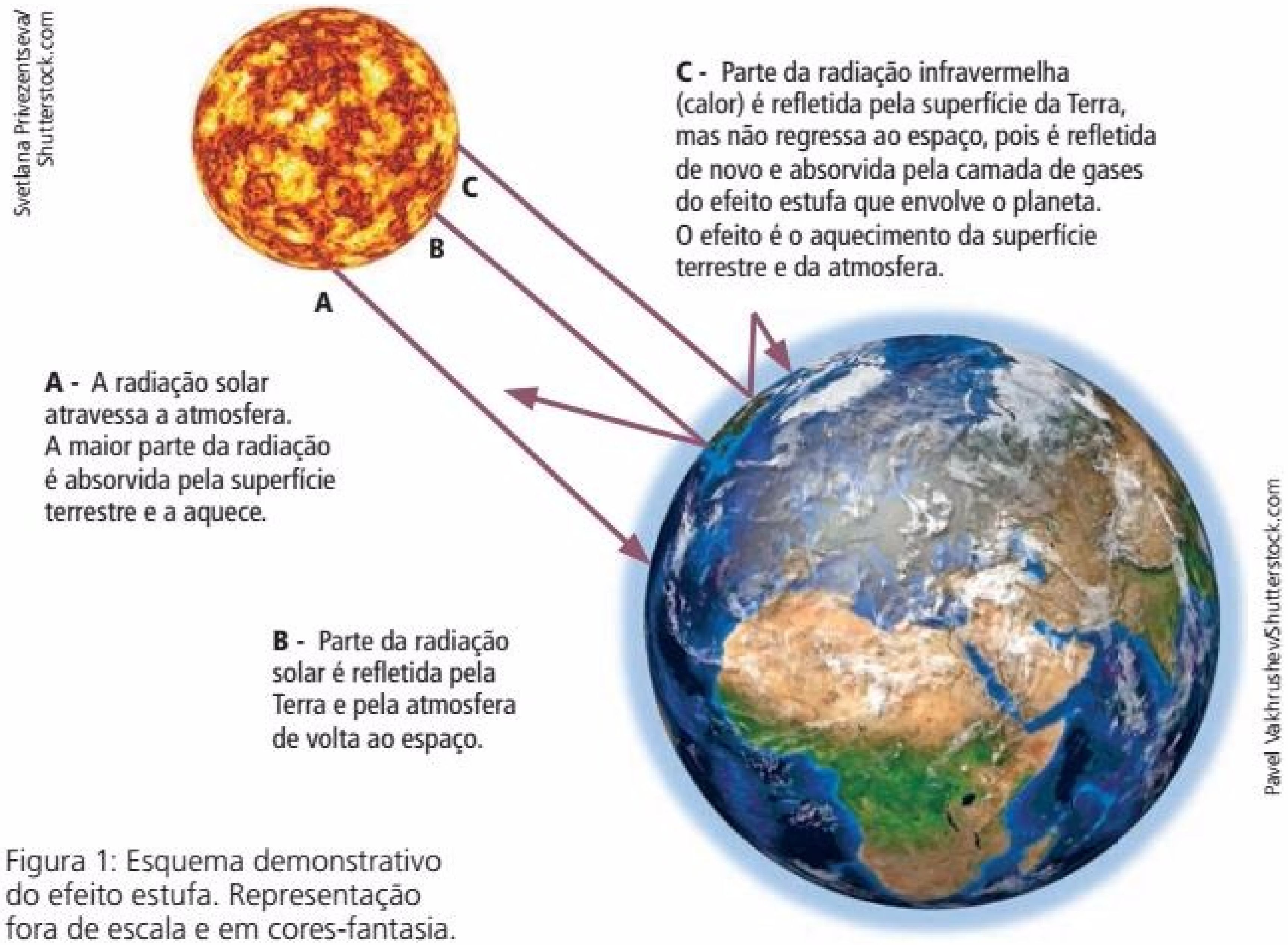


Figura 1: Esquema demonstrativo do efeito estufa. Representação fora de escala e em cores-fantasia.

Protocolo de Quioto

O Protocolo de Quioto constitui um tratado complementar à Convenção-Quadro das Nações Unidas sobre Mudança do Clima. Criado em 1997, definiu metas de redução de emissões para os países desenvolvidos, responsáveis históricos pela mudança atual do clima.

Fonte: BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Protocolo de Quioto**. Brasília: [20--?]. Disponível em: <http://www.mma.gov.br/clima/convencao-das-nacoes-unidas/protocolo-de-quioto>. Acesso em: 24 nov. 2015.

Aumentos recentes nas concentrações de gases-traço com capacidade de retenção de calor – também chamados de Gases de Efeito Estufa (GEE) – na atmosfera têm causado impacto no balanço de radiação solar do Planeta, tendendo ao aquecimento da superfície da Terra.

Os principais GEE contemplados pelo Protocolo de Quioto são: dióxido de carbono (CO_2), metano (CH_4), óxido nitroso (N_2O), clorofluorcarbonos (CFCs), hidrofluorcarbonos (HFCs), perfluorcarbonos (PFCs) e hexafluoreto de enxofre (SF_6).

Atividades humanas, intensificadas a partir da Revolução Industrial (final dos anos 1700 e início dos anos 1800) e que se prolongam até a atualidade, geram inúmeras fontes de emissão de GEE decorrentes, como: queima de combustíveis fósseis, desmatamento, drenagem de pântanos, fertilizações nitrogenadas ineficientes, queimadas, preparo intensivo do solo etc.

Com a intensificação dessas atividades e, consequentemente, com o incremento das emissões dos GEE na atmosfera (principalmente o CO_2), detectou-se aumento do aprisionamento de calor no Planeta Terra durante um longo período de tempo (Figura 2).

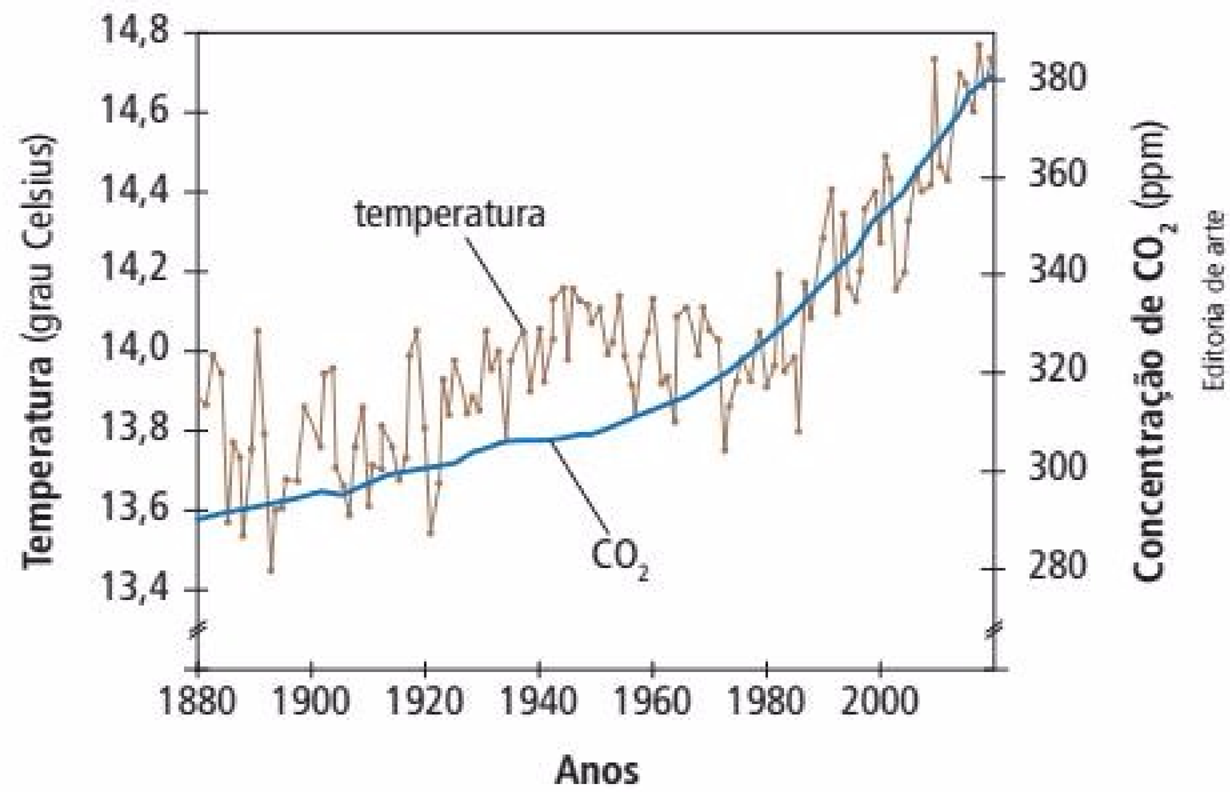


Figura 2: Aumento de temperatura (grau Celsius) e da concentração de CO_2 na atmosfera (ppm) ao longo dos anos no Planeta Terra. Fonte: NASA/GISS; NOAA/ESRL.

Professor, o gráfico apresentado acima (Figura 2) tem duas escalas distintas no eixo vertical. Caso os alunos tenham dificuldade em ler as escalas e cada uma das curvas do gráfico, mostre a eles que esse gráfico pode ser interpretado como dois gráficos sobrepostos. Assim, um gráfico teria como eixos: anos e temperatura; e o segundo teria como eixos: anos e concentração de CO_2.

O que significa aquecimento global e mudança do clima?

O termo "aquecimento global" significa que todo o Planeta Terra está se aquecendo, ou seja, a sua temperatura atmosférica média de superfície está se elevando ao longo dos anos como consequência do aumento do efeito estufa, resultante do incremento na concentração atmosférica de alguns GEE, em especial o CO_2, o CH_4 e o N_2O. [...]

O CO_2 é o mais importante GEE com emissões intensificadas por atividades humanas. A concentração atmosférica global desse gás aumentou de um valor pré-industrial (por volta do ano de 1750) de cerca de 280 ppm [(partes por milhão)] para 394 ppm em 2010. [...]


Getty Images

O derretimento das geleiras é uma das consequências do aquecimento global. Na fotografia, geleira em Santa Cruz, Argentina, em 2015.

Além dos aspectos citados, outros podem contribuir para o efeito estufa e para o aquecimento global: a atividade solar cíclica, que gera períodos de aquecimento, os quais parecem ser acompanhados de maior concentração de CO_2, por causa da decomposição mais rápida e mais intensa de materiais orgânicos; a redução das áreas verdes cobertas por vegetação permanente; o aumento das superfícies irradiantes e produtoras de calor em excesso; e a redução de água residente, iniciando processos de aridização e de desertificação.

Nos últimos séculos, a temperatura média da superfície da Terra já aumentou cerca de 0,8 °C, e a projeção é de uma elevação entre 1,4 °C a 5,8 °C nos próximos 100 anos, conforme o *Quarto Relatório de Avaliação do IPCC*, em 2007.

Importante destacar que esse incremento da temperatura não é espacialmente distribuído na Terra, sendo algumas regiões mais afetadas que outras pelo fenômeno.

O clima na Terra é regulado pelo fluxo constante de energia solar que atravessa a atmosfera na forma de luz visível. Dessa forma, os eventos climáticos são dependentes da temperatura da atmosfera. A principal consequência do efeito estufa e do aquecimento global é o aumento da velocidade das reações na atmosfera devido à maior disponibilidade de energia, resultando em aumento da frequência e da intensidade de eventos climáticos. Com isso, existe a possibilidade de modificação nos padrões do clima, ou seja, a ocorrência de uma mudança do clima. [...]

Fonte: CORDEIRO, Luiz Adriano Maia et al. **O aquecimento global e a agricultura de baixa emissão de carbono**. Brasília: Mapa / Embrapa / FEBRAPDP, 2011. p. 9-13. Disponível em:< http://www.agricultura.gov.br/arq_editor/file/Desenvolvimento_Sustentavel/Abc/8.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2015.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Explique com suas próprias palavras como acontece o efeito estufa. Qual é a principal consequência desse fenômeno para o meio ambiente do planeta?

b) Considere que a relação entre os períodos de tempo e a concentração de CO_2 na atmosfera seja uma função. Observe o gráfico da figura 2 e responda: quais são as unidades utilizadas no domínio e no conjunto imagem dessa função?

c) Ainda observando o gráfico da figura 2, é possível identificar algum período de tempo em que a temperatura terrestre e a concentração de CO_2 tenham aumentado de forma mais acelerada? Quais as possíveis causas desse aumento?

d) Discuta com os colegas formas alternativas de combustível para reduzir as emissões de poluentes nocivos ao meio ambiente e reflita sobre os benefícios e malefícios dessas alternativas para os agentes envolvidos (empresas petrolíferas, população, governos e outros).

e) Em dezembro de 2015, foi realizado um acordo global para a redução das emissões de gases do efeito estufa, a fim de combater as mudanças climáticas que vêm ocorrendo no planeta, chamado **Acordo de Paris**. Pesquise sobre quais investimentos serão realizados para o alcance dos objetivos e os países envolvidos nesse acordo. Discuta com os colegas sobre a relevância desse comprometimento global e prepare um cartaz contendo os benefícios esperados com essa ação.

Zero e estudo do sinal de uma função

Em algumas situações, conhecer os elementos do domínio que têm imagens iguais a zero, como também quais elementos têm imagens positivas e quais têm imagens negativas, é importante para uma melhor compreensão da relação entre as grandezas que a função representa.

Zeros de uma função

Em uma função f: $A \to B$, um valor de $x \in A$ tal que $f(x) = 0$ é chamado **zero da função.**

Por exemplo:

a) O zero da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -5x + 20$ é $x = 4$, pois $f(4) = (-5) \cdot 4 + 20 = -20 + 20 = 0$.

b) Para determinar o zero da função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 3x - 6$, calculamos $g(x) = 0$:

$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$. Então $x = 2$ é o zero da função g(x).

c) Vamos determinar os zeros da função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = x^2 + 2x - 35$:

$x^2 + 2x - 35 = 0$

$\Delta = 4 + 140 = 144$

$$x = \frac{-2 \pm 12}{2} = -1 \pm 6 \Rightarrow x = -7 \text{ ou } x = 5$$

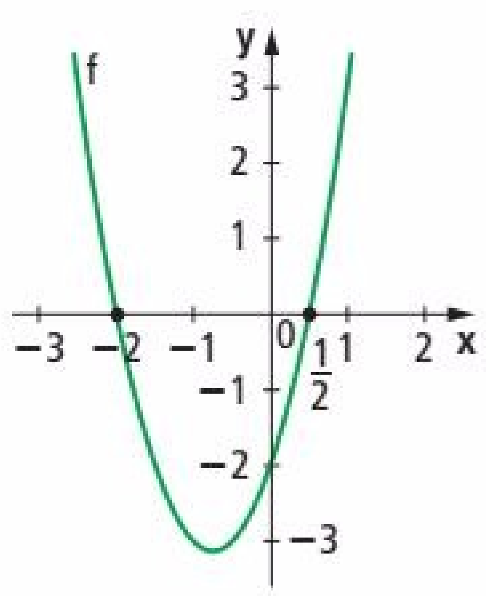
Então $x = -7$ e $x = 5$ são os zeros da função h(x).

Uma função pode ter nenhum, um ou mais zeros. Por exemplo, a função $f(x) = x^2 + 3$ não tem zeros, ou seja, não há valor algum de $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 0$.

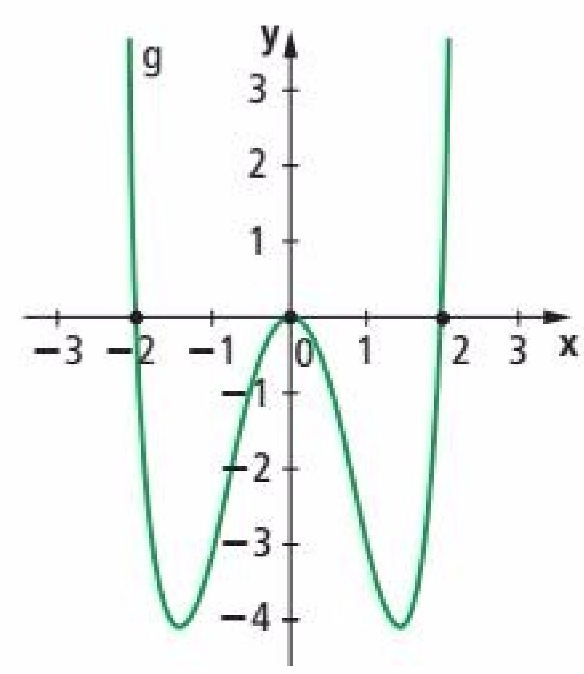
Observando o gráfico de uma função, também é possível determinar seus zeros. No gráfico, o zero da função é a abscissa do ponto em que a ordenada é igual a zero, ou seja, é a abscissa dos pontos em que o gráfico intersecta o eixo *x*.

Veja os exemplos a seguir:

a) O gráfico da função *f* intersecta o eixo das abscissas nos pontos $(-2, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Então os zeros dessa função são -2 e $\frac{1}{2}$.



b) O gráfico da função *g* intersecta o eixo das abscissas nos pontos $(-2, 0)$; $(0, 0)$ e $(2, 0)$. Então os zeros dessa função são -2, 0 e 2.

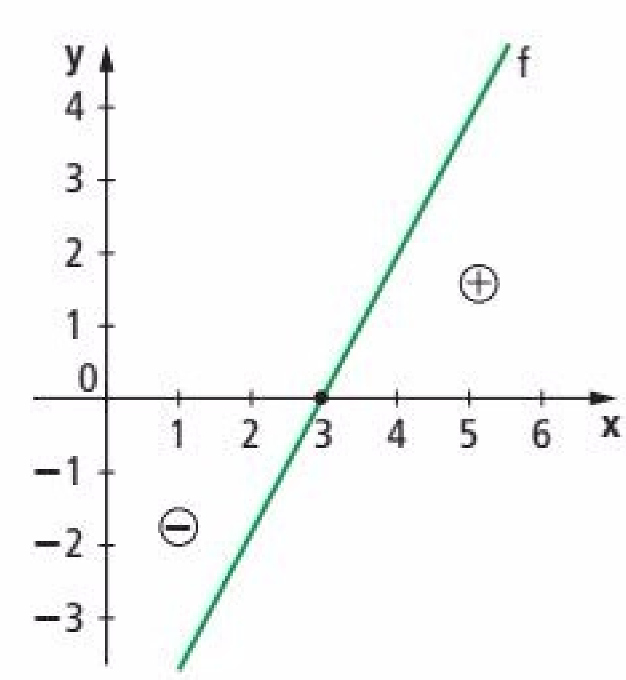


Ilustrações: Editoria de arte

Estudo do sinal de uma função

Estudar o sinal de uma função significa determinar quais elementos de seu domínio têm imagem positiva, quais têm imagem nula e quais têm imagem negativa. Assim, sendo *f* uma função de domínio D(f), temos que:

- *f* é **positiva** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) > 0$;
- *f* é **negativa** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) < 0$;
- *f* é **nula** para os valores de $x \in D(f)$ em que $f(x) = 0$, ou seja, nos zeros da função.



Também é possível determinar o sinal de uma função a partir do seu gráfico. Por exemplo, observando o gráfico ao lado temos que a função *f* é positiva para $x > 3$; é negativa para $x < 3$ e é nula para $x = 3$, que é o zero da função.

Crescimento e decrescimento de uma função

Durante uma apresentação de ginástica rítmica desportiva, uma bola é lançada verticalmente para cima. Sua altura *h*, em metro, em relação ao solo, *t* segundos após o lançamento, é dada pela função:

$$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t$$

Apresentação de uma ginasta em competição de ginástica rítmica, Moscou, Rússia, 2010.

De Visu/Shutterstock/Glow Images

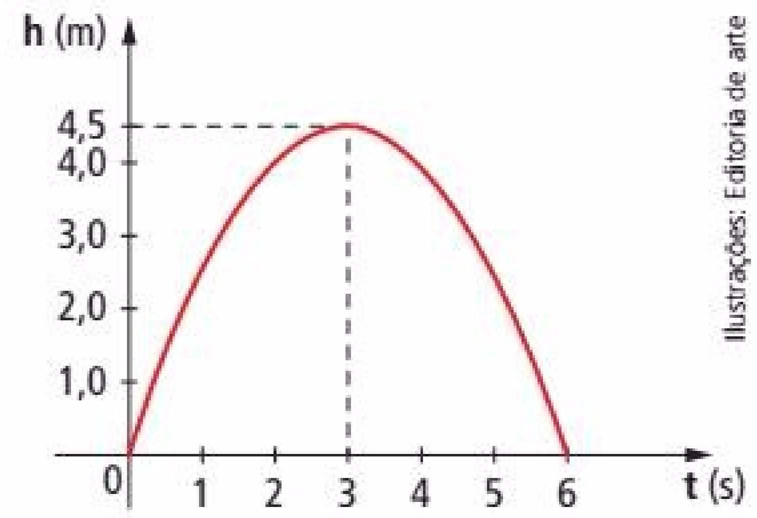
A seguir, apresentamos uma tabela com alguns valores de *t* e o gráfico de *h* para $t \in [0, 6]$.

t (s)	h (m)
0	0
1	2,5
2	4,0
3	4,5
4	4,0
5	2,5
6	0

valores crescentes (t: 0 a 6)

valores crescentes (h: 0 a 4,5)

valores decrescentes (h: 4,0 a 0)



Ilustrações: Editoria de arte

Observe que no intervalo de 0 a 3 segundos, quanto maior o tempo, maior é a altura atingida pela bola. No instante 3 s, a bola atinge a altura máxima igual a 4,5 m em relação ao solo. Assim, dizemos que a função *h* é **crescente** no intervalo [0, 3].

De modo geral:

Uma função *f* é crescente em um intervalo [a, b] de seu domínio D(f) quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 pertencentes a [a, b], com $x_2 > x_1$, a imagem de x_2 é maior que a imagem de x_1.

Ou seja *f* é crescente se, e somente se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Esse símbolo significa "para todo", "qualquer que seja".

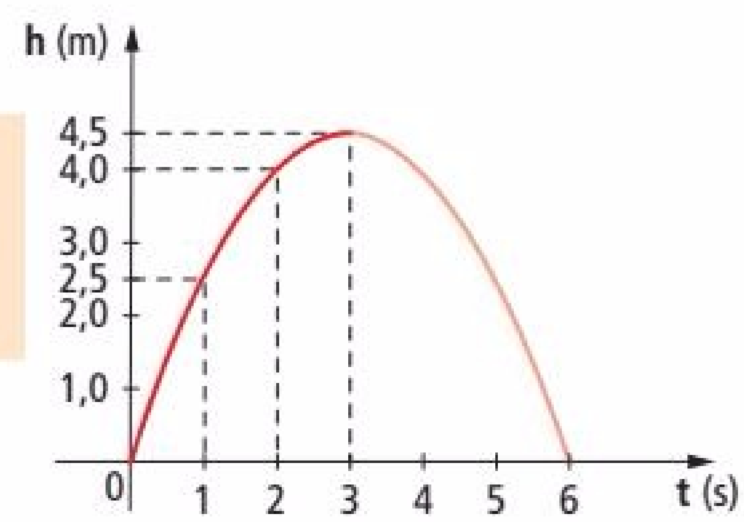


Figura 1

Observe, no gráfico (Figura 1), que para $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$, temos $h(t_1) = 2{,}5$ e $h(t_2) = 4$.

Já no intervalo de 3 a 6 segundos, quanto maior o tempo, menor é a altura da bola. No instante 6 s a bola retorna à altura inicial. Assim, dizemos que a função *h* é **decrescente** no intervalo [3, 6].

De modo geral:

Uma função *f* é decrescente em um intervalo [a, b] de seu domínio D(f) quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 pertencentes a [a, b], com $x_2 > x_1$, a imagem de x_2 é menor que a imagem de x_1.

Ou seja *f* é decrescente se, e somente se:

$$\forall x_1, x_2 \in [a, b], x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

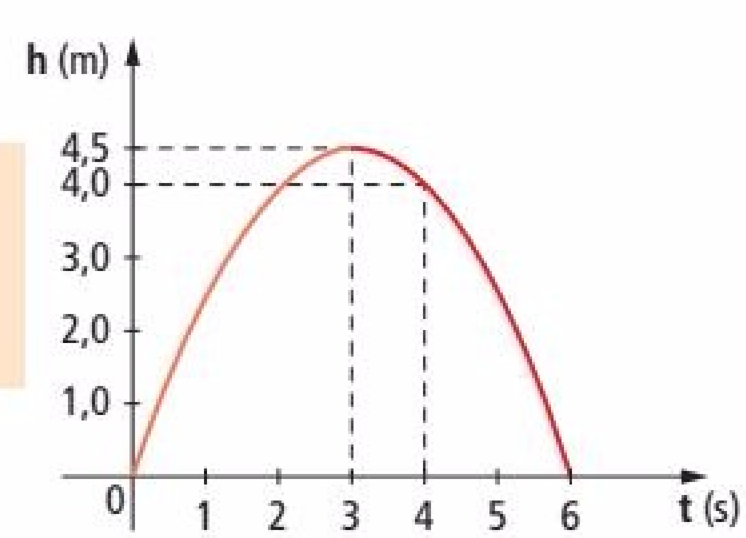
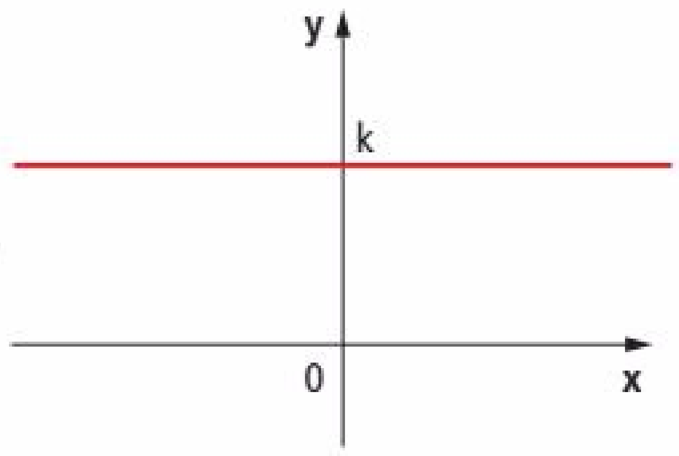


Figura 2

Observe, no gráfico (Figura 2), que para $t_1 = 4$ e $t_2 = 6$, temos $h(t_1) = 4$ e $h(t_2) = 0$.

Ilustrações: Editora de Arte



Além dessas duas situações, é possível ainda considerar o fato de que uma função não sofra variações em determinado subconjunto de seu domínio. Nesse caso, dizemos que a função é **constante**.

De modo geral:

> **Uma função *f* é constante em um intervalo [a, b] de seu domínio D(f) quando, para qualquer *x* pertencente a [a, b], temos f(x) = k, em que *k* é uma constante real.**

Ou seja *f* é constante se, e somente se:

$$\forall\, x \in [a, b],\ f(x) = k, \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Exercícios resolvidos

11 Em cada caso, determine os zeros da função.

a) $f(x) = 5x - 8$

b) $g(x) = x^2 - 4x - 21$

Resolução

Determinar os zeros da função é encontrar os valores de *x* tal que y = 0. Então:

a) $f(x) = 0 \Rightarrow 5x - 8 = 0 \Rightarrow 5x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$

Portanto, o zero de *f* é $x = \frac{8}{5}$.

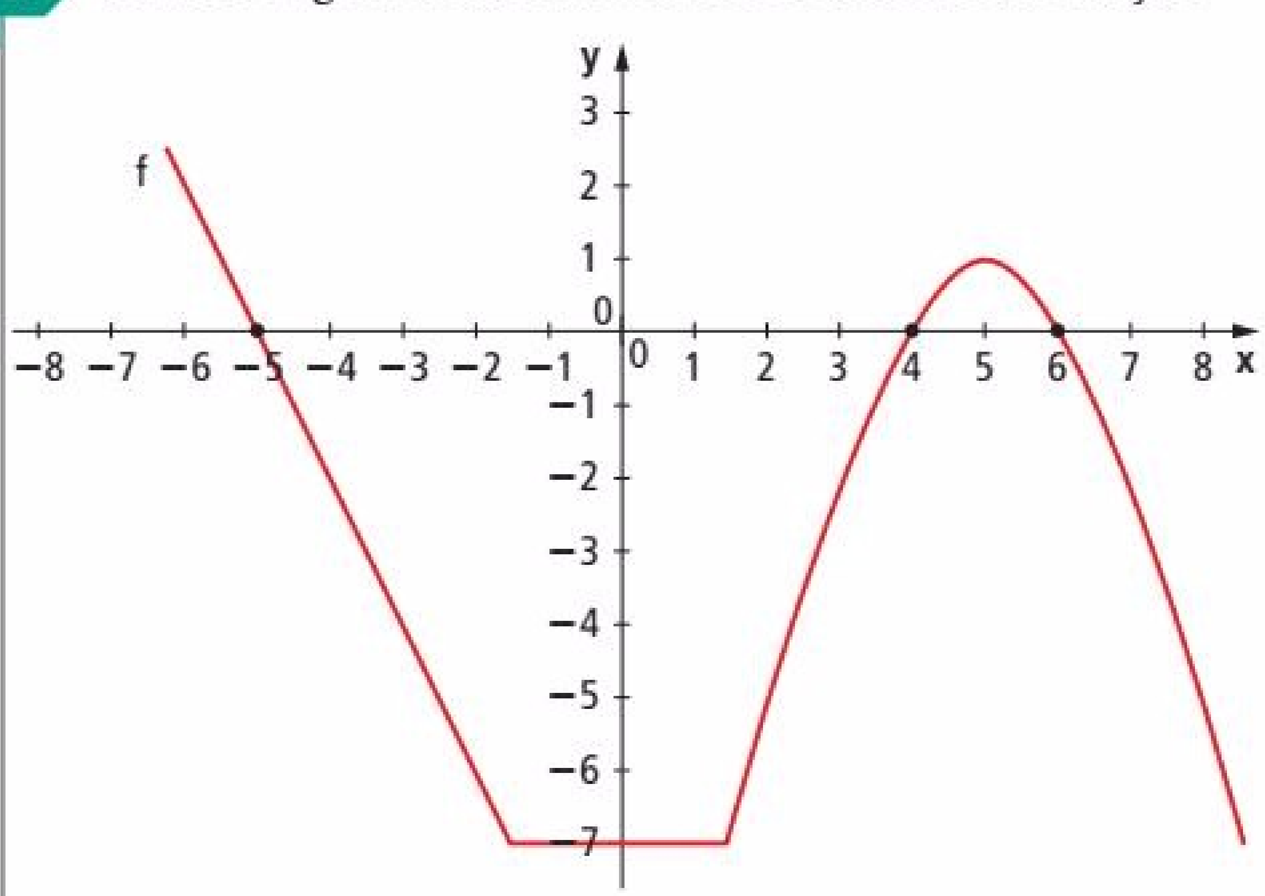
b) $g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$

$\Delta = 16 + 84 = 100$

$x = \frac{4 \pm 10}{2} = 2 \pm 5 \Rightarrow x_1 = 7 \text{ e } x_2 = -3$

Portanto os zeros da função *g* são x = 7 e x = −3.

12 Observe o gráfico abaixo e estude o sinal dessa função.



Resolução

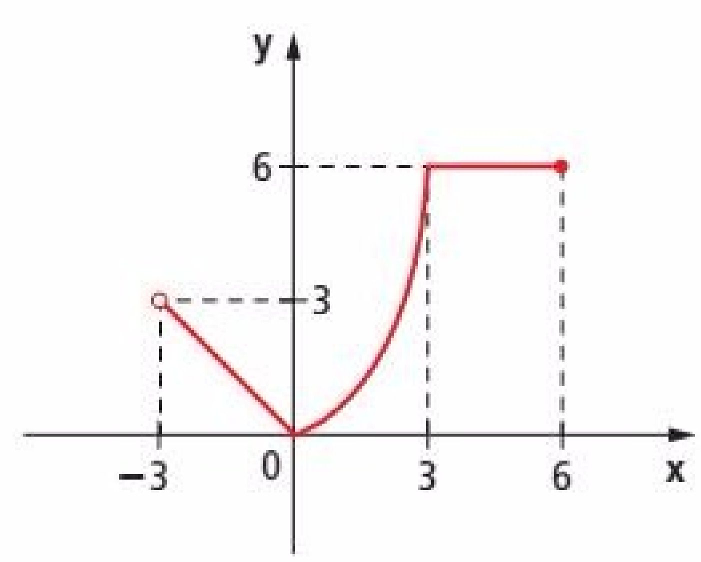
Estudar o sinal da função significa dizer para quais valores de *x* temos f(x) > 0, f(x) < 0 e f(x) = 0.

Para isso, primeiro identificamos no gráfico os zeros da função, que são as abscissas dos pontos que intersectam o eixo *x*. Assim, f(x) = 0 para x = −5, x = 4 e x = 6.

Em seguida, observamos para quais valores de *x* o gráfico da função está acima do eixo *x*. Nesses pontos, temos y > 0 e a função é positiva. Então f(x) > 0 para valores de *x* nos intervalos]−∞, −5[e]4, 6[.

Por fim, observamos em quais pontos o gráfico da função está abaixo do eixo *x*. Nesses pontos temos y < 0 e a função é negativa. Então f(x) < 0 para valores de *x* nos intervalos]−5, 4[e]6, +∞[.

13 O gráfico de uma função y = f(x) é representado a seguir.



Com base nos dados desse gráfico, responda:

a) Qual é o domínio e o conjunto imagem de *f*?

b) Determine f(3).

c) Determine os zeros da função *f*.

d) Para quais valores de *x* essa função é constante?

Resolução

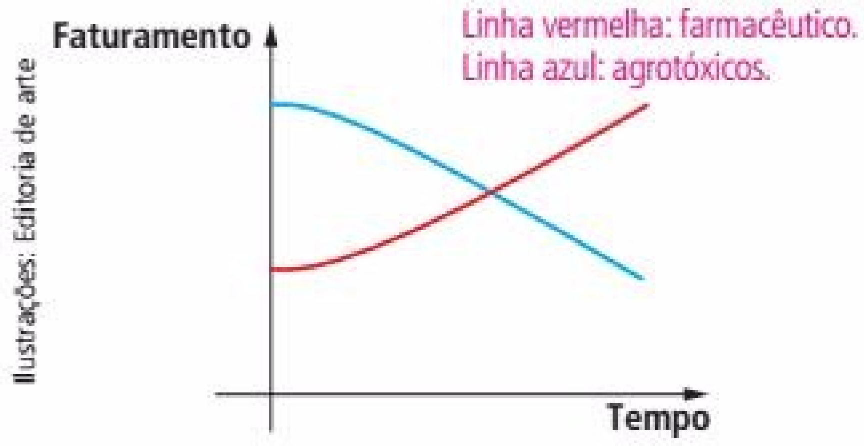
a) Observando o gráfico, verificamos que D(f) =]−3, 6], pois os valores de *x* variam de −3 a 6, excluindo-se o −3.

b) Verificamos que o ponto (3, 6) pertence ao gráfico; assim, f(3) = 6.

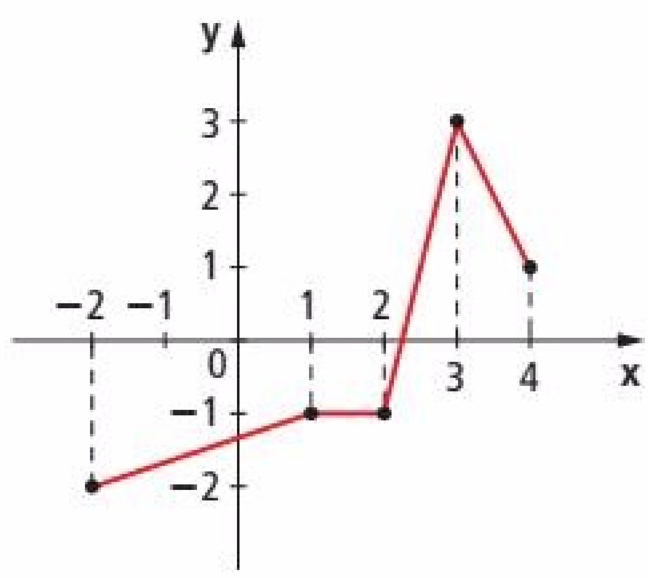
c) Os zeros da função são os valores de *x* tal que f(x) = 0. Verificamos no gráfico que apenas um ponto tem ordenada zero, o ponto (0, 0). Então, a função tem apenas um zero, x = 0.

d) Observando o gráfico, concluímos que a função é constante para x ∈ [3, 6].

24. O balanço financeiro de uma indústria informava que o faturamento do setor farmacêutico da empresa crescera, enquanto o do setor de agrotóxicos caíra ao longo do tempo. Os desempenhos desses dois setores estão representados graficamente. Identifique, no gráfico, tais setores.



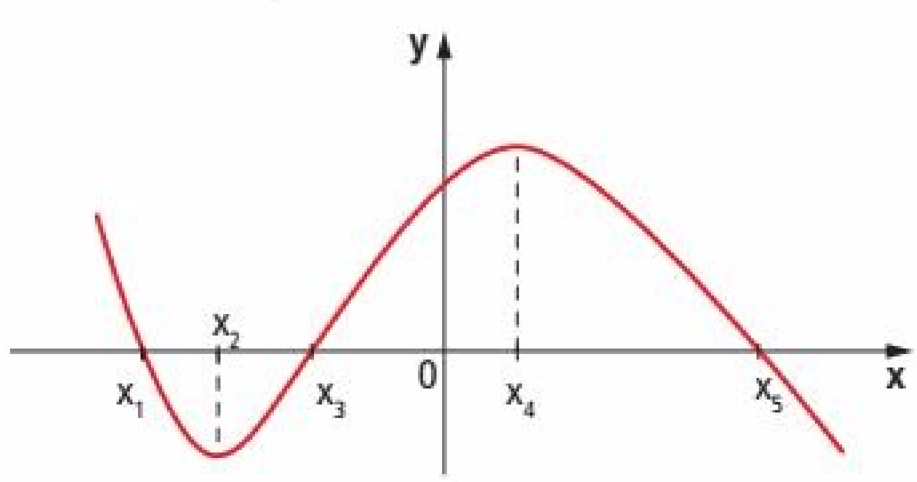
25. Observe o gráfico da função f abaixo.



a) Determine os intervalos em que a função f é:
- crescente; $[-2, 1]$ e $[2, 3]$
- decrescente. $[3, 4]$

b) O que ocorre com a função f no intervalo $[1, 2]$?
Permanece constante.

26. (FGV-SP) Seja uma função $y = f(x)$ cujo gráfico está representado a seguir.



Assinale a afirmação correta:

a) $f(0) = 0$

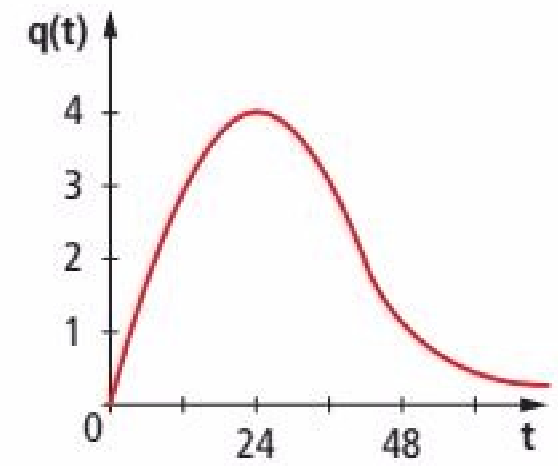
x b) $f(x_1) = f(x_3) = f(x_5) = 0$

c) f é crescente no intervalo $]x_3, x_5[$.

d) f é decrescente no intervalo $]x_3, x_5[$.

e) $f(x_2) = f(x_4) = 0$

27. (UFPR) Um estudo feito com certo tipo de bactéria detectou que, no decorrer de uma infecção, a quantidade dessas bactérias no corpo de um paciente varia aproximadamente segundo uma função q(t) que fornece o número de bactérias em milhares por mm³ de sangue no instante *t*. O gráfico da função q(t) encontra-se esboçado a seguir. O tempo é medido em horas, e o instante t = 0 corresponde ao momento do contágio.



Com base nessas informações, considere as seguintes afirmativas:

I. A função q(t) é crescente no intervalo [0, 48].

II. A quantidade máxima de bactérias é atingida 24 horas após o contágio, aproximadamente.

III. 60 horas após o contágio, a quantidade de bactérias está abaixo de 1500 por mm³.

Assinale a alternativa correta:

x a) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.

b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.

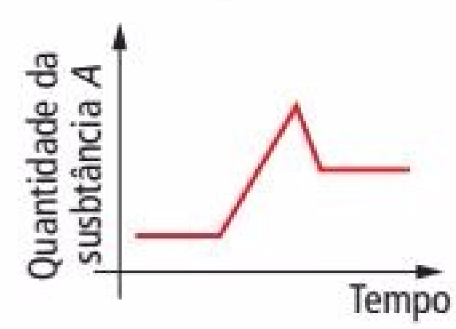
c) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.

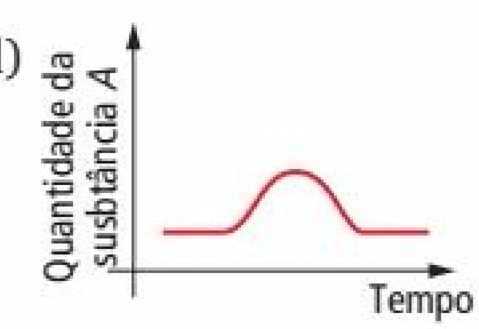
d) Somente a afirmativa I é verdadeira.

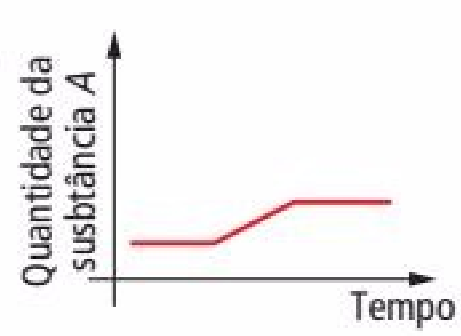
e) Somente a afirmativa III é verdadeira.

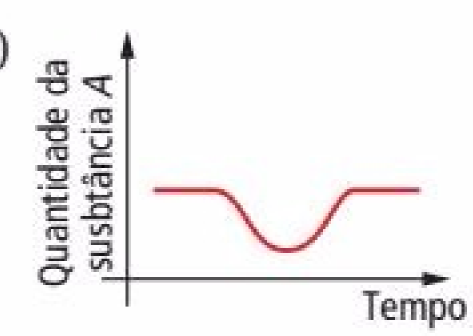
28. (Enem/MEC) Muitas vezes o objetivo de um remédio é aumentar a quantidade de uma ou mais substâncias já existentes no corpo do indivíduo para melhorar as defesas do organismo. Depois de alcançar o objetivo, essa quantidade deve voltar ao normal.

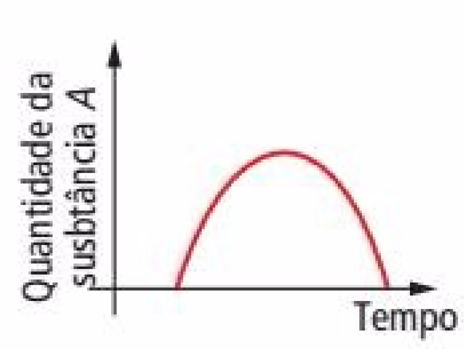
Se uma determinada pessoa ingere um medicamento para aumentar a concentração da substância *A* em seu organismo, a quantidade dessa substância no organismo da pessoa, em relação ao tempo, pode ser mais bem representada no gráfico:

a)


x d)


b)


e)


c)


Funções sobrejetora, injetora e bijetora

Agora, vamos apresentar alguns conceitos importantes para a compreensão do conceito de função inversa, que será abordado ainda neste capítulo.

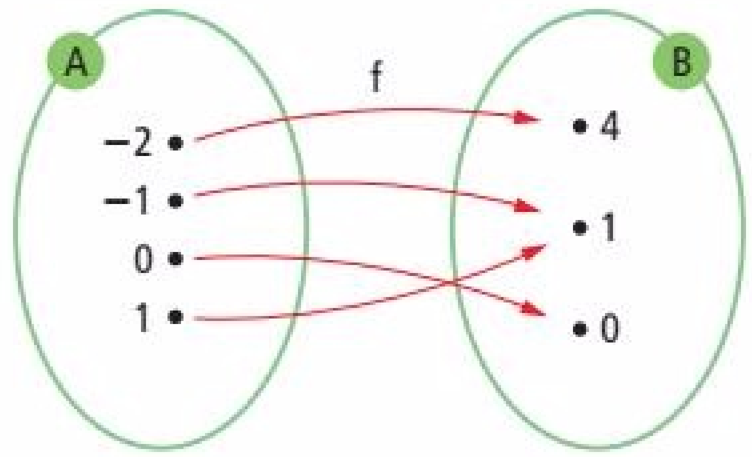
Função sobrejetora

Uma função f: A → B é sobrejetora quando, para qualquer $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Ou seja, uma função *f* é sobrejetora quando Im(f) = CD(f).

Por exemplo:

a) O diagrama abaixo representa a função f: A → B, definida por $f(x) = x^2$.



A função *f* é sobrejetora, pois todo elemento de *B* é imagem de pelo menos um elemento de *A*, isto é, Im(f) = CD(f) = {0, 1, 4}.

b) A função g: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $g(x) = 2x + 3$, **não** é sobrejetora, pois, calculando as imagens, temos:

$x = 0 \Rightarrow g(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$

$x = 1 \Rightarrow g(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

$x = 2 \Rightarrow g(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Observe que o conjunto imagem é Im(g) = {3, 5, 7, ...}.

Nesse caso, temos: $D(g) = CD(g) = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Assim, existem elementos de CD(g) que não são imagens de nenhum elemento de D(g), por exemplo, 0, 1, 2, 4, 6, ...

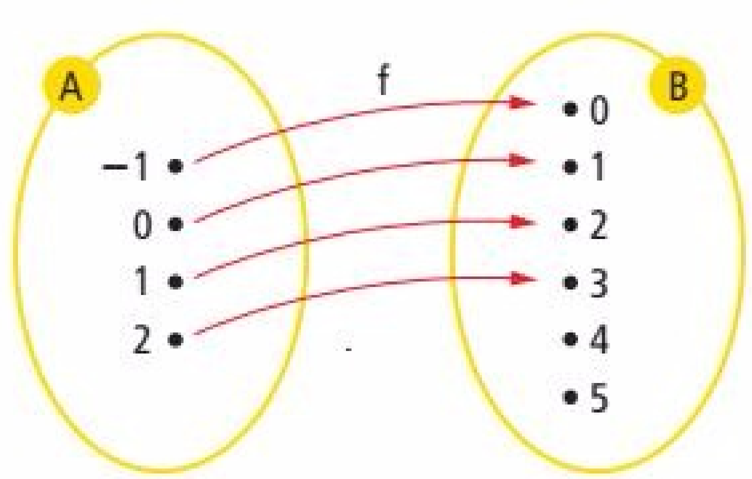
Portanto, *g* não é sobrejetora, pois Im(g) ≠ CD(g).

Função injetora

Uma função f: A → B é injetora quando, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Observe as funções a seguir.

a) O diagrama abaixo representa a função f: A → B definida por $f(x) = x + 1$, que é injetora, pois elementos distintos de *A* são associados por *f* a elementos distintos de *B*, isto é, cada elemento de Im(f) é imagem de um único elemento de *A*.



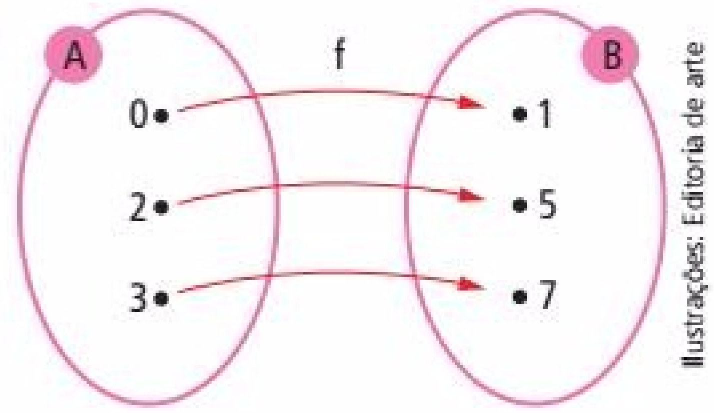
b) A função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 1$ **não** é injetora, pois existem valores diferentes de *x* do domínio de *g* para os quais obtemos um mesmo valor g(x). Por exemplo:

$g(1) = 1^2 + 1 \Rightarrow g(1) = 2$

$g(-1) = (-1)^2 + 1 \Rightarrow g(-1) = 2$

Função bijetora

Uma função f: $A \to B$ é bijetora quando é sobrejetora e injetora simultaneamente.



Observe as funções a seguir.

a) O diagrama ao lado representa a função *f* de *A* em *B*. Vamos verificar se essa função definida por $f(x) = 2x + 1$ é bijetora.

Observe que:

- *f* é **sobrejetora**, pois todo elemento de *B* é imagem de pelo menos um elemento de *A*, isto é, $Im(f) = CD(f)$;
- *f* é **injetora**, pois elementos distintos de *A* são associados por *f* a elementos distintos de *B*, isto é, cada elemento de *B* é imagem de um único elemento de *A*.

Portanto, *f* é bijetora ou ainda dizemos que há uma **correspondência biunívoca** entre *A* e *B*.

b) A função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2$ é bijetora?
Para responder à pergunta, devemos verificar se essa função é sobrejetora e injetora.
A função *g* **não** é sobrejetora, pois há valores no contradomínio de *g* que não têm um valor de *x* correspondente no domínio, ou seja, $Im(g) = \mathbb{R}_+ \neq CD(g)$. Portanto, *g* não é bijetora.
Note também que *g* **não** é injetora, pois existem valores distintos de x do domínio de *g* que têm imagens iguais.
Por exemplo: $g(-2) = g(2) = 4$.
Então a função *g* **não** é bijetora.

Outra maneira de reconhecer se uma função é bijetora é por meio de seu gráfico. Traçando retas paralelas ao eixo *x*, pelos pontos cujas ordenadas pertencem ao contradomínio da função, podemos observar três possibilidades.

1ª) Cada uma das retas cruza o gráfico em um único ponto como mostra o gráfico da figura 1. Observe que:

- $Im(f) = CD(f)$, ou seja, *f* é **sobrejetora**;
- para quaisquer $x_1, x_2 \in D(f)$, com $x_1 \neq x_2$, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, *f* é **injetora**.

  Portanto, a função *f* é **bijetora**.

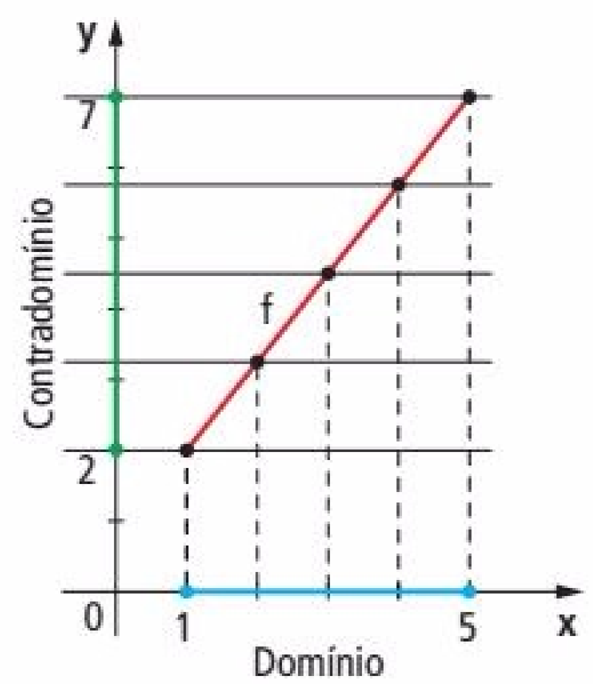


Figura 1

2ª) Pelo menos uma das retas cruza o gráfico em mais de um ponto como mostra o gráfico da figura 2.
Observe que $Im(g) = CD(g)$, ou seja, *g* é **sobrejetora**.
Entretanto, existem $x_1, x_2 \in D(g)$, com $x_1 \neq x_2$, para os quais temos $g(x_1) = g(x_2)$, ou seja, *g* **não** é injetora.
Portanto, a função *g* **não** é bijetora.

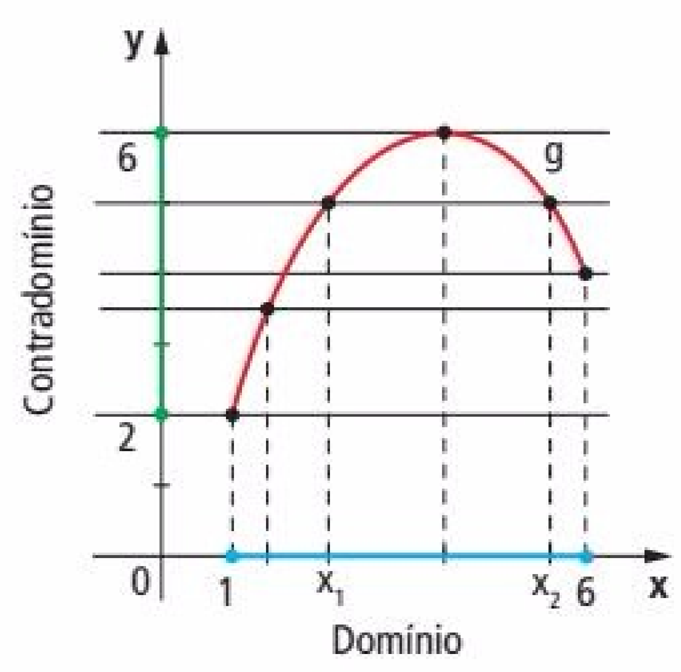


Figura 2

3ª) Pelo menos uma das retas não cruza o gráfico como mostra o gráfico da figura 3.
Observe que $Im(h) \neq CD(h)$, ou seja, *h* **não** é sobrejetora.
Portanto, a função *h* **não** é bijetora.
Entretanto, para quaisquer $x_1, x_2 \in D(h)$, com $x_1 \neq x_2$, temos $h(x_1) \neq h(x_2)$, ou seja, *h* é **injetora**.

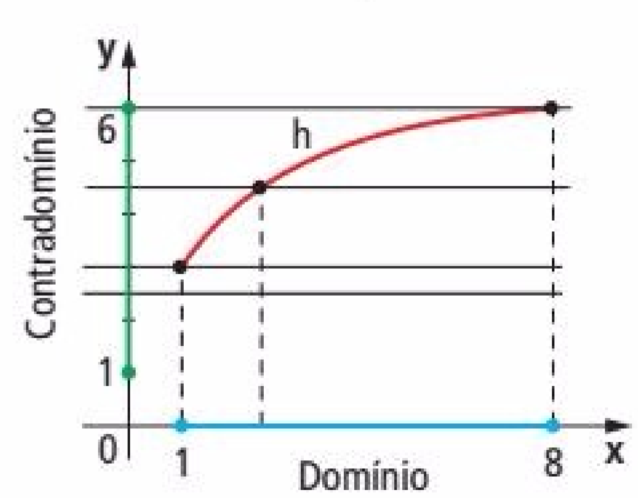
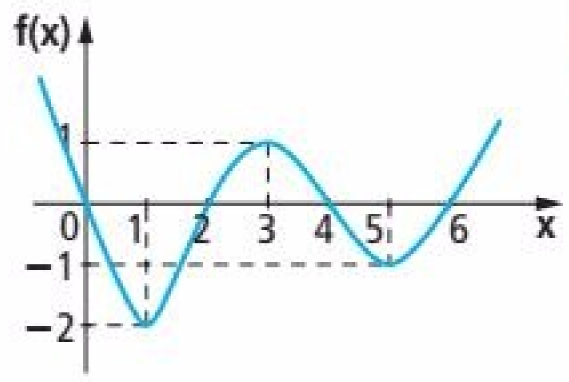


Figura 3

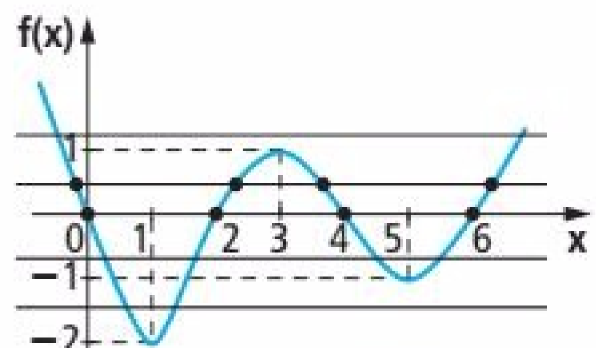
Exercícios resolvidos

14 Na figura ao lado, o gráfico representa uma função real $y = f(x)$ de variável real. Verifique se essa função é injetora.



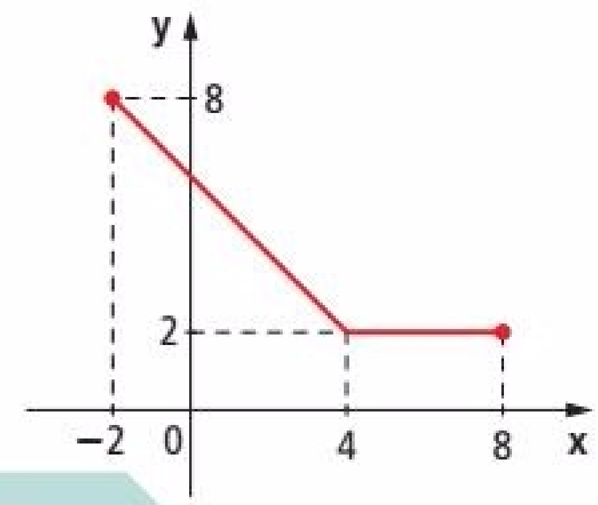
Resolução

Traçando retas paralelas ao eixo x pelos pontos que pertencem ao contradomínio da função, temos o gráfico ao lado.



A função f não é injetora, pois para diferentes valores de $x \in D(f)$ temos imagens iguais.
Por exemplo: $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 0$

15 Verifique se o gráfico da função $f: [-2, 8] \rightarrow [0, 8]$ a seguir representa uma função bijetora.



Resolução

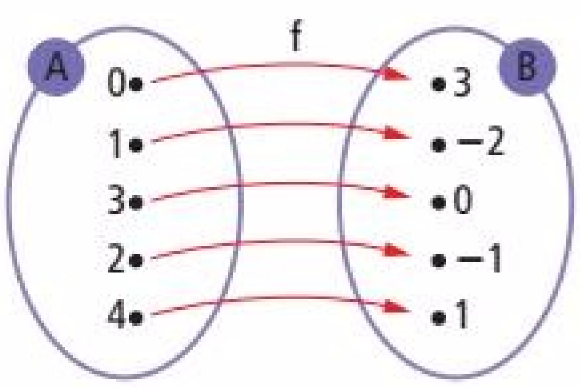
A função f não é sobrejetora, pois o conjunto imagem $[2, 8]$ é diferente do contradomínio $[0, 8]$. Portanto, a função f não é bijetora. Note que essa função também não é injetora, pois elementos diferentes do domínio, por exemplo, 4 e 8, têm a mesma imagem, 2.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

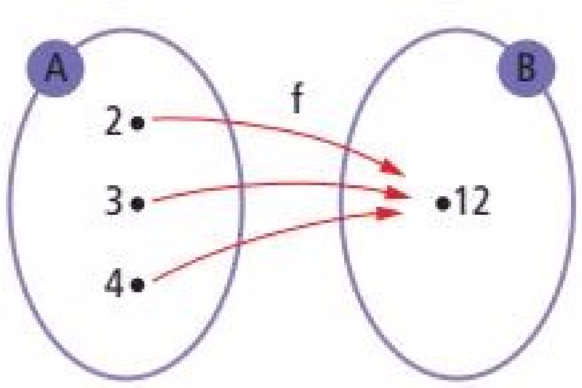
29. Cada diagrama a seguir representa uma função $f: A \rightarrow B$. Verifique se a função f é bijetora, apenas sobrejetora ou apenas injetora.

a)



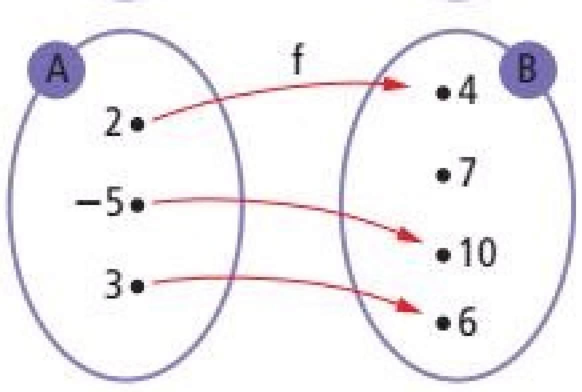
Bijetora.

b)



Apenas sobrejetora.

c)

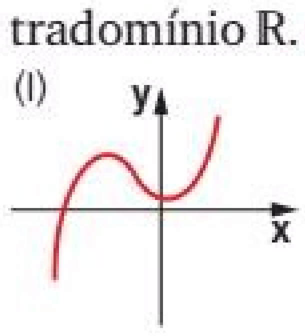


Apenas injetora.

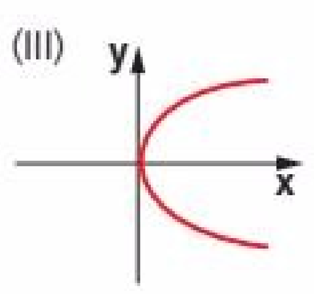
Ilustrações: Editoria de arte

30. Indique, entre os gráficos abaixo, o que melhor se adapta a uma função bijetora com domínio $\mathbb{R}$ e contradomínio $\mathbb{R}$. IV

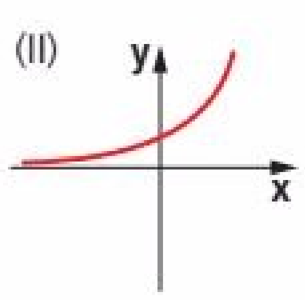
(I)



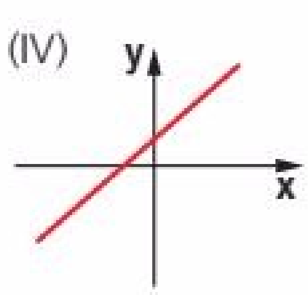
(III)



(II)



(IV)



31. (UFMA) Considere as seguintes afirmações:

I. Uma função é uma relação que associa a cada elemento do seu domínio um único elemento no seu contradomínio.

II. Toda relação é uma função.

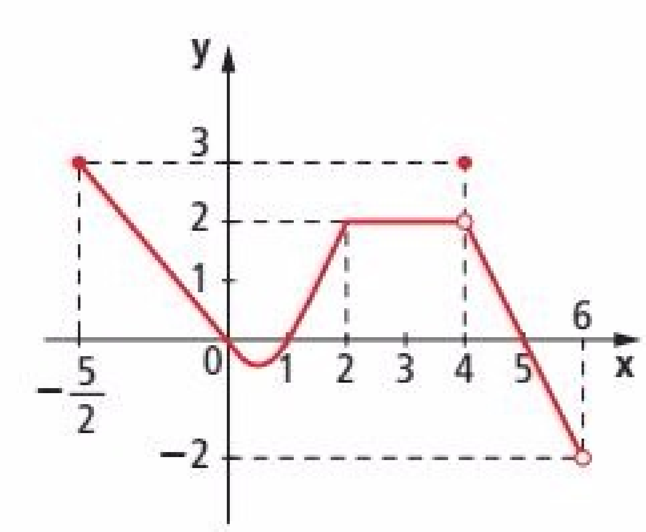
III. Dada uma função sobrejetora, então seu contradomínio é diferente de sua imagem.

IV. Uma função será injetora se, e somente se, elementos distintos do domínio possuírem imagens distintas.

Indique a alternativa **correta**:

a) I, II e III estão corretas.
b) I e II estão corretas.
c) II e III estão corretas.
d) II, III e IV estão corretas.
X e) I e IV estão corretas.

32. (UFMT) A figura ao lado representa o gráfico de uma função $y = f(x)$.



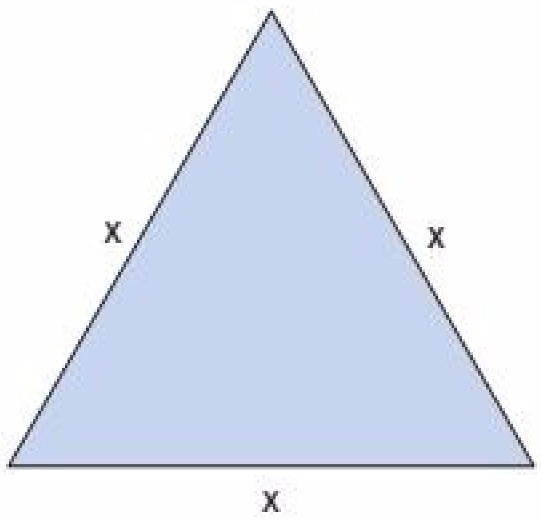
A partir das informações contidas no gráfico, indique **V** para as afirmativas verdadeiras e **F** para as falsas.

- f é uma função injetora.
- O domínio de f é o intervalo $]-2; 3]$.
- $f(x) = 2$, para todo $2 \leqslant x \leqslant 4$.
- $f(x) \geqslant 0$, para $\forall\, x \in \left[-\frac{5}{2}; 0\right] \cup [1; 5]$.

A sequência correta é:

X a) F, F, F, V
b) F, V, V, F
c) V, F, V, V
d) V, V, V, F
e) F, V, F, F

Função inversa



Ilustrações: Editoria de arte

Considere um triângulo equilátero cujo lado mede *x*.

Sejam *f* e *g* duas funções **bijetoras** tais que:

- $f(x) = 3x$ associa cada medida x do lado ao seu perímetro.
  Nesse caso, $D(f) = \mathbb{R}^*_+$ e $CD(f) = Im(f) = \mathbb{R}^*_+$.
- $g(x) = \frac{x}{3}$ associa o perímetro à medida de cada lado.
  Nesse caso, $D(g) = \mathbb{R}^*_+$ e $CD(g) = Im(g) = \mathbb{R}^*_+$.

Para essas funções é válido que:

- *f* e *g* são bijetoras
- $D(f) = Im(g)$
- $D(g) = Im(f)$

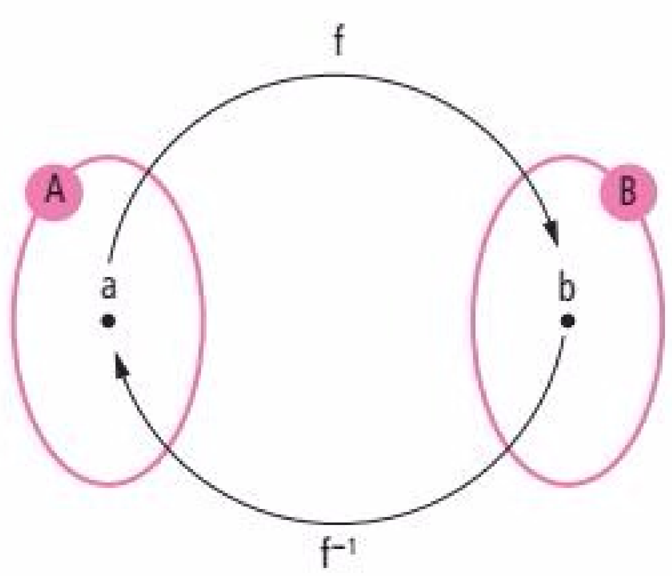
Nesse caso, dizemos que *g* é a **função inversa** da função *f*. Indicamos por:

$$g = f^{-1}$$

Lê-se: inversa de *f*.

De modo geral:

Dada uma função bijetora $f: A \to B$, denomina-se função inversa de *f* a função $f^{-1}: B \to A$ tal que se $f(a) = b$, então $f^{-1}(b) = a$, para todo $a \in A$ e $b \in B$.



Dizemos que a função f^{-1} desfaz o que a função *f* faz. Além disso, o domínio da função *f* é a imagem da função f^{-1}. Da mesma maneira, a imagem de *f* é o domínio de f^{-1}. Ou seja: $D(f) = Im(f^{-1})$ e $Im(f) = D(f^{-1})$.

A condição para que uma função *f* tenha inversa é que *f* seja bijetora.

Se uma função *f* não é sobrejetora, então há elementos em CD(f) que não têm correspondente em D(f) através de *f*, ou seja, $CD(f) \neq Im(f)$. Isso significa que haverá elementos de $D(f^{-1})$ que não terão correspondentes em $CD(f^{-1})$ e aí f^{-1} não é função.

Já se a função *f* não é injetora, então há elementos de D(f) com mesma imagem em Im(f). Isso quer dizer que haverá elementos de $D(f^{-1})$ com mais de um correspondente em $Im(f^{-1})$, o que não caracteriza uma função.

Portanto, uma função *f* tem inversa se, e somente se, *f* é bijetora.

Observações:

- O número -1 na notação f^{-1} não é um expoente, ou seja, $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.
- Se a função *f* admite inversa, dizemos que *f* é invertível.

Lei da função inversa

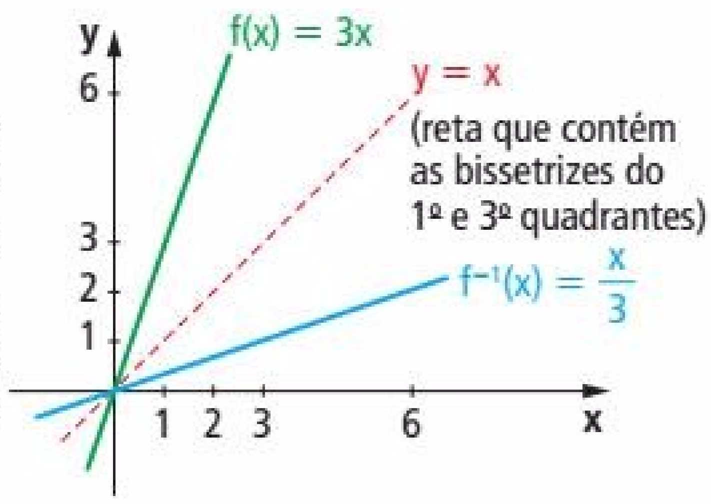
Considerando a função invertível $f: A \to B$ dada pela lei $f(x) = y = 3x - 8$, podemos determinar a lei de sua inversa f^{-1} isolando a variável *x* e trocando as variáveis dependente e independente. Veja a seguir como proceder.

$y = 3x - 8$ → Essa é a lei da função *f*.

$3x = y + 8 \Rightarrow x = \frac{y+8}{3}$ → Isolamos a variável *x* na equação.

$y = \frac{x+8}{3}$ → Trocamos as variáveis *x* e *y* entre si e obtemos a lei da função f^{-1}.

Tendo como base a função invertível $f(x) = y$, na função f^{-1}, a variável independente é *y* e a variável dependente é *x*.



Ilustrações: Editoria de arte

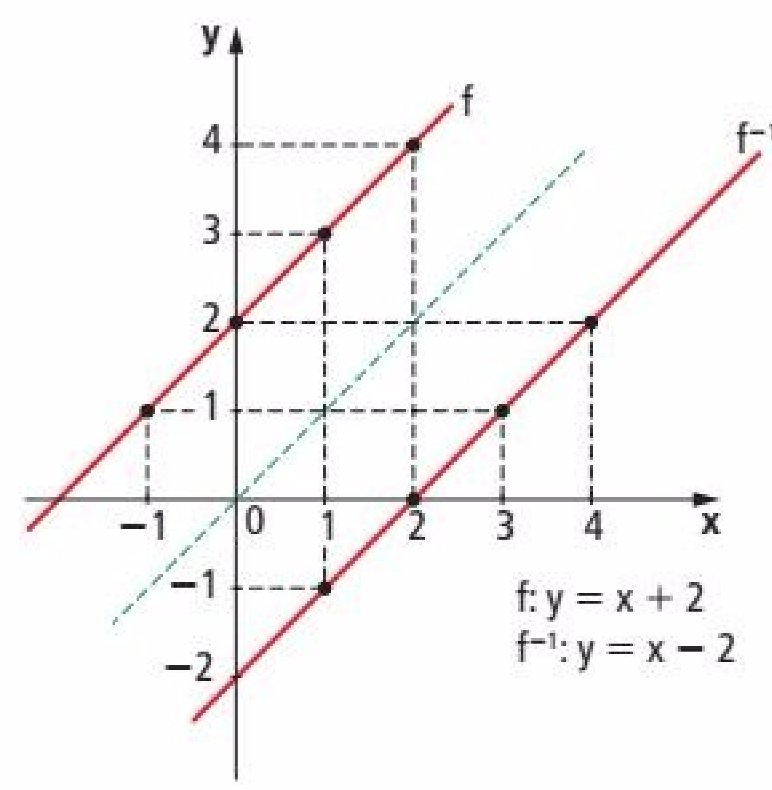
Gráfico da função inversa

É possível demonstrar que os gráficos de uma função e de sua inversa são simétricos em relação à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares (1º e 3º quadrantes) do sistema cartesiano ortogonal, pois, de acordo com a definição, a cada ponto (x, y) de f corresponde em f^{-1} o ponto (y, x).

Lembre-se: se $(a, b) \in f$, então $(b, a) \in f^{-1}$.

Exercícios resolvidos

16 Obter a lei da função inversa da função f dada por $y = x + 2$ e esboce os gráficos de f e f^{-1} em um mesmo plano cartesiano.



Resolução

$y = x + 2$

$x = y - 2$ → Isolamos *x*.

$y = x - 2$ → Trocamos *y* por *x* e *x* por *y*.

Então, $y = x - 2$ é a lei da função inversa da função dada por $y = x + 2$.

Construindo os gráficos das funções f e f^{-1} em um mesmo sistema de coordenadas, temos o gráfico ao lado.

17 Determinar a função inversa da função $g(x) = \dfrac{x+5}{2x-3}$, cujo domínio é $D = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

Resolução

Isolando o *x*:

$$g(x) = y = \frac{x+5}{2x-3} \Rightarrow y(2x-3) = x+5 \Rightarrow 2xy - 3y = x + 5 \Rightarrow 2xy - x = 3y + 5 \Rightarrow x(2y-1) = 3y + 5 \Rightarrow x = \frac{3y+5}{2y-1}$$

Trocando *x* por *y* na sentença:

$$y = \frac{3x+5}{2x-1}$$

Como há variável no denominador, devemos restringir o domínio de f^{-1}:

$$2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

A restrição no domínio de f deve ser mantida na imagem de f^{-1} para que a função f seja bijetora e, portanto, admita inversa.

Logo, $g^{-1}\colon \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \to \mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ dada por $y = \dfrac{3x+5}{2x-1}$ é a função inversa procurada.

18 Seja a função invertível $f\colon \mathbb{R}_+ \to [-4, +\infty[$ definida pela lei $f(x) = x^2 - 4$. Determine a lei da inversa de f.

Resolução

Como $D(f) = \mathbb{R}_+$ e $CD(f) = [-4, +\infty[$, a função f dada por $f(x) = x^2 - 4$ é bijetora. Assim, usando a regra prática, temos:

$y = x^2 - 4$

$x^2 = y + 4$

$x = \pm\sqrt{y + 4}$

$y = \pm\sqrt{x + 4}$

Como $y \geqslant 0$, a lei da inversa é $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

33. Determine se cada uma das funções indicadas a seguir são invertíveis. Justifique sua resposta. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $f(x) = x^3 - 1$ b) $f(x) = x^2$

34. Seja a função invertível $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, determine $f^{-1}(x)$. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

35. Determine a lei da função inversa de cada função bijetora dada a seguir.

a) $y = x - 3$ $y = x + 3$ b) $y = \dfrac{x+2}{4}$ $y = 4x - 2$

36. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax - 2$ e g a função inversa de f, sendo $f(-2) = 10$, determine g. $g(x) = \dfrac{-x-2}{6}$

37. Na função invertível dada por $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-3}$, com $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, determine:

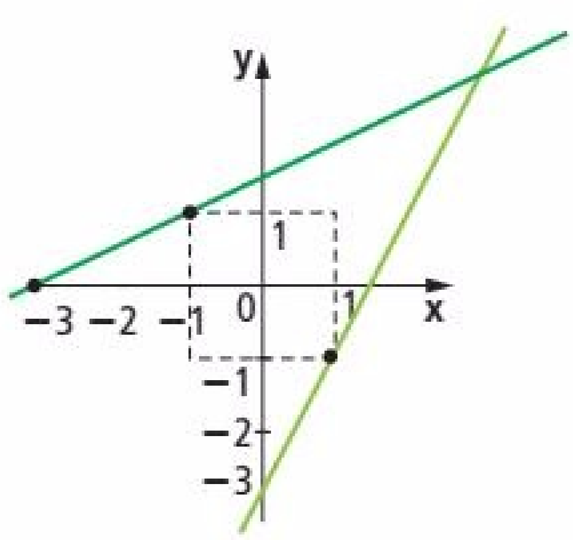
a) $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x) = \dfrac{3x-1}{x-2}$ c) $f^{-1}(-3)$ 2

b) o domínio de f^{-1} $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

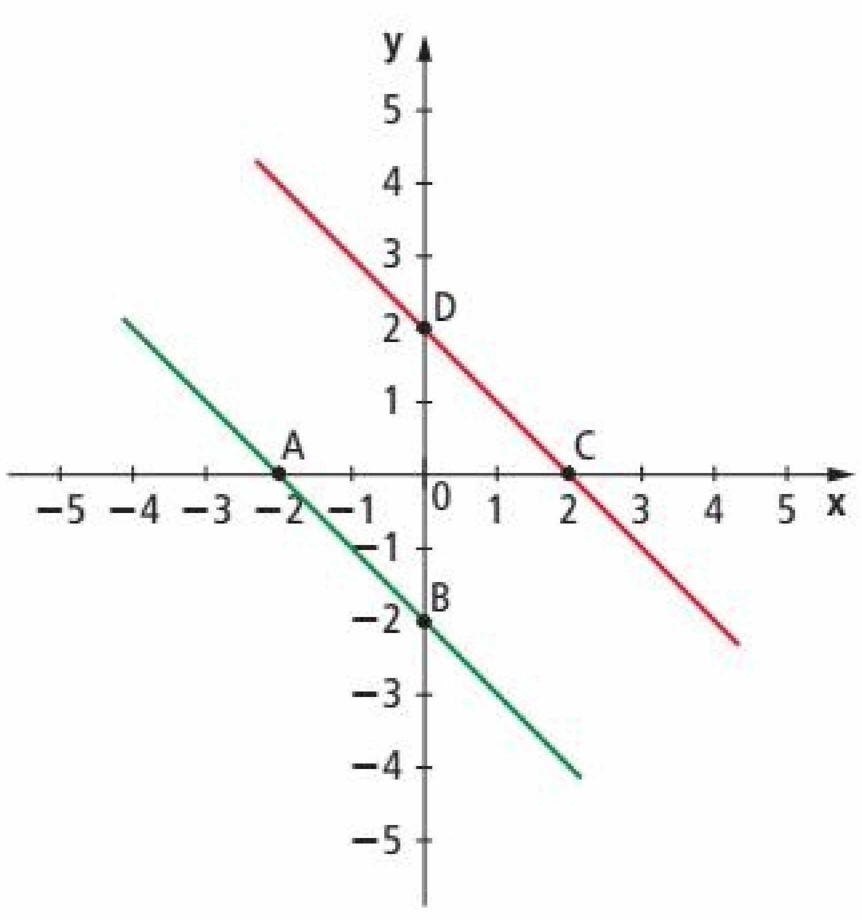
38. (UFRJ) Determine o valor real de a para que $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+a}$ possua como inversa a função $f^{-1}(x) = \dfrac{1-3x}{2x-1}$. 3

39. Em cada item a seguir estão representados em um mesmo plano cartesiano ortogonal os gráficos de duas funções. Determine se as funções representadas são uma a inversa da outra. Justifique sua resposta. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

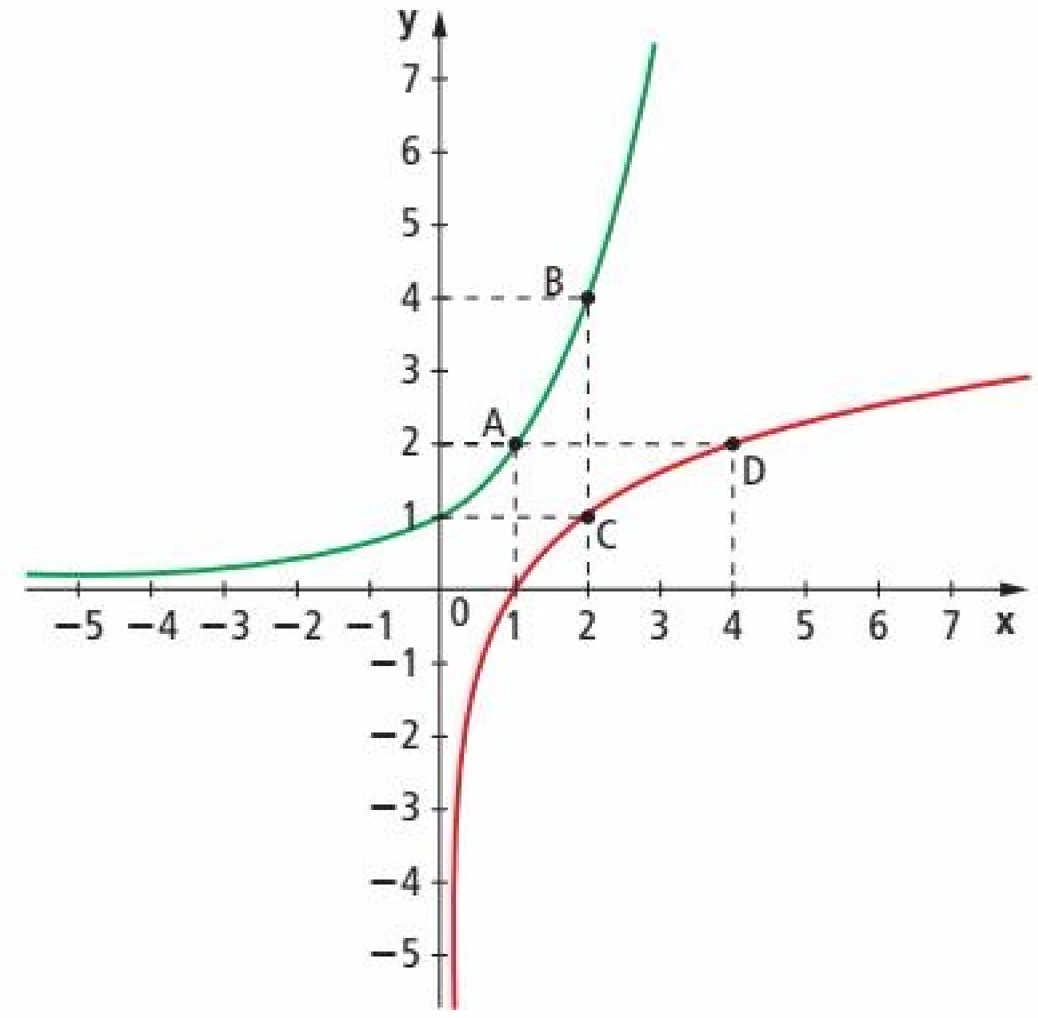
a)



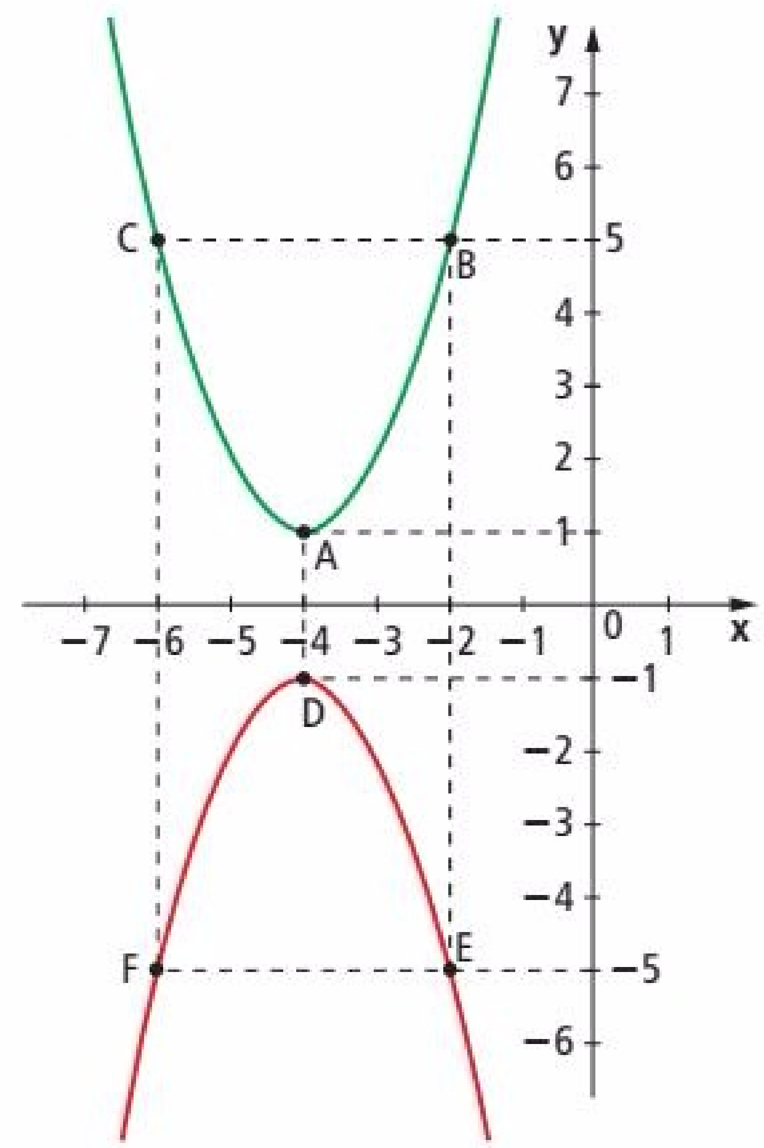
b)



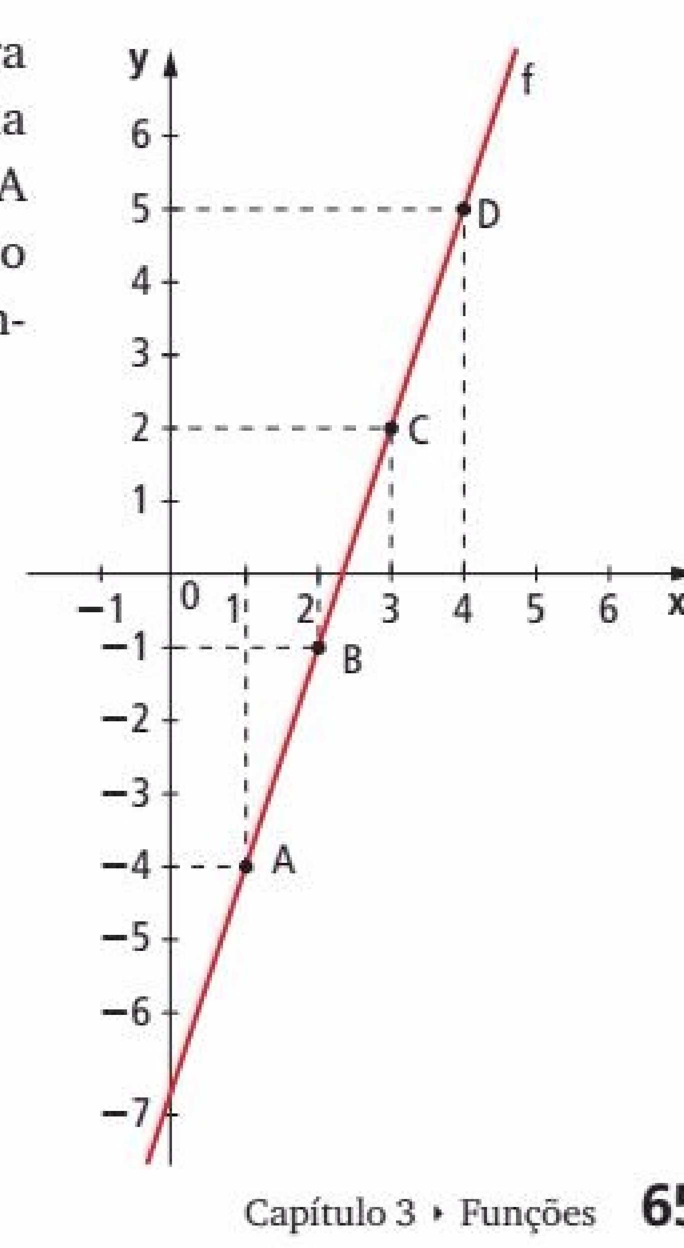
c)



d)



40. Uma função bijetora f está representada no gráfico ao lado. A partir dele, esboce o gráfico da função inversa f^{-1}. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.



Ilustrações: Editoria de arte

Explorando a tecnologia

Função inversa com o GeoGebra

Como estudamos, para que uma função *f* seja invertível, *f* deve ser bijetora, ou seja, ela tem de ser sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.

No entanto, nem todas as funções são bijetoras. Por exemplo, a função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = x^2$, é apenas sobrejetora; logo, não é possível determinar a sua inversa.

Porém, podemos obter uma correspondência biunívoca a partir de uma função não bijetora restringindo convenientemente seu domínio. No caso do exemplo dado, a função $f(x) = x^2$, devemos restringir o domínio de modo que ela seja injetora, ou seja, cada elemento do domínio deve se relacionar com apenas um elemento do conjunto imagem. Assim, as funções f_1 e f_2 representadas nos gráficos a seguir são exemplos de restrição de domínio de *f* que as tornam bijetoras e, portanto, admitem inversa.

Ilustrações: Editoria de arte

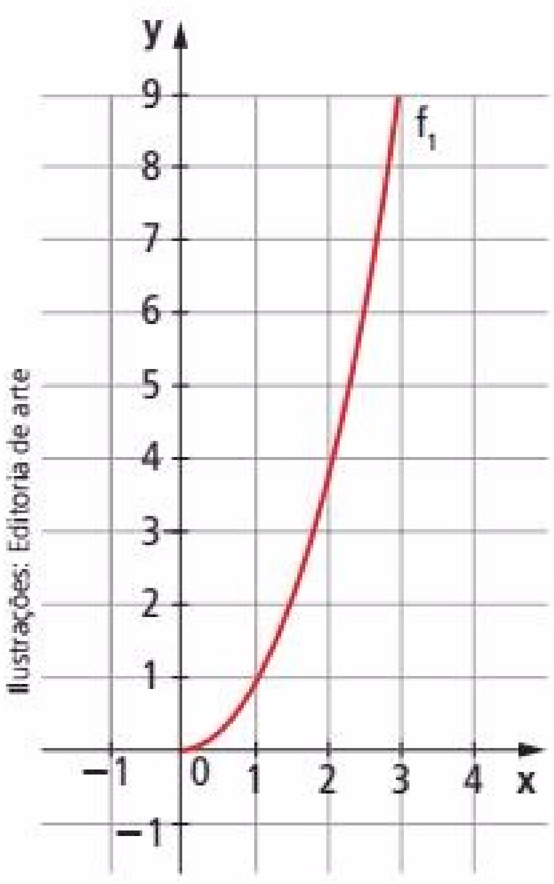


Figura 1: A função $f_1(x) = x^2$, com $D(f_1) = [0, 3]$ é bijetora.

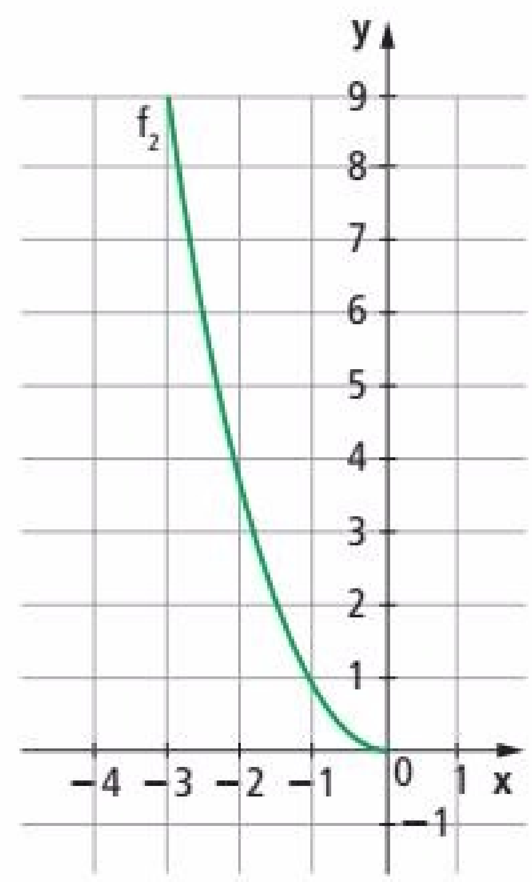
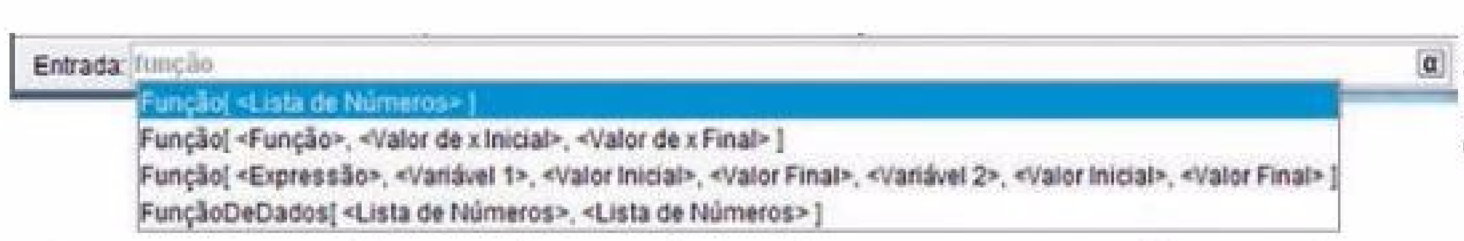


Figura 2: A função $f_2(x) = x^2$, com $D(f_2) = [-3, 0]$ é bijetora.

Podemos utilizar o GeoGebra para determinar os gráficos das funções inversas de f_1 e f_2.

Para isso, siga a sequência de passos abaixo, que indica o processo para determinar a inversa de f_1. O processo para determinar a inversa de f_2 é análogo.

1. Para construir o gráfico de uma função com domínio limitado devemos digitar no **Campo de Entrada** a palavra 'função' e as opções mostradas na figura a seguir estarão disponíveis.



Geogebra

Figura 3: Opções do GeoGebra ao digitar 'função' no **Campo de Entrada**.

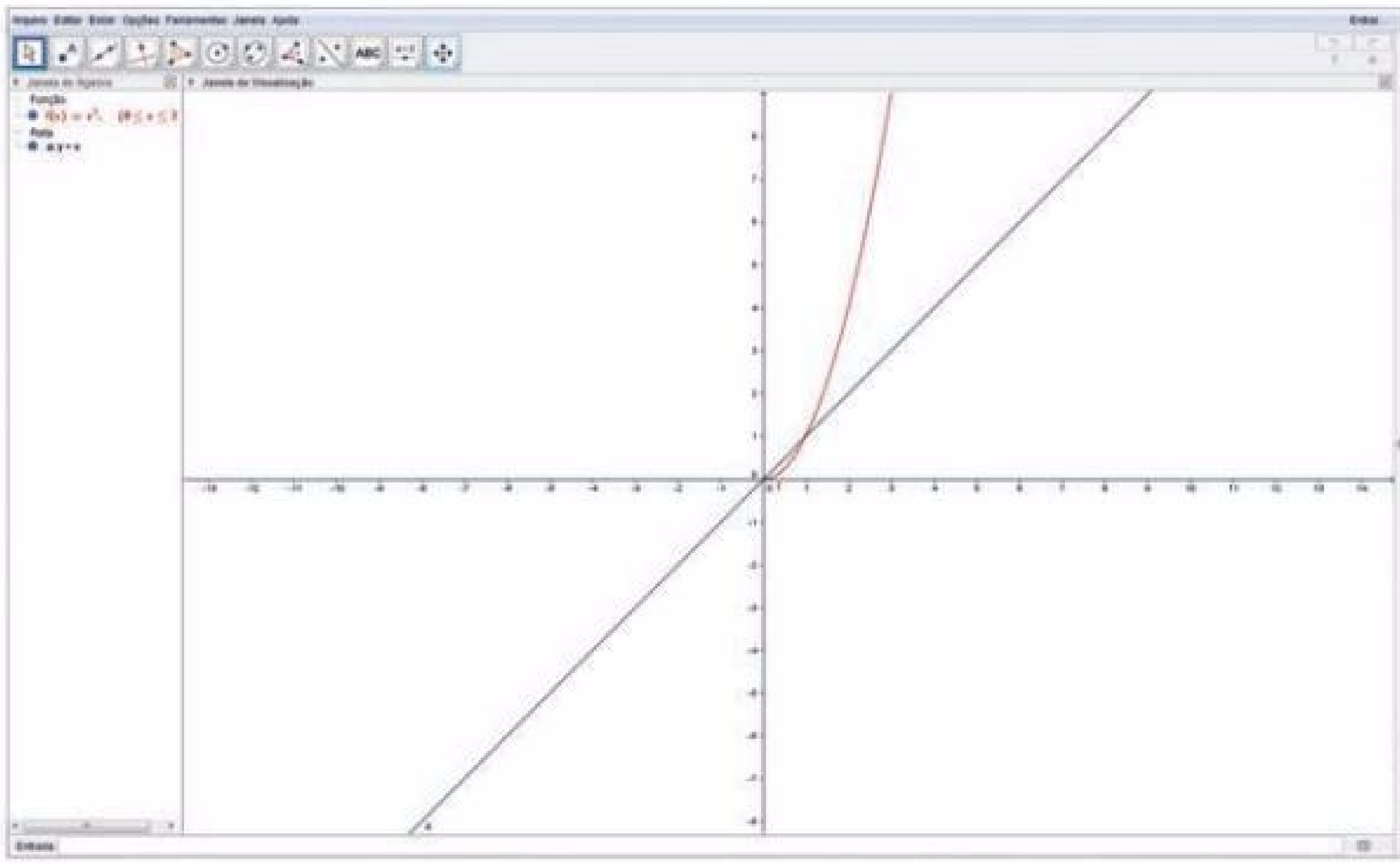
Escolha a opção 'Função[<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>] e, em seguida preencha os campos da seguinte maneira:

- <Função> – Digitar: 'x^2' (o circunflexo significa que o número 2 é um expoente) ou então 'x x' (no **Campo de Entrada** o GeoGebra interpreta um espaço como multiplicação).
- <Valor de x Inicial> – Digitar '0' (zero), pois $D(f_1)=[0, 3]$.
- <Valor de x Final> – Digitar '3' pois $D(f_1)=[0, 3]$.

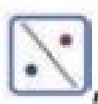
Ao finalizar esses passos e pressionar a tecla '*enter*' aparecerá o gráfico de f_1 mostrado na Figura 1.

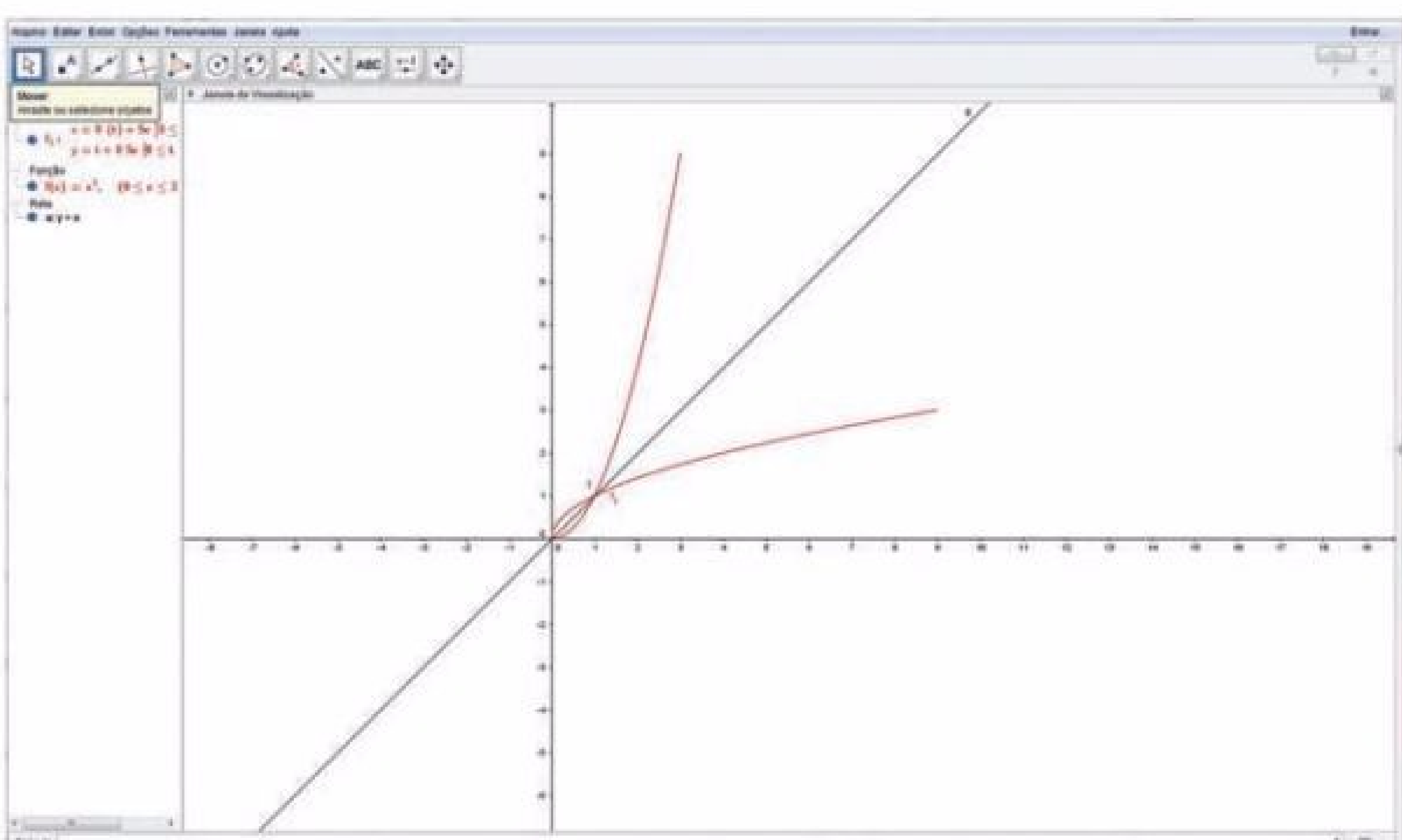
2. Como citado anteriormente, o gráfico de uma função e de sua inversa são simétricos em relação à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares. Portanto, vamos construir essa reta e usá-la para determinar a função inversa.

Para isso, utilizando novamente o **Campo de Entrada**, digite 'y = x' (equação da reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares). Assim, teremos o seguinte gráfico:



Crédito de imagens: Geogebra

3. Com a função f_1 e a reta que contém as bissetrizes definidas, podemos utilizar a ferramenta **Reflexão em Relação a uma Reta**, , e construir o gráfico da respectiva função inversa. Para isso, depois de selecionar a ferramenta de reflexão, marque a função e, em seguida, a reta bissetriz. O resultado é o gráfico mostrado a seguir.



Atividades

Escreva no caderno

1. Com base na sequência apresentada, construa o gráfico da função inversa de f_2.
Veja o Manual do Professor.

2. Faça o que se pede em cada caso.

a) Construa o gráfico da função $g(x) = x^3$ no GeoGebra. Para isso, digite 'y=x^3' no **Campo de Entrada**. Observe o gráfico obtido. A função $g(x)$ é bijetora? Justifique sua resposta. A função $g(x) = x^3$ é bijetora, pois traçando retas paralelas ao eixo *x* percebemos que todo elemento de D(g) tem um correspondente distinto em CD(g). Além disso, CD(g)=Im(g).

b) Para construir o gráfico da inversa de $g(x)$, precisamos limitar o domínio como foi feito na sequência de passos? Como g(x) é bijetora, não precisamos limitar o domínio para construir o gráfico da função inversa.

c) Construa o gráfico de $g^{-1}(x)$ no mesmo plano cartesiano de $g(x)$. Quantos pontos de intersecção há entre os gráficos de $g(x)$ e $g^{-1}(x)$?
Veja o Manual do Professor.

Exercícios complementares

Escreva no caderno

1. (UFRJ) Cíntia, Paulo e Paula leram a seguinte informação numa revista:

"conhece-se, há mais de um século, uma fórmula para expressar o peso ideal do corpo humano adulto em função da altura: $P = (a - 100) - \frac{(a - 150)}{k}$, onde *P* é o peso, em quilos, *a* é a altura, em centímetros, $k = 4$, para homens, e $k = 2$, para mulheres".

a) Cíntia, que pesa 54 quilos, fez rapidamente as contas com $k = 2$ e constatou que, segundo a fórmula, estava 3 quilos abaixo do seu peso ideal. Calcule a altura de Cíntia. 1,64 m

b) Paulo e Paula têm a mesma altura e ficaram felizes em saber que estavam ambos exatamente com seu peso ideal, segundo a informação da revista. Sabendo que Paulo pesa 2 quilos a mais do que Paula, determine o peso de cada um deles. Paula: 54 kg; Paulo: 56 kg.

2. (Enem/MEC) A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.

Uma artista plástica precisou encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm × 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm × 100 cm). O valor da segunda encomenda será:

a) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

X b) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.

c) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.

d) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.

e) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

3. (Fuvest-SP) As funções *f* e *g* são dadas por

$$f(x) = \frac{3}{5}x - 1 \text{ e } g(x) = \frac{4}{3}x + a.$$

Sabe-se que $f(0) - g(0) = \frac{1}{3}$. O valor de $f(3) - 3g\left(\frac{1}{5}\right)$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
X e) 4

4. (PUC-MG) Um ônibus parte da cidade *A* com destino à cidade *B*. Em cada instante *t*, medido em horas, a distância que falta percorrer até o destino é dada, em quilômetros, pela função *D*, definida por $D(t) = 40 \times \left(\frac{t + 7}{t^2 + 1} - 1\right)$. Com base nessas informações, pode-se estimar que o tempo gasto por esse ônibus para ir da cidade *A* até *B*, em horas, é:

X a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

5. (UFC-CE) Seja *f* uma função real de variável real, satisfazendo: $f(a + b) = f(a) \cdot f(b)$, $f(4) = 3$ e $f(5) = 4$. Calcule $f(0)$ e use o resultado para encontrar o valor de $f(9) + f(0)$. 13

6. (FRB-BA) Seja $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ uma função com a seguinte propriedade:

$f(1) = 3$ e $f(n + 1) = \frac{2}{3}f(n) - \frac{1}{2}$.

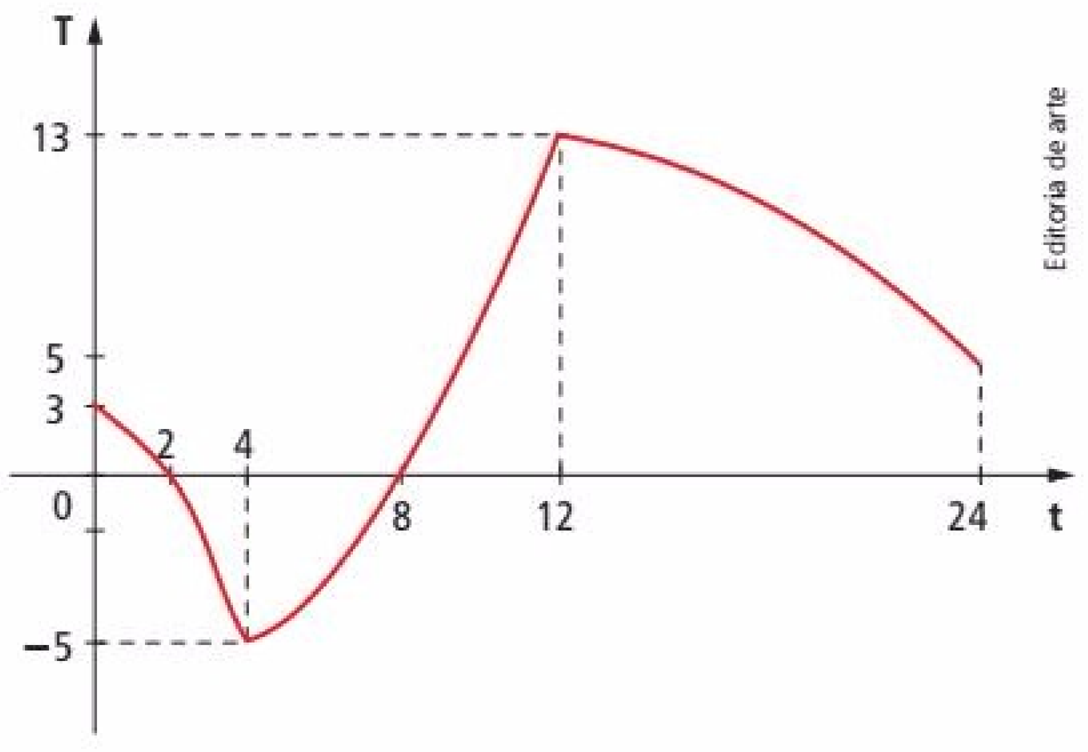
Então, o valor de $f(2) - f(3)$ é igual a:

a) −2
b) −1
c) 0
X d) 1
e) 2

7. (Vunesp-SP) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - 1$. Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais é válida a igualdade

$f(m)^2 - 2f(m) + f(2m) = \frac{m}{2}$. $m = 0$ ou $m = \frac{1}{4}$

8. (UFV-MG) O gráfico a seguir ilustra a evolução da temperatura T (°C), em uma região, ao longo de um período de 24 horas.



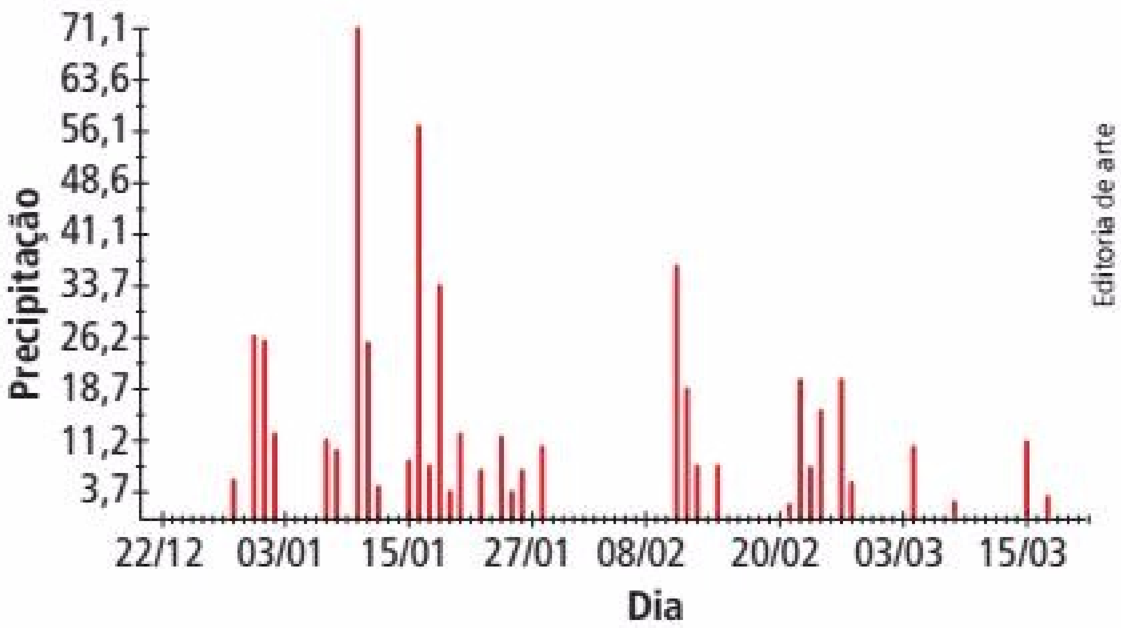
Determine:

a) os horários em que a temperatura atinge 0 °C; Às 2 h e às 8 h.

b) o intervalo de variação da temperatura ao longo das 24 horas; Varia de −5 °C a 13 °C.

c) os intervalos de tempo em que a temperatura é positiva. Das 0 h às 2 h e das 8 h às 24 h.

9. (Unicamp-SP) A figura a seguir mostra a precipitação pluviométrica em milímetros por dia (mm/dia) durante o último verão em Campinas.



Editoria de arte

Se a precipitação ultrapassar 30 mm/dia, há um determinado risco de alagamentos na região. De acordo com o gráfico, quantos dias Campinas teve este risco de alagamento?

a) 2 dias.
x b) 4 dias.
c) 6 dias.
d) 10 dias.

10. (IFSul-RS) A função $f: [0; +\infty[\rightarrow [4; +\infty[$, definida por $f(x) = (x + 2)^2$, possui inversa $f^{-1}: [4; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$, definida por

a) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$
b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$
c) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}+2$
x d) $f^{-1}(x) = \sqrt{x}-2$

Retomando e pesquisando

Escreva no caderno

Na abertura desta unidade você viu alguns dos sistemas monetários utilizados no Brasil. Para relacionar uma quantia de dinheiro em duas unidades monetárias diferentes, é possível estabelecer uma função entre os valores em cada uma dessas unidades. Por exemplo, para relacionar quantias em cruzeiro (Cr$) e em cruzado (Cz$), podemos escrever a lei da função $y = \frac{x}{1\,000}$, em que *x* é o valor considerado em cruzeiros e *y* é o valor correspondente em cruzados.

Para realizar operações financeiras ou quando vamos viajar, por exemplo, é necessário trocar o Real pela moeda do país de destino. Essa relação também pode ser expressa por meio de uma função, mas nem sempre ela é simples e direta como a do exemplo acima. Usualmente, além da troca de moedas, é necessário pagar impostos sobre o valor trocado. Por exemplo, não é possível fazer trocas do real diretamente para o quetzal (GTQ), moeda vigente na Guatemala. Primeiro devemos fazer a troca do real para o dólar americano e depois do dólar para o quetzal.

De Agostini/Getty Images

Frente da cédula de 5 quetzales, moeda vigente na Guatemala.

1. Retome o texto da abertura desta unidade e determine a função que relaciona as unidades monetárias cruzeiro real e real. Veja o Manual do Professor.

2. Suponha que o imposto cobrado para a operação financeira de taxa de câmbio seja de 6,38% e que a taxa do dólar americano em determinado dia foi de R$ 3,97. A partir dessas informações, faça o que se pede em cada item.

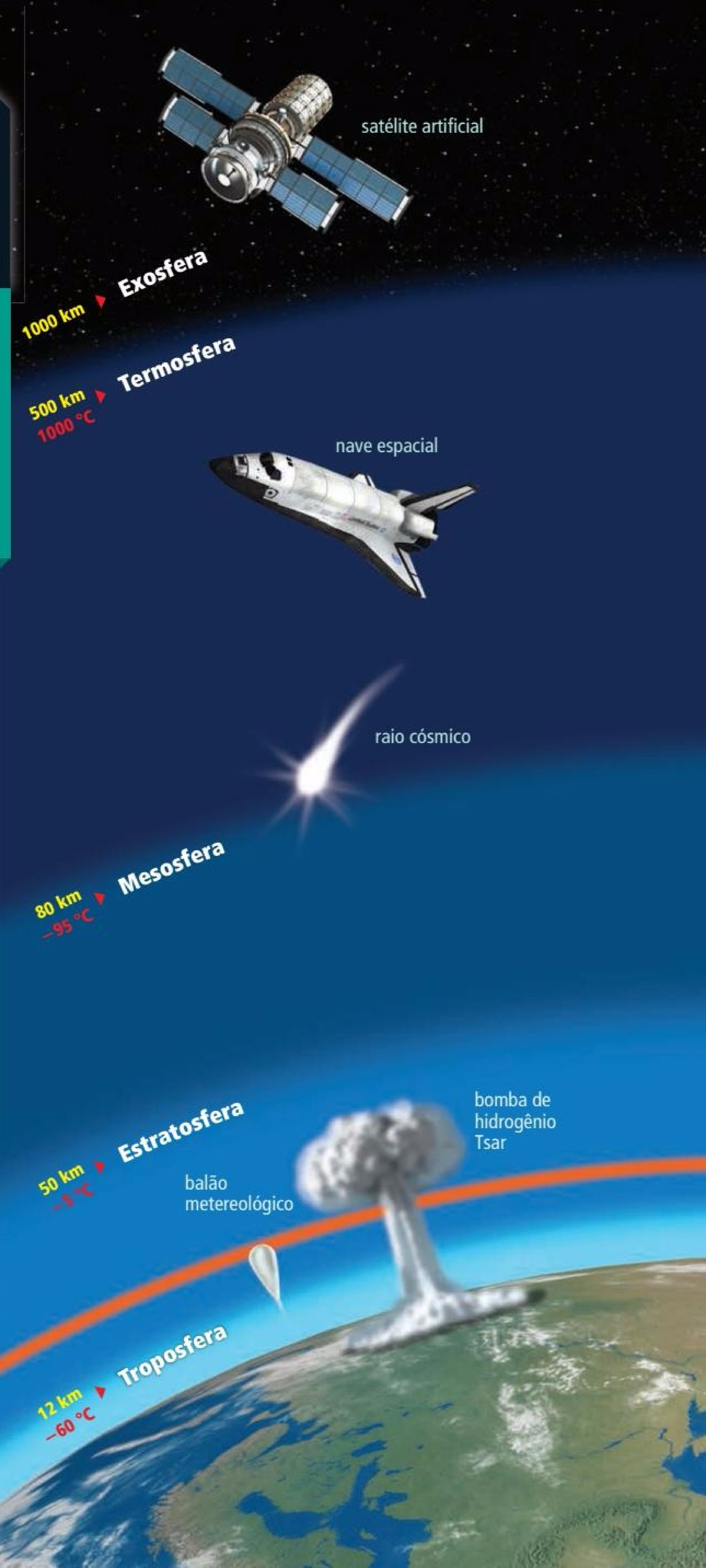
a) Escreva a função que determina o valor em real que será gasto para trocar reais por dólares nesse dia, incluindo o imposto.

b) Uma pessoa em viagem para a Guatemala gostaria de saber quanto custa, em reais, determinado produto cujo preço está em quetzal, desconsiderando-se o imposto sobre a operação financeira. Determine a função para essa conversão de valores sabendo que a taxa do dólar americano na ocasião era GTQ 7,53.

3. Reúna-se com mais dois colegas e pesquise a respeito da Guatemala: localização, população, principais atrações turísticas etc. Monte um painel com as informações obtidas e apresente para a turma.

Unidade 3

Estudo das funções afim, quadrática e modular



A **atmosfera terrestre** é uma camada gasosa relativamente fina que circunda o planeta, composta por gases como o nitrogênio e o oxigênio, que ocupam cerca de 99% do seu volume, além de argônio, dióxido de carbono, ozônio e outros gases, que integram o 1% restante. Esses gases ficam retidos ao redor da Terra, atraídos pela força da gravidade e pela ação do campo magnético que a envolve.

A vida na Terra depende da existência da atmosfera, pois ela é a responsável por manter os gases necessários aos seres vivos, na concentração adequada, além de determinar o clima e suas variações.

De acordo com a variação de temperatura, a atmosfera é dividida em camadas: Troposfera, Estratosfera, Mesosfera, Termosfera e Exosfera. As áreas de transição entre as camadas, conhecidas como áreas de descontinuidade, são denominadas Tropopausa, Estratopausa, Mesopausa e Termopausa.

A maior parte do gás ozônio existente na atmosfera está localizado na Estratosfera. Esse gás é responsável pela proteção dos seres vivos à exposição das radiações solares ultravioletas, atuando como um filtro. A queima de combustíveis fósseis afeta direta e negativamente a camada de ozônio, reduzindo sua existência e eficácia, impactando diretamente no clima do planeta.

1. Você já conhecia a classificação das camadas que compõem a atmosfera? Em qual dessas camadas o ser humano habita? Converse com os colegas a respeito.
2. Observe na imagem as informações a respeito da variação de temperatura e de altitude de cada camada que compõe a atmosfera. Qual é a característica que varia conforme a altitude aumenta e que justifica a convenção de divisão das camadas da atmosfera?
3. As camadas e as áreas de descontinuidade entre as camadas têm nomenclatura semelhante entre si, como os radicais "-sfera" e "-pausa", respectivamente. Pesquise o significado de cada radical e apresente outras palavras que têm esses mesmos radicais.
4. A camada de ozônio está contida na Estratosfera e exerce papel vital aos seres vivos. Com base nas informações apresentadas e nos seus conhecimentos, faça o que se pede.
   a) Discuta com colegas sobre a importância da camada de ozônio para os seres vivos.
   b) A queima de combustíveis fósseis afeta direta e negativamente a camada de ozônio, reduzindo sua existência e eficácia. Realize uma pesquisa para obter mais informações sobre os impactos das ações humanas na camada de ozônio e sobre as consequências dessas ações para o planeta. Converse com os colegas a respeito dos riscos aos seres vivos que a redução da camada de ozônio pode causar.

Veja o Manual do Professor.

Escreva no caderno

Representação fora de escala e em cores-fantasia.

Luis Moura

CAPÍTULO 4

Função afim

Acompanhe as três situações a seguir.

1ª situação:

Em determinada cidade, o preço *p* a ser cobrado por uma "corrida" de táxi é composto de uma parte fixa, chamada bandeirada, e uma parte variável, que depende da distância *x* percorrida (suponha que o táxi não cobrou a hora parada). Então podemos dizer que o preço *p* a ser cobrado é **função** da distância *x* percorrida.

Se, nessa cidade, o valor da bandeirada é R$ 4,10 e cada quilômetro rodado custa R$ 2,50 na bandeira 1, podemos representar o preço a ser cobrado em função da distância percorrida pela lei:

$$\mathbf{p = 4{,}10 + 2{,}50x}$$

A lei dessa função é equivalente a $f(x) = 4{,}10 + 2{,}50x$ ou $y = 4{,}10 + 2{,}50x$ em que $f(x)$ ou *y* é o preço a ser cobrado (em real) e *x* é a distância percorrida (em km).

Fotoarena/Folhapress

O taxímetro é usado para calcular o valor da corrida.

2ª situação:

A capacidade de uma caixa-d'água é de 1 000 litros. No instante em que ela estava completamente cheia, um encanador detectou um vazamento de 6 litros por hora. A relação entre quantidade de água *Q* (em litro) que resta na caixa que está sendo esvaziada em função do tempo *t* (em hora) é uma **função** e pode ser representada pela lei:

$$\mathbf{Q = 1000 - 6t} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{Q = -6t + 1000}$$

3ª situação:

Um veículo blindado gasta 0,25 litro de combustível por quilômetro rodado. Podemos dizer que a quantidade *y* de combustível gasto (em L) é função da distância *x* percorrida (em km) e pode ser indicada pela lei:

$$\mathbf{y = 0{,}25x}$$

As leis das funções modeladas para representar cada uma das três situações apresentadas têm como características uma parte fixa e uma parte variável, que depende do valor da variável independente. Uma função com essas características é chamada de **função afim** e será estudada ao longo deste capítulo.

Função afim

Apresentamos a seguir a definição de **função afim** para prosseguirmos o estudo das funções.

> Uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com *a* e *b* reais, é chamada **função afim**.

Exemplos de funções afins:

a) $f(x) = 5x + 1$

b) $f(x) = -x\sqrt{2} - 1$

c) $f(x) = -9x$

d) $f(x) = 3$

Assim como abordado no capítulo anterior, *x* é a variável independente e *y* é a variável dependente na função afim dada por $f(x) = ax + b$. Ao atribuir valores para a variável independente, obtemos o **valor da função** para determinado valor de *x*. Por exemplo, para $f(x) = 5x + 1$, podemos calcular $f(3)$ e $f(-4)$:

$f(3) = 5 \cdot 3 + 1 \Rightarrow f(3) = 16$
Então 16 é o valor da função *f* para $x = 3$.

$f(-4) = 5 \cdot (-4) + 1 \Rightarrow f(-4) = -19$
Então -19 é o valor da função *f* para $x = -4$.

Em uma função afim dada por $f(x) = ax + b$, os números reais ***a*** e ***b*** são chamados **coeficientes** e, de acordo com seus valores, a função afim recebe alguns nomes particulares que estudaremos a seguir.

Função polinomial do 1º grau

Quando o coeficiente *a* da função afim é diferente de zero, a função recebe o nome de **função polinomial do 1º grau**, pois a relação entre a variável dependente e a variável independente é expressa por um polinômio do 1º grau ($y = ax + b$). Assim, definimos:

> Uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, com *a* e *b* reais e $a \neq 0$, é chamada **função polinomial do 1º grau**.

Por exemplo:

a) $f(x) = 2x - 1$, em que $a = 2$ e $b = -1$

b) $y = 0{,}5x + \sqrt{2}$, em que $a = 0{,}5$ e $b = \sqrt{2}$

Função linear

Se, além de $a \neq 0$, tivermos $b = 0$, a função polinomial do 1º grau é expressa pela lei $f(x) = ax$ e é chamada **função linear**. Assim:

> Uma função f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, com *a* real e $a \neq 0$, é chamada **função linear**.

Por exemplo:

a) $f(x) = -7x$, em que $a = -7$

b) $y = x\sqrt{3}$, em que $a = \sqrt{3}$

Como a função linear é um caso particular da função polinomial do 1º grau, ela também é uma função afim.

Função linear e proporcionalidade

Dada uma função linear cuja lei é da forma $f(x) = y = ax$, com $a \neq 0$, quando $a > 0$ dizemos que as variáveis *y* e *x* representam **grandezas diretamente proporcionais**, pois se relacionam segundo a lei **y = kx**, em que a constante de proporcionalidade *k* é o coeficiente *a* da função.

Professor, caso julgue interessante, comente com os alunos que as grandezas inversamente proporcionais **não** são associadas a uma função linear. Nesse caso, a relação entre as grandezas é expressa pela lei $y = \frac{k}{x}$, que **não** é uma função afim.

Função identidade

Quando $a = 1$ e $b = 0$, a função polinomial do 1º grau é expressa pela lei $f(x) = x$ e é chamada **função identidade**. Assim:

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ é chamada **função identidade**.

A função identidade recebe esse nome pois associa cada valor de $x \in \mathbb{R}$ a ele mesmo, por exemplo: $f(1) = 1$, $f(0{,}5) = 0{,}5$, $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$.

Observações:

- Como a função identidade é um caso particular da função polinomial do 1º grau, ela também é uma função afim.
- A função identidade é um caso específico da função linear, quando $a = 1$.

Função constante

Outro tipo de função afim é a **função constante**. Nela, temos $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Assim:

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$, com *b* real, é chamada **função constante**.

A função constante associa cada valor de $x \in \mathbb{R}$ sempre ao mesmo valor *b*. Então, o conjunto imagem da função constante é $Im = \{b\}$.

Por exemplo:

a) $f(x) = 12$, em que $b = 12$

b) $f(x) = -6{,}4$, em que $b = -6{,}4$

c) $y = \frac{5}{8}$, em que $b = \frac{5}{8}$

d) $y = 2\sqrt{7}$, em que $b = 2\sqrt{7}$

Observações:

- Em uma função constante $a = 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Então a função constante é um caso particular da função afim.
- Como $a = 0$, a função constante **não** é uma função polinomial do 1º grau.

Exercícios resolvidos

1 Vinícius trabalha como *disc jockey* (dj) e cobra um valor fixo de R$ 200,00, além de um valor adicional de R$ 90,00 por hora para animar uma festa.

a) Indicando por *y* o valor recebido em reais e por *x* a quantidade de horas trabalhadas, escreva a lei da função que relaciona *y* e *x*.

b) Essa função é uma função afim? Justifique sua resposta.

c) Quantos reais Vinícius recebeu se trabalhou em uma festa por 2 horas?

d) Se Vinícius recebeu R$ 515,00 em determinada festa, por quantas horas ele prestou seu serviço?

Resolução

a) O valor *y* recebido por Vinícius é composto de uma parte fixa (R$ 200,00) e uma parte variável, que depende da quantidade *x* de horas que ele fica na festa. Assim, a lei que relaciona as duas variáveis pode ser escrita como:

$y = 200 + 90x$ ou $y = 90x + 200$

b) Sim, essa é uma função afim, pois a lei que a expressa é do tipo $y = f(x) = ax + b$, com *a* e *b* reais.

c) O tempo de animação da festa foi de 2 horas, então substituímos *x* por 2 na lei da função e determinamos o valor de *y* correspondente:

$y = 200 + 90 \cdot 2 \Rightarrow y = 200 + 180 \Rightarrow y = 380$

Portanto, Vinícius recebeu R$ 380,00 por 2 horas de animação.

d) Se ele recebeu R$ 515,00, substituímos *y* por 515 na lei da função e determinamos o valor de *x*:

$515 = 200 + 90x \Rightarrow 90x = 315 \Rightarrow x = 3{,}5$

Portanto, ele prestou serviços nessa festa por 3,5 h ou 3h30min.

2 (UEG-GO) Em uma fábrica, o custo de fabricação de 500 unidades de camisetas é de R$ 2 700,00, enquanto o custo para produzir 1 000 unidades é de R$ 3 800,00. Sabendo que o custo das camisetas é dado em função do número produzido através da expressão $C(x) = qx + b$, em que *x* é a quantidade produzida e *b* é o custo fixo, determine:

a) Os valores de *b* e de *q*.

b) O custo de produção de 800 camisetas.

Resolução

a) De acordo com o enunciado, se:

- $x = 500$ então $C(x) = 2\,700$
- $x = 1\,000$ então $C(x) = 3\,800$

Para determinar os valores de b e q, substituímos as informações acima em $C(x) = qx + b$ e resolvemos o sistema formado:

$$\begin{cases} 2\,700 = 500q + b & \text{(I)} \\ 3\,800 = 1000q + b & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\oplus \begin{array}{rcl} -2\,700 & = & -500q - b \\ 3\,800 & = & 1\,000q + b \\ \hline 1\,100 & = & 500q \end{array} \Rightarrow q = \frac{11}{5}$$

Substituindo q por $\frac{11}{5}$ em (I), temos:

$$2\,700 = 500 \cdot \frac{11}{5} + b \Rightarrow b = 1\,600$$

Portanto, $b = 1\,600$ e $q = \frac{11}{5}$.

b) A lei da função que representa o custo das camisetas é: $C(x) = \frac{11}{5}x + 1\,600$.

Substituindo $x = 800$ na lei da função, determinamos $C(x)$:

$$C(800) = \frac{11}{5} \cdot 800 + 1\,600 \Rightarrow C(800) = 3\,360$$

Portanto, o custo de produção de 800 camisetas é R$ 3 360,00.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

I. $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$

II. $y = -2x + \sqrt{3}$

III. $f(x) = \frac{2}{5}x$

IV. $y = 0{,}01$

a) Quais dessas funções são funções afins?

b) Classifique as funções afins em função polinomial do 1º grau, função linear ou função constante.

c) Para as funções afins, identifique os valores dos coeficientes a e b.

2. Dada a função $f(x) = 5x - 2$, determine:

a) $f(2)$; 8

b) o valor de x para $f(x) = 0$. $x = \frac{2}{5}$

3. Em uma função afim, $y = f(x)$, sabe-se que $f(1) = 4$ e $f(-2) = 10$.

Escreva no caderno a lei da função f e calcule $f\left(-\frac{1}{2}\right)$. $f(x) = -2x + 6$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$

4. (FGV-SP) Uma função polinomial f do 1º grau é tal que $f(3) = 6$ e $f(4) = 8$. Portanto, o valor de $f(10)$ é:

a) 16

b) 17

c) 18

d) 19

X e) 20

5. (UFC-CE) Seja f uma função real, de variável real, definida por $f(x) = ax + b$. Se $f(1) = -9$ e $b^2 - a^2 = 54$, calcule o valor de $a - b$. 6

6. A mãe de Caio ligou para o pediatra, Dr. João, para saber quantos miligramas do medicamento receitado ela deveria dar ao filho para diminuir a febre.

Dr. João informa que, de acordo com a bula do medicamento, há um método para calcular a dose pediátrica, tomando como base o "peso" da criança. Se a denota a dose adulta (em mg) e p é o "peso" da criança (em kg), então a dose infantil (D) é dada pela fórmula: $D(p) = \frac{a \cdot p}{68}$.

Se a dose adulta é de 500 mg, qual foi a dose que o Dr. João receitou para Caio, sabendo que seu "peso" atual é 17 kg? 125 mg

7. Uma pessoa caminhando sempre no mesmo ritmo dá um passo de 80 centímetros a cada 1 segundo.

a) Escreva no caderno a fórmula que indica a distância percorrida d, em centímetro, em função do tempo t, em segundo. As grandezas distância (d) e tempo (t) são diretamente proporcionais? Justifique sua resposta. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Que distância essa pessoa percorrerá em 10 segundos? E em 40 segundos? 800 cm; 3 200 cm

c) Quantos segundos ela levará para percorrer 100 metros? 125 s

8. Sofia quer produzir folhetos com a propaganda de sua empresa. Na gráfica A, o valor da impressão desse folheto, por unidade, é R$ 0,30. A gráfica B cobra R$ 0,25 para impressão de cada unidade.

a) Escreva no caderno a fórmula que relaciona o valor y a ser pago pela impressão, em reais, e o número n de folhetos impressos em cada uma dessas gráficas. $y_A = 0{,}30n$ e $y_B = 0{,}25n$

b) As grandezas y e n são diretamente proporcionais? Justifique. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

c) Se Sofia encomendar 1 000 folhetos na gráfica B, quantos reais gastará? R$ 250,00

9. Vimos que a função afim é aquela dada por uma lei do tipo $f(x) = ax + b$. Este comportamento entre as variáveis pode ser observado, por exemplo, nas regras de aposentadoria por tempo de contribuição, criadas em 2015. Leia o texto a seguir a respeito da Previdência Social e a aposentadoria e faça o que se pede em cada item.

Previdência Social – Aposentadoria

Você já ouviu falar no termo aposentadoria? Todo trabalhador regularmente registrado deve, juntamente com a empresa onde trabalha, efetuar o pagamento de tributos relacionados à sua atividade. Parte destes tributos é destinada ao Instituto Nacional de Seguridade Social (INSS), órgão responsável por manter e administrar o seguro social público, conhecido como Previdência Social. Este seguro social pode ser um benefício temporário, enquanto o trabalhador está impossibilitado de exercer suas funções (doença, problemas psicológicos, entre outros), ou permanente, sendo comumente chamado de aposentadoria.

Segundo o Ministério da Previdência Social, existem diversos tipos de aposentadoria, como por idade, por tempo de contribuição, por invalidez, entre outros.

As regras para a concessão de aposentadoria sofrem ajustes e mudanças de tempos em tempos. Em 2015, a aposentadoria por tempo de contribuição (benefício devido ao cidadão que comprovar o tempo total de 35 anos de contribuição, se homem, ou 30 anos de contribuição, se mulher) foi alterada, sendo criada a regra 85/95 Progressiva.

APOSENTADORIA: Novas regras por tempo de contribuição já estão em vigor

Cálculo leva em conta a soma da idade e tempo de contribuição da pessoa

A nova regra de cálculo das aposentadorias por tempo de contribuição foi estabelecida pela Lei 13.183, publicada no Diário Oficial da União [...]. Agora, o cálculo levará em consideração o número de pontos alcançados somando a idade e o tempo de contribuição do segurado – a chamada Regra 85/95 Progressiva.

Além da soma dos pontos é necessário também cumprir a carência, que corresponde ao quantitativo mínimo de 180 meses de contribuição para as aposentadorias. Alcançados os pontos necessários, será possível receber o benefício integral, sem aplicar o fator previdenciário. A progressividade ajusta os pontos necessários para obter a aposentadoria de acordo com a expectativa de sobrevida dos brasileiros. [...]

Até 30 de dezembro 2018, para se aposentar por tempo de contribuição, sem incidência do fator, o segurado terá de somar 85 pontos, se mulher, e 95 pontos, se homem. A partir de 31 de dezembro de 2018, para afastar o uso do fator previdenciário, a soma da idade e do tempo de contribuição terá de ser 86, se mulher, e 96, se homem. A lei limita esse escalonamento até 2026, quando a soma para as mulheres deverá ser de 90 pontos e para os homens, 100 – conforme a tabela abaixo:

	Mulher	Homem
Até 30 de dezembro de 2018	85	95
De 31 de dez: 18 a 30 de dez: 20	86	96
De 31 de dez: 20 a 30 de dez: 22	87	97
De 31 de dez: 22 a 30 de dez: 24	88	98
De 31 de dez: 24 a 30 de dez: 26	89	99
De 31 de dez: 26 em diante	90	100

[...]

Então agora só se aposenta por tempo de contribuição quem atingir os 85 ou 95 pontos?

Não. Para ter direito à aposentadoria por tempo de contribuição, os segurados da Previdência Social precisam ter 30 anos de contribuição, no caso das mulheres, e 35 anos, no caso dos homens. A nova regra é uma opção de cálculo, que permite afastar a aplicação do Fator Previdenciário (mas que tem carência de 180 meses de contribuição, como as demais aposentadorias). Caso a pessoa deseje se aposentar antes de completar a soma de pontos necessários, ela poderá se aposentar, mas vai haver aplicação do fator previdenciário e, portanto, potencial redução no valor do benefício.

Fator previdenciário

Fórmula matemática utilizada para definir o valor das aposentadorias [...].

O objetivo é incentivar o contribuinte a trabalhar por mais tempo, reduzindo o benefício de quem se aposenta antes dos 60 anos de idade e 30 anos de contribuição, no caso das mulheres, e 65 anos de idade e 35 anos de contribuição, no caso dos homens. Quanto menor a idade no momento da aposentadoria, maior é o redutor do benefício. [...]

O fator previdenciário foi instituído pela Lei 9.876/99 após a Reforma da Previdência de 1998, para conter os gastos da Previdência Social.

BRASIL. Senado Federal. **Fator previdenciário**. Brasília: [20--?]. Disponível em: <http://www12.senado.leg.br/noticias/entenda-o-assunto/fator-previdenciario>. Acesso em: 01 dez. 2015.

Lefteris Pitarakis/AP/Glow Images

Realizar atividades físicas regularmente contribui na manutenção da saúde. Entretanto, antes de iniciar essa prática é necessário consultar um médico.

Professor, aproveite a oportunidade para comentar com os alunos sobre a existência do Estatuto do Idoso. Nesse documento temos a informação de que é proibida a discriminação por idade e a fixação de limite máximo de idade na contratação de empregados, sendo passível de punição quem o fizer. Além disso, o primeiro critério de desempate em concurso público é o da idade, com preferência para os concorrentes com idade mais avançada. Dessa forma, mesmo que aposentado, o idoso pode continuar trabalhando normalmente. Se achar oportuno, peça que os alunos acessem o documento na íntegra em: http://tub.im/i4bq5x. Acesso em: 12 maio 2016.

Qual a idade mínima para se aposentar pela Regra 85/95?

Pelas regras de hoje, NÃO existe idade mínima para aposentadoria por tempo de contribuição no INSS. O que é exigido para esse tipo de aposentadoria é o tempo mínimo de contribuição, de 30 anos para mulheres e de 35 para homens. A regra 85/95 não muda em nada o requisito de acesso ao benefício. A nova regra traz uma nova forma de cálculo do valor do benefício, permitindo que não se aplique o Fator Previdenciário para quem atingir os pontos. [...]

Por que as mudanças são necessárias?

Para garantir uma Previdência sustentável e contas equilibradas para o futuro, de modo a assegurar a aposentadoria dos trabalhadores de hoje, mas também de seus filhos e netos.

Mas por que mudar as regras?

Diversos países estão revendo seu modelo de previdência por causa do aumento da expectativa de vida e da rápida transição demográfica que estão vivendo. As pessoas estão vivendo mais tempo e recebendo aposentadoria por um período maior de tempo, o que aumenta os custos da Previdência. Simultaneamente, no caso brasileiro, as taxas de fecundidade estão caindo, o que significa que nas próximas décadas haverá menos contribuintes para cada idoso.

Hoje há mais de 9 pessoas em idade ativa para cada idoso. Em 2030 serão 5 na ativa para cada idoso. Em 2050, 3 e, em 2060, apenas 2,3 trabalhando.

Por que instituir essa progressividade do sistema de pontos?

Porque o modelo não pode ser estático, já que a expectativa de vida do brasileiro continuará crescendo. A Previdência Social precisa seguir regras que se adequem às novas realidades sociais para garantir que no futuro ela seja sustentável. Vincular o sistema de pontos à expectativa de vida é uma forma de garantir uma adequação gradual do sistema, evitando mudanças bruscas no futuro. [...]

Fonte: BRASIL. Ministério do Trabalho e Previdência Social. Aposentadoria: novas regras por tempo de contribuição já estão em vigor. Brasília: 2015. Disponível em: <http://www.previdencia.gov.br/2015/06/servico-novas-regras-para-aposentadoria-por-tempo-de-contribuicao-ja-estao-em-vigor>. Acesso em: 01 dez. 2015.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) De acordo com o texto, qual é a exigência para ter direito à aposentadoria por tempo de contribuição?

b) Liste os principais fatores motivadores das mudanças nas regras de aposentadoria por tempo de contribuição apresentados no texto.

c) Considere i a idade de aposentadoria, em anos, de um cidadão que contribui regularmente para a Previdência Social por um período de tempo x, em anos. Se este cidadão pretende se aposentar após 2027, represente por meio da lei de uma função afim, a relação $i(x)$, que corresponde à idade em que este contribuinte terá direito a aposentadoria por tempo de contribuição, **sem incidência do fator previdenciário**, segundo as regras de 2015 apresentadas no texto. Escreva uma lei de função para cada caso: homem e mulher.

d) De acordo com as respostas dos itens **a** e **c**, podemos dizer que há restrição no domínio da função $i(x)$? Justifique sua resposta e dê o domínio da função para os casos homem e mulher.

e) Vamos realizar algumas simulações de aposentadoria, considerando a regra 85/95 Progressiva para o ano atual. Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o com informações a respeito de membros de sua família ou conhecidos que ainda não tenham se aposentado. Em seguida, determine a função que deverá ser utilizada e calcule a idade que as pessoas selecionadas iriam se aposentar. Lembre-se de que a função muda de acordo com o sexo do trabalhador e com o ano de aposentadoria considerado.

Sexo	Tempo x de contribuição (em anos)	Função i(x)	Idade i de aposentadoria

f) De acordo com o quadro preenchido no item **e**, avalie as informações obtidas e responda: na sua opinião, a idade de aposentadoria obtida para as pessoas pesquisadas é alta ou baixa? Leve em consideração a expectativa de vida do brasileiro, a atividade exercida por eles e o tempo de trabalho por dia, entre outros fatores que julgar relevante.

g) Pesquise em jornais, revistas e na internet dados econômicos e estatísticos que indiquem as dificuldades econômicas encontradas pela Previdência Social, e que correspondem a um dos fatores responsáveis pelas mudanças das regras da aposentadoria por tempo de contribuição e outros direitos assegurados pelo seguro social. Monte um painel apresentando os dados encontrados, bem como possíveis soluções e/ou ações já em vigor ou que podem ser aplicadas pelo governo para ajustar o desequilíbrio existente nas contas da Previdência Social.

Gráfico da função afim

No capítulo anterior você estudou que o gráfico de uma função *f* é o conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x \in D(f)$ e $y = f(x)$. Para a função afim, esse conceito também é válido e temos a seguinte definição:

O gráfico de uma função afim é uma reta.

Demonstração

Considere a função afim *f* dada por $f(x) = ax + b$, e três pontos distintos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ pertencentes ao gráfico de *f*. Para demonstrar que o gráfico de *f* é uma reta, vamos provar que os pontos *A*, *B* e *C* estão alinhados.

Como os pontos fazem parte do gráfico da função, podemos substituir os valores de *x* e *y* na lei de formação. Assim:

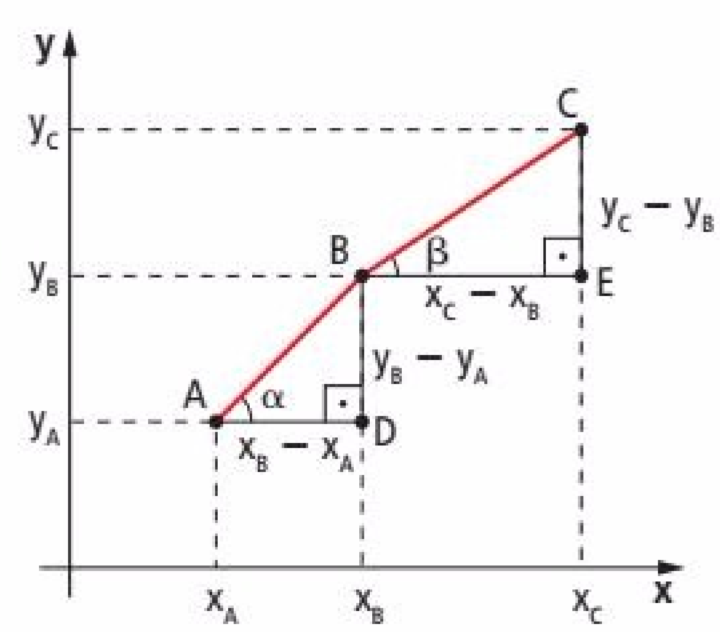
$y_A = ax_A + b$ (I) $\qquad y_B = ax_B + b$ (II) $\qquad y_C = ax_C + b$ (III)

Fazendo (III) − (II) e (II) − (I), temos:

$y_C - y_B = a(x_C - x_B) \Rightarrow a = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} \qquad y_B - y_A = a(x_B - x_A) \Rightarrow a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Portanto, $\dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (IV).

Agora, vamos supor que *A*, *B* e *C* não estejam alinhados, como mostra o gráfico ao lado.



Observe que $CE = y_C - y_B$, $BE = x_C - x_B$, $BD = y_B - y_A$ e $AD = x_B - x_A$. Substituindo em (IV), temos $\dfrac{CE}{BE} = \dfrac{BD}{AD}$, ou seja, os lados correspondentes dos triângulos BEC e ADB são proporcionais. Além disso os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{E}$ são retos. Então os triângulos BEC e ADB são semelhantes e os ângulos α e β têm mesma medida e, portanto, os pontos *A*, *B* e *C* estão alinhados.

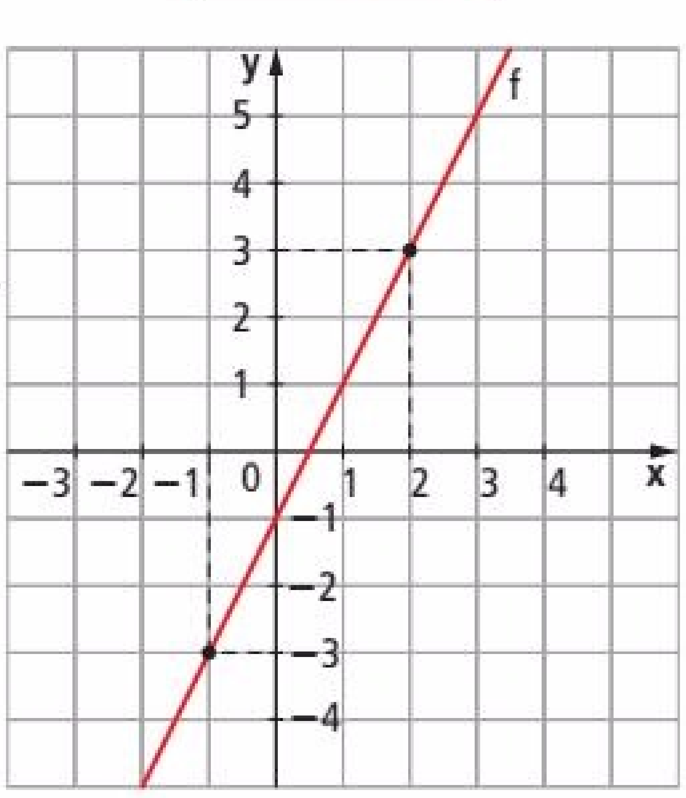
Logo, o gráfico de uma função afim é uma reta.

É interessante escolher dois pontos não muito próximos um do outro, para facilitar o traçado da reta e diminuir a chance de erros de desenho.

Como o gráfico de uma função afim é uma reta, precisamos determinar apenas dois pontos quaisquer pertencentes ao gráfico da função para traçá-lo. Para isso, inicialmente construímos uma tabela com valores de *x* e *y* que fazem parte da função afim *f*, ou seja, determinamos as coordenadas (x, y) de dois pontos quaisquer que fazem parte do gráfico de *f*. Em seguida, localizamos esses pontos no plano cartesiano. Por fim, traçamos a reta que contém os pontos indicados.

Acompanhe alguns exemplos de construção de gráficos de funções afins reais de variável real.

x	y
−1	−3
2	3



Ilustrações: Editoria de arte

a) $f(x) = 2x - 1$

A função *f* é uma função polinomial do 1º grau. Para traçar seu gráfico, seguimos as orientações indicadas, construindo primeiro a tabela, em seguida localizando os pontos e finalmente traçando a reta.

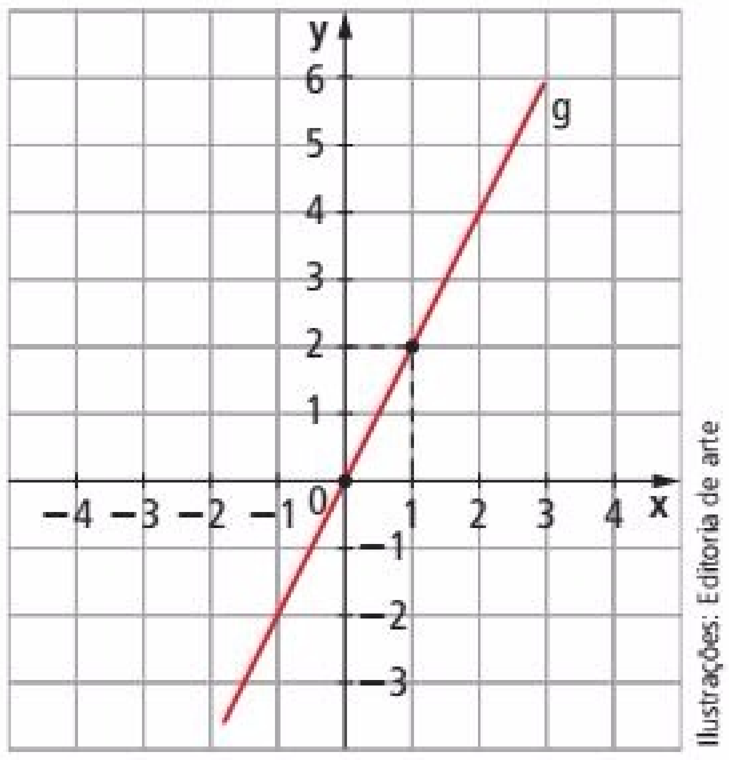
Note que o gráfico da função *f* é uma reta oblíqua em relação aos eixos coordenados.

b) $g(x) = 2x$

A função *g* é uma função linear e para traçar seu gráfico poderíamos adotar o procedimento apresentado anteriormente. No entanto, vimos que a lei de formação de uma função linear é $y = ax$, com $a \neq 0$. Substituindo $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 = 0$.

Portanto, o gráfico da função linear sempre passa pelo ponto (0, 0), origem do plano cartesiano. Assim, é necessário determinar apenas mais um ponto pertencente ao gráfico da função *g*.

x	y
1	2

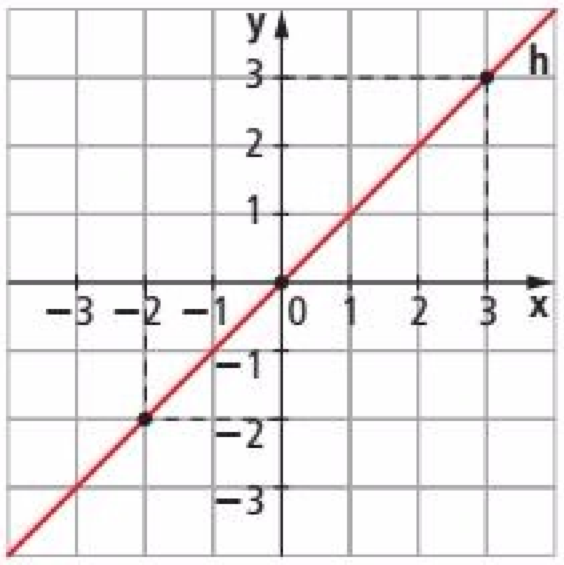


c) $h(x) = x$

A função *h* é a função identidade, portanto ela associa cada valor de *x* do domínio a ele mesmo.

Como a função identidade é um caso particular de função linear, a função *h* também passa pela origem do plano cartesiano.

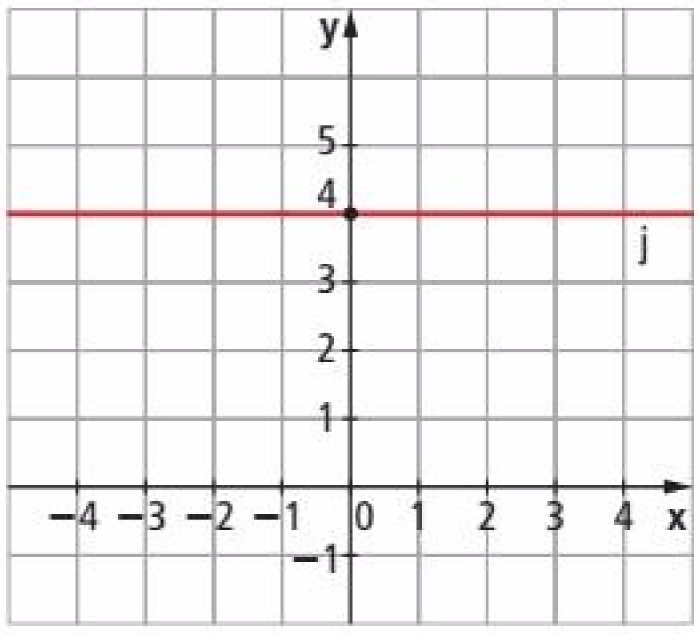
x	y
−2	−2
3	3



O gráfico da função identidade é a reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares do plano cartesiano.

d) $j(x) = 4$

A função *j* é uma função constante. Para qualquer valor de *x* no domínio, o valor de *y* será o mesmo, no caso, 4. Portanto, o gráfico é uma reta paralela ao eixo *x* que corta o eixo *y* no ponto (0, 4).

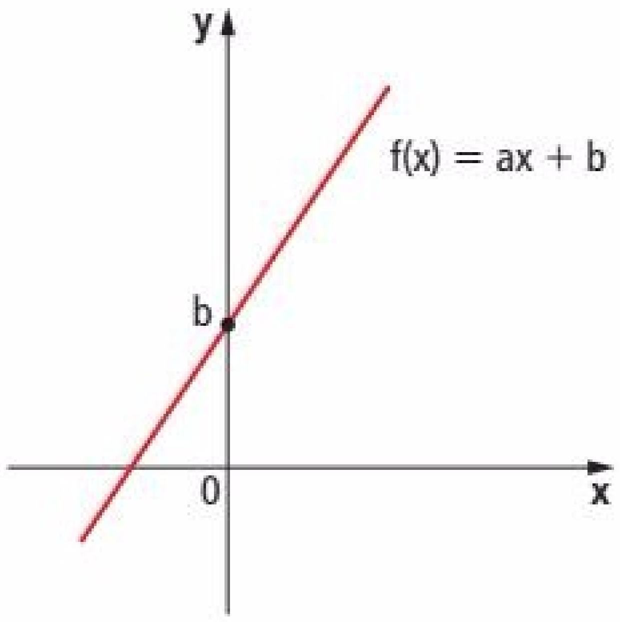


De modo geral, o gráfico de uma função constante $y = k$ é uma reta paralela ao eixo *x* que corta o eixo *y* no ponto (0, k).

Valor inicial e taxa de variação

Estudamos que uma função afim é dada pela lei $f(x) = ax + b$. Agora, vamos estudar como os coeficientes *a* e *b* influenciam na posição do gráfico da função afim no plano cartesiano.

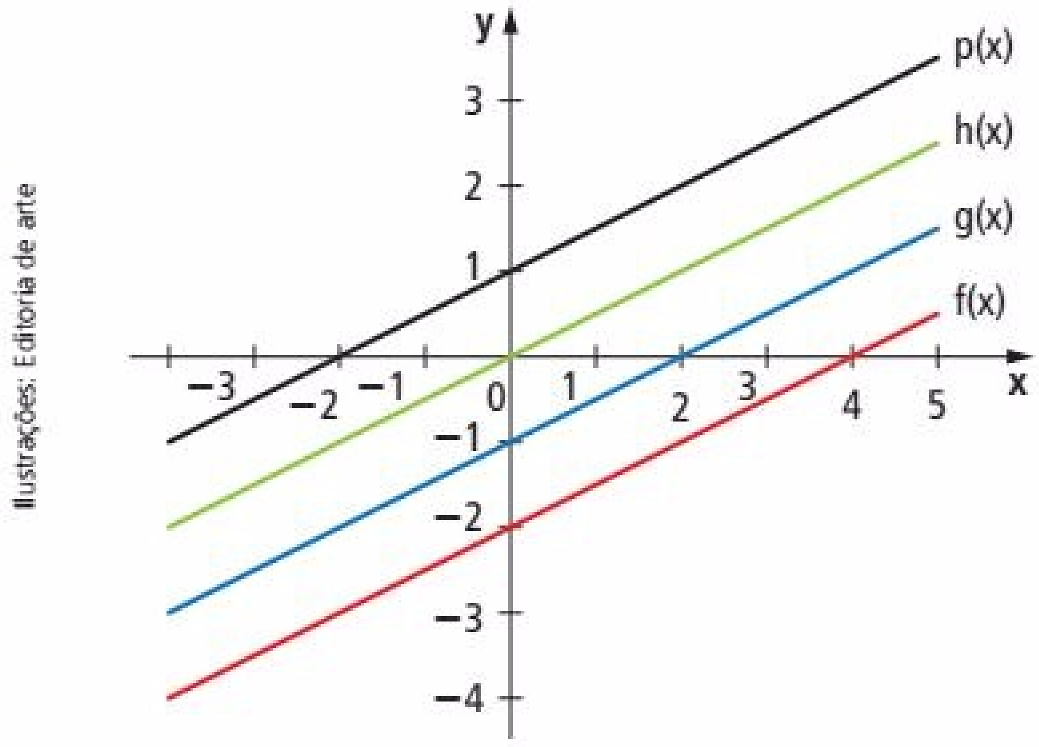
O coeficiente *b* da função afim é denominado **valor inicial** ou coeficiente linear. Ele é a ordenada do ponto em que o gráfico da função cruza o eixo *y*, pois para $x = 0$, temos $f(0) = a \cdot 0 + b = b$.



Já o coeficiente *a* mostra como a variação de $y = f(x)$ se relaciona com a variação de *x*, por isso é chamado de **taxa de variação** ou coeficiente angular.

Por exemplo, no problema do táxi, do início do capítulo, em $p = 4{,}10 + 2{,}50x$, o coeficiente $a = 2{,}50$ significa a quantia que se paga por quilômetro rodado. Isso é a taxa de variação da função, ou seja, cada quilômetro rodado faz com que o valor a pagar aumente em R$ 2,50.

No gráfico da função afim, o coeficiente *a* influencia na inclinação da reta. Abaixo, temos os gráficos das funções $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$, $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$, $h(x) = \frac{1}{2}x$ e $p(x) = \frac{1}{2}x + 1$ representados no mesmo plano cartesiano.



Observe que nessas funções os valores do coeficiente *a* são todos iguais a $\frac{1}{2}$, e os valores do coeficiente *b* são distintos entre si. Nesse caso, percebemos que os gráficos dessas funções são retas paralelas e cada uma pode ser obtida por um movimento de translação de outra. Por exemplo, a reta que representa a função *p* pode ser obtida transladando-se o gráfico de *h* uma unidade para cima em relação ao eixo *y*.

Assim, os gráficos das funções afins com o mesmo coeficiente *a* possuem mesma inclinação, ou seja, são retas paralelas entre si. Professor, comente com os alunos que só é possível comparar a inclinação de duas retas que são gráficos de funções afins que estejam representadas em um mesmo plano cartesiano ou cujos eixos coordenados estejam na mesma escala.

Zero da função afim

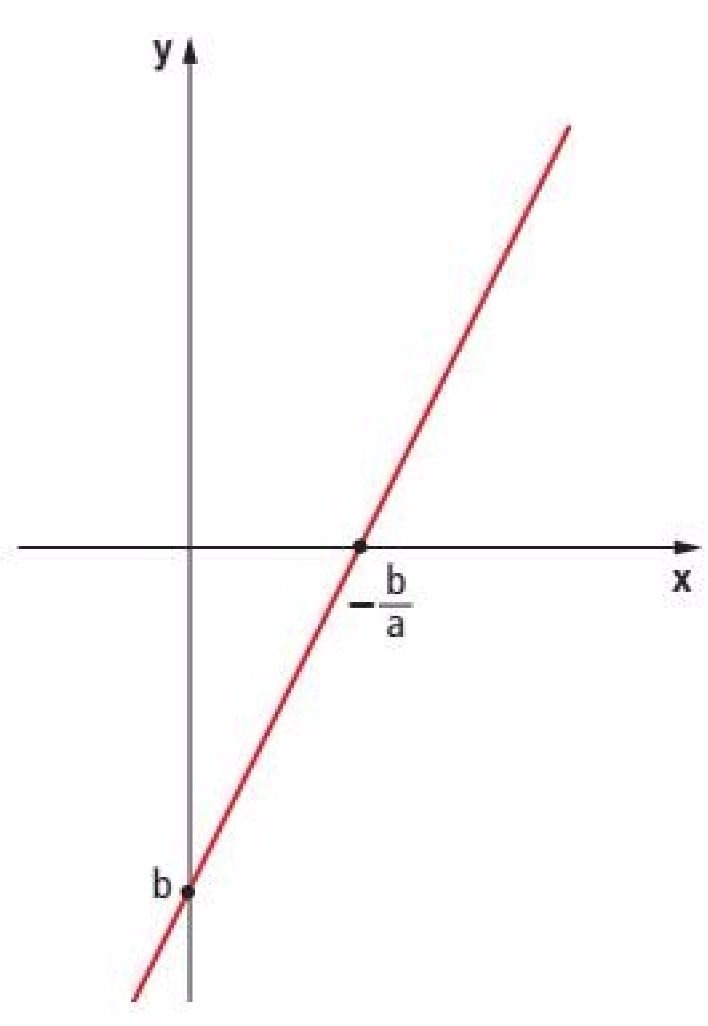
Já vimos que o zero de uma função *f* é um valor de $x \in D(f)$ tal que $f(x) = 0$, ou seja, é o valor de *x* que anula a função. Para o caso da função afim dada por $f(x) = ax + b$, temos que resolver a equação $ax + b = 0$. Então:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Então, o zero de uma função afim é o valor de $x = -\frac{b}{a}$.

Geometricamente, o zero da função afim é a abscissa do ponto em que o gráfico cruza o eixo *x*, como mostra o gráfico abaixo.

Para construir o gráfico da função afim, é prático utilizar os pontos de intersecção da reta com os eixos coordenados como base para traçar a reta, pois usualmente eles são de cálculo mais simples.



Observações:

- No caso da função constante, com $b \neq 0$, o gráfico não cruza o eixo *x*, portanto não há zero da função.
- Para $a = 0$ e $b = 0$, a função afim é a função constante $y = 0$ e seu gráfico é uma reta coincidente com o eixo *x*.

Exercícios resolvidos

3 Considere a função afim dada por $f(x) = -3x + 5$ e determine:

a) o valor da função para $x = 0$;

b) o zero da função;

c) o gráfico da função.

Resolução

a) Para determinar $f(0)$, substituímos o valor de *x* na lei da função dada. Então:

$f(0) = (-3) \cdot 0 + 5 \Rightarrow f(0) = 5$

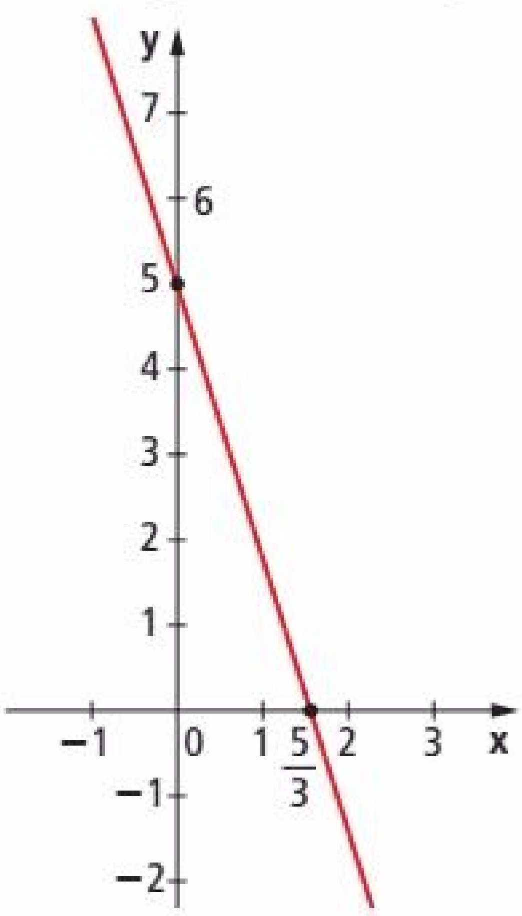
Portanto, o valor da função para $x = 0$ é $f(0) = 5$.

b) Para determinar o zero da função, devemos calcular $f(x) = 0$. Então:

$-3x + 5 = 0 \Rightarrow -3x = -5 \Rightarrow x = \dfrac{5}{3}$

Portanto, o zero da função é $x = \dfrac{5}{3}$.

c) Para construir o gráfico da função, precisamos determinar dois pontos pertencentes a ele. Usando as informações dos itens **a** e **b** temos: $(0, 5)$ e $\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$, que são os pontos em que o gráfico cruza os eixos coordenados. Assim, o gráfico da função é:



4 A velocidade *v* de um trem, em km/h, varia com o tempo *t*, em hora, de acordo com a função $v = 50 - 10t$, com $0 \leqslant t \leqslant 5$.

a) A lei da função *v* dada por $v = 50 - 10t$ é da forma $y = ax + b$ e, portanto, é uma função afim. Quais são os valores dos coeficientes *a* e *b*?

b) Construa o gráfico dessa função.

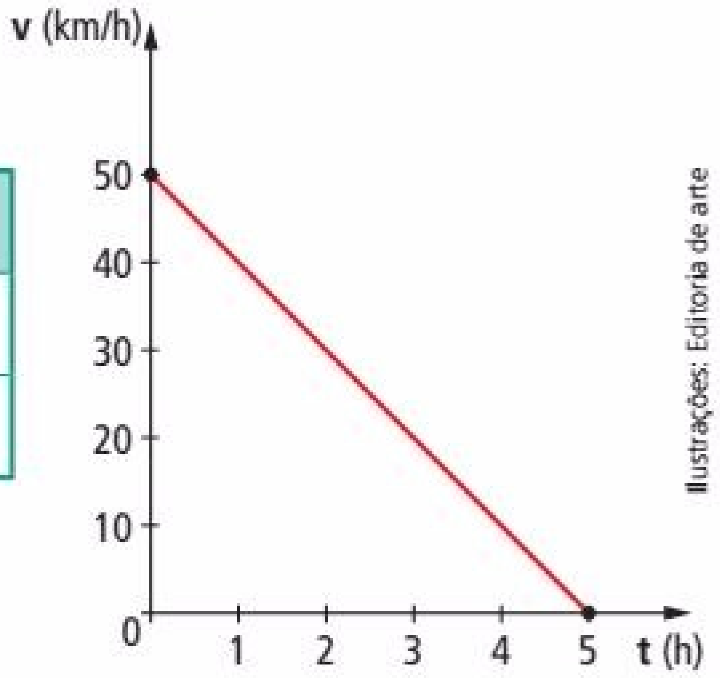
c) Qual é o ponto de intersecção do gráfico dessa função com o eixo vertical?

Resolução

a) Sendo $v = 50 - 10t$ ou $v = -10t + 50$, os valores de *a* e de *b* são: $a = -10$ e $b = 50$.

b) Como o gráfico da função afim é uma reta, precisamos de apenas dois pontos para construí-lo. Assim, atribuímos dois valores para *t* no intervalo $0 \leqslant t \leqslant 5$ e marcamos os pontos obtidos.

t (h)	v (km/h)
0	50
5	0

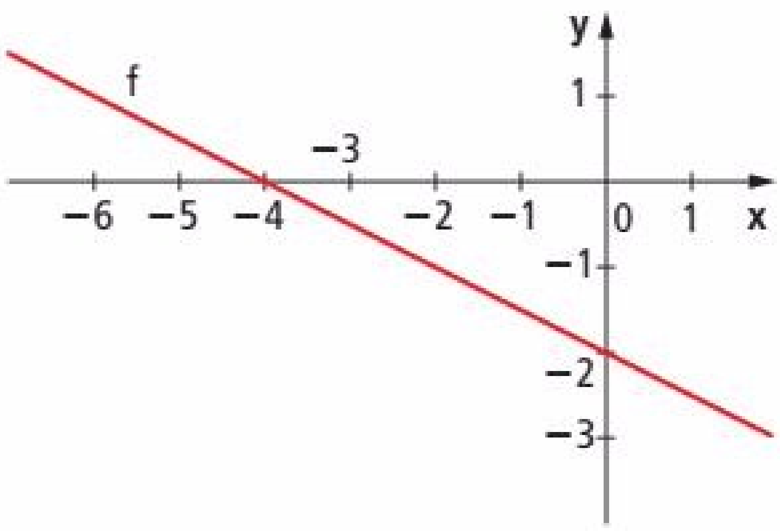


Ilustrações: Editoria de arte

Note que: $D = [0, 5]$ e $Im = [0, 50]$.

c) O ponto de intersecção do gráfico com o eixo vertical é $(0, 50)$.

5 A partir do gráfico da função afim *f* dado abaixo, determine sua lei de formação.



Resolução

Como a função é afim, sua lei de formação é do tipo $y = ax + b$. Além disso, o gráfico de *f* cruza o eixo *x* no valor -4, e o eixo *y*, no valor -2. Então o gráfico da função passa pelos pontos $(-4, 0)$ e $(0, -2)$.

Substituindo as coordenadas desses pontos na lei da função, chegamos a um sistema de equações cujas variáveis são os coeficientes *a* e *b*.

$$\begin{cases} 0 = -4a + b \\ -2 = 0a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a + b = 0 & \text{(I)} \\ b = -2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, determinamos os coeficientes *a* e *b* e, consequentemente a lei da função.

Substituindo o valor de *b* encontrado em (II) na equação (I), temos:

$-4a - 2 = 0 \Rightarrow -4a = 2 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{2}$

Portanto, a lei de formação da função *f* é

$f(x) = -\dfrac{1}{2}x - 2.$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

10. Construa, no caderno, o sistema cartesiano ortogonal com o gráfico das funções afins dadas por:

a) $f(x) = 2x + 1$ Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) $f(x) = -x + 4$

c) $y = \frac{1}{2} - x$

d) $g(x) = -2x$

11. Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das seguintes funções: $y = x$; $y = x + 1$; $y = x + 2$; $y = x - 1$. A seguir, compare os gráficos obtidos e escreva no caderno uma conclusão.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

12. A tabela mostra a relação entre o número de bolas de Natal vendidas em uma loja e o respectivo preço.

Número de bolas	1	2	3	4	5	6
Preço (em reais)	3,50	7,00	10,50	14,00	17,50	21,00

Fonte: Dados fictícios

a) Chamando o preço a pagar de *y* e o número de bolas de *x*, qual é a lei da função que relaciona *y* com *x*? $y = 3{,}50x$

b) As grandezas *y* e *x* são diretamente proporcionais? Por quê? Sim, porque a razão $\frac{y}{x}$ é constante.

c) Quantas bolas, no máximo, um cliente poderá comprar com R$ 30,00? 8 bolas.

13. Determine o valor de *p* de modo que o gráfico da função definida por $f(x) = 3x + p - 2$ cruze o eixo *y* no ponto de ordenada 4. $p = 6$

14. Determine *m* de modo que o gráfico da função *f*, dada por $f(x) = -2x + 4m + 5$, cruze o eixo *x* no ponto de abscissa 3. $m = \frac{1}{4}$

15. Determine os zeros das seguintes funções afins:

a) $f(x) = -3x + 4$ $\frac{4}{3}$

b) $y = \frac{3}{8}x$ 0

c) $y = 2x + 8$ -4

d) $y = 6 + \frac{x}{4}$ -24

16. (Vunesp-SP) Uma pessoa obesa, pesando num certo momento 156 kg, recolhe-se a um *spa* onde se anunciam perdas de peso de até 2,5 kg por semana. Suponhamos que isso realmente ocorra. Nessas condições:

a) Encontre uma fórmula que expresse o peso mínimo, *P*, que essa pessoa poderá atingir após *n* semanas. $P = 156 - 2{,}5n$

b) Calcule o número mínimo de semanas completas que a pessoa deverá permanecer no *spa* para sair de lá com menos de 120 kg de peso. 15 semanas.

17. (Ufop-MG) O custo total da fabricação de determinado artigo depende do custo de produção, que é de R$ 45,00 por unidade fabricada, mais um custo fixo de R$ 2 000,00. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

Pede-se:

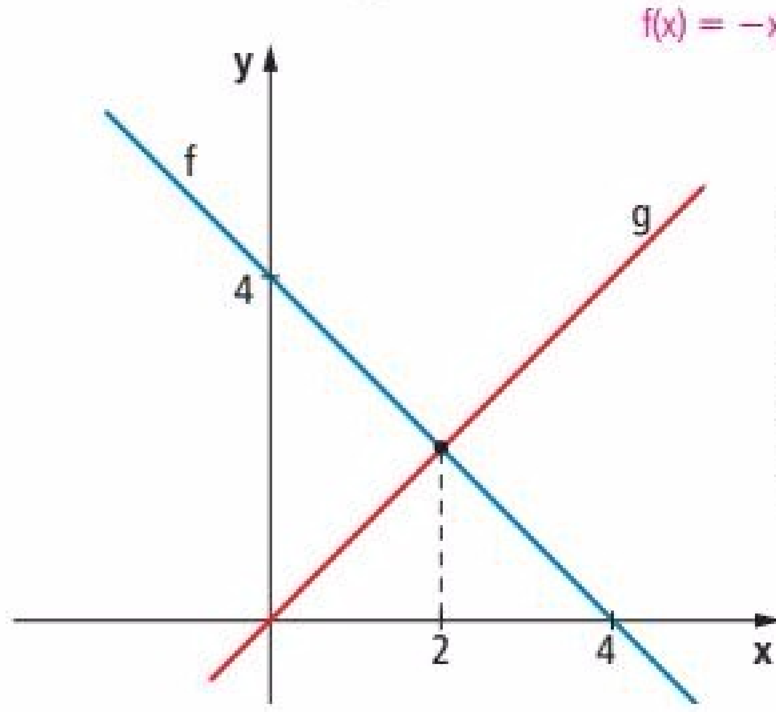
a) A função que representa o custo total em relação à quantidade fabricada.

b) O custo total da fabricação de 10 unidades.

c) O número de unidades que deverão ser fabricadas para que o custo total seja de R$ 3 800,00.

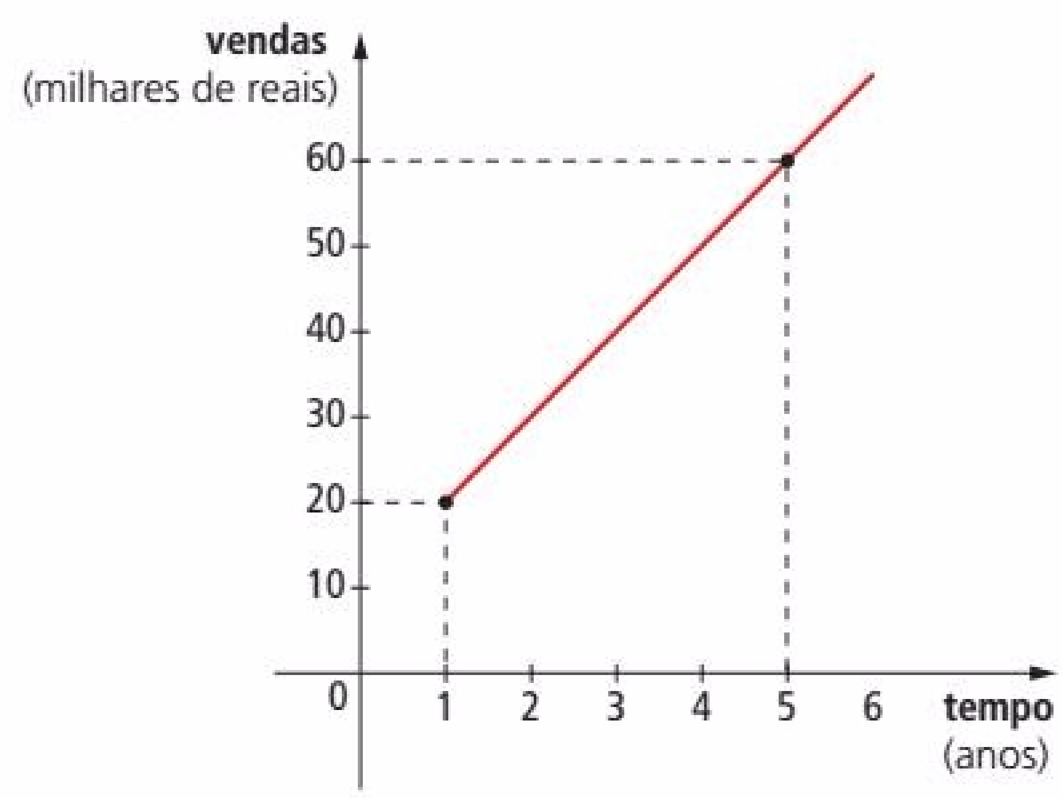
d) O gráfico da função custo total, destacando os dados obtidos nos itens anteriores.

18. Dados os gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$ abaixo, determine a lei de formação de cada uma delas.
$f(x) = -x + 4$ e $g(x) = x$



Ilustrações: Editoria de arte

19. O gerente da loja de artigos para cães e gatos fez um levantamento das vendas da loja ao longo dos últimos cinco anos e observou que os valores poderiam ser aproximados por uma reta. Com base nos dados obtidos, construiu o gráfico abaixo, que representa as vendas (em milhares de reais) em função do tempo (em anos).



Observe o gráfico e faça o que se pede em cada caso.

a) Determine a lei de formação da função representada pelo gráfico. $y = 10x + 10$

b) Se as vendas da loja mantiverem a evolução apresentada nos últimos cinco anos, qual será a projeção de vendas para o sétimo ano de observação? R$ 80 000,00

Explorando a tecnologia

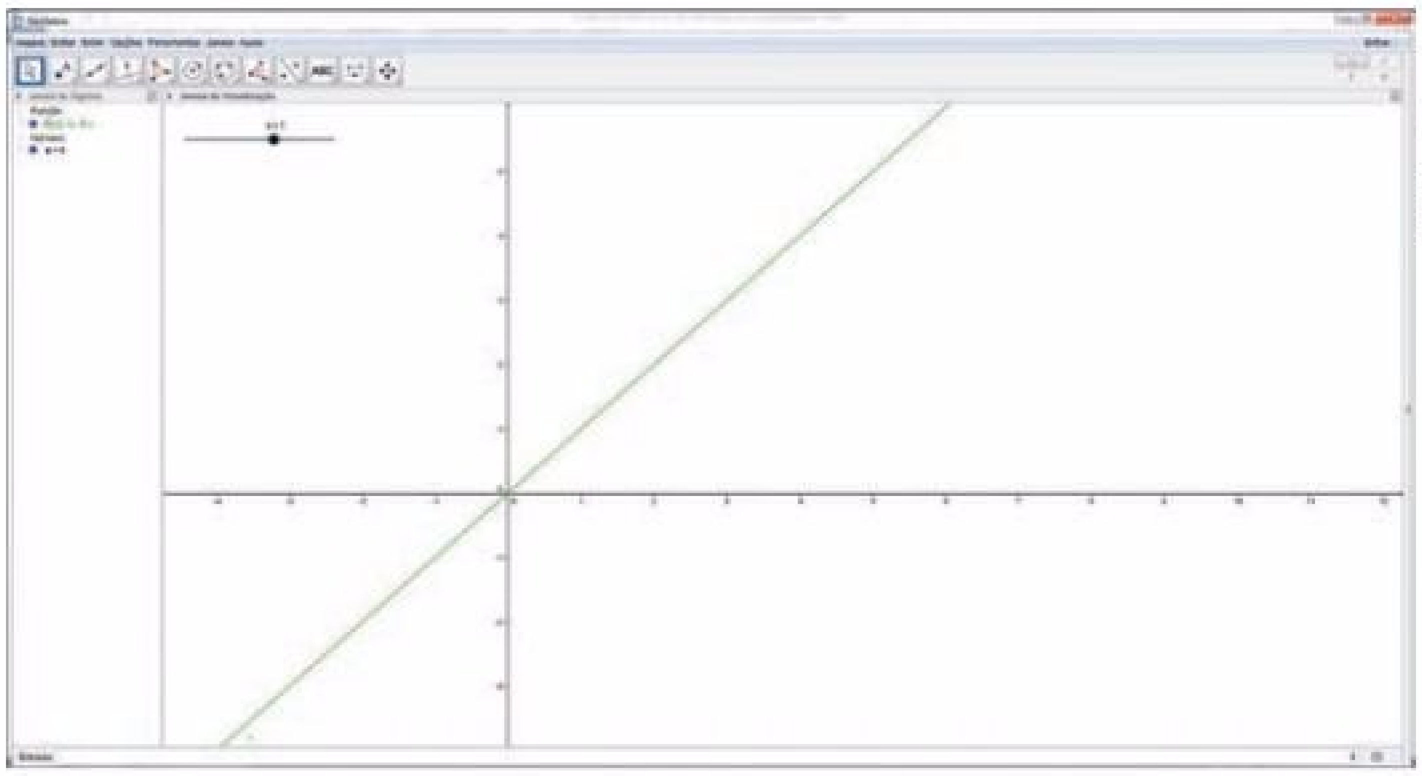
Os coeficientes da função afim e a reta do gráfico

Vamos utilizar o GeoGebra para visualizar de que forma os coeficientes *a* e *b* de uma função afim influenciam no gráfico.

Inicialmente, vamos observar como o coeficiente *a* influencia no gráfico da função, considerando a função linear f(x) = ax. Para isso, siga a sequência de passos abaixo.

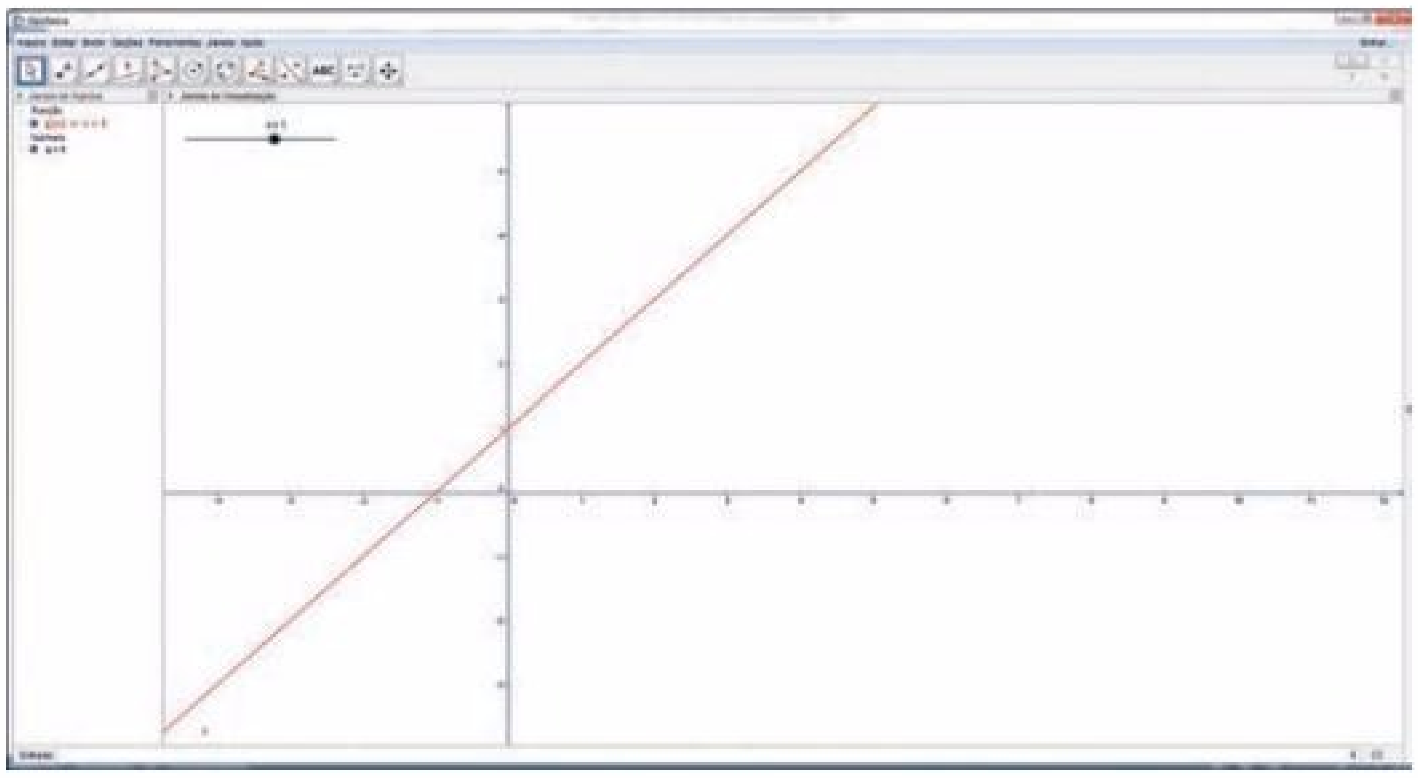
1. No **Campo de Entrada** do GeoGebra, digite f(x) = ax e pressione *enter*.
2. O programa exibirá uma tela perguntando se você deseja criar um controle deslizante para o coeficiente *a*. Clique em **Criar Controles Deslizantes**.
3. O programa exibirá o gráfico da função *f* e o **Controle Deslizante** para o coeficiente *a*. Altere a posição do ponto ao longo do controle para alterar o valor de *a* e veja o que acontece com o gráfico de *f*.
4. Por padrão, o controle deslizante é criado limitado ao intervalo [−5,5]. Para alterá-lo, clique com o botão direito do *mouse* em cima do controle e em seguida em **Propriedades**. Na aba **Controle Deslizante**, altere os campos de **min**: e **max**: para os valores desejados. Em seguida, clique em **Fechar**.

A tela do GeoGebra ficará semelhante à figura ao lado.



Créditos: Geogebra

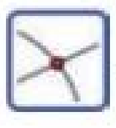
Para analisar a influência do coeficiente *b*, repetimos os passos anteriores, mas utilizando a função g(x) = x + b. A tela ficará da seguinte maneira:



Atividades

Escreva no caderno

1. Após realizar a sequência de passos indicada, deslize o controle do coeficiente *a* e observe as mudanças que ocorrem na reta. Descreva o que acontece com o gráfico. Ao deslizar o controle do coeficiente *a*, a reta altera sua inclinação em relação ao eixo *x*. Espera-se que os alunos percebam que, quando a = 0, a reta é coincidente com o eixo *x*. Intuitivamente, inicie uma discussão a respeito do crescimento e decrescimento da função e sua relação com o sinal do coeficiente *a*, que será tratado no próximo tópico.
2. Agora repita os passos e construa, no caderno, a função g(x) = x + b. Movimente o controle deslizante do coeficiente *b* e observe as mudanças no gráfico. O que acontece com a reta? Ao deslizar o controle do coeficiente *b*, a reta se desloca verticalmente mantendo sua inclinação em relação ao eixo *x*. Os alunos podem também comprovar que o valor de *b* é a ordenada em que o gráfico cruza o eixo *y*.
3. Até agora, analisamos cada coeficiente separadamente. Com a mesma sequência de passos construa a função h(x) = ax + b e seus respectivos controles deslizantes. Movimente os controles e verifique a influência dos coeficientes juntos em uma única função. Para a = −3 e b = 6, em que ponto a função h(x) cruza o eixo *x*? (2, 0)

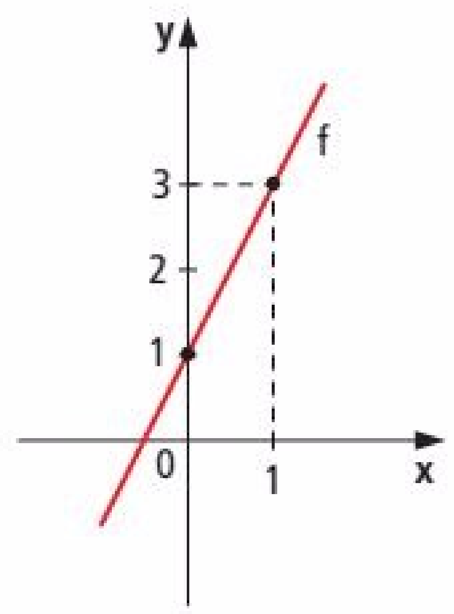
DICA: Você pode usar a ferramenta **Interseção de Dois Objetos**, , para determinar o ponto solicitado.

Crescimento e decrescimento da função afim

Você estudou o crescimento e o decrescimento de uma função qualquer. No caso da função afim, podemos determinar se ela é crescente ou decrescente pelo sinal do coeficiente *a* na lei de formação $f(x) = y = ax + b$.

Observe os exemplos a seguir.

a) $f(x) = 2x + 1$ $(a > 0)$

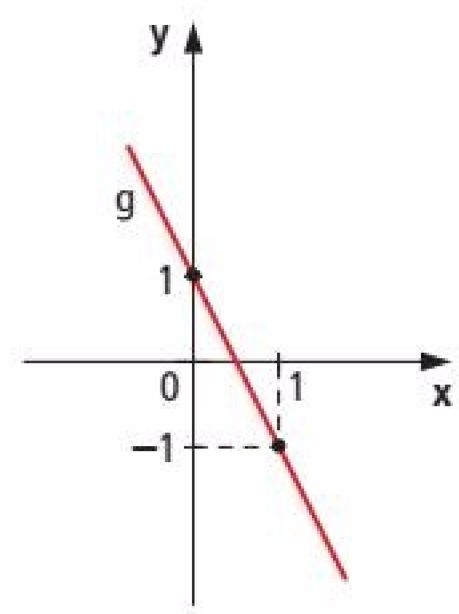


Ilustrações: Editoria de arte

x	f(x)
0	1
1	3

Aumentando os valores atribuídos a *x*, aumentam também os valores correspondentes da imagem f(x), ou seja, f(x) é **crescente** em todo seu domínio.

b) $g(x) = -2x + 1$ $(a < 0)$



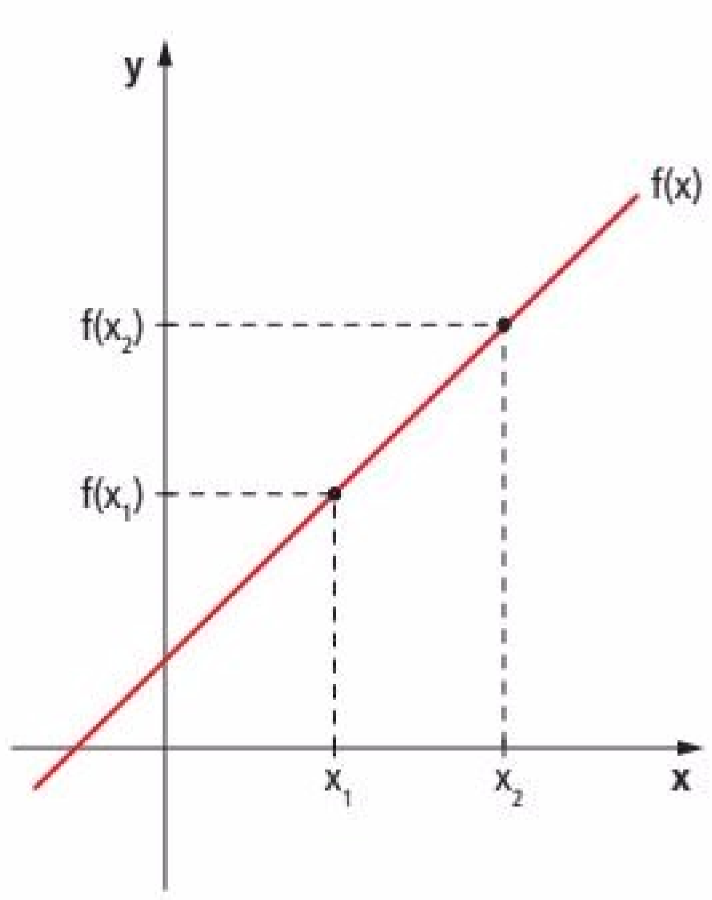
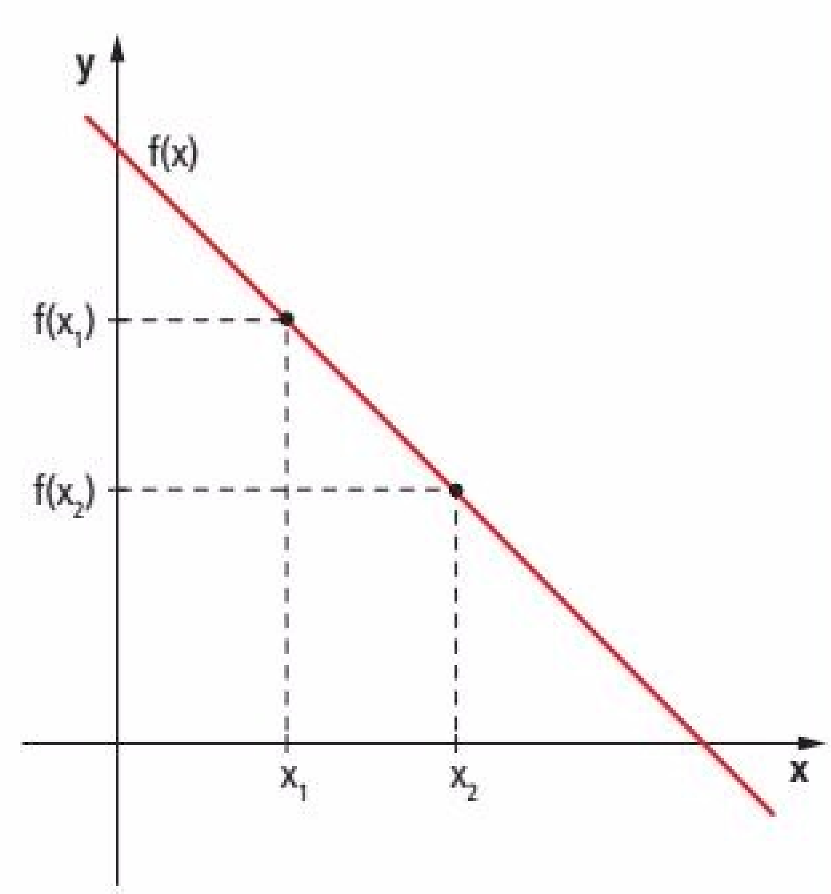
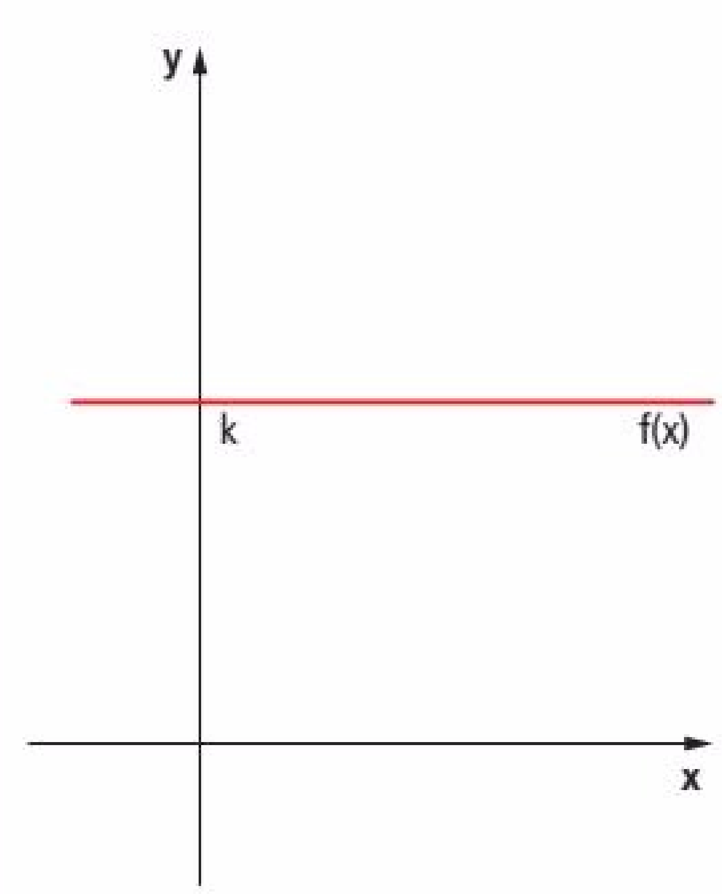
x	g(x)
0	1
1	−1

Aumentando os valores atribuídos a *x*, diminuem os valores correspondentes da imagem g(x), ou seja, g(x) é **decrescente** em todo seu domínio.

Além disso, o gráfico da função *f* é uma reta ascendente e o gráfico da função *g* é uma reta descendente. Assim, também é possível identificar se uma função é crescente ou decrescente observando a inclinação da reta do gráfico.

De modo geral, para uma função afim definida por $f(x) = ax + b$, temos:

- se $a > 0$, então a função *f* é crescente;
- se $a < 0$, então a função *f* é decrescente;
- se $a = 0$, então a função *f* é constante.

$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$
		
• O gráfico de uma função crescente é uma reta ascendente. • *f* é **crescente** se, e somente se: $\forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$	• O gráfico de uma função decrescente é uma reta descendente. • *f* é **decrescente** se, e somente se: $\forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$	• O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo *x*. • *f* é **constante** se, e somente se: $\forall x \in D(f),\ f(x) = k$, com $k \in \mathbb{R}$

Estudo do sinal da função afim

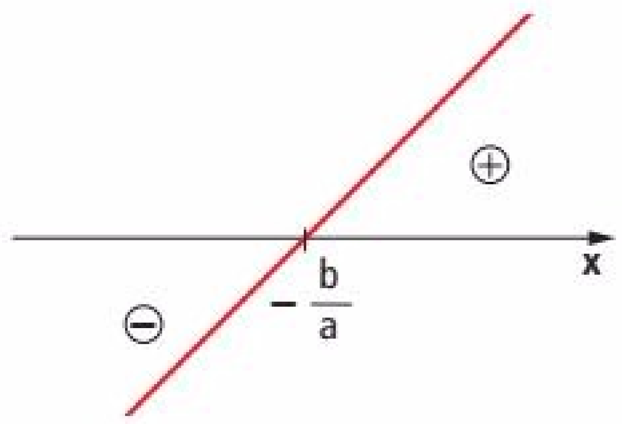
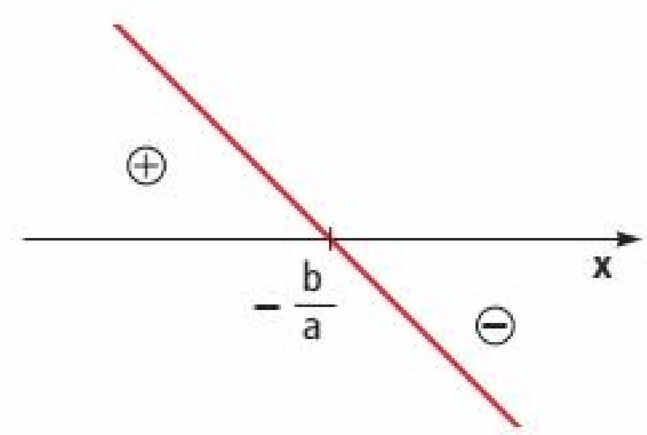
Vimos que estudar o sinal de uma função *f* é determinar para quais valores de $x \in D(f)$ ela é positiva, negativa ou nula.

Também vimos que podemos estudar o sinal de uma função *f* observando seu gráfico. Assim:

- *f* será positiva nos pontos do gráfico localizados no 1º e no 2º quadrantes;
- *f* será negativa nos pontos do gráfico localizados no 3º e no 4º quadrantes;
- *f* será nula nos pontos em que o gráfico interesecta o eixo *x*.

Agora vamos ver como esse conceito se aplica para a função afim dada por $f(x) = ax + b$.

Inicialmente, determinamos o zero da função afim, que genericamente pode ser escrito como $x = -\frac{b}{a}$. Em seguida, desenhamos um esboço do gráfico, levando em consideração a variação da função: crescente ($a > 0$), decrescente ($a < 0$) ou constante ($a = 0$). Por fim, analisamos o esboço construído e determinamos os valores de *x* para cada caso: $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ e $f(x) = 0$. De modo geral:

$a > 0$	$a < 0$	$a = 0$ e $b > 0$
		 $f(x) > 0, \forall x \in D(f)$
$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x > -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x < -\frac{b}{a}$	$f(x) = 0$ para $x = -\frac{b}{a}$ $f(x) > 0$ para $x < -\frac{b}{a}$ $f(x) < 0$ para $x > -\frac{b}{a}$	**$a = 0$ e $b < 0$**  $f(x) < 0, \forall x \in D(f)$

Ilustrações: Editoria de arte

Observação:

Se $a = 0$ e $b = 0$, a função afim é a função constante $y = 0$, cujo gráfico é uma reta coincidente com o eixo *x*. Portanto a função é nula para todos os valores de *x* do domínio.

Exercícios resolvidos

6 Considere a função $f(x) = \left(\frac{3k-1}{2}\right)x - 5$, com $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq \frac{1}{3}$. Determinar *k* de modo que a função *f* seja crescente.

Resolução

Para que *f* seja crescente, o coeficiente de *x* deve ser positivo. Logo:

$$\frac{3k-1}{2} > 0 \Rightarrow 3k - 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3k > 1 \Rightarrow k > \frac{1}{3}$$

Portanto, para que *f* seja crescente devemos ter $k > \frac{1}{3}$.

7 Estude o sinal da função *f* definida por $f(x) = 2x - 4$.

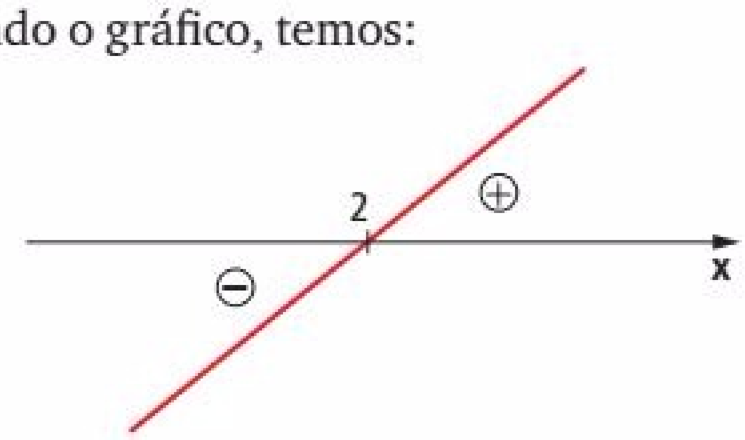
Resolução

A função é crescente, pois $a > 0$.

O zero da função é: $2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

Logo, a reta cruza o eixo *x* no ponto de abscissa $x = 2$.

Esboçando o gráfico, temos:



Analisando o esboço do gráfico concluímos que:

$f(x) = 0$ para $x = 2$

$f(x) < 0$ para $x < 2$

$f(x) > 0$ para $x > 2$

8 Em uma pequena indústria, o faturamento líquido relativo a certo produto é calculado pela fórmula $f(x) = 4x - 1000$, em que f(x) representa o faturamento líquido (em R\$) de *x* unidades vendidas. Determine a quantidade mínima de unidades que devem ser vendidas para que haja lucro nessa indústria.

Resolução

Determinar a quantidade mínima de unidades vendidas para que a indústria tenha lucro é determinar o valor mínimo de *x* para que se tenha $f(x) > 0$. Então precisamos estudar o sinal da função *f*.

Note que o domínio de f(x) é o conjunto $\mathbb{N}$, pois *x* representa o número de unidades vendidas ($x \in \mathbb{N}$). Nesse caso, o gráfico é formado por pontos isolados.

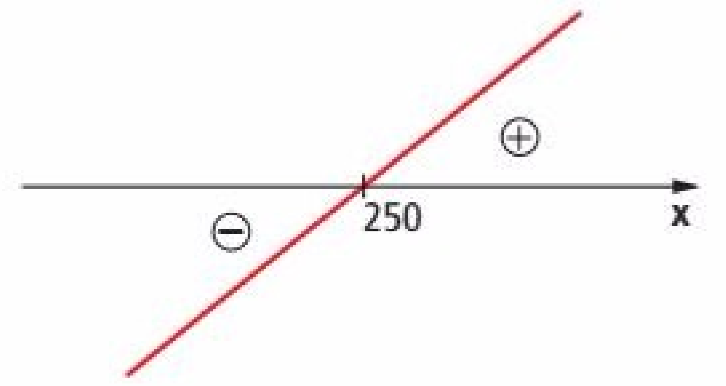
No entanto, como faremos apenas um esboço do gráfico, traçaremos uma reta, como se o domínio fosse o conjunto $\mathbb{R}$.

A função f(x) é crescente, pois $a > 0$.

O zero da função é:

$$4x - 1000 = 0 \Rightarrow 4x = 1000 \Rightarrow x = 250$$

Esboço do gráfico:



Analisando o esboço do gráfico, temos:

$f(x) = 0$ para $x = 250$ (lucro zero)

$f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{N} \mid x > 250\}$ (lucro)

$f(x) < 0$ para $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 250\}$ (prejuízo)

Portanto, para haver lucro é necessária a venda de pelo menos 251 unidades.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

20. Identifique como crescente, decrescente ou constante cada função a seguir:

a) $y = \frac{2}{5}x + 1$ Crescente.

b) $y = -2x + 3$ Decrescente.

c) $f(x) = \sqrt{2}$ Constante.

d) $f(x) = 3{,}5 - 0{,}4x$ Decrescente.

e) $y = -5x$ Decrescente.

f) $f(x) = -6$ Constante.

21. Estude o sinal de cada função a seguir:

a) $f(x) = x + 5$

b) $y = -3x + 9$

c) $f(x) = 2 - 3x$

d) $f(x) = 2x + 5$

e) $y = -3x + 6$

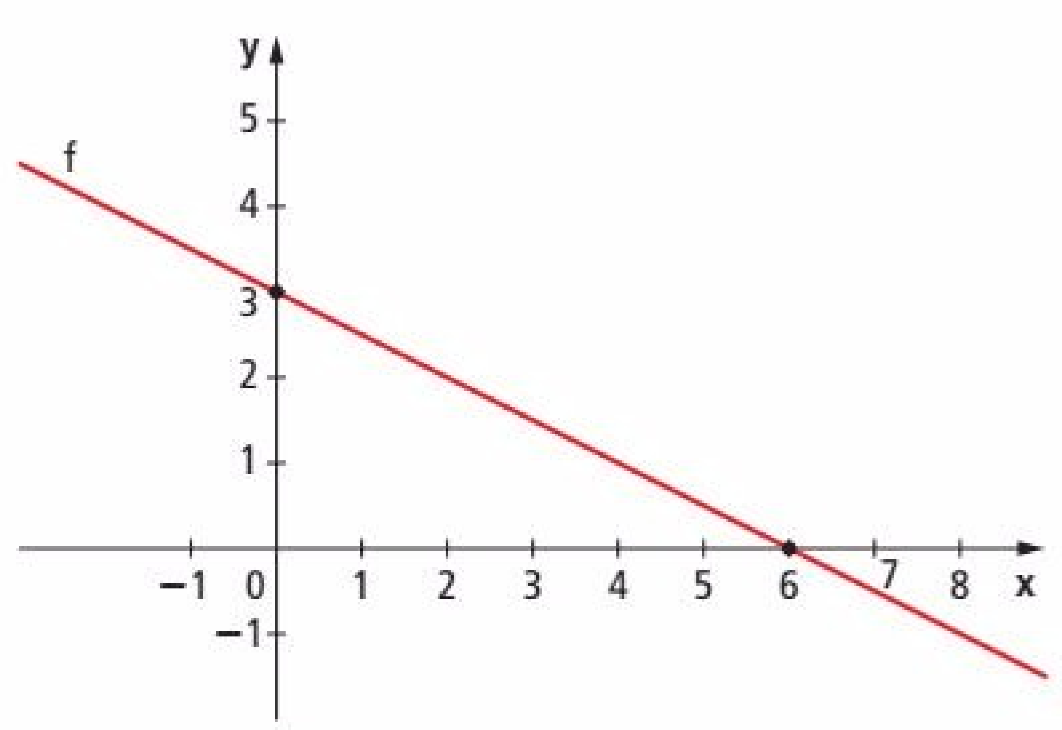
f) $g(x) = 1 - 5x$

g) $y = \frac{x}{3} - 1$

h) $f(x) = 2 + \frac{x}{2}$

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

22. Observe o gráfico da função afim a seguir e faça o que se pede.



A função é decrescente, pois a inclinação da reta é no sentido descendente.

a) A função representada é crescente, decrescente ou constante? Justifique sua resposta.

b) Determine a lei dessa função. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$

c) Estude o sinal dessa função.
$f(x) > 0$ para $x < 6$; $f(x) < 0$ para $x > 6$; $f(x) = 0$ para $x = 6$.

23. Seja *f* uma função real de variável real definida por $f(x) = x(3 - x) + (x - 1)^2$.

a) Mostre que se trata de uma função afim. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Determine o zero da função. $x = -1$

c) Determine *x* de modo que $f(x) > 0$. $x > -1$

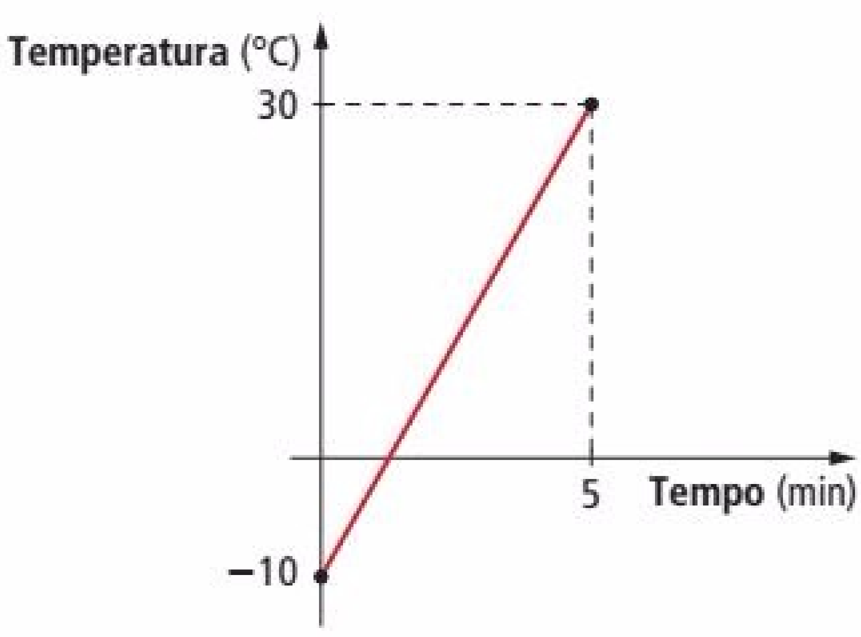
24. Uma função afim f(x) é tal que seu gráfico intersecta o eixo *x* no valor de abscissa -3 e passa pelo ponto $(1, 2)$. A partir dessas informações, faça o que se pede.

a) Esboce o gráfico da função f(x). Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Determine a lei de formação da função. $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

c) Estude o sinal da função. $f(x) > 0$ para $x > -3$; $f(x) < 0$ para $x < -3$; $f(x) = 0$ para $x = -3$.

25. Uma barra de ferro com temperatura inicial de -10 °C foi aquecida até 30 °C. O gráfico a seguir representa a temperatura da barra em função do tempo gasto nessa experiência.



Ilustrações: Editoria de arte

a) Em quanto tempo após o início da experiência a temperatura atingiu 0 °C? 1min15s

b) Em qual intervalo de tempo a temperatura da barra ficou positiva? E negativa? positiva: $1{,}25 < t < 5$; negativa: $0 \leq t < 1{,}25$

Inequações do 1º grau

Denominamos **inequação do 1º grau** na incógnita *x* toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas a seguir, com a, b $\in \mathbb{R}$ e a $\neq$ 0:

- $ax + b \geqslant 0$
- $ax + b \leqslant 0$
- $ax + b \neq 0$
- $ax + b > 0$
- $ax + b < 0$

Uma inequação do 1º grau também pode ser interpretada como uma comparação de duas funções: uma função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$ e a função constante $g(x) = 0$.

Por exemplo, a inequação $4x - 12 \geqslant 0$ pode ser entendida como os valores de *x* para os quais a função $f(x) = 4x - 12$ é maior ou igual à função $g(x) = 0$. Como a segunda função é sempre a função constante $g(x) = 0$, para resolver uma inequação podemos estudar o sinal da função f(x) e dar a resposta de acordo com o sinal da desigualdade.

Caso a inequação não esteja em uma das formas indicadas, podemos manipulá-la algebricamente para em seguida resolvê-la. Por exemplo:

$$4(x - 1) - x^2 \geqslant 3x - x(x + 1)$$
$$4x - 4 - x^2 \geqslant 3x - x^2 - x$$
$$4x - 4 - \cancel{x^2} - 3x + \cancel{x^2} + x \geqslant 0$$
$$2x - 4 \geqslant 0$$

Lembre-se:
- o conjunto solução de uma inequação é o conjunto de todos os valores de *x* que tornam a desigualdade verdadeira;
- para resolver uma inequação, fazemos manipulações algébricas para isolar a variável em um membro da desigualdade.

Exercícios resolvidos

9 Resolva a inequação $4x - 1 + 2(1 - 3x) \leqslant 0$, em $\mathbb{R}$.

Resolução

Inicialmente vamos manipular a inequação para deixá-la na forma $ax + b \leqslant 0$:

$$4x - 1 + 2(1 - 3x) \leqslant 0$$
$$4x - 1 + 2 - 6x \leqslant 0$$
$$-2x + 1 \leqslant 0$$

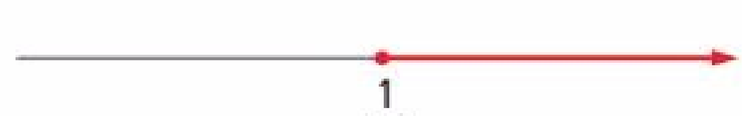
Em seguida, resolvemos a inequação obtida:

$$-2x \leqslant -1$$
$$(-1) \cdot (-2x) \geqslant (-1) \cdot (-1)$$

Ao multiplicar ambos os membros por um número negativo, invertemos o sentido da desigualdade.

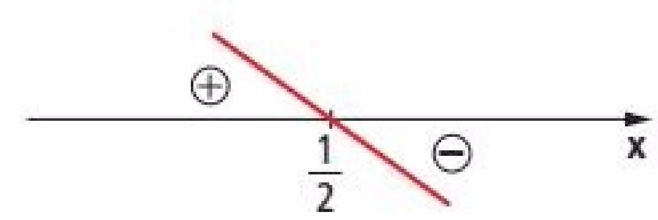
$$2x \geqslant 1$$
$$x \geqslant \frac{1}{2}$$

Na reta real, podemos representar essa solução da seguinte maneira:



Geometricamente, a solução da inequação é o conjunto dos valores de *x* tais que $f(x) \leqslant 0$. Então, outra maneira de resolver a inequação é estudar o sinal da função associada. Assim, o zero da função $f(x) = -2x + 1$ é $x = \frac{1}{2}$ e a função é decrescente.

O esboço do gráfico é:



Ilustrações: Editoria de arte

Logo, $f(x) \leqslant 0$ para $x \geqslant \frac{1}{2}$.

Portanto, o conjunto solução é: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$.

10 Um provedor de acesso à internet oferece dois planos para seus assinantes:

- plano *A*: assinatura mensal de R\$ 40,00 mais R\$ 0,60 para cada *megabyte* de dados utilizados durante o mês;
- plano *B*: assinatura mensal de R\$ 60,00 mais R\$ 0,20 para cada *megabyte* de dados utilizados durante o mês.

Acima de quantos *megabytes* de dados por mês é mais econômico optar pelo plano *B*?

Resolução

As funções correspondentes a cada plano são:

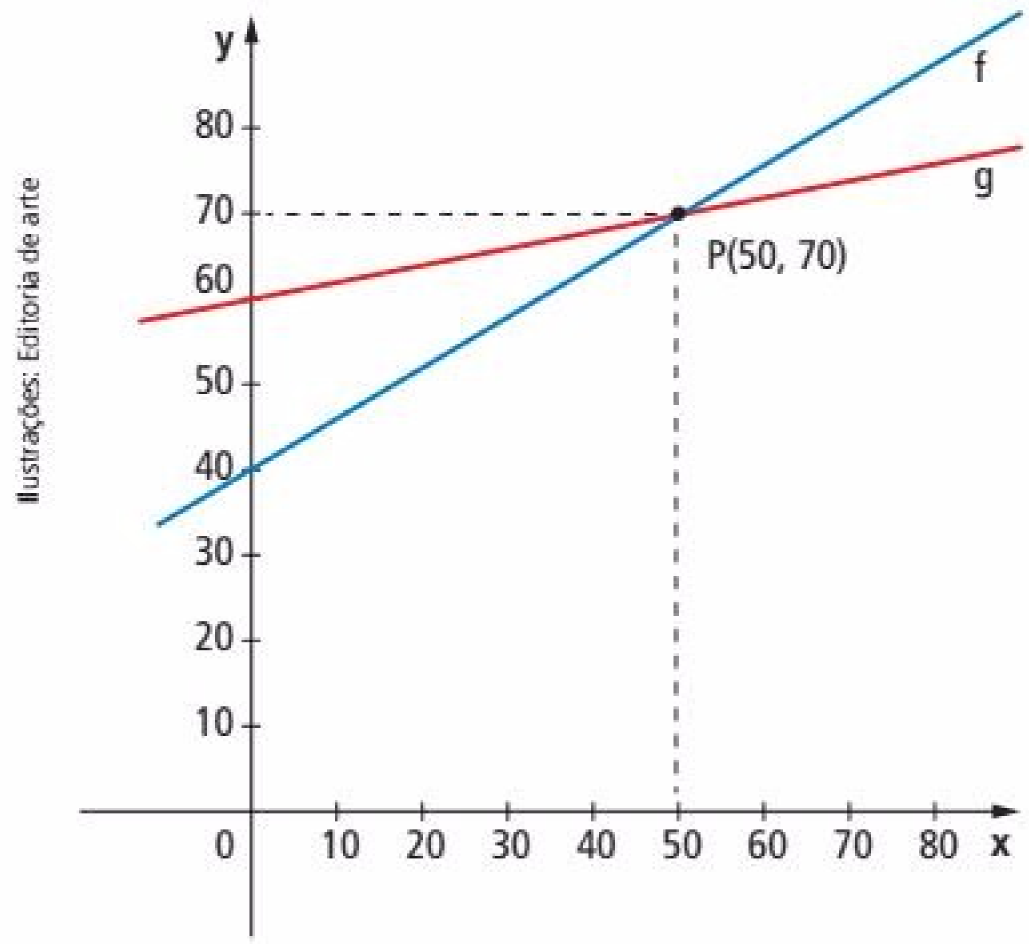
Plano *A*

$f(x) = 40 + 0{,}6x$

Plano *B*

$g(x) = 60 + 0{,}2x$

Geometricamente, resolver o problema significa determinar os valores de *x* para os quais $g(x) < f(x)$. Construindo as duas funções no mesmo plano cartesiano, temos:



O ponto de intersecção das funções é P(50, 70).
Então, $g(x) < f(x)$ para $x > 50$.

Algebricamente, teríamos:

$g(x) < f(x) \Rightarrow 60 + 0{,}2x < 40 + 0{,}6x \Rightarrow$
$\Rightarrow 20 < 0{,}4x \Rightarrow x > 50$

Portanto, o plano *B* é mais econômico do que o *A* acima de 50 *megabytes* de dados.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

26. Resolva as inequações:

a) $5x - 2(x + 2) \geqslant 1 - (3 - 4x)$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$

b) $\dfrac{3(x+1)}{2} - \dfrac{x-1}{4} \leqslant \dfrac{1}{2}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$

c) $\dfrac{5(3x+1)}{2} - \dfrac{3x}{4} > \dfrac{5(1-3x)}{8} + \dfrac{18}{3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{11}{23}\right\}$

27. Quais são os valores de *x*, no conjunto dos números naturais, $\mathbb{N}$, que satisfazem a inequação $7x - 8 < 4x + 1$? $S = \{0, 1, 2\}$

28. Dada a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6x - 9$, determine os valores de *x* para os quais $f^{-1}(x) \geqslant 0$. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -9\}$

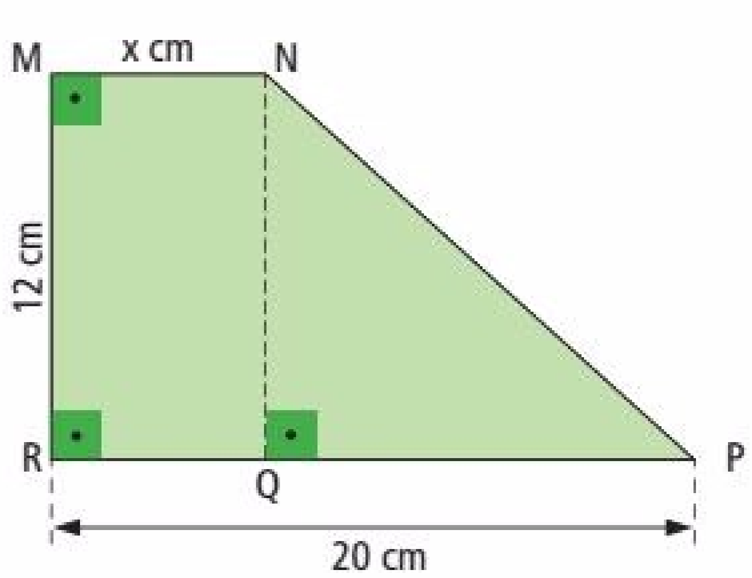
29. As medidas do comprimento e da largura de um retângulo são 10 cm e *x* cm, respectivamente.

Calcule *x* para que:

a) a área do retângulo seja maior que 50 cm²; $x > 5$

b) o perímetro do retângulo não seja menor que 32 cm. $x \geqslant 6$

30. Na figura, MNPR é um trapézio retângulo.

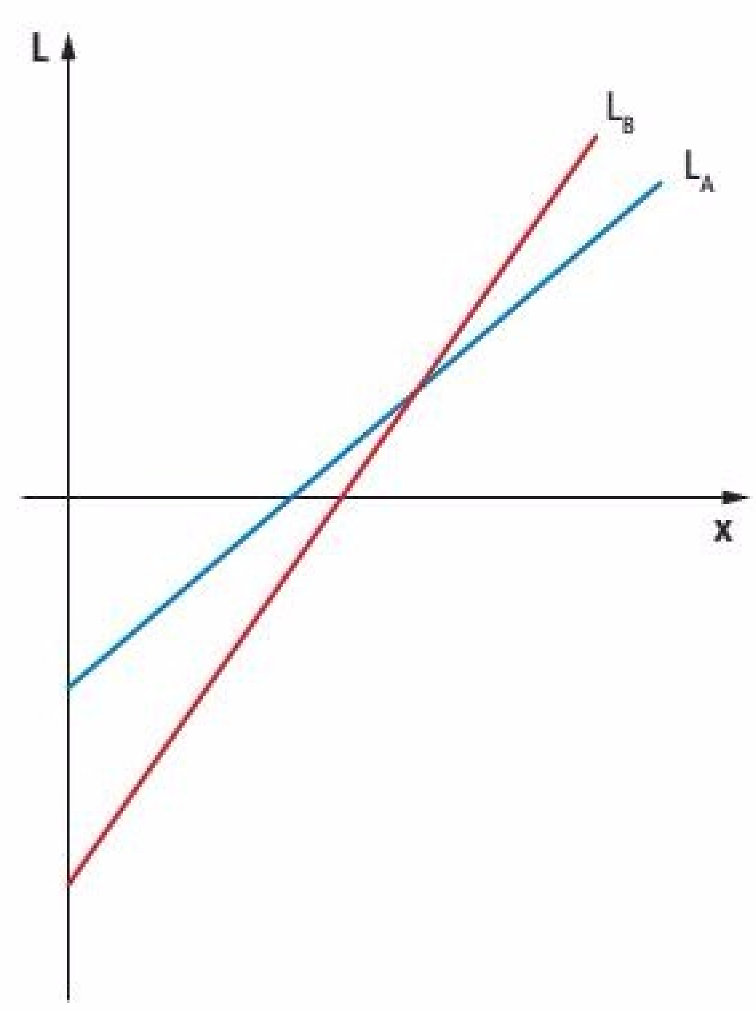


Determine o maior valor inteiro de *x* de modo que a área do trapézio seja maior que o dobro da área do retângulo MNQR. 6

31. Determine o conjunto solução da inequação:

$\dfrac{x-5}{7} + \dfrac{x^2+6}{3} < \dfrac{x^2-2}{2} - \dfrac{x^2-x+1}{6} + 3$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -23\}$

32. (FGV-SP) A figura fornece os gráficos dos lucros anuais L_A e L_B de duas empresas (em milhares de reais) em função da quantidade anual produzida e vendida (x).



As intersecções dos gráficos com os eixos são:

	L_A	L_B
eixo *x*	(50, 0)	(60, 0)
eixo *y*	(0, −500)	(0, −1000)

a) Obtenha L_A em função de *x*. $L_A(x) = 10x - 500$, para $x \geqslant 0$

b) Para que valores de *x* o lucro L_B é superior a L_A? $x > 75$

Sistemas de inequações do 1º grau

Em algumas situações, precisamos obter os valores de *x* que satisfazem a duas ou mais inequações simultaneamente.

Nesses casos, essas duas ou mais inequações, consideradas simultaneamente, formam o que denominamos **sistema de inequações**.

Exemplos:

a) $\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$

b) $2x + \frac{1}{2} < 4x - 5 < x + 3$

Para resolver um sistema de inequações, resolvemos cada uma das inequações do sistema. Em seguida, determinamos o conjunto solução do sistema.

O conjunto solução de um sistema de inequações é determinado pela intersecção dos conjuntos soluções de cada inequação do sistema.

Exercícios resolvidos

11 Resolva o sistema: $\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 5 \\ -x - 3 < 0 \end{cases}$.

Resolução

Inicialmente, resolvemos cada uma das inequações I e II.

$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 5 & \text{I} \\ -x - 3 < 0 & \text{II} \end{cases}$$

De I, obtemos:

$2x - 1 \geqslant 5$

$2x \geqslant 6$

$x \geqslant 3$

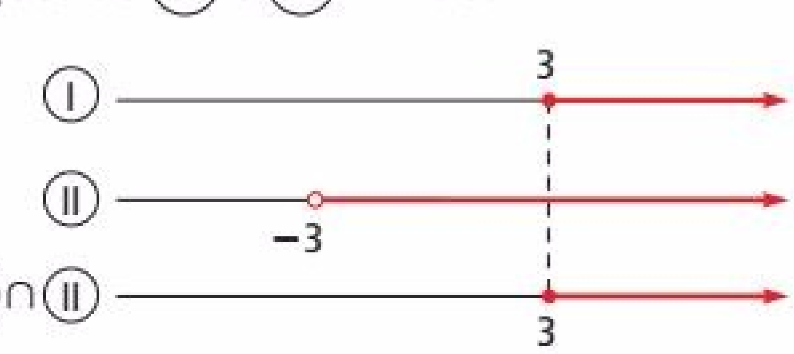
De II, obtemos:

$-x - 3 < 0$

$-x < 3$

$x > -3$

Em seguida, fazemos a intersecção dos conjuntos soluções de I e II. Então:



Portanto, o conjunto solução do sistema é:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$

12 Resolva a inequação simultânea $-1 < 2x - 3 \leqslant x$.

Resolução

Essa inequação é expressa por uma dupla desigualdade:

$-1 < 2x - 3 \leqslant x \Rightarrow -1 < 2x - 3$ e $2x - 3 \leqslant x$

Na verdade, resolver essa inequação simultânea é equivalente a resolver o sistema:

$$\begin{cases} -1 < 2x - 3 & \text{I} \\ 2x - 3 \leqslant x & \text{II} \end{cases}$$

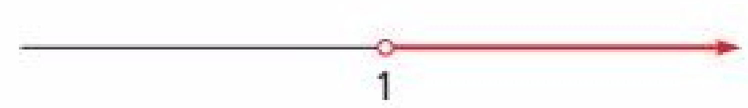
De I, obtemos:

$-1 < 2x - 3$

$-2x < -3 + 1$

$-2x < -2$

$x > 1$



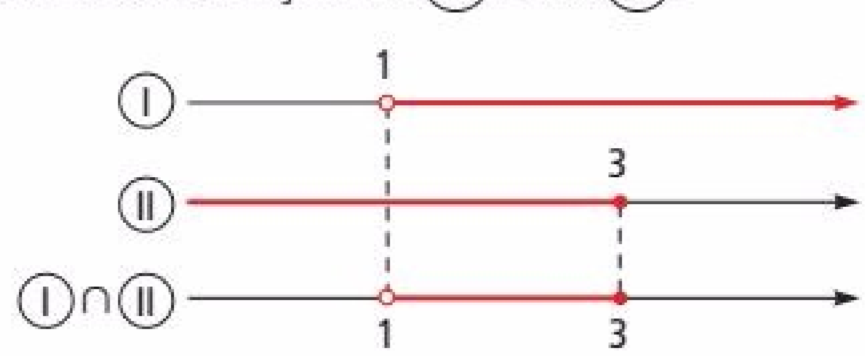
De II, obtemos:

$2x - 3 \leqslant x$

$2x - x \leqslant 3$

$x \leqslant 3$

Fazendo a intersecção de I com II:



Portanto, o conjunto solução da inequação é:
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leqslant 3\}$

Ilustrações: Editoria de arte

Inequação-produto e inequação-quociente

Estudamos que uma inequação pode ser entendida como parte do estudo de sinal de uma função. No entanto, em alguns casos, o membro não nulo da desigualdade pode ser formado por um produto ou por um quociente de funções.

Quando esse membro da desigualdade é composto por um produto de funções, do tipo $f(x) \cdot g(x)$, a inequação é chamada de **inequação-produto**. Por exemplo:

a) $\underbrace{(x + 3)}_{f(x)}\underbrace{(5x - 2)}_{g(x)} > 0$

b) $\underbrace{(-3x + 8)}_{f(x)}\underbrace{(x + 12)}_{g(x)} \leqslant 0$

Já no caso do membro da desigualdade ser formado por um quociente de funções, do tipo $\frac{f(x)}{g(x)}$, a inequação é chamada de **inequação-quociente**. Por exemplo:

a) $\frac{-x + 7}{x - 1} < 0,\ x \neq 1$ ($-x + 7 \to f(x)$; $x - 1 \to g(x)$)

b) $\frac{3x - 4}{-x - 6} \geqslant 0,\ x \neq -6$ ($3x - 4 \to f(x)$; $-x - 6 \to g(x)$)

A restrição para os valores de *x* é necessária, pois a função g(x) está no denominador e, portanto, não pode assumir o valor zero.

Para resolver inequações-produto e inequações-quociente, primeiro estudamos o sinal de cada função. Em seguida, montamos um quadro de sinais para determinar os sinais do produto ou do quociente. Para isso, utilizamos as regras de sinais do produto e do quociente de números reais.

Acompanhe a seguir alguns exercícios resolvidos que mostram o processo de resolução de inequações desse tipo.

Exercícios resolvidos

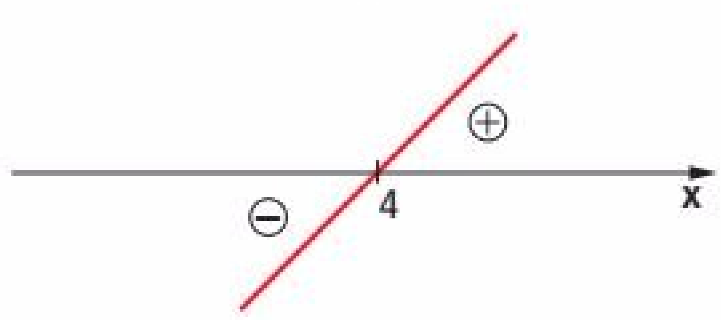
13 Sendo *x* um número real, resolva a inequação: $(x - 4)(x + 2) > 0$.

Resolução

Fazendo $f(x) = x - 4$ e $g(x) = x + 2$, vamos inicialmente estudar os sinais dessas funções.

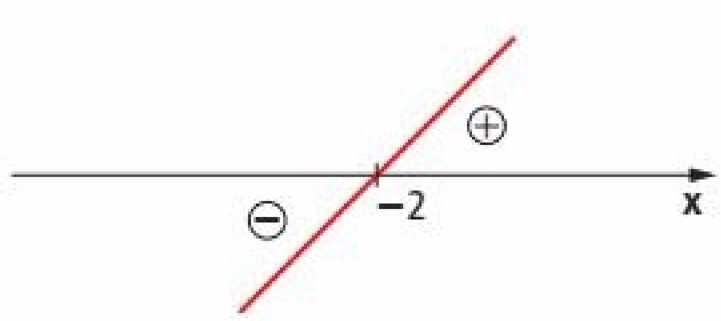
- $f(x) = x - 4$ ($a = 1 > 0$, então *f* é crescente)

O zero dessa função é: $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$



- $g(x) = x + 2$ ($a = 1 > 0$, então *g* é crescente)

O zero dessa função é: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$



Em seguida, vamos construir o quadro de sinais, indicando os sinais de f(x) e g(x) e determinando os sinais de $f(x) \cdot g(x)$.

		−2		4	
f(x)	−		−		+
g(x)	−		+		+
f(x) · g(x)	⊕		−		⊕
		−2		4	

Como queremos $f(x) \cdot g(x) > 0$, analisamos no quadro de sinais qual (ou quais) intervalo(s) atendem ao solicitado e serão o conjunto-solução da inequação. Logo: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 4\}$.

14 Determine o domínio da função dada por $y = \sqrt{\frac{x-1}{-x+3}}$.

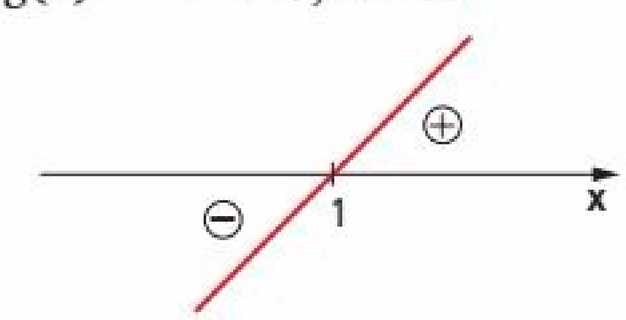
Resolução

Como $\sqrt{\frac{x-1}{-x+3}}$ só é possível em $\mathbb{R}$ se $\frac{x-1}{-x+3} \geqslant 0$ e $-x + 3 \neq 0$; então, devemos resolver a inequação-quociente $\frac{x-1}{-x+3} \geqslant 0$, com $x \neq 3$.

Fazendo $f(x) = x - 1$ e $g(x) = -x + 3$, temos:

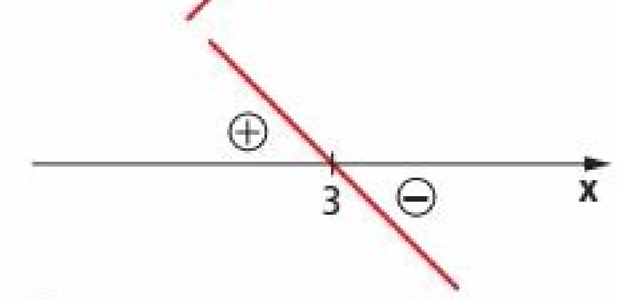
- $f(x) = x - 1$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$



- $g(x) = -x + 3$

$-x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$



Quadro de sinais:

		1		3	
f(x)	−		+		+
g(x)	+		+		−
$\frac{f(x)}{g(x)}$	−		⊕		−
		1		3	

Como devemos ter $\frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0$, o domínio da função é:

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x < 3\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

33. Determine os valores reais de x que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x+4 \leqslant 2x-1 \\ x+1 \geqslant 0 \end{cases}$$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$

34. Resolva as seguintes inequações simultâneas, em $\mathbb{R}$.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $-2 < 3x + 1 < 2$

b) $1 \leqslant x + 1 \leqslant 2x$

c) $-3 < 2x + 1 < 5$

d) $-2 \leqslant 3x + 7 < 4x$

35. (FEI-SP) Resolva o sistema de inequações:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x < 12\}$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{x-2}{5} < 2 \\ \dfrac{3(x-6)}{4} > 0 \end{cases}$$

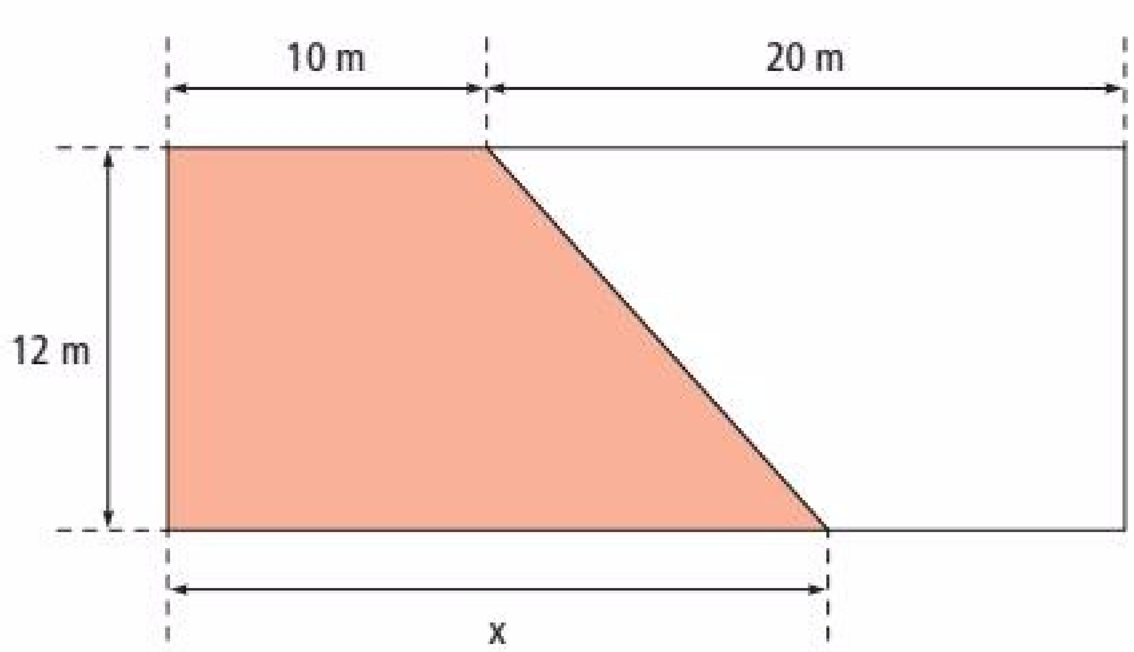
36. Determine o maior valor inteiro de x que satisfaz as desigualdades: 18

$$\begin{cases} 3x+1 < 2x+20 \\ x > 15 \\ \dfrac{x-1}{2+3} > \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

37. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$\dfrac{x+1}{2} < 5 + x \leqslant \dfrac{2x-1}{4}$ $S = \varnothing$

38. Mário é proprietário de um terreno de forma retangular na cidade de Iapé, cujas dimensões estão especificadas na figura.



Editoria de arte

De acordo com a legislação da Prefeitura Municipal da referida cidade, as edificações devem ocupar o mínimo de 45% e o máximo de 60% da área total do terreno.

Para que o prédio que Mário deseja construir (área pintada na figura) se enquadre nas exigências legais, determine todos os valores possíveis de x.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 17 \leqslant x \leqslant 26\}$

39. Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações-produto:

a) $(2x + 1) \cdot (-x + 2) \geqslant 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\right\}$

b) $(x + 2) \cdot (-x - 2) \leqslant 0$ $S = \mathbb{R}$

c) $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x+4) > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

d) $x(1 - x) \cdot (x + 1) < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

40. Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema:

$$\begin{cases} x(4-x) \geqslant 0 \\ x(5x+5)(-x+3) < 0 \end{cases}$$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 4\}$

41. Fatorando o 1º membro, resolva as inequações:

a) $x^2 - 4x + 3 > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

b) $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

42. Sendo x um número real, determine o conjunto solução das inequações-quociente:

a) $\dfrac{x-2}{x+3} > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 2\}$

b) $\dfrac{3x-1}{x+1} \leqslant 2$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 3\}$

c) $\dfrac{x(x-4)}{x-1} \leqslant 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } 1 < x \leqslant 4\}$

43. Determine o domínio das funções dadas por:

a) $y = \sqrt{x(x-5)}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+4}}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

44. Dadas as funções reais f e g, definidas por $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$ e $g(x) = 1$, determine os valores reais de x para que se tenha $f(x) > g(x)$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$

45. Determine o conjunto solução da inequação $m + \dfrac{3-m^2}{m-2} \geqslant -3$. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid m < 2 \text{ ou } m \geqslant 3\}$

46. Considerando um *spa* cuja capacidade máxima é de 20 clientes, o custo médio diário do atendimento, expresso em milhares de reais, em função do número x de clientes por dia, é dado por:

$$C(x) = \frac{10x + 260}{x}$$

Que número mínimo de internações deverá ocorrer para que o custo médio diário seja inferior a 50000 reais? 7

47. Determine o conjunto solução da inequação:

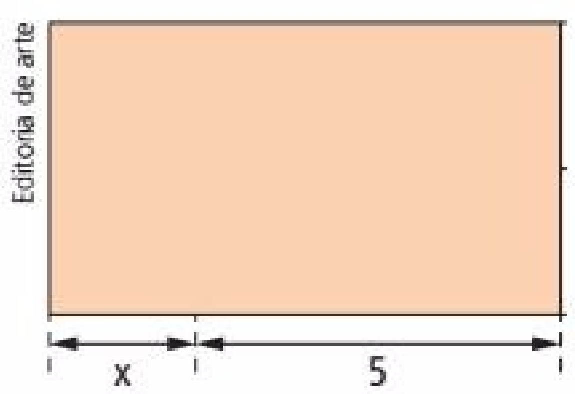
$\dfrac{(x-1)(x+3)}{x-5} > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

CAPÍTULO 5

Função quadrática

Nos capítulos anteriores vimos as ideias gerais de função e estudamos essas ideias aplicadas à função afim. Agora estudaremos outra categoria de funções, as funções quadráticas.

Acompanhe a situação a seguir.



Considere um retângulo cujos lados têm suas medidas expressas por $(x + 5)$ unidades e $(x + 2)$ unidades, conforme mostra a figura ao lado.

Para calcular a área *A* desse retângulo, multiplicamos as medidas das dimensões do retângulo. Assim, temos:

$$A = (x + 5)(x + 2) \Rightarrow A = x^2 + 2x + 5x + 10 \Rightarrow A = x^2 + 7x + 10$$

A área *A* é função da medida *x*. Assim, podemos escrever a lei dessa função como $f(x) = x^2 + 7x + 10$, com $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$ pois as medidas dos lados não podem assumir valores negativos.

Funções como a que modela a situação apresentada são chamadas **funções quadráticas**.

> Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com *a*, *b*, *c* reais e $a \neq 0$, é chamada **função quadrática**.

A função quadrática também pode ser denominada **função polinomial do 2º grau**, pois as relações entre a variável dependente e a variável independente são expressas por polinômios do 2º grau.

Os números **a**, **b** e **c** são os **coeficientes** da função, sendo que *a* é o coeficiente do termo x^2, *b* é o coeficiente do termo *x* e *c* é o coeficiente independente.

Para que a função seja quadrática devemos ter sempre $a \neq 0$, caso contrário o termo x^2 se anula e a lei da função torna-se $f(x) = bx + c$, que é uma função afim.

Alguns exemplos de funções quadráticas são:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 4$, com os coeficientes: $a = 1$, $b = -3$ e $c = 4$

b) $g(x) = 8x^2 - 1$, com os coeficientes: $a = 8$, $b = 0$ e $c = -1$

c) $y = -x^2 + \frac{3}{2}x$, com os coeficientes: $a = -1$, $b = \frac{3}{2}$ e $c = 0$

d) $y = -5x^2$, com os coeficientes: $a = -5$, $b = 0$ e $c = 0$

Não são funções quadráticas, por exemplo:

e) $f(x) = 7x$

f) $f(x) = x^4 + 2x^2$

g) $f(x) = 5^x$

Da mesma maneira que foi feito para a função afim, determinar o valor de uma função quadrática *f* em um ponto é calcular o valor de $f(x)$ para determinado valor de *x*. Por exemplo, para $f(x) = x^2 + 3x - 6$:

- $f(1) = -2$, pois $f(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 - 6 = 1 + 3 - 6 = -2$;
- $f(-2) = -8$, pois $f(-2) = (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 6 = 4 - 6 - 6 = -8$;
- $f(0) = -6$, pois $f(0) = 0^2 + 3 \cdot 0 - 6 = 0 + 0 - 6 = -6$.

Exercícios resolvidos

1 O dono de uma marcenaria que fabrica certo tipo de caixa sabe que o número *N* de caixas que ele pode produzir por mês depende do número *x* de funcionários que trabalham na marcenaria.

Essa dependência é dada pela função $N(x) = x^2 + 2x$.

a) Quais são os valores dos coeficientes *a*, *b* e *c* da função N(x)?

b) Quantas caixas podem ser produzidas em um mês quando estão trabalhando 12 funcionários na marcenaria?

Resolução

a) Os valores dos coeficientes da função N(x) são:

$a = 1$ $\qquad b = 2$ $\qquad c = 0$

b) Para responder à questão, precisamos calcular N(12). Então:

$N(12) = 12^2 + 2 \cdot 12 = 144 + 24 = 168$

Portanto, podem ser produzidas 168 caixas em um mês quando há 12 funcionários trabalhando na marcenaria.

2 Considere uma função quadrática f(x) em que $f(0) = 5$, $f(1) = 3$ e $f(-1) = 1$. Escreva a lei de formação dessa função e calcule f(5).

Resolução

Como a função *f* é quadrática, pode ser representada por $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Substituindo os dados do enunciado na lei da função, obtemos um sistema de equações. Assim:

$f(0) = 5 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 5 \Rightarrow c = 5$

$f(1) = 3 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3 \Rightarrow a + b + 5 = 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = -2$ (I)

$f(-1) = 1 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b + 5 = 1 \Rightarrow a - b = -4$ (II)

Resolvendo o sistema formado por (I) e (II):

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$$

Substituindo $a = -3$ em (I):

$-3 + b = -2 \Rightarrow b = 1$

Como $a = -3$, $b = 1$ e $c = 5$, a lei de formação da função é $f(x) = -3x^2 + x + 5$.

Com a lei de formação de *f*, calculamos f(5). Então:

$f(5) = -3 \cdot (5)^2 + 5 + 5 = -65$

Portanto, $f(5) = -65$.

3 Seja f(x) uma função quadrática dada por $f(x) = -2x^2 + 10x$. Determine:

a) $f(3) + f(-1) - f(-2)$;

b) os valores de *x*, se existirem, para que $f(x) = 8$.

c) os valores de *x*, se existirem, para que $f(x) = 16$.

Resolução

a) Para determinar o valor da expressão solicitada precisamos calcular os valores de f(3), f(−1) e f(−2). Então:

$f(3) = (-2) \cdot 3^2 + 10 \cdot 3 = -18 + 30 = 12$

$f(-1) = (-2) \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1) = -2 - 10 = -12$

$f(-2) = (-2) \cdot (-2)^2 + 10 \cdot (-2) = -8 - 20 = -28$

Logo, $f(3) = 12$, $f(-1) = -12$ e $f(-2) = -28$. Assim:

$f(3) + f(-1) - f(-2) = 12 + (-12) - (-28) =$
$= 12 - 12 + 28 = 28$

Portanto, $f(3) + f(-1) - f(-2) = 28$.

b) Para determinar os valores de *x*, devemos substituir $f(x) = 8$ na lei da função:

$-2x^2 + 10x = 8 \Rightarrow -2x^2 + 10x - 8 = 0 \overset{:(-2)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

Obtemos uma equação do 2º grau e podemos utilizar qualquer um dos métodos de resolução já estudados para determinar os valores de *x*. Aqui, por exemplo, usaremos a fórmula de Bhaskara.

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9$

$$x = \frac{-(-5) \pm 3}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Então $x' = 1$ ou $x'' = 4$.

Portanto, $f(x) = 8$ para $x' = 1$ ou $x'' = 4$.

c) Utilizando o mesmo raciocínio do item anterior, temos:

$-2x^2 + 10x = 16 \Rightarrow -2x^2 + 10x - 16 = 0 \overset{:(-2)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 8 = 0$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 25 - 32 = -7$

O valor de Δ é negativo, ou seja, a equação $x^2 - 5x + 8 = 0$ não possui solução em $\mathbb{R}$.

Portanto, não existem valores de *x* tal que $f(x) = 16$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Identifique os valores dos coeficientes a, b e c das seguintes funções quadráticas:
a) $f(x) = 3x^2 - 5x + \sqrt{2}$ $a = 3; b = -5; c = \sqrt{2}$
b) $y = -\frac{3}{4}x^2 - 2x + 1$ $a = -\frac{3}{4}; b = -2; c = 1$
c) $y = 7x^2 + \frac{5}{3}$ $a = 7; b = 0; c = \frac{5}{3}$
d) $y = -9x^2$ $a = -9; b = 0; c = 0$
e) $f(x) = -\sqrt{5}x^2 - 4$ $a = -\sqrt{5}; b = 0; c = -4$

2. Dada a função $f(x) = x^2 - 5x + 4$, calcule:
a) $f(0)$ 4
b) $f(4)$ 0
c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\frac{7}{4}$
d) $f(-1)$ 10
e) $f(\sqrt{2})$ $6 - 5\sqrt{2}$
f) $f\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ $\frac{21 + 5\sqrt{5}}{5}$

3. Dada a função $f(x) = -x^2 + 9x - 8$, determine os valores reais de x para que se tenha:
a) $f(x) = 0$ $x = 1$ ou $x = 8$
b) $f(x) = 10$ $x = 3$ ou $x = 6$
c) $f(x) = 11$ $x = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$
d) $f(x) = -\frac{15}{4}$ $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{17}{2}$

4. A soma S dos n primeiros números naturais diferentes de zero $(1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)$ pode ser calculada utilizando a função quadrática $S(n) = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.
Qual é a soma dos 50 primeiros números naturais diferentes de zero? 1275

5. Uma função quadrática f é tal que $f(0) = 6$, $f(1) = 2$ e $f(-2) = 20$. Determine o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$. $\frac{15}{4}$

6. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabendo que $f(1) = 4$, $f(2) = 0$ e $f(3) = -2$, calcule o produto $a \cdot b \cdot c$. -70

7. (Unifesp-SP) A tabela mostra a distância s em centímetros que uma bola percorre descendo por um plano inclinado em t segundos.

t	0	1	2	3	4
s	0	32	128	288	512

A distância s é função de t dada pela expressão $s(t) = at^2 + bt + c$, onde a, b, c são constantes.
A distância s, em centímetros, quando $t = 2{,}5$ segundos, é igual a:
a) 248
b) 228
c) 208
X d) 200
e) 190

8. (PUC-RJ) Sejam f e g funções reais dadas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 1 + 2x^2$. Os valores de x tais que $f(x) = g(x)$ são:
a) $x = 0$ ou $x = 1$
b) $x = 0$ ou $x = 2$
c) $x = 1$ ou $x = \frac{1}{2}$
d) $x = 2$ ou $x = 1$
X e) $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

9. (Vunesp-SP) O desenvolvimento da gestação de uma determinada criança com 40 semanas, 50,6 cm de altura e com 3 446 gramas de massa, foi modelado, a partir da 20ª semana, aproximadamente, pelas funções matemáticas $h(t) = 1{,}5t - 9{,}4$ e $p(t) = 3{,}8t^2 - 72t + 246$, onde t indica o tempo em semanas, $t \geqslant 20$, $h(t)$ a altura em centímetros e $p(t)$ a massa em gramas. Admitindo o modelo matemático, determine quantos gramas tinha o feto quando sua altura era 35,6 cm. 1506 g

10. (UEPB) Um setor de uma metalúrgica produz uma quantidade N de peças dada pela função $N(x) = x^2 + 10x$, x horas após iniciar suas atividades diárias. Iniciando suas atividades às 6 horas, o número de peças produzidas no intervalo de tempo entre as 7 e as 9 horas será igual a:
a) 50
X b) 28
c) 25
d) 16
e) 39

11. Mensalmente, uma fábrica produz x unidades de certo produto. Sua produção é vendida por $(500 - x)$ reais a unidade. Cada unidade desse produto tem um custo de R$ 100,00. Além disso, a fábrica tem uma despesa mensal fixa de R$ 10 000,00.
a) Escreva a lei da função que determina o lucro mensal L dessa fábrica em função de x. $L(x) = -x^2 + 400x - 10000$
b) De quantos reais será o lucro quando a fábrica vender 100 produtos? R$ 20 000,00

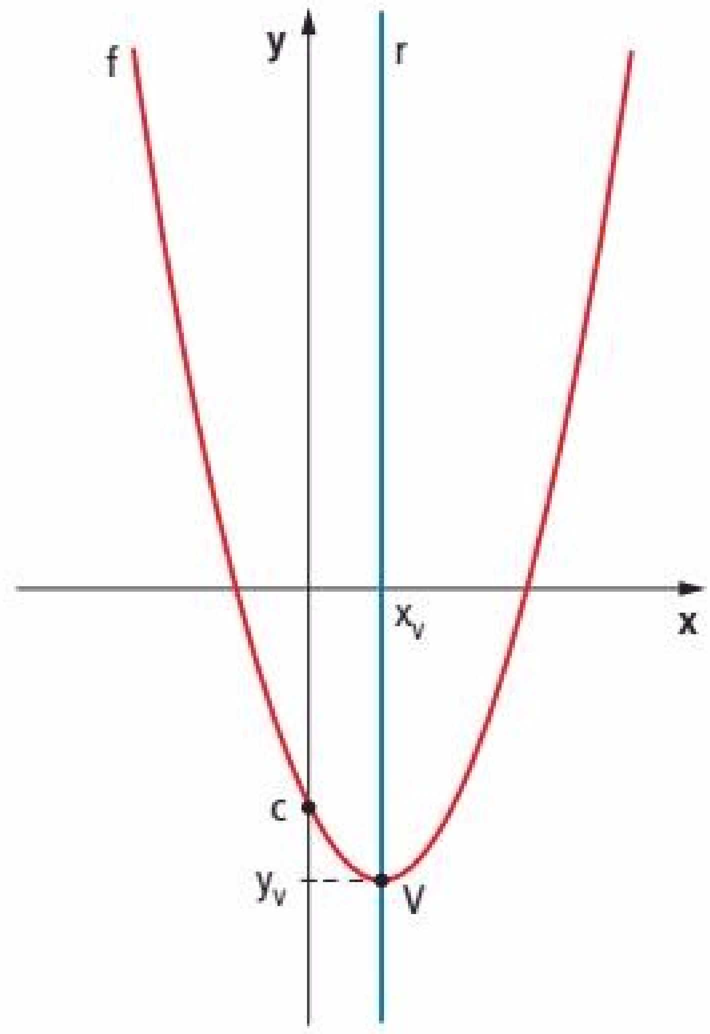
12. A altura h, em metro, de um objeto lançado para cima é função do tempo t, em segundo, decorrido após o lançamento. Supondo que a lei dessa função seja $h(t) = 24t - 2t^2$, responda:
a) Qual é a altura do objeto 3 segundos após o lançamento? 54 metros
b) Quanto tempo após o lançamento o objeto encontra-se a 40 metros de altura? 2 segundos ou 10 segundos
c) Como podemos interpretar o resultado obtido no item **b**? Foram obtidos dois valores de tempo porque um deles acontece quando o objeto está subindo e o outro, quando o objeto está descendo.

13. (UFPR) O número N de caminhões produzidos em uma montadora durante um dia, após t horas de operação, é dado por $N(t) = 20 \cdot t - t^2$, sendo que $0 \leqslant t \leqslant 10$. Suponha que o custo C (em milhares de reais) para se produzir N caminhões seja dado por $C(N) = 50 + 30 \cdot N$.
a) Escreva o custo C como uma função do tempo t de operação da montadora. $C(t) = -30t^2 + 600t + 50$
b) Em que instante t, de um dia de produção, o custo alcançará o valor de 2 300 milhares de reais? $t = 5$

Gráfico da função quadrática

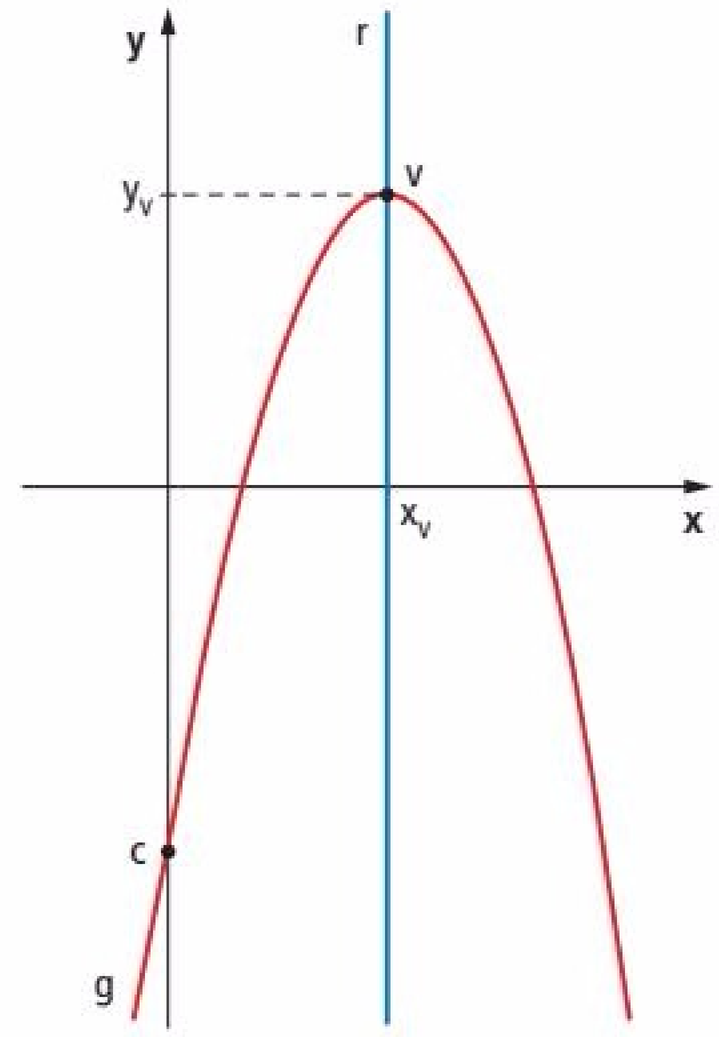
É possível demonstrar que o gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada **parábola**. Observe dois exemplos:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = x^2 - 2x - 3$



Os coeficientes da função *f* são: $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$. Note que, nesse caso, $a > 0$.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = -x^2 + 6x - 5$



Os coeficientes da função *g* são: $a = -1$, $b = 6$ e $c = -5$. Note que, nesse caso, $a < 0$.

Ilustrações: Editoria de arte

Também é possível demonstrar que a parábola tem sua **concavidade** voltada para cima, se o coeficiente *a* for positivo, ou para baixo, se *a* for negativo.

Existe um único ponto $V(x_V, y_V)$, pertencente à parábola, pelo qual se pode traçar uma reta *r* perpendicular ao eixo *x*, de modo que dois pontos de ordenadas iguais estão à mesma distância da reta *r*. O ponto $V(x_V, y_V)$ é chamado **vértice** da parábola, e a reta *r* é seu **eixo de simetria**.

Destacamos ainda que, qualquer que seja a função quadrática, o ponto de intersecção da parábola com o eixo *y* é o ponto de coordenadas (0, c), em que *c* é o coeficiente independente na lei da função quadrática. De fato:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow f(0) = c$$

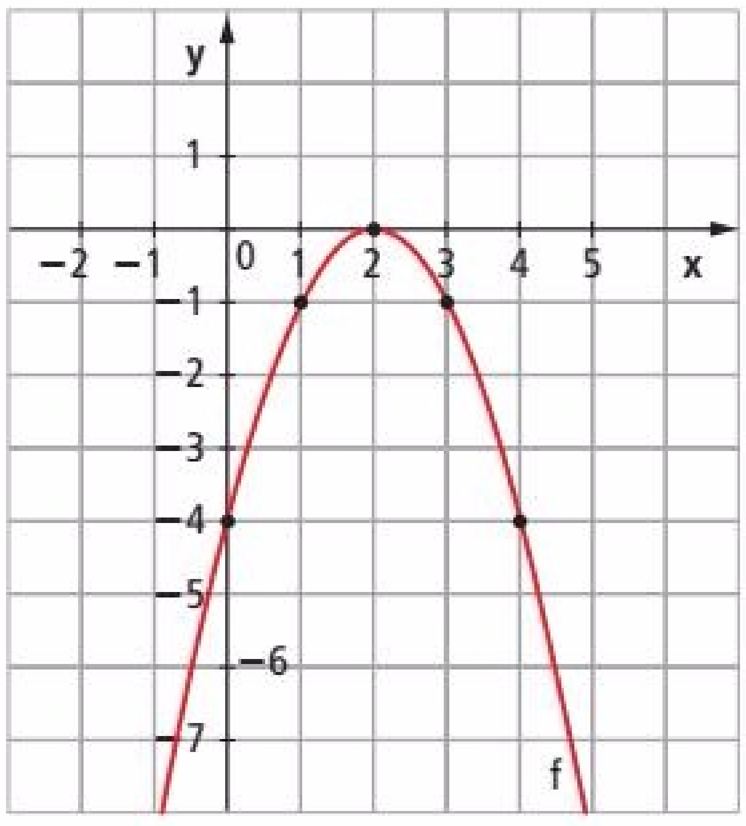
> Pode haver dois, um ou nenhum ponto de intersecção da parábola com o eixo *x*. Isso depende dos zeros da função quadrática que será estudado mais adiante neste capítulo.

Assim como foi feito na função afim, para construir o gráfico da função quadrática também devemos elaborar uma tabela com alguns valores de *x* e *y* pertencentes à função dada. No entanto, no caso da função quadrática, precisamos de mais do que 2 pontos para ter uma noção do traçado da parábola. Assim, determinamos quantos pontos forem suficientes para visualizar a parábola.

Acompanhe a seguir como traçar o gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x - 4$.

Inicialmente construímos uma tabela com alguns valores de *x* e $f(x) = y$. Em seguida localizamos os pontos (x, y) determinados pela função *f*. Por fim, traçamos a parábola que contém os pontos indicados. Como $a < 0$, a parábola terá concavidade voltada para baixo.

x	$y = -x^2 + 4x - 4$
0	$-(0)^2 + 4 \cdot (0) - 4 = -4$
1	$-(1)^2 + 4 \cdot (1) - 4 = -1 + 4 - 4 = -1$
2	$-(2)^2 + 4 \cdot (2) - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$
3	$-(3)^2 + 4 \cdot (3) - 4 = -9 + 12 - 4 = -1$
4	$-(4)^2 + 4 \cdot (4) - 4 = -16 + 16 - 4 = -4$



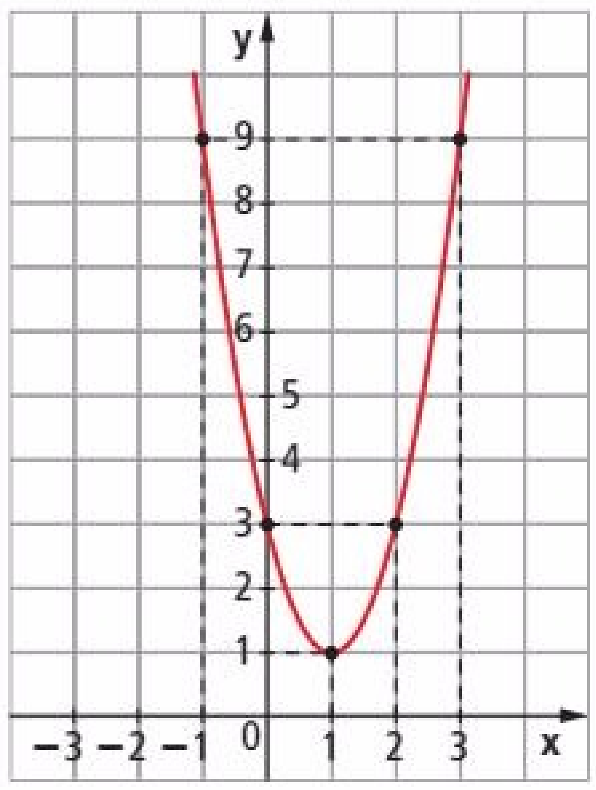
Exercícios resolvidos

4 Construir o gráfico da função $y = 2x^2 - 4x + 3$.

Resolução

Sabemos que o gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para cima, pois $a > 0$ $(a = 2)$.
Inicialmente, atribuímos alguns valores a x para determinar alguns pontos da parábola.
Em seguida, marcamos esses pontos em um plano cartesiano e traçamos a parábola.

x	y
−1	9
0	3
1	1
2	3
3	9



Ilustrações: Editoria de arte

5 Determine a lei da função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos $(0, 2)$, $(-1, -1)$ e $(1, 11)$.

Resolução

A lei de uma função quadrática pode ser representada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Como um dos pontos dados é $(0, 2)$, temos que o valor do coeficiente c é 2, pois $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 2$. Assim, a lei da função fica $f(x) = ax^2 + bx + 2$.

Substituindo as coordenadas dos demais pontos na lei da função, chegamos a um sistema de equações cujas variáveis são os coeficientes a e b.

$(-1, -1) \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2 = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a - b = -3$ (I)

$(1, 11) \Rightarrow a \cdot (1)^2 + b \cdot (1) + 2 = 11 \Rightarrow a + b = 9$ (II)

Resolvendo o sistema, determinamos os coeficientes a e b e, consequentemente, a lei da função.

$$\begin{cases} a - b = -3 \\ a + b = 9 \end{cases} +$$

$$2a \quad = 6 \Rightarrow a = 3$$

Substituindo o valor de a na equação (II), temos:

$3 + b = 9 \Rightarrow b = 6$

Portanto, a lei da função é $f(x) = 3x^2 + 6x + 2$.

6 Seja a função quadrática f dada por $f(x) = (3m - 15)x^2 + 6x - \frac{5}{4}$, com $m \in \mathbb{R}$. Determine o valor de m para que a parábola correspondente ao gráfico de f tenha concavidade voltada para cima.

Resolução

Para que o gráfico da função f tenha concavidade para cima, o coeficiente do termo x^2 deve ser maior que zero. Então:

$3m - 15 > 0 \Rightarrow 3m > 15 \Rightarrow m > 5$

Portanto, o gráfico de f terá concavidade para cima para $m > 5$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

14. Trace, no plano cartesiano, o gráfico das seguintes funções quadráticas: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $y = x^2 + x - 6$
b) $y = -x^2 + 6x - 9$
c) $y = x^2 - 4$
d) $y = -x^2$
e) $y = x^2 - 5x$
f) $y = 2x^2 - 6x - 8$

15. Determine o valor de m para que a parábola que representa a função $y = 3x^2 - x + m$ passe pelo ponto $(1, 6)$. $m = 4$

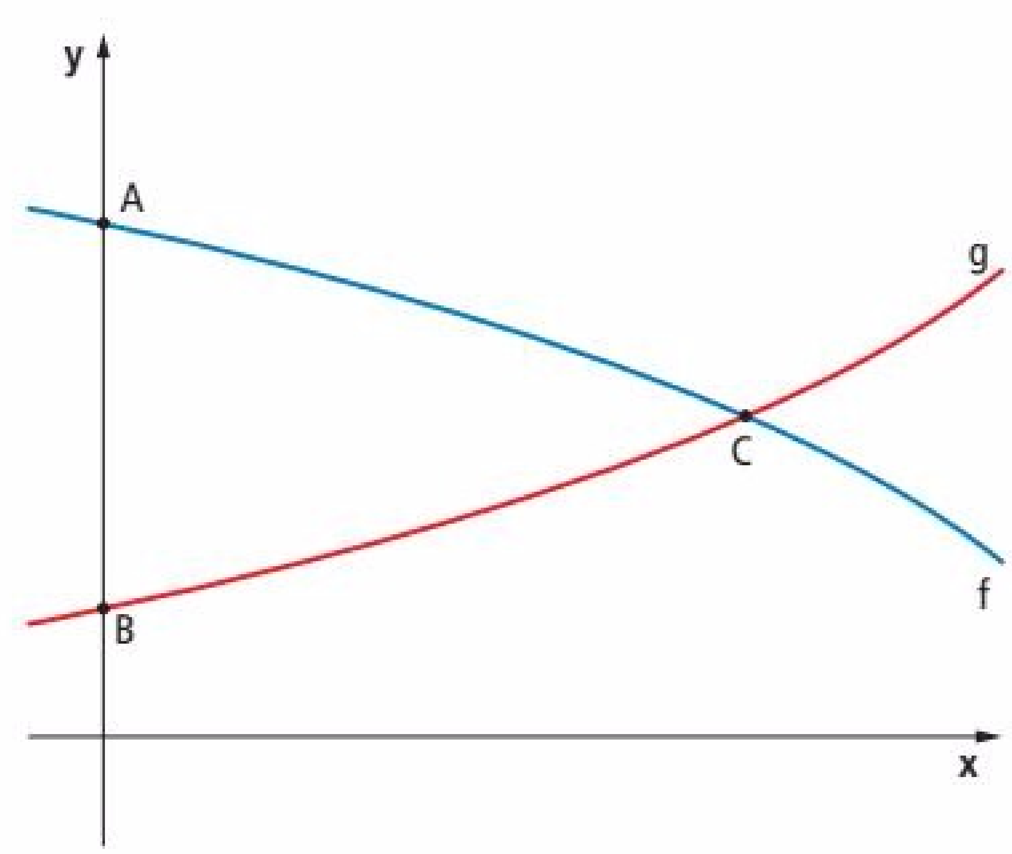
16. Dada a função $y = \left(\frac{m-1}{m+2}\right)x^2 + x + 4$, calcule $m \in \mathbb{R}$, de modo que a parábola correspondente tenha a concavidade voltada para cima. $m < -2$ ou $m > 1$

17. (Unicamp-SP) Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Encontre as constantes a, b e c de modo que o gráfico da função $y = ax^2 + bx + c$ passe pelos pontos $(1, 10)$, $(-2, -8)$ e $(3, 12)$.

b) Faça o gráfico da função obtida no item **a** destacando seus pontos principais.

18. No plano cartesiano a seguir está representada parte dos gráficos de duas funções dadas por $f(x) = -0{,}01x^2 - 0{,}2x + 8$ e $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 3$.



A partir dessas informações, determine as coordenadas dos pontos A, B e C. A(0, 8), B(0, 3) e C(10, 5)

Explorando a tecnologia

Os coeficientes da função quadrática e a parábola do gráfico

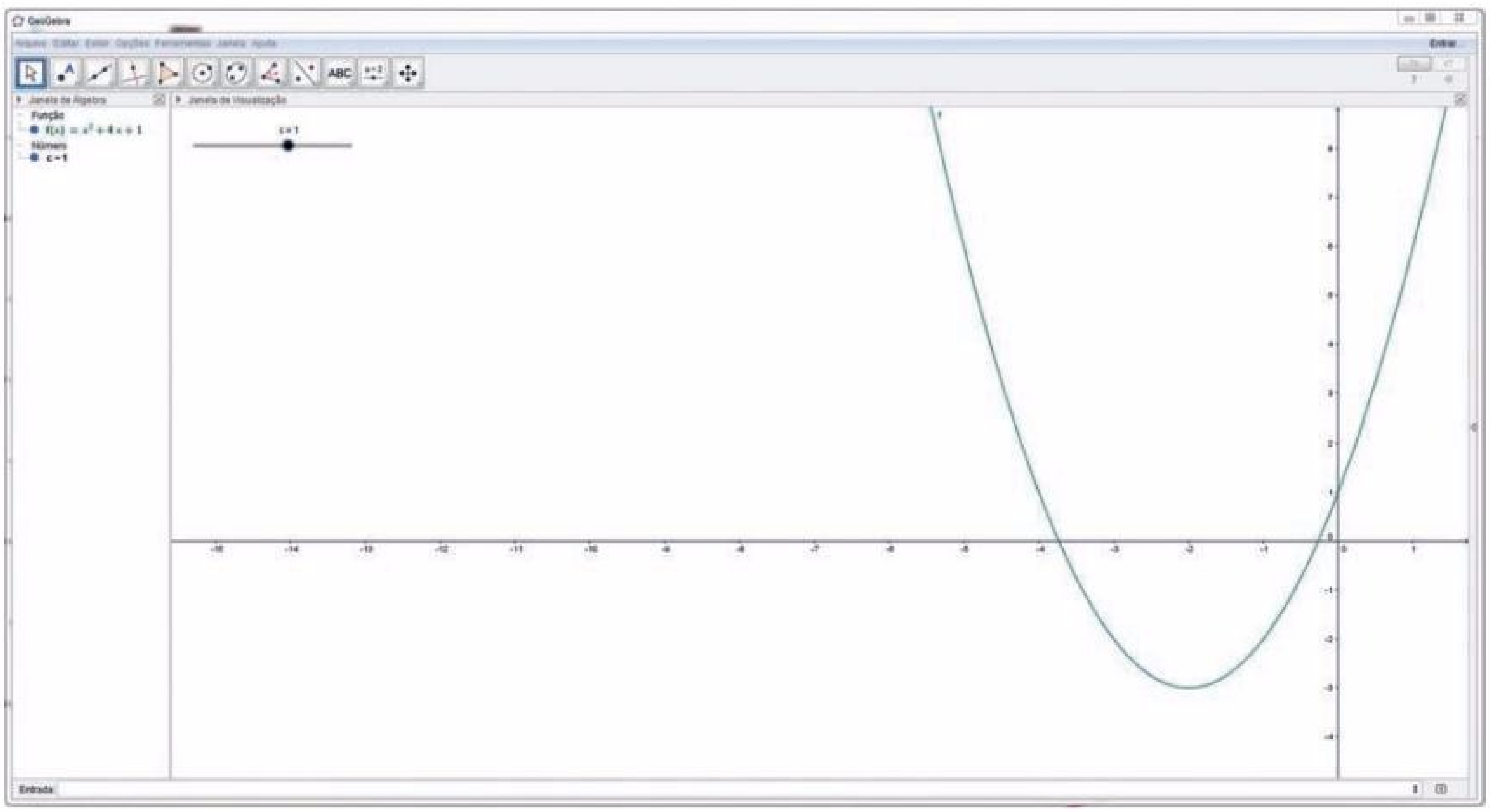
Estudamos que, em uma função quadrática, o sinal do coeficiente *a* determina se a concavidade da parábola será voltada para cima ou para baixo.

Agora, vamos utilizar o GeoGebra para analisar como o parâmetro *c* influencia na construção da parábola.

Para isso, siga a sequência de passos abaixo.

1. No **Campo de Entrada** do GeoGebra, digite ‘f(x)=x^2+4x+c’ e pressione *enter*.
2. O programa exibirá uma tela perguntando se você deseja criar um controle deslizante para o coeficiente *c*. Clique em “Criar Controles Deslizantes”.
3. O programa exibirá o gráfico da função *f* e o **Controle Deslizante** para o coeficiente *c*. Altere a posição do ponto ao longo do controle para alterar o valor de *c* e veja o que acontece com o gráfico de *f*.
4. Por padrão, o Controle Deslizante é criado limitado ao intervalo $[-5, 5]$. Para alterá-lo, clique com o botão direito do *mouse* em cima do controle e em seguida em “Propriedades”. Na aba “Controle Deslizante”, altere os campos de “min:” e “max:” para os valores desejados, por exemplo, -10 e 10. Em seguida, clique em “Fechar”.

   A tela do GeoGebra ficará semelhante à figura abaixo.



Geogebra

5. Repita o processo alterando a lei da função, mas mantendo o coeficiente *c* com o Controle Deslizante e verifique o que acontece com o gráfico da função.

Atividades

Escreva no caderno

1. Ao deslizar o controle do coeficiente *c*, o gráfico de *f* se desloca ao longo do eixo das ordenadas.
2. Quando $a = 0$, o gráfico se torna a reta $y = 0$ (coincidente com o eixo *x*), pois a função deixa de ser do 2º grau. Nos demais casos, o coeficiente *a* altera a abertura da concavidade. Quanto maior o valor de $|a|$, mais fechada é a concavidade da parábola.

1. Deslize o controle e observe as mudanças que ocorrem na parábola. Descreva o que acontece com o gráfico.
2. Utilizando o mesmo recurso, construa a parábola da função dada por $g(x) = ax^2$, na qual o coeficiente *a* seja manipulado por um controle deslizante. Em seguida, observe o gráfico e descreva o que acontece quando $a = 1$, $a = -1$, $a = 2$, $a = 0,5$ e $a = 0$.

Zeros da função quadrática

Já estudamos que **zero** de uma função é um valor de *x* que anula a função, isto é, torna **f(x) = 0**. Também estudamos que, para a função afim, é possível determinar o zero da função definida por $f(x) = ax + b$ resolvendo a equação $ax + b = 0$.

Para determinar os zeros de uma função quadrática, devemos proceder de maneira análoga, isto é, os zeros da função quadrática dada por $y = ax^2 + bx + c$ são as raízes da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Agora, vamos ver algumas maneiras de resolução de equações do 2º grau, provavelmente já estudadas em anos anteriores.

Ao resolver a equação $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, nos deparamos com uma das três situações seguintes:

> Para os casos I e II, em que há raízes reais, podemos relacionar a soma *S* e o produto *P* das raízes com os coeficientes da equação da seguinte maneira:
>
> $S = x' + x'' = -\dfrac{b}{a}$
>
> $P = x' \cdot x'' = \dfrac{c}{a}$

I. Se $\Delta > 0$, então a equação possui duas raízes reais e diferentes, e a função quadrática correspondente tem dois zeros:

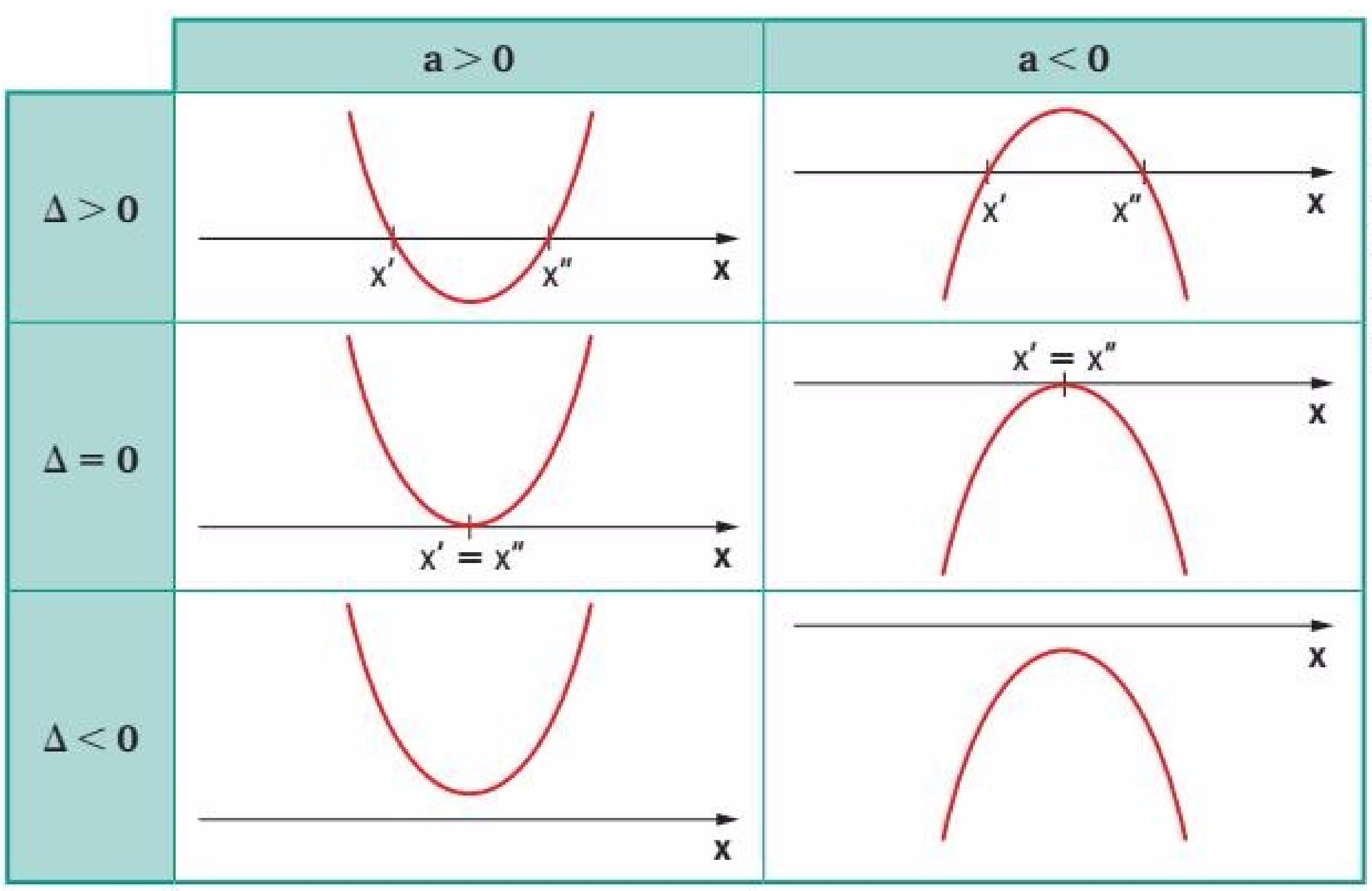
$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

II. Se $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais iguais, e a função quadrática correspondente tem um único zero:

$$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$$

III. Se $\Delta < 0$, então a equação não possui raízes reais, e a função quadrática correspondente não tem zeros.

Geometricamente, os zeros da função quadrática, quando existem, são as abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo *x*. Veja o quadro a seguir.



Ilustrações: Editoria de arte

Utilizando as sentenças da soma e do produto das raízes x' e x'' de uma equação, a **forma fatorada** da lei da função quadrática correspondente dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é $f(x) = a(x - x')(x - x'')$. Acompanhe a seguir o desenvolvimento dessa fatoração.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a[x^2 - (x' + x'')x + x' \cdot x'']$$

$$f(x) = a[x^2 - x'x - x''x + x'x'']$$

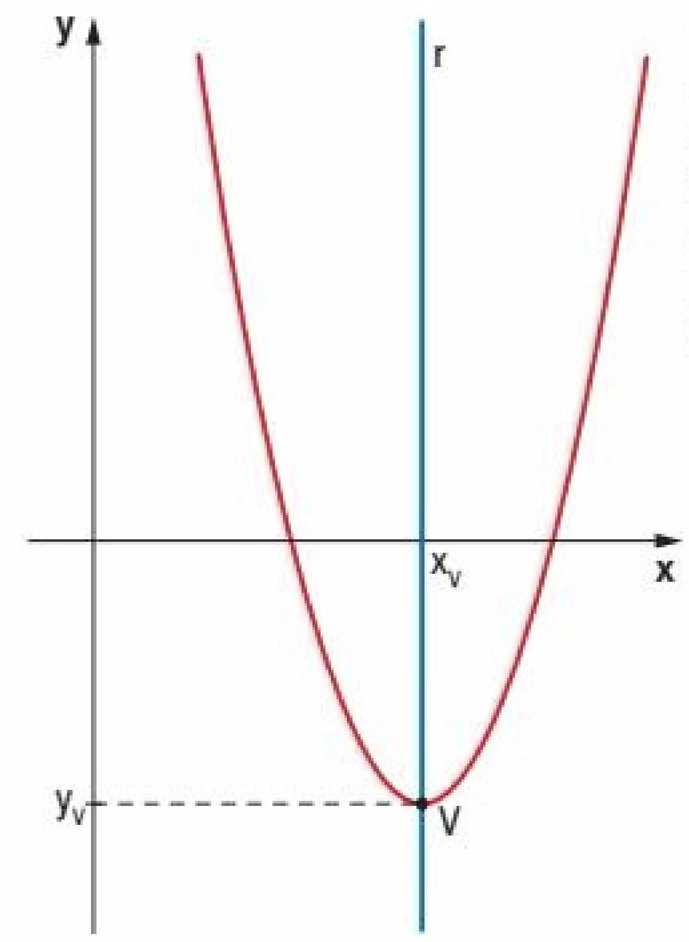
$$f(x) = a[x(x - x') - x''(x - x')]$$

$$f(x) = a(x - x')(x - x'')$$

A forma fatorada da lei da função quadrática é útil na resolução de alguns exercícios.

Vértice da parábola

Observe ao lado o gráfico de uma função quadrática f(x). Nele estão destacados o ponto $V(x_V, y_V)$, vértice, e a reta *r*, eixo de simetria da parábola.



Ilustrações: Editoria de arte

Já vimos que o vértice pertence ao eixo de simetria da parábola. Ele também é o ponto em que a função quadrática assume valor mínimo (quando a concavidade é voltada para cima) ou valor máximo (quando a concavidade é voltada para baixo).

Assim, para determinar a imagem, bem como estudar os pontos de máximo e mínimo da função quadrática, é importante saber as coordenadas do vértice da parábola.

Seja *f* uma função quadrática dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabemos que dois pontos de ordenadas iguais estão à mesma distância do eixo de simetria da parábola, que coincide com o valor da abscissa do vértice, x_V. Podemos então indicar as coordenadas de dois pontos simétricos entre si como $P(x_V - k, y_0)$ e $Q(x_V + k, y_0)$, em que *k* é a diferença entre as abscissas de *P* e *V* e de *Q* e *V*.

Como as ordenadas são iguais, temos que $f(x_V - k) = f(x_V + k)$.

Substituindo os valores da função nos respectivos pontos temos:

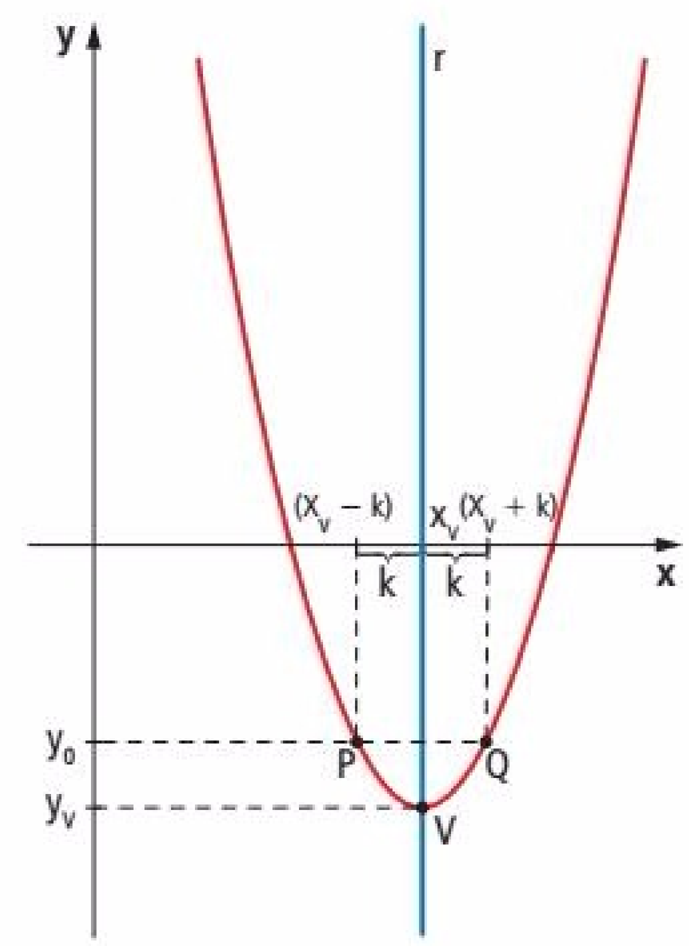
$f(x_V - k) = f(x_V + k) \Rightarrow$

$\Rightarrow a(x_V - k)^2 + b(x_V - k) + c = a(x_V + k)^2 + b(x_V + k) + c \Rightarrow$

$\Rightarrow a(x_V^2 - 2x_Vk + k^2) + bx_V - bk + c = a(x_V^2 + 2x_Vk + k^2) + bx_V + bk + c \Rightarrow$

$\Rightarrow ax_V^2 - 2ax_Vk + ak^2 + bx_V - bk + c = ax_V^2 + 2ax_Vk + ak^2 + bx_V + bk + c \Rightarrow$

$$\Rightarrow -2ax_Vk - 2ax_Vk = bk + bk \Rightarrow -4ax_Vk = 2bk \Rightarrow x_V = \frac{2bk}{-4ak} \Rightarrow \boxed{x_V = -\frac{b}{2a}}$$



Para calcular a ordenada y_V do vértice, substituímos na lei da função o valor de x_V encontrado. Assim:

$$f(x_V) = y_V = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \Rightarrow y_V = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow y_V = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_V = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Rightarrow y_V = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow \boxed{y_V = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Portanto, as coordenadas do vértice da parábola são $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

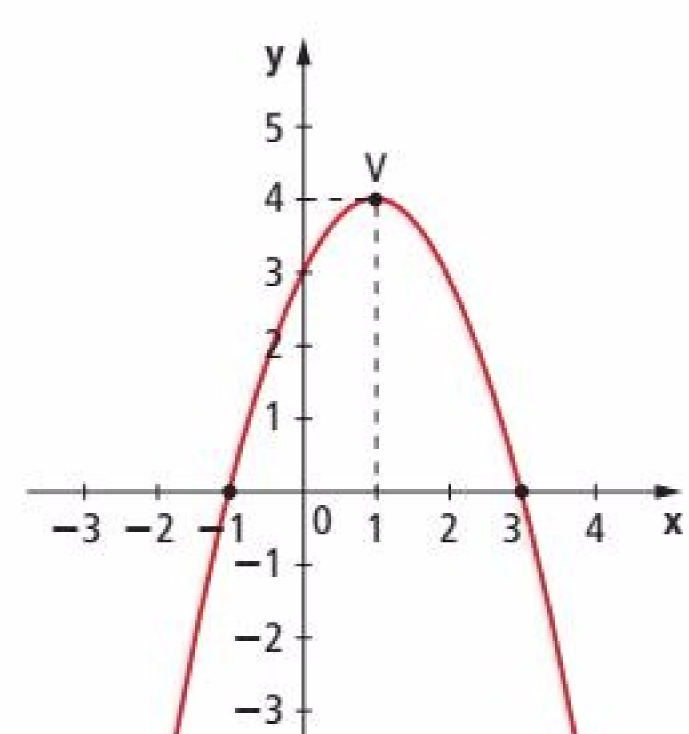
Por exemplo, vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico da função *f* dada por $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Os coeficientes de *f* são: $a = -1$, $b = 2$ e $c = 3$. Então:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow x_V = 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 \Rightarrow \Delta = 16$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4 \cdot (-1)} = \frac{-16}{-4} \Rightarrow y_V = 4$$



Portanto, as coordenadas do vértice da parábola cuja função é f(x) é V(1, 4).

De fato, traçando o gráfico da função, observamos que os zeros da função são $x = -1$ e $x = 3$. Como os zeros são equidistantes do vértice, o valor de x_V pode ser calculado como $x_V = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$ e $f(1) = -1 + 2 + 3 = 4$.

Exercícios resolvidos

7 Determinar os zeros da função $y = x^2 - 4x - 5$.

Resolução

Para determinar os zeros da função dada devemos resolver a seguinte equação do 2º grau:

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 36$

Como $36 > 0$, a função tem dois zeros diferentes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 6}{2} \Rightarrow \begin{cases} x' = 5 \\ x'' = -1 \end{cases}$$

Portanto, os zeros da função $y = x^2 - 4x - 5$ são $x' = 5$ e $x'' = -1$.

8 Seja a função $f(x) = x^2 - 2x + 3k$. Sabendo que essa função tem um único zero, determine o valor real de *k*.

Resolução

A condição para que a função tenha apenas um zero é que $\Delta = 0$. Então:

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3k \Rightarrow \Delta = 4 - 12k$

Fazendo $\Delta = 0$ em $\Delta = 4 - 12k$, temos:

$4 - 12k = 0 \Rightarrow -12k = -4 \Rightarrow k = \frac{-4}{-12} \Rightarrow k = \frac{1}{3}$

Portanto, para que f(x) tenha um zero, devemos ter $k = \frac{1}{3}$.

9 A função $f(x) = x^2 + kx + 36$ tem dois zeros distintos, *m* e *n* reais não nulos, de modo que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{5}{12}$.

Determine o valor de $f(-1)$.

Resolução

Se *m* e *n* são os zeros da função f(x), então também são as raízes da equação $x^2 + kx + 36 = 0$.

Pela relação dada $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{5}{12}$, temos: $\frac{n+m}{m \cdot n} = \frac{5}{12}$ (I).

Usando as relações entre coeficientes e raízes, temos:

$m + n = -\frac{b}{a} = -\frac{k}{1} \Rightarrow m + n = -k$

$m \cdot n = \frac{c}{a} = \frac{36}{1} \Rightarrow m \cdot n = 36$

Substituindo esses valores em (I):

$-\frac{k}{36} = \frac{5}{12} \Rightarrow k = -15$

Logo, o valor de *k* é -15, e podemos escrever $f(x) = x^2 - 15x + 36$. Basta, agora, calcular $f(-1)$:

$f(-1) = (-1)^2 - 15 \cdot (-1) + 36 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(-1) = 1 + 15 + 36 \Rightarrow f(-1) = 52$

Portanto, $f(-1)$ é igual a 52.

10 Determinar as coordenadas do vértice *V* da parábola que representa a função $f(x) = -5x^2 + 3x - 1$.

Resolução

$f(x) = -5x^2 + 3x - 1 \Rightarrow a = -5, b = 3, c = -1$

$\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-1) = -11$

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{-3}{2(-5)} = \frac{3}{10}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(-11)}{4(-5)} = -\frac{11}{20}$$

Logo, as coordenadas do vértice são $\left(\frac{3}{10}, -\frac{11}{20}\right)$.

11 Determine *a* e *b* de modo que o gráfico da função definida por $y = ax^2 + bx - 9$ tenha o vértice no ponto $(4, -25)$.

Resolução

Do enunciado, temos $x_V = 4$ e $y_V = -25$.

Como $x_V = -\frac{b}{2a}$, temos:

$-\frac{b}{2a} = 4 \Rightarrow -b = 8a \Rightarrow b = -8a$

Substituindo as coordenadas do vértice $(4, -25)$ e o valor de *b* na lei da função dada, obtemos:

$-25 = a \cdot 4^2 + (-8a) \cdot 4 - 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow -25 = 16a - 32a - 9 \Rightarrow -16a = -16 \Rightarrow a = 1$

Como $b = -8a$, temos $b = -8$.

Portanto: $a = 1$ e $b = -8$.

12 Determine as coordenadas do vértice da parábola que representa a função quadrática f(x) cujos zeros são -5 e -3 e o coeficiente *a* é igual a 1.

Resolução

A partir dos zeros da função escrevemos a lei de f(x) na sua forma fatorada.

$f(x) = 1(x + 5)(x + 3) \Rightarrow f(x) = x^2 + 8x + 15$

Pela lei da função temos $a = 1$, $b = 8$ e $c = 15$. Então:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot 1} = -4$$

$y_V = f(x_V) = (-4)^2 + 8 \cdot (-4) + 15 =$

$= 16 - 32 + 15 = -1$

Portanto, o vértice da parábola que representa a função f(x) tem coordenadas $(-4, -1)$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

19. Determine, se existirem, os zeros da função e as coordenadas do vértice da parábola que representa o gráfico das seguintes funções:

a) $y = x^2 - 6x + 5$ $V(3, -4); x_1 = 1; x_2 = 5$

b) $y = 3x^2 - 4x$ $V\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right); x_1 = 0; x_2 = \frac{4}{3}$

c) $y = -x^2 + x - 3$ $V\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$; a função não tem zeros.

d) $y = x^2 - 9$ $V(0, -9); x_1 = -3; x_2 = 3$

e) $y = -6x^2$ $V(0, 0); x = 0$

f) $y = 4x^2 - x + \frac{3}{5}$ $V\left(\frac{1}{8}, \frac{43}{80}\right)$; a função não tem zeros.

20. Faça no caderno um esboço do gráfico das funções a seguir, marcando, se existirem, os zeros da função e o vértice da parábola. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $y = x^2 - 5x + 6$

b) $y = -x^2 + 4$

c) $y = x^2 - 4x + 4$

d) $y = x^2 + 2x + 5$

21. Calcule k de modo que a função $y = kx^2 - 2x + 3$ admita o valor 2 como um de seus zeros. $k = \frac{1}{4}$

22. Dada a função $f(x) = ax^2 + bx + 10$, calcule a e b sabendo que seus zeros são -2 e 5. A seguir, faça um esboço do gráfico dessa função no caderno.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

23. Dada a função $f(x) = (k - 2)x^2 - 3kx + 1$, calcule k para que a soma das raízes seja igual ao seu produto. $k = \frac{1}{3}$

24. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2mx + 16$. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que:

a) a função f tenha duas raízes reais iguais. $m = \pm 4$

b) o gráfico da função f passe pelo ponto $(2, -4)$. $m = -6$

c) a parábola representativa da função seja tangente ao eixo x. $m = \pm 4$

25. O preço m de uma passagem de avião pode ser relacionado à quantidade de passageiros x por meio da relação $m = -0{,}3x + 48$. Assim, podemos concluir que a quantidade de passageiros que faz a receita desse voo ser nula é:

x a) 160
b) 132
c) 100
d) 96
e) 16

26. (UEA-AM) Durante um tratamento com medicina alternativa, uma pessoa deverá ingerir, apenas uma vez ao dia, durante os 10 primeiros dias do mês, determinado número de gotas de um medicamento. Sabendo que o número de gotas foi calculado através da função $g(x) = -x^2 + 10x$, sendo $g(x)$ o número de gotas e x o dia do mês, com $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, é correto afirmar que essa pessoa ingeriu 16 gotas, nos dias

x a) 2 e 8.
b) 2 e 9.
c) 3 e 8.
d) 3 e 9.
e) 5 e 6.

27. (UEMA) Um jogador de vôlei dá um saque (jornada nas estrelas). A bola descreverá uma trajetória parabólica segundo a função $y = -x^2 + 6x + 1$, sendo x e y dados em metros.

O ginásio tem 25 m de altura e a quadra tem formato retangular com dimensões de 10 m de comprimento (lateral) por 5 m de largura (linha de fundo). O saque é feito rente à linha de fundo com altura inicial de 1 m e desloca-se paralelamente à linha lateral da quadra. Pode-se afirmar:

a) a bola cai na quadra do próprio jogador.

x b) a bola cai na quadra do adversário.

c) o lançamento é inválido, pois a bola toca o teto.

d) a bola cai sobre a rede na quadra.

e) a bola cai além da área do adversário.

28. (Unesp-SP) Considere uma parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, em que $a + b + c = 0$.

a) Mostre que o ponto $(1, 0)$ pertence a essa parábola.

b) Mantida ainda a suposição inicial, prove que o ponto $(0, 0)$ pertence à parábola se e somente se $b = -a$.
Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

29. (UFMG) Um certo reservatório, contendo 72 m^3 de água, deve ser drenado para limpeza. Decorridas t horas após o início da drenagem, o volume de água que saiu do reservatório, em m^3, é dado por $V(t) = 24t - 2t^2$. Sabendo-se que a drenagem teve início às 10 horas, o reservatório estará completamente vazio às:

a) 14 horas.
x b) 16 horas.
c) 19 horas.
d) 22 horas.

30. A parábola de equação $y = ax^2$ passa pelo vértice de outra parábola cuja equação é $y = 4x - x^2$. Determine o valor de a. $a = 1$

31. Determine a e b para que o gráfico da função $y = ax^2 + bx + 6$ tenha o vértice no ponto $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.
$a = 1; b = -5$

32. A parábola $y = ax^2 + bx + c$ passa pelos pontos $(1, 2)$, $(0, 3)$ e $(2, 4)$. Determine as coordenadas de seu vértice. $\left(\frac{5}{6}, \frac{47}{24}\right)$

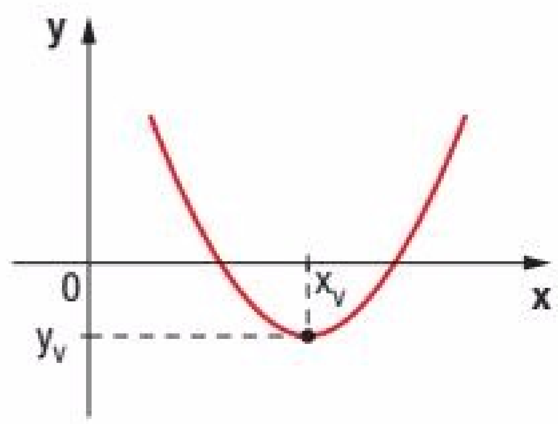
33. A parábola que representa graficamente a função $y = -2x^2 + bx + c$ passa pelo ponto $(1, 0)$ e seu vértice é o ponto de coordenadas $(3, k)$. Determine o valor de k. $k = 8$

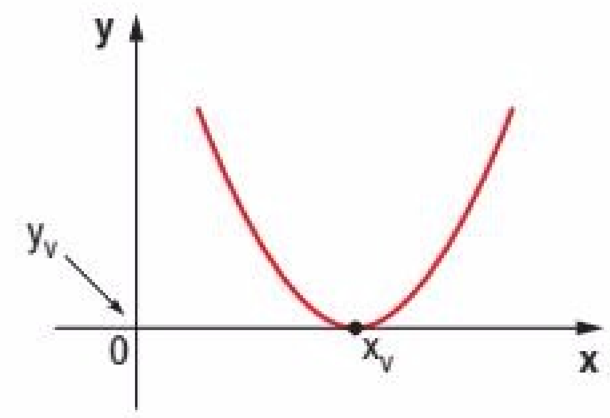
34. Calcule a, b e c de modo que o vértice da parábola representativa da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja $(1, -16)$ e que -3 seja um zero da função.
$a = 1, b = -2, c = -15$

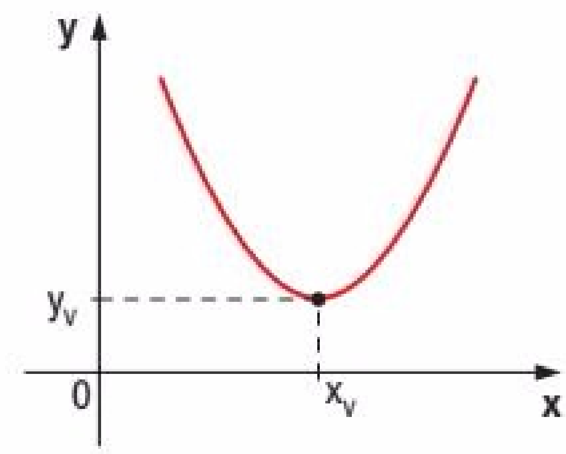
Conjunto imagem, valor mínimo e valor máximo da função quadrática

Ao esboçar o gráfico de uma função quadrática, dependendo da posição da parábola (concavidade para cima ou para baixo), a função *f* tem um **valor mínimo** ou um **valor máximo**, que correspondem à ordenada do vértice da parábola.

Assim, se **a > 0**, a concavidade é voltada para cima e temos três situações possíveis para o gráfico:



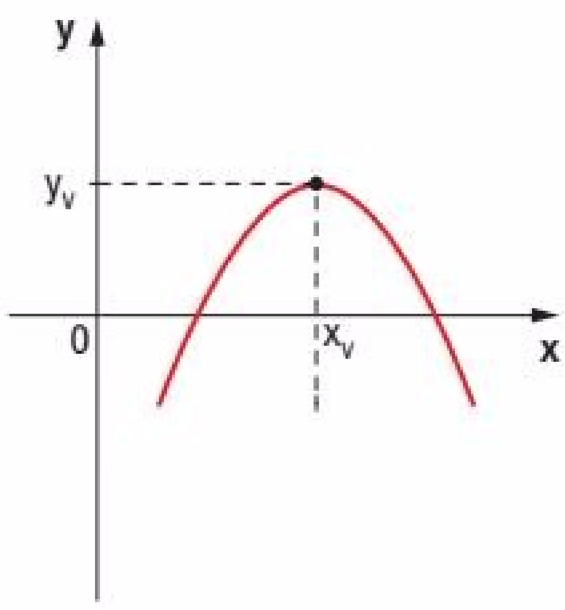


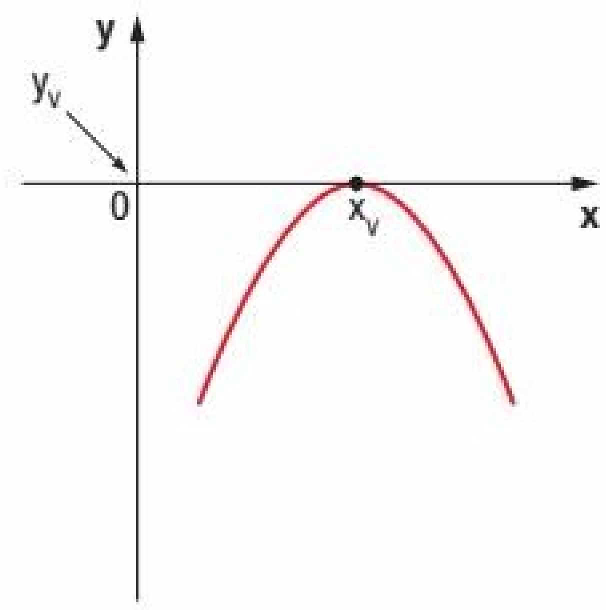


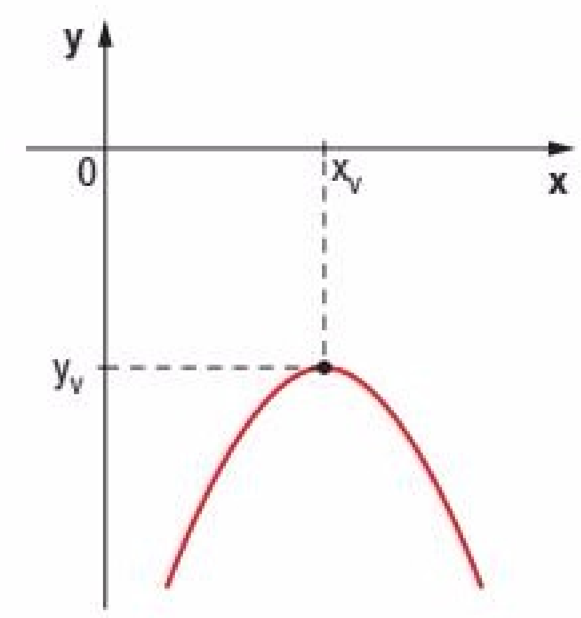
Ilustrações: Editoria de arte

Nos três casos, o vértice $V(x_V, y_V)$ é o **ponto de mínimo** da função e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é chamado **valor mínimo** da função, que ocorre quando *x* é igual a $x_V = -\dfrac{b}{2a}$.

De maneira análoga, se **a < 0**, a concavidade é voltada para cima e temos outras três possibilidades para o gráfico da função:





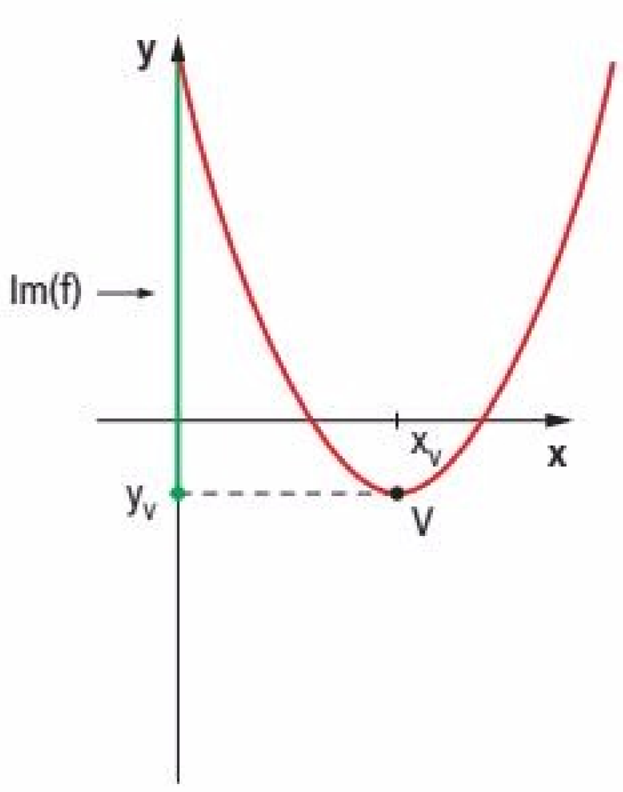


Para esses três casos, o vértice $V(x_V, y_V)$ é o **ponto de máximo** da função e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é chamado **valor máximo** da função, que ocorre quando *x* é igual a $x_V = -\dfrac{b}{2a}$.

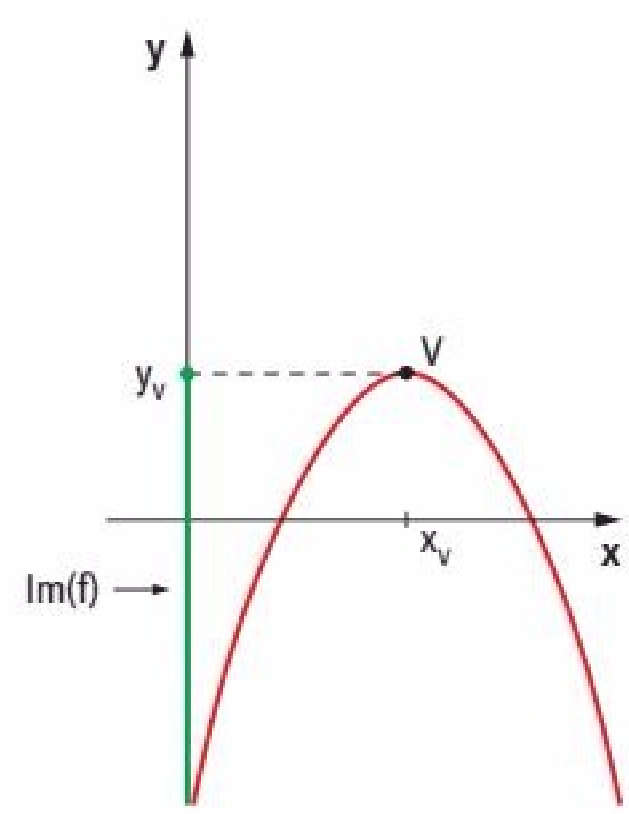
A partir das coordenadas do vértice da parábola, podemos determinar o **conjunto imagem** da função quadrática associada a essa parábola. Para $a > 0$, o vértice *V* é o ponto de mínimo da função e $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo que a função assume, ou seja, é o menor valor da imagem da função.

Para $a < 0$ o raciocínio é análogo. Veja:

- Para $a > 0$, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq y_V\}$



- Para $a < 0$, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq y_V\}$



História da Matemática

Galileu Galilei e a trajetória de um projétil

Galileu, filho de um nobre florentino empobrecido, nasceu em Pisa em 1564, no dia em que faleceu Michelangelo. Aos dezessete anos de idade foi encaminhado pelos pais à Universidade de Pisa para estudar medicina. Um dia, quando assistia a um serviço na Catedral de Pisa, seu espírito se distraiu observando o grande lustre de bronze suspenso da elevada abóbada. A lâmpada tinha sido posta para fora a fim de iluminar mais facilmente e, solta, oscilava para cá e para lá com amplitude que decrescia gradualmente. Usando as batidas de seu pulso para marcar o tempo, ele ficou surpreso ao verificar que o período de uma oscilação da lâmpada independia da amplitude do arco de oscilação. [...]

Relata-se que o interesse de Galileu pela ciência e pela matemática surgiu desse problema e foi estimulado, posteriormente, pela oportunidade de assistir a um curso de geometria na Universidade. Como resultado solicitou da família (e conseguiu) permissão para abandonar a medicina e dedicar-se à ciência e à matemática, campos para os quais possuía forte talento natural. [...]

Devemos a Galileu o moderno espírito científico na forma de uma harmonia entre experiência e teoria. Ele fundou a mecânica dos corpos em queda livre, lançou os fundamentos da dinâmica em geral, e sobre esses fundamentos, mais tarde Newton foi capaz de construir uma ciência. Foi ele o primeiro a perceber a natureza parabólica da trajetória de um projétil no vácuo; e especular sobre leis envolvendo momentos.

Fonte: EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Título original: An introduction to the history of mathematics. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas (SP): Editora da Unicamp, 2004. p. 352-353; 355.

Atividades

Escreva no caderno

1. De acordo com o texto, que fato desencadeou o interesse de Galileu Galilei pela Ciência e pela Matemática?
Ao observar a lâmpada do lustre da Catedral de Pisa, que oscilava com amplitude gradualmente decrescente.

2. Um projétil é lançado do solo para cima e descreve uma trajetória parabólica que pode ser modelada pela função $f(x) = -3x^2 + 12x$.

Desprezando-se a resistência do ar, responda:

a) Qual é a altura máxima que esse projétil atinge? $h = 12$ m

b) Em quanto tempo após o lançamento o projétil voltará ao solo? $t = 4$ s

Exercícios resolvidos

13 Determinar o conjunto imagem da função:

$f(x) = x^2 - 3x + 2$

Resolução

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1$

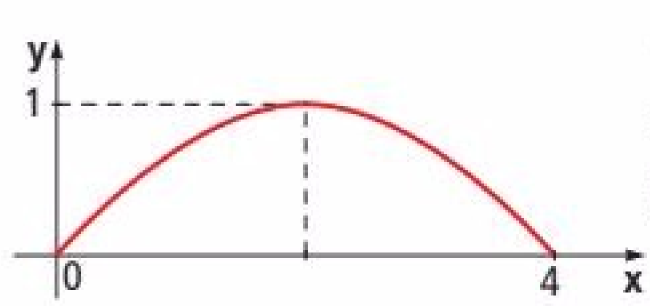
$x_V = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{2}$ $\qquad$ $y_V = \dfrac{-\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{4}$

Como $a > 0$, $f(x)$ tem concavidade para cima e y_V é o valor mínimo da função.

Assim, $f(x) \geqslant -\dfrac{1}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\dfrac{1}{4}\right\}$.

14 As trajetórias dos animais saltadores são, normalmente, parabólicas. A figura mostra aproximadamente o salto de uma rã representado em um sistema de coordenadas cartesianas. O alcance do salto é de 4 metros e a altura máxima atingida é de 1 metro.



Editoria de arte

Com base nesses dados, determine:

a) as coordenadas do vértice da parábola;

b) a função que representa a trajetória da rã.

Resolução

a) Pelo enunciado, temos que a altura máxima que a rã atinge é 1 metro, então $y_V = 1$. Além disso, a trajetória cruza o eixo *x* nos pontos (0, 0) e (4, 0), pontos de partida e chegada da rã.

Como o vértice da parábola está no eixo de simetria, calculamos x_V fazendo a média aritmética das abscissas dos pontos (0, 0) e (4, 0).

$x_V = \dfrac{4+0}{2} \Rightarrow x_V = 2$

Então o vértice da parábola é V(2, 1).

b) Como 0 e 4 são os zeros da função, podemos escrever a forma fatorada da lei:

$y = a(x - 0)(x - 4) = ax^2 - 4ax$

O ponto V(2, 1) faz parte do gráfico da função. Então:

$1 = a \cdot 2^2 - 4 \cdot a \cdot 2 \Rightarrow 1 = 4a - 8a \Rightarrow a = -\dfrac{1}{4}$

Portanto, a função da trajetória da rã é $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + x$.

15 (EsPCEx-SP) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a

a) 4 lotes.
b) 5 lotes.
c) 6 lotes.
d) 7 lotes.
e) 8 lotes.

Resolução

Inicialmente precisamos determinar a expressão do lucro $L(x)$ dessa indústria em função do número de lotes x produzidos em um mês.

Do enunciado temos que $L(x) = V(x) - C(x)$. Então:

$L(x) = V(x) - C(x)$

$L(x) = 3x^2 - 12x - (5x^2 - 40x - 40)$

$L(x) = 3x^2 - 12x - 5x^2 + 40x + 40$

$L(x) = -2x^2 + 28x + 40$

O gráfico da função $L(x)$ é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, pois $a < 0$. Então o ponto de máximo da função é o vértice $V(x_V, y_V)$ e o valor máximo da função é a ordenada do vértice.

Assim, o número de lotes mensais que devem ser produzidos para que a indústria obtenha lucro máximo é o valor de x_V.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{28}{2 \cdot (-2)} = \frac{-28}{-4} = 7$$

Portanto, a resposta é a alternativa **d**.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

35. Determine o conjunto imagem das seguintes funções quadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 10x + 9$ $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -16\}$

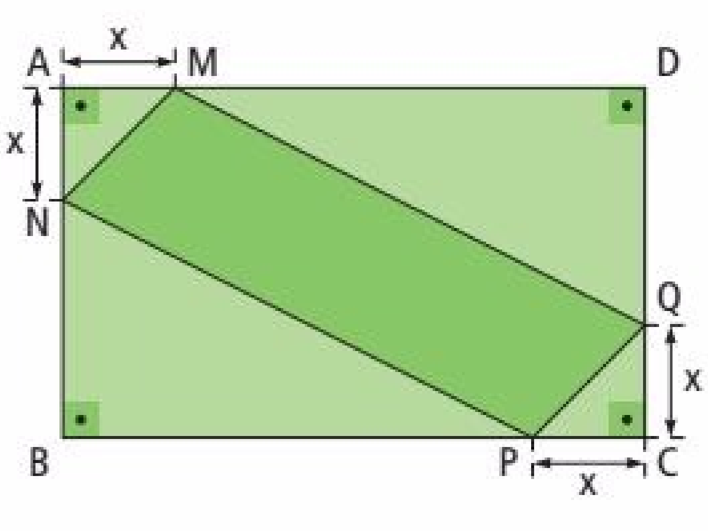
b) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq -\frac{4}{3}\right\}$

c) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, y \geq -\frac{9}{4}\right\}$

d) $f(x) = -2x^2 + 1$ $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

e) $f(x) = x^2 - 6x$ $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -9\}$

36. (UFJF-MG) Sobre os lados do retângulo ABCD, de dimensões 30 cm e 50 cm, marcam-se os pontos M, N, P e Q de forma que a distância dos pontos M e N ao vértice A e dos pontos P e Q ao vértice C sejam iguais a x centímetros. Veja a figura abaixo:



Editoria de arte

Determine o valor de x de modo que o quadrilátero MNPQ tenha área máxima. 20 cm

37. (FGV-SP) Um vidraceiro tem um pedaço de espelho, na forma de um triângulo retângulo cujos lados medem 60 cm, 80 cm e 1 m, e quer recortar um espelho retangular cujo tamanho seja o maior possível. Para ganhar tempo, ele quer que dois dos lados do retângulo estejam sobre os lados do triângulo. Determine a medida dos lados do retângulo e a sua área.
40 cm e 30 cm; 1 200 cm²

38. (FEI-SP) Durante o processo de tratamento, uma peça de metal sofre uma variação de temperatura descrita pela função $f(t) = 2 + 4t - t^2$, $0 < t < 5$. Em que instante t a temperatura atinge seu valor máximo? $t = 2$

39. (UFPE) O custo C, em reais, para se produzir n unidades de determinado produto é dado por $C = 2\,510 - 100n + n^2$. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo mínimo? 50

40. (UEMG) Suponha que numa fábrica de barras de chocolate o custo total da produção, em reais, é dado pela função $C(x) = x^2 - 20x + 600$, em que x é a quantidade de barras produzidas.

Nesse caso, é **CORRETO** afirmar que:

X a) a produção de 10 barras é a que proporciona o custo mínimo da produção.
b) quando são produzidas 20 barras, o custo total da produção é de R$ 400,00.
c) o custo máximo da produção é de R$ 600,00.
d) o custo mínimo da produção é de R$ 650,00.

41. (UEG-GO) O lucro de uma empresa é dado pela relação $R = L + C$, em que L é o lucro, R é a receita e C é o custo de produção. Numa empresa que produziu x unidades de um produto, verificou-se que $C(x) = 2x^2 + 2\,500x + 3\,000$ e $R(x) = x^2 + 7\,500x + 3\,000$.

a) Esboce o gráfico da função L. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.
b) Quantas unidades essa empresa deve produzir para obter o maior lucro possível? 2 500

42. Na sociedade atual, cada vez mais industrial, utilizar os recursos naturais de forma sustentável é primordial para manter o meio ambiente em equilíbrio e não esgotar os recursos fornecidos pelo nosso planeta. No planejamento realizado por empresas para a geração e o descarte de seus produtos, a matemática está envolvida, por exemplo, nos problemas de otimização de matérias-primas. Leia o texto a seguir a respeito da gestão de resíduos e faça o que se pede em cada item.

Gestão de resíduos

Política Nacional de Resíduos Sólidos

A Lei nº 12.305/10, que institui a Política Nacional de Resíduos Sólidos (PNRS) [...] [p]revê a prevenção e a redução na geração de resíduos, tendo como proposta a prática de hábitos de consumo sustentável e um conjunto de instrumentos para propiciar o aumento da reciclagem e da reutilização dos resíduos sólidos (aquilo que tem valor econômico e pode ser reciclado ou reaproveitado) e a destinação ambientalmente adequada dos rejeitos (aquilo que não pode ser reciclado ou reutilizado).

Institui a responsabilidade compartilhada dos geradores de resíduos: dos fabricantes, importadores, distribuidores, comerciantes, o cidadão e titulares de serviços de manejo dos resíduos sólidos urbanos na Logística Reversa dos resíduos e embalagens pré-consumo e pós-consumo.

Cria metas importantes que irão contribuir para a eliminação dos lixões e institui instrumentos de planejamento nos níveis nacional, estadual, microrregional, intermunicipal e metropolitano e municipal; além de impor que os particulares elaborem seus Planos de Gerenciamento de Resíduos Sólidos.

Também coloca o Brasil em patamar de igualdade aos principais países desenvolvidos no que concerne ao marco legal e inova com a inclusão de catadoras e catadores de materiais recicláveis e reutilizáveis, tanto na Logística Reversa quanto na Coleta Seletiva. [...]

Fonte: BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Gestão de resíduos**. Brasília: [20--?]. Disponível em: <http://www.mma.gov.br/responsabilidade-socioambiental/a3p/eixos-tematicos/item/525>. Acesso em: 23 dez. 2015.

Logística reversa

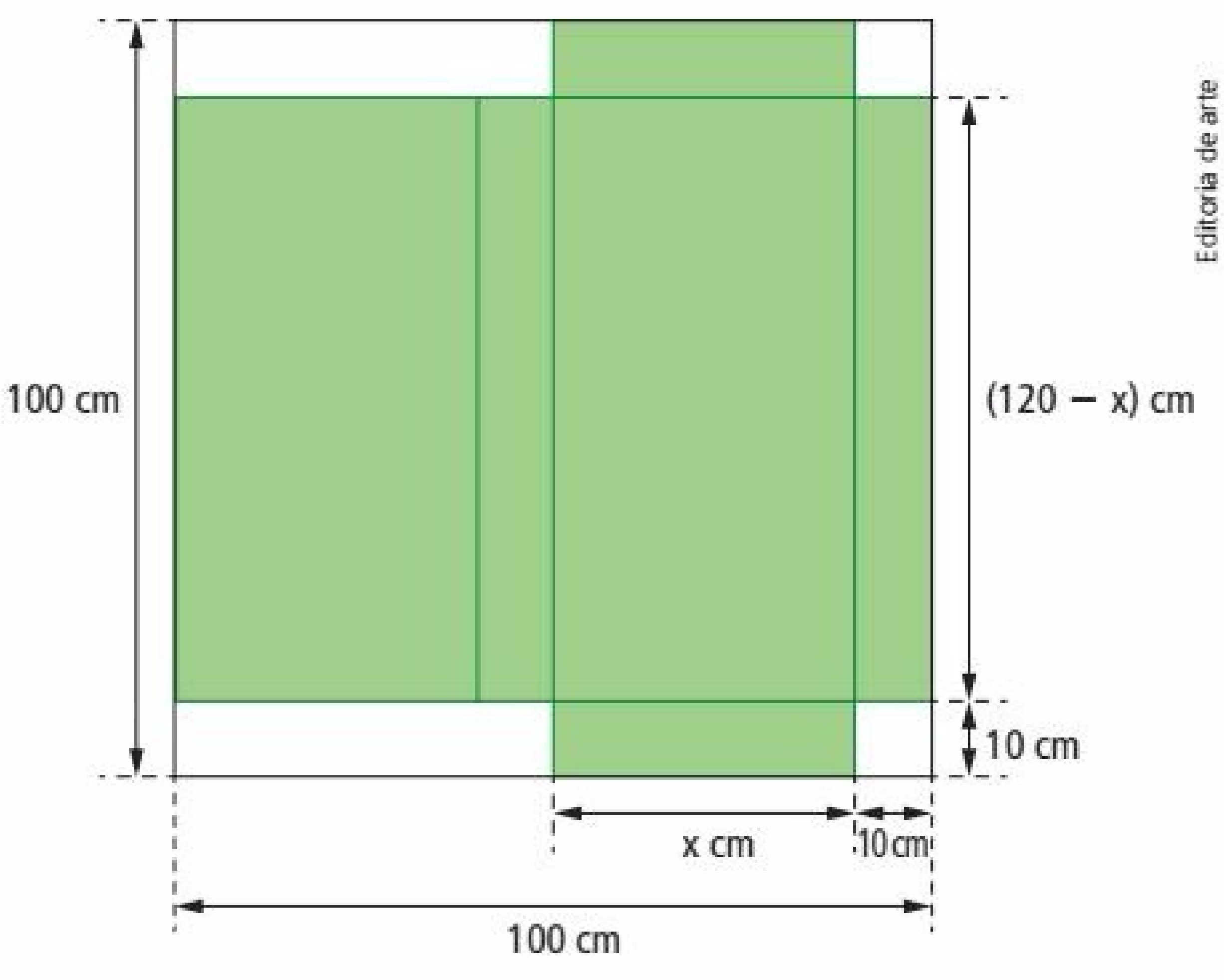
A PNRS define a logística reversa como um "instrumento de desenvolvimento econômico e social caracterizado por um conjunto de ações, procedimentos e meios destinados a viabilizar a coleta e a restituição dos resíduos sólidos ao setor empresarial, para reaproveitamento, em seu ciclo ou em outros ciclos produtivos, ou outra destinação final ambientalmente adequada".

Fonte: BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Logística Reversa**. Brasília: [20--?]. Disponível em: <http://www.mma.gov.br/cidades-sustentaveis/residuos-perigosos/logistica-reversa>. Acesso em: 27 jan. 2016.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) De acordo com o texto, quais são as propostas previstas na PNRS para a redução na geração de resíduos?

b) Uma fábrica de embalagens produz caixas de presente em papelão, a partir de placas quadradas de 1 m × 1 m. As dimensões da caixa estão representadas na figura ao lado.



Editoria de arte

A partir dessas informações, responda:

i) Qual é a sentença que representa a área da placa ocupada pela caixa (A_C), em função da medida x?

ii) Qual é a sentença que representa a área desperdiçada (A_d) da placa na confecção da caixa, em função da medida x?

iii) Qual é o domínio das funções $A_C(x)$ e $A_d(x)$? Justifique sua resposta.

iv) Qual deve ser o valor de x para que o desperdício de material em cada placa seja mínimo?

v) Qual é a área da caixa quando o desperdício for mínimo, em cm²?

vi) Que ação sustentável essa empresa pode realizar com o material não utilizado na linha de produção?

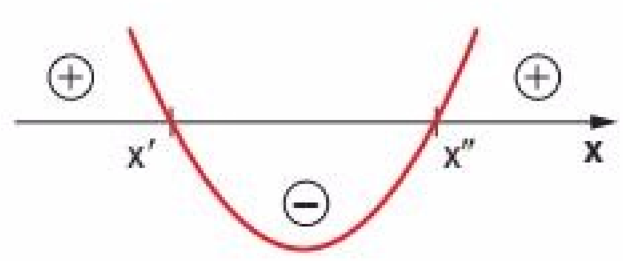
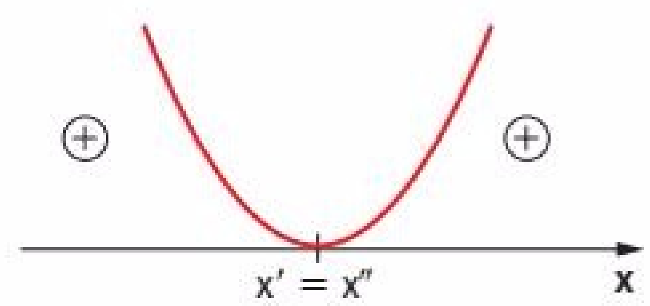
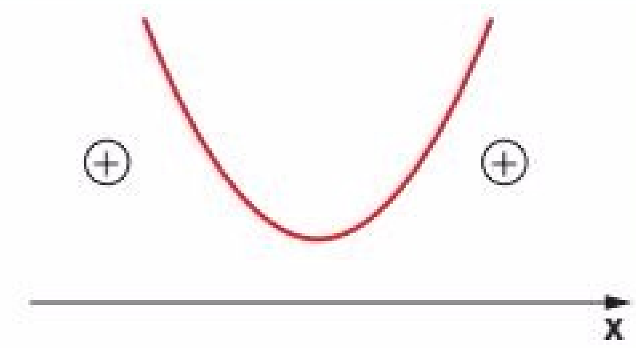
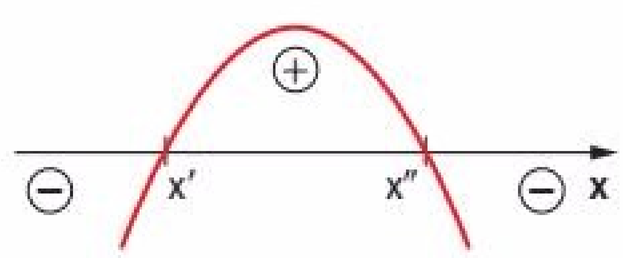
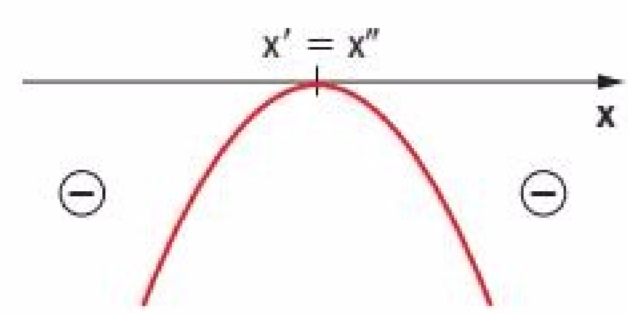
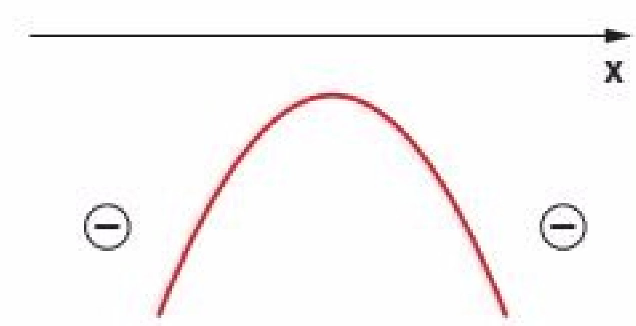
c) Pesquise sobre o conceito associado aos termos: consumo consciente e desperdício. Discuta com os colegas e monte um painel contendo ações sustentáveis que podem ser adotadas por todos para minimizar o desperdício de recursos em casa e na escola.

Estudo do sinal da função quadrática

Vimos que estudar o sinal de uma função $y = f(x)$ significa determinar os valores reais de $x \in D(f)$ que tornam a função positiva ($f(x) > 0$), negativa ($f(x) < 0$) ou nula ($f(x) = 0$).

Para estudar o sinal da função quadrática definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, devemos inicialmente determinar os zeros da função para, em seguida, esboçar o gráfico da função. Por fim, analisamos o esboço construído e determinamos os valores de x que satisfazem $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ e $f(x) = 0$.

De acordo com a concavidade da parábola (relacionada com o coeficiente a) e com a quantidade de zeros (relacionada com o valor de Δ), temos os esboços de gráficos e os estudos de sinais mostrados no quadro a seguir.

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
	A função admite dois zeros reais diferentes (x' < x'')	**A função admite dois zeros reais iguais (x' = x'')**	**A função não admite zeros reais**
$a > 0$	 $f(x) > 0$ para $x < x'$ ou $x > x''$ $f(x) < 0$ para $x' < x < x''$ $f(x) = 0$ para $x = x'$ ou $x = x''$	 $f(x) = 0$ para $x = x' = x''$ $f(x) > 0$ para $x \neq x'$	 $f(x) > 0$ para todo x real
$a < 0$	 $f(x) < 0$ para $x < x'$ ou $x > x''$ $f(x) > 0$ para $x' < x < x''$ $f(x) = 0$ para $x = x'$ ou $x = x''$	 $f(x) = 0$ para $x = x' = x''$ $f(x) < 0$ para $x \neq x'$	 $f(x) < 0$ para todo x real

Ilustrações: Editoria de arte

Inequações do 2º grau

Denominamos **inequação do 2º grau** na incógnita x toda desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas a seguir, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

- $ax^2 + bx + c \geqslant 0$
- $ax^2 + bx + c > 0$
- $ax^2 + bx + c \leqslant 0$
- $ax^2 + bx + c < 0$
- $ax^2 + bx + c \neq 0$

Exemplos:

a) $x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$ b) $-\sqrt{3}x^2 \leqslant 0$ c) $2x^2 - 5x < 0$

No capítulo 4, vimos como resolver inequações do 1º grau. Agora, estudaremos como resolver inequações do 2º grau.

Analogamente ao que foi feito nas inequações do 1º grau, as inequações do 2º grau também podem ser entendidas como uma comparação da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a função nula $g(x) = 0$.

Assim, resolver uma inequação do 2º grau significa determinar os valores reais de x que satisfazem a inequação dada. Isso é feito por meio do estudo do sinal da função quadrática correspondente à inequação.

Observação:

No capítulo 4, também estudamos como resolver inequações-produto do 1º grau. Note que, ao efetuar o produto $(x + a)(x + b)$, obtemos o polinômio do 2º grau $x^2 + (a + b)x + ab$. Ou seja, $(x + a)(x + b)$ é a forma fatorada do polinômio $x^2 + (a + b)x + ab$. Assim, a inequação-produto e a respectiva inequação do 2º grau admitem as mesmas soluções.

Exercícios resolvidos

16 Na função $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$, para quais valores de x obtém-se $f(x) \leqslant 0$?

Resolução

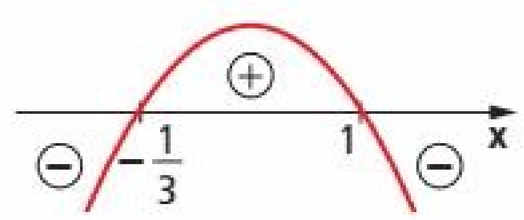
Para determinar os valores de x para os quais $f(x) \leqslant 0$, estudamos o sinal da função. Para isso, determinamos os seus zeros e esboçamos o gráfico. Assim:

$-3x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = 16\ (\Delta > 0) \rightarrow$ dois zeros reais diferentes

$$x = \frac{-2 \pm 4}{-6} \begin{cases} x' = \dfrac{-6}{-6} = 1 \\ x'' = \dfrac{2}{-6} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Como $a < 0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo e o esboço do gráfico é:

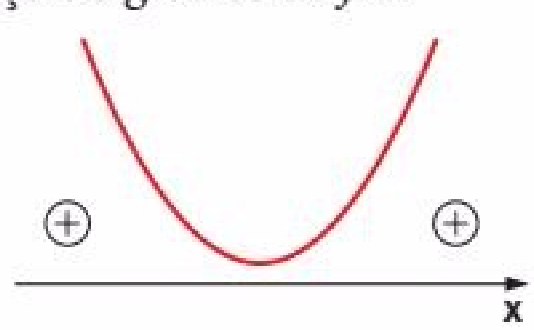


Portanto, $f(x) \leqslant 0$ para $\left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \leqslant -\dfrac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$.

17 Determine p de modo que a função dada por $f(x) = px^2 + (2p - 1)x + p$ assuma valores positivos para todo x real.

Resolução

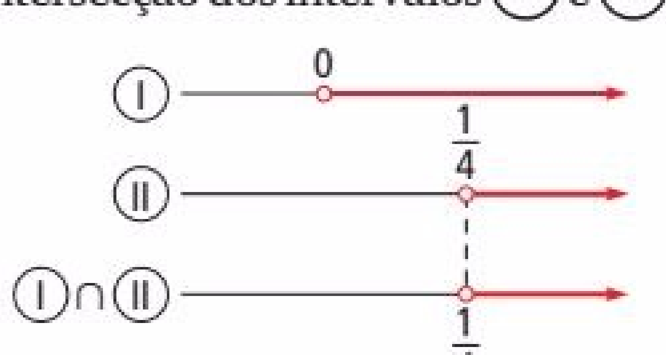
Como se deseja que a função assuma valores positivos para todo x real, devemos ter $f(x) > 0$ para $x \in \mathbb{R}$. Então, o esboço do gráfico de f é:



Para isso:

- A parábola deve ter concavidade para cima:
  $p > 0$ (I)
- f não tem zeros:
  $\Delta < 0 \Rightarrow (2p - 1)^2 - 4 \cdot p \cdot p < 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow 4p^2 - 4p + 1 - 4p^2 < 0 \Rightarrow p > \dfrac{1}{4}$ (II)

Fazendo a intersecção dos intervalos (I) e (II), obtemos:



Logo, para que a função f seja sempre positiva, devemos ter $p > \dfrac{1}{4}$, com $p \in \mathbb{R}$.

18 Resolva a inequação $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Resolução

Para determinar todos os valores reais de x que tornem a expressão $x^2 - 3x + 2$ positiva, estudamos a variação do sinal da função $f(x) = x^2 - 3x + 2$, dando a resposta de acordo com o sinal exigido na inequação.

$x^2 - 3x + 2 = 0$

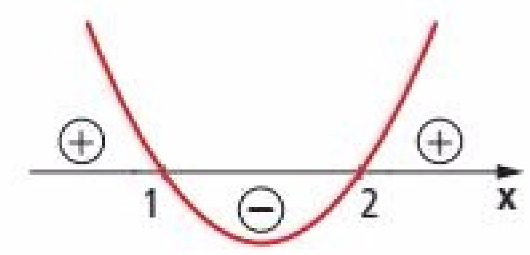
$\Delta = 1 (\Delta > 0) \rightarrow$ dois zeros reais diferentes

$$x = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

$a > 0 \rightarrow$ concavidade para cima

Como devemos ter $f(x) > 0$; $x < 1$ ou $x > 2$.

Então, o conjunto solução da inequação é:



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$.

Ilustrações: Editoria de arte

19 (FGV-SP) O custo diário de produção de um artigo é $C = 50 + 2x + 0{,}1x^2$, onde x é a quantidade diária produzida. Cada unidade do produto é vendida por R$ 6,50. Entre que valores deve variar x para não haver prejuízo?

a) $19 \leqslant x \leqslant 24$
b) $20 \leqslant x \leqslant 25$
c) $21 \leqslant x \leqslant 26$
d) $22 \leqslant x \leqslant 27$
e) $23 \leqslant x \leqslant 28$

Resolução

Considerando que a quantidade diária produzida x é vendida, a receita arrecadada $R(x)$ com a venda diária deve ser maior ou igual ao custo diário para que não haja prejuízo. A receita pode ser expressa por $R(x) = 6{,}5x$. Então:

$R(x) \geqslant C(x)$

$R(x) - C(x) \geqslant 0$

$6{,}5x - (50 + 2x + 0{,}1x^2) \geqslant 0$

$6{,}5x - 50 - 2x - 0{,}1x^2 \geqslant 0$

$-0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50 \geqslant 0$

Resolvendo a inequação:

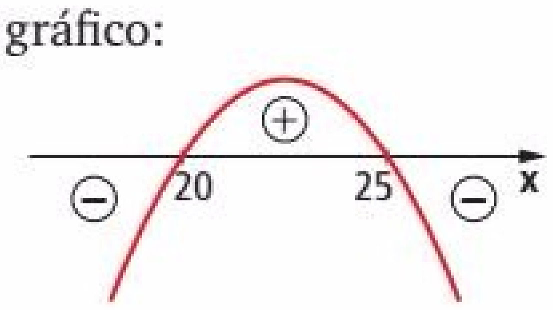
$-0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50 = 0$

$\Delta = 0{,}25\ (\Delta > 0) \rightarrow$ dois zeros reais diferentes

$$x = \frac{-4{,}5 \pm 0{,}5}{-0{,}2} \begin{cases} x' = 20 \\ x'' = 25 \end{cases}$$

$a < 0 \rightarrow$ concavidade para baixo

Esboço do gráfico:



Portanto, não haverá prejuízo quando $20 \leqslant x \leqslant 25$.

Logo, a resposta é a alternativa **b**.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

43. Estude os sinais das seguintes funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) $f(x) = -x^2 + 2x$

c) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$

d) $f(x) = x^2 - x + 10$

e) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

44. Dada a função $f(x) = x^2 - (2m + 1)x + m^2$ determine *m* de modo que $f(x) < 0$ para todo *x* real.

44. $\left\{m \in \mathbb{R} \,\middle|\, m < -\frac{1}{4}\right\}$

45. Dada a função $f(x) = kx^2 - 2kx + k - 1$, calcule os valores de *k* para que f(x) assuma valores negativos para todo *x* real. $\{k \in \mathbb{R} \mid k < 0\}$

46. Resolva as seguintes inequações do 2º grau.

a) $x^2 - 2x - 8 < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$

b) $9x^2 - 8x - 1 \geqslant 0$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leqslant -\frac{1}{9} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$

c) $x^2 - 10x + 25 > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 5\}$

d) $-3x^2 + 2x - 1 > 0$ $S = \varnothing$

e) $-x^2 + 4x - 4 < 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

f) $-x^2 < 2$ $S = \mathbb{R}$

47. Determine o conjunto solução da inequação:

$(2x - 5)(x - 4) - 7 \geqslant (x - 2)(x - 3)$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 7\}$

48. Sabendo que $f(x) = x^2 - 3x + 8$, determine o conjunto solução da inequação $f(x) \geqslant 2f(1)$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

49. (UERJ) Considere as seguintes funções, relativas a uma ninhada de pássaros:

$C = 5 + 10n$
C = custo mensal, em reais, para a manutenção de *n* pássaros

$V = -5n^2 + 100n - 320$
V = valor mensal arrecadado, em reais, com a venda de *n* pássaros, para $4 \leqslant n \leqslant 16$

Sabe-se que o lucro mensal obtido é determinado pela diferença entre os valores de venda *V* e custo *C*.

a) Determine os possíveis valores de *n*, para que haja lucro nas vendas. $5 < n < 13$

b) Calcule o valor de *n* que proporciona o maior lucro possível e o valor, em reais, desse lucro. $n = 9$; R\$ 80,00

50. (UFPB) Um fabricante de picolés distribui diariamente, com seus vendedores, caixas contendo, cada uma, 300 picolés. O lucro diário, em reais, na venda desses picolés, é dado pela função $L(n) = -200n^2 + 1\,600n - 2\,400$, onde *n* é o número de caixas vendidas. Considere as afirmações relativas ao lucro diário:

I. Para $2 < n < 6$ o fabricante terá lucro.

II. O lucro não poderá ser superior a R\$ 1 000,00.

III. O lucro será máximo quando forem vendidos 1 500 picolés.

Está(ão) correta(s) apenas:

x a) I e II
b) I e III
c) II e III
d) I
e) III

Sistemas de inequações

No capítulo anterior, estudamos como resolver sistemas de inequações do 1º grau. Agora estudaremos como resolver sistemas de inequações em que uma ou as duas inequações são do 2º grau.

O procedimento é análogo ao visto anteriormente. Assim, para resolver esses sistemas, devemos solucionar cada inequação separadamente e depois efetuar a intersecção das respectivas soluções, obtendo o conjunto solução do sistema.

Em alguns casos, o sistema de inequações pode ser apresentado como **inequações simultâneas**. Nesse caso, devemos desmembrar a inequação simultânea em duas inequações e resolver o sistema formado por essas inequações.

Por exemplo, a inequação simultânea $3x - 5 \leqslant x^2 - 2x + 1 \leqslant 2x + 4$ pode ser escrita como o sistema de inequações $\begin{cases} 3x - 5 \leqslant x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 2x + 1 \leqslant 2x + 4 \end{cases}$.

Nos exercícios resolvidos a seguir você verá como resolver sistemas de inequações envolvendo inequações do 1º grau e do 2º grau.

Exercícios resolvidos

20 Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema de inequações:

$$\begin{cases} 2x^2 + 8 \geqslant x^2 - 6x \\ x + 5 < 0 \end{cases}$$

Resolução

Denominando as inequações de (I) e (II), temos:

$$\begin{cases} 2x^2 + 8 \geqslant x^2 - 6x \quad \text{(I)} \\ x + 5 < 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I):

$2x^2 + 8 \geqslant x^2 - 6x$

$x^2 + 6x + 8 \geqslant 0$

- Cálculo dos zeros de *f* dada por $f(x) = x^2 + 6x + 8$

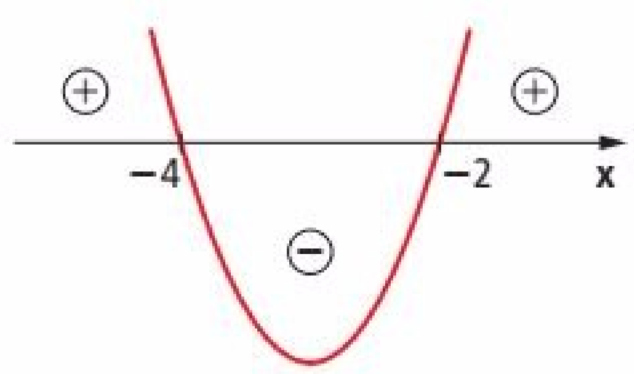
$x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8$

$\Delta = 4 \rightarrow$ dois zeros reais diferentes

$$x = \frac{-6 \pm 2}{2} \begin{cases} x' = -4 \\ x'' = -2 \end{cases}$$

- Esboço do gráfico:



Ilustrações: Editoria de arte

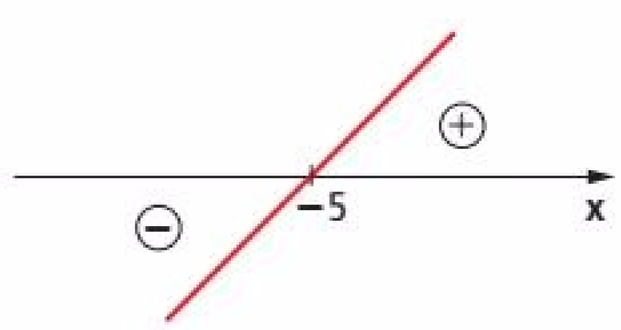
Resolvendo (II):

$x + 5 < 0$

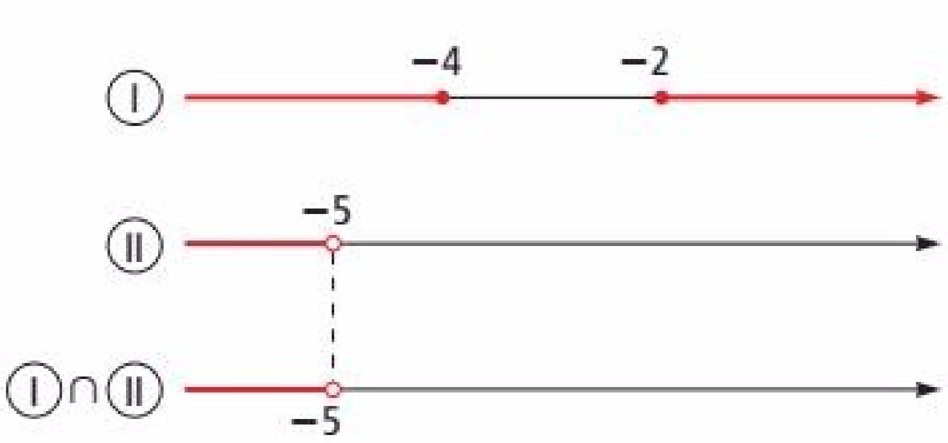
- Cálculo do zero da função dada por $g(x) = x + 5$

$x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

- Esboço do gráfico:



Fazendo a intersecção entre as soluções de (I) e (II), obtemos:



Portanto, o conjunto solução é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$.

21 Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação simultânea $x - 4 < x^2 - 4 \leqslant x + 2$.

Resolução

Inicialmente, escrevemos a inequação simultânea como um sistema de inequações:

$$\begin{cases} x - 4 < x^2 - 4 \quad \text{(I)} \\ x^2 - 4 \leqslant x + 2 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I):

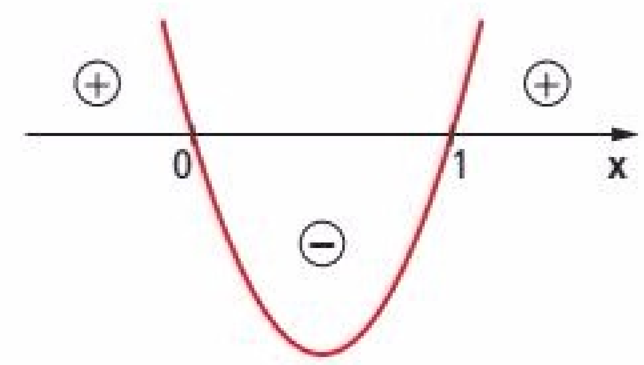
$x - 4 < x^2 - 4$

$x - 4 - x^2 + 4 < 0$

$-x^2 + x < 0$

$x^2 - x > 0$

Esboço do gráfico:



Zeros da função:

$x^2 - x = 0$

$x(x - 1) = 0$

$x' = 0$ e $x'' = 1$

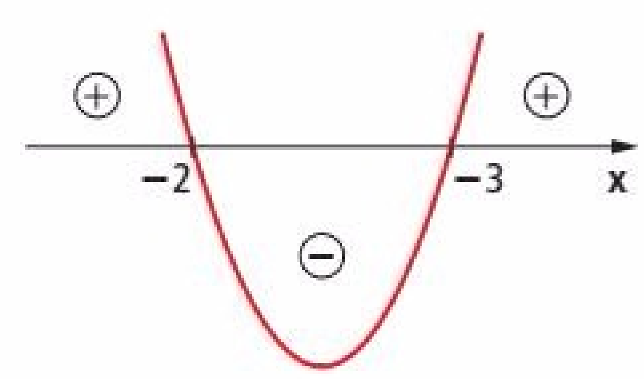
Resolvendo (II):

$x^2 - 4 \leqslant x + 2$

$x^2 - 4 - x - 2 \leqslant 0$

$x^2 - x - 6 \leqslant 0$

Esboço do gráfico:



Zeros da função:

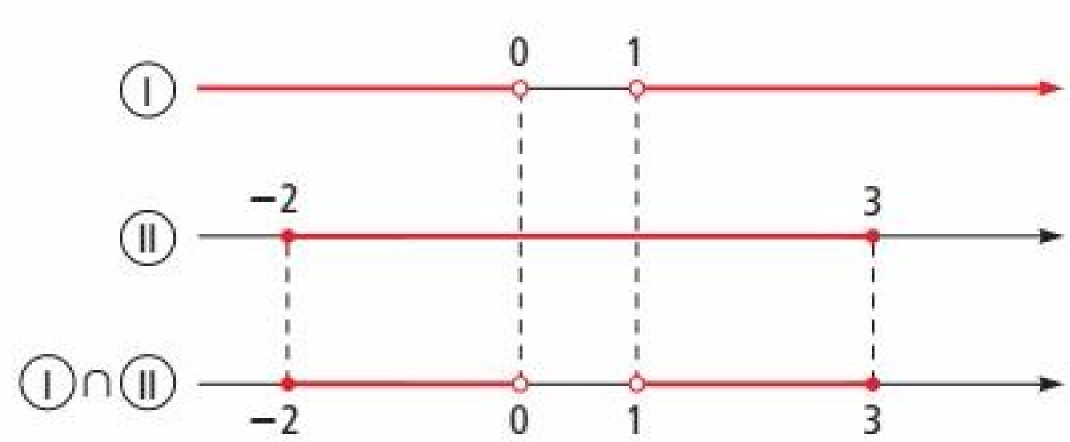
$x^2 - x - 6 = 0$

$\Delta = 25$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$x' = -2$ e $x'' = 3$

Fazendo a intersecção entre as soluções de (I) e (II), obtemos:



Portanto, o conjunto solução é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 0 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$.

Inequação-produto e inequação-quociente

No capítulo anterior estudamos que uma inequação-produto é aquela em que um membro da desigualdade é formado por um produto de funções. Vimos também que uma inequação-quociente tem um quociente de funções em um dos membros. Além disso, estudamos como resolver esses tipos de inequações quando as funções envolvidas são funções polinomiais do 1º grau.

Agora vamos estudar inequações-produto e inequações-quociente que envolvem funções quadráticas.

Lembre-se de que nas inequações-quociente é necessário fazer a restrição dos valores da variável para o denominador, que não pode se anular.

Acompanhe os exercícios resolvidos a seguir que mostram o processo de resolução dessas inequações envolvendo funções quadráticas.

Exercícios resolvidos

22 Resolva a inequação:

$(x^2 - 2x - 3)(-x^2 - 3x + 4) > 0$

Resolução

Para resolver essa inequação-produto, vamos estudar os sinais das funções dadas por:

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = -x^2 - 3x + 4$.

$f(x) = x^2 - 2x - 3$

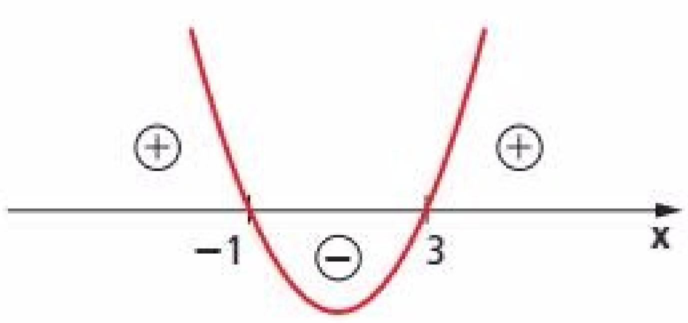
- Zeros da função f(x):

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 \Rightarrow \Delta = 16 \rightarrow$ dois zeros reais diferentes

$$x = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = 3 \end{cases}$$

- Esboço do gráfico de f(x):



Ilustrações: Editoria de arte

$g(x) = -x^2 - 3x + 4$

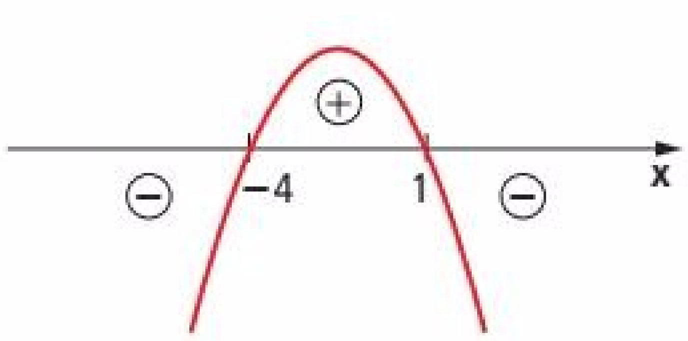
- Zeros da função g(x):

$-x^2 - 3x + 4 = 0$

$\Delta = 9 + 16 \Rightarrow \Delta = 25 \rightarrow$ dois zeros reais diferentes

$$x = \frac{3 \pm 5}{-2} \begin{cases} x' = -4 \\ x'' = 1 \end{cases}$$

- Esboço do gráfico de g(x):



- Quadro de sinais:

	$x < -4$	$-4 < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
f(x)	+	+	−	−	+
g(x)	−	+	+	−	−
f(x) · g(x)	−	⊕	−	⊕	−

Portanto, o conjunto solução da inequação é:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 3\}$.

23 Resolva a inequação $\dfrac{x^2 + 1}{x + 3} < 1$.

Resolução

Como nenhum dos dois membros da inequação é igual a zero, temos que manipular a desigualdade para poder obter um dos membros nulo. Então:

$$\frac{x^2 + 1}{x + 3} < 1 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x + 3} - 1 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1 - (x + 3)}{x + 3} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{x + 3} < 0$$

Assim, devemos resolver a inequação-quociente:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x + 3} < 0, \text{ com } x \neq -3.$$

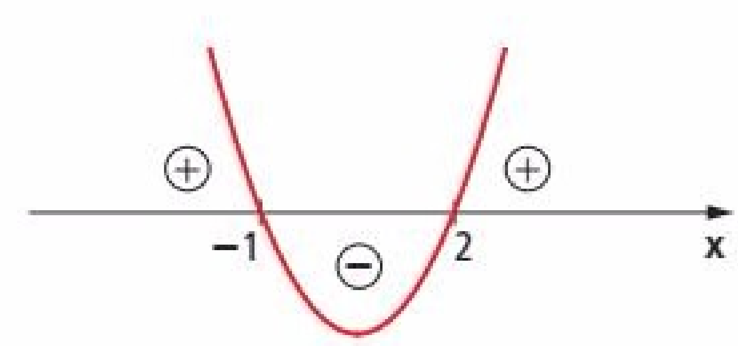
$f(x) = x^2 - x - 2$

- Zeros da função f(x): $x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 8 \Rightarrow \Delta = 9 \rightarrow$ dois zeros reais diferentes

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} x' = -1 \\ x'' = 2 \end{cases}$$

- Esboço do gráfico de f(x):



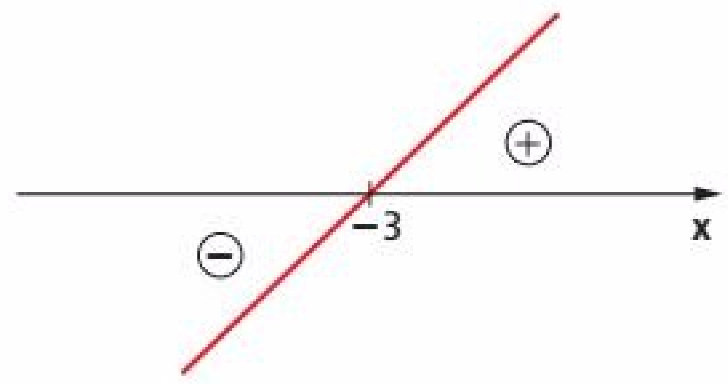
$g(x) = x + 3$

- Zero da função $g(x)$:

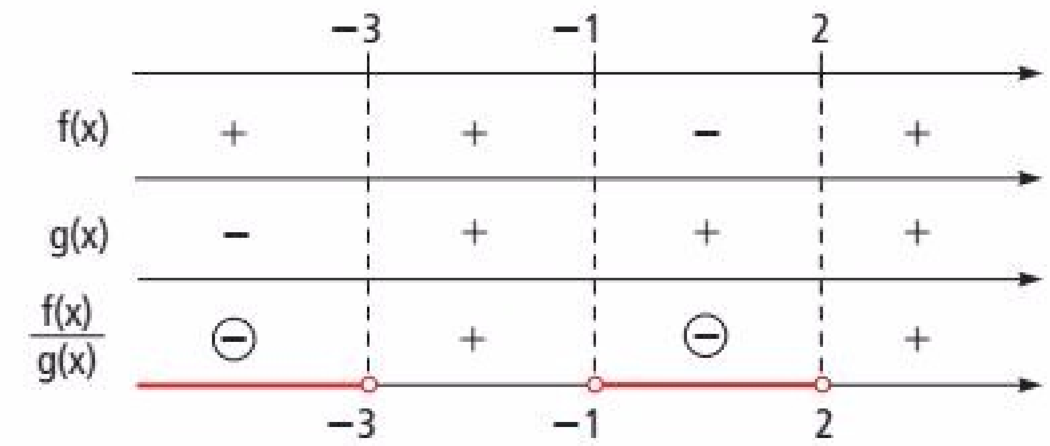
$x + 3 = 0$

$x = -3$

- Esboço do gráfico de $g(x)$:



- Quadro de sinais:



Ilustrações: Editoria de arte

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -1 < x < 2\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

Veja as respostas dos exercícios 53, 54, 58 e 59 na seção *Resoluções* no Manual do Professor.

51. Determine o conjunto dos valores de *x* que satisfazem os sistemas de inequações a seguir:

a) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 2x < 0 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

b) $\begin{cases} x^2 - 2x \geqslant 0 \\ -x^2 + 2x + 3 > 0 \end{cases}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 0 \text{ ou } 2 \leqslant x < 3\}$

c) $\begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases}$ $S = \varnothing$

52. Dada a função quadrática $f(x) = x^2 - 1$, determine os valores reais de *x* tal que $1 < f(x) \leqslant 3$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2} < x \leqslant 2\}$

53. Resolva as seguintes inequações:

a) $0 < x^2 + x - 12 < 8$

b) $-4 < x^2 + 2x \leqslant 3x$

54. Resolva as seguintes inequações-produto:

a) $(x^2 - 2x - 3) \cdot (2x^2 - 5x + 2) < 0$

b) $(x^2 - 9) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + 5x) \leqslant 0$

55. Resolva as seguintes inequações-quociente:

a) $\dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 5x + 4} > 0$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } 2 < x < 4 \text{ ou } x > 5\}$

b) $\dfrac{x^2}{x - 2} < 8$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

56. Determine o conjunto solução das inequações:

a) $1 + \dfrac{x + 1}{x} \leqslant \dfrac{x}{x - 1}$

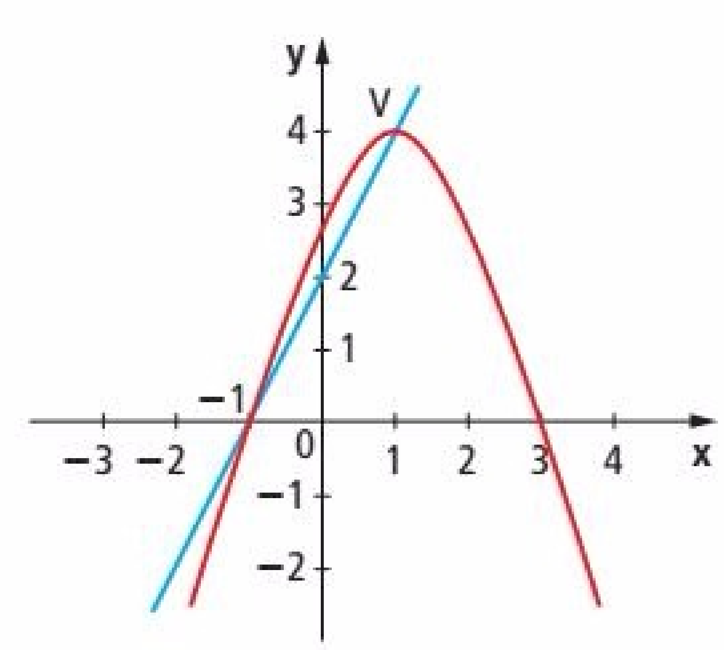
b) $\dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 - 3x + 1} \leqslant 1$

57. Determine o conjunto solução do sistema:

$\begin{cases} x(2x - 1)(-x + 6) \leqslant 0 \\ (4x + 1)(-2x + 5) > 0 \end{cases}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$

58. (Fuvest-SP) Resolva a inequação $\dfrac{x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - 3x}} \geqslant 0$.

59. (Unirio-RJ) A figura a seguir representa o gráfico de duas funções polinomiais reais: uma de 1º grau, $f(x) = px + q$, e a outra de 2º grau, $g(x) = ax^2 + bx + c$. Observe que os pontos $(-1, 0)$, $(0, 2)$ e o vértice *V* da parábola pertencem ao gráfico de *f* e que os pontos $(-1, 0)$ e $(3, 0)$ pertencem ao gráfico de *g*.



a) Determine o valor dos números reais *p*, *q*, *a*, *b* e *c*.

b) Resolva, no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, a inequação $\dfrac{g(x)}{f(x)} \geqslant 0$.

60. a) $c = -4$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -4 \leqslant x < \dfrac{1}{2}\right\}$

60. (UFMG) Resolva os itens:

a) Determine o valor de *c* para que a função dada por $f(x) = \dfrac{(x^2 + 1) \cdot (x + 4)}{cx + 2}$ satisfaça a igualdade $f(1) = f(2)$.

b) Para o valor de *c* obtido no item anterior, determine todos os valores de *x* para os quais $f(x) \geqslant 0$.

56. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \leqslant x < 0 \text{ ou } 1 < x \leqslant \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right\}$ b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \leqslant -1 \text{ ou } \dfrac{1}{2} < x < 1 \text{ ou } x \geqslant 2\right\}$

CAPÍTULO 6

Função modular

Dando continuidade ao estudo das funções, neste capítulo vamos estudar o módulo de um número real e a função modular, mas antes veremos como se comportam as funções definidas por mais de uma sentença.

Função definida por mais de uma sentença

Estudamos até aqui as funções afim e quadrática, que são definidas por uma única sentença. No entanto, algumas situações necessitam de mais de uma lei de formação para serem modeladas, como é o caso da situação apresentada a seguir.

O Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF) é um imposto que incide sobre a renda adquirida por contribuintes residentes no país ou residentes no exterior que recebam rendimentos de fontes no Brasil. O IRPF apresenta alíquotas variáveis e é calculado em função da renda de cada contribuinte.

Alíquota é o percentual aplicado sobre a base de cálculo para determinar o valor de um tributo.

Observe a tabela de incidência mensal do IRPF para o ano-calendário de 2015:

Base de cálculo (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IRPF (R$)
Até 1 903,98	–	–
De 1 903,99 até 2 826,65	7,5	142,80
De 2 826,66 até 3 751,05	15	354,80
De 3 751,06 até 4 664,68	22,5	636,13
Acima de 4 664,68	27,5	869,36

Fonte: BRASIL. Receita Federal do Brasil. **IRPF** (Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas). Brasília: 2015. Disponível em: <http://idg.receita.fazenda.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica#tabelas-de-incid-ncia-mensal>. Acesso em: 29 jan. 2016.

Vamos calcular o imposto que incide sobre a renda de um trabalhador que teve como base de cálculo mensal o valor de R$ 3 000,00. Pela tabela, devemos aplicar a alíquota de 15% sobre a base de cálculo e deduzir R$ 354,80 desse valor. Observe:

$$\text{R\$ } 3\,000{,}00 \times 15\% - \text{R\$ } 354{,}80 = \text{R\$ } 450{,}00 - \text{R\$ } 354{,}80 = \text{R\$ } 95{,}20$$

Dessa forma, o imposto de renda que incide sobre uma base de cálculo de R$ 3 000,00 mensais é de R$ 95,20.

A partir da tabela do IRPF para o ano-calendário de 2015, considerando *x* a base de cálculo, em reais, e f(x) a contribuição mensal do imposto, também em reais, podemos representar a situação por uma função definida por 5 sentenças. Veja:

Para uma base de cálculo mensal abaixo de R$ 1 903,38, o contribuinte está isento do pagamento de imposto de renda.

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leqslant 1903{,}98 \\ 0{,}075x - 142{,}80, \text{ se } 1903{,}99 \leqslant x \leqslant 2826{,}65 \\ 0{,}15x - 354{,}80, \text{ se } 2826{,}66 \leqslant x \leqslant 3751{,}05 \\ 0{,}225x - 636{,}13, \text{ se } 3751{,}06 \leqslant x \leqslant 4664{,}68 \\ 0{,}275x - 869{,}36, \text{ se } x > 4664{,}68 \end{cases}$$

Funções como a função f(x), que modela a situação apresentada acima, são denominadas **funções definidas por mais de uma sentença**.

Exemplos de funções definidas por mais de uma sentença:

a) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 5 \\ x + 1, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \leqslant 2 \\ x - 1, \text{ se } 2 < x \leqslant 5 \\ 6, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

Módulo de um número real

O **valor absoluto** ou **módulo** de um número real *x*, que indicaremos por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

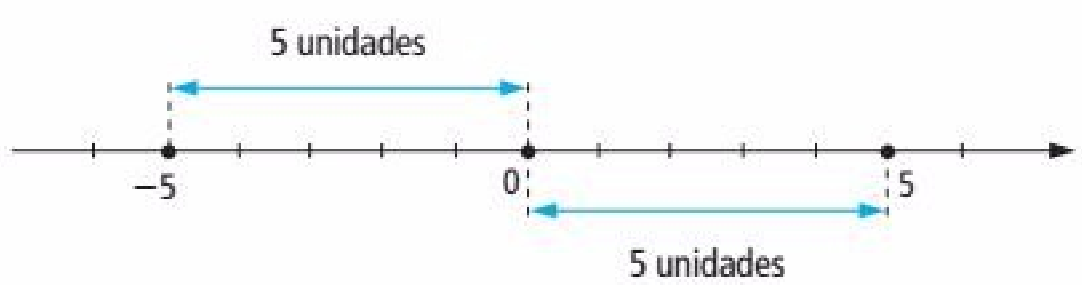
Lê-se: módulo de *x*.

A notação $|x|$ foi introduzida pelo matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

Ou seja:

- o módulo de um número real positivo ou nulo é igual a ele mesmo.
  Exemplos:
  a) $|+5| = +5 = 5$ b) $|+\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ c) $|0| = 0$
- o módulo de um número real negativo é igual ao seu oposto.
  Exemplos:
  a) $|-3| = -(-3) = 3$ b) $|-\sqrt{3}| = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$ c) $\left|-\frac{7}{5}\right| = -\left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{5}$

Geometricamente, o módulo de um número real *x* é igual à distância do ponto correspondente a esse número até a origem da reta real. Observe.



$|-5| = 5 \longrightarrow$ Distância entre o ponto correspondente a -5 e a origem.

$|+5| = 5 \longrightarrow$ Distância entre o ponto correspondente a $+5$ e a origem.

De modo geral, sendo $a > 0$, se $|x| = a$, então $x = a$ ou $x = -a$.

Em particular, se $|x| = 0$, então $x = 0$.

Por exemplo, para saber o valor de *x* tal que $|x| = 4$, basta verificar quais valores distam 4 unidades da origem. Nesse caso, são $+4$ e -4.

Logo, se $|x| = 4$, então $x = -4$ ou $x = +4$.

Propriedades

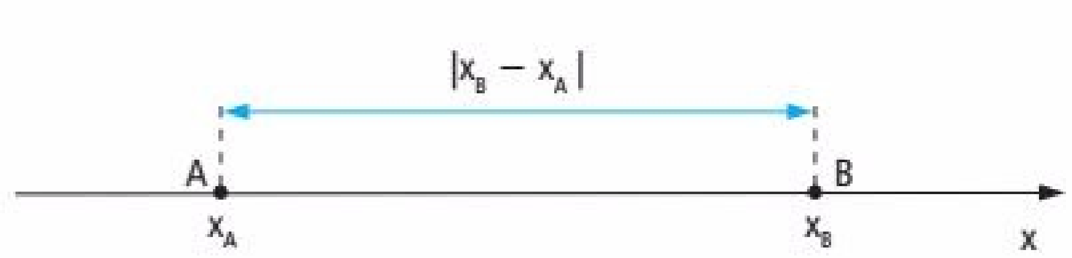
É possível demonstrar que são válidas as seguintes propriedades envolvendo módulo para quaisquer números reais *x* e *y*:

- $|x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0$

Professor, para auxiliar o aluno a compreender a propriedade $\sqrt{x^2} = |x|$ apresente alguns exemplos, como:
a) Se $x = 3$, então $\sqrt{x^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3 = x$
b) Se $x = -3$, então $\sqrt{x^2} = \left(\sqrt{-3}\right)^2 = \sqrt{9} = 3 = -x$

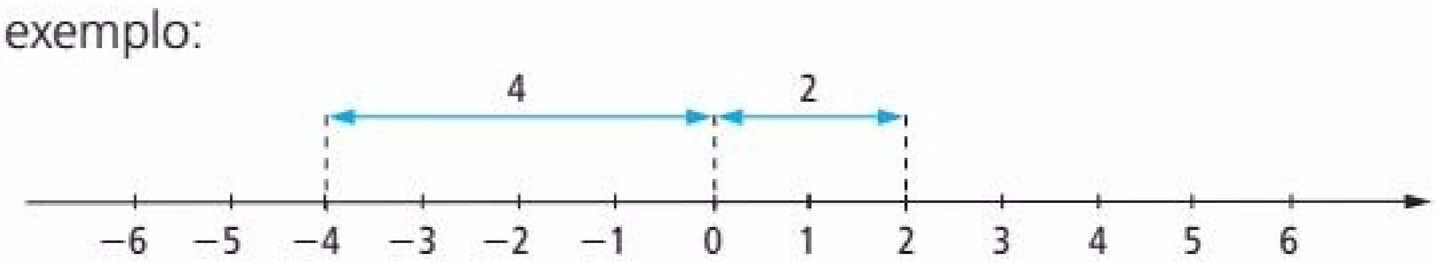
Distância entre dois pontos na reta real

Dados dois pontos *A* e *B* na reta real, correspondentes aos números reais x_A e x_B, a distância entre eles é dada por $|x_B - x_A|$.



Note que:
$|x_A - x_B| = |x_B - x_A|$

Por exemplo:



Ilustrações: Editoria de arte

Logo, a distância entre -4 e 2 é $|2 - (-4)| = |2 + 4| = |6| = 6$.

Exercícios resolvidos

1 Dada f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ x - 2, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$, determine:

a) $f(0)$ b) $f(-2)$ c) $f(\sqrt{5})$

Resolução

a) $0 \geq 0$, temos: $f(x) = x - 2 \Rightarrow f(0) = 0 - 2 = -2$

Portanto, $f(0) = -2$

b) $-2 < 0$, temos: $f(x) = 1 \Rightarrow f(-2) = 1$

Portanto, $f(-2) = 1$.

c) $\sqrt{5} \geq 0$, temos: $f(x) = x - 2 \Rightarrow f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$

Portanto, $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$.

2 Simplifique a expressão $|x - 1| + |x - 3|$ sabendo que *x* é um número real tal que:

a) $x \geq 3$ b) $1 \leq x \leq 2$ c) $x < 1$

Resolução

Pela definição de módulo, temos:

$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ -x + 1, \text{ se } x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$ e

$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \\ -x + 3, \text{ se } x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$

a) Para $x \geq 3$, temos:

$|x - 1| + |x - 3| = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$

b) Para $1 \leq x \leq 2$, temos:

$|x - 1| + |x - 3| = x - 1 - x + 3 = 2$

c) Para $x < 1$, temos:

$|x - 1| + |x - 3| = -x + 1 - x + 3 = -2x + 4$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, \text{ se } x < 0 \\ x - 2, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$.

Determine os possíveis valores de *x* para:

a) $f(x) = 0$ $-\frac{4}{3}$ ou 2 b) $f(x) = -2$ -2 ou 0

2. (UFRN) Ao pesquisar preços para a compra de uniformes, duas empresas, E_1 e E_2, encontraram, como melhor proposta, uma que estabelecia o preço de venda de cada unidade por $120 - \frac{n}{20}$, onde *n* é o número de uniformes comprados, com o valor por uniforme se tornando constante a partir de 500 unidades.

Se a empresa E_1 comprou 400 uniformes e a E_2, 600, na planilha de gastos deverá constar que cada uma pagou pelos uniformes, **respectivamente**:

a) R$ 38 000,00 e R$ 57 000,00.

b) R$ 40 000,00 e R$ 54 000,00.

x c) R$ 40 000,00 e R$ 57 000,00.

d) R$ 38 000,00 e R$ 54 000,00.

3. De acordo com a definição de módulo, calcule:

a) $|3 - 5|$ 2

b) $|-3 + 5|$ 2

c) $|-3 - 5|$ 8

d) $|-1| + |-6|$ 7

e) $|-|-5||$ 5

f) $|-2| - |-10|$ -8

4. Calcule o valor de *y* em cada caso.

a) $y = |\sqrt{5} - 2| - |2 - \sqrt{5}|$ 0

b) $y = |\sqrt{7} - |1 - \sqrt{7}||$ 1

5. Aplicando a definição de módulo, determine o valor numérico de:

a) $2x - |x|$, para $x = -4$. -12

b) $\left|\frac{4x + 1}{5 - 2x}\right|$, para $x = -1$. $\frac{3}{7}$

c) $|x^3 + x| - |x^2 - 3x + 1|$, para $x = -2$. -1

6. Simplifique a expressão algébrica $|x| + |x + 2|$ para os seguintes valores de *x*:

a) $x < -2$ $-2x - 2$ b) $-2 \leq x < 0$ 2 c) $x \geq 0$ $2x + 2$

7. Escreva a expressão $|x + 3| + |2x - 1|$ sem os módulos, para $x > 3$. $3x + 2$

8. Qual é o conjunto de valores assumidos pela expressão

$$\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$$

sendo *a*, *b* e *c* números reais não nulos e:

a) *a*, *b* e *c* positivos? 3

b) *a*, *b* e *c* negativos? -3

9. Sendo *a* e *b* números reais quaisquer, quais sentenças a seguir são verdadeiras? A sentença II.

I. Se $|a| < |b|$, então $a < b$ F

II. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ V

III. $|a + b| = |a| + |b|$ F

IV. $|-|a|| = -a$ F

10. Simplifique a fração: $\frac{|x - 2|}{x - 2}$, $x \neq 2$. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

Função modular

Estudamos que para cada número real *x* existe um único número $|x|$ correspondente. Com base nessa definição podemos determinar uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número real ao seu módulo, definida por mais de uma sentença.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ é denominada **função modular** ou **função módulo**.

Aplicando a definição de módulo de um número real, a função modular pode ser escrita como:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

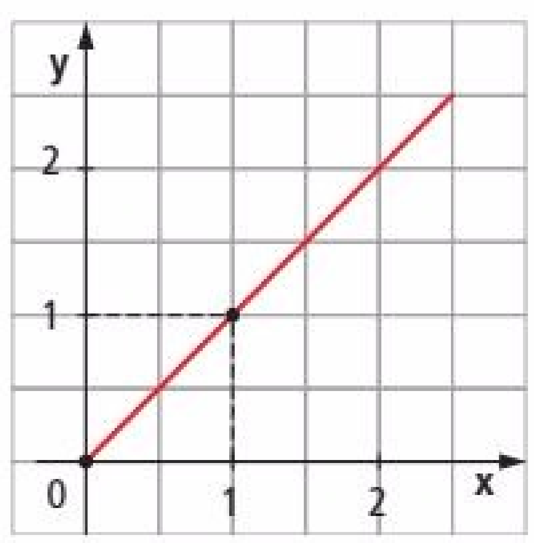
Gráfico da função modular

Para construir o gráfico da função modular, vamos traçar o gráfico de cada sentença que compõe a função separadamente no plano cartesiano.

Assim, sendo $f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$, temos:

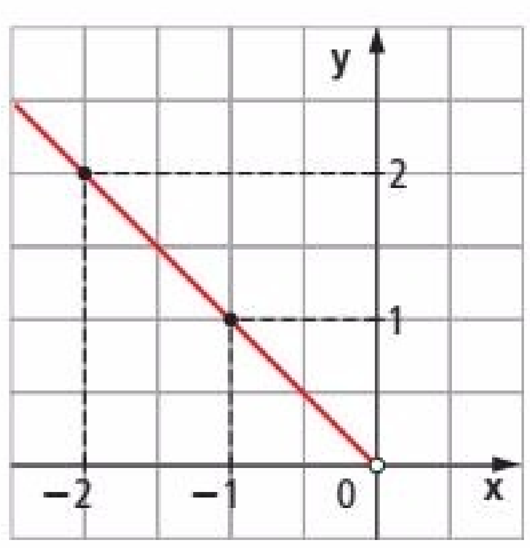
1º: $f(x) = x$ para $x \geqslant 0$

x	f(x)
0	0
1	1



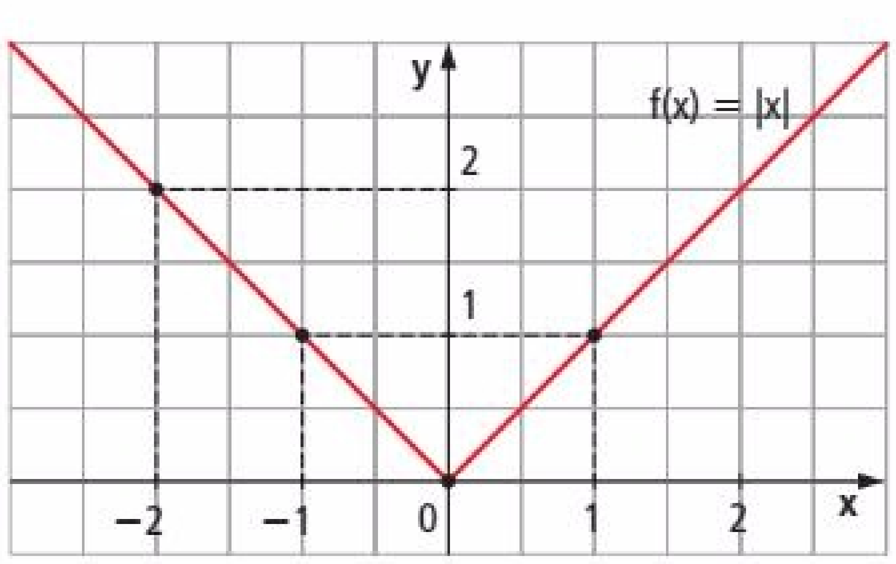
Ilustrações: Editoria de arte

2º: $f(x) = -x$ para $x < 0$



x	f(x)
−1	1
−2	2

Reunindo os dois intervalos em um mesmo sistema cartesiano, temos o gráfico da função modular $f(x) = |x|$.

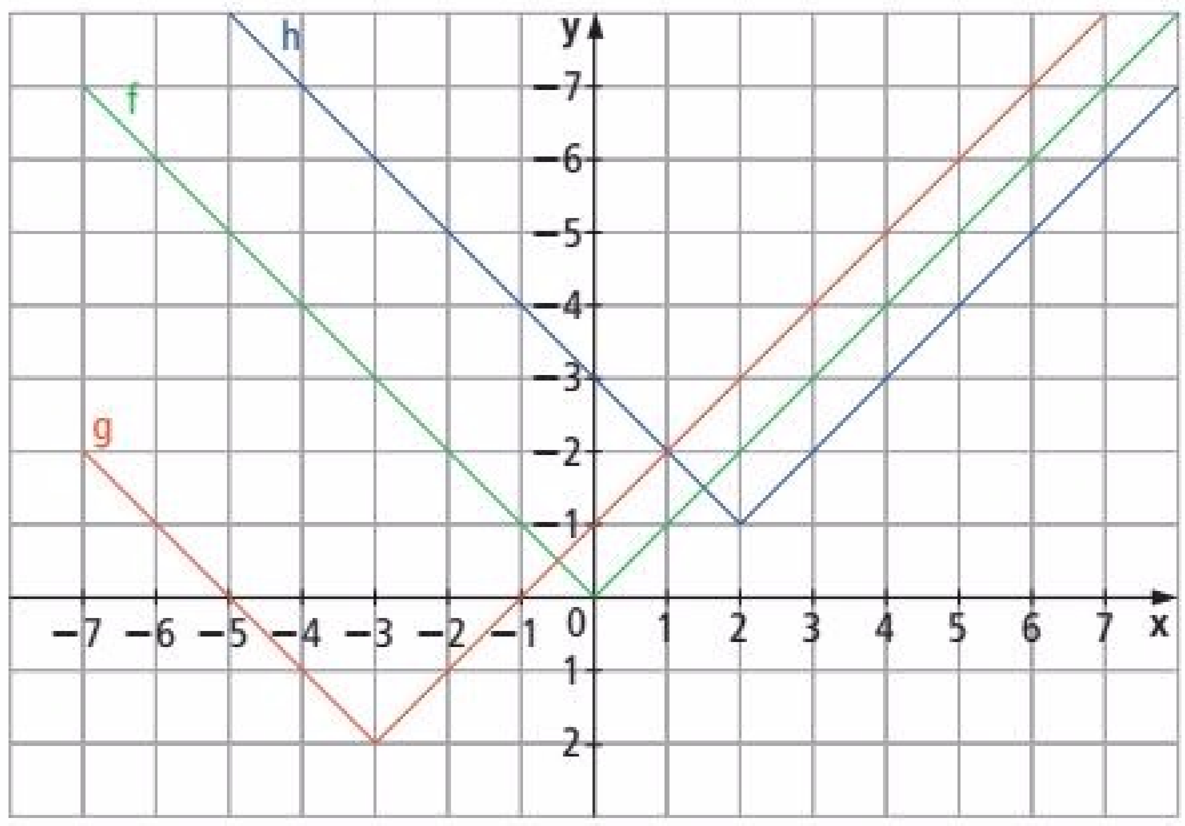


O conjunto imagem da função modular é $Im(f) = \mathbb{R}_+$ e seu domínio é $D(f) = \mathbb{R}$.

Outros gráficos de funções modulares

Veja os gráficos das funções a seguir no plano cartesiano:

$f(x) = |x|$ $\qquad$ $g(x) = |x + 3| - 2$ $\qquad$ $h(x) = |x - 2| + 1$



Ilustrações: Editoria de arte

Observe que os gráficos de $g(x)$ e $h(x)$ são congruentes ao gráfico de $f(x)$ e que:

- o gráfico de $g(x) = |x + 3| - 2$ é igual ao gráfico de $f(x) = |x|$ após uma translação de 3 unidades para a esquerda seguida de outra de 2 unidades para baixo.
- o gráfico de $h(x) = |x - 2| + 1$ é igual ao gráfico de $f(x) = |x|$ após uma translação de 2 unidades para a direita seguida de outra de 1 unidade para cima.

De modo geral, seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x + a| + b$, o gráfico dessa função é congruente ao gráfico de $f(x) = |x|$ e podemos considerar os seguintes casos:

- $b > 0$, o gráfico é transladado para cima em *b* unidades;
- $b < 0$, o gráfico é transladado para baixo em $|b|$ unidades;
- $a > 0$, o gráfico é transladado para a esquerda em *a* unidades;
- $a < 0$, o gráfico é transladado para a direita em $|a|$ unidades;

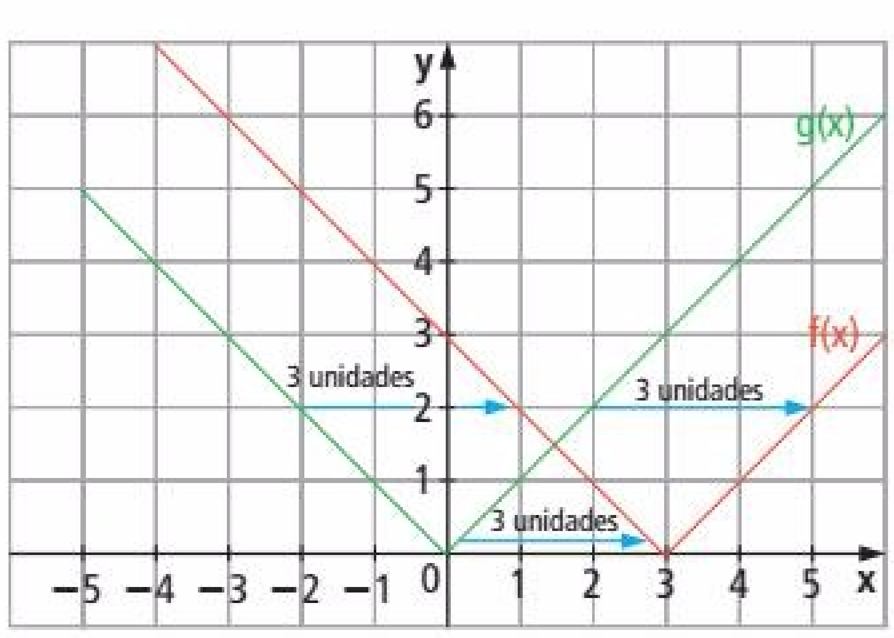
Exercícios resolvidos

3 Construa o gráfico da função $f(x) = |x - 3|$.

Resolução

O gráfico da função $f(x) = |x - 3|$ é igual ao gráfico de $g(x) = |x|$ após uma translação de 3 unidades para a direita.

Assim, para traçar o gráfico de $f(x)$, traçamos o gráfico de $g(x)$ e em seguida realizamos a translação conveniente.

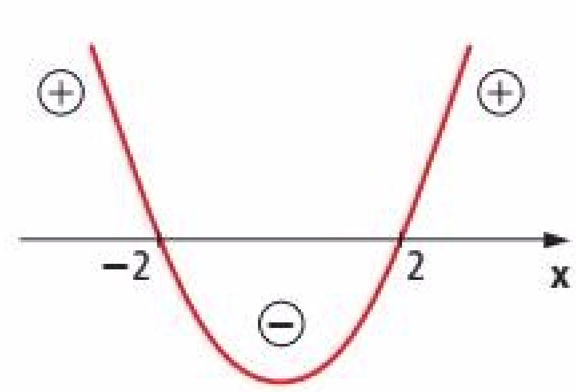


4 Esboce o gráfico de função dada por $f(x) = |x^2 - 4|$ e determine seu conjunto imagem.

Resolução

Podemos escrever a função $f(x)$ como uma função definida por mais de uma sentença. Para isso, vamos estudar o sinal de $y = x^2 - 4$ para definir os intervalos de *x* para cada sentença da função. Então:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$



Então:

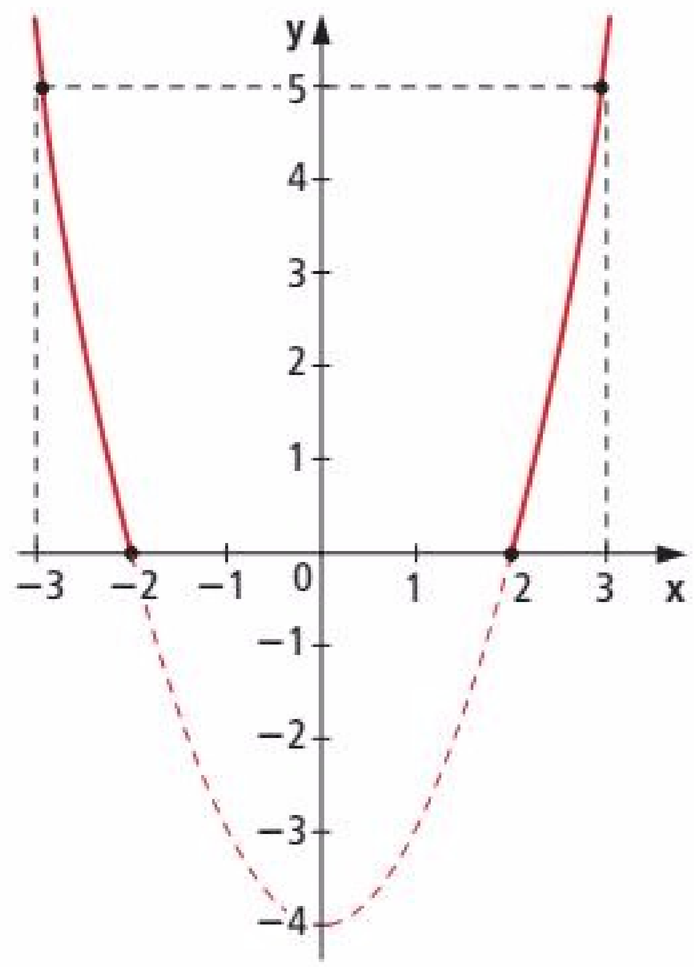
$x^2 - 4 \geqslant 0$ para $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$

$-x^2 + 4 < 0$ para $-2 < x < 2$

Logo:

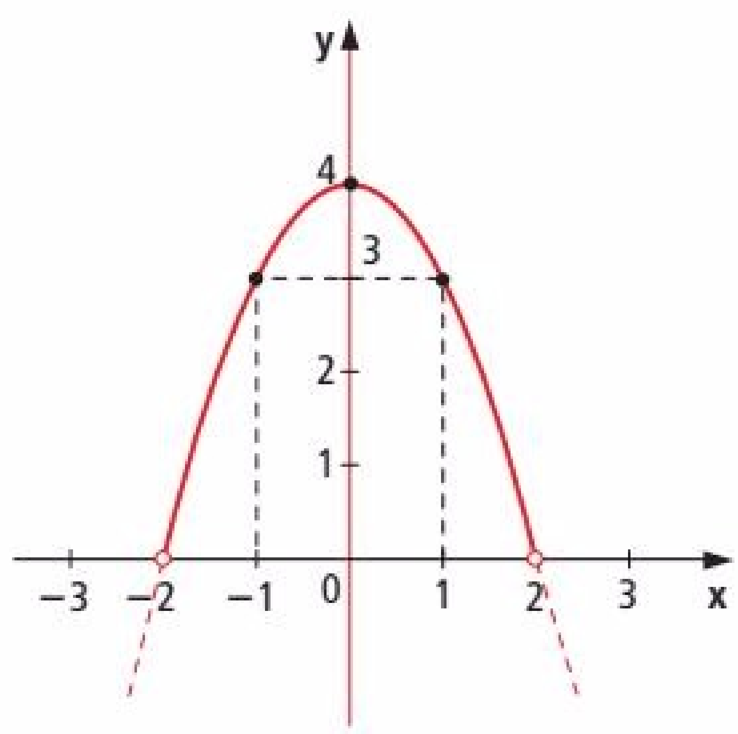
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ para } x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 & \text{(I)} \\ -x^2 + 4 \text{ para } -2 < x < 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $f(x) = x^2 - 4$ para $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$



x	f(x)
−3	5
−2	0
2	0
3	5

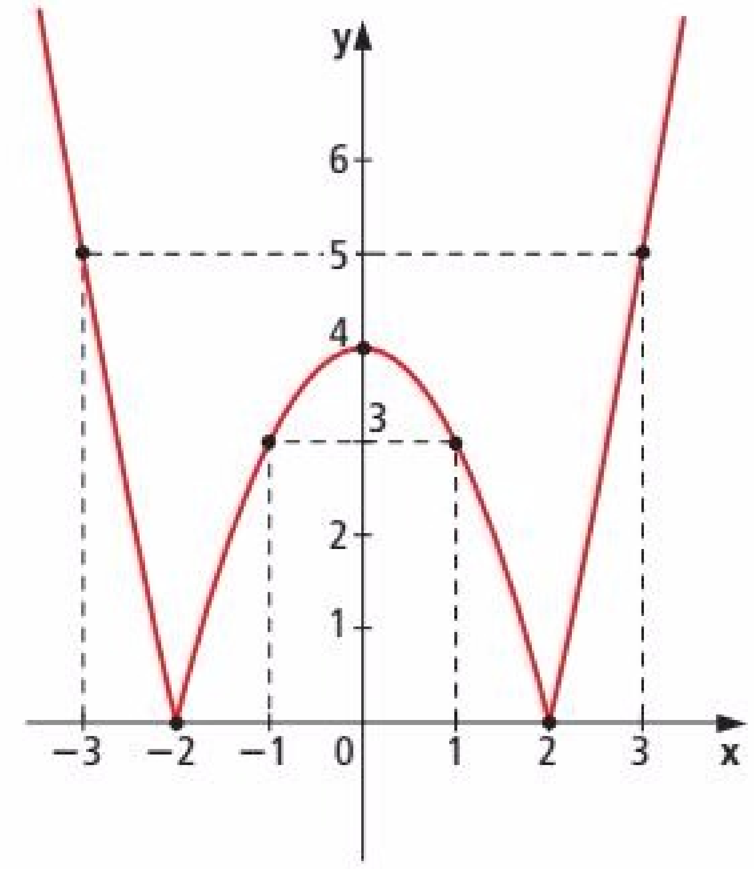
(II) $f(x) = -x^2 + 4$ para $-2 < x < 2$



x	f(x)
−1	3
0	4
1	3

Observe que os valores que não pertencem ao domínio de f(x) foram representados no tracejado das parábolas para auxiliar a construção dos gráficos.

Reunindo (I) e (II) em um mesmo sistema cartesiano, temos:



Ilustrações: Editoria de arte

O conjunto imagem da função é $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$ ou simplesmente $Im = \mathbb{R}_+$.

Outra maneira de traçar o gráfico de *f* é realizar uma reflexão em relação ao eixo *x* da parte negativa do gráfico de $g(x) = x^2 - 4$, pois o módulo transforma um número negativo em seu oposto, ou seja, os pontos do gráfico de *g* com ordenada negativa ficam a uma mesma distância do eixo *x* (ordenada 0) dos respectivos pontos do gráfico de *f*.

Exercícios propostos

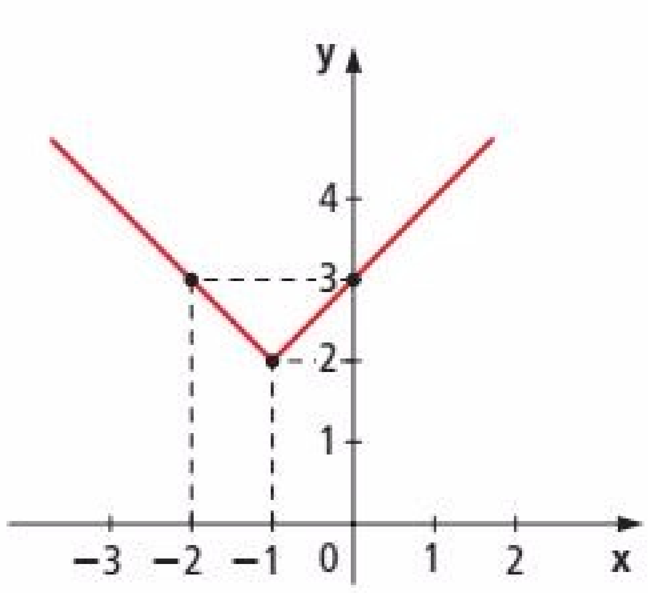
Escreva no caderno

11. Considere a função $f(x) = \dfrac{2}{|x - 3|}$ e faça o que se pede.

a) Há algum valor de $x \in \mathbb{R}$ em que a função não se define? Se sim, qual é esse valor? Sim, para $x = 3$.

b) Calcule o valor de $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. $\dfrac{4}{5}$

12. Observe o gráfico da função *f* abaixo.



Determine a função *f*, a imagem e o domínio de *f*.
$f(x) = |x + 1| + 2$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$; $D(f) = \mathbb{R}$

13. Faça o esboço do gráfico das funções: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $f(x) = |x - 3|$

b) $f(x) = |x - 3| + 4$

c) $f(x) = |-2x + 1|$

d) $f(x) = |-2x + 1| - 3$

e) $y = |x^2 - 4| - 5$

14. O preço médio de certo produto agrícola é função do mês do ano em que é comercializado. Se *P* é o preço médio em reais e *n* é o número correspondente ao mês do ano, *P* em função de *n* é dado por $P(n) = 8 - |6 - n|$. Determine para qual valor de *n* ocorre o valor mínimo de *P*. $n = 12$

15. Construa o gráfico das funções e determine o domínio e a imagem de cada uma. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $f(x) = |x| + |x - 2|$

b) $g(x) = |x - 1| + |x - 3|$

Equações modulares

Toda equação cuja incógnita se apresenta dentro de módulo é denominada **equação modular**.

Exemplos:

a) $|x + 5| = 8$ b) $|x^2 - 2x + 1| = x + 1$ c) $|x|^2 + 5|x| = 0$ d) $|4x - 1| = |x + 8|$

Pela definição do módulo de um número real, podemos escrever a seguinte propriedade:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a, \text{ para } a > 0$$

A condição $a > 0$ também é conhecida como **condição de existência**.

Essa propriedade nos auxiliará nas resoluções das equações modulares. Acompanhe os exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

5 Resolva a equação $|x^2 - 5x| = 6$.

Resolução

$$|x^2 - 5x| = 6 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 6 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x^2 - 5x = -6 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos:

$x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x' = 6$ e $x'' = -1$

De (II), temos:

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x' = 3$ e $x'' = 2$

Portanto, $S = \{-1, 2, 3, 6\}$.

6 Determine o conjunto solução da equação:

$|2x + 1| = x - 3$

Resolução

Como o módulo de um número é sempre positivo, a condição de existência é:

$x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3$

Daí, vem:

$$|2x + 1| = x - 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x - 3 \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ 2x + 1 = -x + 3 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), obtemos:

$2x + 1 = x - 3 \Rightarrow x = -4$

De (II), obtemos:

$2x + 1 = -x + 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Como $x = -4$ e $x = \frac{2}{3}$ não satisfazem a condição de existência $x \geqslant 3$, não existe $x \in \mathbb{R}$ que satisfaça a equação, ou seja, o conjunto solução é vazio.

Portanto, $S = \{\ \}$.

7 Resolva a equação $|x|^2 + 2|x| - 15 = 0$.

Resolução

Para resolvermos esse tipo de equação, usaremos uma variável auxiliar, por exemplo, *y*.

Assim, fazemos $|x| = y$, com $y \geqslant 0$, podemos escrever:

$$y^2 + 2y - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y' = 3 \\ y'' = -5 \text{ (não satisfaz, pois } y \geqslant 0) \end{cases}$$

Substituindo $y = 3$ em $|x| = y$, obtemos:

$|x| = 3 \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$

Portanto, $S = \{-3, 3\}$.

8 Resolva a equação $|x - 2| = |3 - 2x|$.

Resolução

$$|x - 2| = |3 - 2x| \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 - 2x \quad \text{(I)} \\ \text{ou} \\ x - 2 = -(3 - 2x) \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos:

$x - 2 = 3 - 2x \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

De (II), temos:

$x - 2 = -3 + 2x \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$

Portanto, $S = \left\{1, \frac{5}{3}\right\}$.

9 Um posto de combustível está localizado em determinado ponto de uma rodovia com 350 km de comprimento. A distância de um viajante que está nessa rodovia até o posto pode ser determinada pela função $d(x) = |x - 200|$, em que $d(x)$ é a distância, em km, e *x* é o quilômetro da rodovia em que o viajante se encontra. A partir dessas informações, responda:

a) Em qual quilômetro dessa rodovia está localizado o posto?

b) Em quais quilômetros da rodovia uma pessoa que se encontra a uma distância de 135 km do posto pode estar?

Resolução

a) Para determinar o quilômetro da rodovia em que está localizado o posto, devemos calcular $d(x) = 0$, pois é o ponto em que a distância até o posto é nula. Assim:

$d(x) = 0 \Rightarrow |x - 200| = 0 \Rightarrow x - 200 = 0 \Rightarrow x = 200$

Portanto, o posto está localizado no km 200 da rodovia.

b) Do enunciado, $d(x) = 135$, então:

$$|x - 200| = 135 \Rightarrow \begin{cases} x - 200 = 135 \quad \text{(I)} \\ x - 200 = -135 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos:

$x - 200 = 135 \Rightarrow x = 135 + 200 \Rightarrow x = 335$

$x - 200 = -135 \Rightarrow x = -135 + 200 \Rightarrow x = 65$

Portanto, a pessoa pode estar no km 65 ou no km 335.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

16. Resolva as seguintes equações modulares:

a) $|3x + 1| = 6$ $S = \left\{-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

b) $\left|\frac{x-2}{3}\right| = 1$ $S = \{-1, 5\}$

c) $|x^2 + 4x| = 12$ $S = \{-6, 2\}$

d) $|x|^2 - |x| - 20 = 0$ $S = \{-5, 5\}$

e) $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$ $S = \{-2, -1, 1, 2\}$

f) $||x - 2| - 7| = 6$ $S = \{-11, 1, 3, 15\}$

17. (Epcar-MG) Considere a equação $|x| = x - 6$.
Com respeito à solução real dessa equação, pode-se afirmar que a:

a) solução pertence ao intervalo fechado $[1, 2]$.

b) solução pertence ao intervalo fechado $[-2, -1]$.

c) solução pertence ao intervalo aberto $]-1, 1[$.

X d) equação não tem solução.

18. (Fafeod-MG) Sejam S_1 e S_2 os conjuntos solução das seguintes equações modulares, respectivamente:

(i) $|x - 5| = 1 - 2x$

(ii) $|2x - 6| = 6 - 2x$

Assim sendo, é CORRETO afirmar, então, que o conjunto $S_1 \cap S_2$ é igual a:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

b) $\{-4, 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

X d) $\{-4\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

19. Determine o conjunto solução das equações:

a) $|x - 1|^2 - 3|x - 1| + 2 = 0$ $S = \{-1, 0, 2, 3\}$

b) $|x - 1| + |x - 2| = 5$ $S = \{-1, 4\}$

20. (Udesc-SC) A soma das raízes distintas da equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$ é:

a) 10
b) 7
c) 0
d) 3
X e) 4

21. (UFJF-MG) Sobre os elementos do conjunto solução da equação $|x^2| - 4|x| - 5 = 0$, podemos dizer que:

X a) são um número natural e um número inteiro.

b) são números naturais.

c) o único elemento é um número natural.

d) um deles é um número racional, o outro é um número irracional.

e) não existem, isto é, o conjunto solução é vazio.

22. (ITA-SP) O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a:

X a) -5
b) -1
c) 1
d) 2
e) 5

23. (UFRJ) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(2x) = |1 - x|$. Determine os valores de x para os quais $f(x) = 2$. $S = \{-2, 6\}$

24. A igualdade $-|-x| = -(-x)$ é verdadeira para todos os elementos do conjunto:

a) $\mathbb{R}$

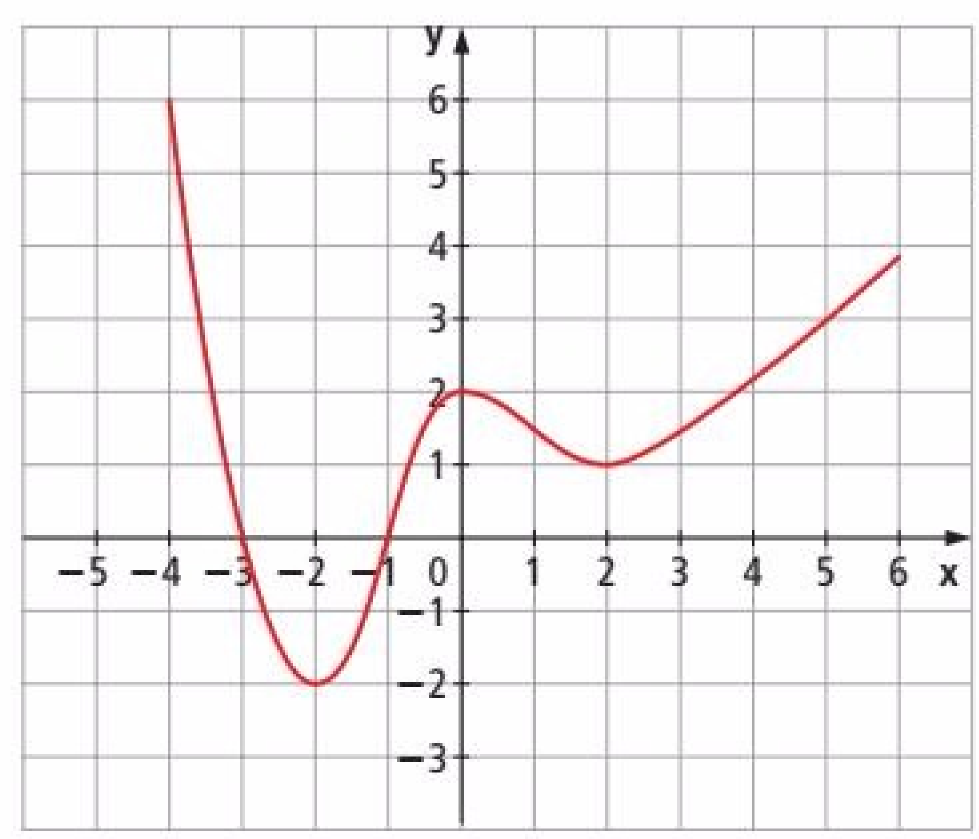
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

X c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

25. (Insper-SP) A figura a seguir mostra o gráfico da função $f(x)$.



Editoria de arte

O número de elementos do conjunto solução da equação $|f(x)| = 1$, resolvida em $\mathbb{R}$, é igual a:

a) 6
X b) 5
c) 4
d) 3
e) 2

26. (PUC-PR) Um economista, no início de 2007, fez uma projeção sobre a situação financeira de um grupo de investidores que aplicam na bolsa de valores, e observou que a variação dos ganhos dessas aplicações é alterada diariamente; assim, concluiu que o lucro diário é dado pela função $f(x) = |x - 200| \cdot 50$, onde x representa cada dia do ano, $(x = 1, 2, 3, ..., 365)$, e o lucro é dado em real. Se o grupo de investidores pretende um lucro de R$ 5 750,00, em quais meses isso será possível?

a) Abril e novembro.

b) Março e outubro.

X c) Março e novembro.

d) Maio e outubro.

e) Abril e outubro.

27. O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma referência importante na avalição de um país em relação ao seu desenvolvimento. Leia o texto a seguir a respeito do IDH e do IDHM e faça o que se pede em cada item.

O IDHM é um número que varia entre 0 e 1. Quanto mais próximo de 1, maior o desenvolvimento humano de um município.

O Índice de Desenvolvimento Humano

O conceito de desenvolvimento humano, bem como sua medida, o Índice de Desenvolvimento Humano, IDH, foram apresentados em 1990, no primeiro Relatório de Desenvolvimento Humano do Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento [...].

A popularização da abordagem de desenvolvimento humano se deu com a criação e adoção do IDH como medida do grau de desenvolvimento humano de um país, em alternativa ao Produto Interno Bruto, hegemônico à época como medida de desenvolvimento.

O IDH reúne três dos requisitos mais importantes para a expansão das liberdades das pessoas: a oportunidade de se levar uma vida longa e saudável – saúde –, ter acesso ao conhecimento – educação – e poder desfrutar de um padrão de vida digno – renda.

[...]

O Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM)

[...]

O IDHM brasileiro segue as mesmas três dimensões do IDH global – saúde, educação e renda, mas vai além: adequa a metodologia global ao contexto brasileiro e à disponibilidade de indicadores nacionais. Embora meçam os mesmos fenômenos, os indicadores levados em conta no IDHM são mais adequados para avaliar o desenvolvimento dos municípios brasileiros.

[...] inspirado pelo Índice de Desenvolvimento Humano – IDH – global, o IDHM possui ajustes para melhor se adequar à realidade brasileira, adaptando-se às bases de dados do Censo e às características inatas aos municípios. Por isso, não é possível realizar qualquer tipo de comparação entre o IDHM de um município e o IDH de um país, por exemplo.

IPEA. O **Índice de Desenvolvimento Humano Municipal Brasileiro**. Brasília: PNUD, Ipea, FIP, 2013. (Série Atlas do Desenvolvimento Humano no Brasil.) Disponível em: <http://www.atlasbrasil.org.br/2013/data/rawData/publicacao_atlas_municipal.pdf>. Acesso em: 28 dez. 2015.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Quais são as três dimensões que compõem o IDH e quais as principais diferenças entre IDH e IDHM?

b) Denomina-se desvio absoluto de um IDHM a diferença, em módulo, do IDHM estadual em relação à média nacional, ou seja: IDHM Estadual – IDHM Nacional. Com o auxílio de uma calculadora, encontre a média do IDHM Nacional, utilizando os dados da tabela ao lado; para isso, some todos os valores e divida pela quantidade de posições.

c) Determine o desvio absoluto do IDHM do seu estado em relação à média nacional. Explique se o valor obtido corresponde a um desvio de características positivas ou negativas em relação à média nacional.

d) Discuta com os colegas e enumere ações, já existentes ou não, que afetam positivamente o desenvolvimento dos pilares contidos no IDH e consequentemente no IDHM.

***Ranking* por estados – IDHM 2010**

Posição	Estado	IDHM
1º	Distrito Federal	0,824
2º	São Paulo	0,783
3º	Santa Catarina	0,774
4º	Rio de Janeiro	0,761
5º	Paraná	0,749
6º	Rio Grande do Sul	0,746
7º	Espírito Santo	0,740
8º	Goiás	0,735
9º	Minas Gerais	0,731
10º	Mato Grosso do Sul	0,729
11º	Mato Grosso	0,725
12º	Amapá	0,708
13º	Roraima	0,707
14º	Tocantins	0,699
15º	Rondônia	0,690
16º	Rio Grande do Norte	0,684
17º	Ceará	0,682
18º	Amazonas	0,674
19º	Pernambuco	0,673
20º	Sergipe	0,665
21º	Acre	0,663
22º	Bahia	0,660
23º	Paraíba	0,658
24º	Piauí	0,646
24º	Pará	0,646
26º	Maranhão	0,639
27º	Alagoas	0,631

Fonte: ATLAS do Desenvolvimento Humano no Brasil. **Ranking** – todos os estados, 2010. Brasília: PNUD, 2013. Dados disponíveis em:<http://www.atlasbrasil.org.br/2013/pt/ranking/>. Acesso em: 28 dez. 2015.

Explorando a tecnologia

Resolução de equações modulares com o GeoGebra

É possível que no Ensino Fundamental você tenha visto como resolver um sistema de equações do primeiro grau graficamente e que a intersecção de duas retas é o conjunto solução do sistema proposto.

Diante dessa informação podemos entender que, geometricamente, a intersecção é um ponto cuja abscissa e ordenada de ambos os gráficos são iguais, ou seja, são valores de *x* e *y* que satisfazem ambas as equações e, portanto, são a solução do sistema.

Utilizando raciocínio análogo, é possível resolver equações modulares graficamente, considerando cada membro da equação como uma função. Nesse caso, como temos apenas uma variável, *x*, a solução da equação será a abscissa do ponto de intersecção dos gráficos das funções.

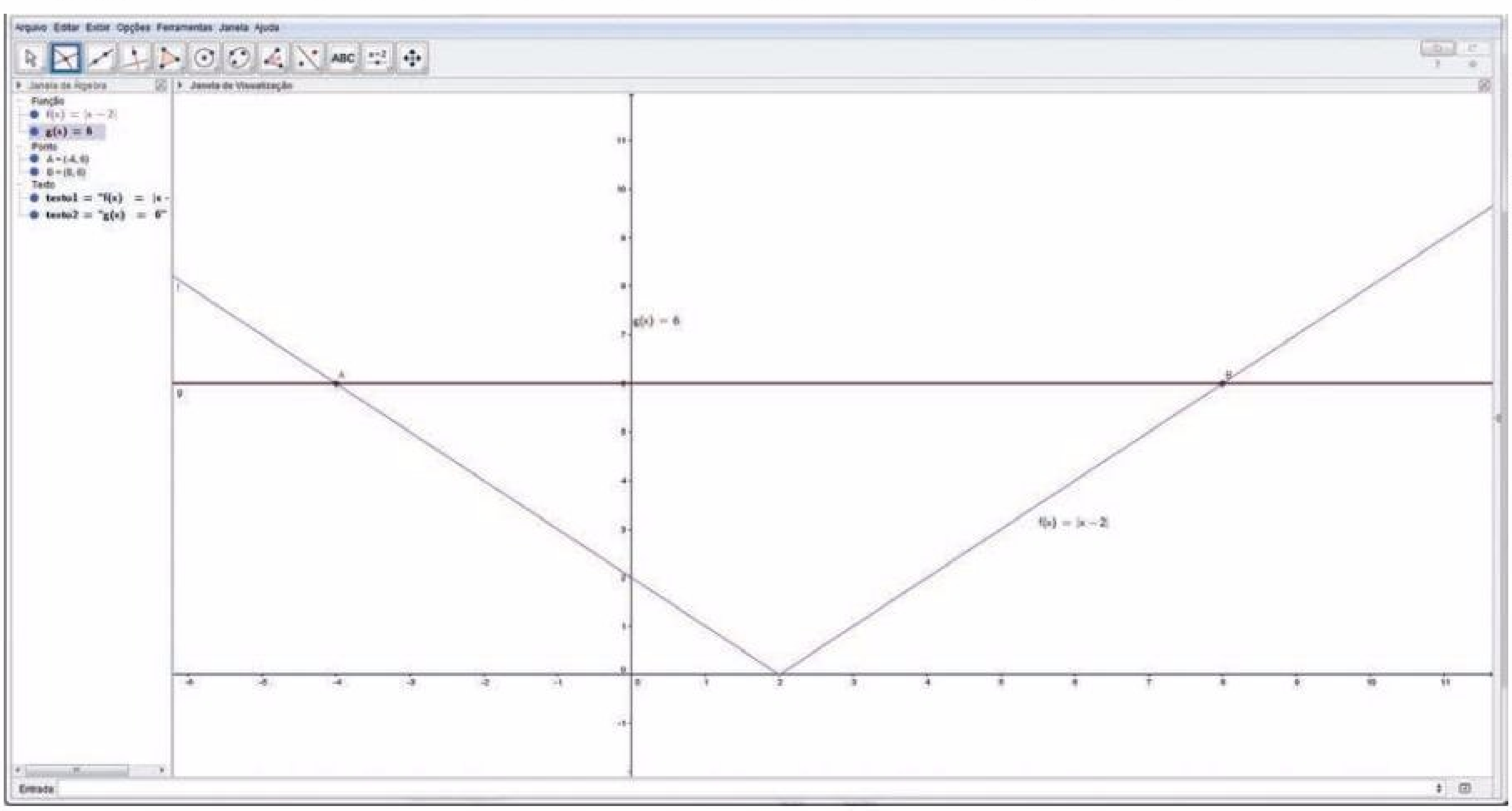
Por exemplo, para resolver a equação modular $|x - 2| = 6$, siga a sequência de passos abaixo.

1. Vamos escrever o primeiro membro da equação como a função $f(x) = |x - 2|$ e o segundo como a função $g(x) = 6$.
2. Para escrever o módulo de *x* no GeoGebra precisamos escrever a função **abs(x)**; assim, para construir a função $f(x) = |x - 2|$, devemos digitar no **Campo de Entrada** 'f(x) = abs(x − 2)' e, em seguida, digitar 'g(x) = 6'.
3. Depois, para encontrar a solução, basta utilizar a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos**, , e clicar diretamente nas duas intersecções entre os gráficos.

As abscissas das coordenadas representam o conjunto solução da equação inicial, ou seja, a solução da equação $|x - 2| = 6$ é $S = \{-4, 8\}$.

Note que no nosso exemplo utilizamos $g(x) = 6$, mas poderíamos utilizar qualquer outro número ou expressão, inclusive modular.

Precisamos ficar atentos aos pontos de intersecção entre os gráficos. Cada um desses pontos representa uma solução, por isso torna-se necessário localizar cada um deles para formar o conjunto solução.



Crédito de imagens: Geogebra

Atividade

Escreva no caderno

1. Utilizando o método descrito acima resolva as seguintes equações:

a) $|2x - 1| = 5$ $S = \{-2, 3\}$

b) $|x + 3| = 2x + 1$ $S = \{2\}$

c) $|2x - 1| = |2x + 3|$ $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

Inequações modulares

Toda desigualdade que apresenta incógnita dentro de módulo é denominada **inequação modular**.

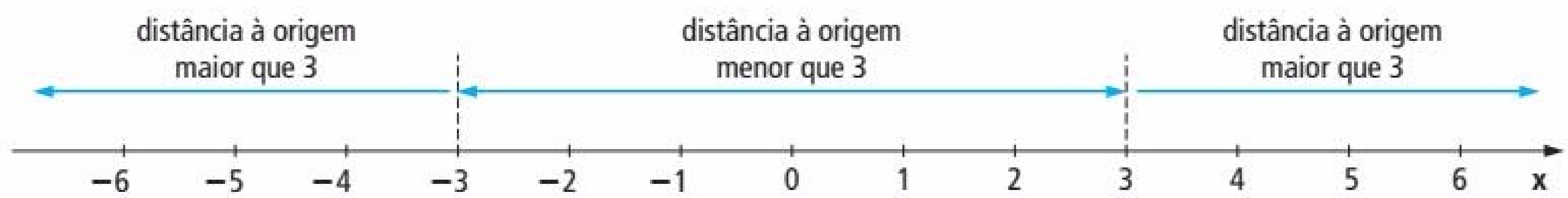
Exemplos:

a) $|x| \leqslant 8$ b) $|x^2 - 5x| \geqslant 7$ c) $|x^2 + 3| > x + 1$ d) $\left|\dfrac{x+4}{2x-1}\right| \leqslant 2$

Vamos, inicialmente, acompanhar o que acontece com as seguintes inequações:

- $|x| > 3$
- $|x| < 3$

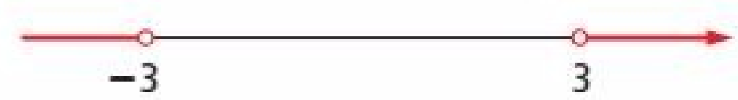
Para isso, vamos recorrer à reta real abaixo, na qual estão assinalados alguns pontos.



Ilustrações: Editoria de arte

- $|x| > 3$ significa que a distância entre o ponto correspondente ao valor *x* e a origem (0) é maior que 3. Nesse caso, *x* deve estar à direita de 3 ou à esquerda de -3:

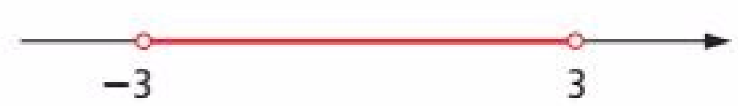
$$|x| > 3 \Leftrightarrow x < -3 \text{ ou } x > 3$$



Lê-se: se e somente se.

- $|x| < 3$ significa que a distância entre o ponto correspondente ao valor *x* e a origem (0) é menor que 3. Nesse caso, *x* deve estar entre -3 e 3:

$$|x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$$



De modo geral, sendo $a > 0$, podemos escrever as seguintes propriedades:

- $|x| > a \Leftrightarrow x > a \text{ ou } x < -a$

- $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

- $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a \text{ ou } x \leqslant -a$

- $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$

> O módulo de um número (ou de uma expressão) é sempre um valor positivo; por isso, nas inequações modulares, temos a condição de existência $a > 0$. Assim, inequações do tipo $|x| > -a$ não têm solução em $\mathbb{R}$, ou seja, $S = \varnothing$.

Essas propriedades auxiliarão nas resoluções das inequações modulares. Acompanhe os exercícios resolvidos a seguir.

Exercícios resolvidos

10 Resolva a inequação: $|3x + 2| \geqslant 5$.

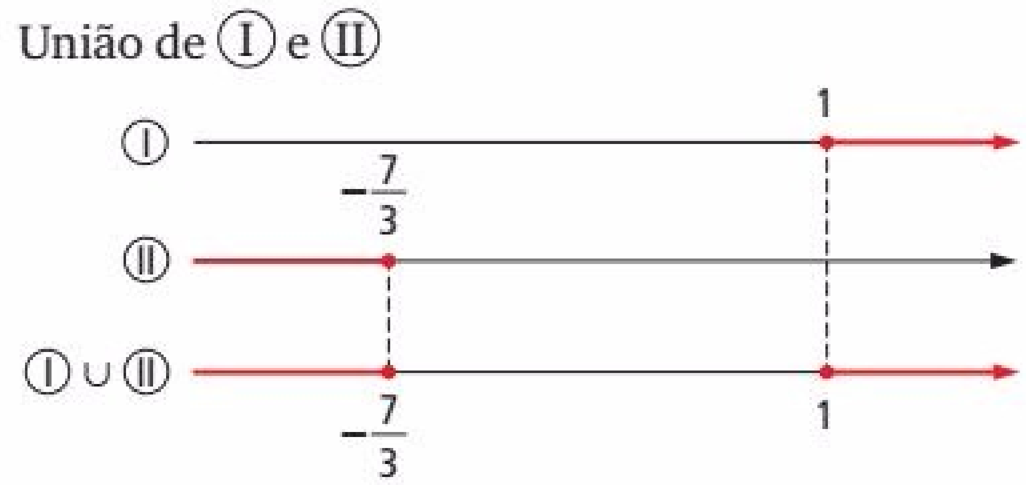
Resolução

$$|3x+2| \geqslant 5 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 \geqslant 5 \quad \text{(I)} \\ \quad\text{ou} \\ 3x + 2 \leqslant -5 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos: $3x + 2 \geqslant 5 \Rightarrow 3x \geqslant 3 \Rightarrow x \geqslant 1$

De (II), temos: $3x + 2 \leqslant -5 \Rightarrow 3x \leqslant -7 \Rightarrow x \leqslant -\dfrac{7}{3}$

União de (I) e (II)



De acordo com o esquema, verificamos que a solução é constituída por todos os *x* que são maiores ou iguais a 1 ou que são menores ou iguais a $-\dfrac{7}{3}$, ou seja: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\dfrac{7}{3} \text{ ou } x \geqslant 1\right\}$.

11 Determine o conjunto solução da inequação:

$$|x^2 + x - 1| < 1$$

Resolução

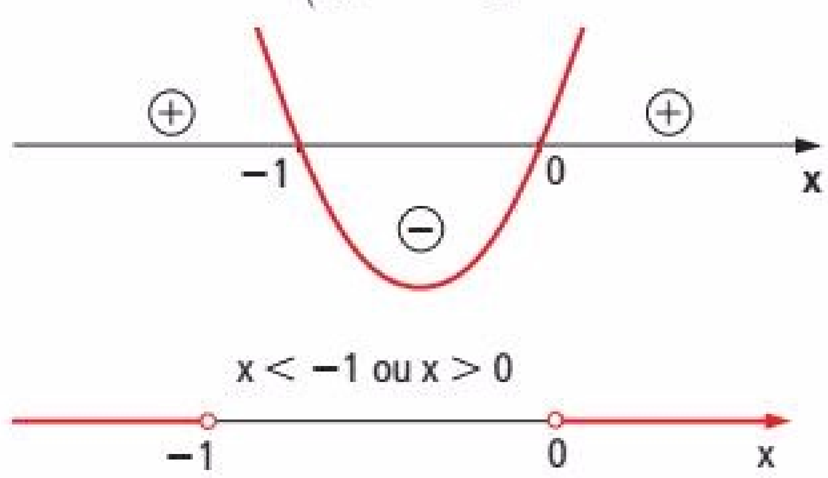
$|x^2 + x - 1| < 1 \Rightarrow -1 < x^2 + x - 1 < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 1 > -1 & \text{(I)} \\ x^2 + x - 1 < 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), temos:

$x^2 + x - 1 > -1 \Rightarrow x^2 + x > 0$

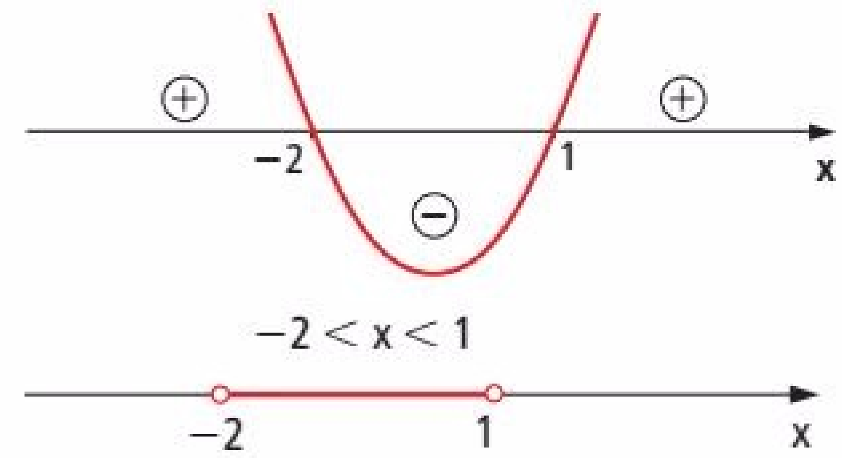
$$x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = -1 \end{cases}$$



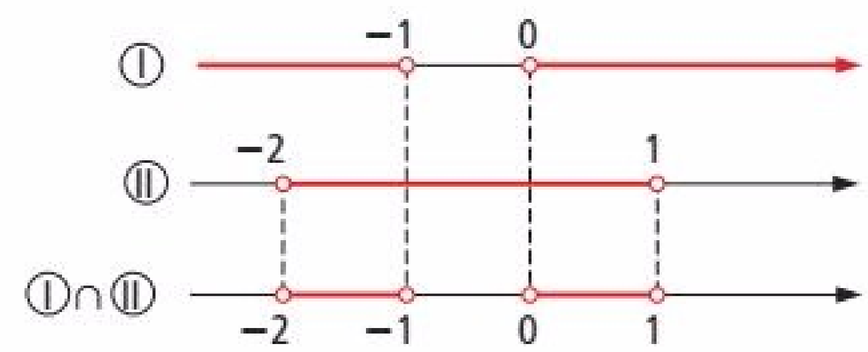
De (II), temos:

$x^2 + x - 1 < 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = -2 \end{cases}$$



Intersecção de (I) e (II)



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } 0 < x < 1\}$.

Ilustrações: Editoria de arte

Exercícios propostos

Escreva no caderno

28. (PUC-RS) A expressão $|x - a| < 16$ também pode ser representada por:

a) $x - a < 16$

b) $x + a > 16$

c) $-a - 16 < x < a + 16$

x d) $-16 + a < x < a + 16$

e) $x - a < -16$ ou $x - a > 0$

29. Resolva as inequações modulares.

a) $|x + 2| < 6$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 4\}$

b) $|x^2 - 4| < 3x$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

c) $|x^2 - 2x + 3| \leq 4$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}\}$

d) $\left|1 - \dfrac{x-1}{2}\right| \leq 4$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x \leq 11\}$

e) $|x^2 - 4x + 6| < -x^2 + 4x$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

30. (FGV-SP) Multiplicando os valores inteiros *x* que satisfazem simultaneamente às desigualdades $|x - 2| \leq 3$ e $|3x - 2| > 5$, obtemos:

a) 12 x b) 60 c) −12 d) −60 e) 0

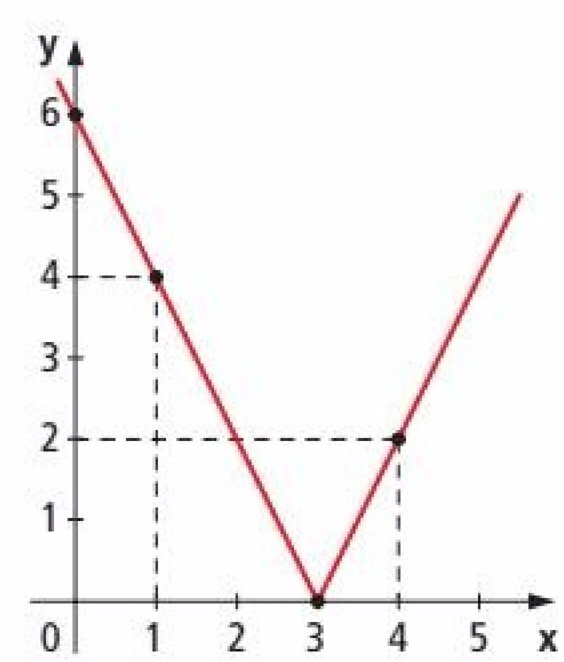
31. Determine o domínio das funções:

a) $f(x) = \sqrt{|x| - 5}$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5 \text{ ou } x \geq 5\}$

b) $f(x) = \sqrt{|x - 1| - 3}$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{|x - 2| - 4}}$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 6\}$

32. A figura abaixo representa o gráfico da função: $f(x) = |2x - 6|$



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

a) Somente observando o gráfico, procure resolver a inequação $|2x - 6| \leq 4$.

b) Resolva algebricamente $|2x - 6| \leq 4$ e compare seu resultado com o obtido no item **a**.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 5\}$

33. Dada a função $f(x) = |2x + 1|$, calcule *x* de modo que $f(x) \leq 2$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right\}$

34. A produção diária estimada *x* de uma refinaria é dada por:

$|x - 200\,000| \leq 125\,000$

em que *x* é medida em barris de petróleo. Os níveis de produção máximo e mínimo são:

a) $175\,000 \leq x \leq 225\,000$

b) $75\,000 \leq x \leq 125\,000$

x c) $75\,000 \leq x \leq 325\,000$

d) $125\,000 \leq x \leq 200\,000$

e) $x \leq 125\,000$ ou $x \geq 200\,000$

Exercícios complementares

Escreva no caderno

1. (IFPE) Os volumes de água V, medidos em litros, em dois reservatórios A e B, variam em função do tempo t, medido em minutos, de acordo com as seguintes relações:

$$V_A(t) = 200 + 3t \text{ e } V_B(t) = 5\,000 - 3t$$

Determine o instante t em que os reservatórios estarão com o mesmo volume.

a) $t = 500$ minutos

b) $t = 600$ minutos

c) $t = 700$ minutos

x d) $t = 800$ minutos

e) $t = 900$ minutos

2. (Insper-SP) Uma operadora de telefonia celular oferece a seus clientes dois planos:

Superminutos: o cliente paga uma tarifa fixa de R$ 100,00 por mês para os primeiros 200 minutos que utilizar. Caso tenha consumido mais minutos, irá pagar R$ 0,60 para cada minuto que usou a mais do que 200.

Supertarifa: o cliente paga R$ 60,00 de assinatura mensal mais R$ 0,40 por minuto utilizado.

Todos os meses, o sistema da operadora ajusta a conta de cada um de seus clientes para o plano mais barato, de acordo com as quantidades de minutos utilizadas. Nesse modelo, o plano **Superminutos** certamente será selecionado para consumidores que usarem

a) menos do que 60 minutos por mês.

b) entre 40 e 220 minutos no mês.

c) entre 60 e 300 minutos no mês.

x d) entre 100 e 400 minutos no mês.

e) mais do que 400 minutos no mês.

3. (UCB-DF) Considere as funções $f(x) = (2a - 4)x + 3$ e $g(x) = 3bx^2 - (c + 2)x + 1$ em que a, b e c são números reais, para julgar os itens a seguir.

Resposta: 0. F; 1. F; 2. F; 3. F; 4. V

0. ( ) Se $a = 2$, a função f é estritamente crescente.

1. ( ) Se $b = 2$ e $c = 0$, a função g tem um ponto de máximo.

2. ( ) Os gráficos que representam f e g, no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, podem ter, no máximo, um ponto em comum.

3. ( ) Se $a = 1$, a raiz da função f é negativa.

4. ( ) Se $b = 1$ e $c = 2$, uma das raízes da função g é 1.

(Insper-SP) Utilize as informações a seguir para as questões 4 e 5.

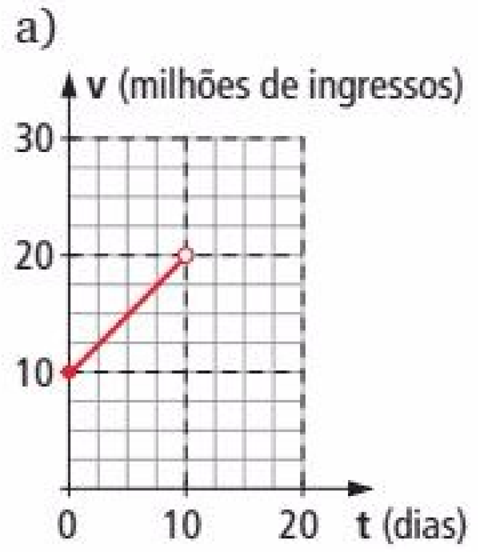
Os ingressos para a pré-estreia mundial de um filme começaram a ser vendidos 20 dias antes da exibição do filme, sendo que:

- nos 10 primeiros dias desse período, as vendas foram feitas exclusivamente nas bilheterias;
- nos 10 últimos dias, as vendas ocorreram simultaneamente nas bilheterias e pela internet.

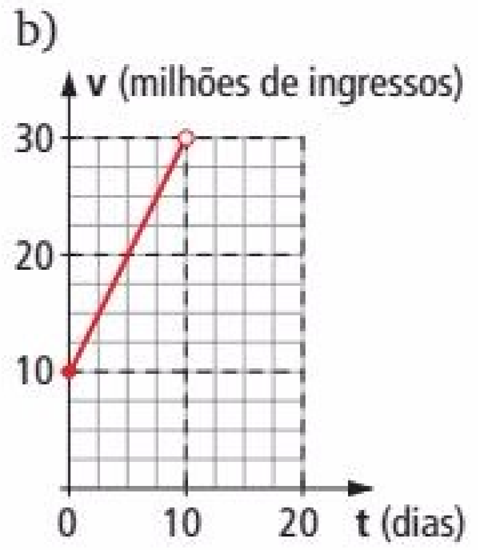
Considere que t representa o tempo, em dias, desde o início das vendas e $v(t)$ o total de ingressos vendidos, em milhões, até o tempo t.

4. Durante as vendas exclusivas nas bilheterias, a capacidade de atendimento dos guichês dos cinemas do mundo todo, ao longo do tempo, era sempre a mesma, totalizando a venda de 2 milhões de ingressos por dia. Assim, o gráfico que melhor descreve $v(t)$ para esse período, em função de t, é

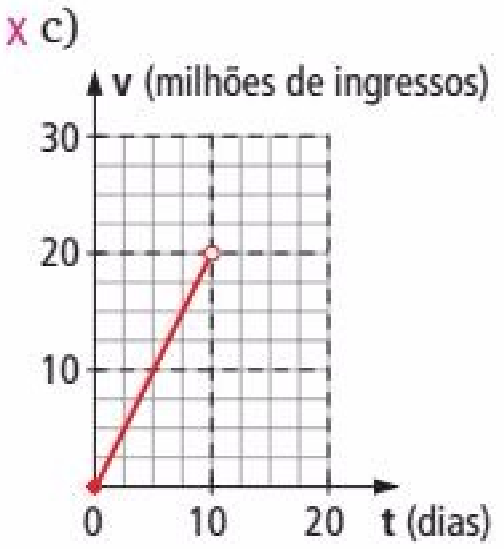
a)



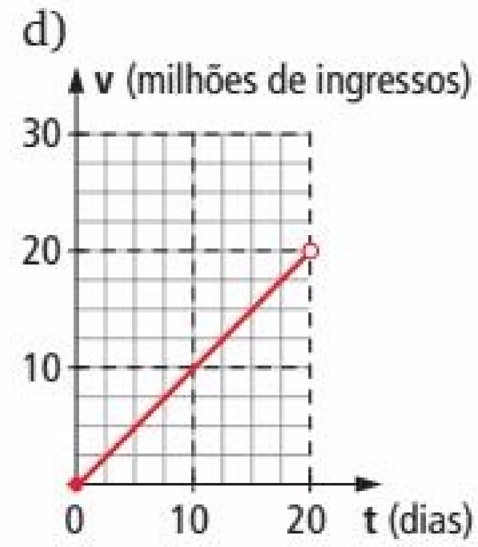
b)



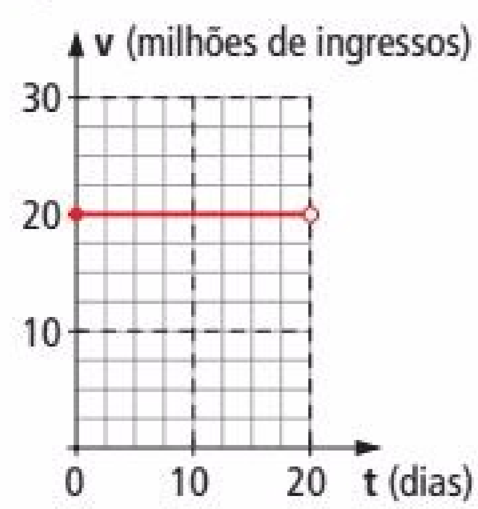
x c)



d)



e)



Ilustrações: Editoria de arte

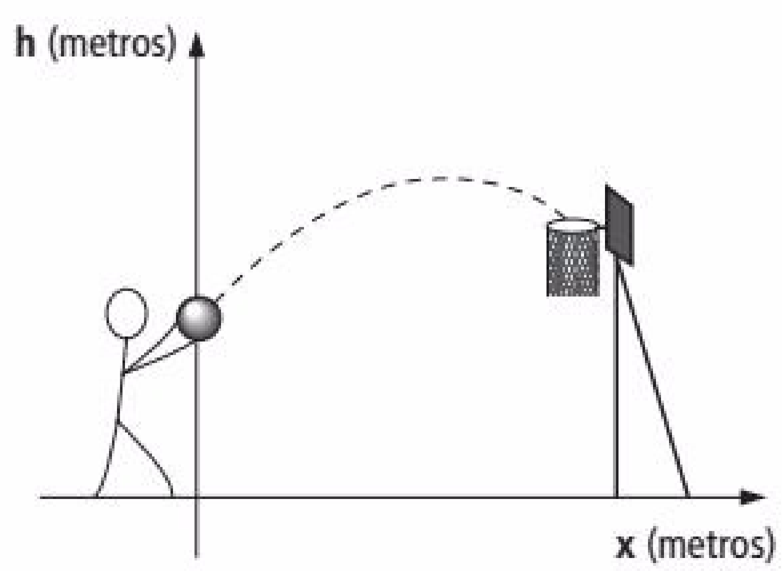
5. No período de vendas simultâneas nas bilheterias e pela internet, a função v(t) é dada por:

$$v(t) = -0{,}1t^2 + 4t - 10.$$

O número de ingressos vendidos **apenas nos 10 dias que antecederam a exibição do filme** foi

x a) 10 milhões.
b) 20 milhões.
c) 30 milhões.
d) 40 milhões.
e) 50 milhões.

6. (IFSC) A figura a seguir ilustra o momento do lançamento de uma bola de basquete para a cesta. Foi inserido o sistema de coordenadas cartesianas para representar a trajetória da bola, de modo que a altura *h* da bola é dada em função da distância horizontal *x* pela equação $h = -0{,}1x^2 + 1{,}2x + 2{,}5$, com *h* e *x* medidos em metros. Determine a altura máxima atingida pela bola.



Ilustrações: Editoria de arte

x a) 6,1 metros
b) 6,3 metros
c) 7,2 metros
d) 7,5 metros
e) 8,3 metros

7. (IFSul-RS) Considere a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$. Afirma-se que seu domínio é o intervalo

a) $[-2; 3]$
x b) $]-\infty; -2] \cup [3; +\infty[$
c) $[-3; 2]$
d) $]-\infty; -3] \cup [2; +\infty[$

8. (IFSC) Sobre as funções de 2º grau definidas por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com *a*, *b* e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, analise as proposições e indique a soma da(s) CORRETA(S).

01. O conjunto imagem da função $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + bx + c$ é $\text{Im}(f) = \left[\dfrac{-\Delta}{4a}, +\infty\right)$

02. A lei de formação da função do 2º grau que passa pelos pontos $A(-4, 0)$, $B(-1, -3)$ e $C(0, 0)$ é $f(x) = x^2 + 4x$.

04. O lucro (ou prejuízo) de uma empresa é dado pela função $L(x) = -10x^2 + 540x + 500$ em reais e *x* a quantidade de vendas mensais. Logo, a empresa terá lucro máximo de R$ 5 200,00 quando atingir a venda de 27 unidades mensais.

08. A inequação $-x^2 + 3x + 10 > 0$ tem infinitas soluções inteiras.

16. O conjunto solução da inequação $(x + 2)(-x^2 + 5x - 4) > 0$ é $S = (-\infty, -2[\cup]1, 4[$.

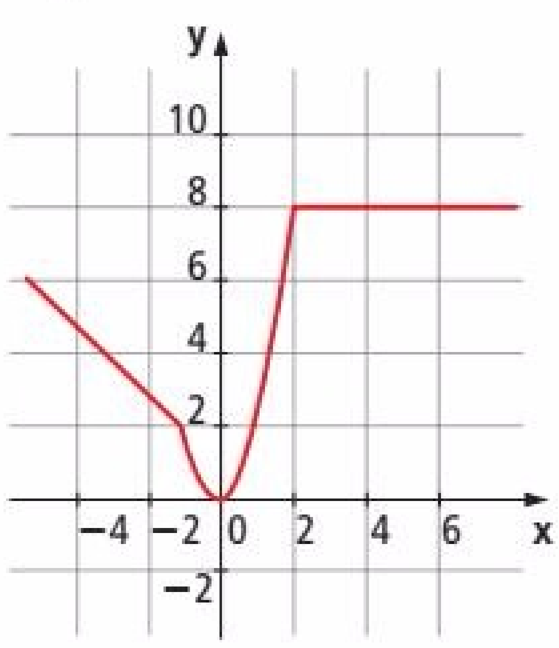
32. Para $k \in [-2, 2]$ a função $f(x) = (k + 1) \cdot x^2 + \sqrt{12} \cdot x + (k - 1)$ possui raízes reais distintas.

Resposta: 01 + 02 + 16 = 19

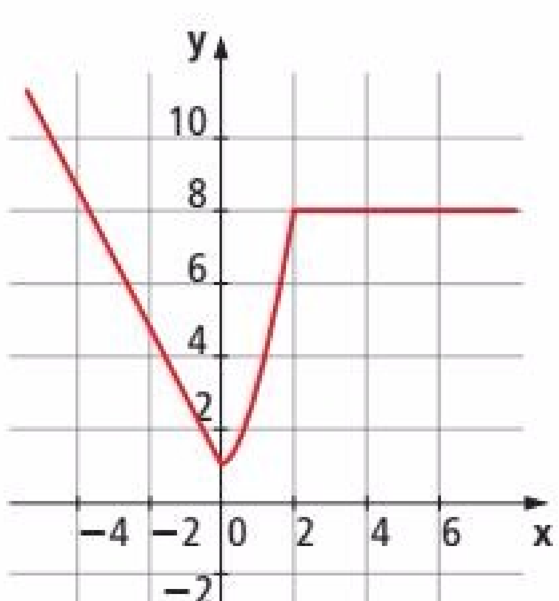
9. (IFSul-RS) O gráfico que descreve a função

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x \leq -1 \\ 2x^2, \text{ se } -1 < x \leq 2 \text{ é} \\ 8, \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

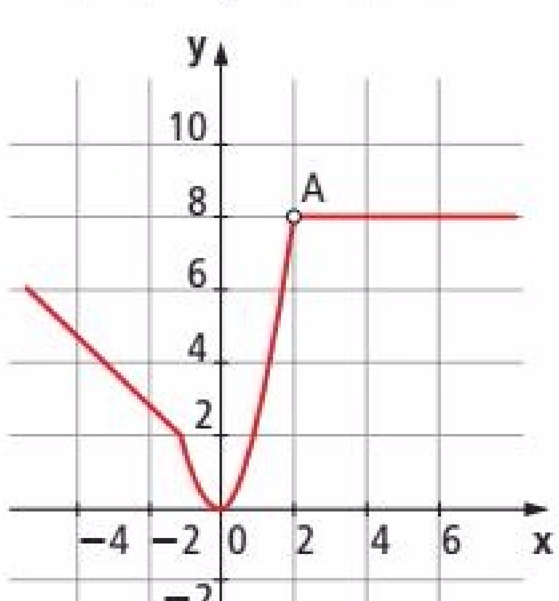
x a)



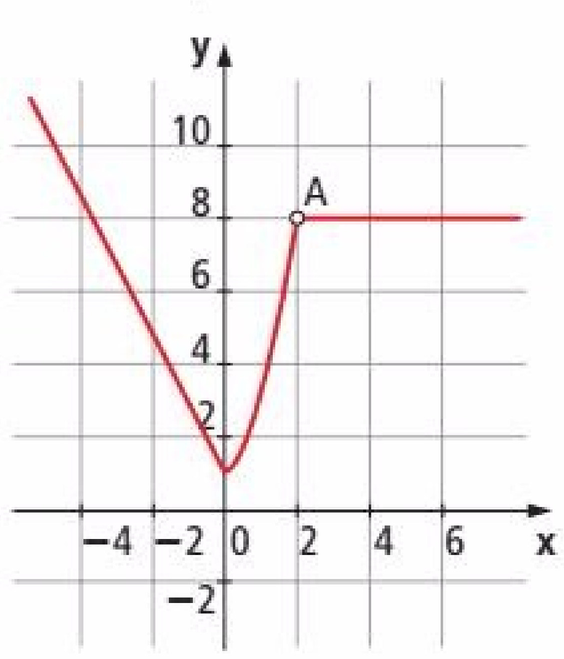
b)



c)



d)



10. (IFSul-RS) A função real definida por $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ é positiva no intervalo

a) $]-\infty; 2[\cup]5; +\infty[$

b) $]-\infty; -5[\cup]-2; +\infty[$

c) $]-5; -2[$

x d) $]2; 5[$

11. (IFSul-RS) Considere a função f: $[-5, 3] \rightarrow A \subset \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + 2| - 3$. Se *f* é sobrejetora então

a) $A = [-6, 2]$

b) $A = [-5, 2]$

c) $A = [-4, 2]$

x d) $A = [-3, 2]$

12. (Mack-SP) O domínio da função real $f(x) = \sqrt{2 - ||x + 3| - 5|}$, $x \in \mathbb{R}$, é:

a) $[-10, 4]$

b) $[-6, 4]$

c) $[-10, -6] \cup [0, \infty]$

d) $[-\infty, -10] \cup [0, 4]$

x e) $[-10, -6] \cup [0, 4]$

13. (UEL-PR) Na cidade *A*, o valor a ser pago pelo consumo de água é calculado pela companhia de saneamento, conforme mostra o quadro a seguir.

Quantidade de água consumida (em m³)	Valor a ser pago pelo consumo de água (em reais)
Até 10	R$ 18,00
Mais do que 10	R$ 18,00 + (R$ 2,00 por m³ que excede 10 m³)

Na cidade *B*, outra companhia de saneamento determina o valor a ser pago pelo consumo de água por meio da função cuja lei de formação é representada algebricamente por $B(x) = \begin{cases} 17, & \text{se } x \leqslant 10 \\ 2{,}1x - 4, & \text{se } x > 10, \end{cases}$

em que *x* representa a quantidade de água consumida (em m³) e B(x) representa o valor a ser pago (em reais).

a) Represente algebricamente a lei de formação da função que descreve o valor a ser pago pelo consumo de água na cidade *A*. $A(x) = \begin{cases} 18, & \text{se } 0 < x \leqslant 10 \\ 18 + 2(x - 10), & \text{se } x > 10 \end{cases}$

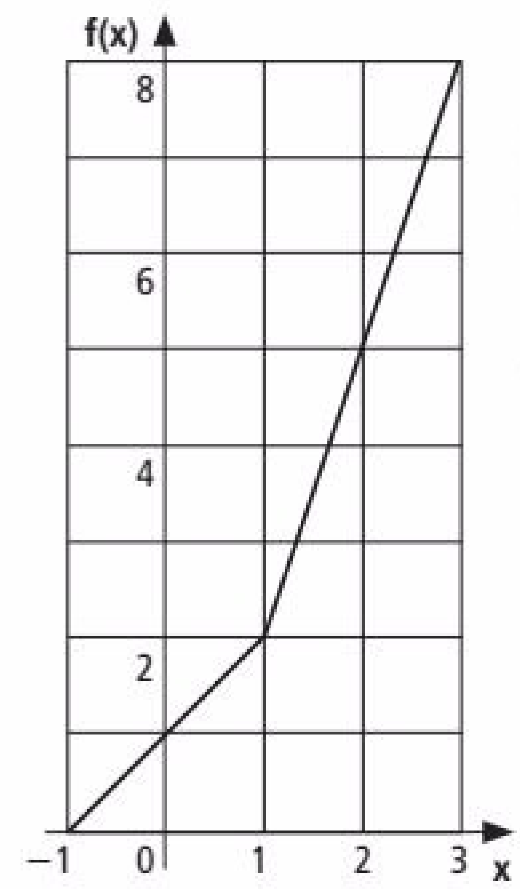
b) Para qual quantidade de água consumida o valor a ser pago será maior na cidade *B* do que na cidade *A*? Acima de 20 m³.

14. (UERJ) O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte função:

$V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|, t \in \mathbb{R}_+$

Nela, *V* é o volume medido em m³ após *t* horas, contadas a partir das 8 h de uma manhã. Determine os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante. 10 h e 11 h

15. (Unicamp-SP) Considere a função $f(x) = 2x + |x + p|$, definida para *x* real.

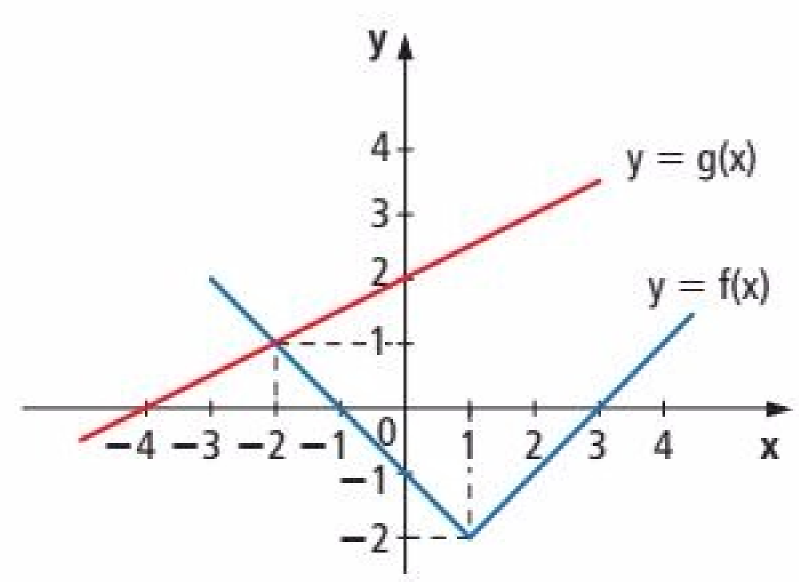


Ilustrações: Editoria de arte

a) A figura acima mostra o gráfico de f(x) para um valor específico de *p*. Determine esse valor. p = −1

b) Supondo, agora, que p = –3, determine os valores de *x* que satisfazem a equação f(x) = 12. S = {5}.

16. (Udesc-SC) Considere os gráficos ilustrados na figura:



Classifique cada sentença abaixo como verdadeira (V) ou falsa (F).

( ) O valor de $g(f(-1) - f(g(-2) + 2)$ é igual a 2.

( ) O valor de $f(g(-4) + 1) + 3$ é igual a 1.

( ) A lei de formação de $y = f(x)$ é $y = |x - 1| - 2$.

Assinale a alternativa que contém a sequência correta, de cima para baixo:

a) V – F – V

x b) V – V – V

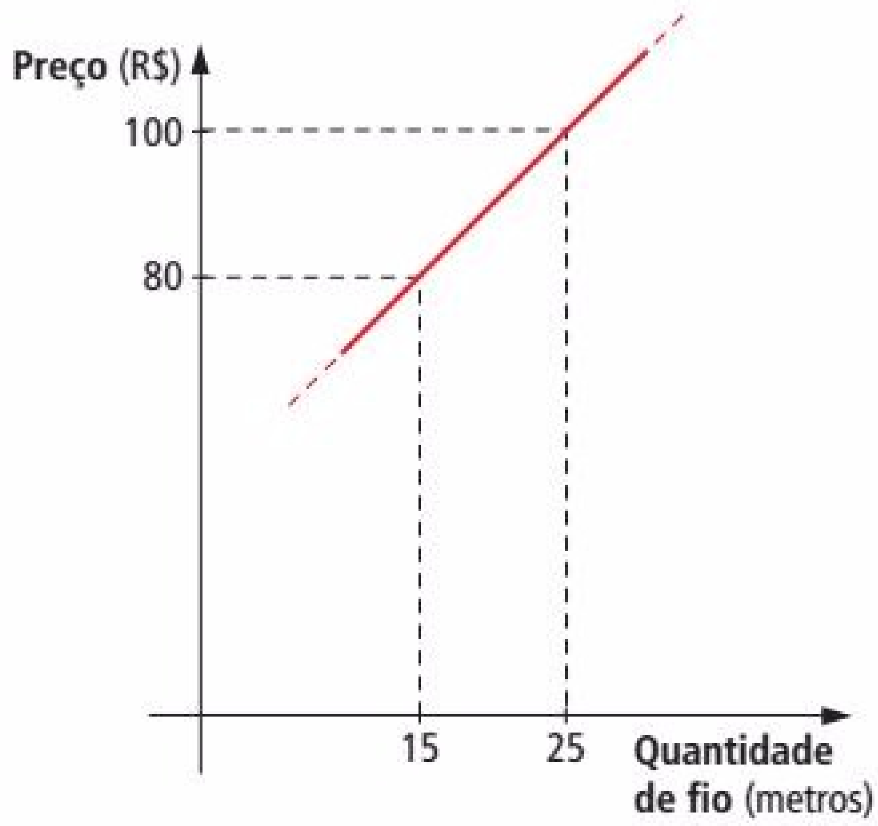
c) F – V – F

d) F – V – V

e) V – V – F

17. (Epcar-MG) Para fazer uma instalação elétrica em sua residência, Otávio contactou dois eletricistas.

O Sr. Luiz, que cobra uma parte fixa pelo orçamento mais uma parte que depende da quantidade de metros de fio requerida pelo serviço. O valor total do seu serviço está descrito no seguinte gráfico:



Já o Sr. José cobra, apenas, R$ 4,50 por metro de fio utilizado e não cobra a parte fixa pelo orçamento.

Com relação às informações acima, é correto afirmar que:

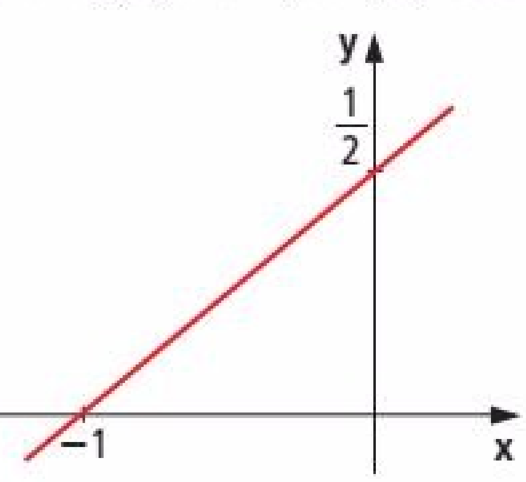
a) o valor da parte fixa cobrada pelo Sr. Luiz é maior do que R$ 60,00.

b) o Sr. Luiz cobra mais de R$ 2,50 por metro de fio instalado.

c) sempre será mais vantajoso contratar o serviço do Sr. José.

d) se forem gastos 20 m de fio não haverá diferença de valor total cobrado entre os eletricistas.

18. (UFRN) O gráfico da função inversa de f(x) é representado a seguir. Logo, a função f(x) é determinada por



a) $f(x) = x + 2$ c) $f(x) = 2x - 1$

b) $f(x) = x - 2$ d) $f(x) = -2x + 1$

19. (FGV-SP) Quantos são os valores inteiros de *x* que satisfazem $-2 \leqslant 2x + 5 \leqslant 10$?

a) Infinitas c) 4 e) 5

b) 6 d) 7

20. (PUC-SP) O domínio da função real dada por

$f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + x}{x - 4}}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x > 4\}$

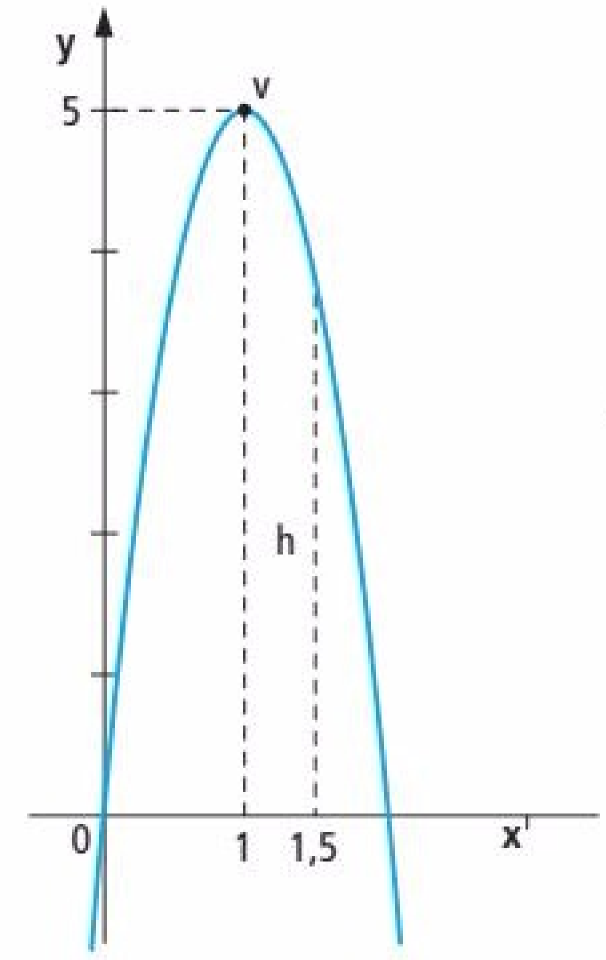
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geqslant 4\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1 \text{ e } x \leqslant 4\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > 4\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1 \text{ e } x > 4\}$

21. (UFAM) Um jardineiro lança um jato de água (posicionando na origem do sistema cartesiano ortogonal) segundo uma parábola cujo vértice é V(1, 5) conforme mostra a figura a seguir.



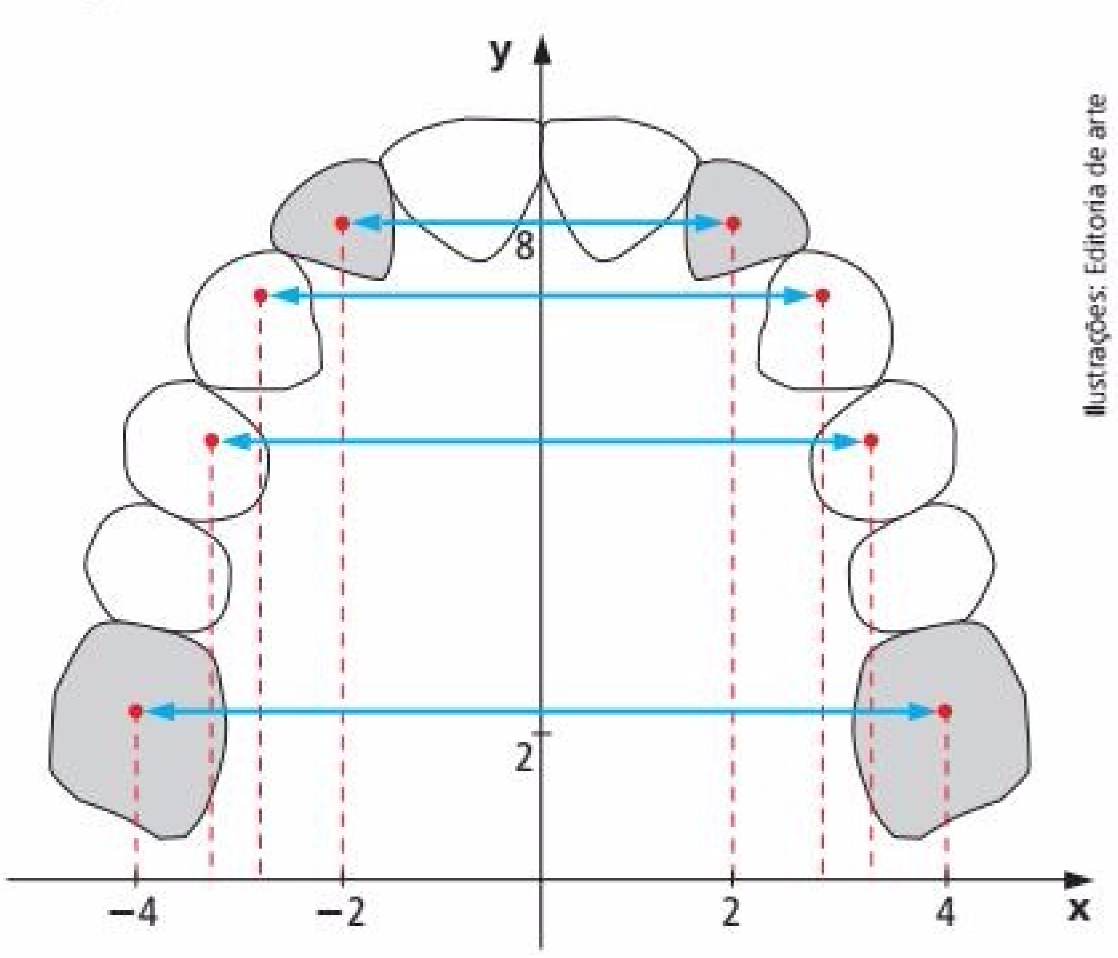
A altura *h* do filete de água, a uma distância de 1,5 m da origem, sobre o eixo das abscissas é:

a) 0,5 m d) 1,2 m

b) 0,8 m e) 3,75 m

c) 1,0 m

22. (Famerp-SP) A figura representa o desenho da arcada dentária de um animal, feito no plano cartesiano ortogonal em escala linear.



Ilustrações: Editoria de arte

Sabendo que as posições dos centros dos dentes destacados em cinza nessa arcada são modeladas nesse plano por meio da função quadrática $y = ax^2 + b$, então a + b é igual a

a) 8,5 d) 10,2

b) 9,2 e) 9,0

c) 9,5

23. (PUC-SP) O conjunto dos valores de x para os quais os pontos do gráfico de $f(x) = x^3 - 4x^2 - 5x$ estão acima do eixo das abscisssas é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 0 < x < 5\}$

x b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 5\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 5\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 5\}$

24. (UERJ) Observe a função f, definida por:

$$f(x) = x^2 - 2kx + 29, \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

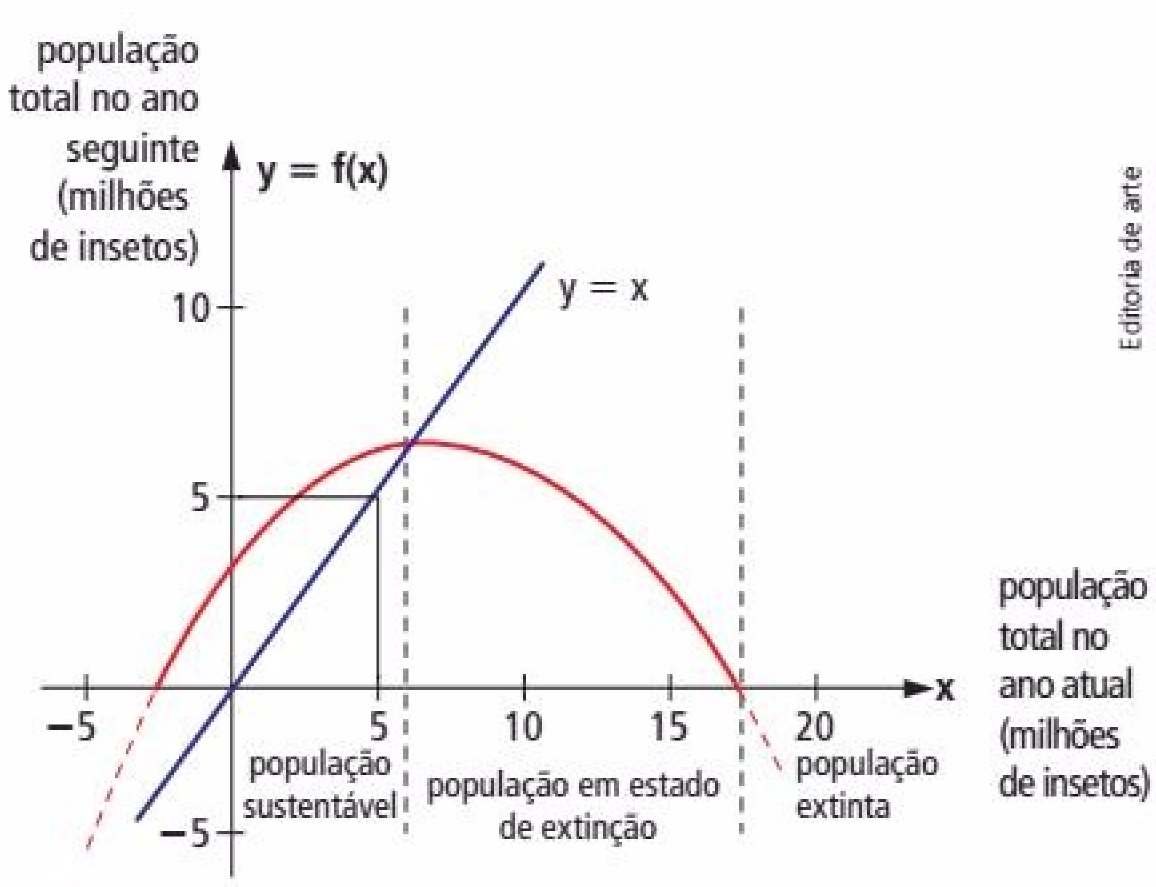
Se $f(x) \geqslant 4$, para todo número real x, o valor mínimo da função f é 4.

Assim, o valor positivo do parâmetro k é:

x a) 5
b) 6
c) 10
d) 15

25. (Unesp-SP) O gráfico da parábola dada pela função $f(x) = -\frac{3}{40}(x^2 - 16x - 24)$ indica, para uma determinada população de insetos, a relação entre a população atual (x) e a população total no ano seguinte, que seria f(x). Por exemplo, se a população atual de insetos é de 1 milhão ($x = 1$), no ano seguinte será de 2,925 milhões, já que $f(1) = 2{,}925$.

Dizemos que uma população de insetos está em tamanho sustentável quando a população total do ano seguinte é maior ou igual a população total atual, o que pode ser identificado graficamente com o auxílio da reta em azul ($y = x$).



Editoria de arte

Determine a população atual de insetos para a qual, no ano seguinte, ela será igual a zero (adote $\sqrt{22} = 4{,}7$), e determine a população atual para a qual a sustentabilidade é máxima, ou seja, o valor de x para o qual a diferença entre a população do ano seguinte e do ano atual, nessa ordem, é a maior possível.

17,4 milhões de insetos; $\frac{4}{3}$ milhão de insetos.

26. (UFV-MG) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^2 - 9$. Sobre a variação de sinal de f, é INCORRETO afirmar que:

a) Os únicos números inteiros para os quais a função é negativa são −1, 0 e 1.

b) O menor número racional para o qual a função é não positiva é $-\frac{3}{2}$.

c) A função é positiva para todos os elementos do conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 - x < 0\}$

x d) O maior número racional para o qual a função é negativa é $\frac{3}{2}$.

27. (UEG-GO) Um jovem vendedor recebe um salário mensal fixo de R\$ 1 000,00, mais uma comissão de R\$ 50,00 por produto vendido. Se ele vender mais de 100 produtos, essa comissão passa a ser de R\$ 100,00 por produto vendido. A função que descreve o salário mensal desse vendedor, na qual y é o salário recebido (em reais) e x a quantidade de produtos vendidos, é

x a) $y = \begin{cases} 1000 + 50x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 1000 + 100x, \text{ se } x > 100 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 1000 + 50x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 100x, \text{ se } x > 100 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 50x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 100x, \text{ se } x > 100 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} 1000, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 100 \\ 1000 + 100x, \text{ se } x > 100 \end{cases}$

28. (UECE) Se $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$, então as raízes irracionais da equação $|f(x) - 6| = 8$ são:

a) $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{2}$ e $-3\sqrt{2}$

x c) $4\sqrt{2}$ e $-4\sqrt{2}$

d) $5\sqrt{2}$ e $-5\sqrt{2}$

29. (Udesc-SC) A soma das raízes distintas da equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$ é:

a) 10
b) 7
c) 0
d) 3
x e) 4

30. (EsPCEx-SP) O número de soluções da equação $\frac{1}{2} \cdot |x| \cdot |x - 3| = 2 \cdot \left|x - \frac{3}{2}\right|$, no conjunto $\mathbb{R}$, é

a) 1
b) 2
c) 3
x d) 4
e) 5

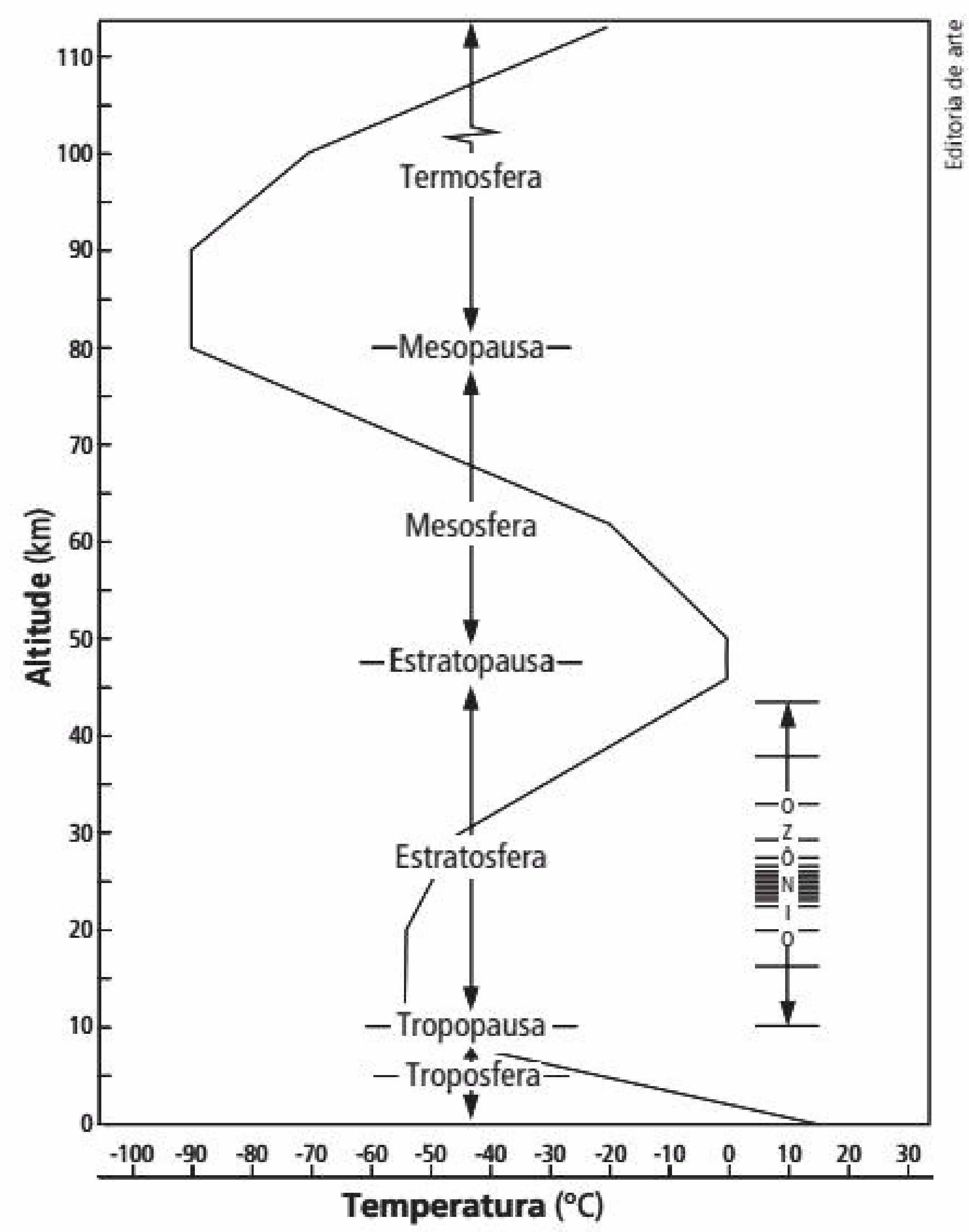
Retomando e pesquisando

Escreva no caderno

Na abertura desta unidade vimos como a atmosfera está dividida, além do comportamento da temperatura em função da altitude em cada uma de suas camadas.

A camada da atmosfera mais próxima da superfície terrestre é a Troposfera, que se estende a uma altitude média de 12 km. Próximo da linha do equador, essa altitude média é de aproximadamente 20 km, e nos polos da Terra, chega apenas a 8 km. Nela, a temperatura decresce, de maneira aproximadamente linear em relação à altitude, com taxa de variação vertical média da temperatura de 6,5 °C/km.

O gráfico ao lado mostra a variação de temperatura em função da altitude.



Com base nessas informações, utilize seus conhecimentos a respeito dos conteúdos abordados nessa unidade para realizar as atividades a seguir.

1. O gráfico apresentado ao lado pode ser interpretado como o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença, em que cada camada da atmosfera tem uma ou mais leis de formação diferente. A partir dessas informações, responda: Veja o Manual do Professor.

a) Qual das grandezas do gráfico é a variável dependente? E qual é a variável independente? Converse com os colegas e o professor a respeito da posição em que elas estão no gráfico e os possíveis motivos dessa escolha.

b) Na Troposfera, o comportamento das grandezas indicadas no item **a** pode ser modelado por qual tipo de função? Qual é o grau dessa função?

c) A função indicada no item **b** é crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

d) Nas demais camadas da atmosfera, o comportamento da variação de temperatura em função da altitude também pode ser associado ao mesmo tipo de função que modela essa variação na Troposfera. No entanto, as funções não têm a mesma lei de formação. Quais elementos distinguem as leis de formação dessas funções?

e) Em quais camadas a função correspondente é crescente e em quais é decrescente?

2. Considere os dados do texto acima e suponha que a temperatura na superfície terrestre num determinado ponto seja 20 °C.

a) Qual é a lei da função que representa a temperatura em função da altitude na Troposfera? Considere a variação média da temperatura indicada no texto.

b) Qual é o zero da função representada no item **a**? Qual é o significado desse valor no contexto da situação apresentada?

c) Analise o que acontece com a temperatura em altitudes acima do valor encontrado no item anterior.

d) Supondo que estivéssemos em um dos polos da Terra, qual seria a temperatura na altitude média limite da Troposfera (considere a medida indicada no texto)?

e) Usando a lei da função definida no item **a**, é possível fazer o cálculo da temperatura para a altitude de 100 km? Justifique sua resposta.

Unidade 4

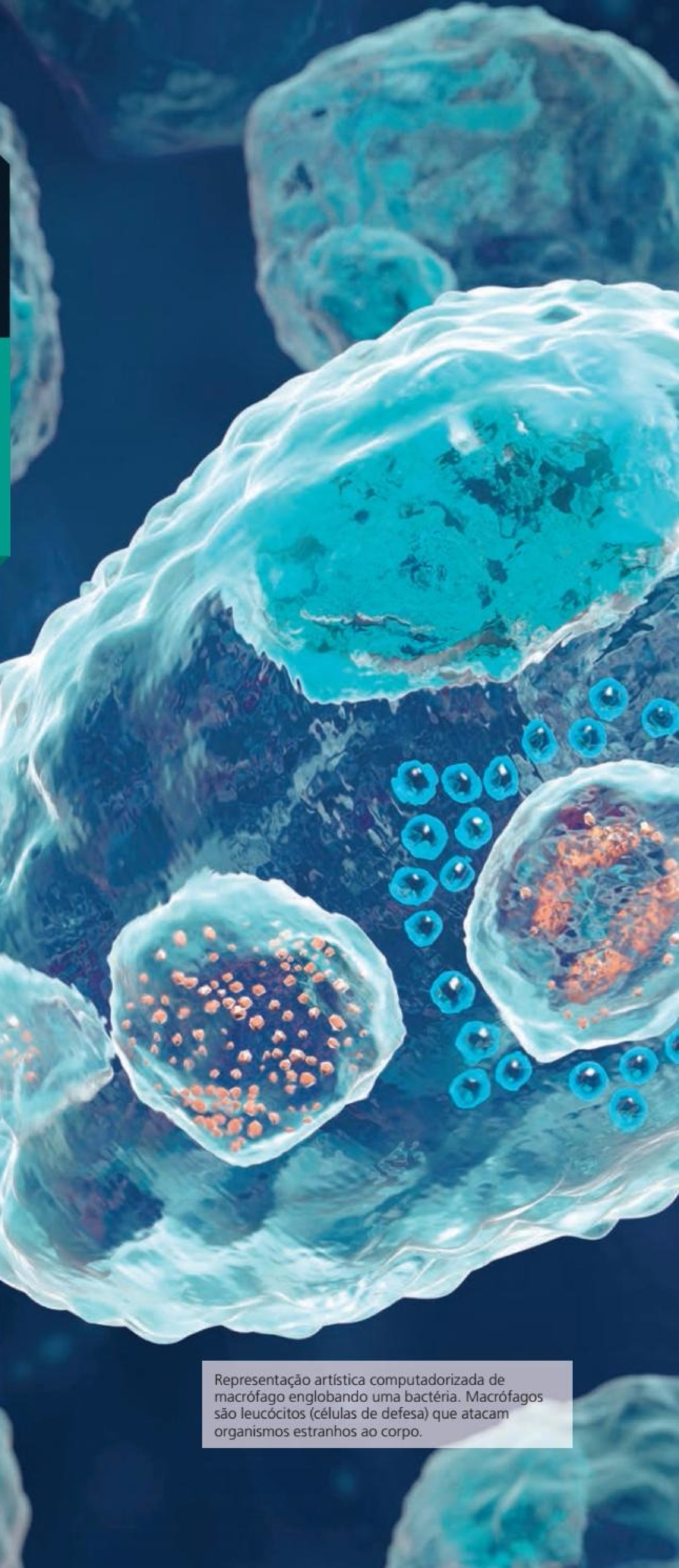
Funções exponencial e logarítmica

A proteína C reativa (PCR) é produzida no fígado e sua concentração se eleva radicalmente quando há a presença de infecções, doenças reumáticas ou traumatismos no organismo. Ela foi descoberta em 1930 após análises do sangue de pessoas que apresentavam pneumonia.

Em geral, o exame PCR é considerado inespecífico, pois é capaz de apontar a existência de uma inflamação logo no início, mas não de afirmar qual é a sua origem. Além disso, indivíduos diabéticos, hipertensos, fumantes ou obesos geralmente possuem níveis da PCR acima do valor ideal. Por isso, recomenda-se que a análise da PCR seja feita em conjunto com o resultado de outros exames.

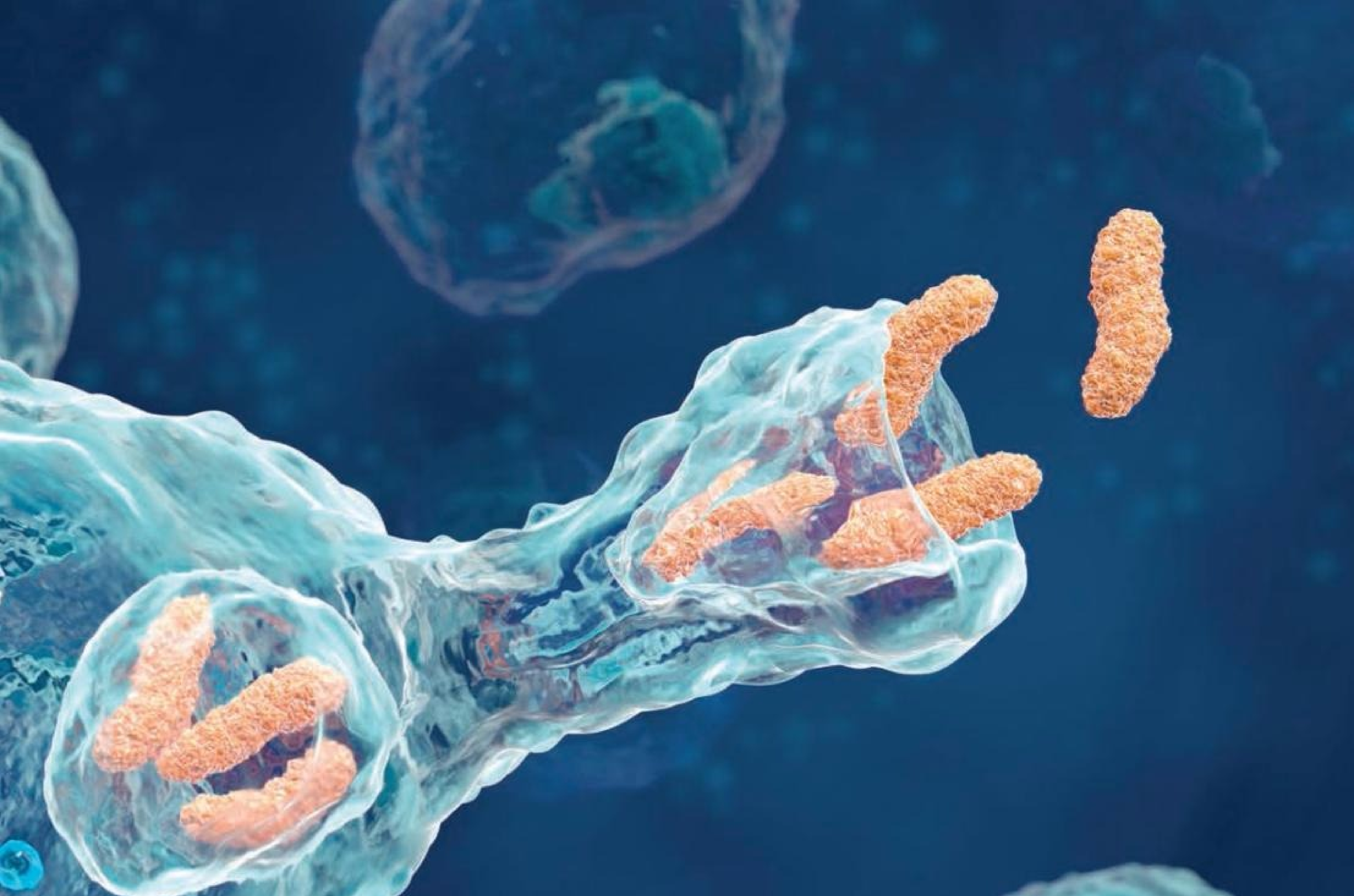
Outra função importante desse teste é acompanhar a eficácia do tratamento do antibiótico utilizado. Se entre 48 e 72 horas após o início do tratamento com o antibiótico, aproximadamente, não houver diminuição dos níveis de PCR, provavelmente o paciente precisará de um novo plano de tratamento.

O exame de PCR (nesse caso, o de PCR ultrassensível) pode ainda indicar de forma indireta o risco de doenças cardíacas, pois os valores de PCR se alteram mesmo com discretas inflamações das artérias, parte do processo de aterosclerose (formação das placas de colesterol).

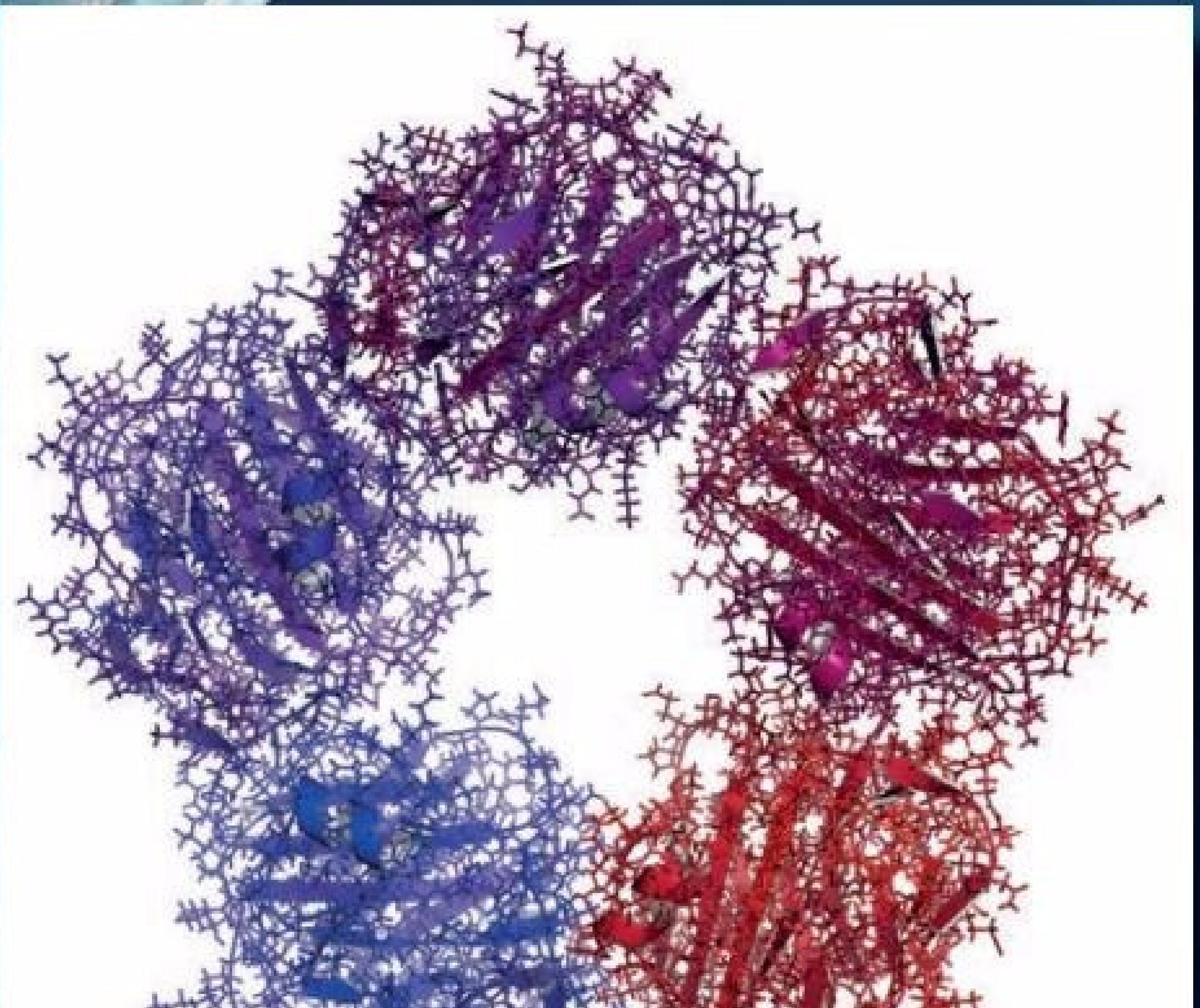


Representação artística computadorizada de macrófago englobando uma bactéria. Macrófagos são leucócitos (células de defesa) que atacam organismos estranhos ao corpo.

Getty Images/Science Photo Library RM



molekuul_be/Shutterstock.com



A Proteína C reativa (PCR) altera-se rapidamente, e significativamente, a um estímulo inflamatório.

Escreva no caderno

1. Você já conhecia a proteína C reativa e sua utilidade na detecção de inflamações? Converse com seus colegas a respeito. Pesquise em livros ou na internet o que é inflamação e seus principais sintomas.
   Veja o Manual do Professor.
2. O exame de PCR geralmente é realizado quando o paciente já apresenta algum sintoma e se deseja identificar o que ele tem. No entanto, é possível diminuir as chances de doenças realizando outros exames periódicos para acompanhamento da saúde. Converse com os colegas a respeito. Quais são os exames de rotina normalmente feitos? Você realiza esses exames regularmente?
3. De acordo com o texto, pessoas que têm diabetes, hipertensão, fumam ou são obesas apresentam níveis de PCR mais elevados que o ideal. Cite algumas ações que podem ser realizadas para evitar o aparecimento dessas doenças.

CAPÍTULO 7

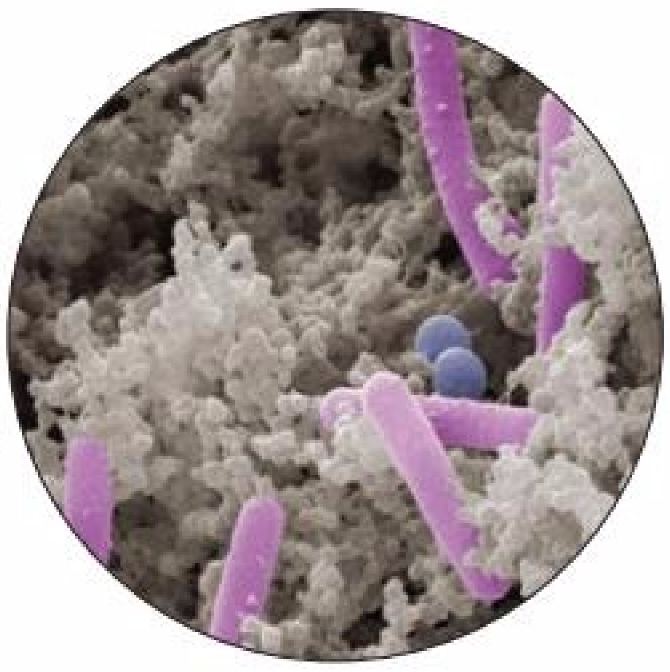
Função exponencial

Nos iogurtes e em outros alimentos derivados do leite fermentado há bactérias que colaboram para o equilíbrio da flora intestinal, evitando a proliferação de bactérias nocivas, melhorando a absorção de nutrientes e fortalecendo nosso sistema imunológico.

Apesar de serem alimentos benéficos, o consumo em excesso pode acarretar alguns efeitos indesejados em nosso organismo. Esses efeitos podem estar relacionados ao aumento do número de bactérias, que se reproduzem muito rapidamente.

Em geral, a reprodução de bactérias, assim como o decaimento de uma substância radioativa, o rendimento de uma aplicação financeira e outras situações, ocorre de forma exponencial e pode ser modelada por um tipo de função que estudaremos neste capítulo: a **função exponencial**.

Power and Syred/SPL



www.BillionPhotos.com/Shutterstock.com

Na imagem ao lado, diversos tipos de derivados do leite. No detalhe, micrografia de duas bactérias presentes no iogurte. Um dos tipos de bactéria tem formato arredondado e está colorizado em lilás; o outro assemelha-se a um bastão rosado; em branco, o iogurte visto por meio do microscópio. (aumento de 5 110 vezes)

Potenciação e radiciação

Antes de abordar o conteúdo de função exponencial, vamos retomar e aprofundar os conhecimentos sobre **potenciação** e **radiciação** que serão essenciais no estudo dessa função, que você provavelmente já estudou no Ensino Fundamental.

Potência com expoente natural

A **potenciação** corresponde a uma multiplicação de fatores iguais.

Sendo *a* um número real e *n* um número natural, com $n \geq 2$, definimos a potência de base *a* e expoente *n* como o produto dos *n* fatores iguais a *a*:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Por definição, nos casos em que $n = 1$ e $n = 0$, temos:

$$a^1 = a \quad \text{e} \quad a^0 = 1 \quad (\text{com } a \neq 0)$$

Exemplos:

a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^1 = \sqrt{2}$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{128}$

d) $(-3)^0 = 1$

Potência com expoente inteiro

Para estender o conceito de potência para expoentes inteiros, vamos definir o que significa uma potência de expoente inteiro negativo.

Se *a* é um número real não nulo ($a \neq 0$) e *n* é um número inteiro e positivo, define-se:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Observe que a potência a^{-n}, com $a \neq 0$, é o **inverso** de a^n.

Exemplos:

a) $6^{-1} = \frac{1}{6}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{64}} = 64$

c) $\left(\sqrt{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$

Propriedades da potenciação

É possível demonstrar que, dados *a* e *b* reais e *m* e *n* inteiros, são válidas as seguintes propriedades operatórias com expoente inteiro.

1ª propriedade: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Exemplo: $3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

2ª propriedade: $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$)

Exemplo: $\frac{4^5}{4^3} = \frac{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot 4 \cdot 4}{\cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}} = 4^{5-3} = 4^2$

3ª propriedade: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplo: $(6^2)^3 = 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 = 6^{2+2+2} = 6^6 = 6^{2 \cdot 3}$

4ª propriedade: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Exemplo: $(5 \cdot 4)^3 = (5 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 4) = 5^3 \cdot 4^3$

5ª propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ ($b \neq 0$)

Exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^3}{3^3}$

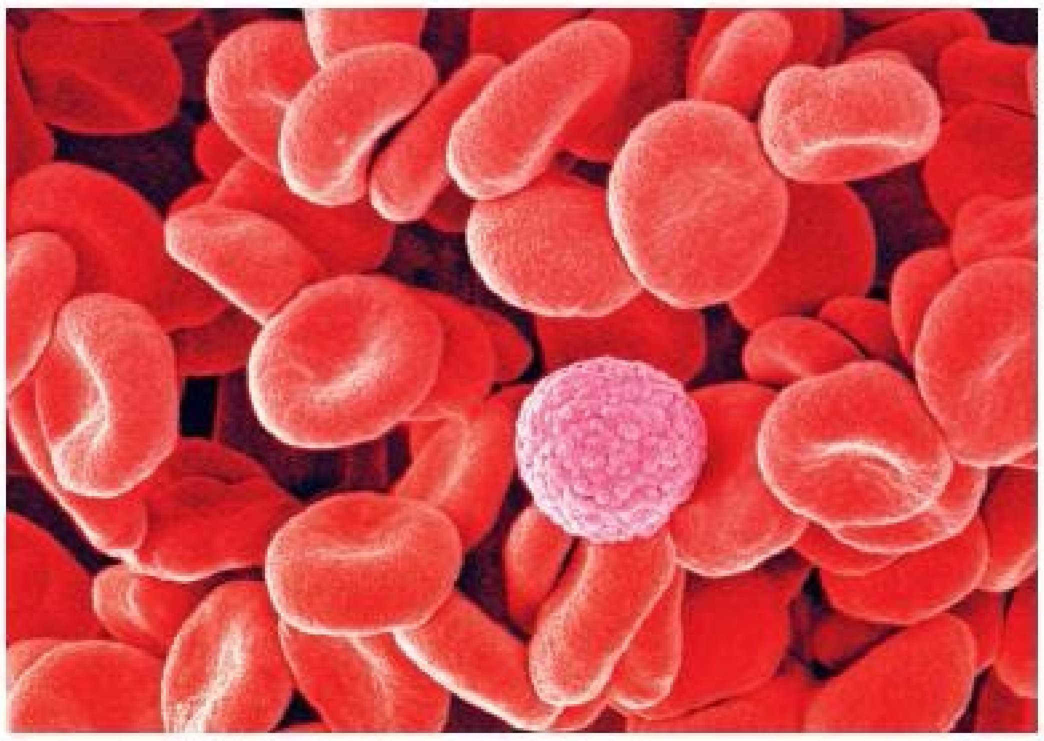
Notação científica

No meio científico é comum nos depararmos com números muito grandes, como as distâncias entre os planetas, ou muito pequenos, como o tamanho de uma célula.

Quando queremos expressar essas grandezas recorremos ao uso da **notação científica** utilizando potências na base 10 para simplificar essas representações.

Sendo *a* um número real maior ou igual a 1 e menor do que 10 e *n* um número inteiro, a forma em notação científica de um número real não nulo é dada por:

$$a \cdot 10^n$$



© Micro Discovery/Corbis

Micrografia eletrônica escaneada de células vermelhas (hemácias) e brancas (leucócitos) do sangue humano com ampliação de aproximadamente 3 000 vezes, ou seja, $3 \cdot 10^3$.

Exemplos:

a) O raio médio do Sol é de 696 000 000 metros; escrevendo na forma de notação científica, temos: 696 000 000 metros $= 6{,}96 \cdot 10^8$ metros (note que $a = 6{,}96$ e $1 \leqslant a < 10$)

b) O diâmetro do átomo de hidrogênio é aproximadamente 0,0000000001 metro; em notação científica, temos: 0,0000000001 metro $= 1{,}0 \cdot 10^{-10}$ metro (note que $a = 1{,}0$ e $1 \leqslant a < 10$)

Radiciação

Antes de estender o conceito de potência para expoentes racionais, vamos retomar a definição de raiz enésima e as propriedades da operação de radiciação.

Sendo *a* um número real não negativo e *n* um número natural, com n ⩾ 1, a raiz enésima de *a* é o número real não negativo *b* tal que:

$$\underbrace{\sqrt[n]{a} = b}_{\text{Lê-se raiz enésima de } a \text{ é igual a } b.} \text{ se, e somente se, } b^n = a$$

Propriedades da radiciação

Sendo *a* e *b* números reais não negativos, *m* inteiro e *n* e *p* naturais não nulos, apresentamos as seguintes propriedades:

1ª propriedade: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Exemplo: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}$

2ª propriedade: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

Exemplo: $\sqrt[3]{27^4} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$

3ª propriedade: $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$

Exemplo: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[4 \cdot 3]{7} = \sqrt[12]{7}$

4ª propriedade: $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$ e $\sqrt[n : p]{a^{m : p}} = \sqrt[n]{a^m}$

Exemplo: $\sqrt[4]{6^3} = \sqrt[4 \cdot 5]{6^{3 \cdot 5}} = \sqrt[20]{6^{15}}$

5ª propriedade: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

Exemplo: $\sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{5}{2}$

No cálculo da raiz enésima, temos de considerar dois casos:

- Para *n* ímpar e *a* um número real negativo, a raiz enésima de *a* é o número real negativo *b*, tal que $b^n = a$.
- Para *n* par e *a* um número real negativo, não podemos definir a raiz enésima de *a*, pois não existe número real *b*, tal que $b^n = a$.

Potência com expoente racional

Para estender o conceito de potência para expoentes racionais, vamos definir o significado de uma potência com expoente fracionário.

Se *a* é um número real positivo e *m* e *n*, inteiros, com n ⩾ 1, define-se:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ b) $13^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{13^2}$ c) $\sqrt{21} = 21^{\frac{1}{2}}$ d) $\sqrt[4]{16^3} = 16^{\frac{3}{4}}$

As potências com expoente racional têm as mesmas propriedades operatórias que as potências com expoente inteiro.

Por exemplo, podemos calcular $8^{\frac{4}{3}}$ usando a definição ou as propriedades estudadas anteriormente:

$$8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(4096)} = 16$$

ou

$$8^{\frac{4}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{4}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{4}{3}} = 2^4 = 16$$

Potência com expoente real

Para estender o conceito de potência para expoentes reais, vamos definir o significado de uma potência com expoente irracional.

Por exemplo, como calcular $10^{\sqrt{2}}$?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar, inicialmente, aproximações racionais de $\sqrt{2}$ por falta, tomando os valores 1; 1,4; 1,41; 1,414; ... e, por excesso, tomando os valores 2; 1,5; 1,42; 1,415; ...

Usando uma calculadora científica, vamos listar alguns resultados e obter a melhor aproximação para $10^{\sqrt{2}}$.

n	10^n (por falta)
1	10
1,4	25,11886
1,41	25,70395
1,414	25,94179
1,4142	25,95374
1,41421	25,95434
1,414213	25,95451
⋮	⋮

n	10^n (por excesso)
2	100
1,5	31,62277
1,42	26,30267
1,415	26,00159
1,4143	25,95971
1,41422	25,95493
1,414214	25,95457
⋮	⋮

De acordo com os resultados obtidos nas duas tabelas, temos que:

$$25{,}95451 < 10^{\sqrt{2}} < 25{,}95457$$

Assim, sendo *a* um número real positivo e *x* um número irracional, é possível obter aproximações racionais para o valor de a^x.

Para potências com expoente irracional valem as mesmas propriedades operatórias das potências com expoente inteiro.

Exemplos:

a) $\left(10^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 10^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 10^2 = 100$

b) $2^{\pi} \cdot 2^{3\pi} = 2^{\pi + 3\pi} = 2^{4\pi}$

c) $9^{3\sqrt{5}} : 9^{\sqrt{5}} = 9^{3\sqrt{5} - \sqrt{5}} = 9^{2\sqrt{5}}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{3}} = \frac{2^{\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}}}$

Exercícios resolvidos

1 Calcule o valor de $\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

Resolução

Vamos decompor o número 243 em fatores primos:

243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Logo, $243 = 3^5$.

Então:

$$\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{3^5}\right)^{-\frac{2}{5}}$$

Como o expoente é negativo, aplicamos a definição: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$\left(\frac{1}{3^5}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(3^5\right)^{\frac{2}{5}}$$

Aplicando a propriedade $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, obtemos:

$$\left(3^5\right)^{\frac{2}{5}} = 3^{5 \cdot \frac{2}{5}} = 3^2 = 9$$

Portanto: $\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{2}{5}} = 9$.

2 Aplicando as propriedades da potenciação, calcule $(5^3 \cdot 5^6) : 5^{10}$.

Resolução

Usando as propriedades, temos:

$(5^3 \cdot 5^6) : 5^{10} = 5^{3+6} : 5^{10} = 5^9 : 5^{10} = 5^{9-10} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$

3 Determine o valor da expressão: $\frac{2}{3} \cdot 8^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot 8^{-\frac{2}{3}}$

Resolução

Aplicando as propriedades de potências, temos:

$$\frac{2}{3} \cdot \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} \cdot \left(2^3\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \cdot 2^2 - \frac{2}{3} \cdot 2^{-2} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{2}{3} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{8}{3} - \frac{1}{6} = \frac{16-1}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Portanto, o valor da expressão é $\frac{5}{2}$.

4 Sabendo que $0{,}001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$, simplifique a expressão $\frac{(0{,}1)^5 \cdot (0{,}01)^4 \cdot 100}{(0{,}001)^3}$.

Resolução

Substituindo os números decimais por frações decimais e aplicando as propriedades de potências, temos:

$$\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^4 \cdot 100}{\left(\frac{1}{1000}\right)^3} = \frac{\left(10^{-1}\right)^5 \cdot \left(10^{-2}\right)^4 \cdot 10^2}{\left(10^{-3}\right)^3} = \frac{10^{-5} \cdot 10^{-8} \cdot 10^2}{10^{-9}} = \frac{10^{-5-8+2}}{10^{-9}} = \frac{10^{-11}}{10^{-9}} =$$

$$= 10^{-11} \cdot 10^9 = 10^{-11+9} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

5 (PUCCamp-SP) Efetuando-se $\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}}$, obtém-se:

a) $\frac{\sqrt[3]{14} + 2}{5}$ b) $\frac{\sqrt[3]{114}}{5}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{3}{5}$

Resolução

Resolvendo as operações e aplicando as propriedades da radiciação, temos:

$$\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}} = \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{15-11}{25}}} = \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{4}{25}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}} = \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \frac{2}{5}} = \sqrt[3]{\frac{14+50}{125}} = \sqrt[3]{\frac{64}{125}} \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$$

Logo, $\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}} = \frac{4}{5}$.

A resposta correta é a alternativa **d**.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Calcule:

a) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$ $\frac{1}{64}$

b) $(-1,2)^2$ $1,44$

c) $(-0,1)^2$ $0,01$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ $\frac{16}{81}$

2. Escreva no caderno, sob a forma de radical as seguintes potências:

a) $5^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[4]{5^3}$

b) $10^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{10}$

c) $2^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{2}$

d) $3^{0,25}$ $\sqrt[4]{3}$

e) $\pi^{\frac{1}{4}}$ $\sqrt[4]{\pi}$

f) $3^{-\frac{1}{2}}$ $\sqrt{3^{-1}}$ ou $\sqrt{\frac{1}{3}}$

3. Aplicando as propriedades gerais das potências, reduza a uma só potência:

a) $3^4 \cdot 3^5$ 3^9

b) $(x^3)^4$ x^{12}

c) $7^9 \cdot 7^4$ 7^{13}

d) $\frac{10^{12}}{10^5}$ 10^7

e) $(10^3)^2$ 10^6

f) $a^{n+1} \cdot a^{n-2}$ a^{2n-1}

4. Observando que, se $a \neq 0, \frac{1}{a^n} = a^{-n}$, escreva na forma de potência com expoente inteiro negativo:

a) $\frac{1}{3^2}$ 3^{-2}

b) $\frac{1}{10^4}$ 10^{-4}

c) $\frac{1}{2^5}$ 2^{-5}

d) $\frac{1}{6^2}$ 6^{-2}

e) $\frac{1}{2}$ 2^{-1}

f) $\frac{1}{x^2}$ x^{-2}

5. Usando uma calculadora simples, calcule:

a) $5^{1,5}$ $\simeq 11,18$

b) $12^{\frac{1}{4}}$ $\simeq 1,86$

c) $28^{0,25}$ $\simeq 2,30$

d) $3^{4,5}$ $\simeq 140,29$

e) $2^{2,6}$ $\simeq 6,06$

f) $\left(\frac{5}{3}\right)^{1,25}$ $\simeq 1,89$

6. (Unicamp-SP)

a) Calcule as seguintes potências: $a = 3^3$, $b = (-2)^3$, $c = 3^{-2}$ e $d = (-2)^{-3}$. $a = 27$; $b = -8$; $c = \frac{1}{9}$; $d = -\frac{1}{8}$

b) Escreva os números *a*, *b*, *c* e *d* em ordem crescente. $-8; -\frac{1}{8}; \frac{1}{9}; 27$

7. Qual é a metade de 2^{2012}? 2^{2011}

8. Determine o número que representa a expressão: $(4^{x+2} : 4^{x-2}) : (4^x : 4^{x-1})$. 64

9. Determine o valor da expressão $\frac{3^{12} - 3^{11} - 3^{10}}{3^{11} + 3^{10} + 3^{10}}$. 1

10. Simplifique a expressão $\frac{a + b}{a^{-1} + b^{-1}}$, com $a \neq -b$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$. ab

11. (Unifor-CE) Simplificando a expressão $\frac{2^{6n} - 1}{2^{6n} + 2^{3n+1} + 1}$, na qual $n \in \mathbb{R}$, obtém-se:

a) 0

b) 2^{3n}

c) $-\frac{1}{2^{3n}}$

d) $\frac{2^{3n} + 1}{2^{3n}}$

X e) $\frac{2^{3n} - 1}{2^{3n} + 1}$

12. Efetue a multiplicação $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7^2}$. $7\sqrt[6]{7}$

13. Ao resolver a expressão abaixo, cometeu-se um erro em uma das passagens. Descubra, corrija e dê a resposta correta. Passagem 3; 25.

$5^{1+\sqrt{3}} : 5^{\sqrt{3}-1} =$

$= \frac{5^{1+\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}-1}} =$ (passagem 1)

$= 5^{(1+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)} =$ (passagem 2)

$= 5^{\cancel{1}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{1}} =$ (passagem 3)

$= 5^0 = 1$ (passagem 4)

14. (UFSM-RS) Determine o valor da expressão $\sqrt[3]{\frac{(60\,000) \cdot (0,00009)}{0,0002}}$. 30

15. (Pasusp-SP) As células da bactéria *Escherichia coli* têm formato cilíndrico, com $8 \cdot 10^{-7}$ metros de diâmetro. O diâmetro de um fio de cabelo é de aproximadamente $1 \cdot 10^{-4}$ metros. Dividindo-se o diâmetro de um fio de cabelo pelo diâmetro de uma célula de *Escherichia coli*, obtém-se, como resultado:

X a) 125

b) 250

c) 500

d) 1 000

e) 8 000

16. (Enem/MEC) Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas **Veja** (ed. 2055), **Cláudia** (ed. 555), **National Geographic** (ed. 93) e **Nova Escola** (ed. 208). (Adaptado).

Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consumam 1000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

a) 10^{-2}

b) 10^3

c) 10^4

d) 10^6

X e) 10^9

Função exponencial

A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$, com *a* real, $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial de base *a*.

Exemplos:

a) $f(x) = (2)^x$ b) $f(x) = (0{,}4)^x$ c) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ d) $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$

Por que a base deve ser positiva e diferente de 1? Observe:

> Atenção:
> Se $a = 0$ e $x < 0$, a^x não está definida em $\mathbb{R}$.
> Se $a = 0$ e $x > 0$, *f* é uma função constante igual a 0.

- Se $a < 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo *x* real.

  Por exemplo, supondo $a = -2$ e $x = \frac{1}{2}$, teríamos a potência $(-2)^{\frac{1}{2}}$ que não está definida em $\mathbb{R}$, pois $(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$.
- Se $a = 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função constante, pois: $f(x) = 1^x \Rightarrow f(x) = 1$, para todo *x* real.

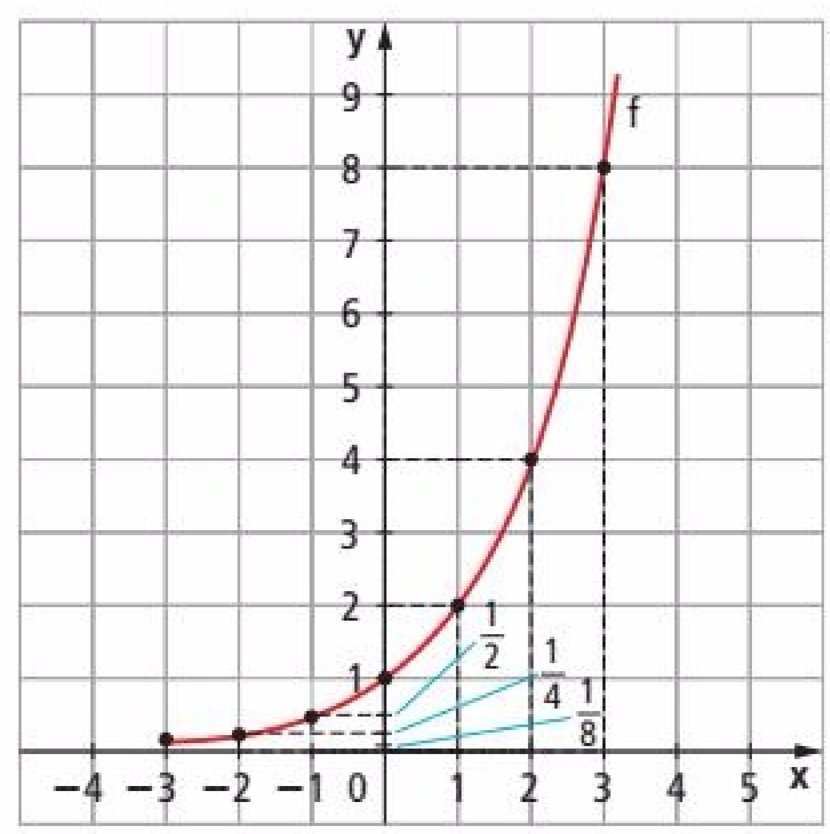
Gráfico da função exponencial

Vamos, agora, examinar o comportamento da função exponencial traçando seu gráfico no plano cartesiano. Observe os dois casos a seguir.

1º caso: $a > 1$

Veja o esboço do gráfico de $f(x) = 2^x$.

x	$f(x) = 2^x$
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Ilustrações: Editoria de arte

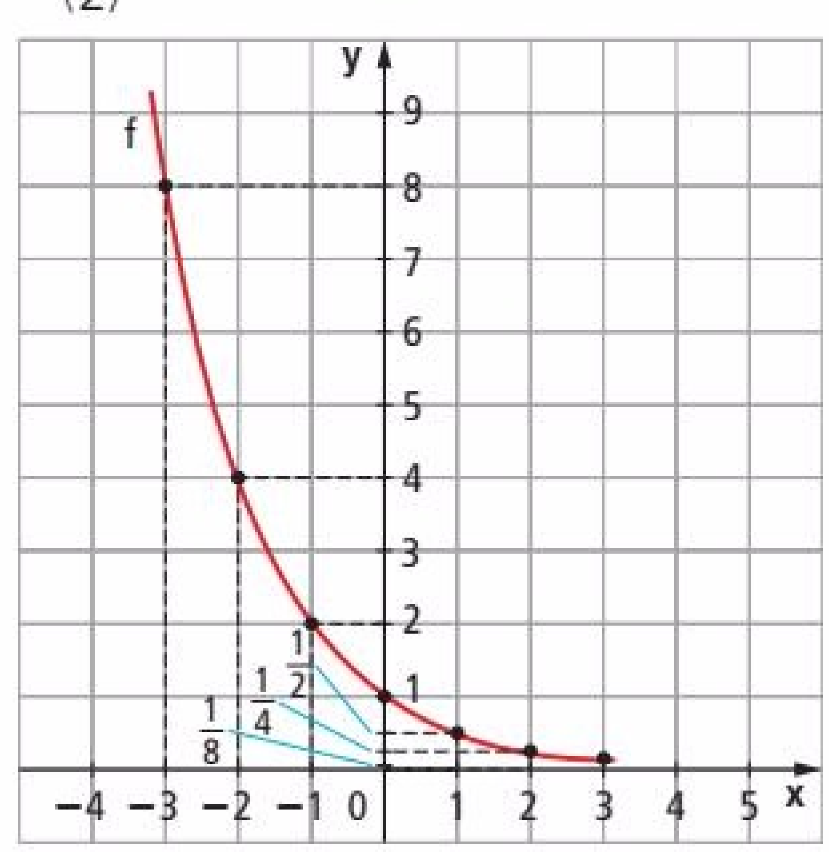
Note que quanto maior o valor do expoente *x*, maior é a potência a^x, ou seja, se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é **crescente** em todo o seu domínio.

> Note que as curvas dos gráficos se aproximam do eixo Ox, mas não o tocam e cruzam o eixo Oy no ponto (0, 1).

2º caso: $0 < a < 1$

Veja o esboço do gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Nesse caso, quanto maior o valor do expoente *x*, menor é a potência a^x, ou seja, se $0 < a < 1$, a função $f(x) = a^x$ é **decrescente** em todo o seu domínio.

De acordo com a definição da função dada por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) e observando os dois gráficos, temos:

- O **domínio** da função exponencial dada por $f(x) = a^x$ é $D(f) = \mathbb{R}$.
- O **contradomínio** da função exponencial dada por $f(x) = a^x$ é $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$
- O conjunto **imagem** da função exponencial dada por $f(x) = a^x$ é $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Observação:

A função exponencial dada por $f(x) = a^x$ é **injetora**, pois quaisquer dois elementos distintos do seu domínio têm imagens distintas. Como $Im(f) = CD(f)$, a função é **sobrejetora**. Desse modo, podemos dizer que a função exponencial é **bijetora**. Essas informações serão muito úteis para o estudo da função logarítmica, no próximo capítulo.

Exercício resolvido

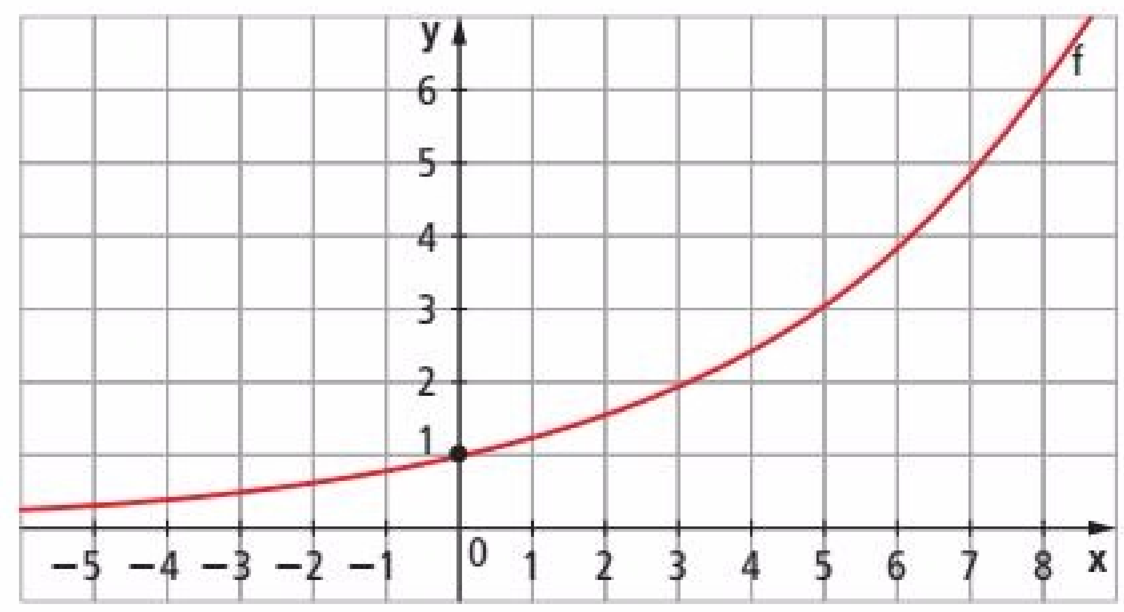
6 (Unifei-SP) Sendo $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ para $x \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que:

a) o gráfico de f intercepta o eixo x em apenas um ponto.
b) f é decrescente.
c) o conjunto imagem de f é dado por $Im(f) =]0, +\infty[$.
d) o gráfico de f intercepta o eixo y no ponto $\left(0, \frac{5}{4}\right)$.
e) $f(-1) = \frac{5}{4}$

Resolução

Vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Como $a = \frac{5}{4} > 1$, $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ é crescente.

x	−2	−1	0	1	2
$f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$



Editoria de arte

Observamos que:
a) o gráfico de f não tem intersecção com o eixo x.
b) f é crescente.
c) o conjunto imagem de f é $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
d) o gráfico de f cruza o eixo y no ponto $(0, 1)$.
e) $f(-1) = \frac{4}{5}$

Portanto, a única afirmativa verdadeira é a correspondente à alternativa **c**.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

17. Identifique como crescente ou decrescente as funções exponenciais a seguir.

a) $f(x) = 5^x$ Crescente
b) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ Decrescente
c) $f(x) = 2^{-x}$ Decrescente
d) $f(x) = 3^{\frac{x}{2}}$ Crescente

18. Esboce o gráfico das funções: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $f(x) = 3^x$
b) $f(x) = 2^{x+1}$
c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
d) $f(x) = 2^x + 1$

19. Durante a aula de Matemática o professor comentava sobre uma função que representava o crescimento de uma determinada bactéria e escreveu no quadro $f(t) = 2^t$, para $t \geqslant 0$, em que t é dado em horas e $f(t)$ em milhares de bactérias.

Um aluno distraído copiou $f(t) = 2t$ e, portanto, seus cálculos não deram certo.

a) Esboce os gráficos das duas funções em um mesmo sistema de coordenadas. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.
b) Existe algum valor para t no qual as duas funções se igualam? Se sim, quais? Sim, para t = 1 h e t = 2 h.
c) O que você pode concluir sobre o crescimento das duas funções? Para $t > 2$ o crescimento da função 2^t é maior.
d) Para $t = 3$ h qual é a diferença entre o número de bactérias nas duas funções? 2 000 bactérias

20. Usinas nucleares e aparelhos de radioterapia são algumas das aplicações da radioatividade. No entanto, ela também pode ser fonte de armamentos e, se não manuseada com muito cuidado, pode ser fatal. Leia o texto a seguir sobre decaimento radioativo e faça o que se pede.

Radioatividade

O esquecimento de uma rocha de urânio sobre um filme fotográfico virgem levou à descoberta de um fenômeno interessante: o filme foi velado (marcado) por "alguma coisa" que saía da rocha, na época denominada raios ou **radiações**.

Outros elementos pesados, com massas próximas à do urânio, como o rádio e o polônio, também tinham a mesma propriedade.

O fenômeno foi denominado **radioatividade** e os elementos que apresentavam essa propriedade foram chamados de **elementos radioativos**.

Comprovou-se que um núcleo muito energético, por ter excesso de partículas ou de carga, tende a estabilizar-se, emitindo algumas partículas. [...]

O lixo atômico

Os materiais radioativos produzidos em Instalações Nucleares (Reatores Nucleares, Usinas de Beneficiamento de Minério de Urânio e Tório, Unidades do Ciclo do Combustível Nuclear), Laboratórios e Hospitais, nas formas sólida, líquida ou gasosa, que não têm utilidade, não podem ser simplesmente "jogados fora" ou "no lixo", por causa das radiações que emitem. Esses materiais, que não são utilizados em virtude dos riscos que apresentam, são chamados de **Rejeitos Radioativos**.

Na realidade, a expressão "lixo atômico" é um pleonasmo, porque qualquer lixo é formado por átomos e, portanto, é atômico. Ele passa a ter essa denominação popular quando é radioativo.

Tratamento de rejeitos radioativos

Os rejeitos radioativos precisam ser tratados, antes de serem liberados para o meio ambiente, se for o caso. Eles podem ser liberados quando o nível de radiação é igual ao do meio ambiente e quando não apresentam toxidez química.

Rejeitos sólidos, líquidos ou gasosos podem ser, ainda, classificados, quanto à atividade, em rejeitos de **baixa**, **média** e **alta** atividade.

Os rejeitos de meia-vida curta são armazenados em locais apropriados (preparados), até sua atividade atingir um valor semelhante ao do meio ambiente, podendo, então, ser liberados. Esse critério de liberação leva em conta somente atividade do rejeito. É evidente que materiais de atividade ao nível ambiental mas que apresentam toxidez química para o ser humano ou que são prejudiciais ao ecossistema não podem ser liberados sem um tratamento químico adequado.

> **Meia-vida** é o tempo necessário para a atividade de um elemento radioativo ser reduzida à metade da atividade inicial.

Rejeitos sólidos de baixa atividade, como partes de maquinária contaminadas, luvas usadas, sapatilhas e aventais contaminados, são colocados em sacos plásticos e guardados em tambores ou caixas de aço, após classificação e respectiva identificação. Os produtos de fissão, resultantes do combustível nos reatores nucleares, sofrem tratamento especial em Usinas de Reprocessamento, onde são separados e comercializados, para uso nas diversas áreas de aplicação de radioisótopos. Os materiais radioativos restantes, que não têm justificativa técnica e/ou econômica para serem utilizados, sofrem tratamento químico especial e são vitrificados, guardados em sistemas de contenção e armazenados em Depósitos de Rejeitos Radioativos.

Fonte: CARDOSO, Eliezer de Moura. **Apostila educativa**: radioatividade. Rio de Janeiro: CNEN (Comissão Nacional de Energia Nuclear). p. 5; 14-15. Disponível em: <https://portalnuclear.cnen.gov.br/Material_didatico/apostilas/radio.pdf>. Acesso em: 02 abr. 2016.

REUTERS

Em locais onde há presença de elementos radioativos, é obrigatório o uso de roupas especiais.


Getty Images/Cultura RF

A radioatividade é utilizada em diversos exames diagnósticos, como a tomografia computadorizada.

a) De acordo com o texto, a descoberta da radioatividade se deu a partir de um experimento realizado em qual tipo de rocha? Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) De acordo com o texto, todos os diferentes tipos de rejeitos radioativos podem ser descartados da mesma forma? Explique.

c) A emissão de energia, ou a radiação proporcionada pela desintegração do núcleo de átomos, cai gradativamente ao longo do tempo. Esse processo é chamado de decaimento radioativo e pode ser modelado pela função: $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$, em que λ é uma constante de desintegração que varia de átomo para átomo, N é o número de núcleos radioativos após o período t (em segundos) e N_0 é a quantidade inicial de núcleos radioativos. Se $\lambda > 0$, o que indica que a função $N(t)$ é decrescente, ou seja, modela um decaimento?

d) Reúna-se com mais dois colegas e pesquise os acidentes radioativos mais conhecidos. Quais foram suas causas e consequências.

Explorando a tecnologia

A base da potenciação e o gráfico da função exponencial

Você estudou que uma função exponencial dada por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ é considerada:

- crescente, se $a > 1$;
- decrescente, se $0 < a < 1$.

Agora vamos utilizar o GeoGebra para analisar a influência da base *a* da potenciação no gráfico da função exponencial.

Para isso, siga a sequência de passos abaixo:

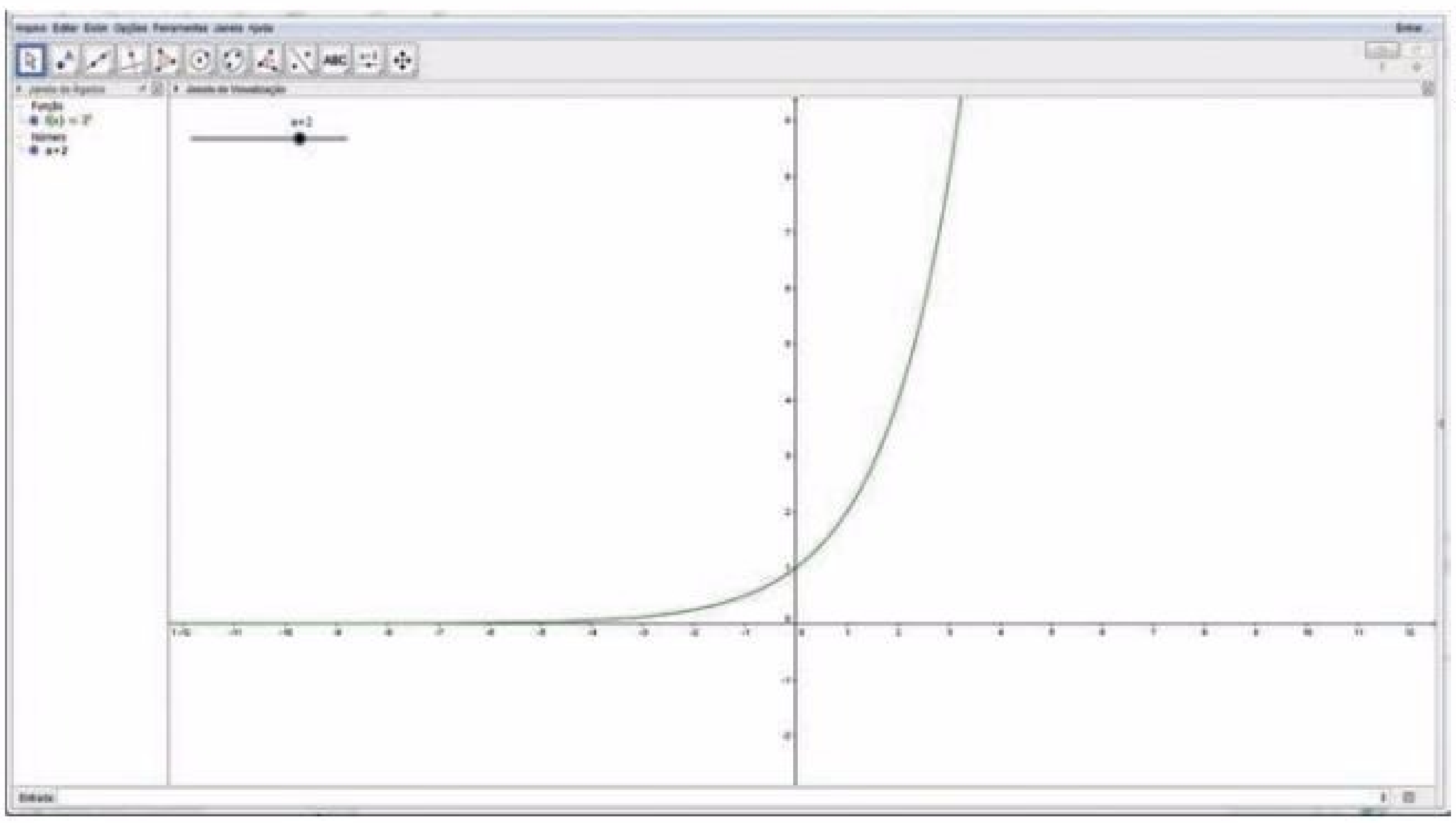
1. No **Campo de Entrada** do GeoGebra, digite ‘f(x)=a^x’ e pressione **enter**.

2. O programa exibirá uma tela perguntando se você deseja criar um controle deslizante para o coeficiente *a*. Clique em “Criar Controles Deslizantes”.

3. O programa exibirá o gráfico da função *f* e o **Controle Deslizante** para o coeficiente *a*. Altere a posição do ponto ao longo do controle para alterar o valor de *a* e veja o que acontece com o gráfico de *f*. Observe que o Controle Deslizante *a* é a base da função exponencial.

4. Por padrão, o Controle Deslizante é criado limitado ao intervalo $[-5, 5]$. Para alterá-lo, clique com o botão direito do *mouse* em cima do controle e em seguida em “Propriedades”. Na aba “Controle Deslizante“, altere os campos de “min:” e “max:” para os valores desejados. Em seguida, clique em “Fechar”.

A tela do GeoGebra ficará semelhante à da figura abaixo.



Geogebra

Note que a função *f* tem valores muitos próximos de zero, mas nunca admite o valor zero, ou seja, não existe *x* tal que $f(x) = 0$. Você pode conferir esse fato dando *zoom* na tela do GeoGebra para aproximar o gráfico e verificar que ele nunca encosta no eixo *x*. Para isso, basta movimentar o botão *scroll* do *mouse* para a frente.

Atividades

Escreva no caderno

1. Movimente o Controle Deslizante e faça variar o valor de a. Analise as variações e responda o que acontece em cada caso a seguir, justificando-as.

1. b) O gráfico representa uma função decrescente como visto anteriormente.

1. c) O gráfico é uma reta paralela ao eixo *x*, pois a função se torna $f(x) = 1^x = 1$.

a) Para $a < 0$; b) Para $0 < a < 1$; c) Para $a = 1$; d) Para $a > 1$.

1. a) Nenhum gráfico é exibido, pois $a < 0$ não é um valor válido para *a* na função f(x).

2. Repita o processo apresentado, mas agora para a função $g(x) = 2^{b \cdot x}$, criando um Controle Deslizante para o coeficiente *b*. No Geogebra, você deve digitar assim: f(x) = 2 ^ (b*x).

1. d) O gráfico representa uma função crescente como visto anteriormente.

Faça o parâmetro *b* variar, analisando o que acontece quando:

a) $b < 0$; Quanto menor o valor do expoente $b \cdot x$, maior é a potência $2^{b \cdot x}$ e a função é decrescente.

b) $b > 0$; Quanto maior o valor do expoente $b \cdot x$, maior é a potência $2^{b \cdot x}$ e a função é crescente.

Equações exponenciais

Toda equação cuja incógnita se apresenta no expoente de pelo menos uma potência de base real, positiva e diferente de 1, é denominada **equação exponencial**. Assim, são exemplos de equações exponenciais:

a) $2^x = 8$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 0{,}25$

c) $5^{2x} + 5^x = 30$

d) $9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1$

Vamos resolver as equações exponenciais nas quais ambos os membros da igualdade podem ser representados como potências de mesma base. Como a função exponencial, dada por $y = a^x$, é injetora e sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, vale a seguinte propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por exemplo, para resolver a equação $2^x = 8$, escrevemos o segundo membro da equação como uma potência de base 2:

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3$$

Aplicando a propriedade descrita, temos: $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

Portanto, o conjunto solução da equação $2^x = 8$ é $S = \{3\}$.

Exercícios resolvidos

7 Uma pesquisa feita por biólogos de uma reserva florestal mostrou que a população de uma espécie de certo animal está diminuindo a cada ano. A partir do ano em que se iniciou a pesquisa, o número desses animais seguia a lei matemática $N = N_0 \cdot 3^{-0{,}05t}$, com *t* em anos ($t \geqslant 0$).

a) Calcule em quantos anos a população desses animais estará reduzida à terça parte.

b) Qual era o número de animais quando a pesquisa foi iniciada, sabendo que após 80 anos restam apenas 12 exemplares?

Resolução

a) Sendo *N* o número de animais no decorrer do tempo, e $N_0 > 0$ o número de animais no início da pesquisa, devemos obter *t* resolvendo a equação:

$$N = \frac{N_0}{3} \Rightarrow \frac{N_0}{3} = N_0 \cdot 3^{-0{,}05t} \Rightarrow \frac{1}{3} = 3^{-0{,}05t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0{,}05t} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{0{,}05t}$$

Como as bases são iguais, positivas e diferentes de 1, podemos concluir que os expoentes são iguais:

$$0{,}05t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{0{,}05} \Rightarrow t = 20$$

Portanto, a população de animais será a terça parte da inicial após 20 anos.

b) Sabemos que para $t = 80$ temos $N = 12$. Substituindo esses valores, temos:

$$N = N_0 \cdot 3^{-0{,}05t} \Rightarrow 12 = N_0 \cdot 3^{-0{,}05 \cdot 80} \Rightarrow 12 = N_0 \cdot 3^{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow 12 = \frac{N_0}{81} \Rightarrow N_0 = 972$$

Portanto, havia 972 animais dessa espécie no início da pesquisa.

8 Resolva a equação $125^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{625}}$ no universo dos números reais.

Resolução

Usando as propriedades de potências, vamos expressar o 1º e o 2º membros da equação como potências de mesma base.

$$125^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{625}} \Rightarrow \left(5^3\right)^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^4}} \Rightarrow 5^{3x+3} = 5^{-\frac{4}{3}}$$

Como as bases são iguais (positivas e diferentes de 1), podemos igualar os expoentes:

$$3x + 3 = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{9x+9}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow 9x = -13 \Rightarrow x = -\frac{13}{9}$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{-\frac{13}{9}\right\}$.

9 Resolva a equação $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Resolução

Aplicando as propriedades de potências, vamos reescrever a equação dada usando potências de base 2:

$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow (2^2)^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

Fazendo $2^x = y$, obtemos a equação do 2º grau na variável *y*:

$y^2 - 5y + 4 = 0$

Resolvendo essa equação, obtemos:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \Rightarrow \Delta = 9$

$y = \dfrac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow y' = 4$ e $y'' = 1$

Voltando à igualdade $2^x = y$, temos:

- Para $y = 4$, temos: $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$
- Para $y = 1$, temos: $2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{0, 2\}$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

21. Resolva as equações exponenciais a seguir:

a) $2^x = 64$ $S = \{6\}$

b) $10^x = 1\,000$ $S = \{3\}$

c) $9^x = 243$ $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}$ $S = \{5\}$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} = 0{,}25$ $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

f) $4^x = \frac{1}{64}$ $S = \{-3\}$

g) $3^x = \sqrt{3}$ $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

h) $4^x = \sqrt[3]{32}$ $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$

22. (Mack-SP) O valor de *x* na equação $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{2x-2} = \frac{1}{27}$ é:

a) tal que $2 < x < 3$.

b) negativo.

c) tal que $0 < x < 1$.

X d) múltiplo de 2.

e) 3.

23. Resolva as equações:

a) $\dfrac{2^{4x-2}}{2^{3x+5}} = \dfrac{1}{2}$ $S = \{6\}$

b) $2^{x-2} = \dfrac{8}{2^{x-3}}$ $S = \{4\}$

24. (Ufop-MG) Determine a raiz quadrada da soma dos quadrados das raízes da equação $2^{-5x+x^2} = \frac{1}{64}$. $\sqrt{13}$

25. (UEL-PR) Se o número real *k* satisfaz à equação $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$, então k^2 é igual a:

a) 0 ou $\frac{1}{2}$

X b) 0 ou 1

c) $\frac{1}{2}$ ou 1

d) 1 ou 2

e) 1 ou 3

26. (UAM-SP) Notei durante as aulas de Química que é frequente o uso de números na notação científica. Como tive dificuldades, resolvi treinar um pouco.

Dos exercícios abaixo que andei resolvendo, quais estão **corretos**?

I. $(5{,}0 \cdot 10^2) \cdot (6{,}0 \cdot 10^{-3}) = 3{,}0$

II. $(2{,}4 \cdot 10^5) : (3{,}0 \cdot 10^{-2}) = 8{,}0 \cdot 10^6$

III. $[(1{,}2 \cdot 10^2) : (2{,}0 \cdot 10^{-4})] \cdot (3{,}0 \cdot 10^{-6}) = 1{,}8$

X a) Todos estão corretos.

b) Nenhum está correto.

c) Apenas (I) está correto.

d) (II) e (III) estão corretos.

e) Apenas (II) está correto.

27. (Unemat-MT) As substâncias radioativas têm uma tendência natural de se desintegrar, emitindo partículas e transformando-se numa nova substância. Consequentemente, com o passar do tempo, a quantidade de substância radioativa diminui. Assim, considerando-se uma massa inicial de 32 g de radônio, *t* dias depois sua massa *M* será, aproximadamente, $M = 32 \times 0{,}835^t$. Em um dia, quantos gramas do radônio se desintegraram?

a) 26,72 g

b) 2,672 g

X c) 5,28 g

d) 0,528 g

e) 25,72 g

28. (UFRJ) Considere que num recipiente, no instante $t = 0$, um número N_0 de bactérias está se reproduzindo normalmente. É aceito cientificamente que o número de bactérias num certo instante $t > 0$ é dado pela equação

$$N(t) = N_0K^t,$$

sendo $N(t)$ o número de bactérias no instante *t* e *K* uma constante que depende do tipo de bactéria. Suponhamos que, num certo instante, observou-se que havia 200 bactérias no recipiente reproduzindo-se normalmente. Passadas 12 horas, havia 600 bactérias. Após 48 horas do início da observação, quantas bactérias existirão? 16 200 bactérias.

29. (Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante *t*, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de -18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a -16 °C após 270 minutos. $\beta = -\frac{1}{90}$; $\alpha = 54$

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β.

b) Determine o valor de *t* para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$ °C superior à temperatura ambiente. 360 minutos.

Inequações exponenciais

Toda desigualdade que apresenta incógnita no expoente de pelo menos uma potência de base real, positiva e diferente de 1 é denominada **inequação exponencial**.

Exemplos:

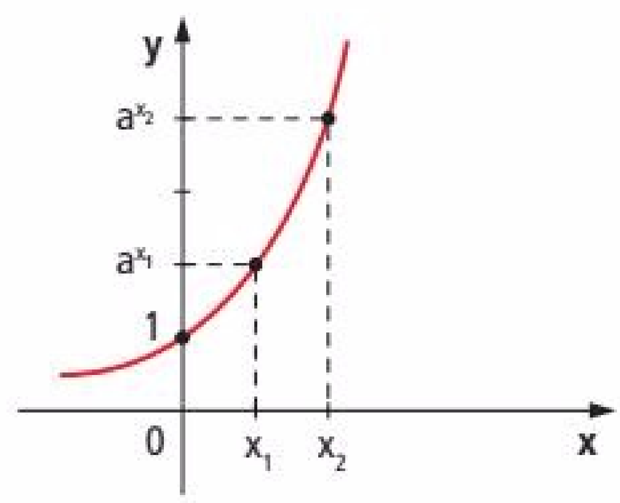
a) $5^x < 1$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} > 4^x$ c) $10^x \geqslant -0{,}1$ d) $2^{x+1} \cdot 4^{x-1} \leqslant \frac{1}{32}$

Vamos resolver as inequações exponenciais nas quais ambos os membros da desigualdade podem ser representados como potências de mesma base. Com base no crescimento e no decrescimento da função exponencial, dada por $f(x) = a^x$, aplicamos as propriedades a seguir.

Ilustrações: Editoria de arte

1º caso: a > 1 (função crescente)

Quando a base da potência é maior que 1, a relação de desigualdade entre as potências se mantém entre os expoentes.

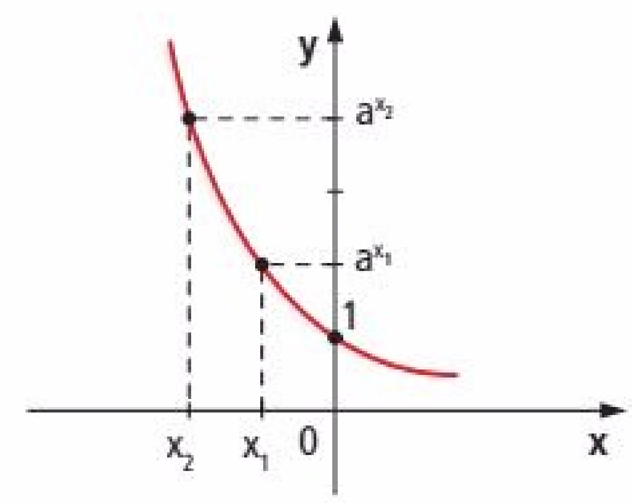


$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

Conservamos o sentido da desigualdade.

2º caso: 0 < a < 1 (função decrescente)

Quando a base da potência está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes.



$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

Invertemos o sentido da desigualdade.

Exercícios resolvidos

10 Resolva a inequação $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$.

Resolução

Como a base $\frac{1}{3}$ está compreendida entre 0 e 1, o sentido da desigualdade se inverte:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} \Rightarrow 3x - 1 > x + 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

11 Determine o conjunto solução da inequação $2^{2x+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} < 1$.

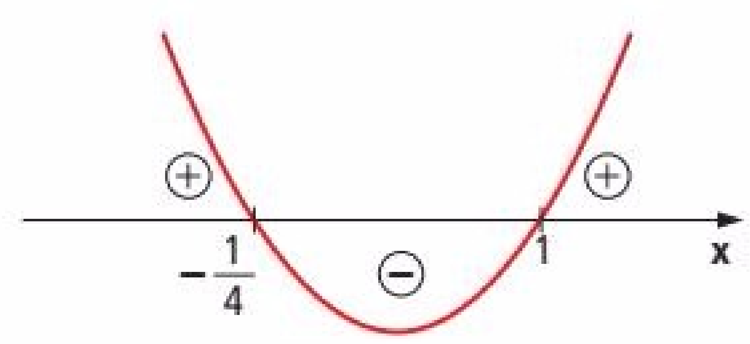
Resolução

Aplicando as propriedades de potências, temos:

$4 \cdot 2^{2x} - 0{,}75 \cdot 4 \cdot 2^x - 1 < 0$

Fazendo $2^x = y$, obtemos: $4y^2 - 3y - 1 < 0$.

Fazendo o estudo do sinal de $f(y) = 4y^2 - 3y - 1$, temos:



Logo: $-\frac{1}{4} < y < 1$

Lembrando que $2^x = y$, temos:

- $2^x < 1 \Rightarrow 2^x < 2^0 \Rightarrow x < 0$ (I)
- $2^x > -\frac{1}{4} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ (II)

Fazendo (I) ∩ (II), temos:

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

12 O valor de um automóvel daqui a t anos é dado pela função V, sendo $V(t) = 40\,000 \cdot (0{,}8)^t$. Daqui a quantos anos o valor desse automóvel será menor que R\$ 20 480,00?

Resolução

Do enunciado, temos:

$V(t) < 20480 \Rightarrow 40\,000 \cdot (0{,}8)^t < 20480$

Resolvendo a equação, obtemos:

$40\,000 \cdot (0{,}8)^t < 20\,480 \Rightarrow (0{,}8)^t < \dfrac{20\,480}{40\,000} \Rightarrow$

$\Rightarrow (0{,}8)^t < 0{,}512 \Rightarrow (0{,}8)^t < (0{,}8)^3$

Como as bases são iguais a 0,8, que é maior que zero e menor que 1, temos: $t > 3$.

Portanto, o valor do automóvel será menor que R\$ 20 480,00 após 3 anos de uso.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

30. Determine o conjunto solução das seguintes inequações:

a) $2^{x^2-3x} \geqslant \dfrac{1}{4}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} < \dfrac{1}{27}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \dfrac{3}{2}\right\}$

c) $(0{,}2)^{x-2} > 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

d) $2^{x+1} \cdot 4^{x-1} \leqslant \dfrac{1}{32}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\dfrac{4}{3}\right\}$

e) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \left(\dfrac{9}{4}\right)^{1+2x} > \left(\dfrac{27}{8}\right)^{4x+3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{6}{7}\right\}$

31. Determine os valores reais de x que verificam a inequação $3^{x+1} + 3^{2+x} > 108$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

32. Para quais valores de x a expressão $\sqrt{2^x + 2^{x+1} - 12}$ representa um número real? $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

33. Identifique o domínio D das seguintes funções:

a) $y = \sqrt{2^x - 2^{1-x}}$ $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \dfrac{1}{2}\right\}$

b) $y = \sqrt{(0{,}1)^{x^2-5x} - (0{,}1)^{-6}}$ $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

34. (UFRN) Considere as funções $f(x) = 2^x - 1$ e $g(x) = -x^2 + 4$ definidas para todo o número real x e $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. $h(-1) = -\dfrac{3}{2}$; $h(1) = 3$

a) Calcule $h(-1) = f(-1) \cdot g(-1)$ e $h(1) = f(1) \cdot g(1)$.

b) Determine o conjunto dos números reais x tais que $h(x) < 0$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

35. (Unirio-RJ) Num laboratório é realizada uma experiência com um material volátil, cuja velocidade de volatilização é medida pela sua massa, em grama, que decresce em função do tempo t, em horas, de acordo com a fórmula:

$$m = -3^{2t} - 3^{t+1} + 108$$

Assim sendo, o tempo máximo de que os cientistas dispõem para utilizar esse material antes que ele se volatilize totalmente é:

a) inferior a 15 minutos.

b) superior a 15 minutos e inferior a 30 minutos.

c) superior a 30 minutos e inferior a 60 minutos.

d) superior a 60 minutos e inferior a 90 minutos.

X e) superior a 90 minutos e inferior a 120 minutos.

36. (EsPCEx-SP) A quantidade de números **inteiros ímpares** que pertencem ao intervalo que satisfaz a inequação exponencial $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-8x+5} > 4$ é de:

a) um número ímpar.

X b) dois números ímpares.

c) três números ímpares.

d) quatro números ímpares.

e) cinco números ímpares.

37. (UEL-PR) Algumas empresas utilizam uma função matemática, denominada curva de aprendizagem, como parâmetro de contratação de mão de obra na área de produção. Essa função pode ser definida como $f(x) = a(b - 3^{-cx})$, onde a, b e c são constantes reais e x é o tempo medido em dias. O processo desencadeia-se da seguinte forma: primeiramente são selecionados candidatos ao emprego; em seguida, passam por treinamento num setor específico da produção; finalmente, eles exercem seu trabalho em regime de experiência nesse setor por 30 dias. Finalizado o período, são ajustadas as constantes a, b e c à curva f para cada candidato. A empresa define como curva ideal a situação em que $a = 45$, $b = 2$ e $c = 0$, e a contratação ocorrerá se a curva f do candidato selecionado atingir ou ultrapassar a situação ideal no regime de experiência. Os candidatos João e Paulo obtiveram, respectivamente, como curva de aprendizagem as funções

$$f(x) = 15\left(\dfrac{10}{3} - 3^{-0{,}01x}\right)$$

$$f(x) = 30\left(\dfrac{10 + 15\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} - 3^{-0{,}04x}\right)$$

Com base no que foi exposto é correto afirmar que:

a) Paulo não será contratado.

X b) João não será contratado e Paulo será contratado.

c) João será contratado e Paulo não será contratado.

d) João e Paulo não serão contratados.

e) João será contratado.

CAPÍTULO 8

Função logarítmica

O desenvolvimento dos **logaritmos** deve-se principalmente a dois matemáticos do período Renascentista (entre os séculos XIV e XVI, aproximadamente), John Napier e Jost Bürgi, cujos trabalhos foram produzidos independentemente um do outro.

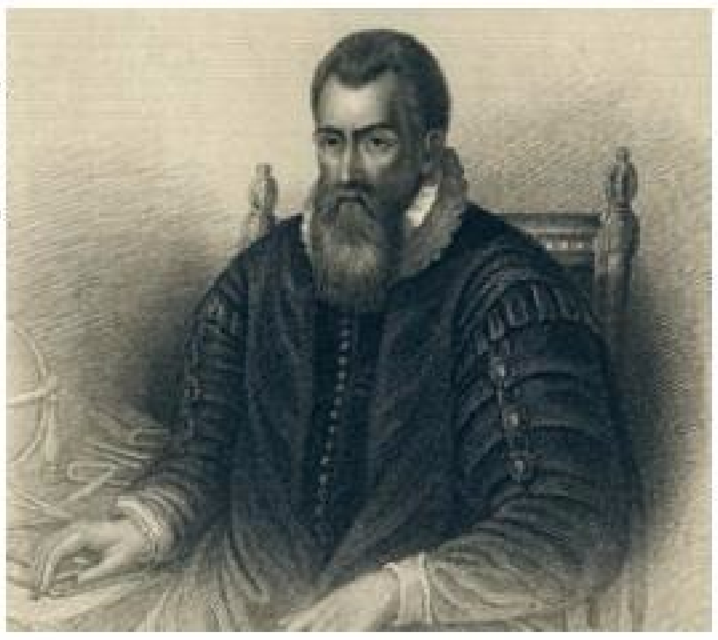
Naquele período, levava-se muito tempo para realizar operações de multiplicação e divisão nos cálculos trigonométricos de Astronomia e na navegação. Para simplificar esses cálculos, foram desenvolvidos os logaritmos, que possibilitam a transformação de uma multiplicação em uma adição e uma divisão em uma subtração, como veremos mais adiante.

Neste capítulo vamos estudar a função logarítmica, mas antes vamos apresentar o conceito de logaritmo e algumas propriedades que serão úteis no estudo dessa função.

Jost Bürgi. Coleção Particular.

Matemático suíço Jost Bürgi (1552-1632).

Universal History Archive/UIG/ Bridgestone/keystone



Matemático escocês John Napier (1550-1617).

Scorpp/Shutterstock.com

Instrumentos utilizados nas navegações e observações astronômicas.

Logaritmo

Considerando uma potência cuja base é um número positivo e diferente de 1, seu expoente é um logaritmo. Por exemplo, no caso da potência $2^5 = 32$, chamamos o expoente 5 de logaritmo de 32 na base 2. Usando símbolos, representamos:

$$2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$$

Dados dois números reais positivos *a* e *b*, com $a \neq 1$ e a igualdade $a^x = b$, o expoente *x* é denominado logaritmo de *b* na base *a*:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Na definição acima, ***b*** é o **logaritmando**, ***a*** é a **base** e ***x*** é o **logaritmo de *b* na base *a***.

Exemplos:

a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

b) $\log_2 \dfrac{1}{4} = -2 \Leftrightarrow 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

c) $\log_{\frac{1}{6}} \dfrac{1}{36} = 2 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{36}$

Consequências da definição de logaritmo

A partir da definição de logaritmo, ficam estabelecidas as consequências apresentadas a seguir.
Sendo *a*, *b*, *c* e *m* números reais, com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, temos:

1ª consequência: $\log_a 1 = 0$

Pois $\log_a 1 = x \Leftrightarrow a^x = 1 \Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow x = 0$.

2ª consequência: $\log_a a = 1$

Pois $\log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a \Leftrightarrow a^x = a^1 \Leftrightarrow x = 1$.

3ª consequência: $\log_a a^m = m$

Pois $\log_a a^m = x \Leftrightarrow a^x = a^m \Leftrightarrow x = m$.

4ª consequência: $a^{\log_a b} = b$

Pois, fazendo $\log_a b = x$, temos: $a^x = b$.

Substituindo *x* por $\log_a b$ em $a^x = b$, obtemos: $a^{\log_a b} = b$.

5ª consequência: $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Pois, considerando $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, temos: $a^x = b$ e $a^y = c$.

Se $b = c$, temos: $a^x = a^y \Rightarrow x = y \Rightarrow \log_a b = \log_a c$.

Se $\log_a b = \log_a c$, temos: $x = y \Rightarrow a^x = a^y \Rightarrow b = c$.

Exercícios resolvidos

1 Calcule:

a) $\log_6 36$ b) $\log_{10} 0{,}01$ c) $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$

Resolução

Em cada item, vamos aplicar a definição de logaritmo e resolver a equação exponencial obtida.

a) $\log_6 36 = x \Rightarrow 6^x = 36 \Rightarrow 6^x = 6^2 \Rightarrow x = 2$

Então, $\log_6 36 = 2$.

b) $\log_{10} 0{,}01 = x \Rightarrow 10^x = 0{,}01 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$

Então, $\log 0{,}01 = -2$.

c) $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2^2}\right)^x = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (2^{-2})^x = 2^{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-2x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

Então, $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} = -\frac{3}{4}$.

2 Calcule $\log_{10} 1{,}4$. Use $2 = 10^{0{,}301}$ e $7 = 10^{0{,}845}$.

Resolução

Usando a definição de logaritmo:

$\log_{10} 1{,}4 = x \Rightarrow 10^x = 1{,}4$

O logaritmo de 1,4 é o expoente *x* ao qual devemos elevar 10 para obter 1,4.

Resolvendo a equação exponencial, temos:

$10^x = 1{,}4 \Rightarrow 10^x = \frac{14}{10} \Rightarrow 10^x = \frac{2 \cdot 7}{10} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^x = \frac{10^{0{,}301} \cdot 10^{0{,}845}}{10} = 10^x = 10^{0{,}301 + 0{,}845 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^x = 10^{0{,}146} \Rightarrow x = 0{,}146$

Portanto, $\log_{10} 1{,}4 = 0{,}146$.

3 Que número natural $\log_{10} (\log_{10} 10)$ representa?

Resolução

Como $\log_{10} 10 = 1$, obtemos:

$\log_{10} (\log_{10} 10) = \log_{10} 1 = 0$

A expressão $\log_{10} (\log_{10} 10)$ representa o número 0.

4 Determine o valor da expressão:

$\log_7 7^3 + \log_9 1^6 + 2^{\log_2 5}$

Resolução

Calculando o valor de cada parcela, temos:

- $\log_7 7^3 = 3$ (3ª consequência)
- $\log_9 1^6 = \log_9 1 = 0$ (1ª consequência)
- $2^{\log_2 5} = 5$ (4ª consequência)

Substituindo esses valores na expressão dada, obtemos:

$3 + 0 + 5 = 8$

Portanto: $\log_7 7^3 + \log_9 1^6 + 2^{\log_2 5} = 8$.

Condições de existência do logaritmo

De acordo com a definição de logaritmo, a existência de $\log_a b$ está associada a algumas restrições, ou seja, condições de existência.

Para $\log_a b$ existir, é necessário obedecer às seguintes restrições:

- logaritmando positivo $\longrightarrow$ $b > 0$
- base positiva e diferente de 1 $\longrightarrow$ $a > 0$ e $a \neq 1$

Se uma dessas restrições não for obedecida, a existência do logaritmo não estará garantida no universo dos números reais. Por exemplo, vamos tentar calcular $\log_2(-3)$. De acordo com as restrições, verificamos que $\log_2(-3)$ não é um número real, pois o logaritmando é negativo. Caso existisse esse logaritmo em $\mathbb{R}$, aplicando a definição, teríamos:

$$\log_2(-3) = x \Rightarrow 2^x = -3$$

Note que não existe valor real de *x* que satisfaça à igualdade acima.

Observação:

O logaritmo de um número na base 10 é chamado de **logaritmo decimal**.

Costumamos omitir a base dos logaritmos decimais e escrevemos:

$$\log_{10} b = \log b$$

A base decimal é muito usada pelo fato de ser a mesma base do nosso sistema de numeração.

Exercícios resolvidos

5 Para quais valores de *x* existe $\log_3(x - 5)$?

Resolução

Para que o logaritmo exista, as duas restrições da definição precisam ser obedecidas. Analisando $\log_3(x - 5)$, temos:

- logaritmando: $x - 5$
- base: 3

Como 3 é um número positivo e diferente de 1, para que o logaritmo exista em $\mathbb{R}$, devemos ter:

$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$

Logo, para que as duas restrições sejam obedecidas, precisamos ter $x > 5$.

Portanto, $\log_3(x - 5)$ existe para *x* real, tal que $x > 5$.

6 Para quais valores reais de *x* existe $\log_{x+1}(x^2 + 3x - 18)$?

Resolução

Para que o logaritmo exista, devemos ter:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 18 > 0 & \text{(I)} \\ x + 1 > 0 \text{ e } x + 1 \neq 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Resolvendo (I) e (II), temos:

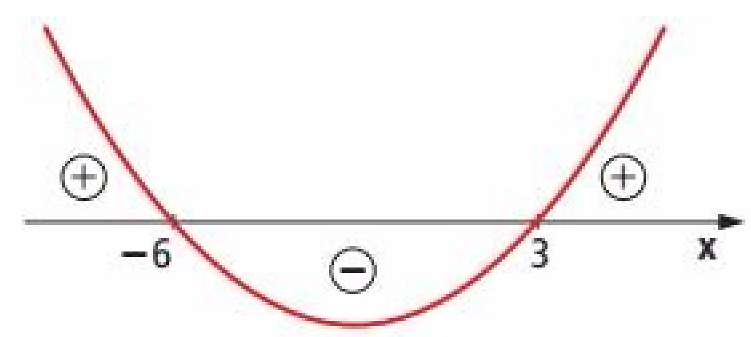
(I): $x^2 + 3x - 18 > 0$

Zeros da função *f* dada por $f(x) = x^2 + 3x - 18$:

$x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 6) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = 3$ e $x'' = -6$

Estudo do sinal de *f*:



Ilustrações: Editoria de arte

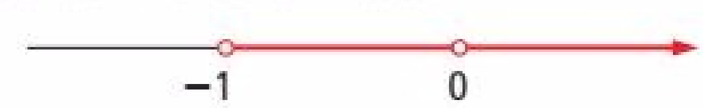
Logo, a solução de (I) é:

$x \in \mathbb{R}$ tal que $x < -6$ ou $x > 3$

(II): $x + 1 > 0$ e $x + 1 \neq 1$

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

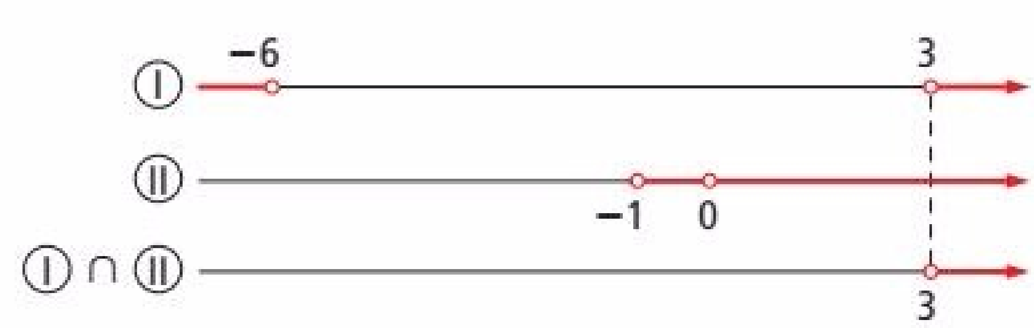
Analisando os valores obtidos:



Logo, a solução de (II) é:

$x \in \mathbb{R}$ tal que $x > -1$ e $x \neq 0$

Fazendo a intersecção das soluções de (I) e (II):



Portanto, $\log_{x+1}(x^2 + 3x - 18)$ existe para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 3$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Escreva no caderno o valor dos logaritmos:

a) $\log_9 1$ 0

b) $\log_8 8$ 1

c) $\log_6 6^2$ 2

d) $\log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^3$ 3

e) $5^{\log_5 7}$ 7

f) $3^{\log_3 27}$ 27

2. Aplicando a definição, calcule o valor dos logaritmos:

a) $\log_{\sqrt{8}} 4$ $\frac{4}{3}$

b) $\log_{25} 0{,}2$ $-\frac{1}{2}$

c) $\log_{16} 32$ $\frac{5}{4}$

d) $\log_5 0{,}000064$ -6

e) $\log_{49} \sqrt[3]{7}$ $\frac{1}{6}$

f) $\log_2 \sqrt[8]{64}$ $\frac{3}{4}$

g) $\log_4 2\sqrt{2}$ $\frac{3}{4}$

h) $\log_{\sqrt[5]{2}} 128$ 35

3. Determine o valor da expressão:

$A = \log_5 5 + \log_4 1 + 2^{\log_2 8}$ 9

4. (Mauá-SP) Achar o valor da expressão:

$M = \log_{\frac{1}{3}} (3\sqrt{3}) - \log_2 \frac{1}{4} - \log_5 5$ $-\frac{1}{2}$

5. Determine os valores reais de *x* para que exista:

a) $\log_2 (x - 8)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$

b) $\log (1 - x)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

c) $\log_5 (5x - 2) + \log_5 (x - 3)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

6. Considere $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$, $\log 5 = 0{,}699$, $\log 21 = 1{,}322$ e resolva as equações:

a) $3^x = 5$ $S = \{1{,}465\}$

b) $10^x = 21$ $S = \{1{,}322\}$

c) $10^x = 15$ $S = \{1{,}176\}$

d) $2^x = 42$ $S = \{5{,}392\}$

7. Calcule o valor de cada uma das expressões a seguir:

a) $\log_4 4 - \log_5 5^{-7}$ 8

b) $3^{\log_3 27} : 4^{\log_4 \frac{1}{2}}$ 54

c) $(\log_{0,2} 1)^{\log_6 6^5}$ 0

d) $\dfrac{\log_3 1 + \log_{10} 0{,}01}{\log_2 \frac{1}{64} \cdot \log_4 \sqrt{8}}$ $\frac{4}{9}$

8. Calcule as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que:

$a = \log_{10} 0{,}001$; $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$ e $c = 3 \cdot \log_2 8$.

$S = \{-1; 3\}$

9. Determine o valor de *m*, sabendo que:

$m = 2^{5 + \log_2 3} + 3^{\log_3 7 + \log_3 2}$ $m = 110$

Propriedades operatórias dos logaritmos

Vamos estudar agora as propriedades operatórias dos logaritmos que serão úteis em diversas situações envolvendo os cálculos com logaritmos. Essas propriedades, como veremos adiante, permitem transformar produtos em somas, quocientes em subtrações e potências em multiplicações, além de realizar mudanças de bases dos logaritmos. Assim, dados os números reais *a*, *b*, *c* e *n*, com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, temos as propriedades apresentadas a seguir.

Logaritmo de um produto

Em uma mesma base, o logaritmo de um **produto** de dois números positivos é igual à **soma** dos logaritmos de cada um dos fatores.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração

Considere os logaritmos:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (I)

$\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$ (II)

$\log_a (b \cdot c) = z \Leftrightarrow a^z = b \cdot c$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$a^z = b \cdot c \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$

Dessa última igualdade, obtemos: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Exemplos:

a) $\log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3$

b) $\log_3 500 = \log_3 (5 \cdot 100) = \log_3 5 + \log_3 100$

Logaritmo de um quociente

Em uma mesma base, o logaritmo de um **quociente** de dois números positivos é igual ao logaritmo do dividendo **menos** o logaritmo do divisor.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração

Considere os logaritmos:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (I)

$\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$ (II)

$\log_a \frac{b}{c} = z \Leftrightarrow a^z = \frac{b}{c}$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III):

$a^z = \frac{b}{c} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$

Dessa última igualdade, obtemos: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Exemplos:

a) $\log_6\left(\frac{243}{5}\right) = \log_6 243 - \log_6 5$

b) $\log_4\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right) = \log_4 \sqrt{10} - \log_4 3$

Logaritmo de uma potência

Em uma mesma base, o logaritmo de uma **potência** de base positiva é igual ao **produto** do expoente pelo logaritmo da base dessa potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Demonstração

Considere o logaritmo $\log_a b = x$. Pela definição, temos que $a^x = b$.
Elevando os dois membros ao expoente *n*, temos:

$$a^x = b \Rightarrow (a^x)^n = b^n \Rightarrow a^{nx} = b^n$$

Portanto, nx é o logaritmo de b^n na base *a*, isto é: $\log_a b^n = nx$.
Substituindo *x* por $\log_a b$, obtemos: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$.

Exemplos:

a) $\log_3 5^2 = 2 \cdot \log_3 5$

b) $\log_5 (12)^{-2} = -2 \cdot \log_5 12$

Mudança de base do logaritmo

Estudamos até aqui as propriedades operatórias dos logaritmos que valem para os logaritmos de mesma base.

Porém, em algumas situações, precisamos realizar operações com logaritmos de bases diferentes.

Vamos estudar agora uma propriedade que permite a **mudança de base** do logaritmo, que será útil em diversas situações.

Admitindo uma base c, tal que $c > 0$ e $c \neq 1$, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração

Considere o logaritmo $\log_a b = x$. Pela definição, temos que $a^x = b$.

Agora, considere:

$\log_c b = y \Leftrightarrow c^y = b$ e $\log_c a = z \Leftrightarrow c^z = a$

Assim, da igualdade $a^x = b$, temos:

$$a^x = b \Rightarrow (c^z)^x = c^y \Rightarrow c^{zx} = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplos:

a) $\log_2 6 = \dfrac{\log_3 6}{\log_3 2}$

b) $\log_{16} 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 16}$

Exercícios resolvidos

7 Sabendo que $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 5 = 0{,}699$, calcule os logaritmos a seguir com auxílio das propriedades.

a) $\log 15$

b) $\log 18$

c) $\log \sqrt{3}$

d) $\log 7{,}2$

Resolução

a) $\log 15 = \log (3 \cdot 5)$

Usando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$\log (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}176$

Portanto, $\log 15 = 1{,}176$.

b) $\log 18 = \log (2 \cdot 3 \cdot 3) = \log (2 \cdot 3^2)$

Usando as propriedades do logaritmo de um produto e de uma potência, temos:

$\log (2 \cdot 3^2) = \log 2 + \log 3^2 = \log 2 + 2 \cdot \log 3 =$
$= 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 = 1{,}255$

Portanto, $\log 18 = 1{,}255$.

c) $\log \sqrt{3} = \log 3^{\frac{1}{2}}$

A propriedade do logaritmo da potência vale para expoentes reais, logo:

$\log 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 3 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}477 = 0{,}2385$

Portanto, $\log \sqrt{3} = 0{,}2385$.

d) $\log 7{,}2 = \log \dfrac{72}{10}$

Usando a propriedade do logaritmo do quociente, temos:

$$\log\left(\frac{72}{10}\right) = \log 72 - \underbrace{\log 10}_{1} = \log 72 - 1$$

Fatorando o número 72 e aplicando as propriedades estudadas, obtemos:

$\log 72 = \log (2^3 \cdot 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 =$
$= 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = \underbrace{3 \cdot 0{,}301}_{0{,}903} + \underbrace{2 \cdot 0{,}477}_{0{,}954} = 1{,}857$

Logo:

$\log 7{,}2 = \log 72 - 1 = 1{,}857 - 1 = 0{,}857$

Portanto, $\log 7{,}2 = 0{,}857$.

8 Sendo $\log a = 4$, $\log c = 6$ e $\log d = -1$, calcule o valor de $\log\left(\frac{ac}{d}\right)$.

Resolução

Utilizando a propriedade do logaritmo de um quociente, temos: $\log\left(\frac{ac}{d}\right) = \log(ac) - \log d$.

Usando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$\log(ac) - \log d = \log a + \log c - \log d$

Substituindo os valores dados, obtemos: $\log a + \log c - \log d = 4 + 6 - (-1) = 11$

Portanto, $\log\left(\frac{ac}{d}\right) = 11$.

9 Usando as aproximações $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 5 = 0{,}699$, determine o valor dos logaritmos abaixo:

a) $\log_6 90$

b) $\log_5 20$

Resolução

Como os dados no enunciado são logaritmos na base 10, em cada item devemos efetuar a mudança de base para a base decimal. Em seguida, aplicamos as propriedades estudadas.

a) $\log_6 90 = \frac{\log 90}{\log 6} = \frac{\log(9 \cdot 10)}{\log(2 \cdot 3)} = \frac{\log 3^2 + \log 10}{\log 2 + \log 3} = \frac{(2 \cdot \log 3) + 1}{\log 2 + \log 3} = \frac{2 \cdot 0{,}477 + 1}{0{,}301 + 0{,}477} = \frac{1{,}954}{0{,}778} \simeq 2{,}512$

b) $\log_5 20 = \frac{\log 20}{\log 5} = \frac{\log(4 \cdot 5)}{\log 5} = \frac{\log 2^2 + \log \frac{10}{2}}{\log \frac{10}{2}} = \frac{(2 \cdot \log 2) + \log 10 - \log 2}{\log 10 - \log 2} =$

$= \frac{2 \cdot 0{,}301 + 1 - 0{,}301}{1 - 0{,}301} = \frac{1{,}301}{0{,}699} \simeq 1{,}861$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

10. Dados $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$, $\log 5 = 0{,}699$ e $\log 7 = 0{,}845$, calcule:

a) $\log 14$ 1,146

b) $\log 210$ 2,322

c) $\log 0{,}6$ −0,222

d) $\log \frac{2}{3}$ −0,176

e) $\log 1{,}5$ 0,176

f) $\log 81$ 1,908

g) $\log \frac{1}{27}$ −1,431

h) $\log \sqrt[3]{25}$ 0,466

11. Calcule o valor das expressões aplicando as propriedades dos logaritmos:

a) $\log 5 + \log 200$ 3

b) $\log 100 + \log 50 + \log 10 + \log 2$ 5

c) $\log_2 24 - \log_2 3$ 3

d) $\log_5 8 + \log_5 12{,}5 - \log_5 4$ 2

12. Sendo $\log_x a = 6$, $\log_x b = 4$ e $\log_x c = 2$, calcule:

a) $\log_c \sqrt{abc}$ 3

b) $\log_c (a^3 \cdot b^2)$ 13

13. (UFPE) Sabendo-se que $2^{4x+3} = 3$ e que $\log 2 = m$ e $\log 3 = n$, é CORRETO afirmar que:

a) $x = \frac{(n - 3m)}{4n}$

X b) $x = \frac{(n - 3m)}{4m}$

c) $x = \frac{n}{m} - \frac{m}{n}$

d) $x = \frac{m}{n} - \frac{n}{m}$

e) $x = 4 + \frac{n}{m}$

14. Se $\log_2 3 = k$, qual é o valor do produto $\log_2 3 \cdot \log_3 2$? 1

15. Calcule o produto $\log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 3$. 1

16. Simplifique a expressão $\log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$. $\frac{1}{4}$

17. Resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} a + b = 20 \\ \log a + \log b = 2 \end{cases}$$

S = {(10, 10)}

18. (UFF-RJ) São dados os números reais positivos a, b e x, tais que $a \neq 1$ e $b \neq 1$. Sabe-se que $\log_a x = 2$ e $\log_b x = 4$. Calcule $\log_{ab} a\sqrt{x}$. $\frac{4}{3}$

Uso da calculadora com logaritmos

Podemos usar uma calculadora científica no cálculo de logaritmos. Mas antes vamos conhecer um logaritmo com uma base especial, o número irracional e = 2,718281828..., cuja determinação envolve conceitos matemáticos que não são estudados no Ensino Médio e, portanto, não será apresentada aqui.

O número *e* tem aplicações em diversas áreas do conhecimento como Economia, Engenharia e Biologia. Foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) quem introduziu a letra *e* para denotar tal número irracional, hoje chamado de número de Euler.

O logaritmo cuja base é o número *e* é conhecido por **logaritmo natural** ou **neperiano** (em homenagem a John Napier). Costumamos representar $\log_e b$ por ln b.

Geralmente, as calculadoras científicas apresentam duas teclas para o cálculo de logaritmos: LOG e LN. Assim, para calcular um logaritmo usando essas calculadoras, procedemos da seguinte forma:

- digitamos o número positivo do qual queremos obter o logaritmo;
- em seguida, apertamos a tecla LOG, obtendo no visor o logaritmo decimal do número digitado.

Fotos: Martinez Maravalhas Gomes

Por exemplo, digitando o número 5 e apertando a tecla LOG, aparecerá no visor o número 0,698970004. Esse valor é uma aproximação, com nove casas decimais, do logaritmo decimal do número 5, ou seja:

$$\log_{10} 5 = 0{,}698970004... \Leftrightarrow 10^{0{,}698970004...} = 5$$

Também podemos usar uma calculadora científica para obter o logaritmo natural de um número. Nesse caso, ao digitarmos o número 6 e a tecla LN, por exemplo, aparecerá no visor o número 1,791759469, que é uma aproximação do logaritmo natural do número 6, ou seja:

$$\ln 6 = 1{,}791759469... \Leftrightarrow e^{1{,}791759469...} = 6$$

Em geral, uma calculadora científica possui teclas que apresentam mais de uma função, normalmente indicadas com cores diferentes. Isso ocorre, por exemplo, com as teclas LOG e LN, conforme indicado a seguir.

1ª função: calcula o logaritmo decimal do número digitado.

2ª função: calcula uma potência de 10. Nesse caso, o número digitado será o expoente da potência de base 10.

1ª função: calcula o logaritmo natural de um número.

2ª função: calcula uma potência de base e.

Atenção

Em algumas calculadoras devemos apertar a tecla LOG e depois digitar o número positivo do qual queremos obter o logaritmo.

Professor, pode haver diferença entre o funcionamento e as funções da calculadora. Se necessário, peça aos alunos que consultem o manual da calculadora que eles estão usando.

A segunda função, que geralmente é acionada ao apertarmos a tecla 2nd, pode ser utilizada quando precisamos calcular o logaritmando. Por exemplo, usando uma calculadora científica, podemos determinar o valor de *b* para a igualdade ln b = 0,693147181.

Aplicando a definição de logaritmo, temos $\ln b = 0{,}693147181 \Leftrightarrow e^{0{,}693147181} = b$

Assim, para determinar o valor de *b*, devemos digitar o número 0,693147181 (uma aproximação do valor de ln b), em seguida, acionar a tecla 2nd e depois a tecla $\frac{e^x}{\text{LN}}$. No visor, aparecerá o resultado: 2,000000001.

Como o número 0,693147181 é um valor aproximado, podemos considerar b = 2, ou seja:

$$\ln 2 = 0{,}693147181$$

Exercícios resolvidos

10 Escreva 783 como uma potência de base 10.

Resolução

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos $\log 783 \simeq 2{,}893761762$.

Considerando apenas cinco casas decimais depois da vírgula, resulta:

$\log 783 = 2{,}89376$

Então, $783 = 10^{2{,}89376}$.

11 Resolva a equação $10^x = 95$, obtendo a raiz com aproximação de 10^{-5}.

Resolução

O expoente x é o número ao qual devemos elevar o 10 para obter 95; logo:

$10^x = 95 \Leftrightarrow x = \log 95$

Com o auxílio de uma calculadora científica, obtemos:

$\log 95 \simeq 1{,}977723605$

Então, temos:

$x = 1{,}97772$, com aproximação de 10^{-5}.

$S = \{1{,}97772\}$

12 Calcule x, sabendo que $\log x = -2{,}36653$.

Resolução

Ao digitarmos o número 2,36653 e acionar a tecla $+/-$, aparecerá no visor: $-2{,}36653$

Apertando a tecla 10^x, obtemos: 0,004300015

Um valor bastante satisfatório para x é $x \simeq 0{,}0043$.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

Os exercícios a seguir devem ser resolvidos com o auxílio de uma calculadora científica.

19. Calcule:

a) log 0,7 $-0{,}154901$
b) log 0,12 $-0{,}920818$
c) log 0,834 $-0{,}078833$
d) log 0,00001 -5
e) log 0,9435 $-0{,}025258$
f) log 0,121212 $-0{,}916454$

20. Determine b em cada caso:

a) $\log b = 1{,}8808$ 76
b) $\log b = 1{,}7559$ 57
c) $\log b = 2{,}6928$ 493
d) $\log b = 0{,}4564$ 2,86

21. Usando a calculadora, determine com aproximação de 10^{-6}, por falta:

a) log 75 1,875061
b) log 643 2,808210
c) log 1 320 3,120573
d) log 73 516 4,866381
e) log 1 000 000 6
f) log 4 0,602059

22. Calcule x, sabendo que:

a) $\log x = -0{,}5$ 0,3162
b) $\log x = -0{,}15$ 0,7079
c) $10^x = 0{,}5$ $-0{,}3010$
d) $10^x = 2$ 0,3010
e) $e^x = 10$ 2,3026
f) $e^x = 0{,}5$ $-0{,}6931$
g) $e^x = 0{,}15$ $-1{,}8971$
h) $e^x = 0{,}005$ $-5{,}2983$

23. Copie a tabela abaixo em seu caderno e complete-a com os valores das incógnitas.

Número (N)	Potência de 10	log N
75	$10^{1,875061}$	1,875061
643	10^p 2,808210	2,808210
1 320	$10^{3,120573}$	x 3,120573
a 1 000 000	10^6	y 6
b 0,00001	10^q -5	-5
0,7	$10^{-0,154901}$	z $-0{,}154901$
0,834	10^r $-0{,}078833$	$-0{,}078833$

24. Determine b em cada caso:

a) $\ln b = 1{,}098612289$ $b = 3$
b) $\ln b = 1{,}945910149$ $b = 7$
c) $\ln b = -0{,}69314718$ $b = 0{,}5$
d) $\ln b = -1$ $b = 0{,}367879$
e) $\ln b = 0$ $b = 1$

25. O logaritmo decimal de determinado número é 1,5119. Qual é esse número? 32,5

26. Digitando o número 85 em uma calculadora e depois a tecla LOG, aparece no visor 1,9294189. Como se relacionam e o que significam esses números, quando consideramos uma potência de base 10?
$10^{1,9294189} = 85$; 1,9294189 é o logaritmo de 85 na base 10.

27. Calcule: $10^{1,4} - 5 \cdot 10^{0,7}$, com a aproximação de 10^{-1}. 0

História da Matemática

A ideia de John Napier e o logaritmo

[...]

O século XVI e o início do século XVII testemunharam uma enorme expansão do conhecimento científico em todos os campos. A Geografia, a Física e a Astronomia, livres de antigos dogmas, mudaram rapidamente a percepção que o homem tinha do universo. O sistema heliocêntrico de Copérnico, depois de lutar durante quase um século contra as resoluções da Igreja, encontrara finalmente a aceitação. A circum-navegação do globo por Magalhães, em 1521, anunciou uma nova era de exploração marítima que não deixaria um canto do mundo sem ser visitado. Em 1569 Gerhard Mercator publicou o seu aclamado novo mapa do mundo, acontecimento que teve um impacto decisivo na arte da navegação. Na Itália, Galileu Galilei estabelecia as fundações da ciência da mecânica, enquanto na Alemanha Johannes Kepler formulava suas três leis do movimento planetário, livrando a astronomia, de uma vez por todas, do universo geocêntrico dos gregos.

Esses desenvolvimentos envolviam uma quantidade crescente de dados numéricos, forçando os eruditos a passarem boa parte de seu tempo fazendo cálculos tediosos. A época pedia uma invenção que livrasse os cientistas, de uma vez por todas, desse fardo. Napier aceitou o desafio.

[...]

Sua linha de pensamento era a seguinte: se pudermos escrever **qualquer** número positivo como uma potência de algum dado número fixo (o qual depois seria chamado de base), então **a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes**. Além disso, elevar um número à enésima potência (isto é, multiplicá-lo por si mesmo n vezes) seria equivalente a **somar** o expoente n vezes a ele próprio, isto é, multiplicá-lo por n [...]. Resumindo, cada operação aritmética seria reduzida à que está abaixo dela na hierarquia das operações, o que reduziria muito a dificuldade das computações numéricas.

Vamos ilustrar como esta ideia funciona escolhendo como nossa base o número 2. A tabela 1.1 mostra as potências sucessivas de 2, começando com $n = -3$ e terminando com $n = 12$. Suponha que queremos multiplicar 128 por 32. Nós procuramos na tabela os expoentes correspondentes a 32 e a 128 e descobrimos que eles são, respectivamente, 5 e 7. Somando esses expoentes, obtemos 12.

Agora revertemos o processo, procurando o número cujo expoente correspondente é 12; este número é 4 096, a resposta desejada. [...]

Tabela 1.1 Potências de 2

N	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	9	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

MAOR, Eli. **e: a história de um número.** Trad. Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003. p. 17-20.

Atividades

Escreva no caderno

A aceitação do sistema heliocêntrico de Copérnico, a circum-navegação de Magalhães ao redor do planeta, a publicação do novo mapa de Mercator, os desenvolvimentos de Galileu na ciência da mecânica e os estudos de Kepler a respeito do movimento planetário.

1. De acordo com o texto, quais foram os acontecimentos ocorridos no século XVI e início do século XVII que propiciaram uma expansão do conhecimento científico da época?

2. Por que a expansão do conhecimento científico do século XVI e início do século XVII fizeram que os cientistas dessa época necessitassem de um modo de simplificar a realização de alguns cálculos aritméticos?
   Esses estudos envolviam grandes quantidades de dados numéricos fazendo os cientistas ficarem durante muito tempo fazendo cálculos.

3. O texto apresenta como John Napier pensou para simplificar as multiplicações e divisões que eram realizadas em sua época. Qual foi a ideia de Napier? A ideia de Napier era que, ao escrever um número positivo como uma potência, seria possível transformar as multiplicações em adições e as divisões em subtrações.

Função logarítmica

Existem diversas situações em que são usados logaritmos; uma delas, por exemplo, é a escala de pH (potencial hidrogeniônico). O pH indica a acidez de um meio aquoso e é calculado em função da concentração de íons de hidrogênio H^+ que esse meio apresenta.

O cálculo do pH de um meio aquoso é feito usando-se logaritmo:

$$\underbrace{pH}_{\text{pH do meio aquoso}} = -\log \underbrace{[H^+]}_{\text{concentração de íons de hidrogênio } H^+}$$

A igualdade acima é a representação de uma **função logarítmica**.

Por exemplo, podemos determinar o pH de um cafezinho que apresenta 10^{-5} mol/L de íons de hidrogênio. Sabendo disso:

$$pH = -\log [H^+] \Rightarrow pH = -\log 10^{-5} \Rightarrow pH = 5$$

Portanto, o cafezinho tem pH igual a 5, o que indica que ele é considerado um meio ácido.

Tim Oram/Age Fotostock/Easypix

Na análise por meio da escala pH é comum o uso de um indicador universal, ou seja, um conjunto de tiras de papel que, ao serem mergulhadas na solução analisada, apresentam cores que devem ser comparadas a uma escala-padrão com os respectivos valores de pH.

Definição

Toda função *f* que apresenta a variável no logaritmando é denominada função logarítmica.

A função f: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função logarítmica.

Exemplos:

a) $f(x) = \log x$ b) $g(x) = \log_5 x$ c) $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

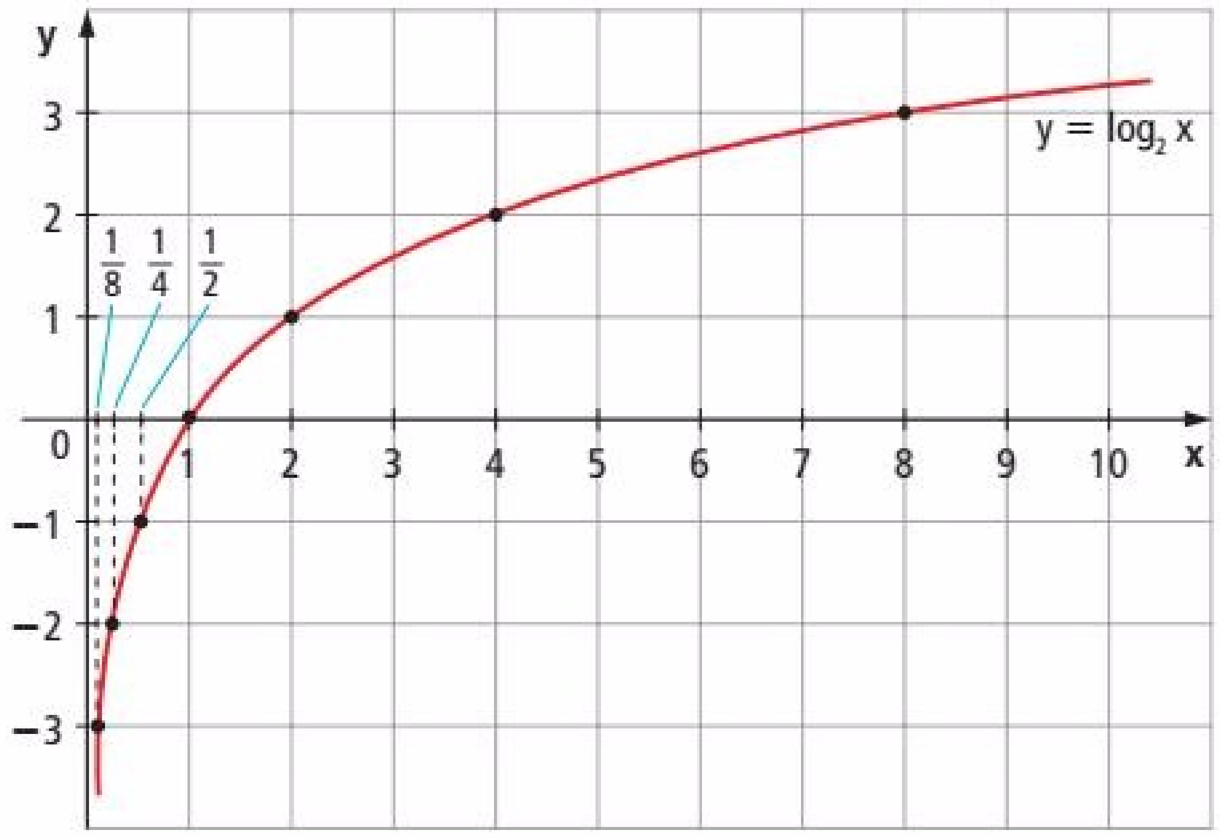
Gráfico da função logarítmica

Vamos, agora, examinar o comportamento da função logarítmica traçando seu gráfico no plano cartesiano. Observe os dois casos a seguir.

1º caso: $a > 1$

Veja o esboço do gráfico de $f(x) = \log_2 x$.

x	$f(x) = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	−3
$\frac{1}{4}$	−2
$\frac{1}{2}$	−1
1	0
2	1
4	2
8	3



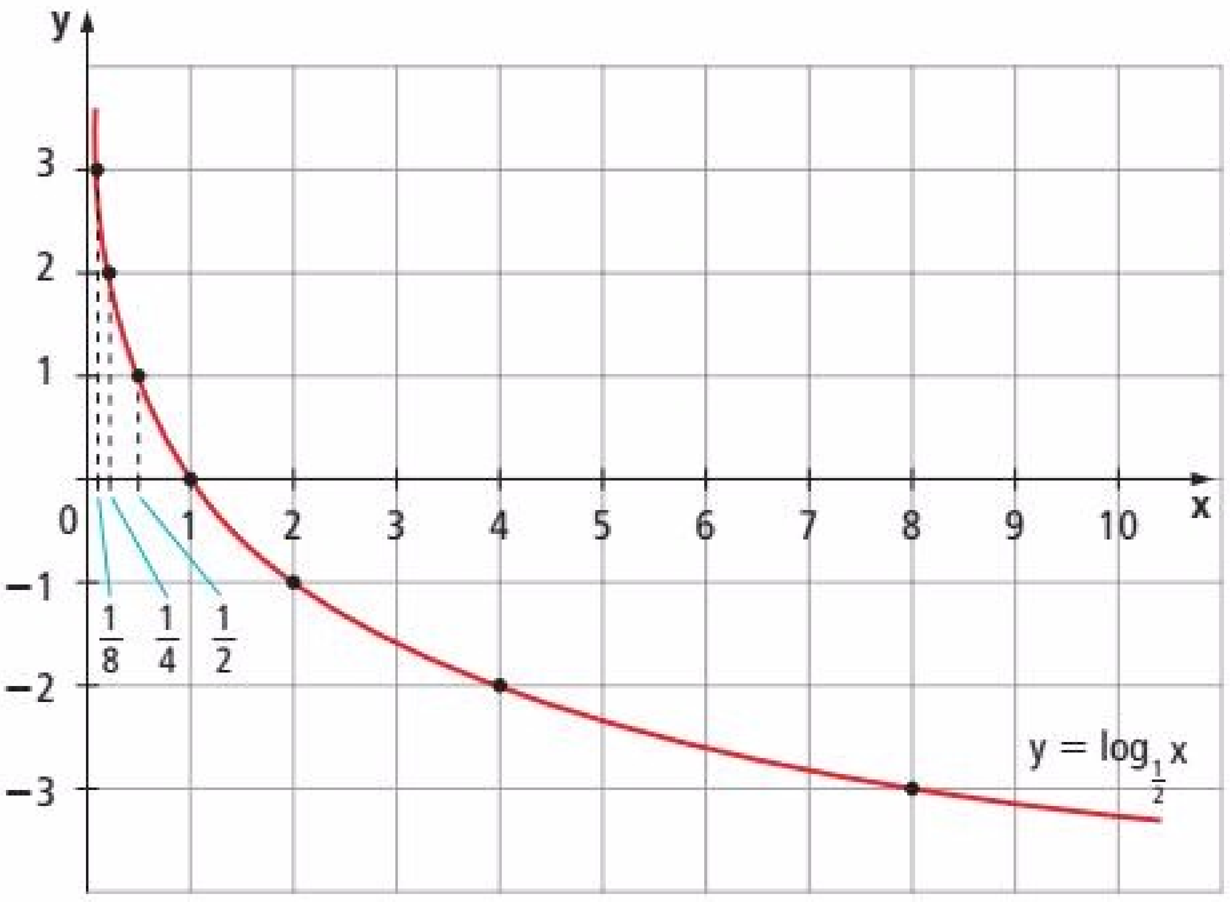
Editoria de arte

Observe que, quanto maior o valor de *x*, maior é o logaritmo de *x* na base *a*, ou seja, se $a > 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é **crescente** em todo seu domínio.

2º caso: $0 < a < 1$

Veja o esboço do gráfico de $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

x	$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
$\frac{1}{8}$	3
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2
8	−3



Editoria de arte

Note que as curvas dos gráficos se aproximam do eixo Oy, mas não o tocam e cruzam o eixo Ox no ponto (1, 0).

Nesse caso, quanto maior o valor de *x*, menor é o logaritmo de *x* na base *a*, ou seja, se $0 < a < 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é **decrescente** em todo o seu domínio.

De acordo com a definição da função dada por $f(x) = \log_a x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) e observando os gráficos, temos:

- O **domínio** da função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ é $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.
- O **contradomínio** da função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ é $CD(f) = \mathbb{R}$.
- O conjunto **imagem** da função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ é $Im(f) = \mathbb{R}$.

A função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ é **injetora**, pois quaisquer dois elementos distintos do seu domínio têm imagens distintas. Como $Im(f) = CD(f)$, a função é **sobrejetora**. Desse modo, podemos dizer que a função logarítmica é **bijetora**.

Relação entre função exponencial e função logarítmica

Pelo que estudamos, existe uma relação entre potenciação e logaritmos. Do mesmo modo, existe uma relação entre a função exponencial e a função logarítmica.

Estudamos que a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $y = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), também é bijetora. Nesse caso, podemos determinar sua função inversa.

Observe:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Permutando as variáveis:

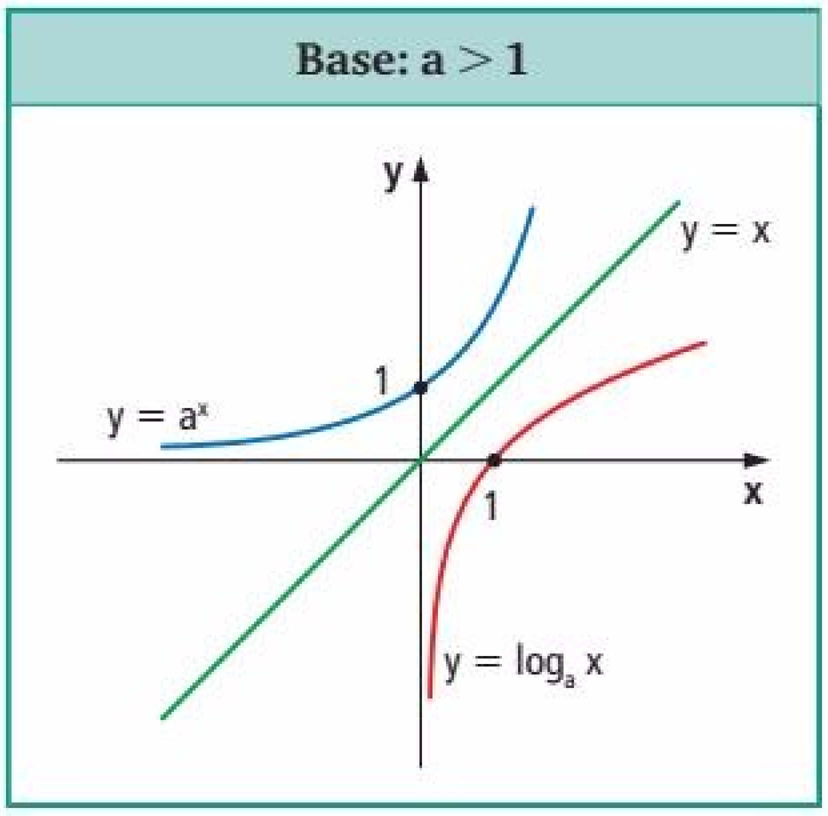
$$y = \log_a x$$

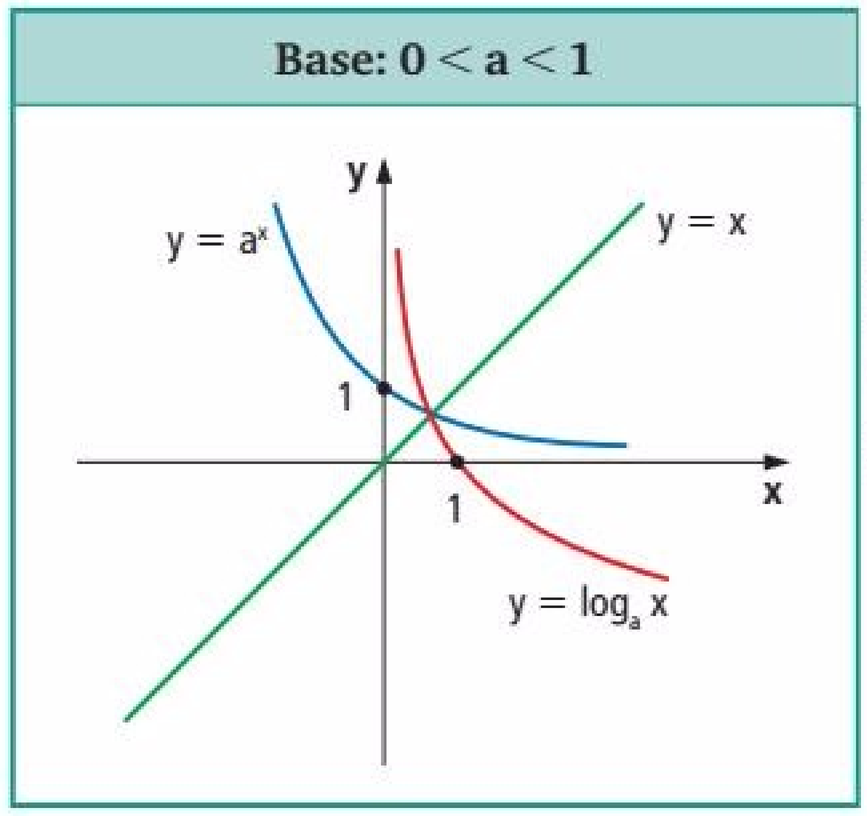
Comparando as duas funções, temos:

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ f(x) = a^x \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \log_a x \end{cases}$$

Portanto, a função inversa da função exponencial é a função logarítmica.

Como os gráficos de funções inversas são simétricos em relação à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares, o gráfico da função logarítmica pode ser obtido pela reflexão do gráfico da função exponencial. Observe:





Ilustrações: Editoria de arte

Exercícios resolvidos

13 Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Resolução

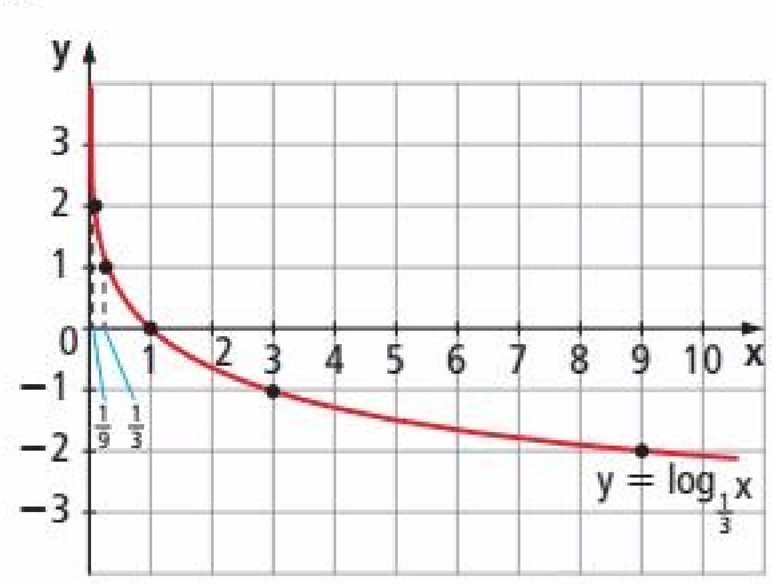
Sendo a base do logaritmo igual a $\frac{1}{3}$, é conveniente escolher para *x* potências de base $\frac{1}{3}$. Assim:

- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 0$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = 1$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = 2$

Dessa forma, podemos construir a seguinte tabela:

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
y	−2	−1	0	1	2

Marcando os pontos no plano cartesiano, obtemos o gráfico:



14 Dada a função $f(x) = \log_2 (4x - 1)$, faça o que se pede.

a) Classifique a função em crescente ou decrescente.

b) Determine o domínio de f(x).

c) Determine $f^{-1}(x)$.

Resolução

a) Como a base de f(x) é maior que 1, pois a = 2, a função é crescente.

b) Pela condição de existência dos logaritmos, temos: $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$, $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Precisamos analisar a base e o logaritmando da função logarítmica:

Logaritmando $(b > 0)$: $4x - 1 > 0$

$$4x - 1 > 0 \Rightarrow 4x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$$

Base ($a > 0$ e $a \neq 1$): $a = 2$

Logo, o domínio de $f(x) = \log_2 (4x - 1)$ é

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{4}\right\}.$$

c) Para determinar a função inversa, substituindo a variável *x* por *y*:

$$y = \log_2 (4x - 1)$$

$$x = \log_2 (4y - 1) \Rightarrow 2^x = 4y - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y = 2^x + 1 \Rightarrow y = \frac{2^x + 1}{4}$$

Portanto, a função inversa é $f^{-1}(x) = \dfrac{2^x + 1}{4}$.

28. Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de: Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

29. Construa o gráfico das seguintes funções:

a) $y = \log_3 x$, para $x > 0$

b) $f(x) = \log_2 (x - 1)$, para $x > 1$

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

30. Determine o domínio de $f(x) = \log \dfrac{x - 4}{x + 1}$.

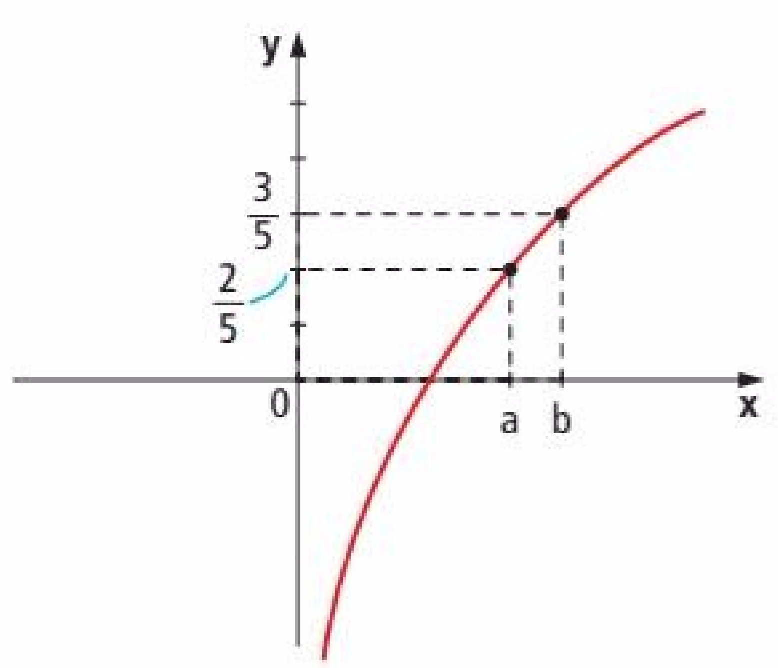
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 4\}$

31. Determine o campo de existência da função:

$f(x) = \log_3 (x^2 - x - 12) - \log_3 (x^2 - 10x + 25)$

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 4 \text{ e } x \neq 5\}$

32. (PUC-RS) Observe a representação da função dada por $y = \log (x)$, a seguir.



Ilustrações: Editoria de arte

Pelos dados da figura, podemos afirmar que o valor de $\log (a \cdot b)$ é:

X a) 1

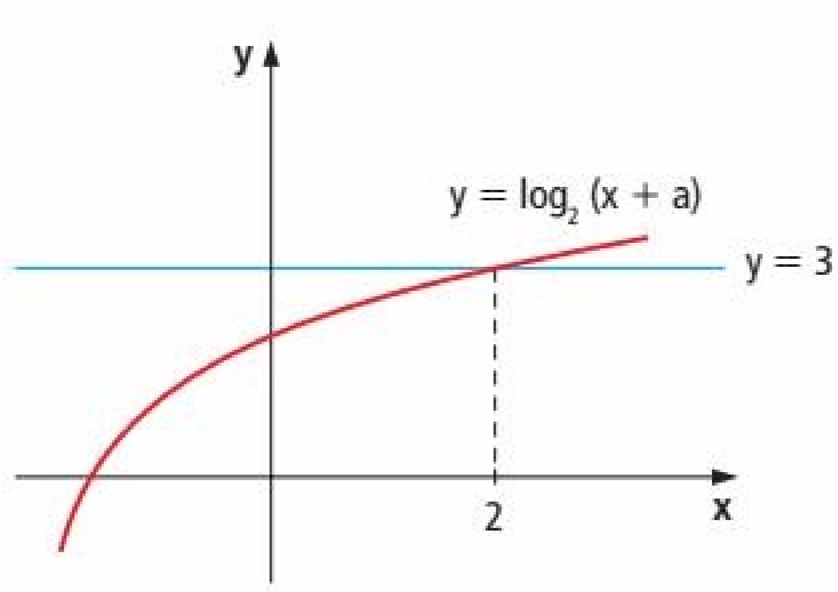
b) 10

c) $10^{\frac{2}{5}}$

d) $10^{\frac{3}{5}}$

e) 10^5

33. (UERJ) No sistema cartesiano a seguir, estão representadas as funções $y = \log_2 (x + a)$ e $y = 3$, onde *a* é um número real diferente de zero.



Determine o valor de *a*. $a = 6$

34. Esboce o gráfico da função $y = \log |x|$ e determine seu domínio e sua imagem. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

35. (UFF-RJ) A energia potencial elástica (*E*) e a variação no comprimento ($\Delta\ell$) de uma determinada mola estão associadas conforme a tabela:

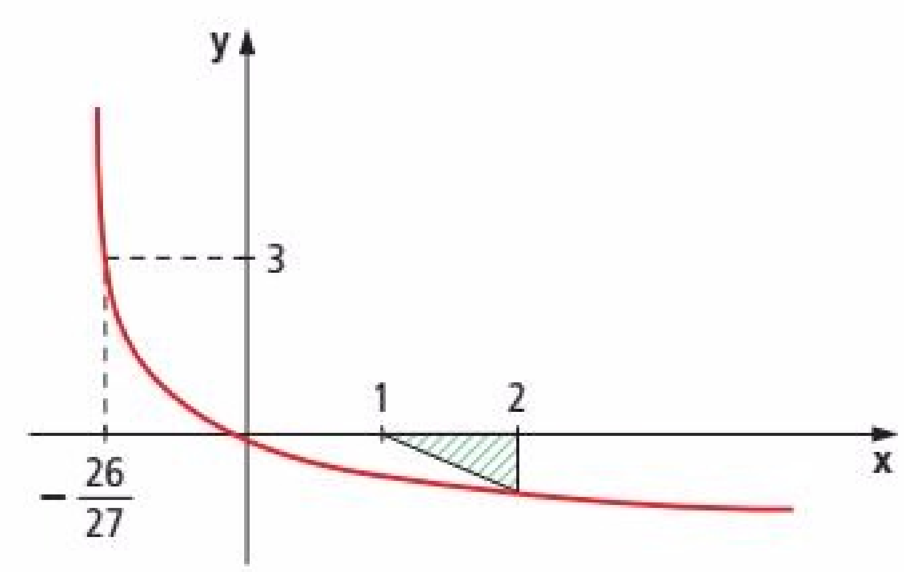
$y = \log E$	$x = \log \Delta\ell$
4	6
6	2

Sabe-se, também, que a relação entre *y* e *x* é estabelecida pela equação $y = nx + \log \left(\frac{K}{2}\right)$, sendo *K* a constante elástica da mola e *n* uma constante.

a) Determine os valores das constantes *K* e *n*. $n = 2$ e $K = 200$

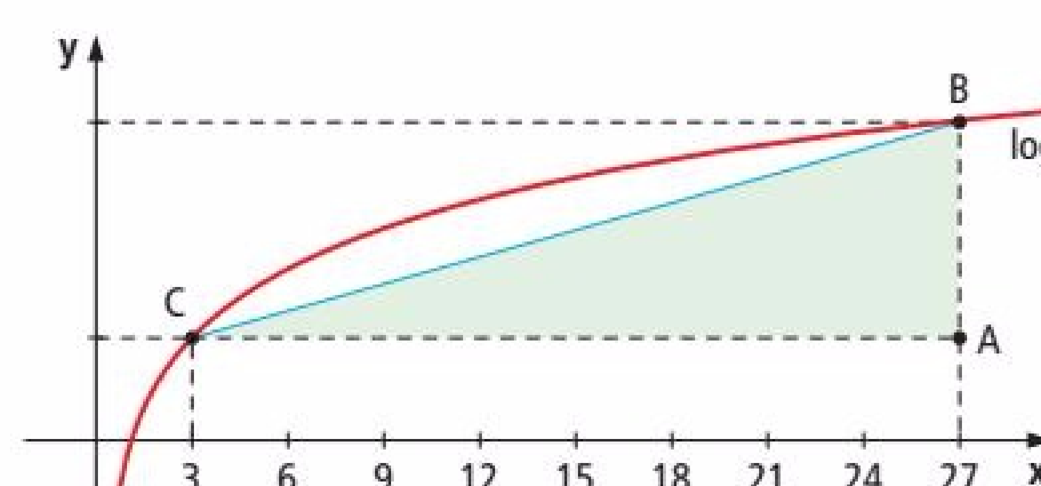
b) Determine o valor de *E* para $\Delta\ell = 3$. $E = 900$

36. (Ufop-MG) O gráfico a seguir representa uma função do tipo $f(x) = \log_b (x + a)$.



Determine a área do triângulo retângulo hachurado. $\frac{1}{2}$ u.a.

37. (UFAM) Na figura a seguir a curva representa o gráfico da função $f(x) = \log_3 x$. A área do triângulo ABC é igual a:



a) 25 unidades de área.

X b) 24 unidades de área.

c) 23 unidades de área.

d) 21 unidades de área.

e) 20 unidades de área.

38. O uso de medicamentos requer cautela e não deve ser banalizado. O fácil acesso a medicamentos tem gerado o uso incorreto de muitas drogas, sendo o público jovem bastante afetado, uma vez que a mídia também exerce influência nesse mercado. Leia o texto a seguir a respeito de medicamentos e faça o que se pede:

Medicamentos e os jovens

Usar medicamentos por conta própria também faz parte dos hábitos de diversos adolescentes em todo o mundo. Com o intuito de curar alguma doença, alcançar o bem-estar pessoal ou uma aparência física desejável, os jovens se tornaram adeptos dos mais diversos tipos de medicamentos, desde um comprimido para dor de cabeça, até calmantes, estimulantes ou antidepressivos. Tudo isso sem nenhum acompanhamento médico.

Quais os medicamentos mais consumidos?

Entre os medicamentos mais consumidos pelos jovens estão os analgésicos e antibióticos, inalantes e tranquilizantes, medicamentos para emagrecimento e ansiedade, xaropes, anabolizantes e medicamentos para disfunção erétil.

Quais os riscos do uso indiscriminado de medicamentos pelos jovens?

Além dos riscos inerentes à automedicação, tal hábito quando praticado por jovens é ainda mais preocupante em função das misturas perigosas que eles costumam fazer, por exemplo:

- Alguns medicamentos tranquilizantes com álcool podem levar ao estado de coma e causar até mesmo a morte do usuário.
- Medicamentos para emagrecer (anorexígenos) com álcool e tabaco podem aumentar o risco de doenças cardíacas e respiratórias.

[...]

Medicamentos para emagrecer

Atualmente, tem sido muito comum a busca de uma solução rápida para combater o excesso de peso, como o uso de medicamentos para emagrecer, chamados anorexígenos. Esses medicamentos agem diminuindo o apetite, facilitando a perda de peso por determinado tempo.

Os anorexígenos apresentam algum tipo de risco?

Os anorexígenos são produtos de alto risco porque podem causar dependência e inúmeras reações indesejadas, como humor instável, depressão nervosa, irritabilidade, agitação, confusão mental, alucinações, dentre outras. A retirada brusca desse tipo de medicamento pode ser acompanhada de fadiga (cansaço), sonolência ou depressão. Por apresentarem riscos elevados, esses produtos são controlados por lei e somente os médicos podem prescrevê-los.

Oko Laa/Shutterstock.com

O excesso de peso é uma preocupação frequente entre as pessoas, principalmente entre os jovens, essa preocupação exagerada pode causar distúrbios alimentares como a anorexia e a bulimia.

[...]

Fonte: AGÊNCIA NACIONAL DE VIGILÂNCIA SANITÁRIA (ANVISA). **O que devemos saber sobre medicamentos**. 1. ed. Brasília: ANVISA, 2010. p. 66-67; 74. Disponível em: < http://portal.anvisa.gov.br/wps/wcm/connect/d1ebd3804745871090afd43fbc4c6735/Cartilha+o+que+devemos+saber+sobre+medicamentos.pdf?MOD=AJPERES>. Acesso em: 05 abr. 2016.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Segundo o texto, qual é o problema retratado no consumo de medicamentos entre os jovens?

b) Conforme presente no texto, “atualmente, tem sido muito comum a busca de uma solução rápida para combater o excesso de peso”.

A anorexia e a bulimia são dois transtornos alimentares muito comuns na sociedade atualmente, principalmente entre jovens. Pesquise cada um desses transtornos, listando suas diferenças e o tratamento correto que deve ser realizado em cada um deles. Em seguida, discuta com os colegas os resultados obtidos.

c) Dentre os problemas decorrentes da automedicação, está a ingestão excessiva de medicamentos. A concentração de um medicamento, ao entrar na corrente sanguínea, após ser metabolizado, diminui a uma taxa proporcional à quantidade ingerida e ao tempo decorrido. Suponha que a quantidade de determinado medicamento no organismo possa ser modelada pela função $M(t) = M_0(0,5)^t$, em que M_0 é a quantidade ingerida (em mg) e $M(t)$ é a quantidade do medicamento no organismo (em mg) decorridas *t* horas da ingestão. Se forem ingeridas 500 mg desse medicamento, após quanto tempo no organismo a quantidade da droga será igual a 90 mg?

Considere $\log 2 = 0,3$ e $\log 0,18 = -0,74$.

Equações logarítmicas

Toda equação que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo de base real, positiva e diferente de 1, é denominada **equação logarítmica**.

Exemplos:

a) $\log_3 (x - 1) = 2$

b) $\log_{x+1} (19 - x) = 2$

c) $1 - \log_2 x = \log_2 3 + 4 \cdot \log_2 x$

d) $\log_2 (x^2 + x + 2) = 5$

Para resolver essas equações, aplicamos a definição de logaritmo e uma de suas consequências:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Além disso, devemos considerar a condição de existência de todos os logaritmos envolvidos, ou seja, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$.

Exercícios resolvidos

15 Resolva a equação: $\log_3 (2x - 7) = 4$.

Resolução

Inicialmente, verificamos a condição de existência do logaritmo:

$2x - 7 > 0 \Rightarrow 2x > 7 \Rightarrow x > \dfrac{7}{2}$

Para resolver a equação, vamos expressar o 2º membro como um logaritmo de base 3 (a mesma base do logaritmo no 1º membro da equação) do seguinte modo:

$\log_3 y = 4 \Rightarrow 3^4 = y \Rightarrow y = 81$

Substituindo na equação dada, temos:

$\log_3 (2x - 7) = \log_3 81$

Como $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$, obtemos:

$2x - 7 = 81 \Rightarrow 2x = 88 \Rightarrow x = 44$

Como $x = 44$ satisfaz à condição de existência, o conjunto solução da equação é $S = \{44\}$.

16 Determine o conjunto solução da equação $\log_x (3x^2 - x) = 2$.

Resolução

As condições de existência são: $\begin{cases} 3x^2 - x > 0 & \text{(I)} \\ x > 0 \text{ e } x \neq 1 & \text{(II)} \end{cases}$

Usando a definição, obtemos:

$\log_x (3x^2 - x) = 2 \Rightarrow 3x^2 - x = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 - x = 0 \Rightarrow x(2x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}$

Verificação para as condições de existência:

Substituindo os possíveis valores de *x* em (I), temos:

- para $x = 0$:

  $3x^2 - x > 0 \Rightarrow 0 - 0 > 0 \Rightarrow 0 > 0$ (falsa)

- para $x = \dfrac{1}{2}$:

  $3x^2 - x > 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow$

  $\Rightarrow \dfrac{1}{4} > 0$ (verdadeira)

Substituindo os possíveis valores de *x* em (II), temos:

- para $x = 0$:

  $x > 0 \Rightarrow 0 > 0$ (falsa)

  $x \neq 1 \Rightarrow 0 \neq 1$ (verdadeira)

- para $x = \dfrac{1}{2}$:

  $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2} > 0$ (verdadeira)

  $x \neq 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} \neq 1$ (verdadeira)

  Como $x = \dfrac{1}{2}$ satisfaz a todas as condições de existência, $\dfrac{1}{2}$ é a única solução da equação.

Portanto, $S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Inequações logarítmicas

Toda desigualdade que apresenta a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo de base real positiva e diferente de 1 é denominada **inequação logarítmica**.

Exemplos:

a) $\log_2 x > 4$

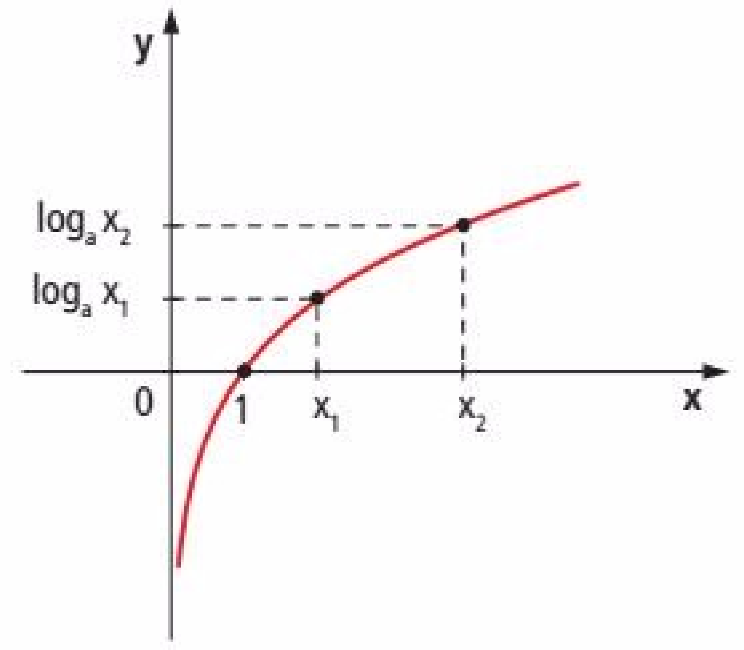
b) $\log (x - 1) + \log (3x + 2) \leqslant \log x$

c) $\log_5 x + \dfrac{1}{\log_5 x} < \dfrac{1}{4}$

d) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) \geqslant -4$

Com base no gráfico da função *f* dada por $f(x) = \log_a x$, veremos duas condições necessárias à resolução de uma inequação logarítmica. Observe que *f* é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

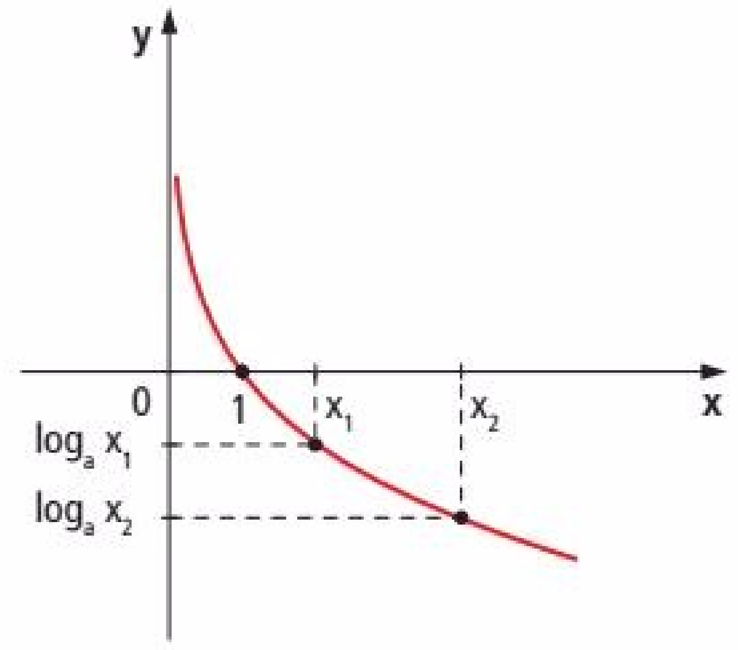
1º caso: a > 1 (função crescente)



$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$

Conservamos o sentido da desigualdade.

2º caso: 0 < a < 1 (função decrescente)



$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

Invertemos o sentido da desigualdade.

Ilustrações: Editoria de arte

Exercícios resolvidos

17 Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}} (x - 3) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 4$.

Resolução

A condição de existência é:

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ (I)

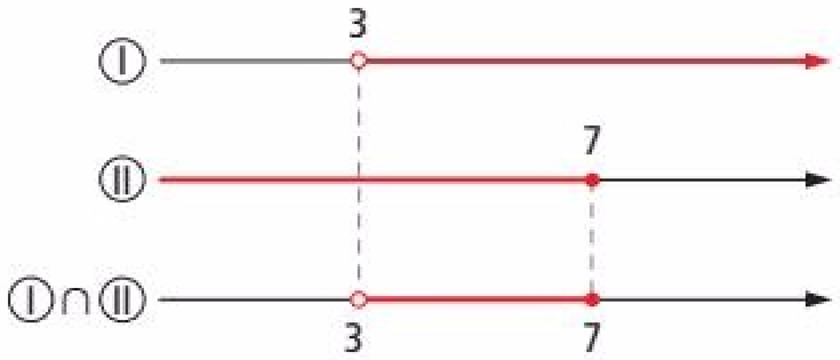
Como a base é um número entre 0 e 1, a função logarítmica dada por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é decrescente e o sentido da desigualdade se inverte para os logaritmandos.

$x - 3 \leqslant 4$

$x \leqslant 3 + 4$

$x \leqslant 7$ (II)

A solução da inequação deve satisfazer à condição de existência. Por isso, devemos fazer (I) ∩ (II):



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 7\}$.

18 Resolva a inequação:

$\log_{12} (x - 1) + \log_{12} (x - 2) \leqslant 1$

Resolução

As condições de existência são:

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ (I)

$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$ (II)

Resolvendo a inequação, temos:

$\log_{12} (x - 1) + \log_{12} (x - 2) \leqslant 1$

$\log_{12} [(x - 1)(x - 2)] \leqslant 1$

$\log_{12} [(x - 1)(x - 2)] \leqslant \log_{12} 12$

$(x - 1)(x - 2) \leqslant 12$

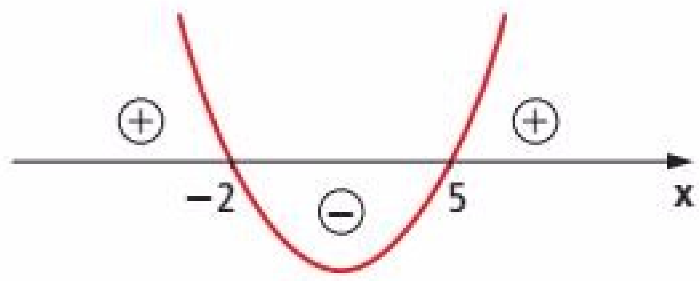
O sentido da desigualdade se conserva, pois $a = 12 > 1$.

$x^2 - 3x + 2 \leqslant 12$

$x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$

Zeros da função *f* dada por $f(x) = x^2 - 3x - 10$:

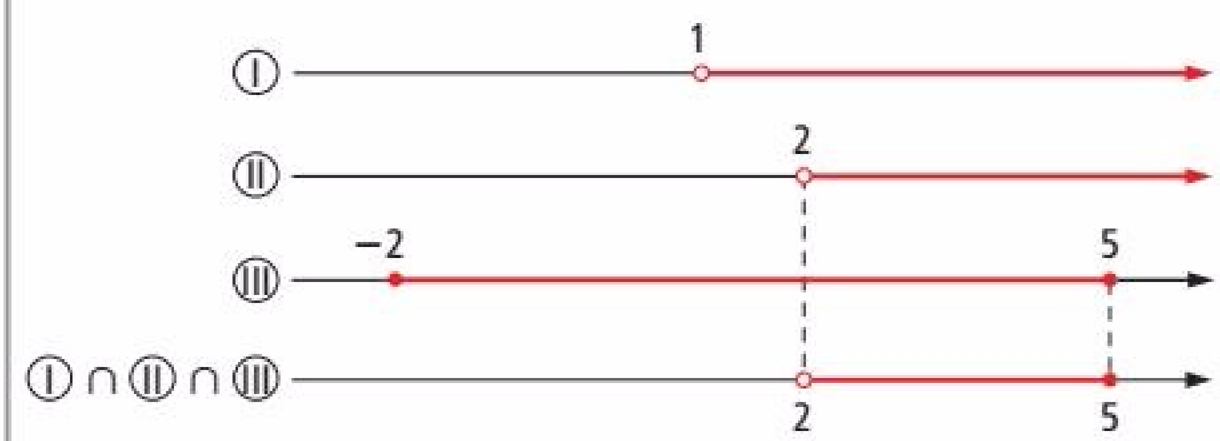
$x' = 5$ e $x'' = -2$



Então, $-2 \leqslant x \leqslant 5$ (III)

A solução da inequação deve satisfazer às condições de existência.

Por isso, devemos fazer (I) ∩ (II) ∩ (III):



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leqslant 5\}$

Ilustrações: Editoria de arte

Exercícios propostos

Escreva no caderno

39. Calcule o valor de x na equação $7^x = 4{,}2$, sendo $\log 6 = 0{,}7781$ e $\log 7 = 0{,}8451$. $S = \{1{,}9207\}$

40. Determine o conjunto solução da equação $(\log_2 x)^2 - 9\log_8 x = 4$. $S = \left\{\frac{1}{2}, 16\right\}$

41. Resolva a equação $4 \cdot x^{\log_2 x} = x^3$. $S = \{2, 4\}$

42. Determine o conjunto solução das equações.

a) $\log_5 (1 - 4x) = 2$ $S = \{-6\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 4x - 5\right) = -4$ $S = \{-7, 3\}$

c) $\log (x + 4) + \log (x - 4) = 2 \log 3$ $S = \{5\}$

d) $\log_3 x + \dfrac{1}{\log_{3x} 9} = 2$ $S = \{3\}$

e) $\log_{x+2} (20 - 2x) = 2$ $S = \{2\}$

f) $\log_2 (9^{x-2} + 7) = 2 + \log_2 (3^{x-2} + 1)$ $S = \{2, 3\}$

43. Determine o número natural que é raiz da equação:

$$7\log x - \frac{\log x}{4} = 13 + \frac{1}{\log x}$$ $x = 100$

44. (UMC-SP) A intensidade I de um terremoto, medida na escala Richter, é dada pela fórmula $I = \dfrac{2}{3}\log_{10}\left(\dfrac{E}{0{,}007}\right)$, onde E é a energia liberada no terremoto em quilowatt-hora. Calcular o número de residências, cujo consumo mensal individual de energia elétrica é de 350 quilowatts-hora, que podem ser abastecidas durante um mês pela energia liberada por um terremoto de intensidade 6. 20 000 residências.

45. (UCSal-BA) Os números reais x e y que satisfazem o sistema $\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 2 \\ \dfrac{x}{y} = 8 \end{cases}$ são tais que $x + y$ está compreendido entre:

a) 0 e 2
b) 2 e 4
X c) 4 e 6
d) 6 e 8
e) 8 e 10

46. Determine o conjunto solução das inequações:

a) $\log_{10} (a^2 - 2a + 1) < 2$ $S = \{a \in \mathbb{R} \mid -9 < a < 11 \text{ e } a \neq 1\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 4x - 5\right) \geqslant -4$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leqslant x < -5 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$

47. Resolva a inequação: $3^{\log_5 (x^2 - 4x + 4)} < 1$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$

48. Quais são as soluções reais da inequação $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_5 (x+3)} > 1$?
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$

49. (IFMG) O conjunto solução da inequação: $\log_3 (2x + 1) > \log_3 (x^2 - 2)$ é:

X a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 3\right\}$
b) $\varnothing$
c) $\mathbb{R}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

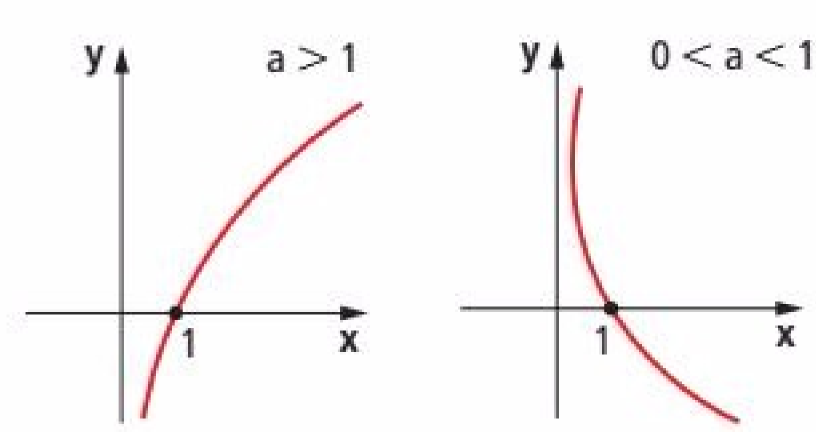
50. Resolva as inequações:

a) $\log_4 (2x + 1) - \log_4 3 > \log_4 x$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

b) $\log_2 (x - 5) + \log_2 (x - 4) < 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$

51. Determine os valores de x que verificam a desigualdade $\dfrac{1}{3} < \log_8 5x < 1$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{8}{5}\right\}$

52. (Fuvest-SP) Seja f uma função a valores reais, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \log_{10}(\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1))$, para todo $x \in D$.



Gráficos da função logarítmica de base *a*.

O conjunto que pode ser o domínio D é:

X a) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 1\}$
c) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{1}{3} < x < 10\right\}$
d) $\left\{x \in \mathbb{R};\ x \leqslant \dfrac{1}{3} \text{ ou } x \geqslant 10\right\}$
e) $\left\{x \in \mathbb{R};\ \dfrac{1}{9} < x < \dfrac{10}{3}\right\}$

Explorando a tecnologia

Resolução de inequações logarítmicas com o GeoGebra

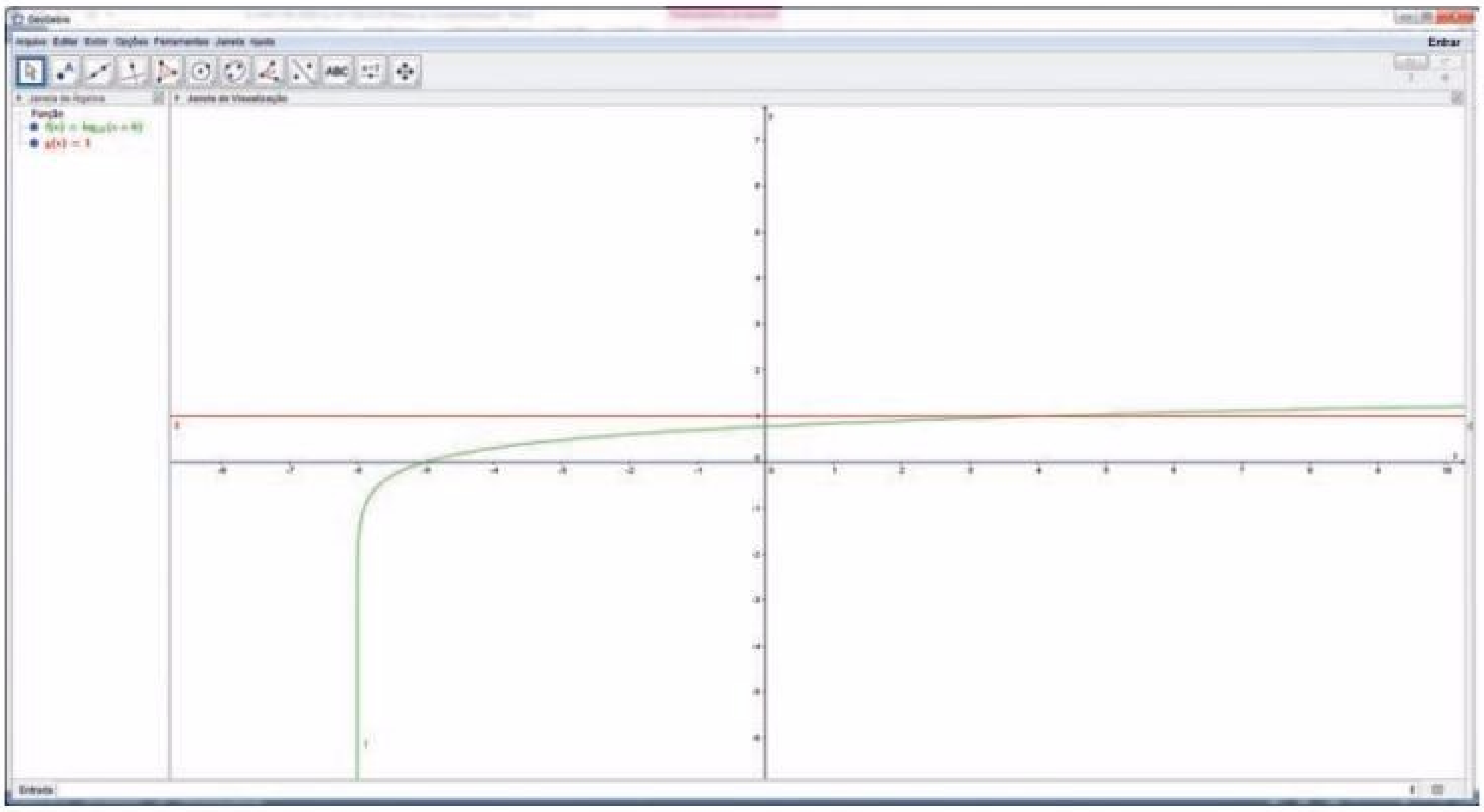
Com o GeoGebra é possível resolver equações utilizando a resolução gráfica, porém nem sempre esse método é aconselhável, pois não fornece uma precisão adequada quando a solução é composta de alguns números racionais, como as dízimas periódicas, ou números irracionais. Entretanto, como aproximação, o método é recomendável.

Assim como estudamos nas inequações do 1º e do 2º grau, as inequações logarítmicas também podem ser entendidas como uma comparação entre duas funções. Portanto, para resolver inequações logarítmicas graficamente comparamos os gráficos das funções associadas aos membros da inequação.

Por exemplo, para resolver a inequação logarítmica $\log(x + 6) > 1$, siga a sequência de passos abaixo.

1. Vamos escrever o primeiro membro da inequação como a função $f(x) = \log(x + 6)$ e o segundo como a função $g(x) = 1$.
2. Para escrever o logaritmo decimal de um número no GeoGebra utilizamos a função **lg(x)** ou **log10(x)**. Portanto, para construir a função $f(x) = \log(x + 6)$ devemos digitar no **Campo de Entrada** 'f(x)=lg(x + 6)' ou 'f(x)=log10(x + 6)' e pressionar a tecla *enter*. Para construir a função $g(x) = 1$, digite 'g(x)=1' e pressione *enter*.

Assim, a **Janela de Visualização** do GeoGebra fornecerá a seguinte construção:



Geogebra

3. Para determinar as coordenadas do ponto de intersecção, devemos utilizar a ferramenta **Intersecção de Dois Objetos**. Nesse caso, o ponto de intersecção é A(4, 1).
4. Observando o gráfico vemos que, enquanto o valor de *x* for maior que 4 (abscissa do ponto de intersecção), temos $f(x) > g(x)$. Por outro lado, enquanto o valor de *x* for menor que 4, temos $g(x) > f(x)$ ou ainda $f(x) < g(x)$.

Note que *x* não pode ser 4, pois nesse caso teríamos $f(x) = g(x)$, o que não contempla a situação inicial.

Como a equação inicial é $\log(x + 2) > 1$, temos $f(x) > g(x)$, ou seja, para isso ocorrer devemos ter $x > 4$.

Logo, a solução será todos os números reais maiores que 4, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

Atividades

Escreva no caderno

Veja o Manual do Professor.

1. Determine o conjunto solução da inequação $\log(2x - 5) \leqslant 1$.
2. Crie um Controle Deslizante e determine o valor de *m* para que o conjunto solução da inequação $\log(x + 4) < m$ seja $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$.
3. Utilizando o mesmo procedimento do exercício anterior, determine o valor de *m* para que a solução da inequação $\log_2(x + 4) > m$ tenha apenas valores positivos.

Exercícios complementares

Escreva no caderno

1. (ESPM-SP) Se $(4^x)^2 = 16 \cdot 2^{x^2}$, o valor de x^x é:

a) 27
X b) 4
c) $\frac{1}{4}$
d) 1
e) $-\frac{1}{27}$

2. (UEPG-PR) Sabendo que *x* e *y* são, respectivamente, as soluções das equações exponenciais $16^{1-3x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-6}$ e $9 \cdot 3^{y-1} - 3^y = 18$, assinale o que for **correto** e indique a soma:

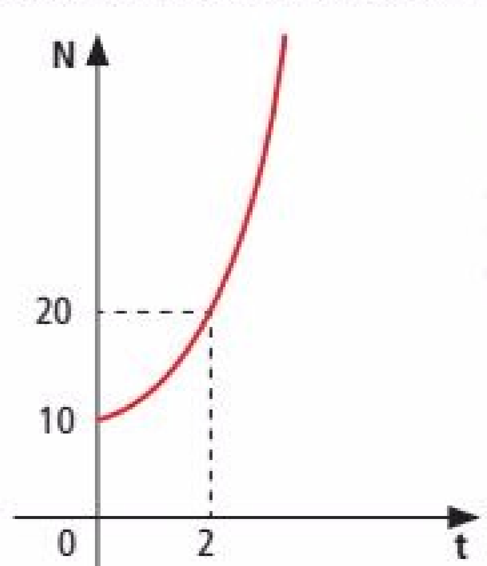
01. $x + y = 8$
X 02. $\frac{y}{x} = -2$
04. $x - y = -10$
X 08. $y + x = 1$
X 16. $x - y = -3$

Soma: 26 (02 + 08 + 16)

3. (EsPCEx-SP) O conjunto solução do sistema $\begin{cases} 3^x \cdot 27^y = 9 \\ y^3 + \frac{2}{3}xy^2 = 0 \end{cases}$ é formado por dois pontos, cuja localização no plano cartesiano é:

a) Ambos no primeiro quadrante.
b) Um no quarto quadrante e o outro no eixo *X*.
c) Um no segundo quadrante e o outro no terceiro quadrante.
d) Um no terceiro quadrante e o outro no eixo *Y*.
X e) Um no segundo quadrante e o outro no eixo *X*.

4. (UFRN) A pedido do seu orientador, um bolsista de um laboratório de biologia construiu o gráfico a seguir a partir dos dados obtidos no monitoramento do crescimento de uma cultura de micro-organismos.



Editoria de arte

Analisando o gráfico, o bolsista informou ao orientador que a cultura crescia segundo o modelo matemático, $N = k \cdot 2^{\alpha t}$, com *t* em horas e *N* em milhares de micro-organismos.

Para constatar que o modelo matemático apresentado pelo bolsista estava correto, o orientador coletou novos dados com $t = 4$ horas e $t = 8$ horas.

Para que o modelo construído pelo bolsista esteja correto, nesse período, o orientador deve ter obtido um aumento na quantidade de micro-organismos de:

a) 80 000
b) 160 000
c) 40 000
X d) 120 000

5. (PUC-MG) O valor de certo equipamento, comprado por R\$ 60 000,00, é reduzido à metade a cada 15 meses. Assim, a equação $V(t) = 60000 \cdot 2^{-\frac{t}{15}}$, onde *t* é o tempo de uso em meses e $V(t)$ é o valor em reais, representa a variação do valor desse equipamento. Com base nessas informações, é **correto** afirmar que o valor do equipamento após 45 meses de uso será igual a:

a) R\$ 3 750,00
X b) R\$ 7 500,00
c) R\$ 10 000,00
d) R\$ 20 000,00

6. (UFPE) Diferentes quantidades de fertilizantes são aplicadas em plantações de cereais com o mesmo número de plantas, e é medido o peso do cereal colhido em cada plantação. Se x kg de fertilizantes são aplicados em uma plantação onde foram colhidas *y* toneladas (denotadas por t) de cereais, então, admita que estes valores estejam relacionados por $y = k \cdot x^r$, com *k* e *r* constantes. Se, para $x = 1$ kg, temos $y = 0{,}2$ t e, para $x = 32$ kg, temos $y = 0{,}8$ t, encontre o valor de *x*, em kg, quando $y = 1{,}8$ t e assinale a soma dos seus dígitos. 9

7. (UFPR) Um grupo de cientistas decidiu utilizar o seguinte modelo logístico, bastante conhecido por matemáticos e biólogos, para estimar o número de pássaros, $P(t)$, de determinada espécie numa área de proteção ambiental: $P(t) = \frac{500}{1 + 2^{2-t}}$, sendo *t* o tempo em anos e $t = 0$ o momento em que o estudo foi iniciado.

a) Em quanto tempo a população chegará a 400 indivíduos? $t = 4$ anos

b) À medida que o tempo *t* aumenta, o número de pássaros dessa espécie se aproxima de qual valor? Justifique sua resposta. 500

8. (UFRGS-RS) Atribuindo para log 2 o valor 0,3, então os valores de log 0,2 e log 20 são, respectivamente:

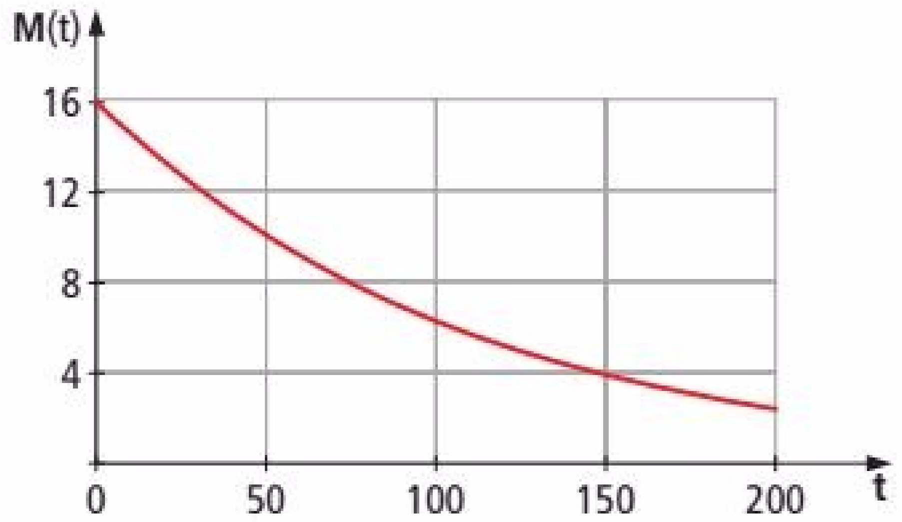
a) –0,7 e 3.
X b) –0,7 e 1,3.
c) 0,3 e 1,3.
d) 0,7 e 2,3.
e) 0,7 e 3.

9. (Fuvest-SP) Resolva as inequações:

a) $x^3 - x^2 - 6x > 0$; $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } x > 3\}$

b) $\log_2 (x^3 - x^2 - 6x) \leq 2$.
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1 - \sqrt{5} \text{ ou } -1 \leq x < 0 \text{ ou } 3 < x \leq 1 + \sqrt{5}\}$

10. (Unicamp-SP) Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva a seguir representa a função exponencial M(t), que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), *t* minutos após o café ser despejado.



Pelo gráfico, podemos concluir que:

X a) $M(t) = 2^{\left(4-\frac{t}{75}\right)}$ c) $M(t) = 2^{\left(5-\frac{t}{50}\right)}$

b) $M(t) = 2^{\left(4-\frac{t}{50}\right)}$ d) $M(t) = 2^{\left(5-\frac{t}{150}\right)}$

11. (IFCE) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $x > 1$ e $y > 1$. A expressão $2\log_9 x + \log_3 6 - 6\log_9 \sqrt{y}$ pode ser simplificada para:

X a) $\log_9 \dfrac{36x^2}{y^3}$

b) $\log_3\left(\dfrac{2x}{6\sqrt{y}}+6\right)$

c) $\log_9(2x+6(1-\sqrt{y}))$

d) $\log_3(x^2+36+y^{-3})$

e) $\log_3(1+6xy)$

12. (IME-RJ) Se $\log_{10} 2 = x$ e $\log_{10} 3 = y$, então $\log_5 18$ vale:

X a) $\dfrac{x+2y}{1-x}$ c) $\dfrac{2x+y}{1+x}$ e) $\dfrac{3x+2y}{1-x}$

b) $\dfrac{x+y}{1-x}$ d) $\dfrac{x+2y}{1+x}$

13. (Insper-SP) O número de soluções reais da equação $\log_x(x+3) + \log_x(x-2) = 2$ é:

a) 0 c) 2 e) 4

X b) 1 d) 3

14. (FEI-SP) Resolva a inequação: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) - \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1$$

15. (UEL-PR) Quantos números inteiros são soluções do sistema abaixo? Cinco números inteiros.

$$\begin{cases} 27^x < 9^{x+3} \\ \log_{\frac{1}{2}} 2x < 0 \end{cases}$$

16. (Enem/MEC)

A Escala de Magnitude de Momento (abreviada como MMS e denotada como M_w), introduzida em 1979 por Thomas Haks e Hiroo Kanamori, substituiu a Escala de Richter para medir a magnitude dos terremotos em termos de energia liberada. Menos conhecida pelo público, a MMS é, no entanto, a escala usada para estimar as magnitudes de todos os grandes terremotos da atualidade. Assim como a escala Richter, a MMS é uma escala logarítmica. M_W e M_0 se relacionam pela fórmula:

$$M_W = -10{,}7 + \frac{2}{3}\log_{10}(M_0)$$

Onde M_0 é o momento sísmico (usualmente estimado a partir dos registros de movimento da superfície, através dos sismogramas), cuja unidade é o dina · cm.

O terremoto de Kobe, acontecido no dia 17 de janeiro de 1995, foi um dos terremotos que causaram maior impacto no Japão e na comunidade científica internacional. Teve magnitude $M_W = 7{,}3$.

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. Historic Earthquakes. Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

U.S. GEOLOGICAL SURVEY. **USGS Earthquake Magnitude Policy.** Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 1º maio 2010 (adaptado).

Mostrando que é possível determinar a medida por meio de conhecimentos matemáticos, qual foi o momento sísmico M_0 do terremoto de Kobe (em dina · cm)?

a) $10^{-5,10}$ b) $10^{-0,73}$ c) $10^{12,00}$ d) $10^{21,65}$ X e) $10^{27,00}$

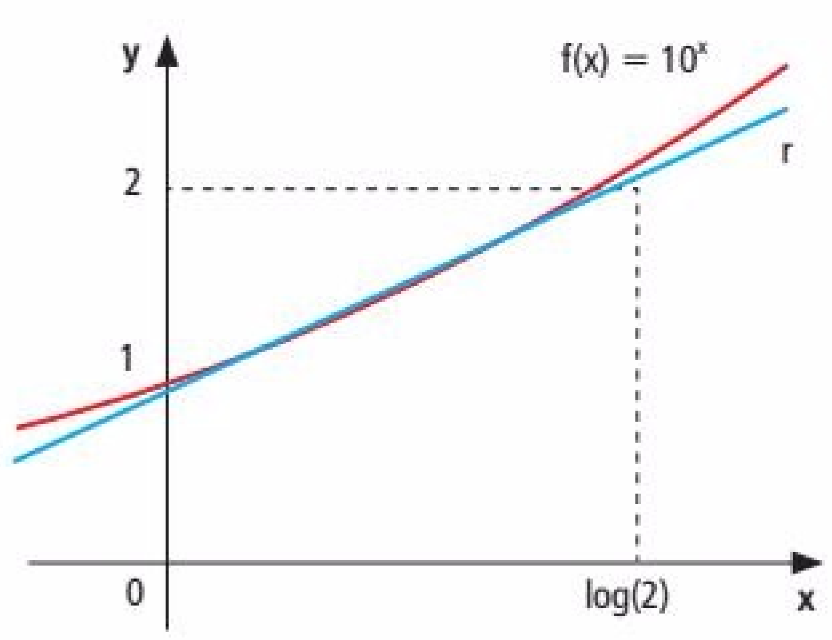
17. (IME-RJ) Considere a equação $\log_{3x}\dfrac{3}{x} + (\log_3 x)^2 = 1$.

A soma dos quadrados das soluções reais dessa equação está contida no intervalo:

a) [0, 5) X c) [10, 15) e) [20, ∞)

b) [5, 10) d) [15, 20)

18. (UFPR) Considere o gráfico da função $f(x) = 10^x$, com *x* real, e da reta *r*, apresentados na figura abaixo.



Ilustrações: Editoria de arte

a) Utilizando a aproximação $\log(2) \simeq 0{,}3$ determine a equação da reta *r*. $y = 1 + 3{,}3x$

b) Como a reta *r* está próxima da curva, para valores de *x* entre 0 e log(2), utilize a equação de *r* para obter uma estimativa dos valores de $10^{0,06}$ e de log(1,7).
$\log 1{,}7 \simeq 0{,}2$

19. (Fuvest-SP) É dada a função *f* definida por $f(x) = \log_2 x - \log_4 (x - 3)$.

a) Determine os valores de *x* para os quais $f(x) < 2$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 12\}$

b) Determine os valores de *x* para os quais $f(x) > 2$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4 \text{ ou } x > 12\}$

20. (UMC-SP) O crescimento de uma cultura de bactérias obedece à função $N(t) = 600 \cdot 3^{kt}$, em que *N* é o número de bactérias no instante *t*, sendo *t* o tempo em horas. A produção tem início em $t = 0$. Decorridas 12 horas há um total de 1 800 bactérias. O valor de *k* e o número de bactérias, após 24 horas do início da produção, são, respectivamente:

a) $\frac{1}{12}$ e 3 600.

b) $-\frac{1}{12}$ e 2 100.

c) $-\frac{1}{12}$ e 64.

d) 12 e 5 400.

X e) $\frac{1}{12}$ e 5 400.

21. (UFPR) Uma pizza a 185 °C foi retirada de um forno quente. Entretanto, somente quando a temperatura atingir 65 °C será possível segurar um de seus pedaços com as mãos nuas, sem se queimar. Suponha que a temperatura *T* da pizza, em graus Celsius, possa ser descrita em função do tempo *t*, em minutos, pela expressão $T = 160 \times 2^{-0,8 \times t} + 25$. Qual o tempo necessário para que se possa segurar um pedaço dessa pizza com as mãos nuas, sem se queimar?

a) 0,25 minutos.

b) 0,68 minutos.

X c) 2,5 minutos.

d) 6,63 minutos.

e) 10,0 minutos.

22. (Unisinos-RS) Se *x* e *y* são tais que $\begin{cases} 2^{3x+4y} = 16 \\ 5x + 7y = 8 \end{cases}$, então $x^2 + y^2$ é igual a

a) 0. X b) 32. c) 320. d) 832. e) 9 536.

23. (Fuvest-SP) Use as propriedades do logaritmo para simplificar a expressão

$$S = \frac{1}{2 \cdot \log_2 2016} + \frac{1}{5 \cdot \log_3 2016} + \frac{1}{10 \cdot \log_7 2016}$$

O valor de S é

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{1}{7}$ X e) $\frac{1}{10}$

24. (Umesp-SP) Um aluno, que tinha um certo valor no visor da calculadora, apertou a tecla log por três vezes seguidas e, curiosamente, obteve resultado zero. Qual era o valor que estava no visor da calculadora?

a) 10 b) 10^3 c) 10^5 d) 3^{10} X e) 10^{10}

25. (Unicamp-SP) A solução da equação na variável real *x*, $\log_x(x + 6) = 2$, é um número

X a) primo.

b) par.

c) negativo.

d) irracional.

26. (Udesc-SC) O conjunto solução da inequação $|\log_3(3x)| \leq 1$ é:

a) $S = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

b) $S = [1, 3]$

X c) $S = \left[\frac{1}{9}, 1\right]$

d) $S = \left]0, \frac{1}{9}\right]$

e) $S =]0, 1]$

27. (Unicamp-SP) Considere a função $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}$, definida para todo número real *x*. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Mostre que $f(\log_{10}(2 + \sqrt{3}))$ é um número inteiro.

b) Sabendo que $\log_{10} 2 \simeq 0,3$, encontre os valores de *x* para os quais $f(x) = 52$.

28. (Fuvest-SP) Considere as funções *f* e *g* definidas por

$f(x) = 2\log_2(x - 1)$, se $x \in \mathbb{R}, x > 1$, Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

$g(x) = \log_2\left(1 - \frac{x}{4}\right)$, se $x \in \mathbb{R}, x < 4$.

a) Calcule $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(2)$, $f(3)$, $g(-4)$, $g(0)$ e $g(2)$.

b) Encontre *x*, $1 < x < 4$, tal que $f(x) = g(x)$.

c) Levando em conta os resultados dos itens **a)** e **b)**, esboce os gráficos de *f* e de *g*.

29. (Fuvest-SP) Sobre a equação $(x + 3)2^{x^2 - 9} \log |x^2 + x - 1| = 0$, é correto afirmar que

a) ela não possui raízes reais.

b) sua única raiz real é -3.

c) duas de suas raízes reais são 3 e -3.

d) suas únicas raízes reais são -3, 0 e 1.

X e) ela possui cinco raízes reais distintas.

30. (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\log[H^+]$, em que $[H^+]$ indica concentração, em mol/l, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10.

Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrodênio era $[H^+] = 5,4 \cdot 10^{-8}$ mol/l.

Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30 para log 2, e de 0,48 para log 3. Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi:

X a) 7,26

b) 7,32

c) 7,58

d) 7,74

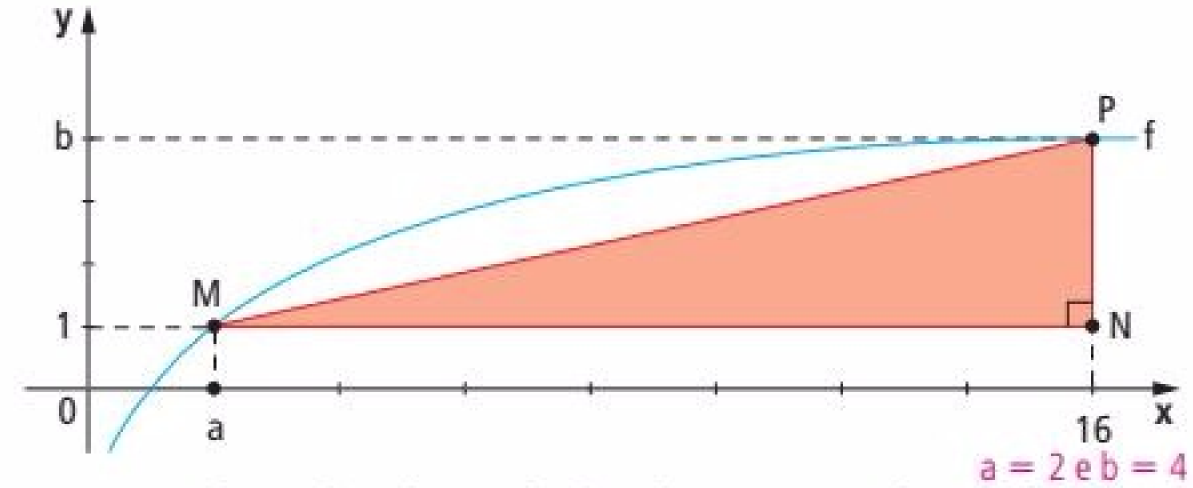
31. (ITA-SP) Seja *f* a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:

a) O domínio D_f da função f. $D_f =]4, +\infty[$

b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$. $S = \varnothing$

c) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$. $S = \left]\frac{3+3\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

32. (UFJF-MG) No gráfico ao lado, representou-se a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_2 x$. Define-se ainda, conforme a figura, em triângulo retângulo MNP, reto em *N*, com os vértices *M* e *P* pertencendo à curva definida por *f*. A partir das informações apresentadas no gráfico *f*, responda às questões a seguir detalhando os cálculos.



$a = 2$ e $b = 4$

a) Qual o valor de *a* e *b* obtidos a partir do gráfico de *f*.

b) Calcule a medida da área do triângulo MNP. 21 u.a.

c) Determine o(s) valor(es) de *x* tal que $[f(x)]^2 - 5 \cdot [f(x)] = -6$. $x = 4$ ou $x = 8$

Retomando e pesquisando

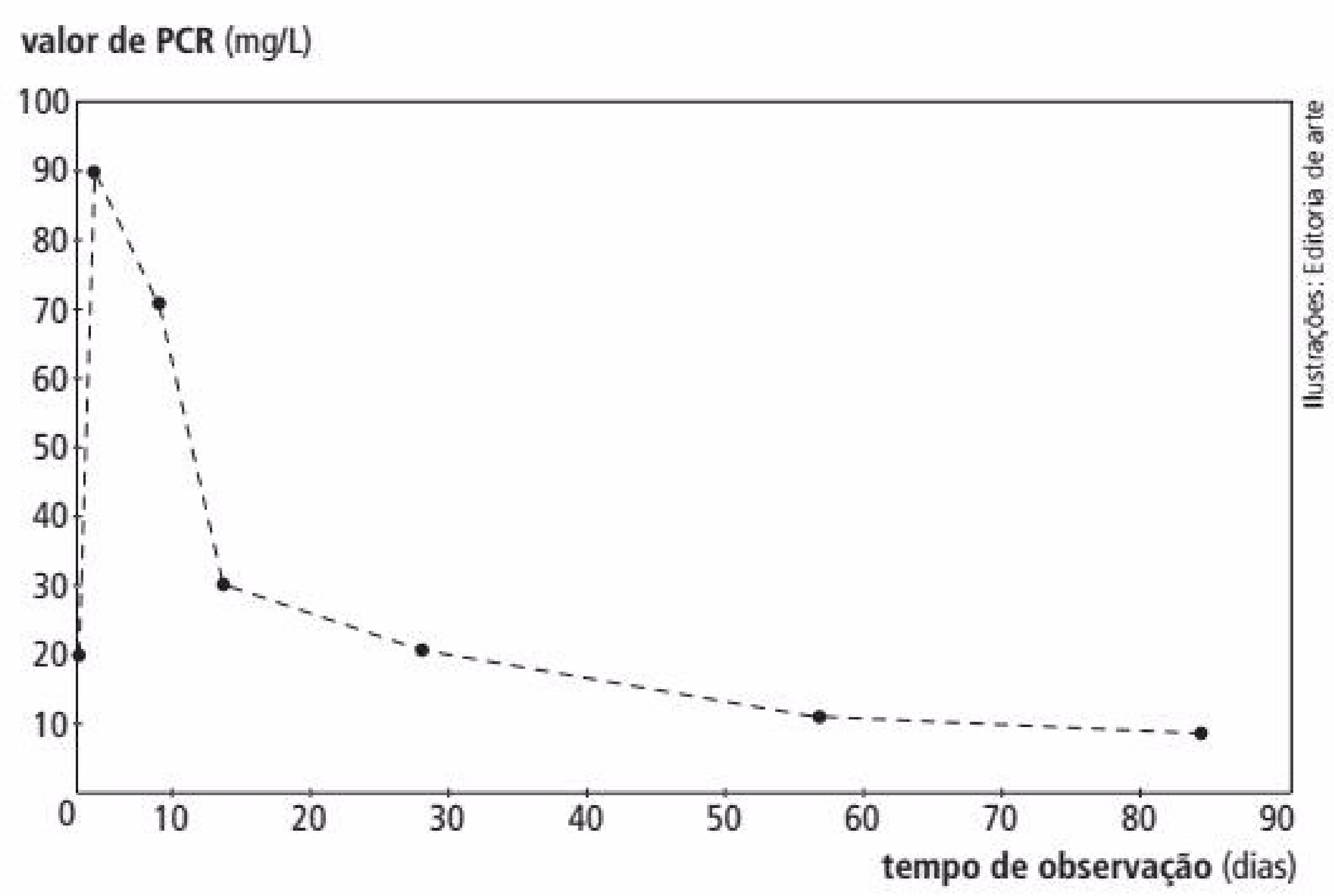
Na abertura do capítulo, você estudou o exame de PCR e suas aplicações.

Em geral, uma pessoa sadia (sem nenhum quadro inflamatório) possui um PCR permanentemente abaixo de 3 mg/L. Já uma pessoa também sadia, mas com PCR permanentemente acima de 3 mg/L, em geral é considerada com alto risco de desenvolver doenças cardiovasculares. Pessoas que apresentam um quadro inflamatório têm um alto índice de PCR podendo chegar, dependendo do problema, a dezenas ou centenas de miligramas por litro.

Uma das grandes vantagens desse exame é que a partir das primeiras duas horas já é possível identificar alteração na quantidade da proteína. Da mesma maneira, após o início do tratamento, depois de 48 horas já é possível identificar se o medicamento é adequado para o problema.

Suponha que um paciente adquiriu uma inflamação e, a partir da identificação e durante o período de tratamento, seus níveis de PCR tenham sido monitorados. Os dados obtidos estão representados no gráfico ao lado.

Com base nessas informações, utilize seus conhecimentos a respeito dos conteúdos abordados nesta unidade para realizar as atividades a seguir.



Ilustrações: Editoria de arte

Escreva no caderno

1. O gráfico acima lembra o gráfico de qual função estudada nesta unidade? Justifique sua resposta.
Veja o Manual do Professor.

2. De acordo com o gráfico, faça um diagnóstico sobre o estado do paciente para o período de 30 e de 60 dias após a identificação da inflamação.

3. Supondo que, após 85 dias de observação, o valor de PCR se estabilize, o que pode se dizer a respeito da saúde desse paciente?

Unidade 5

Estudo das progressões e Matemática financeira

O estudo das periodicidades celestes visando uma melhor colheita gerou ao longo de milênios a evolução e o ajuste de calendários por parte de várias civilizações. Esses calendários acarretavam atrasos em relação aos ciclos solares, gerando confusão na contagem das estações do ano a longo prazo.

Da civilização romana, liderada por Júlio César, surgiu o primeiro calendário contendo anos bissextos, o calendário Juliano, em homenagem ao então imperador. Considerava-se o ano contendo 365 dias e 6 horas.

Estabeleceu-se que a cada 4 anos haveria um dia extra, duplicando o dia 24 de fevereiro. A contagem romana dos dias se dava em relação a dias fixos, com base nos ciclos lunares: *Calendas* (1º dia do mês), *Nonas* e *Idus*. Assim, o dia 24 de fevereiro era designado por *antediem sextum Calendas Martii*, ou seja, "sexto dia antes da Calendas de Março". Da duplicação desse dia, surgiu o ano bissexto: *antediem bis-sextum Calendas Martii*.

No século XVI, o papa Gregório XIII, a partir da evolução de estudos astronômicos (ano de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos), ajustou um novo calendário, sendo os anos bissextos aqueles múltiplos de 4 e não múltiplos de 100, exceção feita aos múltiplos de 400.

O fenômeno do Sol da meia-noite na cidade de Lofoten, Noruega, em agosto de 2013. Esse fenômeno ocorre em locais próximos aos polos por causa da inclinação do eixo da Terra associada aos movimentos de rotação e translação da Terra. Esses fatores também são os responsáveis pelo conceito de ano solar (ou trópico), que difere do ano civil do calendário, gerando os anos bissextos.

RooM the Agency/Alamy Stock Photo

Escreva no caderno

1. Você já conhecia a origem dos anos bissextos? O ano em que estamos é bissexto? Converse com os colegas a respeito. Veja o Manual do Professor.

2. De acordo com o texto, os calendários da Antiguidade eram inexatos e poderiam gerar confusão na contagem das estações do ano a longo prazo. Discuta com os colegas essa afirmação e explique como isso poderia afetar a humanidade, levando em consideração o estilo de vida da época.

3. O calendário civil que utilizamos atualmente tem as mesmas bases do calendário instaurado pelo papa Gregório XIII, em 1582. Com base nessas informações e na leitura do texto de abertura, faça o que se pede.
   a) Pesquise a respeito desse calendário e monte um documento com algumas informações, como o nome que ele recebe, sua origem e em que contexto histórico ele surgiu.
   b) De acordo com as informações a respeito do calendário Juliano, apresentadas no texto, e a pesquisa feita no item anterior, indique as principais diferenças entre o nosso calendário civil atual e o calendário Juliano.

CAPÍTULO 9

Progressões

aleks.k/Shutterstock.com

A quantidade de pétalas das margaridas são números que pertencem à sequência de Fibonacci.

As margaridas têm 13, 21 ou 34 pétalas. Esses números fazem parte da **sequência de Fibonacci**. O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), conhecido como Fibonacci, descobriu essa importante sequência numérica, cujos termos são obtidos pela regra: o primeiro número é 1, o segundo também é 1, e cada um dos demais termos da sequência é obtido pela soma dos dois termos que o antecedem. A sequência fica assim: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, e assim sucessivamente.

A sequência de Fibonacci também está presente em outros fenômenos da natureza, nas artes, na arquitetura e em muitos objetos do dia a dia.

Neste capítulo, estudaremos o conceito de sequência numérica e veremos duas sequências com propriedades especiais: a progressão aritmética (PA) e a progressão geométrica (PG).

Sequências

Uma sequência é uma lista de elementos que possuem determinada ordem. Cada um desses elementos é chamado de **termo** da sequência. O nosso cotidiano está cercado de situações que envolvem sequências. Por exemplo:

a) Os números ímpares: 1, 3, 5, 7, ...
b) Os dias da semana: domingo, segunda-feira, terça-feira, ..., sábado.
c) Os meses do ano: janeiro, fevereiro, março, ..., dezembro.
d) O ano de ocorrência dos Jogos Olímpicos da Era Moderna: 1896, 1900, 1904, 1908, ..., 2012, 2016, 2020, ...

Poderíamos citar outras sequências, como: os últimos campeões brasileiros de futebol, os tempos registrados em uma corrida por ordem de chegada, os números pares etc.

Veja que é possível estabelecer sequências com informações numéricas ou não. Neste capítulo trataremos das sequências numéricas.

Por volta de 1202, Fibonacci publicou a obra ***Liber abaci***, que, além de expor processos algorítmicos e aritméticos, apresentava problemas muito intrigantes. Um desses desafios, conhecido como "o problema dos coelhos", deu origem à sequência de Fibonacci.

Posteriormente, descobriu-se que muitos elementos da natureza – como flores e conchas – estão relacionados aos números que formam essa sequência.

Pelle / Bridgeman Images / Keystone

O matemático italiano Fibonacci (1170-1250).

Sequências numéricas

Uma sequência numérica é uma lista de números com determinada ordem. Cada termo de uma sequência (ou sucessão) pode ser representado por uma **letra** acompanhada de um **índice**, que informa a posição ou a ordem desse termo na sequência. Por exemplo, considerando a sequência de Fibonacci, temos:

- $a_1 = 1$ é o primeiro termo ou o termo de ordem 1;
- $a_2 = 1$ é o segundo termo ou o termo de ordem 2;
- $a_3 = 2$ é o terceiro termo ou o termo de ordem 3; e assim por diante.

Podemos representar genericamente uma sequência da seguinte maneira:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

Nessa representação utilizamos a_n para indicar um termo qualquer ou o termo de ordem *n* e dizemos que a_n é o enésimo termo da sequência.

Em relação ao número de elementos, uma sequência numérica pode ser **finita** ou **infinita**. A seguir apresentamos as definições desses tipos de sequências.

> Uma sequência numérica finita de *n* termos é uma função cujo domínio é o conjunto {1, 2, 3, 4, ..., n} e os elementos do contradomínio são os números reais.

A imagem dessa função é indicada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$. Por exemplo, a sequência numérica (3, 5, 7, 9) é uma sequência finita, na qual $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$ e $a_4 = 9$.

> Uma sequência numérica infinita é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$ e o contradomínio é o conjunto dos números reais.

A imagem dessa função é indicada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$. Por exemplo, a sequência dos números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...) é uma sequência infinita, em que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$ etc.

Determinação dos elementos de uma sequência numérica

Em algumas sequências numéricas, podemos determinar qualquer termo se soubermos o padrão ou a ordem que relaciona esses termos. Vamos estudar duas maneiras de determinar os elementos de uma sequência: por **recorrência** e pelo **termo geral**.

Recorrência

Quando sabemos o valor do termo inicial (ou de alguns dos termos iniciais) e uma lei que permite calcular o termo seguinte (ou os termos seguintes) a partir dos termos anteriores, dizemos que a sequência está definida por **recorrência**.

Como exemplo vamos utilizar a sequência de Fibonacci:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)$$

Vimos que o primeiro e o segundo termos da sequência de Fibonacci são iguais a 1 e que, a partir do terceiro, os termos são obtidos com a adição dos dois termos imediatamente anteriores:

- $a_1 = a_2 = 1$
- $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
- $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$
- $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$
- $a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Assim, a sequência de Fibonacci pode ser obtida por meio da lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \text{ (com } n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Termo geral

Seja uma sequência dada pela função $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que associa cada número $n \in D(f)$ ao seu triplo. Essa sequência pode ser escrita como (3, 6, 9, 12, ...) e temos:

- para $n = 1$, $a_1 = 3 \cdot 1 = 3$
- para $n = 2$, $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
- para $n = 3$, $a_3 = 3 \cdot 3 = 9$
- para $n = 4$, $a_4 = 3 \cdot 4 = 12$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

- para $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 3 \cdot n = 3n$

A expressão $a_n = 3n$ é chamada de **termo geral** ou **lei de formação** da sequência. A partir dele, é possível determinar qualquer elemento da sequência. Por exemplo, para determinar o centésimo termo dessa sequência, substituímos *n* por 100 no termo geral:

$$a_n = 3n \Rightarrow a_{100} = 3 \cdot 100 \Rightarrow a_{100} = 300$$

Exercícios resolvidos

1 Os coelhos se reproduzem mais rapidamente que a maioria dos mamíferos. Considere a seguinte situação que foi estudada por Fibonacci: um casal de coelhos pode reproduzir-se apenas depois do segundo mês de vida e, a partir daí, gerar um novo casal por mês. Começando com apenas um casal recém-nascido, quantos casais de coelhos existirão ao fim do:

a) quinto mês? b) oitavo mês?

Resolução

a) Seja n o mês e a_n a quantidade de casais de coelhos no mês em questão.

No primeiro mês, $n = 1$, o casal ainda é filhote, portanto não reproduzirão, ou seja $a_1 = 1$.

No segundo mês, $n = 2$, o casal se torna adulto mas ainda não se reproduz, assim $a_2 = 1$.

No terceiro mês, $n = 3$, o casal se reproduz gerando um novo casal, ou seja, $a_3 = 2$.

No quarto mês, $n = 4$, o casal adulto gera outro casal de filhotes e o casal de filhotes se torna adulto, ou seja, $a_4 = 3$.

No quinto mês, $n = 5$, temos dois casais adultos que gerarão filhotes e um casal de filhotes que se tornarão adultos, assim, $a_5 = 3 + 2 = 5$.

Portanto, a quantidade de casais de coelhos no fim do quinto mês será 5.

A quantidade de casais de coelhos ao longo dos meses obedece à sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5... Portanto, para $n \geqslant 3$, podemos definir que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

b) Substituindo n por 6, 7 e 8 na lei de recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, temos:

$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_{6-1} + a_{6-2} \Rightarrow a_6 = 5 + 3 = 8$

$n = 7 \Rightarrow a_7 = a_{7-1} + a_{7-2} \Rightarrow a_7 = 8 + 5 = 13$

$n = 8 \Rightarrow a_8 = a_{8-1} + a_{8-2} \Rightarrow a_8 = 13 + 8 = 21$

Portanto, a quantidade de casais de coelhos no fim do oitavo mês será 21.

2 Determine a sequência definida pelo termo geral: $a_n = n^2 - 5n + 6$, com $n \in \mathbb{N}$; $1 \leqslant n \leqslant 5$.

Resolução

Substituindo n pelos números naturais de 1 a 5, temos:

$n = 1 \Rightarrow a_1 = 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 \Rightarrow a_1 = 1 - 5 + 6 \Rightarrow a_1 = 2$

$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 \Rightarrow a_2 = 4 - 10 + 6 \Rightarrow a_2 = 0$

$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 \Rightarrow a_3 = 9 - 15 + 6 \Rightarrow a_3 = 0$

$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4^2 - 5 \cdot 4 + 6 \Rightarrow a_4 = 16 - 20 + 6 \Rightarrow a_4 = 2$

$n = 5 \Rightarrow a_5 = 5^2 - 5 \cdot 5 + 6 \Rightarrow a_5 = 25 - 25 + 6 \Rightarrow a_5 = 6$

Logo, determinamos a sequência finita: (2, 0, 0, 2, 6).

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Escreva no caderno os quatro primeiros termos das sequências dadas pelos termos gerais, com $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $a_n = 3n - 1$ (2, 5, 8, 11, ...) b) $a_n = 2^{n-1}$ (1, 2, 4, 8, ...)

2. Considere $a_n = 3n + 1$ o termo geral de uma sequência de números reais.

a) Calcule o quinto e o oitavo termos dessa sequência. $a_5 = 16$; $a_8 = 25$

b) Determine a ordem (posição) do termo igual a 49. 16ª

c) Verifique se 1001 é um termo dessa sequência. Não.

3. Considerando que os números ímpares positivos podem ser determinados pela função $f(n) = 2n - 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$, responda:

a) Qual é o 100º número ímpar positivo? 199

b) O número 99 ocupa que posição nessa sequência? 50ª

c) Calcule: $f(1) + f(7)$, $f(2) + f(6)$ e $f(3) + f(5)$. O que você pode observar? Explique.
Ver a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

4. Encontre uma lei de formação e determine o próximo termo de cada sequência: Possíveis respostas:

a) (5, 8, 11, 14, ...) 17

b) $\left(25, 5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \ldots\right)$ $\frac{1}{125}$

c) (1, 2, 6, 24, 120, ...) 720

d) (18, 11, 7, 4, 3, 1, ...) 2

5. (Enem/MEC) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.

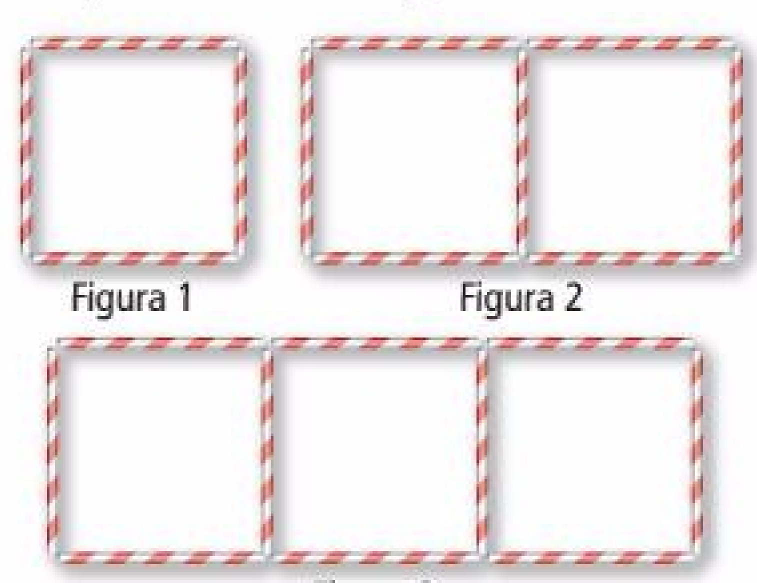


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Editoria de arte

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura?

a) $C = 4Q$

X b) $C = 3Q + 1$

c) $C = 4Q - 1$

d) $C = Q + 3$

e) $C = 4Q - 2$

Progressão aritmética

No dia 1º de janeiro, Mariana replantou uma muda que estava com 6 cm de altura. Para estudar o crescimento, ela mediu e anotou a altura dessa planta em cada dia 1º dos 5 meses seguintes. Veja abaixo as medidas obtidas.

Mês	Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio	Junho
Altura (cm)	6	7,8	9,6	11,4	13,2	15

Fonte: Dados fictícios.

Observando as alturas registradas em cada mês, Mariana percebeu que a planta cresceu 1,8 centímetro por mês.

$$6 \xrightarrow{+1,8} 7,8 \xrightarrow{+1,8} 9,6 \xrightarrow{+1,8} 11,4 \xrightarrow{+1,8} 13,2 \xrightarrow{+1,8} 15$$

Podemos indicar os valores da altura da muda de Mariana na ordem dos meses de observação como a sequência numérica (6; 7,8; 9,6; 11,4; 13,2; 15). Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido pela soma do termo anterior a 1,8.

Essa sequência é um exemplo de **progressão aritmética** (**PA**), de acordo com a definição a seguir:

> **Progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição do termo anterior a uma constante *r*, chamada razão da progressão.**

Podemos classificar uma PA de acordo com o valor da razão *r*:

- se $r > 0$, a PA é considerada **crescente**;
- se $r < 0$, a PA é considerada **decrescente**;
- se $r = 0$, a PA é considerada **constante**.

Como a razão de uma progressão aritmética é a constante *r* que adicionamos a cada termo para obter o termo seguinte, podemos determiná-la, a partir do segundo, calculando a diferença entre cada termo e o anterior.

Genericamente, temos:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = ... = \boxed{a_{n+1} - a_n = r}$$

Veja alguns exemplos:

a) (2, 5, 8, 11, 14) é uma PA cuja razão é: $r = a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$, portanto a PA é crescente.

b) $\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 2, \frac{5}{3}, ...\right)$ é uma PA cuja razão é: $r = a_3 - a_2 = 2 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}$, portanto a PA é decrescente.

c) $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, ...\right)$ é uma PA cuja razão é: $r = a_4 - a_3 = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$, portanto a PA é constante.

Considerando três termos consecutivos de uma PA, o termo central é dado pela média aritmética entre os outros dois termos. De fato, podemos escrever $a_n = a_{n-1} + r$ (I) e $a_n = a_{n+1} - r$ (II). Somando membro a membro (I) e (II), temos:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} - r + r \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Por exemplo, dada a PA (2, 5, 8, 11, 14), temos que:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{2 + 8}{2} = 5 \quad \text{e} \quad a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{5 + 11}{2} = 8$$

Exercícios resolvidos

3 Verifique se as sequências dadas a seguir são progressões aritméticas (PA) e, em caso afirmativo, determine a razão.

a) (3, 7, 11, 15, 19)

b) $\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{8}\right)$

Resolução

Em uma PA, a diferença entre cada termo e o anterior (razão) é constante. Assim, para verificar se uma sequência é uma PA devemos ter:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = ... = a_n - a_{n-1} = r$

a) $a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$
$a_3 - a_2 = 11 - 7 = 4$
$a_4 - a_3 = 15 - 11 = 4$
$a_5 - a_4 = 19 - 15 = 4$

Portanto a sequência é uma PA de razão 4.

b) $a_2 - a_1 = \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi - 2\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$a_3 - a_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

Como $-\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{4}$, a sequência não é uma PA.

4 Calcule a razão das progressões aritméticas a seguir:

a) (3, 9, 15, 21, ...)

b) $\left(6, \frac{11}{2}, 5, \frac{9}{2}, 4\right)$

Resolução

A razão é igual à diferença entre um termo qualquer e o anterior. Assim, calculando a diferença entre o segundo e o primeiro termos, temos, em cada item:

a) $r = 9 - 3 = 6$

b) $r = \frac{11}{2} - 6 \Rightarrow r = \frac{11 - 12}{2} \Rightarrow r = -\frac{1}{2}$

5 As medidas dos lados de um triângulo são expressas em centímetro por $4x - 1$, $3x + 3$ e $x^2 + 4$ e formam uma PA, nessa ordem. Calcule o perímetro desse triângulo.

Resolução

PA $(4x - 1, 3x + 3, x^2 + 4)$

Para calcular o perímetro em centímetro, devemos determinar o valor de *x* e, para isso, aplicar o conceito de PA. Assim:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$(3x + 3) - (4x - 1) = (x^2 + 4) - (3x + 3)$

$3x + 3 - 4x + 1 = x^2 + 4 - 3x - 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos $x' = 3$ ou $x'' = -1$ (não convém).

Substituindo $x = 3$ nas expressões que representam as medidas dos lados, temos:

$4x - 1 = 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11$

$3x + 3 = 3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12$

$x^2 + 4 = 3^2 + 4 = 9 + 4 = 13$

Assim, o perímetro do triângulo será:

$11 + 12 + 13 = 36 \Rightarrow 36$ cm

Exercícios propostos

Escreva no caderno

6. Verifique se cada sequência dada a seguir é uma PA. Se sim, determine a razão.

a) (25, 5, 1, 5, 25) Não.

b) (−17, −17, −17, −17, −17) Sim, $r = 0$.

c) (36, 30, 24, 18, 12) Sim, $r = -6$.

d) (10, 13, 16, 20, 24) Não.

7. Escreva no caderno uma PA:

a) de 5 termos, em que o primeiro termo (a_1) seja 10 e a razão (*r*) seja 3. (10, 13, 16, 19, 22)

b) de 6 termos, em que $a_1 = -3$ e $r = 5$. (−3, 2, 7, 12, 17, 22)

c) de 4 termos, em que $a_1 = a + 2$ e $r = a$. $(a + 2, 2a + 2, 3a + 2, 4a + 2)$

8. Determine a razão da PA em cada sequência.

a) (−11, −8, −5, −2, 1) 3

b) (1; 0,875; 0,75; 0,625; 0,5) −0,125

c) $(\sqrt{2}; \sqrt{2} + \sqrt{1}; \sqrt{2} + \sqrt{4}; \sqrt{2} + \sqrt{9}; ...)$ 1

9. Na PA $(a_1, 10, a_3)$ a diferença do terceiro termo para o primeiro termo é 10. Escreva essa PA no caderno. (5, 10, 15)

10. Calcule o termo desconhecido em cada PA.

a) (3, 12, *x*) $x = 21$

b) (*y*, 8, 1) $y = 15$

c) (56, *x*, 70) $x = 63$

d) (4,5; *y*; 9,5) $y = 7$

11. (UFU-MG) As medidas dos lados de um triângulo retângulo são $x + 1$, $2x$ e $x^2 + 1$ e estão em progressão aritmética, de razão não nula, nessa ordem. Determine a área desse triângulo. 6 unidades de área.

12. São dadas duas sequências $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ e $(y_1, y_2, ..., y_n, ...)$. Sabe-se que $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$, que $x_n = y_{n+1} - y_n$ e que a primeira sequência é uma progressão aritmética de razão 3. Escreva no caderno:

a) os quatro primeiros termos da sequência (x_n); 1, 4, 7 e 10

b) os quatro primeiros termos da sequência (y_n). 1, 2, 6 e 13

Termo geral de uma PA

Vamos considerar a representação genérica de uma progressão aritmética infinita, de razão *r*.

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

+ r + r + r + r + r

De acordo com essa sequência, temos que:

$a_2 = a_1 + \mathbf{1} \cdot r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + \mathbf{2} \cdot r$

$a_4 = a_3 + r = a_1 + \mathbf{3} \cdot r$

Observe que há uma relação entre o índice do termo e o fator que multiplica a razão da progressão. Assim, em um caso genérico, o enésimo termo de uma PA pode ser escrito como a soma do primeiro termo ao produto da razão pelo fator (n − 1). Portanto:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

em que:

$a_n \rightarrow$ termo geral (ou enésimo termo)

$a_1 \rightarrow$ primeiro termo

$n \rightarrow$ ordem do termo

$r \rightarrow$ razão

Em situações específicas que envolvem termos consecutivos de uma PA, é conveniente recorrer às seguintes representações:

- três termos consecutivos: $x - r, x, x + r$
- cinco termos consecutivos: $x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r$

Essa expressão é conhecida como **fórmula do termo geral da PA** e permite determinar qualquer termo da PA, desde que sejam conhecidos os valores de a_1 e *r*.

Também é possível obter a fórmula conhecendo a PA. Por exemplo, vamos determinar a expressão do termo geral da PA (1, 4, 7, 10, ...). Para isso, devemos obter a razão da PA:

$$r = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$$

Então, a PA dada tem $r = 3$ e $a_1 = 1$.

Substituindo esses valores na fórmula do termo geral, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n - 2$$

Portanto, o termo geral da PA (1, 4, 7, 10, ...) é $a_n = 3n - 2$.

Exercícios resolvidos

6 Uma avenida tem 4 000 m de extensão e vai receber em seu canteiro central o plantio de palmeiras imperiais. A distância entre as mudas deverá ser de 15 m e a primeira planta vai ficar a 10 m do início da avenida. Quantas palmeiras deverão ser plantadas?

Resolução

Como a distância entre as palmeiras é sempre a mesma, os números que as localizam vão formar uma PA.

Nessa PA, temos: $a_1 = 10$, $a_n = 4\,000$ e $r = 15$

Substituindo os valores no termo geral, obtemos:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$4\,000 = 10 + (n - 1) \cdot 15$

$4\,000 = 10 + 15n - 15$

$15n = 4\,005$

$n = 267$

Assim, serão plantadas 267 palmeiras ao longo da avenida.

7 Calcule o 4º termo da PA em que $a_{10} = 130$ e $a_{19} = 220$.

Resolução

Vamos escrever esses termos em função de a_1 e *r*:

Se $a_{10} = 130 \Rightarrow a_1 + 9r = 130$

Se $a_{19} = 220 \Rightarrow a_1 + 18r = 220$

Devemos, então, resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} a_1 + 9r = 130 & \times(-1) \\ a_1 + 18r = 220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 9r = -130 \\ a_1 + 18r = 220 \end{cases}$$

$$9r = 90$$
$$r = 10$$

Se $r = 10$, temos:

$a_1 + 9 \cdot 10 = 130 \Rightarrow a_1 = 130 - 90 \Rightarrow a_1 = 40$

Determinados $a_1 = 40$ e $r = 10$, agora é possível calcular o 4º termo da PA:

$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow a_4 = 40 + 3 \cdot 10 \Rightarrow a_4 = 70$

Logo, o 4º termo dessa PA é 70.

8 Três números estão em PA, de tal forma que a soma deles é 18 e o produto é 66. Calcule os três números.

Resolução

Vamos indicar: $(a_1, a_2, a_3) \Rightarrow (x - r, x, x + r)$

Podemos formar o sistema com duas variáveis (*x* e *r*):

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 18 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 18 \\ x \cdot (x^2 - r^2) = 66 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$3x = 18 \Rightarrow x = 6$

Substituindo $x = 6$ na 2ª equação, temos:

$x \cdot (x^2 - r^2) = 66 \Rightarrow 6 \cdot (36 - r^2) = 66 \Rightarrow$

$\Rightarrow 36 - r^2 = 11 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$

Para $r = 5$, temos:

1º termo $= 6 - 5 = 1$

2º termo $= 6$

3º termo $= 6 + 5 = 11$

Para $r = -5$, temos:

1º termo $= 6 - (-5) = 11$

2º termo $= 6$

3º termo $= 6 + (-5) = 1$

Os números pedidos são 1, 6 e 11.

9 Escreva o termo geral da PA em que $a_2 + a_6 = 20$ e $a_4 + a_9 = 35$.

Resolução

Vamos escrever os dados em função de a_1 e de *r*:

$a_2 = a_1 + r$ $\quad$ $a_6 = a_1 + 5r$

$a_4 = a_1 + 3r$ $\quad$ $a_9 = a_1 + 8r$

Podemos formar o sistema com duas variáveis:

$$\begin{cases} (a_1 + r) + (a_1 + 5r) = 20 \\ (a_1 + 3r) + (a_1 + 8r) = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 6r = 20 \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{cases} 2a_1 + 6r = 20 \times (-1) \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a_1 - 6r = -20 \\ 2a_1 + 11r = 35 \end{cases}$$
$$5r = 15 \Rightarrow r = 3$$

Assim, podemos concluir que:

$2a_1 + 6 \cdot 3 = 20 \Rightarrow 2a_1 = 20 - 18 \Rightarrow a_1 = 1$

Logo, o termo geral é:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = 1 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n - 2$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

13. Qual é o vigésimo termo da progressão aritmética $(-8, -3, 2, 7, ...)$? 87

14. Em uma PA de razão 5, o primeiro termo é 4. Qual é a posição do termo igual a 44? 9ª

15. Determine o termo geral da PA (2, 7, ...). $a_n = 5n - 3$

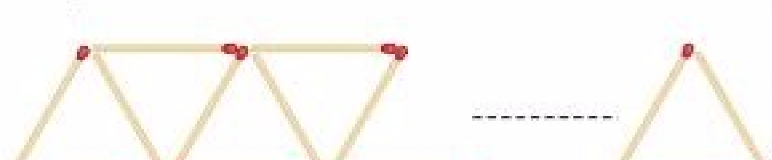
16. Determine o sexagésimo número natural ímpar. 119

17. Um pintor consegue pintar uma área de 5 m² no primeiro dia de serviço e, a cada dia, ele pinta 2 m² a mais do que pintou no dia anterior.

a) Quantos metros quadrados ele pintará no nono dia? 21 m²

b) Em que dia ele conseguirá pintar 31 m²? 14º dia

18. (UFSM-RS)



Editoria de arte

Desejando-se formar 100 triângulos com palitos de fósforo dispostos conforme a figura, quantos palitos serão necessários? 201 palitos.

19. Em um triângulo, as medidas dos ângulos internos estão em PA, e o menor dos ângulos mede 40°. Calcule as medidas dos outros dois ângulos do triângulo. 60° e 80°

20. Em uma progressão aritmética, o oitavo termo é igual a 16 e o décimo termo é igual a 20. Calcule o primeiro termo e a razão dessa progressão. $a_1 = 2$; $r = 2$

21. (UFSM-RS) No trecho de maior movimento de uma rodovia, ou seja, entre o km 35 e o km 41, foram colocados *outdoors* educativos de 300 em 300 metros. Como o 1º foi colocado exatamente a 50 metros após o km 35, a distância entre o 13º *outdoor* e o km 41 é, em metro:

a) 3 700 b) 3 650 c) 2 750 x d) 2 350 e) 2 150

22. Uma montadora de automóveis produz a quantidade de fixa de 5 100 carros ao mês, e outra, no mesmo tempo, produz 800, para atender ao mercado interno. Em janeiro de 2016 ambas as montadoras firmaram um contrato de exportação. Mensalmente, a primeira e a segunda montadoras deverão aumentar sua produção em 100 e 200 unidades, respectivamente. Quantos meses serão necessários para que as montadoras produzam a mesma quantidade de carros? 43 meses.

23. Determine a PA em que: $\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 5 \\ 4a_3 - 2a_6 = -8 \end{cases}$ (−1, 2, 5, ...)

24. Em uma PA crescente de seis termos, a soma dos termos de ordem ímpar é 27, e a soma dos termos de ordem par é 36. Escreva essa PA. (3, 6, 9, 12, 15, 18)

25. Determine cinco números em PA crescente, sabendo que o produto $a_1 \cdot a_5$ é igual a 28 e a soma dos outros três termos é 24. (2, 5, 8, 11, 14)

Soma dos termos de uma PA

Considere a PA (6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34). Nela podemos destacar:

- 6 e 34 são os extremos, cuja soma é 40;
- as duplas 10 e 30, 14 e 26, 18 e 22 são termos equidistantes dos extremos; a soma de cada dupla equidistante também é 40.

Assim, destacamos a seguinte propriedade:

Em uma PA finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração

Somando os dois extremos temos:

$$a_1 + a_n = a_1 + \underbrace{a_1 + (n - 1) \cdot r}_{a_n} = 2a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Os termos a_2 e a_{n-1} são equidistantes, portanto sua soma é:

$$a_2 + a_{n-1} = \underbrace{a_1 + r}_{a_2} + \underbrace{a_1 + (n - 2) \cdot r}_{a_{n-1}} = 2a_1 + (n - 2 + 1) \cdot r = 2a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Da mesma forma, os termos a_3 e a_{n-2} são equidistantes, portanto:

$$a_3 + a_{n-2} = \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3} + \underbrace{a_1 + (n - 3) \cdot r}_{a_{n-2}} = 2a_1 + (n - 3 + 2) \cdot r = 2a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Repare que a soma entre os termos equidistantes são iguais. Assim, generalizando, temos:

$$\underbrace{a_{p+1} + a_{n-p}}_{\text{Termos equidistantes dos extremos}} = \underbrace{a_1 + (p + 1 - 1) \cdot r}_{a_{p+1}} + \underbrace{a_1 + (n - p - 1) \cdot r}_{a_{n-p}} = 2a_1 + (n - p - 1 + p) \cdot r = 2a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Portanto:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = a_{p+1} + a_{n-p}$$

Usando essa propriedade, vamos obter a fórmula que permite calcular a soma dos *n* termos de uma progressão aritmética finita.

Considere a PA finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ e S_n a soma dos termos dessa PA.

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ + & S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \\ \hline & 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Como cada dupla de termos, a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2} etc., é equidistante dos extremos, suas somas são iguais a $(a_1 + a_n)$. Logo:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

Na fórmula acima, temos:

$S_n \longrightarrow$ soma dos *n* termos

$a_1 \longrightarrow$ primeiro termo

$a_n \longrightarrow$ enésimo termo

$n \longrightarrow$ número de termos

Progressão aritmética e função afim

No capítulo 4 deste volume estudamos as funções afins, cuja lei é dada por $f(x) = ax + b$, com *a* e *b* reais.

Restringindo o domínio da função *f* aos números naturais *n* não nulos, temos $f(n) = an + b$:

- Para $n = 1 \Rightarrow f(1) = a + b = a_1$
- Para $n = 2 \Rightarrow f(2) = 2a + b = a_2$
- Para $n = 3 \Rightarrow f(3) = 3a + b = a_3$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Assim, obtemos:

$f(n) = an + b = a_n$

$f(n + 1) = (n + 1)a + b = a_{n+1}$

Calculando a diferença entre a_{n+1} e a_n, temos:

$$a_{n+1} - a_n = (n + 1)a + b - (na + b) = na + a + b - na - b = a$$

Logo, considerando a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$, a diferença entre cada termo e o anterior é constante e igual a *a*, ou seja, toda função afim *f* de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(n) = an + b$ com $a \geqslant 0$, é uma PA de razão *a*.

Em particular, se $a = 0$ teremos $f(n) = b$, para todo *n*, que é uma função constante. Nesse caso, essa função determina a PA constante (b, b, b, b, ...) cuja razão é zero.

História da Matemática

Gauss e a soma de uma progressão aritmética

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) [...] foi um menino prodígio. [...]

Gauss em criança se divertia com cálculos matemáticos; uma anedota referente a seus começos na escola é característica. Um dia, para ocupar a classe, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções para que cada um colocasse sua ardósia sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua ardósia sobre a mesa dizendo: "Aí está!". O professor olhou-o com desdém enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a ardósia de Gauss era a única com a resposta correta, 5 050, sem outro cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$, presumivelmente pela fórmula $\frac{m \cdot (m + 1)}{2}$. Seus mestres logo levaram o talento de Gauss à atenção do Duque de Brunswick que apoiou seus estudos, primeiro para que pudesse cursar o colégio local, depois na Universidade em Göttingen, onde se matriculou em outubro de 1795.

Sementer/Shutterstock.com

Moeda de prata comemorativa em homenagem a Gauss.

Fonte: BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1. ed. 9 reimp. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. p. 343-344. Título original: A history of mathematics.

Atividades

Escreva no caderno

1. Segundo o texto, Gauss, supostamente, utilizou a fórmula $\frac{m\,(m + 1)}{2}$ para calcular mentalmente a soma dos cem primeiros números. Compare a fórmula apresentada no texto com a fórmula da soma da PA, $1 + 2 + 3 + ... + 100$ e verifique o que representa a variável *m*. A variável *m* é representada pelo maior, ou último, número da sequência de uma PA. Em nosso caso, *m* refere-se ao número 100.
2. Calcule a soma dos dez primeiros números ímpares utilizando a fórmula citada no texto e depois manualmente. Analisando os resultados, podemos considerar que a fórmula funcionaria para uma sequência de números ímpares? Justifique sua resposta. Veja o Manual do Professor.

Exercícios resolvidos

10 Foi feita uma rifa com cartões numerados de 1 a 50. Quem tirar o cartão de número 1 paga R$ 1,00, quem tirar o cartão de número 2 paga R$ 2,00, e assim por diante. Quanto renderá a rifa?

Resolução

Podemos representar os cartões numerados pela PA (1, 2, 3, ..., 50) cuja razão *r* é igual a 1.

Para determinar quanto renderá a rifa, é necessário calcular a soma dos termos dessa PA.

Temos: $a_1 = 1$; $a_n = 50$; $n = 50$.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{50} = \frac{(1+50)50}{2} \Rightarrow S_{50} = 1\,275$$

A rifa renderá R$ 1 275,00.

11 Considere a sucessão de figuras apresentada a seguir. Observe que cada figura é formada por um conjunto de palitos de fósforos.

Editoria de arte

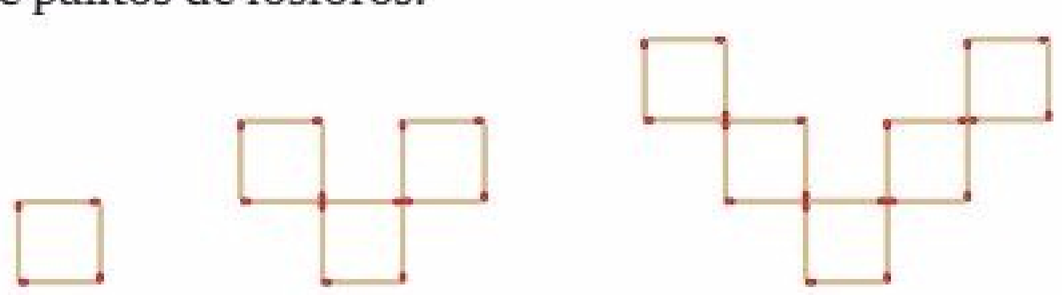


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Suponha que essas figuras representam os três primeiros termos de uma sucessão de figuras que seguem a mesma lei de formação. Escreva a expressão do termo geral e, em seguida, calcule a quantidade de palitos necessária para formar a 12ª figura.

b) Determine a quantidade de palitos necessários para construir as primeiras 40 figuras.

Resolução

a) Considerando que, para construir a figura 1, são necessários 4 palitos, para a figura 2, 12 palitos, e para a figura 3, 20 palitos, podemos afirmar que a sequência das figuras forma a PA (4, 12, 20,...) em que $a_1 = 4$ e $r = 12 - 4 = 8$. Logo:

$a_n = 4 + (n - 1)8 \Rightarrow a_n = 8n - 4, n \in \mathbb{N}^*$

Assim, $a_{12} = 8 \cdot 12 - 4 = 92 \Rightarrow 92$ palitos.

b) A quantidade total de palitos é dada pela soma dos 40 primeiros termos, ou seja:

$$S_{40} = \frac{(a_1 + a_{40}) \cdot 40}{2}$$

Como $a_{40} = 8 \cdot 40 - 4 = 316 \Rightarrow 316$ palitos, temos:

$$S_{40} = \frac{(a_1 + a_{40}) \cdot 40}{2} = \frac{(4 + 316) \cdot 40}{2} = 6\,400$$

Portanto, serão necessários 6 400 palitos.

12 (Inatel-MG) Resolver a equação $1 + 7 + ... + x = 280$, sabendo que os termos do 1º membro formam uma PA.

Resolução

Na PA, temos: $a_1 = 1$; $a_n = x$; $S_n = 280$; $r = 6$

Vamos calcular *n* usando a fórmula geral:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow x = 1 + (n-1)6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 + 6n - 6 \Rightarrow n = \frac{x+5}{6}$$

Substituindo na fórmula da soma, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 280 = \frac{(1 + x)\,\frac{x+5}{6}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 3\,355 = 0$$

Resolvendo a equação:

$$x^2 + 6x - 3\,355 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 + 13\,420 = 13\,456$$

$$x = \frac{-6 \pm 116}{2} \begin{cases} x_1 = 55 \\ x_2 = -61 \end{cases}$$

Como a PA $(1 + 7 + ... + x)$ é crescente, devemos ter $x > 0$. Portanto, $S = \{55\}$.

13 Na seção *História da Matemática* foi apresentada a fórmula que Gauss supostamente utilizou para calcular a soma dos 100 primeiros números naturais. Essa fórmula não serve para calcular, por exemplo, os 100 primeiros números ímpares. Determine a fórmula que permite calcular a soma dos *n* primeiros números ímpares.

Resolução

Para encontrar a fórmula da soma dos *n* primeiros números ímpares vamos utilizar a fórmula que calcula a soma dos *n* primeiros elementos de uma sequência qualquer, ou seja: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Sabemos que o primeiro número ímpar é o 1. Assim, podemos concluir que $a_1 = 1$.

Outra informação importante que devemos considerar é que todo número ímpar obedece a lei $2n - 1$, assim podemos concluir que $a_n = 2n - 1$.

Substituindo esses valores na fórmula da soma, temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(1 + 2n - 1)n}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{2n^2}{2} \Rightarrow S_n = n^2$$

Assim, para calcular a soma dos *n* primeiros números ímpares basta calcular n^2.

26. Calcule a soma dos 50 primeiros termos da PA (2, 6, ...). 5000

27. (FGV-SP) Guilherme pretende comprar um apartamento financiado cujas prestações mensais formam uma progressão aritmética decrescente; a primeira prestação é de R$ 2600,00 e a última, de R$ 2020,00.

A média aritmética das prestações é um valor:

a) entre R$ 2250,00 e R$ 2350,00.
b) entre R$ 2350,00 e R$ 2450,00.
c) menor que R$ 2250,00.
d) maior que R$ 2450,00.
e) impossível de determinar com as informações dadas.

28. (UFRJ) Seu Juca resolveu dar a seu filho Riquinho uma mesada de R$ 300,00 por mês. Riquinho, que é muito esperto, disse a seu pai que, em vez da mesada de R$ 300,00, gostaria de receber um pouquinho a cada dia: R$ 1,00 no primeiro dia de cada mês e, a cada dia, R$ 1,00 a mais que no dia anterior. Seu Juca concordou, mas, ao final do primeiro mês, logo percebeu que havia saído no prejuízo. Calcule quanto, em um mês com 30 dias, Riquinho receberá a mais do que receberia com a mesada de R$ 300,00. R$ 165,00

29. (Enem/MEC) O trabalho em empresas de festas exige dos profissionais conhecimentos de diferentes áreas. Na semana passada, todos os funcionários de uma dessas empresas estavam envolvidos na tarefa de determinar a quantidade de estrelas que seriam utilizadas na confecção de um painel de Natal. Um dos funcionários apresentou um esboço das primeiras cinco linhas do painel, que terá, no total, 150 linhas.

Após avaliar o esboço, cada um dos funcionários esboçou sua resposta:

Funcionário I: aproximadamente 200 estrelas.

Funcionário II: aproximadamente 6000 estrelas.

Funcionário III: aproximadamente 12000 estrelas.

Funcionário IV: aproximadamente 22500 estrelas.

Funcionário V: aproximadamente 22800 estrelas.

Qual funcionário apresentou um resultado mais próximo da quantidade de estrelas necessária?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

30. (Ufop-MG) Uma sala de convenções de um *shopping* possui 20 poltronas na primeira fileira, 24 poltronas na segunda fileira, 28 poltronas na terceira fileira e, continuando nessa sequência, o aumento de 4 poltronas, por fileira, permanece constante até a última fileira. Quantas fileiras são necessárias para compor 800 lugares? 16 fileiras.

31. (UPF-RS) Um estacionamento cobra R$ 3,00 pela primeira hora. A partir da segunda, cujo valor é R$ 2,00, até a décima primeira, cujo valor é R$ 0,20, os preços decrescem em progressão aritmética. Se um automóvel ficar estacionado 6 horas nesse local, quanto gastará seu proprietário em estacionamento?

a) R$ 15,00
b) R$ 13,00
c) R$ 11,00
d) R$ 10,20
e) R$ 8,50

32. (UFSC) Qual a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética na qual o primeiro termo é igual à razão e $a_3 + a_8 = 18$? 90

33. Ao realizar testes de controle de qualidade, um fabricante verificou que um de seus relógios atrasa 1 milésimo de segundo no primeiro dia, 3 milésimos de segundo no segundo dia, 5 milésimos de segundo no terceiro dia e assim sucessivamente, atrasando, a cada dia, 2 milésimos de segundo a mais do que no dia anterior. Depois de quantos dias esse relógio terá atrasado 90 segundos? Depois de 300 dias.

Jan Faukner/Shutterstock.com

Fabricante de relógios.

34. Resolva a equação $2 + 5 + 8 + ... + x = 77$, sabendo que os termos do primeiro membro estão em PA. $S = \{20\}$

35. Um pedreiro deve construir uma parede de forma triangular de tal jeito que diminua um tijolo por fileira, de baixo para cima, terminando a última fileira com um tijolo. Sabendo-se que a altura dos tijolos é 10 cm e que a parede deve ter 5 m de altura, qual o número de tijolos na primeira fileira? Qual o número total de tijolos da parede? 50 tijolos; 1275 tijolos.

Progressão geométrica

Considere a sequência: (4, 8, 16, 32, 64)

Observe que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por 2:

$8 = 4 \cdot 2$ $\quad 16 = 8 \cdot 2$ $\quad 32 = 16 \cdot 2$ $\quad 64 = 32 \cdot 2$

Agora, considere a sequência: (6, −18, 54, −162, ...)

Nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por −3:

$-18 = 6 \cdot (-3)$ $\quad 54 = (-18) \cdot (-3)$ $\quad -162 = 54 \cdot (-3)$

Analisando essas duas sequências, verificamos que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante. Sequências como essas são chamadas **progressões geométricas**.

Progressão geométrica (PG) é toda sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante, chamada razão (q) da progressão.

Representando uma PG pela sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$ e aplicando a definição, temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_2}{a_1} = q \\ a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_3}{a_2} = q \\ \quad\vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \ldots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Portanto, em uma PG, a razão *q* é igual ao quociente entre cada termo e o respectivo antecessor.

$$\boxed{q = \frac{a_n}{a_{n-1}}}\text{, para todo } n \text{ natural com } n \geqslant 2.$$

Por exemplo, na PG (1, 2, 4, 8, 16 ...), temos $q = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \ldots = 2$.

Considerando o primeiro termo e o valor da razão, podemos classificar uma PG como **crescente**, **decrescente**, **oscilante** ou **constante**.

Dizemos que uma PG é **crescente** quando:

- o primeiro termo é um número real positivo e a razão é um número real maior que 1, isto é, $\mathbf{a_1 > 0}$ e $\mathbf{q > 1}$. Por exemplo: $(1, 7, 49, 343, \ldots) \Rightarrow q = 7$.
- o primeiro termo é um número real negativo e a razão é um número real entre zero e 1, isto é, $\mathbf{a_1 < 0}$ e $\mathbf{0 < q < 1}$. Por exemplo: $\left(-5, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, \ldots\right) \Rightarrow q = \frac{1}{2}$.

Dizemos que uma PG é **decrescente** quando:

- o primeiro termo é um número real positivo e a razão é um número real entre zero e 1, isto é, $\mathbf{a_1 > 0}$ e $\mathbf{0 < q < 1}$. Por exemplo: $(180, 60, 20, \ldots) \Rightarrow q = \frac{1}{3}$.
- o primeiro termo é um número real negativo e a razão é um número real maior do que 1, isto é, $\mathbf{a_1 < 0}$ e $\mathbf{q > 1}$. Por exemplo: $\left(-\frac{1}{2}, -1, -2, \ldots\right) \Rightarrow q = 2$.

Classificamos uma PG como **oscilante** quando o primeiro termo é um número real diferente de zero e a razão é um número negativo, isto é, $\mathbf{a_1 \in \mathbb{R}^*}$ e $\mathbf{q < 0}$. Por exemplo: $(-1, 2, -4) \Rightarrow q = -2$.

Uma PG é classificada como **constante** quando sua razão é igual a 1, ou seja, quando $q = 1$. Por exemplo: $(-10, -10, -10, \ldots) \Rightarrow q = 1$.

Exercícios resolvidos

14 A sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma PG.

a) Calcule o valor de x.

b) Escreva essa progressão.

Resolução

a) Como a sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma progressão geométrica e supondo $x \neq 0$, temos:

$$\frac{3x+2}{x} = \frac{10x+12}{3x+2} \Rightarrow x(10x+12) = (3x+2)(3x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x^2 + 12x = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Portanto, os valores de x são -2 ou 2.

b) Se $x = 2$, temos que $a_1 = 2$, então:

$a_2 = 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

$a_3 = 10x + 12 = 10 \cdot 2 + 12 = 32$

Assim, a PG é (2, 8, 32).

Se $x = -2$, temos que $a_1 = -2$, então:

$a_2 = 3x + 2 = 3 \cdot (-2) + 2 = -4$

$a_3 = 10x + 12 = 10 \cdot (-2) + 12 = -8$

Assim, a PG é $(-2, -4, -8)$.

15 Sejam quatro números inteiros tais que os três primeiros formam uma progressão aritmética de razão 3, os três últimos uma progressão geométrica e o primeiro número é igual ao quarto. Determine esses quatro números.

Resolução

Representando três números em PA de razão 3 e observando os dados do problema, escrevemos a sequência:

$(x - 3, x, x + 3, x - 3)$

Como os três últimos números formam uma PG, temos:

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x-3}{x+3} \Rightarrow (x + 3)^2 = x(x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 - 3x \Rightarrow 9x = -9 \Rightarrow x = -1$$

Substituindo x por -1 na sequência, obtemos:

$(-4, -1, 2, -4)$

Portanto, os números são: -4, -1, 2 e -4.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

36. Determine a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) (3, 12, 48, ...) 4

b) (10, 5, ...) $\frac{1}{2}$

c) $(5, -15, ...)$ -3

d) (10, 50, ...) 5

e) $(\sqrt{5}, 5, ...)$ $\sqrt{5}$

f) $(2, 2^5, ...)$ 2^4

g) $\left(5, \frac{5}{2}, ...\right)$ $\frac{1}{2}$

h) $(10^{-1}, 10, ...)$ 10^2

37. Classifique as progressões geométricas dadas a seguir em crescentes, decrescentes, oscilantes ou constantes.

a) (5, 5, 5, ...) Constante.

b) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$ Decrescente.

c) $(-2, -8, -32, ...)$ Decrescente.

d) $(3, -6, 12)$ Oscilante.

e) (4, 6, 9) Crescente.

f) $\left(-7, -\frac{7}{4}, -\frac{7}{16}, ...\right)$ Crescente.

g) $(\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, ...)$ Crescente.

38. Dados os números 1, 3 e 4, nessa ordem, determine o número que se deve adicionar a cada um deles para que se tenha uma progressão geométrica. -5

39. A medida do lado, o perímetro e a área de um quadrado estão, nessa ordem, em progressão geométrica. Qual é a área do quadrado? 256

40. (Ufla-MG) O sétimo termo da progressão 8, 12, 18, 27, ... é:

a) $\frac{243}{8}$

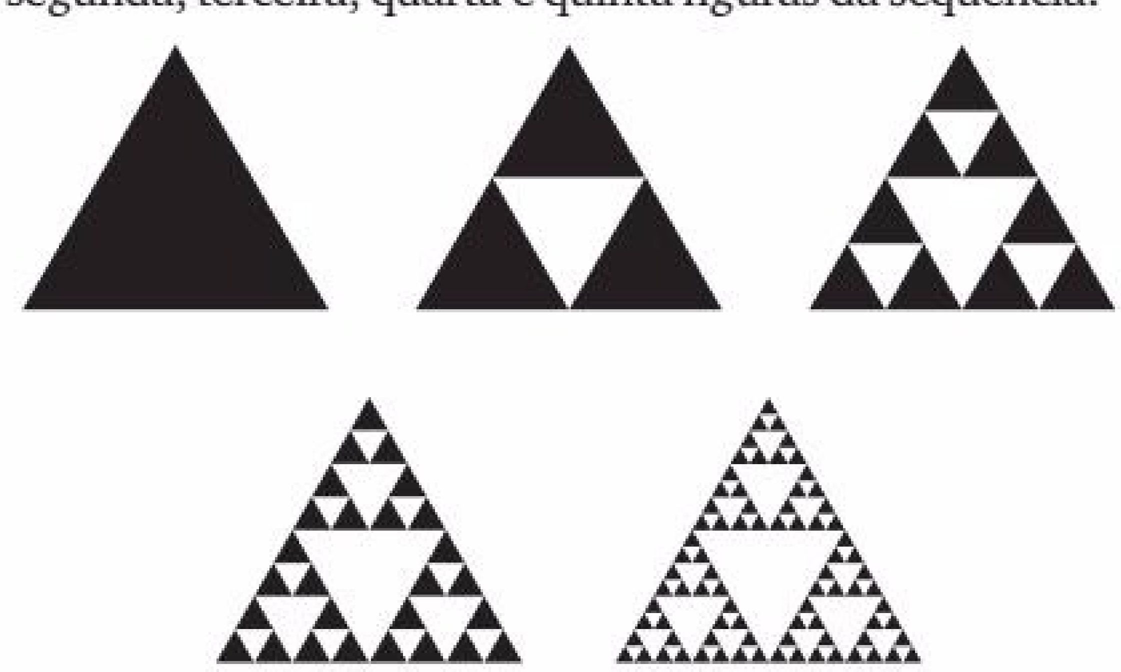
b) 91

c) $\frac{243}{4}$

d) 54

X e) $\frac{729}{8}$

41. (UFRN) A sequência de figuras abaixo representa os cinco primeiros passos da construção do conjunto de Sierpinski. Os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior. Denominamos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, respectivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência.



Editoria de arte

Podemos afirmar que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão:

X a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{4}$

42. Sabendo que os números 2, $\log x$ e $\log y$ estão simultaneamente em PA e PG, calcule x e y. $x = y = 100$

43. (Unitau-SP) Calcule o valor de x, de modo que a sequência $(3^{x+1}, 3^{4-x}, 3^{3x+1})$ seja uma progressão geométrica. $x = 1$

Termo geral de uma PG

Seja a PG: $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$.

$\times q \quad \times q \quad \times q \qquad\qquad \times q \quad \times q$

Usando a definição de PG, temos:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= a_1 \cdot q \\
a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\
a_4 &= a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\
&\vdots \\
a_n &= a_{n-1} \cdot q = (a_1 \cdot q^{n-2}) \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1}
\end{aligned}
$$

Então podemos concluir que:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}} \longrightarrow \text{fórmula do termo geral de uma PG}$$

em que:

$a_n \longrightarrow$ termo geral (ou enésimo termo) $\qquad n \longrightarrow$ ordem do termo

$a_1 \longrightarrow$ primeiro termo $\qquad q \longrightarrow$ razão

Essa expressão é conhecida como **fórmula do termo geral de uma PG** e permite calcular qualquer termo da PG conhecendo apenas o primeiro termo (a_1) e a razão (*q*).

Podemos, ainda, obter a lei de formação de uma PG dada. Por exemplo, vamos determinar a expressão do termo geral da PG (5, 10, 20, ...).

A razão da PG é $q = \frac{10}{5} = 2$.

Substituindo *q* por 2 e a_1 por 5 na fórmula do termo geral, obtemos a lei de formação dessa PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

Em algumas situações que envolvem termos consecutivos de uma PG, é conveniente recorrer às seguintes representações:

- produto de três termos consecutivos: $\frac{x}{q}$, x, xq
- soma de três termos consecutivos: x, xq, xq^2

Exercícios resolvidos

16 Determine o 10º termo da PG (2, 6, ...).

Resolução

A razão dessa progressão geométrica é igual a:

$$q = \frac{6}{2} = 3$$

Se $a_1 = 2$, o décimo termo (n = 10) é:

$$a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 3^9 = 39\,366$$

17 Em uma PG de quatro termos, a razão é 5 e o último termo é 375. Calcule o primeiro termo dessa PG.

Resolução

Sendo q = 5 e $a_4 = 375$, temos:

$$a_4 = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow 375 = a_1 \cdot 5^3 \Rightarrow 375 = a_1 \cdot 125 \Rightarrow a_1 = 3$$

18 Escreva uma PG de quatro termos, sabendo que a soma do primeiro termo com o terceiro vale 150 e a soma do segundo termo com o quarto vale 1 050.

Resolução

Uma PG de quatro termos (a_1, a_2, a_3, a_4) pode ser escrita da seguinte maneira:

$a_1 \qquad a_3 = a_1q^2$

$a_2 = a_1q \qquad a_4 = a_1q^3$

Assim, de acordo com o enunciado, podemos escrever as seguintes equações:

$$a_1 + a_3 = 150 \Rightarrow a_1 + a_1q^2 = 150 \Rightarrow a_1(1 + q^2) = 150$$

$$a_2 + a_4 = 1\,050 \Rightarrow a_1q + a_1q^3 = 1\,050 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1q(1 + q^2) = 1\,050$$

Com as equações acima obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1(1 + q^2) = 150 & \text{(I)} \\ a_1q(1 + q^2) = 1\,050 & \text{(II)} \end{cases}$$

Calculando a razão entre as equações (II) e (I), temos:

$$\frac{\cancel{a_1}q\cancel{(1 + q^2)}}{\cancel{a_1}\cancel{(1 + q^2)}} = \frac{1\,050}{150} \Rightarrow q = 7$$

Substituindo o resultado na primeira equação, temos:

$$a_1(1 + 7^2) = 150 \Rightarrow a_1 = 3$$

Assim, a sequência é (3, 21, 147, 1 029).

19 Três números positivos estão em progressão geométrica crescente, de tal forma que o produto deles é 27 000 e a soma, 130. Calcule esses três números.

Resolução

Considerandoos dados do enunciado, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 27\,000 & \text{(I)} \\ \frac{x}{q} + x + xq = 130 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), vem:

$$\frac{x}{\cancel{q}} \cdot x \cdot (x \cdot \cancel{q}) = 27\,000 \Rightarrow x^3 = 27\,000 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27\,000} \Rightarrow x = 30$$

Substituindo *x* por 30 na equação (II), obtemos:

$$\frac{30}{q} + 30 + 30q = 130 \Rightarrow 30q^2 + 30q + 30 = 130q \Rightarrow 30q^2 - 100q + 30 = 0 \Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, temos:

$$q = 3 \text{ ou } q = \frac{1}{3}$$

Como a PG é crescente e $a_1 > 0$, a razão deve ser maior que 1; portanto $q = 3$. Assim, temos:

$$a_1 = \frac{x}{q} = \frac{30}{3} \Rightarrow a_1 = 10$$

$$a_2 = x \Rightarrow a_2 = 30$$

$$a_3 = xq = 30 \cdot 3 \Rightarrow a_3 = 90$$

Os números são 10, 30 e 90.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

44. Calcule o décimo termo da PG (1, 5, ...). 5^9

45. Qual é o sexto termo da PG (512, 256, ...)? 16

46. Uma PG tem seis termos, sendo 2 o último termo e $\frac{1}{4}$ a razão. Qual é o primeiro termo dessa PG? 2048

47. Em uma PG, $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_7 = 16$. Calcule a razão dessa PG. $q = \pm 2$

48. Em uma PG, $a_5 = 32$ e $a_8 = 256$. Calcule *q* e a_1. $q = 2$ e $a_1 = 2$

49. Qual é o sétimo termo da PG $\left(\frac{1}{2}, -1, 2, ...\right)$? 32

50. Qual é o 20º termo da PG $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}, ...\right)$? 512

51. Em uma progressão geométrica, a diferença entre o segundo e o primeiro termos é 9, e a diferença entre o quinto e o quarto termos é 576. Calcule o primeiro termo dessa progressão. 3

52. (Unifor-CE) O número de termos da progressão $\left(\frac{1}{125}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, ..., 3125\right)$ é

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 X e) 9

53. Entre os números 18 e *b* foram inseridos dois termos, obtendo-se uma PG de razão 3. Qual é o valor de *b*? 486

54. (Fuvest-SP) Sabe-se sobre a progressão geométrica $a_1, a_2, a_3, ...$ que $a_1 > 0$ e $a_6 = -9\sqrt{3}$. Além disso, a progressão geométrica $a_1, a_5, a_9, ...$ tem razão igual a 9. Nessas condições, o produto $a_2 \cdot a_7$ vale:

X a) $-27\sqrt{3}$
b) $-3\sqrt{3}$
c) $-\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $27\sqrt{3}$

55. (Vunesp-SP) Suponhamos que uma represa de área igual a 128 km² tenha sido infestada por uma vegetação aquática. Suponhamos também que, por ocasião de um estudo sobre o problema, a área tomada pela vegetação fosse de 8 km² e que esse estudo tivesse concluído que a taxa de aumento da área cumulativamente infestada era de 50% ao ano. Nessas condições:

a) Qual seria a área infestada *n* anos depois do estudo, caso não se tomasse nenhuma providência? $A_n = 8 \cdot (1{,}5)^n$

b) Com as mesmas hipóteses, em quantos anos a vegetação tomaria conta de toda a represa? (Use os valores aproximados $\log_{10} 2 = 0{,}30$ e $\log_{10} 3 = 0{,}48$) 7 anos.

Soma dos termos de uma PG finita

Considere uma PG finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão q.

Podemos obter a soma S_n de todos os termos dessa PG considerando os seguintes casos:

1º caso: Se $q = 1$, a PG é constante, e como todos os termos são iguais, temos que $S_n = na_1$.

2º caso: Se $q \neq 1$, a PG não é constante, assim, temos:

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1} \quad \text{(I)}$$

Agora, multiplicamos ambos os membros da equação acima por q. Então:

$$qS_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... + a_1q^n \quad \text{(II)}$$

Fazendo (II) − (I), temos:

$$qS_n - S_n = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 + ... + a_1q^n - (a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + ... + a_1q^{n-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow qS_n - S_n = \cancel{a_1q} + \cancel{a_1q^2} + \cancel{a_1q^3} + \cancel{a_1q^4} + ... + a_1q^n - a_1 - \cancel{a_1q} - \cancel{a_1q^2} - \cancel{a_1q^3} - \cancel{a_1q^4} - ... - \cancel{a_1q^{n-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow qS_n - S_n = -a_1 + a_1q^n \Rightarrow S_n(q-1) = -a_1 + a_1q^n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}}$$

Exercícios resolvidos

20 Dada a progressão geométrica (1, 3, 9, 27, ...), calcule:

a) a soma dos 6 primeiros termos;

b) quantos termos devem ser somados para que o resultado da adição seja 29 524.

Resolução

a) $a_1 = 1; q = 3; n = 6$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \Rightarrow S_6 = \frac{1 \cdot (3^6 - 1)}{3-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_6 = \frac{729 - 1}{2} = 364$$

b) $$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \Rightarrow 29\,524 = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3^n = 59\,049 \Rightarrow 3^n = 3^{10} \Rightarrow n = 10$$

Devemos somar 10 termos para obter 29 524.

21 Calcule o valor de x na igualdade

$x + 3x + ... + 729x = 5\,465$, sabendo que os termos do 1º membro formam uma PG.

Resolução

$$a_1 = x;\ q = \frac{3x}{x} = 3;\ a_n = 729x;\ S_n = 5\,465$$

Cálculo de n:

$$a_n = a_1q^{n-1} \Rightarrow 729x = x \cdot 3^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 729 = 3^{n-1} \Rightarrow 3^6 = 3^{n-1} \Rightarrow n = 7$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} \Rightarrow 5\,465 = \frac{x(3^7 - 1)}{3-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\,465 = \frac{x(2\,187 - 1)}{2} \Rightarrow 5\,465 = 1\,093x \Rightarrow x = 5$$

22 (USF-SP) Se numa progressão geométrica o 2º termo é igual a $-\frac{1}{4}$ e o 5º é igual a $\frac{1}{32}$ então a soma dos 5 primeiros termos é igual a:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{11}{32}$

c) $\frac{33}{32}$

d) $\frac{32}{11}$

e) 3

Resolução

Considerando o texto, podemos escrever que:

$$a_2 = a_1q = -\frac{1}{4}$$

$$a_5 = a_1q^4 = \frac{1}{32}$$

Calculando a razão entre a_5 e a_2, temos:

$$\frac{a_5}{a_2} \Rightarrow \frac{a_1q^4}{a_1q} = \frac{\frac{1}{32}}{-\frac{1}{4}} \Rightarrow q^3 = -\frac{1}{8} \Rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

Sabendo o valor de a_2, podemos calcular a_1, ou seja:

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \cdot a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$

Assim a soma dos 5 primeiros termos é:

$$S_5 = \frac{\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right]}{-\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{32} - 1\right]}{-\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_5 = \frac{\frac{1}{2}\left[-\frac{33}{32}\right]}{-\frac{3}{2}} \Rightarrow S_5 = \frac{-\frac{33}{64}}{-\frac{3}{2}} = \frac{11}{32}$$

A resposta correta é alternativa **b**.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

56. Calcule a soma dos 10 primeiros termos de cada PG:

a) (2, 4, 8, ...) 2046

b) (−1, 4, −16, ...) $\frac{2^{20}-1}{5}$

57. Calcule a soma dos termos da PG (5, 50, ..., 500 000), usando a calculadora. $S_6 = 555\,555$

58. O vazamento de um tanque de água provocou a perda de 2 litros de água no primeiro dia. Como o orifício responsável pela perda ia aumentando, no dia seguinte o vazamento foi o dobro do dia anterior. Se essa perda for dobrando a cada dia, qual o número total de litros de água perdidos até o 12º dia? 8190 litros

59. (UA-AM) Numa PG, a expressão do termo geral é $a_n = 3^{(n-2)}$. Então, a soma dos cinco primeiros termos é igual a:

X a) $\frac{121}{3}$ b) $\frac{222}{3}$ c) $\frac{242}{3}$ d) $\frac{120}{3}$ e) $\frac{42}{3}$

60. Resolva a equação:

$$10x + 20x + 40x + ... + 1\,280x = 7\,650$$

sabendo que os termos do 1º membro estão em progressão geométrica. $S = \{3\}$

61. (UERN) Um fabricante de televisores produziu 204 700 unidades em um período de 11 meses. Considerando-se que, no primeiro mês, a produção foi de *x* unidades e que, nos demais meses, foi o dobro do mês anterior, pode-se afirmar que o valor de *x* é:

X a) 100 b) 90 c) 80 d) 50

62. (UFPA) A razão da PG cujos termos satisfazem as relações $a_1 + a_3 + a_5 = 5$ e $a_2 + a_4 + a_6 = 10$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ X d) 2 e) 3

63. Euclides, no livro X de **Os elementos**, ensina como somar os termos de uma progressão geométrica. A fórmula é: $S_n = a_1 \cdot \frac{a_{n+1} - a_1}{a_2 - a_1}$. Mostre que essa fórmula é equivalente à $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Demonstração.

Soma dos termos de uma PG infinita

Considere uma sequência (a_n) cujo termo geral é dado por $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, para $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos determinar alguns termos dessa sequência substituindo valores para *n* na expressão do termo geral. Assim, temos:

- Para $n = 1 \Rightarrow a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$
- Para $n = 2 \Rightarrow a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$
- Para $n = 3 \Rightarrow a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125$
- Para $n = 4 \Rightarrow a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$
- Para $n = 5 \Rightarrow a_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

⋮ ⋮ ⋮

Essa sequência é a PG (0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125; ...) com $a_1 = \frac{1}{2}$ e razão $q = \frac{1}{2}$. Note que à medida que aumentamos o valor do expoente *n*, o valor do termo a_n fica cada vez mais próximo de zero.

Dizemos então que o limite de $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ quando *n* tende ao infinito vale zero e representamos assim:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ ⟶ Lê-se: limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ quando *n* tende ao infinito é igual a zero.

De modo geral, é possível demonstrar que, se $q \in \mathbb{R}$, com $|q| < 1$, ou seja, $-1 < q < 1$, então $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Queremos calcular a soma dos infinitos termos de uma PG de razão q, com $-1 < q < 1$. Para isso, vamos analisar o que ocorre com a soma S_n dos n primeiros termos quando n tende ao infinito, ou seja, quando n se torna arbitrariamente grande.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}\right), \text{ para } -1 < q < 1$$

Mas, vimos que $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$. Então, podemos escrever:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1(0-1)}{q-1} = \frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

Assim, em uma PG infinita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Portanto, dizemos que a soma dos termos da PG infinita, indicada por S, é igual a $\frac{a_1}{1-q}$.

$$\mathbf{S = \frac{a_1}{1-q}}$$

Progressão geométrica e função exponencial

No capítulo 7 deste volume estudamos a função exponencial de base a, cuja lei é dada por $f(x) = a^x$, com a real, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Restringindo o domínio da função f aos números naturais n não nulos, temos $f(n) = a^n$ e podemos escrever:

- Para $n = 1 \Rightarrow f(1) = a^1 = a = a_1$
- Para $n = 2 \Rightarrow f(2) = a^2 = a_2$
- Para $n = 3 \Rightarrow f(3) = a^3 = a_3$
- Para $n = 4 \Rightarrow f(4) = a^4 = a_4$
- Para $n = 5 \Rightarrow f(5) = a^5 = a_5$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Assim, temos:

$f(n) = a^n$

$f(n + 1) = a^{n+1}$

Calculando o quociente entre $f(n + 1)$ e $f(n)$, temos:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a^{n+1-n} = a$$

Então, considerando a sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots)$, o quociente entre cada termo e o anterior é constante e igual a a, ou seja, toda função exponencial f de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(n) = a^n$, com a real, $a > 0$ e $a \neq 1$, é uma PG de razão $q = a$ e $a_1 = a$.

Exercícios resolvidos

23 Determine a soma dos infinitos termos da PG.

$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27} ...\right)$

Resolução

Nesse problema, vamos determinar a soma da PG infinita dada, em que $a_1 = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{2}{3}$.

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}} \Rightarrow S_n = 1$$

Portanto, a soma da PG infinita é 1.

24 Resolva a equação: $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + ... = 42$.

Resolução

$$x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + ... = 42 \Rightarrow x \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...\right)}_{S} = 42$$

S é a soma dos termos da PG infinita de razão $q = \frac{1}{3}$ e $a_1 = 1$.

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \Rightarrow S = \frac{3}{2}$$

Então:

$$x \cdot \frac{3}{2} = 42 \Rightarrow 3x = 84 \Rightarrow x = 28$$

Portanto, $S = \{28\}$.

25 Calcule a fração geratriz da dízima 0,5212121…

Resolução

$$0{,}5212121... = 0{,}5 + 0{,}021 + 0{,}00021 + 0{,}0000021 + ...$$

$$0{,}5212121... = \frac{5}{10} + \underbrace{\frac{21}{1000} + \frac{21}{100\,000} + \frac{21}{10\,000\,000} + ...}_{PG}$$

Se $a_1 = \frac{21}{1000}$ e $q = \frac{1}{100}$, vem:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{\frac{21}{1000}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{21}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{21}{990}$$

Logo, a fração geratriz é:

$$\frac{5}{10} + \frac{21}{990} = \frac{495 + 21}{990} = \frac{516}{990} = \frac{86}{165}$$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

64. Calcule a soma dos termos de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) (20, 10, 5, ...) $S = 40$

b) $\left(5, 1, \frac{1}{5}, ...\right)$ $S = \frac{25}{4}$

c) $(2^{-2}, 2^{-4}, 2^{-6}, ...)$ $S = \frac{1}{3}$

d) $(9^{-1}, 10^{-1}, 9 \cdot 10^{-2}, 9^2 \cdot 10^{-3}, ...)$ $S = \frac{10}{9}$

65. Calcule o resultado de cada adição a seguir, formada por termos de uma PG.

a) $20 + 4 + \frac{4}{5} + \frac{4}{25} + ...$ $S = 25$

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ...$ $S = \frac{2}{3}$

c) $1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + ...$ $S = \frac{10}{9}$

d) $1 - 0{,}1 + 0{,}01 - 0{,}001 + ...$ $S = \frac{10}{11}$

66. Uma pessoa *A* chega às 14 horas para um encontro que havia marcado com uma pessoa *B*. Como *B* não chegara ainda, *A* resolveu esperar um tempo t_1 igual a meia hora e, após isso, um tempo $t_2 = \frac{1}{2}t_1$ e, após, um tempo $t_3 = \frac{1}{2}t_2$ e assim por diante. Se *B* não veio ao encontro, quanto tempo *A* esperou até ir embora? Esperou por 1 h.

67. James D. Stein conta em seu livro **How math explains the world** que recebeu o título em português de **Como a Matemática explica o mundo**, que o editor do best-seller de Stephen Hawking, **Uma breve história do tempo**, afirmava que, para cada equação incluída no livro, o número de leitores em potencial cairia em 50%. Todavia Hawking tinha confiança suficiente em seus leitores para incluir a clássica equação de Einstein $E = mc^2$.

a) Se o editor estiver correto e ainda a população deste mundo for seis bilhões, em quanto a décima equação reduzirá o número de leitores potenciais? 5 859 000 leitores.

b) Existirão leitores se forem colocadas 32 equações? Use uma calculadora para facilitar os cálculos. Apenas o autor será o leitor da obra.

68. Em cada equação, o primeiro membro representa a soma dos termos de uma PG infinita. Resolva.

a) $80x + 40x + 20x + ... = 320$ $S = \{2\}$

b) $5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2} + ... = \frac{625}{4}$ $S = \{3\}$

69. Obtenha a fração geratriz das seguintes dízimas periódicas:

a) 0,99... 1

b) 0,4233... $\frac{127}{300}$

c) 2,66... $\frac{8}{3}$

d) 1,355... $\frac{61}{45}$

70. Alguns estudos demográficos utilizam-se de modelos matemáticos envolvendo progressões aritméticas e geométricas. Leia o texto a seguir a respeito da teoria Malthusiana, um desses estudos demográficos, e faça o que se pede.

Teoria Malthusiana

[...] Exposta em 1798, foi a primeira teoria demográfica de grande repercussão nos meios acadêmicos, políticos e econômicos e até hoje é a mais popular de todas, apesar das falhas que apresenta. Preocupado com os problemas socioeconômicos (desemprego, fome, êxodo rural, rápido aumento populacional) decorrentes da Revolução Industrial e que afetavam seriamente a Inglaterra, Malthus expôs sua famosa teoria a respeito do crescimento demográfico.

Afirmava que as populações humanas, se não ocorrerem guerras, epidemias, desastres naturais etc., tenderia a duplicar a cada 25 anos. Ela cresceria, portanto, em progressão geométrica (2, 4, 8, 16, 32...). Já o crescimento da produção de alimentos ocorreria apenas em progressão aritmética (2, 4, 6, 8, 10...).

Ao considerar esses dois postulados, Malthus concluiu que o ritmo de crescimento populacional (progressão geométrica) seria mais acelerado que o ritmo de crescimento da produção de alimentos (progressão aritmética). [...]


Arthimedes/Shutterstock.com

Segundo a teoria Malthusiana, a população mundial cresce com velocidade maior que a de produção de alimentos.

Para ele e os defensores dessa tese, descartavam a utilização de métodos contraceptivos para limitar o crescimento populacional; para eles a solução estaria no controle da natalidade, sendo que o referido controle deveria basear-se na sujeição moral do homem (casamento tardio, abstinência sexual etc.). [...] Hoje, sabe-se que as previsões malthusianas não se concretizaram: a população do planeta não duplicou a cada 25 anos e a produção de alimentos tem crescido com o desenvolvimento tecnológico. [...] Malthus subestimou a capacidade da tecnologia em elevar a produção de alimentos. Mas, desde que ele apresentou sua teoria, ainda nos dias atuais, são comuns os discursos que relacionam de forma simplista a ocorrência da fome no planeta ao crescimento populacional.

Teoria Neomalthusiana

[..] Mas como explicar, e, a partir daí, enfrentar os problemas da fome e miséria nos países subdesenvolvidos? Nesse contexto histórico, foi criada a teoria demográfica Neomalthusiana, uma tentativa de explicar a ocorrência de fome nos países subdesenvolvidos, para se esquivarem das questões econômicas. [...] Os neomalthusianos, temerosos, diante desse quadro assustador no Terceiro Mundo, passam a responsabilizar esses países pelo quadro de fome e miséria e os seus elevados crescimentos demográficos.

Para os neomalthusianos quanto maior o número de habitantes de um país, menor a renda *per capita* e a disponibilidade de capital a ser distribuído pelos agentes econômicos. Verifica-se que essa teoria, embora com postulados totalmente diferentes daqueles utilizados por Malthus, chega à mesma conclusão: o crescimento populacional é o responsável pela ocorrência da miséria. Ela passa, então, a propor programas de controle da natalidade nos países subdesenvolvidos e a disseminação da utilização de métodos anticoncepcionais.

[...] Apesar de vários países terem adotado medidas de controle da natalidade sob orientações neomalthusianas a situação de fome e miséria continuou existindo.

Fonte: SILVA, Jose Adailton Barroso et al. Teorias demográficas e o crescimento populacional no mundo. **Caderno de Graduação – Ciências Humanas e Sociais – UNIT**, [S.l.], v. 2, n. 3, p. 113-124, mar. 2015. Disponível em: <https://periodicos.set.edu.br/index.php/cadernohumanas/article/view/1951>. Acesso em: 7 abr. 2016.

a) De acordo com o texto, qual é a teoria demográfica mais popular e considerada a primeira de grande repercussão? O que previa essa teoria? Veja a seção de *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Represente o que expunha Malthus em sua teoria demográfica, por meio de um gráfico, esboçando o crescimento da população e o crescimento da produção de alimentos. Qual o ponto do gráfico que corresponde ao colapso na oferta de alimentos no mundo?

c) Em 1798, ano da divulgação da teoria Malthusiana, a população mundial era de aproximadamente 1 bilhão de habitantes. Se as hipóteses apontadas por Malthus tivessem se concretizado qual teria sido a população mundial no ano 2000? 256 bilhões.

d) Pesquise a teoria Reformista, que é outra teoria de crescimento demográfico. Quais são as ideias básicas dessa teoria? Qual é a relação entre ela e as teorias citadas acima?

CAPÍTULO 10

Noções de Matemática financeira

A Matemática financeira é a área da Matemática dedicada a estudar as relações comerciais e econômicas. Muitas situações do nosso cotidiano envolvem essa área da Matemática, desde a de compra de produtos em um supermercado até a solicitação de empréstimos bancários para compra de imóveis, por exemplo. Conhecer os conceitos que estão relacionados a situações como essas ajuda a analisar se determinada proposta é vantajosa ou não.

Neste capítulo, veremos termos como porcentagem, taxa de juro, descontos, aumentos, lucro, prejuízo, entre outros. Além disso, retomaremos e aprofundaremos conceitos como variação percentual, juro simples e juro composto.

Ariel Skelle/Getty Images

A solicitação de empréstimos bancários para compra de imóveis envolve conceitos como taxa de juro e juro composto, estudados na área da Matemática financeira.

Porcentagem

Você provavelmente já estudou porcentagem no Ensino Fundamental. Vamos retomar o assunto para aplicá-lo a outros conceitos que veremos mais adiante. **Porcentagem** é uma maneira de indicar uma razão de denominador 100 ou qualquer representação equivalente a ela. Por exemplo:

a) $\underbrace{60\%}_{\text{Lê-se: sessenta por cento.}} = \frac{60}{100} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

b) $28\% = \frac{28}{100} = \frac{7}{25} = 0{,}28$

c) $0{,}12 = \frac{12}{100} = 12\%$

d) $1{,}25 = \frac{125}{100} = 125\%$

A expressão "por cento" vem do latim *per centum*, que significa dividido por cem.

De modo geral, podemos escrever que:

O termo x%, em que *x* é um número real qualquer, representa a razão centesimal $\frac{x}{100}$ e é chamado de **porcentagem** ou **taxa percentual**.

Aumentos e descontos

Uma das aplicações da porcentagem é o cálculo de aumentos e descontos, bastante comum no dia a dia. Acompanhe a situação a seguir:

Um aparelho de telefone celular custa R$ 1 000,00 em determinada loja. Se o cliente optar por pagar à vista, a loja concede um **desconto** de 5% sobre esse valor. Para calcular o preço do celular pago à vista, precisamos determinar 5% de R$ 1 000,00 e subtrair do valor inicial. Então:

- 5% de R$ 1 000,00 $\rightarrow 0{,}05 \cdot 1000 = 50 \rightarrow$ R$ 50,00
- R$ 1 000,00 − R$ 50,00 = R$ 950,00

Portanto, o preço do celular pago à vista é R$ 950,00.

Também poderíamos calcular o valor diretamente, fazendo:

$1000 - 0,05 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1 - 0,05) = 0,95 \cdot 1000 = 950$

De modo geral, podemos dizer que:

Para calcular o valor de algo após um desconto de p%, devemos multiplicar o valor original por $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$.

Ainda considerando a situação anterior, na semana seguinte, a loja resolveu aplicar um aumento de 3% em todos seus produtos. Para calcular o valor do celular após o reajuste, precisamos determinar 3% de R$ 1 000,00 e adicionar ao valor inicial. Então:

- 3% de R$ 1 000,00 $\rightarrow 0,03 \cdot 1000 = 30 \rightarrow$ R$ 30,00
- R$ 1 000,00 + R$ 30,00 = R$ 1 030,00

Portanto, o preço do celular após o aumento é R$ 1 030,00.

Também poderíamos calcular o valor diretamente, fazendo:

$1000 + 0,03 \cdot 1000 = 1000 \cdot (1 + 0,03) = 1,03 \cdot 1000 = 1030$

De modo geral, podemos dizer que:

Para calcular o valor de algo após um aumento de p%, devemos multiplicar o valor original por $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$.

Aumentos e descontos sucessivos

Considere a seguinte situação: o preço de um produto sofreu um aumento de 8% e, logo em seguida, foi reajustado em 12%. Aumentar o preço em 20% equivale a aplicar esses dois aumentos sucessivos?

Suponha que o preço do produto seja R$ 100,00 e calcule os aumentos sucessivos.

Preço do produto após o primeiro aumento: $(1 + 0,08) \cdot 100 = 1,08 \cdot 100 = 108$.

Portanto, o valor depois do primeiro aumento será R$ 108,00.

Preço do produto após o segundo aumento: $(1 + 0,12) \cdot 108 = 1,12 \cdot 108 = 120,96$.

Portanto, o preço final do produto após os dois aumentos será R$ 120,96.

Agora, vamos aplicar um único aumento de 20% sobre o preço inicial: $(1 + 0,2) \cdot 100 = 1,2 \cdot 100 = 120$.

Com um único aumento de 20% obtemos o valor R$ 120,00.

Observe que os valores obtidos não são iguais. Então, podemos concluir que aumentos percentuais sucessivos não correspondem a um único aumento representado pela soma das taxas percentuais. Analogamente, podemos concluir o mesmo para descontos, ou seja, descontos percentuais sucessivos não correspondem a um único desconto percentual representado pela soma das taxas percentuais.

Para determinar a **taxa acumulada** envolvendo aumentos ou descontos sucessivos devemos multiplicar todas as taxas envolvidas. Utilizando a situação apresentada, poderíamos calcular o valor final diretamente. Veja:

$(1 + 0,12) \cdot 108 = 1,12 \cdot ((1 + 0,08) \cdot 100) = 1,12 \cdot 1,08 \cdot 100 = 1,2096 \cdot 100 = (1 + 0,2096) \cdot 100 = 120,96$

Assim, aplicar um aumento de 8% sucedido por um aumento de 12% é o mesmo que aplicar um aumento único de 20,96%.

Variação percentual

Variação percentual indica a relação entre um valor ou quantidade inicial e um valor ou quantidade final. Ela indica quanto, em taxa percentual, esse valor aumentou ou diminuiu em relação ao valor inicial e é calculada pelo quociente da diferença entre o valor final e o valor inicial pelo valor inicial.

Por exemplo, o total de vendas de uma loja em determinado mês foi R$ 500 000,00 e no mês seguinte foi R$ 700 000,00. Para determinar a variação percentual de vendas de um mês para o outro, fazemos:

$$\frac{700000 - 500000}{500000} = \frac{200000}{500000} = \frac{2}{5} = 0,40 = 40\%$$

Portanto, a variação percentual nas vendas da loja de um mês para o outro foi de 40%, ou seja, houve um crescimento de 40% nas vendas.

Exercícios resolvidos

1 Um vestido que custa R$ 540,00 está sendo vendido à vista com um desconto de 20%. Qual é o preço à vista do vestido?

Resolução

Para determinar o preço do vestido à vista, calculamos 20% de R$ 540,00 e subtraímos do valor inicial. Então:
$540 \cdot (1 - 0{,}2) = 540 \cdot 0{,}8 = 432$
Portanto, o preço do vestido à vista é R$ 432,00.

2 Edgar teve um aumento de 10% no seu salário e passou a receber R$ 1650,00. Qual era seu salário antes do reajuste?

Resolução

O salário anterior correspondia a 100%. Como houve um aumento de 10%, o novo salário passou a corresponder a 100% + 10% = 110%. Assim, temos:

Taxa percentual: 100% ——— 110%
Salário: x ——— 1650

$$\frac{100}{x} = \frac{110}{1650} \Rightarrow 110x = 100 \cdot 1650 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 165000 : 110 \Rightarrow x = 1500$$

O salário antes do reajuste era R$ 1500,00.

3 A população atual de uma cidade é 50000 habitantes. Sabendo que essa população cresce 10% ao ano, qual será a população dessa cidade daqui a três anos?

Resolução

Considerando que a população inicial é de 50 000 habitantes e cresce 10% ao ano, temos que a taxa acumulada é i:
$i = (1 + 0{,}10)\,(1 + 0{,}10)\,(1 + 0{,}10) = 1{,}331$
Aplicando essa taxa acumulada sobre 5000, temos:
$50\,000 \cdot 1{,}331 = 66\,550$
Portanto, em três anos a previsão é 66550 habitantes.

4 Sobre o valor de uma mercadoria foram aplicados dois descontos sucessivos de 10% e 12%. Calcule o desconto equivalente aos dois descontos sucessivos.

Resolução

Representando o preço inicial da mercadoria por x e aplicando os dois descontos sucessivos, temos:
$(1 - 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}12) \cdot x = 0{,}9 \cdot 0{,}88 \cdot x = 0{,}792x$ ou 79,2% de x.
Como o valor inicial representa 100%, podemos concluir que o desconto equivalente sobre a mercadoria será de 100% − 79,2% = 20,8%.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

1. Copie o quadro a seguir no caderno e complete com os valores que estão faltando. A primeira linha está feita como exemplo.

Fração	Representação decimal	Porcentagem
$\frac{9}{10}$	0,9	90%
$\frac{1}{4}$	0,25	25%
$\frac{13}{200}$	0,065	6,5%
$\frac{47}{100}$	0,47	47%
$\frac{2}{25}$	0,08	8%

2. Calcule:
a) 14% de 3000 420
b) 9% de 250 22,5
c) 0,6% de 300 1,8
d) 24% de 1000 240

3. A população de uma cidade, com 90000 habitantes, cresce anualmente 2,5%. Quantos habitantes essa cidade terá:
a) ao fim de 1 ano? 92250
b) ao fim de 2 anos? 94556

4. O preço de um par de sapatos em uma loja é R$ 150,00. Se seu preço sofrer um aumento de 9%, quanto passará a custar? R$ 163,50

5. Uma loja vende um aparelho de ar-condicionado por R$ 8000,00 à vista. Na venda desse aparelho a prazo, o preço sofre um acréscimo de 8% e o total é dividido em duas prestações iguais. Qual é o valor de cada prestação? R$ 4 320,00

6. A soma de dois números é 80. Adicionando-se 40% do primeiro a 50% do segundo, obtém-se 35. Quais são esses números? 50 e 30.

7. O preço de uma mercadoria sofre anualmente um acréscimo de 5%. Supondo que o preço anual seja R$ 200,00, qual será o preço dessa mercadoria daqui a 3 anos? R$ 231,53

8. Um objeto custa R$ 400,00 e é vendido com descontos sucessivos de 10% e 7%. Qual o preço de venda após esses descontos? R$ 334,80

9. Uma mercadoria teve seu preço majorado em 18%. A pedido de um cliente, foi dado um desconto de 5% sobre o novo preço, passando a mercadoria a custar R$ 302,50 a mais que seu preço inicial. Qual era o preço inicial dessa mercadoria? R$ 2500,00

10. Aumentando em 15% e 20%, respectivamente, os lados a e b de um retângulo, qual é o aumento percentual da área desse retângulo? Aumento percentual de 38%.

Lucro e prejuízo

Nas transações comerciais e financeiras é comum o uso de termos como: **custo** (valor gasto na produção de um produto), **receita** (valor arrecadado com as vendas de um produto) e **lucro** (o que se ganha em uma negociação). Esses termos podem assumir valores absolutos e também ser tratados como taxas percentuais.

O lucro é calculado como a diferença entre a receita e o custo, ou seja:

lucro = receita − custo

- se o valor for um número **positivo**, dizemos que a transação gerou **lucro**;
- se o valor for um número **negativo**, dizemos que a transação gerou **prejuízo**.

O lucro também pode ser expresso como uma taxa percentual em relação ao preço de custo ou ao preço de venda. Por exemplo, uma mercadoria cujo preço de custo é R$ 280,00 foi vendida por R$ 320,00, gerando um lucro de R$ 40,00. Assim:

- a taxa percentual de lucro sobre o preço de custo é: $\frac{\text{lucro}}{\text{custo}} = \frac{4\cancel{0}}{28\cancel{0}} = \frac{1}{7} \simeq 0{,}1428 \simeq 14{,}3\%$
- a taxa percentual de lucro sobre o preço de venda é: $\frac{\text{lucro}}{\text{venda}} = \frac{4\cancel{0}}{32\cancel{0}} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$

Juro

Para iniciar o estudo sobre juro, vamos analisar a situação a seguir.

O preço à vista de uma geladeira é R$ 950,00. Bruno comprou essa geladeira para pagar tudo de uma vez em 90 dias, ou seja, 3 meses após a compra. Nessas condições, a loja cobrou juro de 8% ao mês.

Ao comprar a geladeira a prazo, Bruno assumiu o compromisso de pagar um acréscimo chamado **juro**, que corresponde a uma porcentagem do valor à vista e depende do prazo para pagamento.

Juro (J) é uma compensação financeira que se paga pela utilização de uma quantia por determinado período de tempo.

Além do juro, os termos apresentados a seguir são muito frequentes em situações de Matemática financeira e serão utilizados neste capítulo.

- **Capital** (C): quantia monetária investida ou disponível para investimento. Também é denominado **valor presente** ou **principal**.
- **Taxa de juro** (i): taxa percentual que se paga ou se recebe pela compensação da aplicação de um capital. Essa taxa deve vir acompanhada da unidade de tempo a que se refere. Por exemplo, 5% a.d. equivale a 5% ao dia; 2% a.m. equivale a 2% ao mês; 8% a.a. equivale a 8% ao ano.
- **Tempo** (t): período que decorre desde o início até o fim de uma operação financeira. Também é conhecido como **período de capitalização**.
- **Montante** (M): investimento rentabilizado, ou seja, é o capital acrescido do juro acumulado em determinado período (capital + juro). Também é denominado **valor futuro**.

O tempo pode ser classificado como:

- **exato**: que usa o ano civil de 365 dias ou 366 dias (ano bissexto), em que os dias dos meses são contados pelo calendário (28, 29, 30 ou 31 dias).
- **comercial**: que usa o ano comercial, no qual o mês tem sempre 30 dias e o ano, 360 dias.

Assim, o juro (J) é o valor obtido ao aplicar a taxa de juro (i) sobre o capital (C).

A taxa de juro e o tempo devem ser sempre expressos na mesma unidade. Por exemplo, se i for uma taxa mensal, t deverá ser em meses.

A seguir, estudaremos duas maneiras de cálculo de juro: o juro simples e o juro composto.

Juro simples

Denominamos **juro simples** aquele calculado sempre sobre o capital inicial.

Na situação citada acima, considerando que a loja tenha adotado o regime de **juro simples**, vamos determinar qual foi o juro pago por Bruno pela geladeira.

$$\text{juro} = \underbrace{8\%\text{ de }950}_{\text{juro do 1º mês}} + \underbrace{8\%\text{ de }950}_{\text{juro do 2º mês}} + \underbrace{8\%\text{ de }950}_{\text{juro do 3º mês}}$$

$$\text{juro} = 0{,}08 \cdot 950 + 0{,}08 \cdot 950 + 0{,}08 \cdot 950 = (950 \cdot 0{,}08) \cdot 3 = 228$$

Portanto, Bruno pagou juro de R$ 228,00.

Como o juro simples (*J*) é diretamente proporcional ao capital (*C*), à taxa (*i*) e ao tempo (*t*), podemos usar a seguinte relação:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

Para determinar o montante, ou valor total, pago pela geladeira, adicionamos o juro ao capital, ou seja, aplicamos a relação:

$$M = C + J \quad \text{ou} \quad M = C + C \cdot i \cdot t$$

Aplicando essas relações à compra feita por Bruno, temos:

$$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 950 \cdot 0{,}08 \cdot 3 = 228$$
$$M = C + J \Rightarrow M = 950 + 228 = 1\,178$$

Portanto, se a loja adotou o regime de juro simples, o preço final da geladeira foi de R$ 1 178,00.

O regime de juro simples é utilizado, principalmente, no cálculo de multas por atraso no pagamento de contas de consumo (água, luz, telefone, boletos em geral) e nos descontos simples ofertados por lojas a seus clientes. A maioria das operações financeiras (como empréstimos, financiamentos, pagamentos a prazo etc.) utiliza o regime de juro composto, que estudaremos a seguir.

Exercícios resolvidos

5 Um produto, cujo custo é R$ 420,00, é vendido com um lucro de 30% sobre o preço de venda. Qual é o preço de venda dessa mercadoria?

Resolução

Sendo C = preço de custo, L = lucro e V = preço de venda, deveremos ter: $L = V - C$ (I)

Do enunciado, temos:

$$\frac{L}{V} = 30\% \Rightarrow \frac{L}{V} = 0{,}30 \Rightarrow L = 0{,}30V \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$0{,}30V = V - C \Rightarrow C = V - 0{,}30V \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C = 0{,}70V$$

Substituindo $C = 420$, obtemos:

$$420 = 0{,}70V \Rightarrow V = 600$$

Portanto, o preço de venda é R$ 600,00.

6 Um produto, cujo preço de custo era R$ 800,00, foi vendido por R$ 980,00. Qual foi a taxa percentual de lucro sobre o preço de custo?

Resolução

Sendo L = lucro; C = preço de custo e V = preço de venda, temos:

$$L = V - C \Rightarrow L = 980 - 800 \Rightarrow L = 180$$

Logo, o lucro foi de R$ 180,00.

Assim, temos: $\frac{L}{C} = \frac{18\cancel{0}}{80\cancel{0}} = 0{,}225 = 22{,}5\%$

Portanto, o lucro sobre o preço de custo foi de 22,5%.

7 Uma pessoa aplicou R$ 3 000,00 à taxa de 2% a.m. durante 5 meses.

a) Quanto receberá de juro se o regime for de juro simples?

b) Que montante terá ao fim dessa aplicação?

Resolução

a) Sendo $C = 3\,000$, $i = 2\% = 0{,}02$ e $t = 5$, temos:

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 3\,000 \cdot 0{,}02 \cdot 5 \Rightarrow J = 300$

Portanto, a pessoa receberá R$ 300,00 de juro.

b) O montante é a soma do capital com o juro:

$M = C + J \Rightarrow M = 3\,000 + 300 \Rightarrow M = 3\,300$

Logo, o montante será R$ 3 300,00.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

11. Amélia fixou em 18% o lucro sobre o preço de aquisição de uma mercadoria. Sabendo que esta custou R$ 250,00, por quanto deverá ser vendida? R$ 295,00

12. Certa mercadoria foi comprada por R$ 860,00. Por quanto deve ser vendida para dar um lucro de 20% sobre o preço de venda? R$ 1 032,00

13. Um comerciante comprou 10 sacas de batatas por R$ 210,00. Por quanto deve vender cada saca para obter um lucro total de 15% sobre o custo? R$ 24,15

14. (Osec-SP) Um comerciante compra um produto por R$ 150,00 e o coloca à venda aplicando 30% a mais sobre o preço de custo. Depois, ele o anuncia com desconto de 10% para pagamento à vista. Determine:

a) o preço do produto para pagamento à vista. R$ 175,50

b) a porcentagem que o comerciante está lucrando na venda à vista desse produto. 17%

15. (Vunesp-SP) A diferença entre o preço de venda anunciado de uma mercadoria e o preço de custo é igual a R$ 2 000,00. Se essa mercadoria for vendida com um desconto de 10% sobre o preço anunciado, dará ainda um lucro de 20% ao comerciante. Determine seu preço de custo. R$ 6 000,00

16. Qual é o juro simples que um capital de R$ 7 000,00 rende quando aplicado:

a) durante 4 meses, a uma taxa de 2,5% a.m.? R$ 700,00

b) durante 1 ano, a uma taxa de 3% a.m.? R$ 2 520,00

c) durante 3 meses, a uma taxa de 0,15% a.d.? R$ 945,00

17. Calcule o juro simples que um capital de R$ 1 800,00 rende à taxa de 2,7% a.m., quando aplicado de 1º de março a 14 de abril de um mesmo ano. R$ 72,90

18. Calcule o capital que se deve empregar à taxa de 6% a.m., a juro simples, para obter R$ 6 000,00 de juro em 4 meses. R$ 25 000,00

19. Determine o montante simples obtido na aplicação de um capital de R$ 12 000,00, à taxa de 1,5% ao mês, pelo prazo de 9 meses. R$ 13 620,00

20. Um capital de R$ 8 000,00, aplicado durante 6 meses, resulta em um montante de R$ 9 200,00. Determine a taxa mensal de juro simples dessa aplicação. 2,5% a.m.

21. (ITA-SP) Uma loja oferece um computador e uma impressora por R$ 3 000,00 à vista ou por 20% do valor à vista como entrada e mais um pagamento de R$ 2 760,00 após 5 meses. Qual é a taxa de juro simples cobrada? 3% a.m.

22. A que taxa mensal deve ser aplicado um capital de R$ 48 000,00 durante 3 meses e 20 dias para produzir R$ 440,00 de juro simples? 0,25% a.m.

23. (ESPM-SP) O sr. Paulo aplicou um certo capital à taxa de juros simples de 4% ao mês durante 3 meses. O montante dessa aplicação, ele reaplicou à taxa de juros simples de 3% ao mês durante 9 meses. Se ele tivesse feito uma única aplicação desse capital a juros simples durante 1 ano, para obter o mesmo rendimento final, a taxa mensal deveria ser de:

a) 3,28%
b) 3,36%
c) 3,43%
X d) 3,52%
e) 3,64%

24. (UFPE) Uma loja de eletrônicos oferece duas opções de pagamento:

- à vista, com 10% de desconto no preço anunciado;
- em duas prestações mensais iguais, sem desconto sobre o preço anunciado, sendo a primeira prestação paga no momento da compra.

Qual a taxa de juros mensais embutida nas vendas a prazo?

X a) 25%
b) 30%
c) 10%
d) 15%
e) 20%

25. (UEM-PR) Três lojas, *A*, *B* e *C*, vendem um mesmo produto cujo preço é R$ 900,00, mas oferecem formas de pagamento diferentes, conforme descrito abaixo.

Loja *A* - Dá um desconto de 10% para pagamento à vista.

Loja *B* - parcela o valor em 2 meses, sem juros, com o primeiro pagamento para 1 mês após a compra.

Loja *C* - Dá um desconto de 10% em metade do valor, que deve ser pago à vista, e deixa o pagamento da outra metade para 1 mês após a compra.

João tem exatamente R$ 900,00 depositados em uma aplicação que lhe rende 10% ao mês. Suponha que João pretenda utilizar esse dinheiro para comprar tal produto e que, feita a escolha da loja, ele irá realizar saques mensais da sua aplicação no dia de vencimento e no valor exato da parcela que deve pagar. Nessa situação, assinale o que for correto.

01) Se João comprar na loja *A*, então, 2 meses após a compra, ele terá R$ 110,00 aplicados.

X 02) Se João comprar na loja *B*, então, exatamente após efetuar o primeiro pagamento, ele terá R$ 540,00 aplicados.

X 04) Se João comprar na loja *C*, então, logo após terminar de pagar pelo produto, restarão a ele R$ 94,50 aplicados.

X 08) Se comprar na loja *B*, João levará mais tempo para pagar o produto, mas, para ele, essa opção é financeiramente melhor do que comprar na loja *C*.

16) Financeiramente, a melhor opção de compra é sempre pagar à vista com desconto, independente de como se pode aplicar o dinheiro.

Juro composto

O regime mais utilizado nas transações financeiras é o de **juro composto**, também conhecido como juro sobre juro.

No regime de juro composto, o valor de juro gerado em um período é incorporado ao capital e passa a participar da composição de juro no período seguinte.

Acompanhe a situação a seguir.

Mariana investiu R$ 800,00 à taxa de 0,8% ao mês, durante 3 meses, no regime de juro composto. Quanto Mariana terá ao fim dessa aplicação?

Pelo regime de juro composto devemos considerar o juro adquirido em cada período e considerá-lo como parte do capital do período posterior. Assim, temos:

- 1º mês: 0,8% de 800 $= 0{,}008 \cdot 800 = 6{,}40$ (juros do 1º mês)
  $800 + 6{,}40 = 806{,}40$ (montante do 1º mês)
  Ao fim do 1º mês Mariana terá R$ 806,40.
- 2º mês: 0,8% de 806,40 $= 0{,}008 \cdot 806{,}40 \simeq 6{,}45$ (juros do 2º mês)
  $806{,}40 + 6{,}45 = 812{,}85$ (montante do 2º mês)
  Ao fim do 2º mês Mariana terá R$ 812,85.
- 3º mês: 0,8% de 812,85 $= 0{,}008 \cdot 812{,}85 \simeq 6{,}50$ (juros do 2º mês)
  $812{,}85 + 6{,}50 = 819{,}35$ (montante do 3º mês)
  Assim, ao fim do 3º mês Mariana terá R$ 819,35.

Observe que a maneira de resolver o problema acima é trabalhosa e necessita de muitos passos para obter a resposta. Imagine se a aplicação de Mariana fosse de 36 meses. Vamos, agora, obter uma fórmula que deixará a resolução mais prática.

Considere *M* o montante de um capital *C* aplicado em um regime de juros compostos a uma taxa *i*.

Como $M = C + J = C + C \cdot i$, temos:

1º período: $M_1 = C + C \cdot i = C(1 + i)$
$M_1 = C(1 + i)$

2º período: $M_2 = M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$
$M_2 = C(1 + i)^2$

3º período: $M_3 = M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1 + i) = C(1 + i)^2(1 + i) = C(1 + i)^3$
$M_3 = C(1 + i)^3$

⋮ ⋮

Em prazos muito extensos torna-se necessária a utilização de uma calculadora científica para o cálculo do montante.

Continuando esse raciocínio até ***t*** períodos, o montante será igual a:

$$M = C(1 + i)^t$$

Observação:

Repare que a fórmula fornece o valor do montante e não o valor do juro. Caso seja necessário, podemos calcular o valor do juro utilizando a fórmula $M = C + J$, pela qual temos que:

$$J = M - C$$

Utilizando a fórmula apresentada para calcular o montante obtido na situação inicial, temos:

$M = C\,(1 + i)^t \Rightarrow M = 800\,(1 + 0{,}008)^3 \Rightarrow M = 800\,(1{,}008)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow M = 800 \cdot 1{,}0242 \Rightarrow M = 819{,}36$

A diferença dos valores obtidos acontece por conta de aproximações durante os cálculos.

Exercícios resolvidos

8 Um investidor aplicou R$ 500 000,00 a juro composto de 2% ao mês. Quantos reais ele terá após 5 meses de aplicação? Qual é o juro obtido?

Resolução

Período	Início	Juros do período	Montante
1	500 000,00	$0,02 \cdot 500\,000,00 = 10\,000,00$	$500\,000,00 + 10\,000,00 = 510\,000,00$
2	510 000,00	$0,02 \cdot 510\,000,00 = 10\,200,00$	$510\,000,00 + 10\,200,00 = 520\,200,00$
3	520 200,00	$0,02 \cdot 520\,200,00 = 10\,404,00$	$520\,200,00 + 10\,404,00 = 530\,604,00$
4	530 604,00	$0,02 \cdot 530\,604,00 = 10\,612,08$	$530\,604,00 + 10\,612,08 = 541\,216,08$
5	541 216,08	$0,02 \cdot 541\,216,08 = 10\,824,32$	$541\,216,08 + 10\,824,32 = 552\,040,40$

Para saber o juro obtido, fazemos:

$M = C + J \Rightarrow J = M - C$

$J = 552\,040,40 - 500\,000,00$

$J = 52\,040,40$

O montante obtido será de R$ 552 040,40 e o juro será R$ 52 040,40.

A maneira de resolver o problema acima é bem trabalhosa e necessita de muitos passos para obter a resposta. Nesses casos, a aplicação da fórmula agiliza os cálculos. Veja:

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 500\,000(1 + 0,02)^5 \Rightarrow M = 552\,040,40$

$J = M - C \Rightarrow J = 552\,040,40 - 500\,000 \Rightarrow J = 52\,040,40$

9 Calcule o juro composto que será obtido na aplicação de R$ 25 000,00 a 25% ao ano, durante 72 meses.

Resolução

Inicialmente, vamos calcular o montante dessa aplicação. Do enunciado, temos:

$C = 25\,000$; $i = 25\%$ a.a. $= 0,25$ a.a.; $t = 72$ meses $= \dfrac{72}{12}$ anos $= 6$ anos

Usando a fórmula do montante, temos:

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 25\,000 \cdot (1 + 0,25)^6 \Rightarrow M = 25\,000 \cdot (1,25)^6 \Rightarrow M = 25\,000 \cdot 3,8147 \Rightarrow M = 95\,367,50$

Como o montante é igual ao capital mais o juro, temos:

$J = M - C \Rightarrow J = 95\,367,50 - 25\,000 \Rightarrow J = 70\,367,50$

Será obtido um juro de R$ 70 367,50.

10 (Vunesp-SP) Um capital de R$ 1 000,00 é aplicado durante 4 meses.

a) Encontre o rendimento de aplicação, no período, considerando a taxa de juro simples de 10% ao mês.

b) Determine o rendimento da aplicação, no período, considerando a taxa de juro composto de 10% ao mês.

Resolução

Do enunciado temos que $C = 1\,000$, $t = 4$ meses e a taxa, em ambos os casos, é $i = 10\%$.

a) Para o cálculo do rendimento no regime de juro simples temos:

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow J = 1000 \cdot 0,1 \cdot 4 = 400$

O rendimento da aplicação ao fim de 4 meses no regime de juro simples será de R$ 400,00.

b) Para o cálculo do montante no regime de juro composto temos:

$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 1000(1 + 0,1)^4 = 1000 \cdot 1,1^4 = 1\,464,1$

Porém como devemos encontrar o rendimento, temos que:

$J = M - C \Rightarrow J = 1\,464,1 - 1\,000 = 464,1$

O rendimento da aplicação ao fim de 4 meses no regime de juro composto será de R$ 464,10.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

26. (Uesc-BA) Em uma aplicação financeira a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, em que foram efetuados três depósitos mensais de R$ 2300,00 cada, o valor acumulado na data do último depósito é igual a:

a) R$ 6900,00
b) R$ 7038,00
x c) R$ 7038,92
d) R$ 7178,76
e) R$ 7178,80

27. Quanto pagará, daqui a 12 meses, uma pessoa que solicite um financiamento de R$ 2500,00, se a taxa de juro composto é de 5% ao mês? R$ 4489,64

28. Um investidor aplicou a quantia de R$ 200000,00 à taxa de juro composto de 2,5% ao mês. Que montante esse capital vai gerar após 6 meses? R$ 231938,68

29. (Vunesp-SP) Cássia aplicou o capital de R$ 15000,00 a juros compostos, pelo período de 10 meses e à taxa de 2% a.m. (ao mês). Considerando a aproximação $(1,02)^5 = 1,1$, Cássia computou o valor aproximado do montante a ser recebido ao final da aplicação. Esse valor é:

a) R$ 18750,00
x b) R$ 18150,00
c) R$ 17250,00
d) R$ 17150,00
e) R$ 16500,00

30. Um investidor quer aplicar R$ 1200,00 por 4 meses a uma taxa de 8% a.m. de juro composto. Que montante terá no fim desse período? R$ 1632,59

31. Hilda aplicou R$ 10000,00 a juros compostos de 20% a.a., capitalizados semestralmente. Que montante terá no fim de 3 anos e 6 meses? R$ 19487,17

32. Qual é o valor a ser aplicado hoje, a uma taxa de juro composto de 2% a.m., para que uma pessoa receba R$ 8000,00 ao fim de 6 meses? R$ 7103,53

33. João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juro composto de 2% ao mês, e escolhe deixar todo seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá esperar:

a) dois meses e terá a quantia exata.
b) três meses e terá a quantia exata.
x c) três meses e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.
d) quatro meses e terá a quantia exata.
e) quatro meses e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

34. César aplicou R$ 12000,00 a juro composto de 6% ao bimestre. Que quantia ele terá após 12 meses de aplicação? R$ 17022,23

35. Qual é o montante que um capital de R$ 4000,00 produz quando aplicado:

a) durante 3 meses, a uma taxa de 4% a.m. de juro composto? R$ 4499,46
b) durante 10 anos, a uma taxa de 2% a.m. de juro composto? R$ 43060,65
c) durante 15 meses, a uma taxa de 0,02% a.d. de juro composto? R$ 4376,66

36. Cláudio aplicou R$ 5000,00, à taxa de 3% ao mês, durante 5 meses. Que montante esse capital vai gerar, se o regime for de juro composto? Quantos reais de juro ele obterá nessa operação? R$ 5796,37; R$ 796,37

37. Celina aplicou R$ 40000,00 em um banco, a juro composto de 16% a.a., capitalizados anualmente. Qual é o juro obtido ao fim de 2 anos? R$ 13824,00

38. (FGV-SP) Uma TV de plasma, cujo valor à vista é R$ 4000,00, pode ser comprada a prazo, num plano de pagamento de duas parcelas, e a primeira, no valor de R$ 2124,00, vence somente 90 dias após a compra. Se o financiamento foi realizado à taxa de juro composto de 10% ao mês, determine o valor da segunda parcela, com vencimento em 120 dias. R$ 3520,00

39. João aplicou seu capital durante 3 anos, à taxa de 12% a.a., no regime de juro simples. Caso houvesse aplicado a juro composto, à mesma taxa, com capitalização semestral, teria recebido R$ 2633,36 a mais. Quanto João recebeu de juro? R$ 16345,00

40. (IFCE) Um capital foi aplicado a uma taxa anual de juros compostos e rende um montante de R$ 2012,85 em 2 anos e um montante de R$ 2314,77 em 3 anos. Indique o valor aproximado do capital investido.

a) R$ 1102,00
b) R$ 1237,00
x c) R$ 1522,00
d) R$ 1933,00
e) R$ 1252,00

41. (FGV-SP) César aplicou R$ 10000,00 num fundo de investimentos que rende juros compostos a uma certa taxa de juro anual positiva *i*. Após um ano, ele saca desse fundo R$ 7000,00 e deixa o restante aplicado por mais um ano, quando verifica que o saldo é R$ 6000,00. O valor de $(4i - 1)^2$ é:

a) 0,01
b) 0,02
c) 0,03
x d) 0,04
e) 0,05

42. O que fazemos hoje será reflexo do futuro que teremos. A educação financeira, desde cedo, é um fator importante para que se tenha maior assertividade ao lidar com o dinheiro. Leia o texto a seguir a respeito de poupança e investimento e faça o que se pede.

PHOTOBUAY/Shutterstock.com

Com o hábito de poupar, a realização de sonhos e objetivos, dentro de um plano financeiro, torna-se mais rápida e possível.

Por que poupar?

Ao poupar, você acumula valores financeiros no presente para serem utilizados no futuro. [...]

Assim, são vários os motivos para poupar: precaver-se diante de situações inesperadas, preparar para aposentar-se, realizar sonhos etc. [...] falamos da importância de elaborar um orçamento, de ser um consumidor consciente, de utilizar o crédito de forma responsável e os juros a seu favor. [...]

Poupança e investimento

[...] poupança é a diferença entre as receitas e as despesas, ou seja, entre tudo que ganhamos e tudo que gastamos.

E investimento? Investimento é a aplicação dos recursos que poupamos, com a expectativa de obtermos uma remuneração por essa aplicação.

Você sabe a diferença entre poupança e caderneta de poupança?

A poupança é uma sobra financeira e deve ser direcionada para algum tipo de investimento para que seja remunerada. A caderneta de poupança ou conta de poupança é um tipo de investimento.

[...]

Para fazer um investimento que atenda a suas necessidades, é importante que você conheça as três características dos investimentos: liquidez, risco (oposto de segurança) e rentabilidade.

Liquidez: refere-se à capacidade de um artigo ou investimento ser transformado em dinheiro, a qualquer momento e por um preço justo. [...]

Risco: é a probabilidade de ocorrência de perdas. [...]

Rentabilidade: é o retorno, a remuneração do investimento. [...]

Objetivos do investimento

O que você pretende fazer com o seu dinheiro? Pagar uma faculdade? Comprar um carro? Comprar uma casa própria? Saber como você pretende utilizar seu dinheiro no futuro é um passo importante para a escolha do tipo de investimento.

Objetivos diferentes podem implicar modalidades diferentes de investimentos, aceitar ou não riscos diferentes e necessidades diferentes de liquidez.

BANCO CENTRAL DO BRASIL **Caderno de Educação Financeira**: gestão de finanças pessoais (Conteúdo básico). Brasília, 2013. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/pre/pef/port/caderno_cidadania_financeira.pdf>. Acesso em 23 dez. 2015.

a) O texto fala a respeito da importância de poupar para o futuro. Que motivos são apresentados no texto para poupar? Você tem outras sugestões para utilizar o dinheiro poupado? Se sim, indique.

b) Pesquise e explique como uma caderneta de poupança gera rentabilidade.

c) Suponha que uma pessoa aplique mensalmente o valor de R$ 500,00 na caderneta de poupança. Considere que o rendimento dessa aplicação é de 0,5% a.m. Se a pessoa iniciar os depósitos em 5 de janeiro e fizer um último depósito em 5 de abril, qual será o montante nessa data? Veja a seção *Resolução* no Manual do Professor.

Explorando a tecnologia

Planilha eletrônica e o cálculo de juro

A planilha eletrônica é uma ferramenta muito útil em situações matemáticas. Com ela, cálculos recorrentes podem ser feitos rapidamente a partir da criação de uma fórmula adequada.

Vamos utilizar a planilha eletrônica do LibreOffice que pode ser baixada no endereço <https://pt-br.libreoffice.org/> (acesso em: 13 jan. 2016).

Após a instalação, acompanhe a seguir como usar uma planilha eletrônica para resolver problemas sobre juro.

Suponha que você tenha um capital (*C*) de R$ 10 000,00 e queira saber o montante (*M*) ao final de um ano, com uma taxa de juro (*i*) igual a 3% a.m. Vamos verificar a diferença do montante se o capital for aplicado em um regime de juro simples ou juro composto. Siga os passos a seguir:

1. Abra uma planilha no LibreOffice, nomeie-a e salve-a.

2. Digite na coluna A, linha 3, a palavra "Mês" e abaixo, o nome dos 12 meses do ano a partir da linha 4. Na coluna B, ao lado do nome dos meses, coloque os números de 1 a 12. Nas colunas C e D, da linha 3, escreva "J. Simples" para juro simples e "J. Composto" para juro composto, respectivamente.
A tela do LibreOffice ficará semelhante à imagem a seguir:

	A	B	C	D
3	Mês		J. Simples	J. Composto
4	Janeiro	1		
5	Fevereiro	2		
6	Março	3		
7	Abril	4		
8	Maio	5		
9	Junho	6		
10	Julho	7		
11	Agosto	8		
12	Setembro	9		
13	Outubro	10		
14	Novembro	11		
15	Dezembro	12		

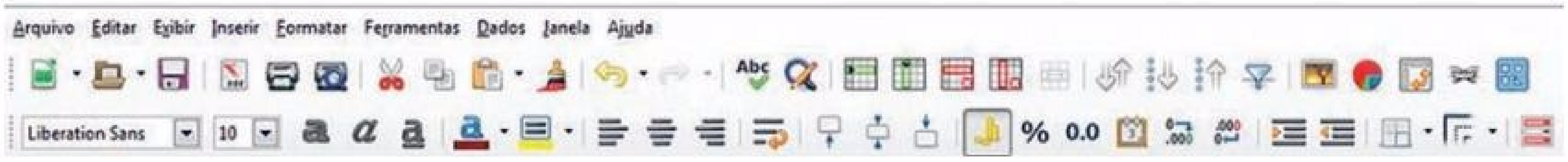
LibreOffice

Conforme estudamos, em uma capitalização simples, a cada mês o montante *M* varia com o tempo (*t*) da seguinte forma: $M = C \cdot (1 + i \cdot t)$, e em uma capitalização composta o montante é: $M = C \cdot (1 + i)^t$. Vamos utilizar essas fórmulas para realizar os cálculos. Vale lembrar que *C* é o capital, que neste caso é R$ 10 000,00, a taxa de juros *i* é 3% ou 0,03 e o tempo (*t*) será representado pelo número correspondente ao mês.

3. Para calcular os juros simples obtidos na sequência de meses devemos escrever uma fórmula que associe o mês ao tempo de aplicação, ou seja: na célula C4 devemos digitar '=10000*(1+0,03*B4)' que associa o mês de janeiro ao tempo de 1 mês; na célula C5 devemos escrever '=10000*(1+0,03*B5)' e assim por diante.

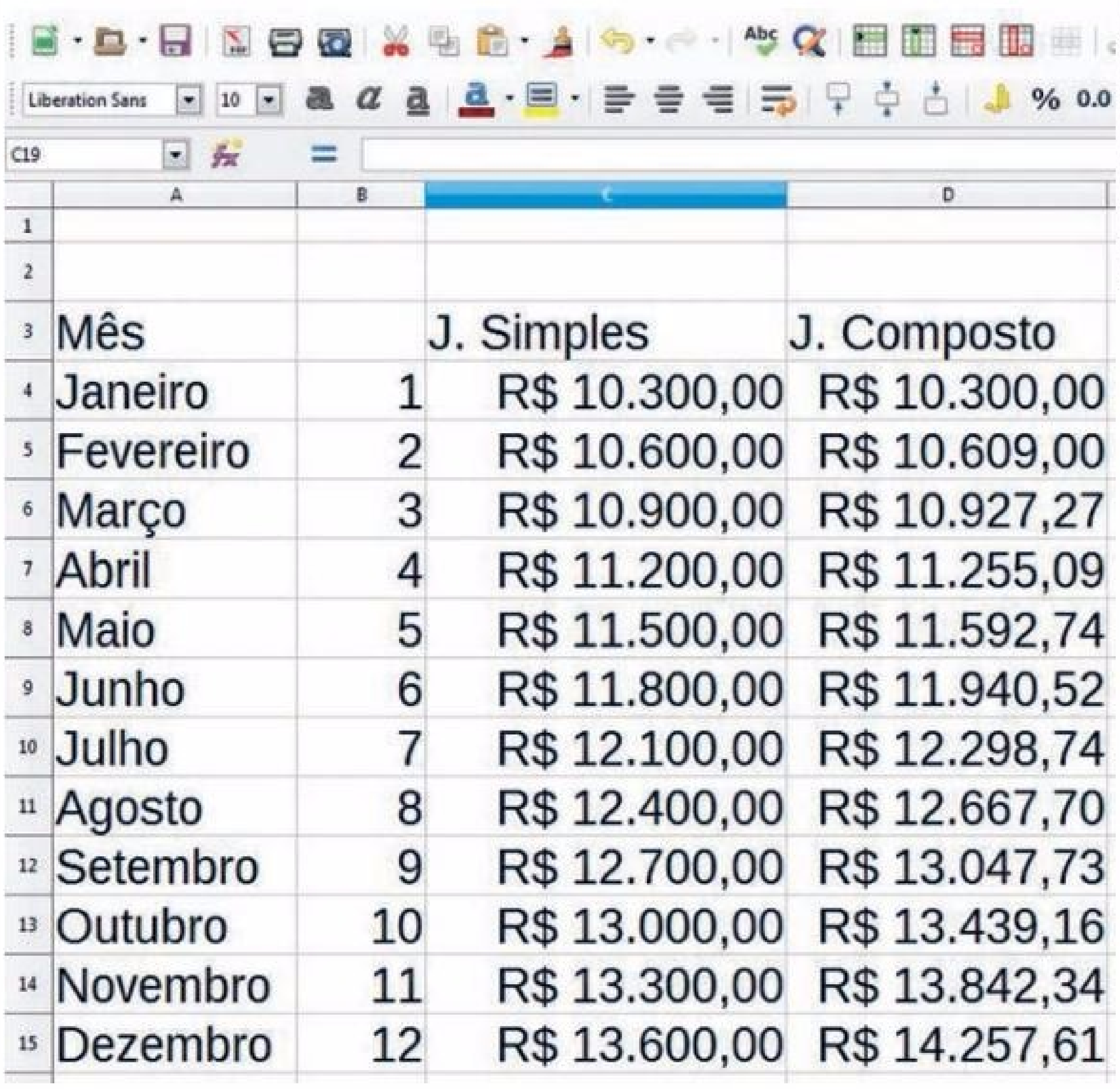
4. Para calcularmos o juro composto devemos utilizar o mesmo procedimento anterior, porém utilizar a fórmula apropriada ao regime, ou seja, na célula D4 digitamos '=10000*(1+0,03)^B4'; na célula D5 '=10000*(1+0,03)^B5' e assim por diante.

Para deixar as células no formato monetário, clique sobre a letra *C* da coluna e, em seguida, acione a tecla **formatar como moeda** conforme mostra a imagem abaixo:



Em seguida, repita o procedimento para a coluna D.

5. O montante de cada capitalização será obtido ao fim de cada mês de aplicação, que poderá ser observado na construção da tabela:



	A	B	C	D
1				
2				
3	Mês		J. Simples	J. Composto
4	Janeiro	1	R$ 10.300,00	R$ 10.300,00
5	Fevereiro	2	R$ 10.600,00	R$ 10.609,00
6	Março	3	R$ 10.900,00	R$ 10.927,27
7	Abril	4	R$ 11.200,00	R$ 11.255,09
8	Maio	5	R$ 11.500,00	R$ 11.592,74
9	Junho	6	R$ 11.800,00	R$ 11.940,52
10	Julho	7	R$ 12.100,00	R$ 12.298,74
11	Agosto	8	R$ 12.400,00	R$ 12.667,70
12	Setembro	9	R$ 12.700,00	R$ 13.047,73
13	Outubro	10	R$ 13.000,00	R$ 13.439,16
14	Novembro	11	R$ 13.300,00	R$ 13.842,34
15	Dezembro	12	R$ 13.600,00	R$ 14.257,61

Crédito de imagens: LibreOffice

Repare que pelo regime de juro composto há um maior rendimento para o mesmo período e taxa.

Atividades

Escreva no caderno

1. Reproduza os passos anteriores, mas agora para uma aplicação de R$ 10 000,00 que uma pessoa fez em um fundo de investimento que paga juro mensal a uma taxa prefixada de 5% a.m. Calcule o montante obtido ao fim de um ano, considerando os dois sistemas: juro simples e juro composto. Juro simples: R$ 16 000,00, e juro composto: R$ 17 958,56.

2. No mês de janeiro os valores do montante para uma capitalização simples ou composta são iguais. Explique o motivo.
Como o mês de janeiro é representado pelo número 1, temos que as fórmulas de juro simples e juro composto são iguais. Portanto, o resultado é igual.

3. Nas situações cotidianas, qual é o regime de juro comumente aplicado? Por que você acredita que isso ocorre?
É mais comum a aplicação do juro composto, pois fornece um maior rendimento para uma mesma taxa e período de tempo quando comparado com o juro simples.

Juro e funções

As fórmulas que determinam os montantes nos regimes de juro simples ou juro composto podem ser associadas a funções que já estudamos. Para explorar essas relações, suponha que um capital de R$ 1 000,00 foi aplicado a uma taxa de 12% ao ano. Vamos calcular o montante obtido ano a ano para os regimes de juro simples e juro composto e analisar os resultados.

Juro simples e função afim

Para calcular o montante ano a ano da aplicação em regime de juro simples vamos utilizar a fórmula $M = C + C \cdot i \cdot t$, substituindo os valores da situação e elaborando uma tabela com os valores de M e t para alguns valores de $t \in \mathbb{N}^*$. Assim:

$$M = C + C \cdot i \cdot t \Rightarrow M = 1\,000 + 1\,000 \cdot 0{,}12 \cdot t \Rightarrow M = 1\,000 + 120t$$

t(anos)	1	2	3	4	5	...
M(reais)	1 120	1 240	1 360	1 480	1 600	...

Os valores do montante obtido ano a ano são termos da progressão aritmética (1 120, 1 240, 1 360, 1 480, 1 600, ...), de razão $r = 120$, que como estudamos no capítulo anterior é uma função afim com domínio nos números naturais não nulos.

Assim, dado o capital e a taxa de juro, o montante obtido pelo regime de juro simples é função do tempo de capitalização e, no exemplo mostrado, é dado por $M = 1000 + 120t$. Então, podemos associar o cálculo do montante em regime de juro simples a uma função afim dada por $M = C + C \cdot i \cdot t$.

Juro composto e função exponencial

Utilizando o mesmo raciocínio, vamos aplicar a fórmula do regime de juro composto $M = C(1 + i)^t$ para a situação e elaborar uma tabela com alguns valores de M e t. Assim:

$$M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 1\,000(1 + 0{,}12)^t \Rightarrow M = 1\,000 \cdot 1{,}12^t$$

t (anos)	1	2	3	4	5	...
M (reais)	1 120	1 254,40	1 404,93	1 573,52	1 762,34	...

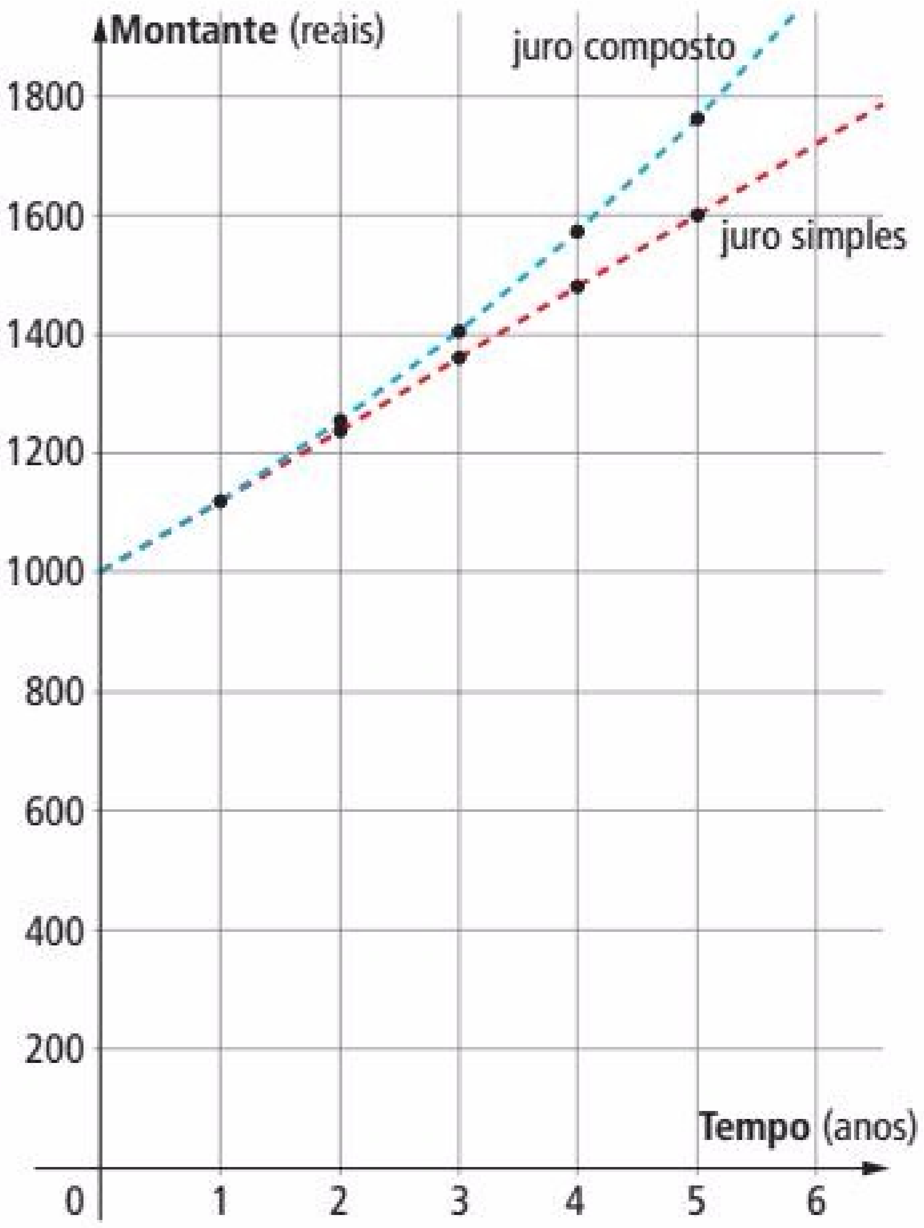
Nesse caso, os valores do montante obtido ano a ano são termos da progressão geométrica (1 120; 1 254,40; 1 404,93; 1 573,52; 1 762,34; ...), de razão $q = 1{,}12$, que como estudamos no capítulo anterior é uma função exponencial com domínio nos números naturais não nulos.

Assim, dados o capital e a taxa de juro, o montante obtido pelo regime de juro composto é função do tempo de capitalização e, no exemplo mostrado, é dado por $M = 1000 \cdot 1{,}12^t$. Então, podemos associar o cálculo do montante em regime de juro composto a uma função exponencial dada por $M = C(1 + i)^t$.

Vamos agora traçar o gráfico das duas funções em um mesmo plano cartesiano e analisar os valores obtidos.

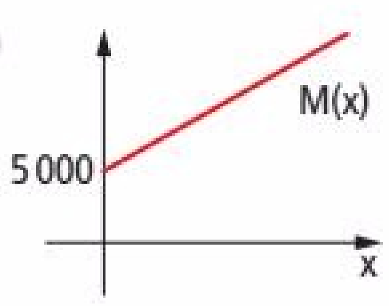
No gráfico estão indicados os pontos pertencentes aos gráficos das funções. Note que não traçamos a reta nem a curva da função exponencial contínuas, pois o domínio de ambas as funções é $\mathbb{N}^*$. O tracejado é apenas para indicar a tendência da curva e auxiliar na visualização dos resultados.

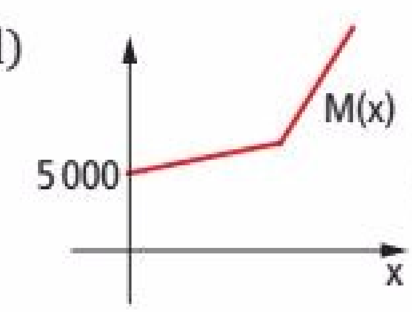
Observando os gráficos, percebemos que para $t = 1$ o montante obtido é o mesmo para os dois regimes de juro. A partir daí, quanto maior é o tempo de capitalização, maior é a diferença entre os montantes obtidos no regime de juro composto e no de juro simples. Assim, para o caso de um investimento, a rentabilidade em regime de juro composto será maior que a rentabilidade em regime de juro simples a partir do segundo período de investimento. Se a situação for de empréstimo, a dívida aumenta mais a cada período, a partir do segundo, no regime de juro composto em relação ao mesmo empréstimo em regime de juro simples.



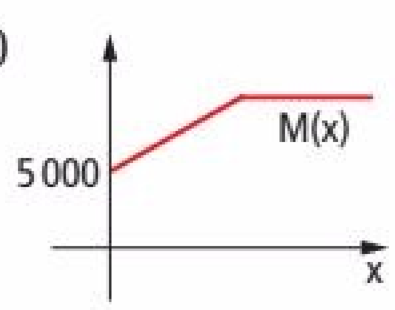
Exercícios resolvidos

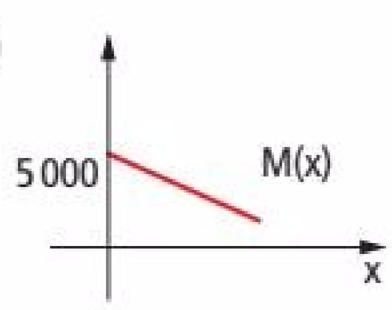
11 (Enem/MEC) Paulo emprestou R$ 5000,00 a um amigo, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considere *x* o número de meses do empréstimo e M(x) o montante a ser devolvido para Paulo no final de *x* meses. Nessas condições, a representação gráfica correta de M(x) é:

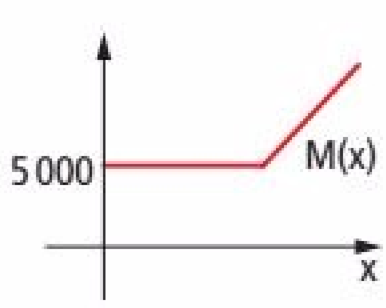
a)


d)


Ilustrações: Editoria de arte

b)


e)


c)


Resolução

Sabemos que $M = C + J$.

Do enunciado, percebemos que o montante M(x) é uma função do tempo *x*.

Sendo $i = 3\%$ a.m. e $C = 5\,000$, temos:

$$M(x) = C + C \cdot i \cdot t \Rightarrow M(x) = 5000 + 50\cancel{00} \cdot \frac{3}{1\cancel{00}} \cdot x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M(x) = 5\,000 + 150x$$

Essa é uma função afim crescente ($a = 150 > 0$) e seu gráfico intersecta o eixo vertical no ponto $(0, 5000)$.

Logo, seu gráfico é parte de uma reta crescente, pois o tempo nunca é negativo ($x \geqslant 0$).

Portanto, a representação gráfica de M(x) está mostrada na alternativa **a**.

12 Jorge quer aplicar R$ 6000,00 com o objetivo de, após 15 meses, obter um montante de R$ 9348,00. A que taxa mensal de juro composto deve aplicar esse capital?

Resolução

Os dados do problema são: $C = 6000$, $M = 9348$ e $t = 15$ meses.

Usando a fórmula do montante, temos:

$$M = C(1 + i)^t \Rightarrow 9\,348 = 6\,000(1 + i)^{15}$$

$$(1 + i)^{15} = \frac{9\,348}{6\,000} \Rightarrow (1 + i)^{15} = 1{,}558$$

Usando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos:

$$\log (1 + i)^{15} = \log 1{,}558 \Rightarrow 15 \cdot \log (1 + i) = \log 1{,}558$$

Assim, temos:

$$15 \cdot \log (1 + i) = 0{,}19257 \Rightarrow \log (1 + i) = 0{,}01284 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + i = 10^{0{,}01284} \Rightarrow 1 + i = 1{,}03 \Rightarrow i = 0{,}03 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow i = 3\%$$

Jorge deve aplicar seu capital à taxa de 3% a.m.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

43. Uma pessoa aplicou R$ 18 000,00 à taxa de juro composto de 2,8% ao mês e obteve um rendimento de R$ 6 390,00. Qual o prazo dessa aplicação? $\simeq$ 11 meses.

44. Um investidor aplicou R$ 80 000,00 a juro composto de 2,2% ao mês.

a) Daqui a quantos meses, aproximadamente, terá um montante de R$ 85 400,00? 3 meses.

b) Após quantos anos terá um montante de R$ 134 868,80? 2 anos.

45. Qual é o tempo necessário para que um capital colocado a juro composto de 5% ao mês:

a) duplique? 14 meses e 6 dias. b) triplique? 22 meses e 16 dias.

46. Qual é a taxa mensal de juro composto que, aplicada ao capital de R$ 24 000,00, o transforma em um montante de R$ 36 087,00 em 7 meses? 6% ao mês.

47. (Cespe/UnB-DF) Um cliente tomou R$ 20 000,00 emprestados de um banco que pratica juros compostos mensais e, após 12 meses, pagou R$ 27 220,00. Nesse caso, considerando 1,026 como valor aproximado para $1{,}361^{\frac{1}{12}}$ é correto afirmar que a taxa de juros nominal, anual, praticada pelo banco foi igual a:

a) 30,2%
x b) 31,2%
c) 32,2%
d) 33,3%
e) 34,2%

48. (UFPel-RS) Um dos motivos que leva as pessoas a enfrentarem o problema do desemprego é a busca, por parte das empresas, de mão de obra qualificada, dispensando funcionários não habilitados e pagando a indenização a que têm direito. Um funcionário que vivenciou tal problema recebeu uma indenização de R$ 57 000,00 em três parcelas, em que a razão da primeira para a segunda é de $\frac{4}{5}$ e a razão da segunda para a terceira, de $\frac{6}{12}$.

(Dados: $\log 1{,}06 = 0{,}0253$; $\log 1{,}01 = 0{,}0043$.)

Com base no texto e em seus conhecimentos, determine:

a) o valor de cada parcela; R$ 12 000,00; R$ 15 000,00; R$ 30 000,00

b) o tempo necessário para que o funcionário aplique o valor da primeira parcela, a juro composto, a uma taxa de 1% ao mês, para acumular um montante de R$ 12 738,00; $\simeq$ 6 meses.

c) a taxa mensal que deve ser aplicada, a juro simples, à segunda parcela, para que o funcionário, no final de 2 anos, obtenha o montante de R$ 25 800,00. 3% a.m.

49. (UFS-SE) Para analisar a veracidade das afirmações abaixo, considere que para estimar o crescimento populacional dos municípios de certo Estado é usada a expressão $P(t) = P(0) \cdot (1 + i)^t$, em que P(0) é a população considerada em certo ano, P(t) a população observada *t* anos depois e *i* a taxa anual de crescimento da população.

F I – Se em 2004 um município desse Estado tinha 50 000 habitantes e, a partir desse ano, a população aumentou anualmente à taxa de 2%, então em 2007 tal município deverá ter 50 604 habitantes.

F II – Sabe-se que, anualmente, a população de um município *X* cresce à taxa de 2%, enquanto que a de um município *Y* cresce à taxa de 5%. Se hoje *X* e *Y* têm, respectivamente, 19 600 e 28 900 habitantes, daqui a dois anos a razão entre seus respectivos números de habitantes será $\frac{2}{5}$.

V III – Atualmente, os municípios *X* e *Y* têm 129 600 e 122 500 habitantes, respectivamente. Supondo que a população de *X* cresça a uma taxa anual de 5% e a de *Y* cresça a uma taxa anual de 8%, então daqui a dois anos *X* e *Y* terão o mesmo número de habitantes.

F IV – A taxa anual de crescimento da população de um município pode ser calculada pela expressão

$$i = \frac{\log P(t) - \log P(0)}{t} - 1$$

V V – Se atualmente um município tem 44 100 habitantes e nos últimos cinco anos sua população cresceu à taxa anual de 5%, então há dois anos o seu número de habitantes era menor que 42 000.

50. (IFSul-RS) O cálculo de juros compostos pode ser definido pela função exponencial $J = C[(1 + i)t - 1]$, onde *J* é o valor dos juros, *C* é o capital inicial, *i* é a taxa de juro na forma unitária e *t* é o tempo, que deve ter a mesma unidade da taxa.

Supondo que uma instituição financeira pague juro a uma taxa de 0,78% ao mês, ao aplicar um capital de R$ 8 500,00, o valor do juro acumulado, após um ano da aplicação, será de

a) R$ 66,30
b) R$ 663,00
x c) R$ 830,63
d) R$ 12 433,61

Exercícios complementares

Escreva no caderno

1. Sabendo que $\log_2 8$, $\log_2 (x + 9)$ e $\log_2 (x + 7)$ são as medidas, em centímetro, dos lados de um triângulo e, nessa ordem, estão em progressão aritmética, qual o perímetro desse triângulo? 6 cm

2. Quantos termos tem a PA (5, 10, ..., 785)? 157 termos.

3. (UFPE) Quantos números existem entre 1 995 e 2 312 divisíveis por 4 e não divisíveis por 200? 77 números.

4. (Fuvest-SP) Seja $x > 0$, tal que a sequência $a_1 = \log_2 x$, $a_2 = \log_4 (4x)$, $a_3 = \log_8 (8x)$ forme, nessa ordem, uma progressão aritmética. Então, $a_1 + a_2 + a_3$ é igual a:

a) $\frac{13}{2}$
x b) $\frac{15}{2}$
c) $\frac{17}{2}$
d) $\frac{19}{2}$
e) $\frac{21}{2}$

5. (Udesc-SC) A soma dos quatro primeiros termos da sequência $a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 2n$, se $n \geqslant 2$, é:

a) 45
b) 36
c) 61
d) 22
x e) 40

6. Calcule o valor de *S*, sendo:

$S = \log_4 2^1 + \log_4 2^3 + \log_4 2^5 + ... + \log_4 2^{199}$ 5 000

7. Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora. A partir da segunda hora, os preços caem em progressão aritmética até a sétima hora. O valor da segunda hora é R$ 4,00 e o da sétima é R$ 0,50. Quanto gastará o proprietário de um automóvel estacionado 5 horas nesse local? R$ 17,80

8. (UFSC) Se *a*, *b*, *c* são termos consecutivos de uma PA de razão 5 e $(a + 2)$, b, $(c - 1)$ são termos consecutivos de uma PG, qual o valor de $a + b + c$? 36

9. A soma de três números positivos em PA é 30. Se a esses números forem acrescentados 1, 4 e 14, respectivamente, os novos números estarão em PG. Determine os três números positivos. 6, 10 e 14.

10. Um empréstimo de R$ 1 800,00 foi parcelado em 12 vezes. As parcelas sofrem um aumento de 2,5% em relação à anterior. Qual será o valor da décima prestação? (Dado: $1{,}025^9 \simeq 1{,}25$.) R$ 187,50

11. (Unilasalle-RS) O novo *site* de uma empresa foi inaugurado no primeiro dia do mês de dezembro e recebeu 3 acessos. No segundo dia teve 9 acessos, no terceiro dia, 27 acessos, e assim por diante. Em que dia de dezembro obteve 2 187 acessos?

a) 6
x b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

12. Uma obra de arte foi comprada por um investidor por R$ 8 000,00. O investidor espera uma valorização de 10% ao ano.

a) Escreva no caderno uma fórmula que represente a valorização exponencial dessa obra de arte, em função do tempo *t* em anos. $V = 8\,000 \cdot (1{,}1)^t$

b) Qual o valor da obra, 6 anos após a data da compra? R$ 14 172,49

13. Quantos termos devemos considerar na PG (3, 6, ...) para obter 765 como soma de termos? 8 termos.

14. (UFPA) Uma colônia de bactérias dobra de número a cada dia. Supondo que cada bactéria consuma uma unidade alimentar (u.a.) por dia, uma colônia que comece no primeiro dia com 10 000 bactérias consumirá, nos 10 primeiros dias, cerca de:

a) 256 000 u.a.
b) 1 024 u.a.
x c) 10 230 000 u.a.
d) 956 300 u.a.
e) 1 024 000 000 u.a.

15. (UFJF-MG) Um aluno do curso de Biologia estudou durante nove semanas o crescimento de uma determinada planta, a partir de sua germinação. Observou que, na primeira semana, a planta havia crescido 16 mm. Constatou ainda que, em cada uma das oito semanas seguintes, o crescimento foi sempre a metade do crescimento da semana anterior. Dentre os valores abaixo, o que melhor aproxima o tamanho dessa planta, ao final dessas nove semanas, em milímetros, é:

a) 48
b) 36
x c) 32
d) 30
e) 24

16. (PUC-RS) O valor de *x* na equação

$x + \frac{3}{4}x + \frac{9}{16}x + ... = 8$ é:

a) 6
b) 4
x c) 2
d) 1
e) $\frac{3}{4}$

17. Os raios de infinitos círculos são dados pelos termos da progressão $\left(6, 3, \frac{3}{2}, ...\right)$. Calcule a soma das áreas desses círculos. $S = 48\pi$

18. (FGV-SP) É dada a progressão geométrica infinita (45, 15, 5, ...).

a) Ache a soma de seus termos. 67,5

b) Obtenha o menor valor de *n*, de modo que o enésimo termo a_n seja menor que $\frac{1}{30}$. (Adote os valores $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$.) $n = 8$

19. (UFJF-MG) Uma bola de borracha cai de uma altura de 30 metros. Após o choque com o solo, a bola sobe a uma altura igual a $\frac{1}{3}$ da altura anterior. Se deixarmos a bola subir e descer sem interrupção, qual será a distância total percorrida por ela? 60 metros.

20. (EsPCEx-SP) O valor de revenda de um carro é dado por $V(t) = V_0(0,8)^t$, em que V_0 é o valor inicial e $V(t)$ é o valor após *t* anos de uso. A alternativa que mais se aproxima do percentual de desvalorização desse carro, em relação ao valor inicial, após 3 anos exatos de uso, é:

a) 24% b) 47% X c) 49% d) 50% e) 51%

21. (UFPE) Em um exame de vestibular, 30% dos candidatos eram da área de Ciências Sociais. Dentre estes candidatos, 20% optaram pelo curso de Administração. Indique a percentagem, relativa ao total de candidatos, dos que optaram por Administração. 6%

22. (Unimontes-MG) A que taxa mensal de juros simples um capital de R$ 500,00, aplicado durante 10 meses, produz R$ 150,00 de juros? 3% a.m.

23. (Epcar-MG) À taxa anual de 15%, em que tempo, aproximadamente, o capital R$ 8000,00 produz R$ 3600,00 de juros simples?

a) 2 anos c) 4 anos e) 6 anos
X b) 3 anos d) 5 anos

24. (Ufop-MG) José deposita mensalmente em um fundo, a partir de 1º de janeiro, a quantia de 200 reais, a juros simples de 1,5% ao mês. Calcule o seu montante no fim de um ano, para um total de 12 depósitos. R$ 2433,00

25. (Unitau-SP) Um investidor aplicou R$ 5000,00 em caderneta de poupança no dia 1/6. No dia 1/7, foi creditado o rendimento referente ao mês de junho, que foi de 1%. No dia 1/8, foi creditado o rendimento do mês de julho, que foi de 2%. Calcule:

a) o percentual total de rendimento para o período de 1/6 a 1/8. 3,02%

b) o saldo na caderneta de poupança em 1/8. R$ 5151,00

26. (UEG-GO) José emprestou certo capital a seu "amigo", à taxa de 4% ao mês e no regime de juros compostos. Ao final de dois meses, o "amigo" quitou a dívida, pagando a José R$ 4189,50. Qual foi o valor que José emprestou ao "amigo"? R$ 3873,43

27. (Unifor-CE) A expressão $M = A \cdot (1 + i)^n$ permite o cálculo do montante produzido por um capital *A*, aplicado a juros compostos e à taxa unitária *i*, ao final de *n* períodos. Assim, se o capital de R$ 1370,00 for aplicado à taxa anual de 25%, ao final de quantos anos ele produzirá o montante de R$ 5480,00? (Use: $\log 2 = 0,30$)

X a) 6 c) 4 e) 2
b) 5 d) 3

Retomando e pesquisando

Escreva no caderno

Na abertura desta unidade você conheceu um pouco mais sobre a história e a evolução dos calendários, observando a necessidade da criação do ano bissexto.

O ano solar, ou ano trópico, corresponde ao tempo decorrido entre duas passagens consecutivas do Sol por um ponto da trajetória aparente do Sol, chamado de ponto vernal. O ano trópico é o que regula as quatro estações do ano: primavera, verão, outono e inverno.

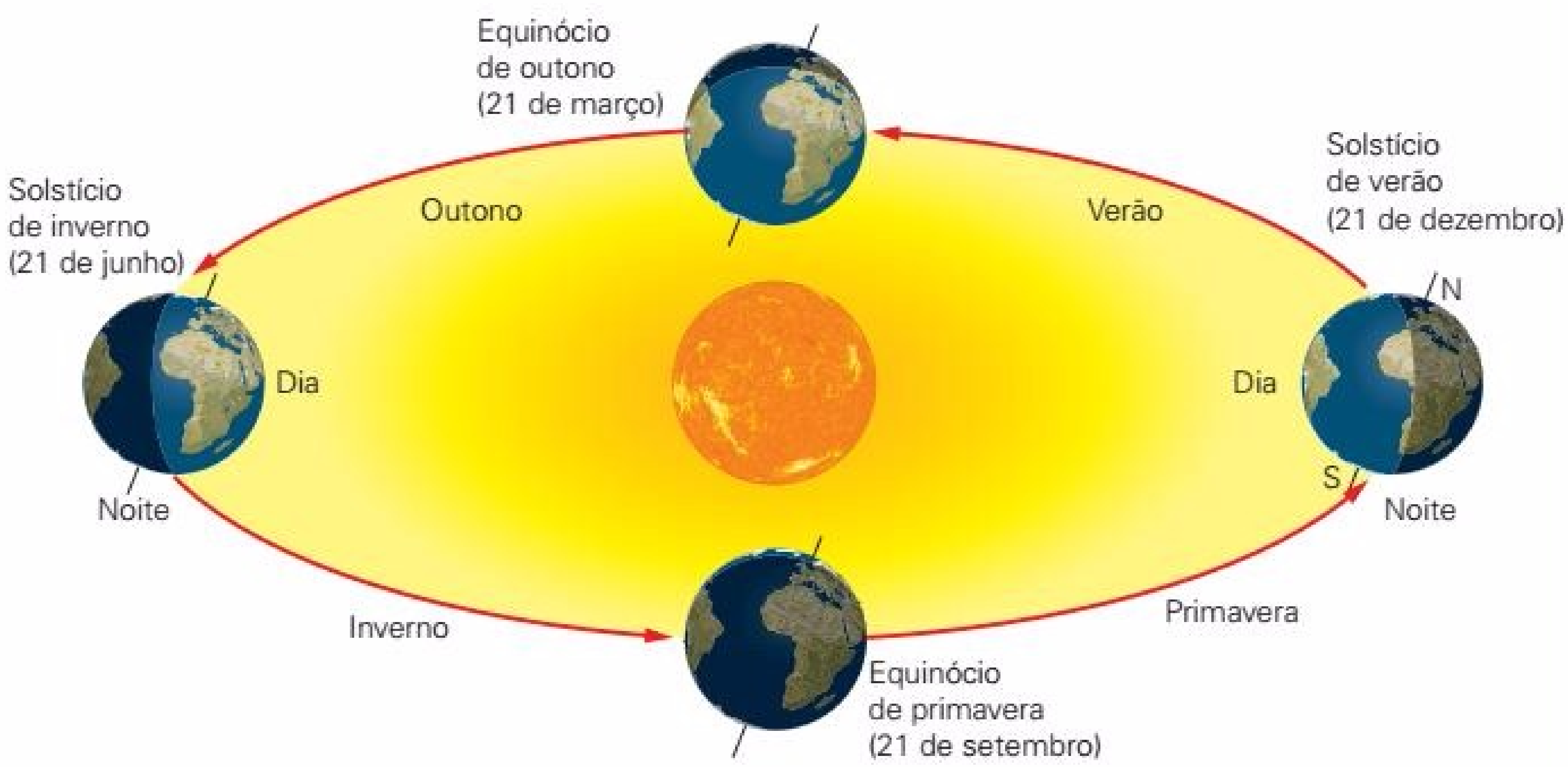
Ao longo desse período, algumas posições entre a Terra e o Sol têm nomenclaturas específicas, a saber:

- **Equinócio** – posição em que o dia e a noite possuem a mesma duração. Ocorre duas vezes por ano, em março e em setembro.
- **Solstício de verão** – posição em que o dia é o mais longo do ano. Sua ocorrência varia de acordo com o hemifério da Terra, sendo em dezembro para o hemisfério sul e em junho para o hemisfério norte.
- **Solstício de inverno** – posição em que a noite é a mais longa do ano. Sua ocorrência se inverte em relação ao solstício de verão, sendo em junho para o hemisfério sul e em dezembro para o hemisfério norte.

A duração média de um ano no calendário gregoriano (utilizado atualmente) é de 365,2425 dias. Essa duração é maior do que a do ano solar, que é de 365,24219 dias, com uma diferença de apenas 0,124 dia a cada 4 séculos. Entretanto, essa pequena diferença é suficiente para distorções em longo prazo.

Solstício e equinócio

- **20 a 21 de março:** equinócio: primavera (norte) / outono (sul)
- **21 de junho:** solstício: verão (norte) / inverno (sul)
- **21 a 23 de setembro:** equinócio: outono (norte) / primavera (sul)
- **21 de dezembro:** solstício: inverno (norte) / verão (sul)



Luís Moura

Fonte: WORLD Atlas: reference. 8. ed. London: Dorling Kindersley, 2010, p. xxi.
Imagem ilustrativa dos solstícios e dos equinócios com as respectivas datas para o hemisfério sul.
As cores são meramente ilustrativas.
A representação está fora de proporção e a órbita está alongada pelo desenho em perspectiva.

Utilize essas informações e seus conhecimentos a respeito dos conteúdos desta Unidade para realizar as atividades a seguir.

1. Retome as informações a respeito do calendário Juliano, apresentadas na abertura desta unidade e responda às questões a seguir.

a) Podemos dizer que os anos bissextos do calendário Juliano, que ocorriam a cada 4 anos, formam uma progressão? Em caso positivo, identifique-a e calcule sua razão. Veja o Manual do Professor.

b) O calendário Juliano foi criado em 45 a.C. Supondo que esse calendário tenha validade apenas para os anos subsequentes a ele e que o ano 44 a.C. tenha sido bissexto, qual é o termo geral da progressão formada pelos anos bissextos, segundo o calendário Juliano? Considere 44 a.C. como -44.

2. A duração do ano no calendário Gregoriano, utilizado atualmente como ano civil, acarreta excessos em relação aos anos solares, conforme explicado no texto. A partir disso, responda às questões a seguir.

a) Como podemos escrever o acúmulo desse excesso de 0,124 dia a cada 4 séculos ao longo do tempo na forma de uma PA? Considere o primeiro termo da PA como 0,124 e n dado em períodos de quatro séculos.

b) Após quantos períodos de quatro séculos, aproximadamente, esse excesso no calendário Gregoriano completará 1 dia?

c) O valor obtido no item **b** equivale a quantos anos, isto é, a cada quantos anos, aproximadamente, o acúmulo desses excessos totaliza 1 dia?

3. O Sol da meia-noite é um fenômeno natural observável ao norte do Círculo Polar Ártico e ao sul do Círculo Polar Antártico, em que o Sol é visível 24 horas por dia, nas datas próximas ao solstício de verão. Você já conhecia esse fenômeno? Pesquise por que ele ocorre e determine em qual estação ele acontece.

LightRocket/Getty Images

Unidade 6

Introdução à Trigonometria

O monte Everest está localizado na Cordilheira do Himalaia, entre o Nepal e o Tibet, e sua altitude suscita discussões. Em 1852, foi identificado como a montanha mais alta do mundo pelo matemático e topógrafo indiano Radhanath Sikdar. Segundo o governo indiano, em medição realizada em 1955, sua altitude é de 8 848 m. Porém, recentemente, utilizando a tecnologia GPS, cientistas obtiveram a altitude de 8 850 m.

Sua altura varia ao longo do ano devido à espessura da camada de neve depositada em sua superfície. Sabe-se ainda, que a altura do monte Everest se eleva poucos milímetros a cada ano, em razão da ação geológica.

O nome Everest é uma homenagem ao geodesista e explorador inglês Sir George Everest, que fez o levantamento trigonométrico e mapeou a região. Antes conhecido como pico XV, passou a chamar-se Everest em 1865.

Desde 1921, muitos alpinistas desafiam seus próprios limites em busca de escalar o monte Everest. Nesse período, muitos obtiveram sucesso, entretanto outros não, devido às inúmeras adversidades presentes, como a altitude, o clima hostil (baixa temperatura, nevascas, tempestades), ar rarefeito, entre outros fatores. Em 1953, os primeiros alpinistas chegaram ao cume.

Fotografia do monte Everest, considerado o mais alto do mundo, em 27 de nov. de 2015.

1. Você já conhecia o monte Everest e sua altitude? Compare essa altura ao prédio mais alto do mundo. Quantas vezes o monte Everest é mais alto que esse prédio?
Veja o Manual do Professor.

Escreva no caderno

2. A altura do monte Everest varia poucos milímetros a cada ano, devido à ação geológica. Pesquise em livros e na internet e explique brevemente como isso ocorre.

3. Pesquise quais são os três pontos mais altos do Brasil, onde estão localizados e monte um painel para ser apresentado à turma.

CAPÍTULO 11

Proporcionalidade e semelhança

Com os avanços tecnológicos e as necessidades que vão surgindo à medida que a sociedade se transforma, novas profissões são criadas, e outras podem desaparecer. Há ainda aquelas que vão mudando ao longo do tempo para se adaptar à realidade.

Um bom exemplo são os profissionais responsáveis por realizar medições de terras. No Egito antigo, os agrimensores, ou esticadores de corda (recebiam esse nome porque usavam cordas com nós localizados em intervalos regulares como instrumento de medição), demarcavam os terrenos localizados à beira do Nilo toda vez que ocorria uma enchente e as demarcações das propriedades desapareciam. Eles utilizavam conhecimentos geométricos para realizar esse trabalho.

Com o passar do tempo, essa profissão evoluiu e a sua competência também aumentou. Atualmente, o topógrafo não só é responsável pelas medidas ou dimensões de um lote, mas também de toda descrição detalhada e minuciosa da superfície de um terreno.

Com a evolução dos instrumentos de trabalho, como computadores e GPS, o topógrafo teve suas tarefas facilitadas, mas a necessidade de conhecer conteúdos e conceitos matemáticos, especialmente os geométricos, ainda se mantém.

Neste capítulo, vamos estudar alguns desses conceitos.

Proporcionalidade

Segmentos de reta proporcionais

Você provavelmente já estudou no Ensino Fundamental que podemos comparar dois segmentos de reta por meio do quociente entre as respectivas medidas desses segmentos de reta, tomadas na mesma unidade. A esse quociente damos o nome de **razão**. Por exemplo, a razão entre as medidas de dois segmentos de reta, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, de medidas respectivamente iguais a 16 cm e 80 cm, é dada por:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{16}{80} = \frac{1}{5} \text{ ou } 0{,}2$$

Dizemos que a razão entre AB e CD é $\frac{1}{5}$ ou 0,2. A ordem de leitura e escrita de uma razão é importante. Assim, a razão entre CD e AB é $\frac{80}{16} = 5$, ou seja, se $AB \neq CD$, temos que $\frac{AB}{CD} \neq \frac{CD}{AB}$.

Agora, considere os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$. Dizemos que, nesta ordem, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ são **proporcionais** se, e somente se, a razão entre as medidas dos dois primeiros segmentos de reta for igual à razão entre as medidas dos dois últimos, ou seja:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}$$

Observação:

A notação $\overline{AB}$ indica o segmento de reta com extremidades nos pontos *A* e *B*. A medida desse segmento de reta é indicada por AB ou med($\overline{AB}$).

CandyBox Images/Shutterstock.com

Topógrafo efetuando medições em um terreno.

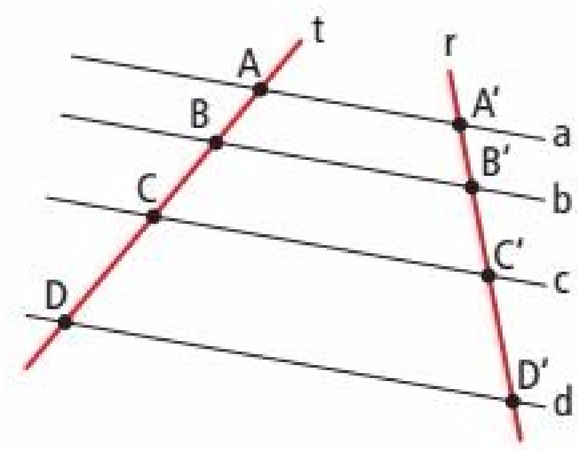
Feixe de retas paralelas

Duas ou mais retas paralelas entre si, pertencentes a um mesmo plano, formam um **feixe de retas paralelas**.

Uma reta que corta esse feixe de paralelas é chamada **reta transversal**.

Na figura ao lado, as retas *a*, *b*, *c* e *d* formam um feixe de retas paralelas e as retas *r* e *t* são as transversais. Além disso, definimos:

- *A* e A', são **pontos correspondentes**, assim como *B* e B', *C* e C', *D* e D'.
- $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$ são **segmentos correspondentes**, assim como $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, $\overline{BD}$ e $\overline{B'D'}$ etc.



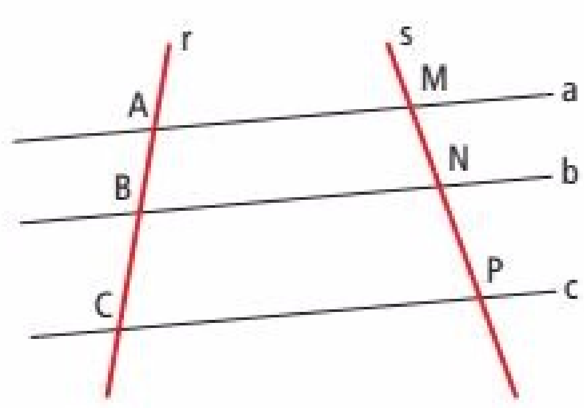
a // b // c // d

Ilustrações: Editoria de arte

Teorema de Tales

O **teorema de Tales** estabelece a relação entre os segmentos de reta determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas retas transversais.

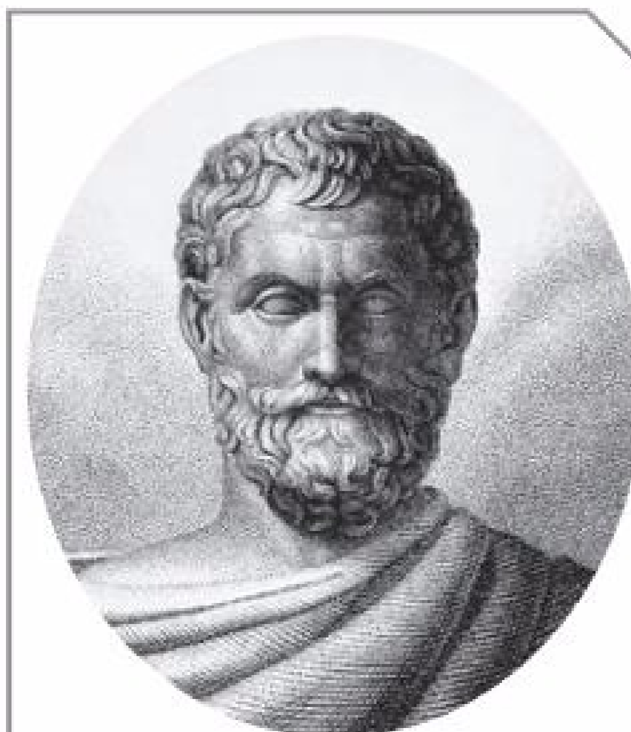
Se um feixe de retas paralelas é cortado por duas transversais, então dois segmentos quaisquer de uma delas são proporcionais aos segmentos correspondentes da outra.



$$a \,//\, b \,//\, c \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{MN}{NP}$$

Com base na figura acima, podemos considerar outras proporções, como:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MN}{MP} \quad \text{ou} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{NP}{MP}$$



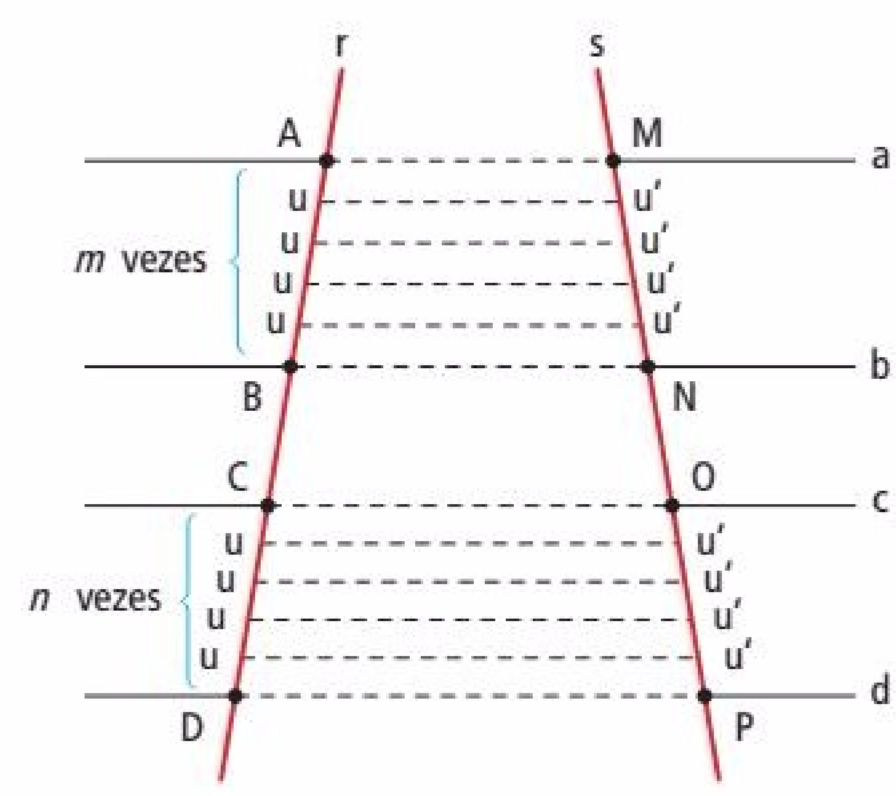
Corbis/Fotoarena

Tales, matemático e filósofo que viveu no século VI a.C., era natural da cidade de Mileto, na Grécia, por isso ficou conhecido como Tales de Mileto.

Demonstração

Vamos demonstrar esse teorema para o caso em que os segmentos são comensuráveis, ou seja, segmentos cujas medidas podem ser expressas por uma quantidade inteira de certa unidade. No entanto, o teorema de Tales também é válido para segmentos de reta de medida incomensurável.

Considere um feixe de retas paralelas cortado por duas retas transversais *r* e *s*, como mostra a figura ao lado.



Vamos supor que exista um segmento de medida *u* e dois números inteiros *m* e *n* tais que:

$$\begin{cases} AB = m \cdot u \\ CD = n \cdot u \end{cases}$$

Estabelecendo a razão $\frac{AB}{CD}$, temos: $\frac{AB}{CD} = \frac{m \cdot u}{n \cdot u} = \frac{m}{n}$. (I)

Traçando retas paralelas ao feixe, pelos pontos que dividem AB e CD, dividimos MN e OP, respectivamente, em *m* e *n* partes iguais a u'. Assim, temos:

$$\frac{MN}{OP} = \frac{m \cdot u'}{n \cdot u'} = \frac{m}{n} \quad \text{(II)}$$

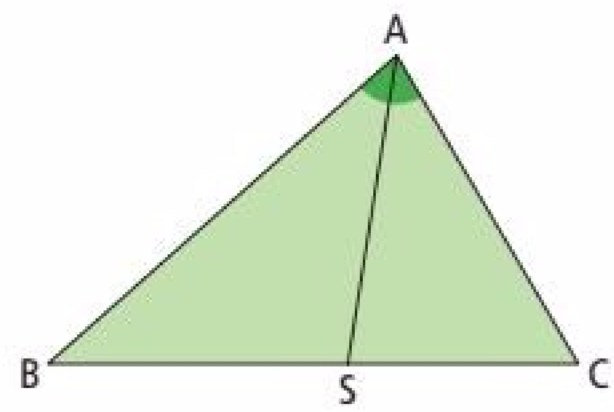
Comparando (I) e (II), obtemos: $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{OP}$

Teorema da bissetriz interna de um triângulo

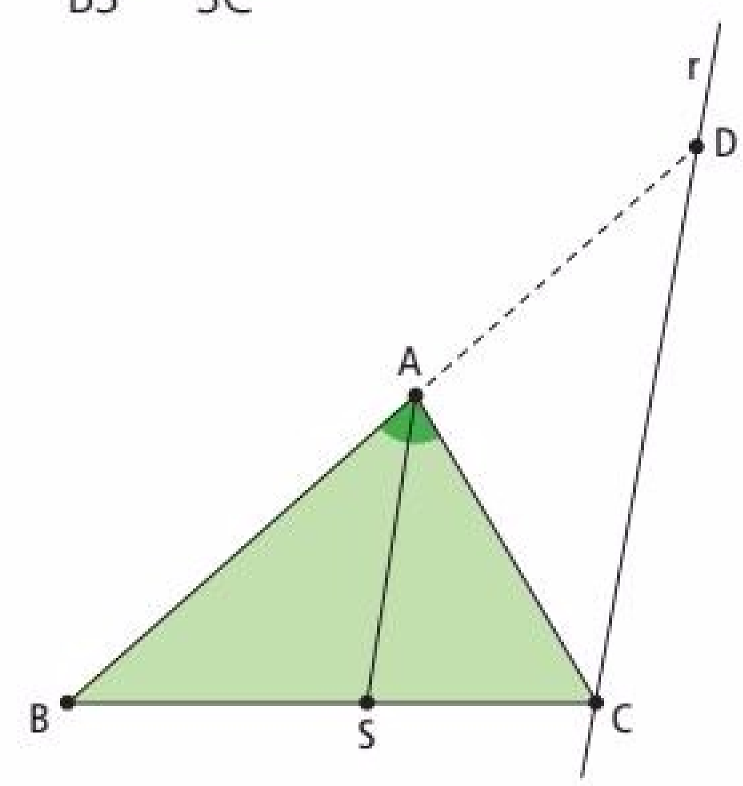
A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo determina, sobre o lado oposto, segmentos de reta que são proporcionais aos lados do triângulo que formam o ângulo considerado.

No triângulo ABC abaixo, se $\overline{AS}$ é bissetriz do ângulo interno $\hat{A}$, então:

Ilustrações: Editoria de arte



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BS}{SC} \text{ ou } \frac{AB}{BS} = \frac{AC}{SC}$$



Para demonstrar esse teorema vamos utilizar o teorema de Tales. Assim, considere uma reta *r* paralela à bissetriz AS passando pelo vértice *C*. Prolongando o lado AB, determinamos o ponto *D*, que é a intersecção de $\overline{AB}$ com a reta *r*. A reta *r* e a reta suporte da bissetriz AS formam um feixe de retas paralelas e as retas suporte dos lados AB e BC são transversais a esse feixe, como mostra a imagem ao lado.

Pelo teorema de Tales, temos que $\frac{AB}{AC} = \frac{BS}{SC}$ (I)

Agora, vamos observar os ângulos formados nessa construção e indicados na figura abaixo:

Demonstração

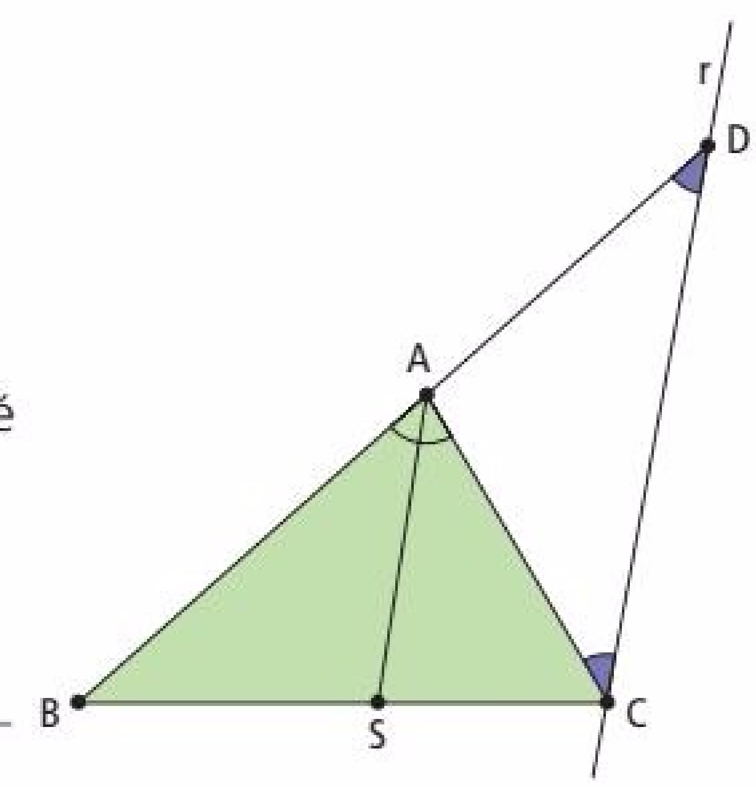
- $B\hat{A}S \cong S\hat{A}C$, pois AS é a bissetriz de $B\hat{A}C$.

  símbolo de congruência
- $B\hat{A}S \cong A\hat{D}C$, pois são ângulos correspondentes.
- $S\hat{A}C \cong A\hat{C}D$, pois são ângulos alternos internos.

Dessas relações concluímos que $A\hat{D}C \cong A\hat{C}D$. Assim, o triângulo ACD é isósceles de base CD e então AC = AD (II).

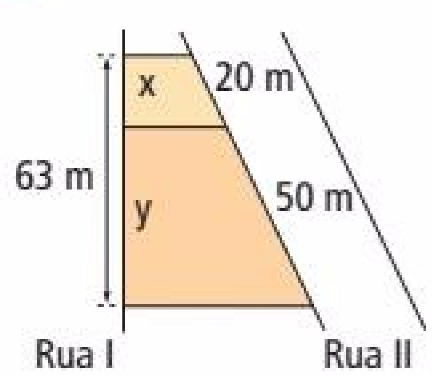
Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BS}{SC}$$



Exercícios resolvidos

1 A figura ao lado representa dois terrenos cujas laterais são paralelas. De acordo com a figura, determine as medidas *x* e *y*.



Resolução

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{20}{50} = \frac{x}{y} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{20+50}{20} = \dfrac{x+y}{x} \quad \text{(I)} \\ \dfrac{20+50}{50} = \dfrac{x+y}{y} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo x + y por 63 em (I), temos:

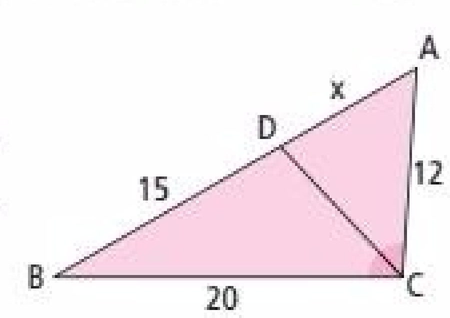
$$\frac{70}{20} = \frac{63}{x} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{63}{x} \Rightarrow 7x = 126 \Rightarrow x = 18$$

Substituindo x + y por 63 em (II), temos:

$$\frac{70}{50} = \frac{63}{y} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{63}{y} \Rightarrow 7y = 315 \Rightarrow y = 45$$

Portanto, as medidas procuradas são x = 18 m e y = 45 m.

2 Na figura ao lado, $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{C}$. Determine a medida *x* indicada.



Resolução

Pelo teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{20}{15} = \frac{12}{x} \Rightarrow 20x = 15 \cdot 12 \Rightarrow 20x = 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{180}{20} \Rightarrow x = 9$$

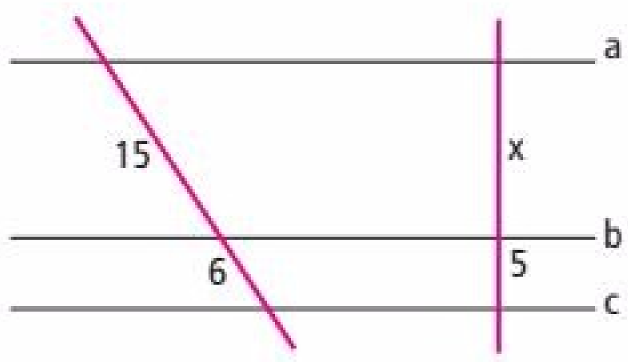
Exercícios propostos

Escreva no caderno

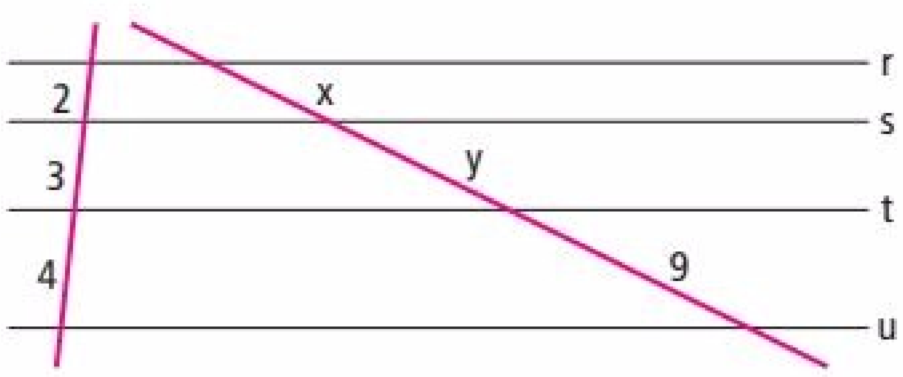
1. Uma pessoa tem 1,95 m de altura e, em determinado instante, sua sombra mede 2,60 m. Calcule a razão entre a medida da altura da pessoa e a medida de sua sombra naquele instante. $\frac{3}{4}$

2. O perímetro de um retângulo é igual a 120 cm e a razão entre as medidas do comprimento e da largura é $\frac{7}{5}$. Determine as medidas das dimensões desse retângulo.
35 cm e 25 cm

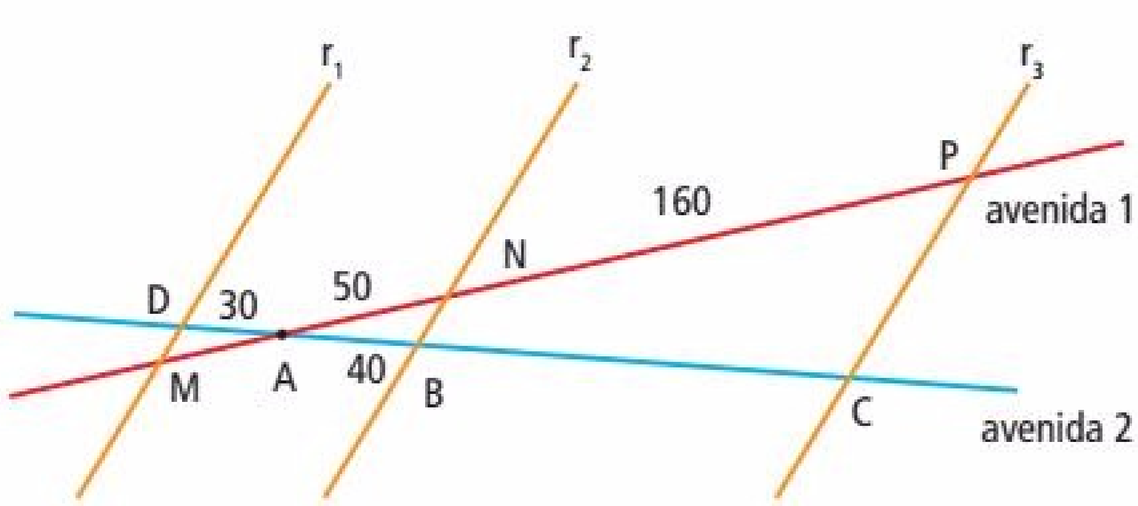
3. Na figura abaixo, temos que a // b // c. Nessas condições, determine a medida x indicada. $x = 12,5$



4. Sendo as retas r, s, t e u paralelas, calcule as medidas x e y mostradas na figura. $x = 4,5$; $y = 6,75$



5. Duas avenidas se cruzam em um ponto A. Essas avenidas cortam três ruas, r_1, r_2 e r_3, que são paralelas entre si. Os segmentos de reta $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ representam quarteirões da avenida 2. Na figura estão indicados os comprimentos, em metro, de alguns quarteirões.

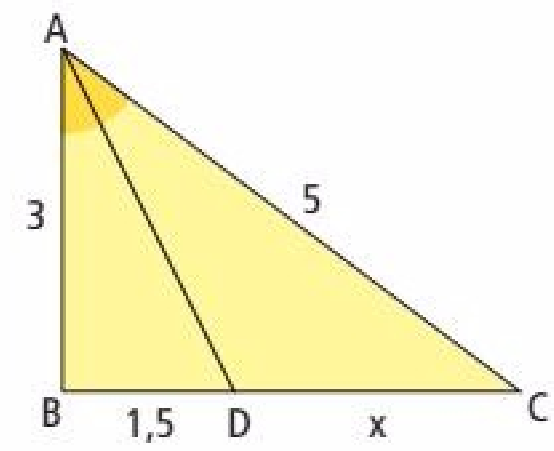


Determine os comprimentos dos quarteirões representados pelos segmentos de reta $\overline{BC}$ e $\overline{AM}$.
$BC = 128$ m; $AM = 37,5$ m

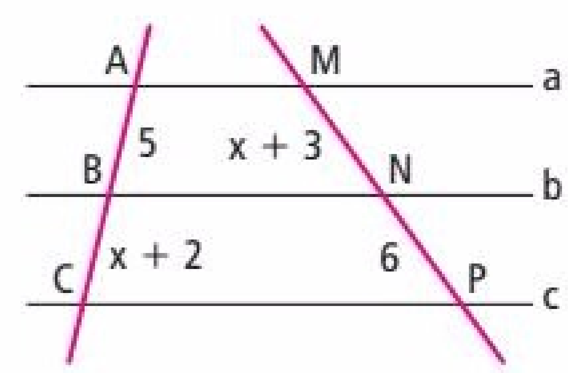
6. Os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MQ}$ e $\overline{RS}$ são proporcionais. Se $AB = 8$ cm, $CD = 20$ cm, $MQ = 24$ cm, determine a medida de $\overline{RS}$.
$RS = 60$ cm

7. Os lados de um triângulo medem 7 cm, 14 cm e 15 cm. Determine a medida do menor segmento que a bissetriz interna determina sobre o lado maior. 5 cm

8. Na figura, $\overline{AD}$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$. Determine a medida x indicada. $x = 2,5$



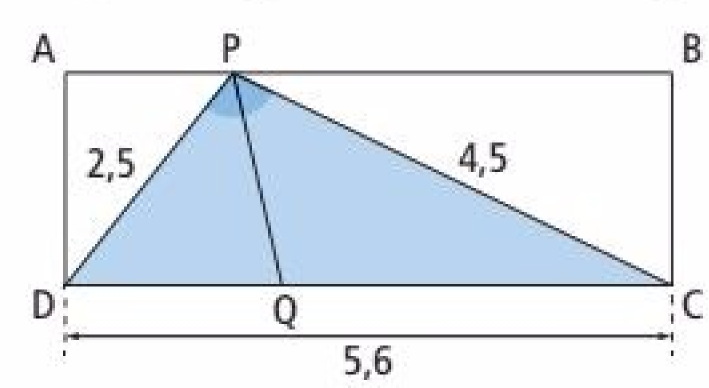
9. Na figura, temos a // b // c. Nessas condições, podemos escrever que:



Ilustrações: Editoria de arte

a) MN = AB
x b) MN = NP
c) MN = BC
d) MN = 2 · NP

10. Na figura a seguir, ABCD é um retângulo e $\overline{PQ}$ é a bissetriz interna do ângulo $\widehat{P}$ do triângulo DPC. Sabe-se que AD = DQ e que as medidas estão indicadas em centímetro. Qual é o perímetro do retângulo ABCD?
15,2 cm



11. Em um triângulo ABC, a diferença entre as medidas dos lados AB e AC é de 3 cm. A bissetriz interna do ângulo $\widehat{A}$ determina sobre o lado BC segmentos de reta que medem 6 cm e 5 cm. Qual é o perímetro do triângulo ABC?
44 cm

12. Sabemos que AB, CD, MN e PQ são proporcionais, nessa ordem. Sabendo que $AB = (x + 3)$ cm, $CD = (x - 2)$ cm, $MN = 40$ cm e $PQ = 30$ cm, calcule as medidas dos segmentos AB e CD. $AB = 20$ cm e $CD = 15$ cm

13. Os segmentos AB, CD, EF e GH são proporcionais. A soma das medidas dos dois primeiros segmentos equivale a 12 e a diferença entre elas é igual a 2. Com relação aos dois últimos segmentos, sabemos que a medida do primeiro é o triplo da medida do segundo menos duas unidades. Nessas condições, determine a soma das medidas de todos os segmentos. 15,25

Semelhança

Engenheiros e arquitetos, antes da execução de suas obras, desenham ou montam seus projetos em dimensões reduzidas, fazendo uso de plantas e maquetes.


Andrey Burmakin/Shutterstock/Glow Images

A construção da maquete é importante para um bom planejamento da construção de um prédio.


Fabrice Michaudeau/Low-Budge/Panther Media/Easypix

Os engenheiros dão sequência à construção com base na planta que foi produzida a partir da maquete.

Maquete é uma miniatura de uma obra a ser executada, ou seja, é semelhante à construção que ela representa. Isso significa que a razão entre as medidas da maquete e as medidas correspondentes da construção finalizada é constante. A essa razão damos o nome de **escala**.

A escala pode ser indicada de diferentes maneiras. Por exemplo, se a maquete de um prédio foi construída de modo que suas dimensões representem um centésimo das dimensões correspondentes no prédio construído, dizemos que a maquete foi feita na escala de **1 : 100** ou $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{100}}$ (lê-se: um para cem). Isso significa que cada centímetro na maquete corresponde a 100 centímetros, ou 1 metro, no prédio construído.

A cartografia também faz uso de escalas. Observe no canto inferior esquerdo do mapa ao lado a escala utilizada.

Estado do Mato Grosso

Allmaps

Neste mapa, cada centímetro representa 210 quilômetros.

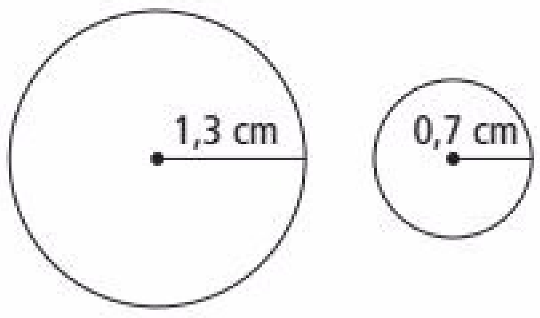
Fonte: ATLAS geográfico escolar. 6 ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2012. p. 179.

Figuras semelhantes

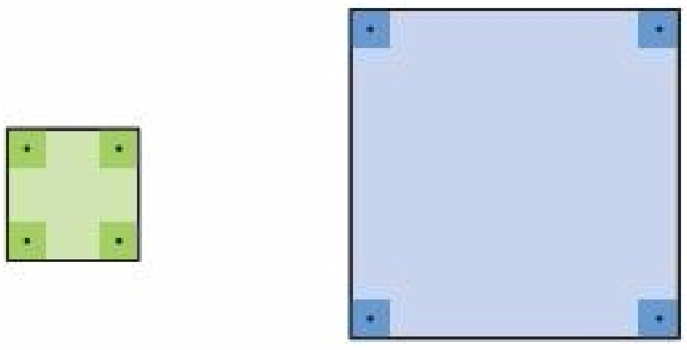
Em Matemática, o conceito de semelhança é diferente daquele de uso cotidiano. Assim, duas figuras são **semelhantes** quando têm a mesma forma, sem necessariamente terem o mesmo tamanho.

Observe os exemplos a seguir.

a) Duas circunferências quaisquer são semelhantes, pois têm a mesma forma.



b) Dois quadrados quaisquer são semelhantes, pois têm a mesma forma.

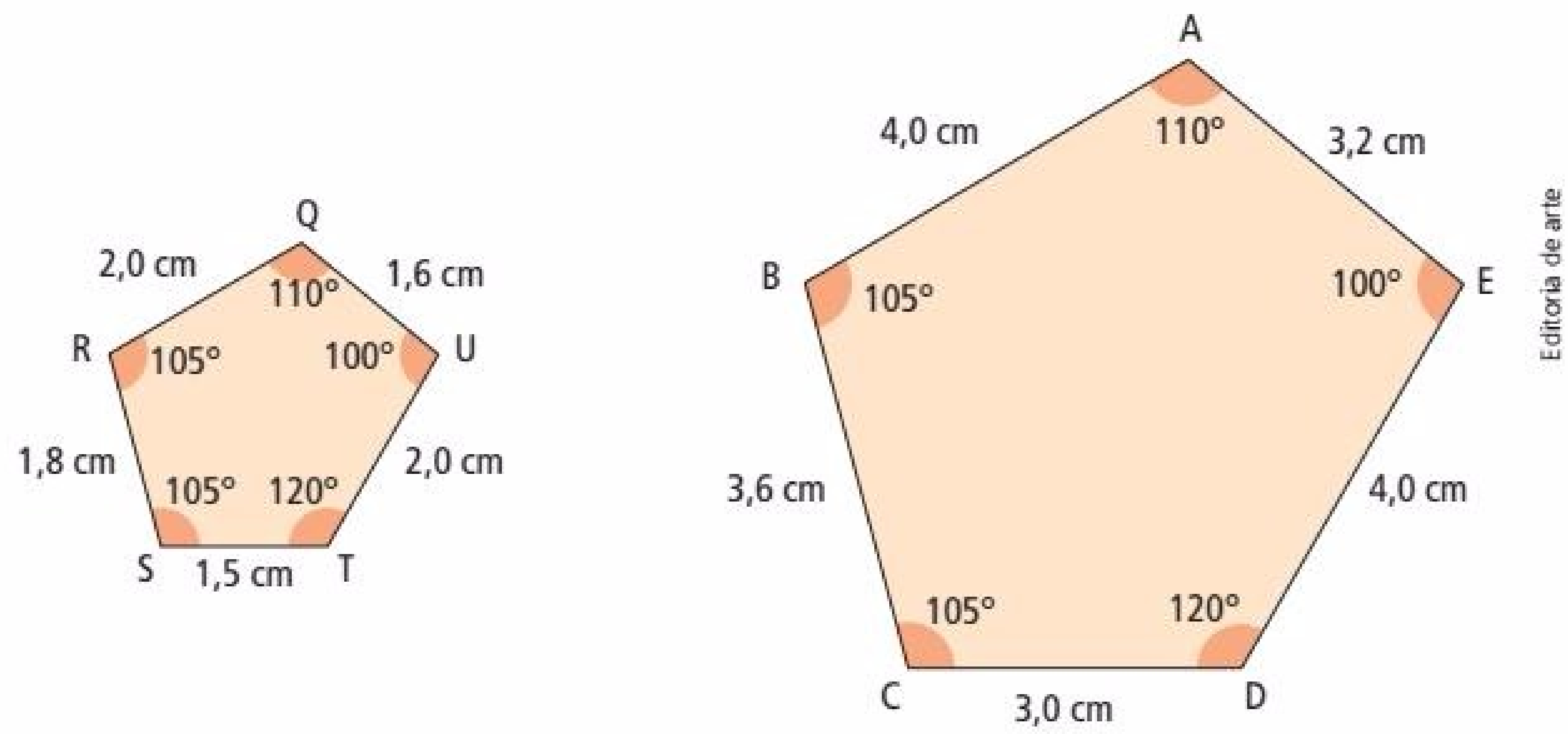


Ilustrações: Editoria de arte

Vamos formalizar esse conceito para os polígonos.

Polígonos semelhantes

Considere os pentágonos QRSTU e ABCDE representados abaixo.



Vamos analisar alguns de seus elementos.

Comparando as medidas dos ângulos internos, observe que $\hat{Q}$ e $\hat{A}$ possuem a mesma medida: 110°. Também podemos indicar como: $\text{med}(\hat{Q}) = \text{med}(\hat{A}) = 110°$.

Comparando os demais pares de ângulos, ordenadamente, temos:

$$\text{med}(\hat{R}) = \text{med}(\hat{B}) = 105°;\ \text{med}(\hat{S}) = \text{med}(\hat{C}) = 105°;$$
$$\text{med}(\hat{T}) = \text{med}(\hat{D}) = 120°;\ \text{med}(\hat{U}) = \text{med}(\hat{E}) = 100°$$

Note que os ângulos correspondentes possuem a mesma medida, isto é, são congruentes. Indicamos essas congruências por:

$$\hat{Q} \cong \hat{A} \qquad \hat{R} \cong \hat{B} \qquad \hat{S} \cong \hat{C} \qquad \hat{T} \cong \hat{D} \qquad \hat{U} \cong \hat{E}$$

Analisando as medidas dos lados QR e AB, temos: QR = 2,0 cm e AB = 4,0 cm.

Comparando, ordenadamente, os pares de lados opostos aos ângulos correspondentes, temos:

RS = 1,8 cm e BC = 3,6 cm   ST = 1,5 cm e CD = 3,0 cm
TU = 2,0 cm e DE = 4,0 cm   UQ = 1,6 cm e EA = 3,2 cm

Perceba que os lados correspondentes são proporcionais:

$$\frac{QR}{AB} = \frac{2,0}{4,0} = \frac{1}{2} \qquad \frac{RS}{BC} = \frac{1,8}{3,6} = \frac{1}{2} \qquad \frac{ST}{CD} = \frac{1,5}{3,0} = \frac{1}{2} \qquad \frac{TU}{DE} = \frac{2,0}{4,0} = \frac{1}{2} \qquad \frac{UQ}{EA} = \frac{1,6}{3,2} = \frac{1}{2}$$

Como os ângulos internos são ordenadamente congruentes e seus lados correspondentes são proporcionais, dizemos que os pentágonos QRSTU e ABCDE são semelhantes.

Indicamos: pentágono QRSTU ~ pentágono ABCDE

símbolo de semelhança

Assim, podemos definir que:

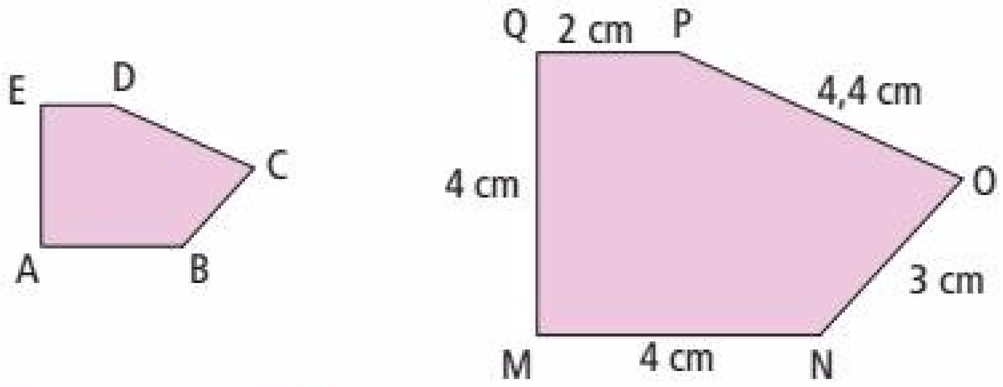
Dois polígonos são **semelhantes** quando satisfazem duas condições: os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

Observações:

- Os lados (ou ângulos) correspondentes também são chamados de lados (ou ângulos) **homólogos**.
- O número *k* obtido pela razão entre as medidas dos lados homólogos é chamado de **razão de semelhança**. No exemplo dado, temos: $k = \frac{1}{2}$.
- Duas figuras **congruentes** têm razão de semelhança *k* igual a 1.
- Se dois polígonos são semelhantes e têm razão *k*, então a razão entre as respectivas alturas, perímetros, ou qualquer outra medida linear também é *k*.

Exercício resolvido

3 Os pentágonos ABCDE e MNOPQ são semelhantes. Sabendo que o perímetro do pentágono ABCDE é 8,7 cm, determine a medida de seus lados.



Ilustrações: Editoria de arte

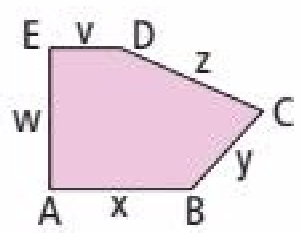
Resolução

Indicando os lados do pentágono ABCDE por x, y, z, v e w, temos:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NO} = \frac{CD}{OP} = \frac{DE}{PQ} =$$

$$= \frac{EA}{QM} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4,4} =$$

$$= \frac{v}{2} = \frac{w}{4}$$



Mas:

$$\frac{\text{Perímetro ABCDE}}{\text{Perímetro MNOPQ}} = \frac{8,7}{17,4} = 0,5 = \frac{1}{2}$$

Logo, como a razão entre os perímetros de polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança entre eles, temos:

$\frac{x}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2$ $\qquad$ $\frac{v}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow v = 1$

$\frac{y}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 1,5$ $\qquad$ $\frac{w}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow w = 2$

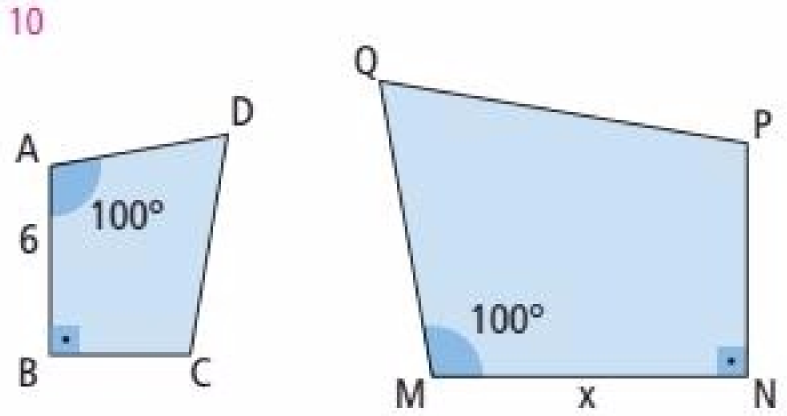
$\frac{z}{4,4} = \frac{1}{2} \Rightarrow z = 2,2$

Portanto, AB = 2 cm, BC = 1,5 cm, CD = 2,2 cm, DE = 1 cm e EA = 2 cm.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

14. Os quadriláteros ABCD e MNPQ das figuras seguintes são semelhantes. O lado AB do primeiro corresponde ao lado MN do segundo. Se a razão de semelhança do quadrilátero ABCD para o quadrilátero MNPQ é de $\frac{3}{5}$, determine a medida do lado MN do quadrilátero MNPQ. 10



15. Os tampos de duas mesas retangulares são semelhantes. A razão de semelhança do maior para o menor é 1,5. Se as dimensões do tampo da mesa menor são 3,5 m e 2,5 m, determine o perímetro do tampo da mesa maior. 18 m

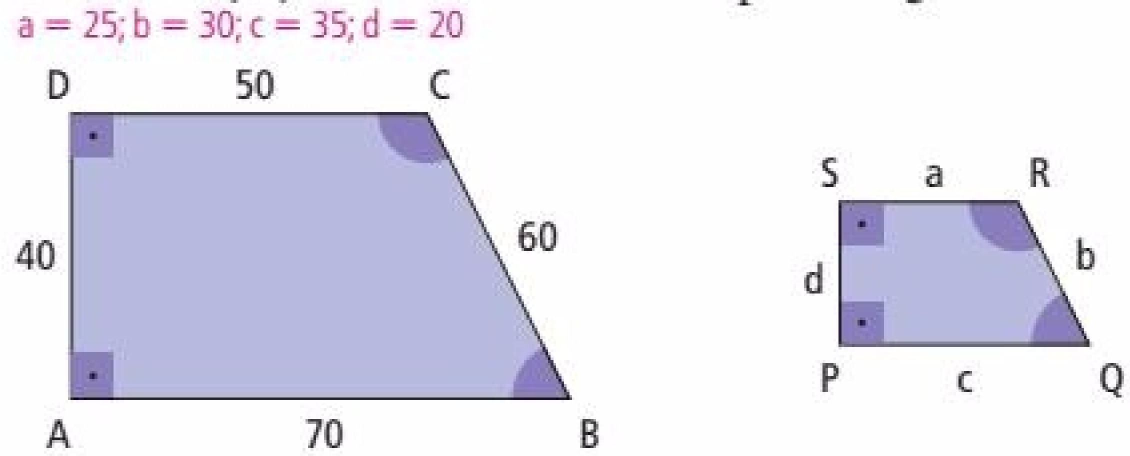
16. Considere as informações abaixo sobre algumas escalas.

Escala	Medida no desenho (em cm)	Medida real (em km)
1 : 40 000	15	a
1 : 200 000	30	b
1 : 500 000	c	40

Fonte: Dados fictícios.

Calcule, em quilômetros, as medidas a e b e, em centímetros, a medida c. a = 6 km; b = 60 km; c = 8 cm

17. Os trapézios ABCD e PQRS das figuras seguintes são semelhantes. Sabe-se que o perímetro do trapézio PQRS é 110 unidades de comprimento. Calcule as medidas a, b, c e d dos lados do trapézio PQRS.
a = 25; b = 30; c = 35; d = 20



18. Um aluno deseja representar no papel a planta de sua sala de aula, que tem a forma retangular. A sala tem 8 m de comprimento por 4,5 m de largura. No desenho feito pelo aluno, o comprimento ficou com 16 cm e a largura com 9 cm.

a) Justifique por que o desenho ficou semelhante à sala de aula original. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Qual a escala (razão de semelhança) utilizada? 1 : 50

c) Se o aluno quiser construir uma maquete da sala, usando a mesma escala, qual deverá ser a altura da maquete, se a altura real da sala é 2,8 m? 5,6 cm

19. A razão de semelhança entre dois decágonos regulares é $\frac{3}{5}$. Se o perímetro do decágono que possui o maior lado é 720 mm, qual é a medida do lado, em cm, do outro decágono? 4,32 cm

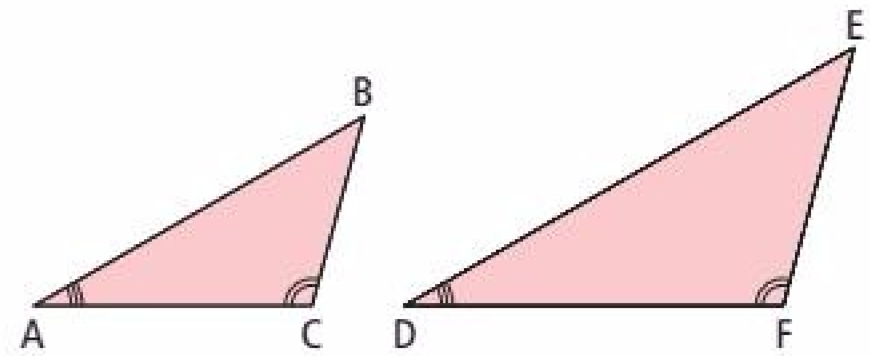
Semelhança de triângulos

Vimos que dois polígonos são semelhantes quando se verificam duas condições: os ângulos correspondentes são congruentes e os lados homólogos são proporcionais.

Entretanto, os triângulos constituem um caso especial. É possível escolher um conjunto de critérios mínimos que garantam a semelhança entre dois triângulos sem que seja necessário verificar as três congruências e as três proporcionalidades. Esses conjuntos de critérios podem ser demonstrados e são conhecidos como **casos de semelhança**. A seguir, apresentamos três casos de semelhança.

1º caso: ângulo-ângulo (AA)

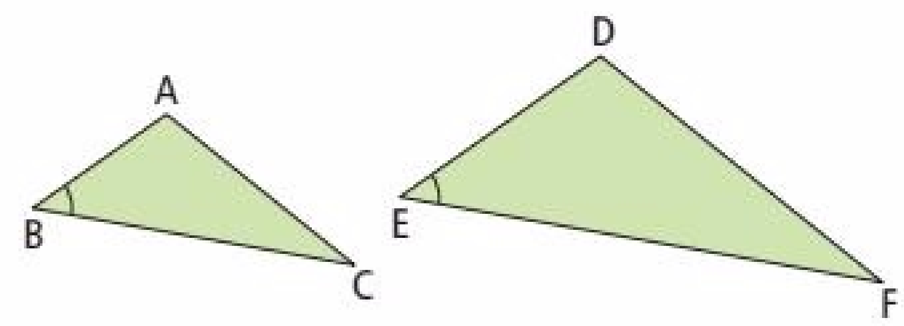
Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então esses triângulos são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{A} \cong \widehat{D} \\ \widehat{C} \cong \widehat{F}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

2º caso: lado-ângulo-lado (LAL)

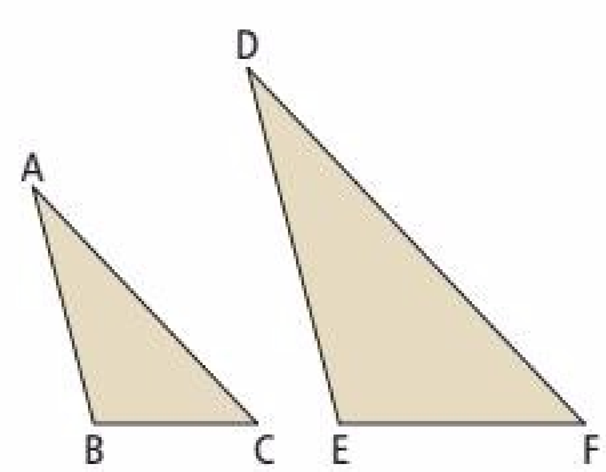
Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por esses lados são congruentes, então esses triângulos são semelhantes.



$$\left.\begin{array}{l}\widehat{B} \cong \widehat{E} \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

3º caso: lado-lado-lado (LLL)

Se dois triângulos possuem os três lados correspondentes proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

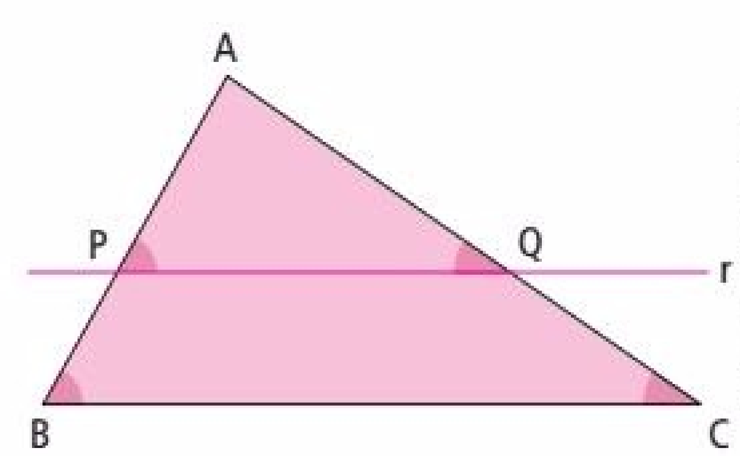
Observação:

Quando indicamos a semelhança por $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, isso significa que os vértices *A*, *B* e *C* são correspondentes aos vértices *D*, *E* e *F*, respectivamente. Nesse caso, os pares de lados homólogos são $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ e $\overline{EF}$, $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$.

Teorema fundamental da semelhança

Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

Consideremos o triângulo ABC da figura ao lado. Nele, vamos traçar uma reta *r*, paralela ao lado $\overline{BC}$, que vai intersectar o lado $\overline{AB}$ no ponto *P* e o lado $\overline{AC}$ no ponto *Q*.



Ilustrações: Editoria de arte

Pelo teorema de Tales, temos: $\dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AQ}{AC}$.

Do paralelismo de *r* com o lado $\overline{BC}$, temos: $\widehat{P} \cong \widehat{B}$ e $\widehat{Q} \cong \widehat{C}$.

Assim, os triângulos APQ e ABC têm os ângulos ordenadamente congruentes. Portanto, pelo caso AA de semelhança, concluímos que $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

Consequências da semelhança de triângulos

A partir da semelhança de triângulos algumas consequências podem ser demonstradas. A seguir, apresentamos algumas delas.

1ª consequência

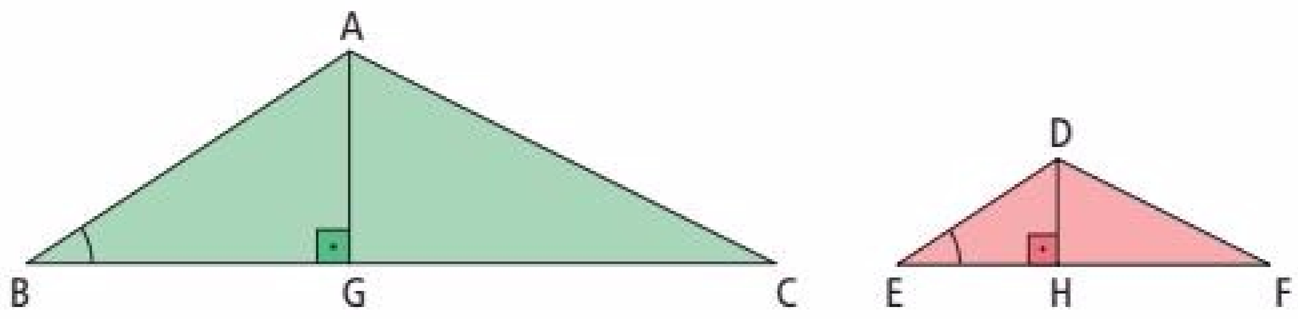
Se a razão de semelhança entre dois triângulos é igual a *k*, então:

- a razão entre os perímetros também é *k*;
- a razão entre duas alturas homólogas também é *k*;
- a razão entre duas bissetrizes homólogas também é *k*;
- a razão entre as áreas é igual a k^2.

Vamos demonstrar esta última afirmação.

Demonstração

Considere dois triângulos ABC e DEF tais que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, como mostra a figura ao lado. Então, pela semelhança de triângulos temos:



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = k$$

Traçando as alturas homólogas AG e DH, temos que, pelo caso AA de semelhança, $\triangle ABG \sim \triangle DEH$. Então, podemos escrever:

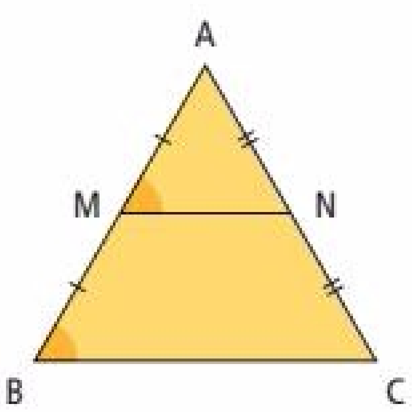
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AG}{DH} = k$$

Calculando as respectivas áreas, temos:

$$\left.\begin{aligned} \text{área } \triangle ABC &= A_1 = \frac{BC \cdot AG}{2} \\ \text{área } \triangle DEF &= A_2 = \frac{EF \cdot DH}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{BC \cdot AG}{EF \cdot DH} = \frac{BC}{EF} \cdot \frac{AG}{DH} = k \cdot k = k^2$$

2ª consequência

Se um segmento de reta une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então esse segmento de reta é paralelo ao terceiro lado e sua medida é metade da medida do terceiro lado.



$$\overline{MN} \parallel \overline{BC} \Rightarrow MN = \frac{BC}{2}$$

3ª consequência

Se pelo ponto médio de um lado de um triângulo, traçarmos uma reta paralela a outro de seus lados, ela encontrará o terceiro lado em seu ponto médio.

Exercícios resolvidos

4 Um homem de 1,80 m de altura projeta uma sombra de 2,70 m de comprimento no mesmo instante em que um poste projeta uma sombra de 9,60 m de comprimento. Qual é a altura do poste?

Resolução

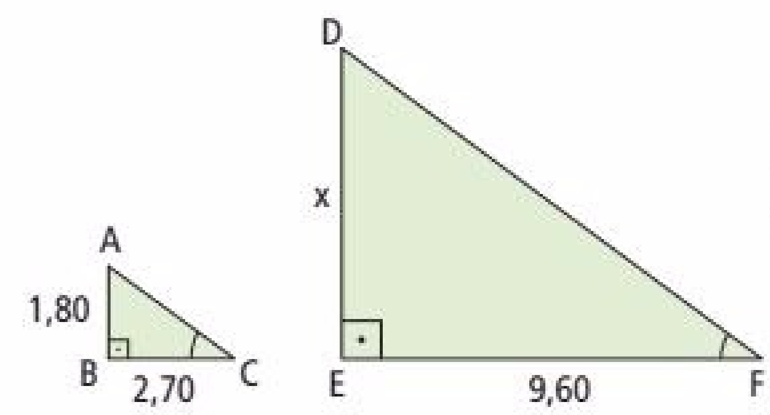
Com base nas informações podemos fazer o esquema ao lado.

Como os raios de sol são praticamente paralelos, temos $\widehat{B} \cong \widehat{E}$ e $\widehat{C} \cong \widehat{F}$.

Assim, os triângulos ABC e DEF são semelhantes. Sendo *x* a altura do poste, temos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \Rightarrow \frac{1{,}80}{x} = \frac{2{,}70}{9{,}60} \Rightarrow 2{,}70x = 17{,}28 \Rightarrow x = 6{,}4$$

Portanto, a altura do poste é 6,40 m.

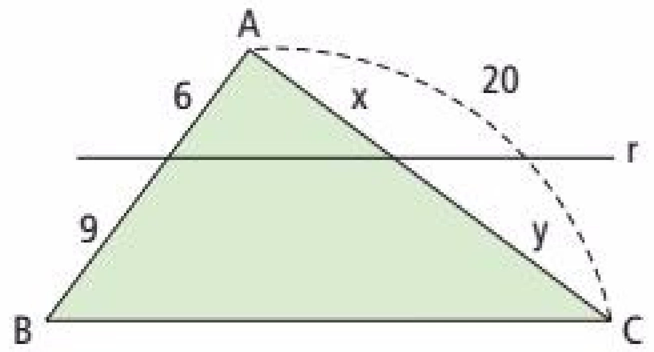


Ilustrações: Editoria de arte

5 Em um triângulo ABC, uma reta *r* é paralela ao lado BC e divide o lado AB em dois segmentos de reta cujas medidas são 6 cm e 9 cm. Se o lado AC do triângulo mede 20 cm, determine as medidas dos segmentos de reta indicados nesse lado AC pela reta *r*.

Resolução

Pelo enunciado do problema, *x* e *y* representam as medidas dos segmentos de reta determinados em $\overline{AC}$ pela reta *r*.



$$\frac{6}{9} = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{6+9}{6} = \frac{\overbrace{x+y}^{20}}{x}$$

$$\frac{15}{6} = \frac{20}{x} \Rightarrow 15x = 120 \Rightarrow x = 8$$

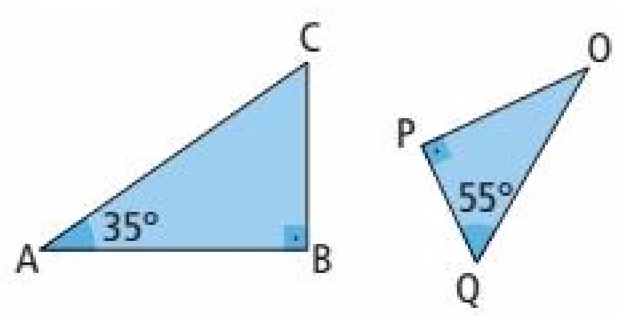
$x + y = 20 \Rightarrow 8 + y = 20 \Rightarrow y = 20 - 8 \Rightarrow y = 12$

Portanto, x = 8 cm e y = 12 cm.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

20. Considerando os triângulos ABC e OPQ das figuras ao lado, responda:

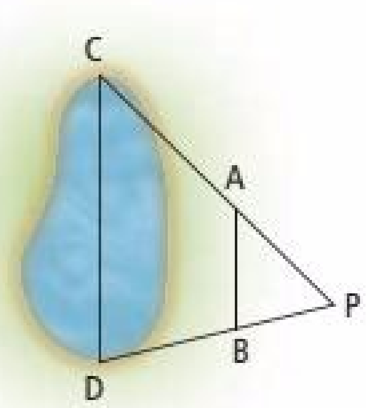


a) Os triângulos ABC e OPQ são semelhantes? Sim.

b) Em caso afirmativo, escreva no caderno os lados homólogos. $\overline{BC}$ e $\overline{PQ}$, $\overline{AC}$ e $\overline{OQ}$, $\overline{AB}$ e $\overline{OP}$

21. As bases de dois triângulos isósceles semelhantes medem, respectivamente, 18 cm e *x* cm. A medida de cada lado congruente do primeiro triângulo é 27 cm, enquanto a medida de cada lado congruente do segundo triângulo é 30 cm. Determine o perímetro do segundo triângulo. 80 cm

22. (UFV-MG) Para determinar o comprimento de uma lagoa, utilizou-se o esquema indicado pela figura abaixo, onde os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos.



Sabendo-se que AB = 36 m, BP = 5 m e DP = 40 m, o comprimento CD da lagoa, em metros, é:

a) 248 b) 368 x c) 288 d) 208 e) 188

23. Um ciclista, pedalando sobre uma rampa a 12 m/s, encontra-se a 3 m do solo depois de 4 s. Calcule a sua distância da base da rampa depois de 6 s, sabendo que o início da rampa está a 1 m de altura do solo. 3 m

24. Os lados de um triângulo medem 10 cm, 12 cm e 18 cm. Determine as medidas dos lados de um triângulo semelhante ao anterior, cujo perímetro mede 60 cm. 15 cm, 18 cm e 27 cm

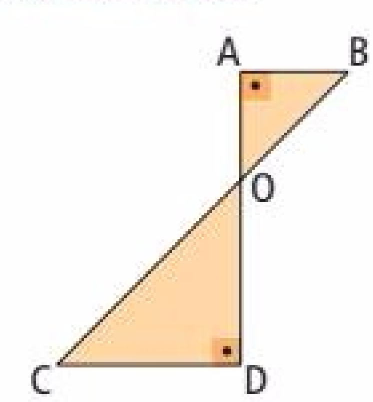
25. (Unicamp-SP) Uma rampa de inclinação constante, como a que dá acesso ao Palácio do Planalto em Brasília, tem 4 metros de altura na sua parte mais alta. Uma pessoa, tendo começado a subi-la, nota que após caminhar 12,3 metros sobre a rampa está a 1,5 metro de altura em relação ao solo.

Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

a) Faça uma figura ilustrativa da situação descrita.

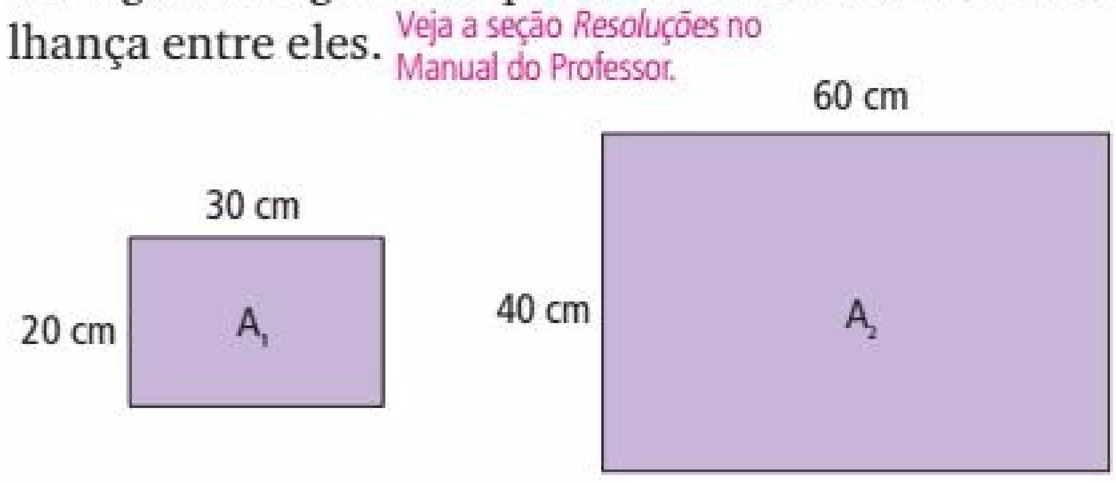
b) Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa. 20,5 m

26. (UFPE) Na figura abaixo, temos que $CD = \frac{3}{2}AB$ e a área do triângulo OAB é 8. Qual é o valor da área do triângulo ODC? 18 unidades de área.



Ilustrações: Editoria de arte

27. Os retângulos A_1 e A_2 das figuras seguintes são semelhantes. Mostre que a razão entre as áreas nesses retângulos é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles. Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.



História da Matemática

Tales de Mileto e as pirâmides do Egito

Segundo a tradição, a geometria demonstrativa começou com Tales de Mileto, um dos "sete sábios" da Antiguidade, durante a primeira metade do sexto século a. C.

Segundo parece, Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens. Diz-se que ele viveu por algum tempo no Egito, e que despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio da sombra. [...] De volta a Mileto, ganhou reputação, graças a seu gênio versátil, de estadista, conselheiro, engenheiro, homem de negócios, filósofo, matemático e astrônomo. Tales é o primeiro personagem conhecido a quem se associam descobertas matemáticas. [...]

Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierônimos, um discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez uso da semelhança de triângulos.

Fonte: EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2004. p. 94, 95, 115. Título original: An Introduction to the History of Mathematics.

Atividades

Escreva no caderno

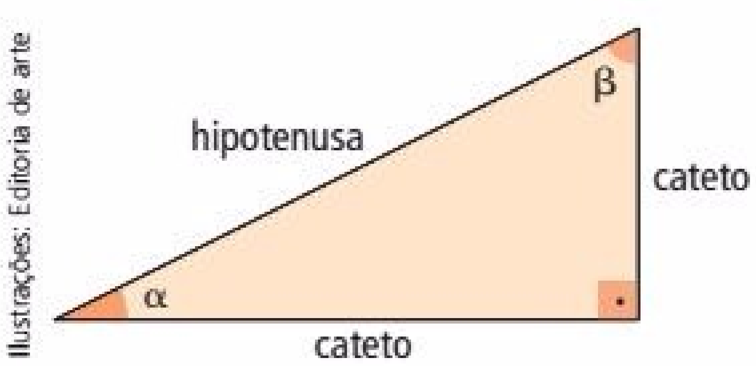
1. Qual é o conceito matemático utilizado por Tales ao calcular a altura da pirâmide por meio de sua sombra?
2. Faça um esboço para calcular a altura de um prédio utilizando a sombra de uma vareta.
   Veja o Manual do Professor.

Relações métricas no triângulo retângulo

Em um triângulo retângulo, um dos ângulos é reto, ou seja, mede 90°. Como na geometria euclidiana, que é a adotada aqui, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, temos que os outros dois ângulos agudos são complementares.

Além disso, o lado oposto ao ângulo reto é o maior lado e é chamado de **hipotenusa**. Os outros dois lados, perpendiculares entre si, são chamados de **catetos**.

Ilustrações: Editoria de arte

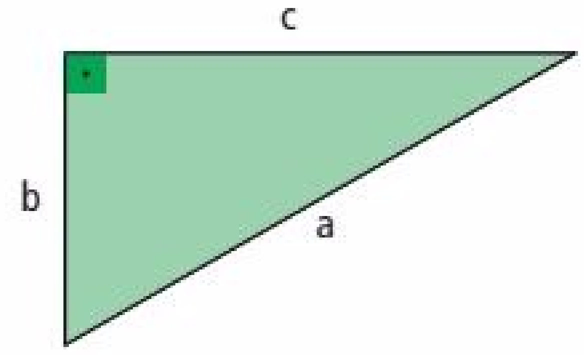


$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\beta = 90° - \alpha$$

Teorema de Pitágoras

Você provavelmente estudou no Ensino Fundamental o **teorema de Pitágoras**, uma conhecida relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Vamos relembrá-lo, apresentando seu enunciado a seguir.

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.



$$a^2 = b^2 + c^2$$

Em que:

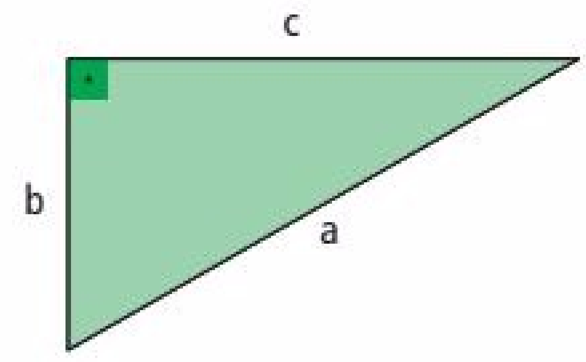
- *a* é a medida da hipotenusa;
- *b* e *c* são as medidas dos catetos.

Veja na página a seguir uma das muitas demonstrações desse teorema.

Demonstração

Considere o triângulo retângulo representado na figura 1, em que *a* é a medida da hipotenusa e *b* e *c* são as medidas dos catetos. Queremos provar que $a^2 = b^2 + c^2$.

Com quatro triângulos retângulos congruentes a este, construímos um quadrado MNPQ cujo lado mede $(b + c)$.



Ilustrações: Editoria de arte

Figura 1

Na figura 2, observe que, inscrito ao quadrado MNPQ, surge o quadrilátero TRSV. Vamos mostrar que o quadrilátero TRSV é um quadrado. Veja:

- os quatro lados são congruentes, pois são as hipotenusas dos triângulos retângulos;
- os ângulos internos são retos.

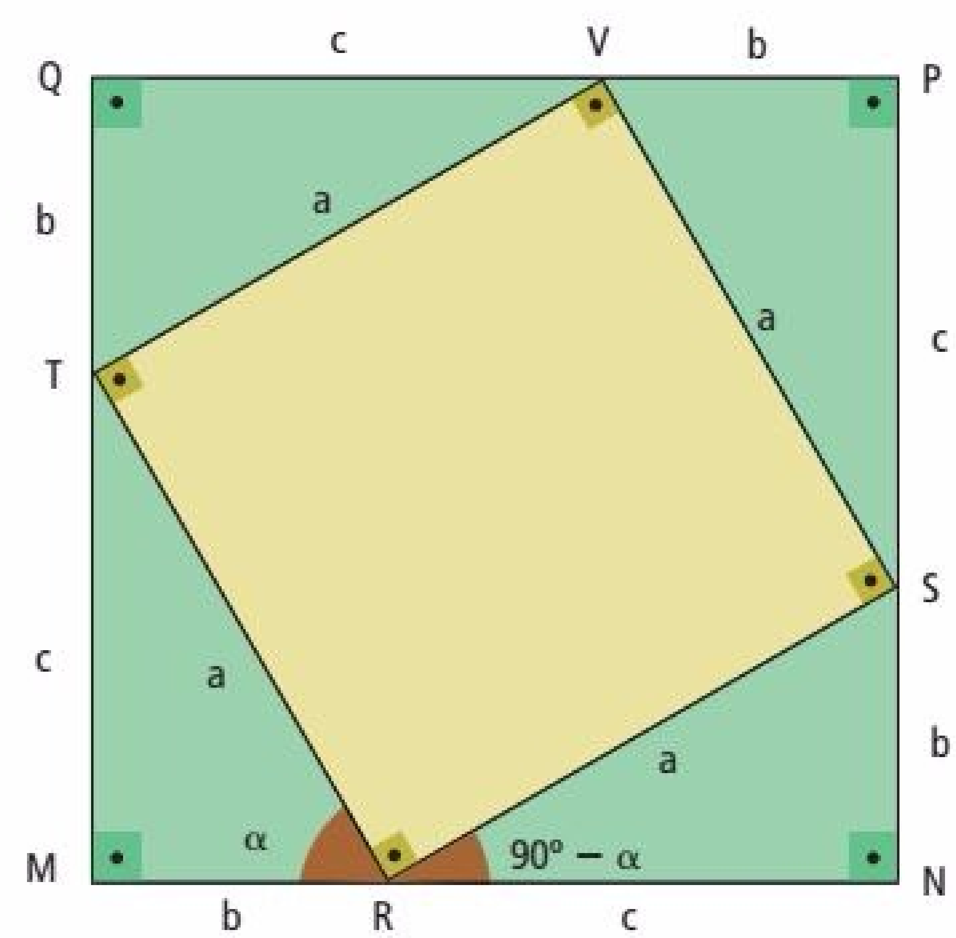


Figura 2

Os três ângulos do vértice *R* destacados na figura 2 são suplementares, isto é, suas medidas somam 180°. Como os ângulos agudos do triângulo retângulo medem α e $90° - \alpha$, o ângulo interno $\widehat{R}$ do quadrilátero TRSV mede 90°. De maneira análoga, podemos provar que os ângulos internos $\widehat{T}$, $\widehat{S}$ e $\widehat{V}$ do quadrilátero TRSV são retos.

Assim, fica demonstrado que o quadrilátero TRSV é um quadrado.

Agora, considere:

- $\mathbf{A_{MNPQ}}$ é a área do quadrado MNPQ;
- $\mathbf{A_{TRSV}}$ é a área do quadrado TRSV;
- $\mathbf{A_{\Delta}}$ é a área do triângulo retângulo dado.

Da figura 2, obtemos:

$$\mathbf{A_{MNPQ} = A_{TRSV} + 4 \cdot A_{\Delta}}$$

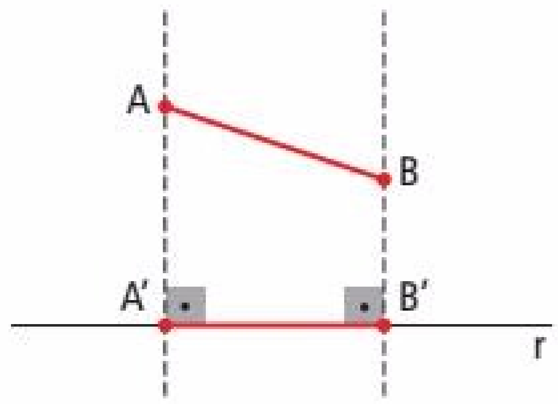
$$(b + c)^2 = a^2 + 4 \cdot \left(\frac{b \cdot c}{2}\right)$$

Desenvolvendo essa expressão, temos:

$$b^2 + 2\cancel{bc} + c^2 = a^2 + 2\cancel{bc}$$
$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$$

Outras relações métricas no triângulo retângulo

A projeção ortogonal de um segmento de reta AB sobre uma reta *r* é um segmento de reta obtido pela projeção ortogonal de todos os pontos desse segmento de reta sobre a reta *r*.

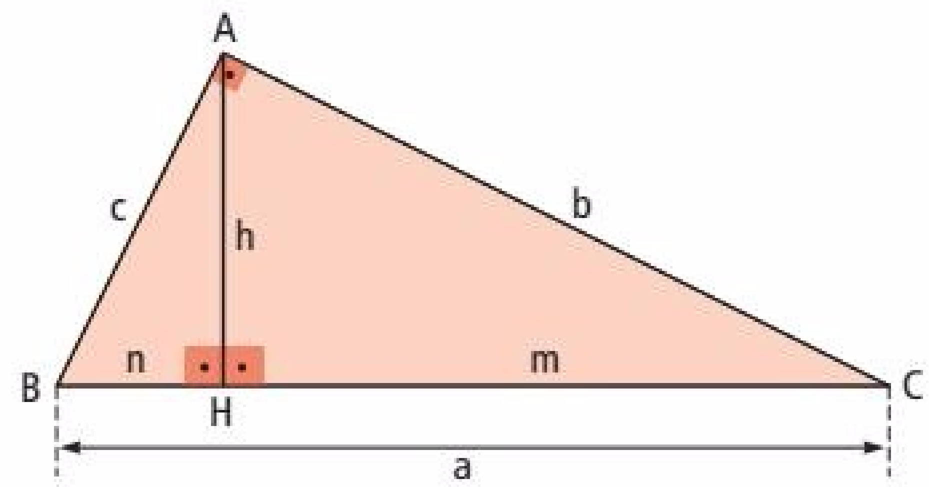


$\overline{A'B'}$ é a projeção ortogonal do segmento de reta AB sobre a reta *r*.

Além do teorema de Pitágoras, existem outras relações métricas entre os elementos de um triângulo retângulo. Inicialmente, vamos identificar esses elementos.

Consideremos o triângulo retângulo ABC a seguir, em que:

- $\overline{BC}$ é a hipotenusa de medida *a*.
- $\overline{AC}$ é o cateto de medida *b*.
- $\overline{AB}$ é o cateto de medida *c*.
- $\overline{AH}$ é a altura relativa à hipotenusa de medida *h*.
- $\overline{BH}$ é a projeção ortogonal, de medida *n*, do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa.

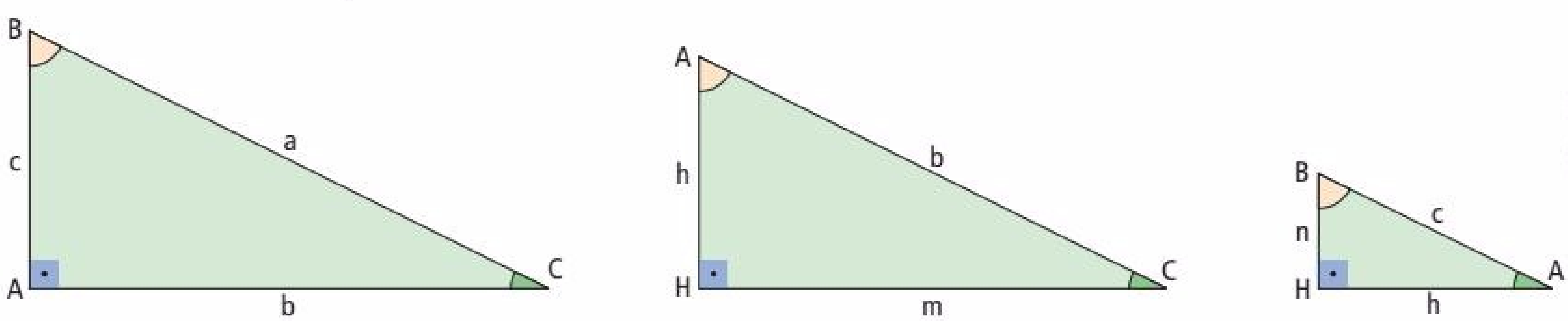


- $\overline{HC}$ é a projeção ortogonal, de medida *m*, do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa.

Podemos observar que AH dividiu o triângulo ABC em outros dois triângulos também retângulos: HBA e HAC.

Comparando esses triângulos com o triângulo ABC, concluímos que eles são semelhantes pelo caso AA, pois os ângulos agudos de um triângulo retângulo são complementares.

A partir da semelhança entre os triângulos formados, podemos estabelecer as relações apresentadas a seguir. Para auxiliar na visualização, a figura abaixo mostra os triângulos ABC, HAC e HBA separadamente, com os ângulos correspondentes destacados.



Ilustrações: Editoria de arte

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida de um cateto é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da respectiva projeção do cateto sobre a hipotenusa:

- Como $\triangle ABC \sim \triangle HAC$, temos: $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow \boxed{b^2 = a \cdot m}$
- Como $\triangle ABC \sim \triangle HBA$, temos: $\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow \boxed{c^2 = a \cdot n}$

Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa:

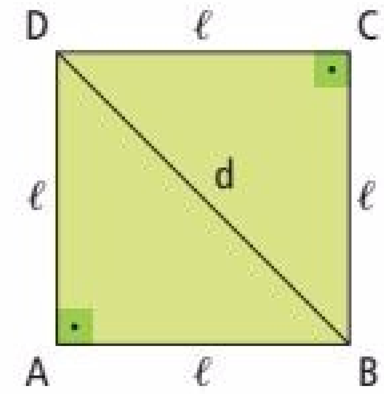
- Como $\triangle HAC \sim \triangle HBA$, temos: $\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n}$

Em qualquer triângulo retângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura relativa à hipotenusa:

- Como $\triangle ABC \sim \triangle HAC$, temos: $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow \boxed{a \cdot h = b \cdot c}$

Exercícios resolvidos

6 Considere o quadrado ao lado, cujo lado mede ℓ e cuja diagonal mede d. Calcule o valor de d em função de ℓ.

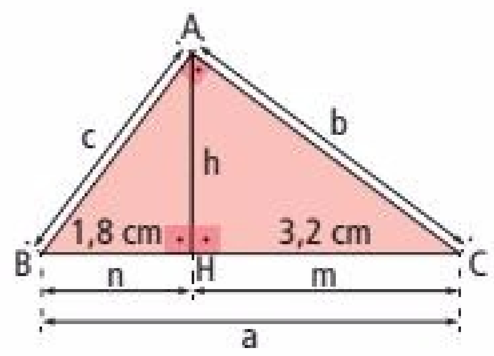


Resolução

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BCD, temos:

$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow d = \sqrt{2\ell^2} \Rightarrow d = \ell\sqrt{2}$

7 No triângulo retângulo da figura ao lado, determine as medidas a, b, c e h indicadas.



Resolução

$a = 1{,}8 + 3{,}2 \Rightarrow a = 5$ cm

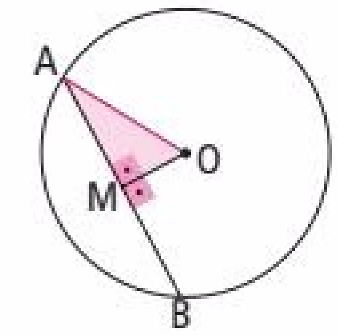
$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b^2 = 5 \cdot 3{,}2 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$ cm

$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c^2 = 5 \cdot 1{,}8 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$ cm

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h^2 = 3{,}2 \cdot 1{,}8 \Rightarrow h^2 = 5{,}76 \Rightarrow h = \sqrt{5{,}76} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = 2{,}4$ cm

8 A circunferência da figura ao lado tem raio desconhecido. Sobre a circunferência marca-se uma corda $\overline{AB}$ de 8 cm de comprimento. Sendo M o pé da perpendicular baixada do centro sobre a corda $\overline{AB}$, verifica-se que o segmento de reta $\overline{OM}$ mede 2 cm. Com esses dados, determine a medida do raio da circunferência.



Resolução

M é ponto médio da corda $\overline{AB}$. Então:

$$AM = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow AM = 4$$

Considerando-se o triângulo retângulo OMA e aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$(OA)^2 = (OM)^2 + (AM)^2 \Rightarrow (OA)^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow$

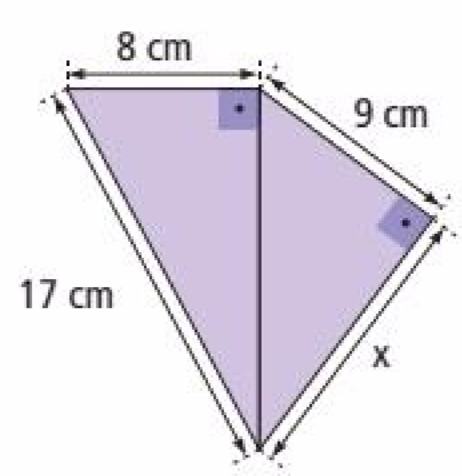
$\Rightarrow OA^2 = 20 \Rightarrow OA = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Então o raio da circunferência mede $2\sqrt{5}$ cm.

Exercícios propostos

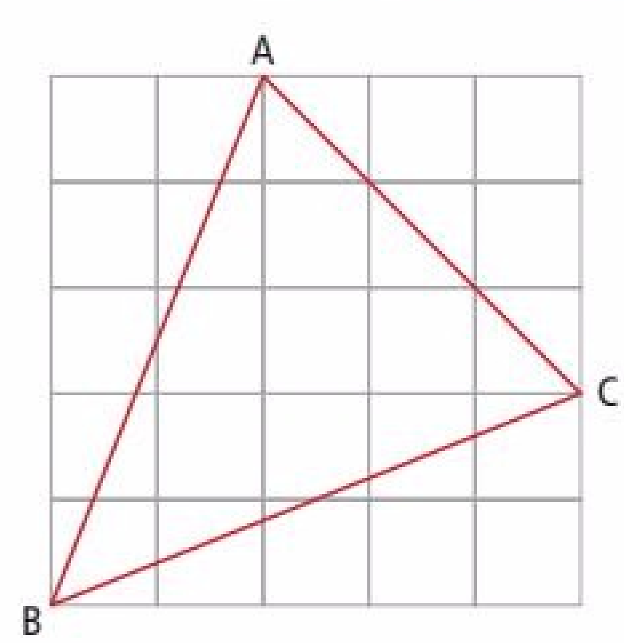
Escreva no caderno

28. (Saresp-SP) Na figura ao lado, o valor de x é:



a) 8 cm
b) 9 cm
X c) 12 cm
d) 123 cm

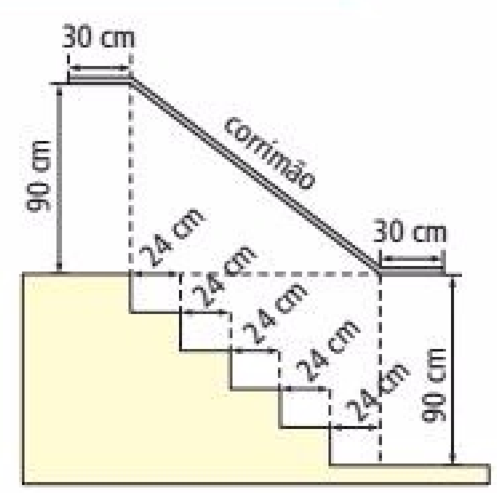
29. Na malha abaixo, cada quadradinho tem 1 cm de lado. Calcule as medidas dos lados do triângulo ABC desenhado nessa malha. $AB = BC = \sqrt{29}$ cm; $AC = 3\sqrt{2}$ cm



30. (FGV-SP) As bases de um trapézio isósceles medem 20 m e 36 m, e a soma das medidas dos lados não paralelos é 20 m. A medida da altura desse trapézio é:

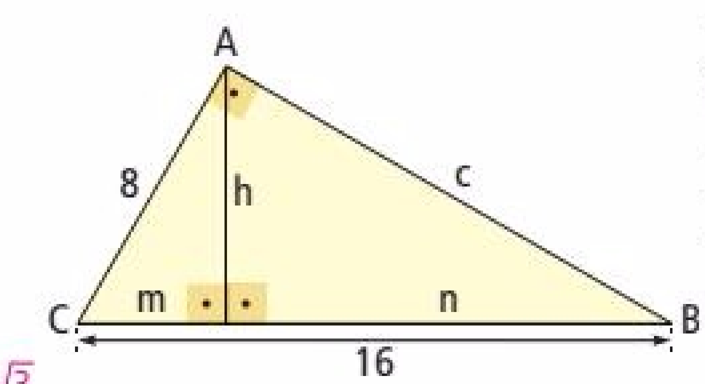
X a) 6 m
b) 3 m
c) 8 m
d) 4 m
e) 10 m

31. (Enem/MEC) Na figura apresentada ao lado, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus da mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:



a) 1,8 m
b) 1,9 m
c) 2,0 m
X d) 2,1 m
e) 2,2 m

32. No triângulo retângulo ABC da figura, determine as medidas m, n, h e c indicadas.



$m = 4$; $n = 12$; $h = 4\sqrt{3}$; $c = 8\sqrt{3}$

Ilustrações: Editoria de arte

33. (UnB-DF) Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 16 metros. Determine, em metros, a medida da hipotenusa, sabendo que a medida desta excede a medida de outro cateto em oito metros. 20 m

34. Quais são as medidas dos lados de um triângulo retângulo, sabendo que eles são representados por três números inteiros consecutivos? 3, 4 e 5

35. Um retângulo tem a diagonal medindo $\sqrt{229}$ cm e os lados medindo $(x - 4)$ cm e $(2x + 3)$ cm. Determine o perímetro desse retângulo. 34 cm

36. Os conhecimentos geométricos também podem ser observados no processo criativo de um artista. O pensamento criativo, associado ao conhecimento científico, idealiza e compõe as artes visuais nas suas mais variadas formas e representações. O processo criativo pode ser científico ou surgir espontaneamente ao acaso. Leia o texto a seguir a respeito de alguns elementos envolvidos no processo criativo de artistas visuais e faça o que se pede.

Acasos, serendipidades e *insights* nos processos criativos de artistas visuais

A concepção de três conceitos presentes em processos criativos, acaso, serendipidade e *insight* aproximam Arte e Ciência, mas se diferenciam quanto a suas aplicações. O acaso, um evento totalmente inesperado como a tinta que escorre de repente e mancha a tela do pintor, pode gerar um efeito surpreendente, levando o artista a decidir se incorpora este fato positivamente ou se o considera um defeito a ser corrigido em sua obra. A serendipidade, termo utilizado na ciência para descrever o processo de uma descoberta científica, uma feliz coincidência, que podemos também compreender como um acaso que se espera, que o cientista busca e persegue. E o *insight*, termo inglês originário da psicologia, constitui um verbete no dicionário de língua portuguesa: "compreensão repentina, em geral intuitiva, de suas próprias atitudes e comportamentos, de um problema, de uma situação" (FERREIRA, p. 951, 1986).

Acaso

[...] Acontecem constantemente em qualquer etapa da criação, como se no processo criativo ocorressem pequenos ciclos que se repetem a cada corporificação, ainda que parcial, de uma obra de arte. Talvez seja uma singularidade do artista visual sentir tão intensamente as ocorrências do acaso, cujas necessidades operacionais de transformar ideia em matéria obrigam-no a rever frequentemente seu projeto, sempre recomeçando o processo criativo ao mesmo tempo em que a obra vai sendo construída. [...]

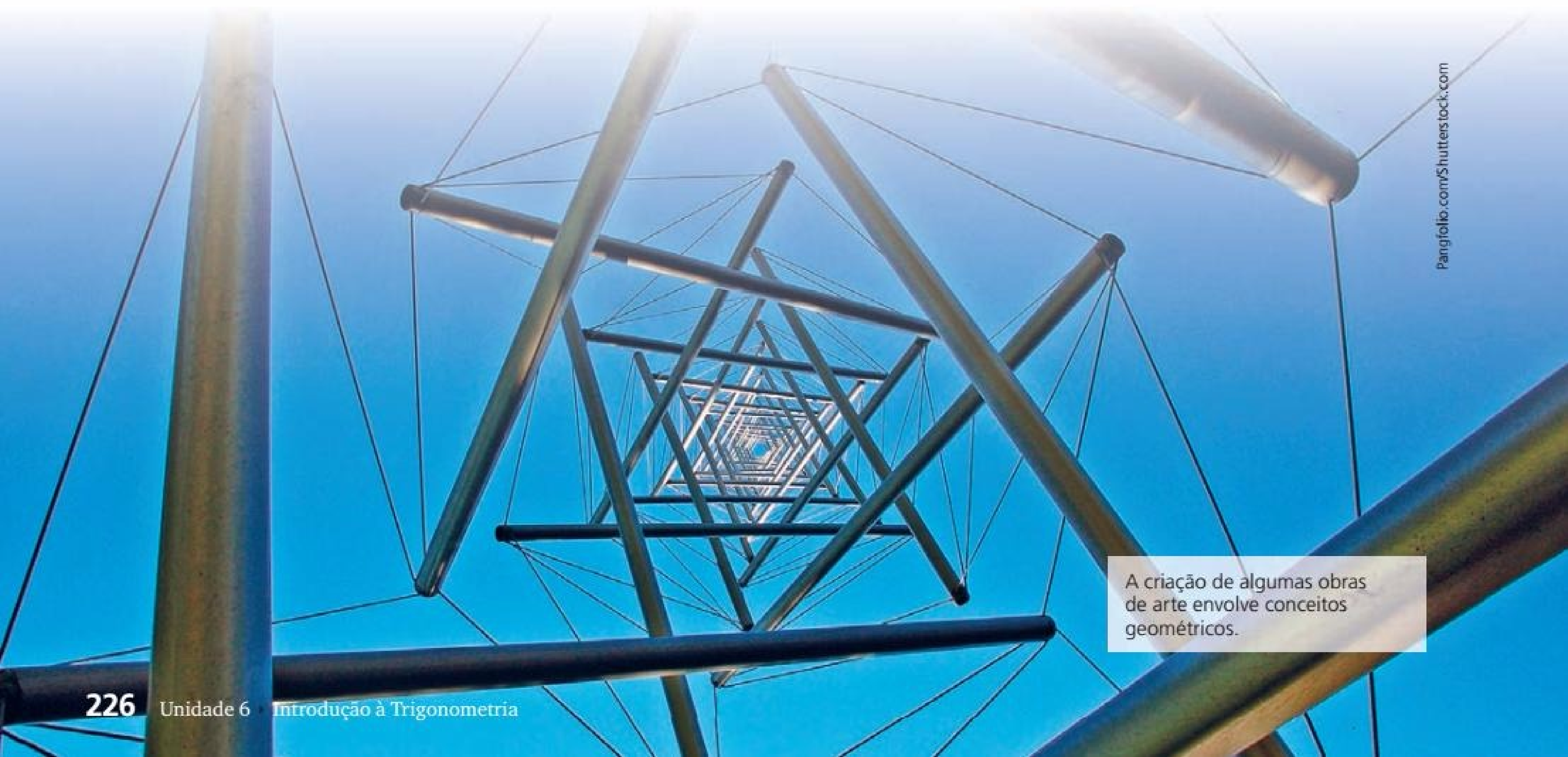
Serendipidade

O aproveitamento de situações não previstas durante o processo criativo do artista se assemelha à ideia de Serendipidade, um conceito de descoberta científica conhecido entre cientistas como coincidência feliz. [...]

O mais famoso caso refere-se ao cientista Alexander Fleming, que ao sair em viagem armazenou de maneira desastrada suas lâminas de cultivo de bactérias em laboratório, contaminando o meio, o que resultou na criação de fungos. Ao retornar e analisar seu erro, Fleming descobriu a penicilina. Outros cientistas antes dele viveram esta mesma situação, observaram contaminações semelhantes, porém somente ele pensou que a morte das bactérias cultivadas nas lâminas estava associada às substâncias químicas liberadas pelos fungos; onde havia fungos, as bactérias morriam. Ele deduziu que as substâncias eram antibióticas (ROBERTS, 1989). Este fato, que hoje nos parece óbvio e corriqueiro, revolucionou a medicina e foi o princípio gerador de uma gama enorme de remédios, proporcionando a cura para muitas doenças. De qualquer forma, voltamos a um ponto fundamental: ele percebeu seu erro e o aproveitou, porque tinha olhos para ver, ou seja, a sorte favorece as mentes preparadas, conforme Pasteur afirmaria (WECHSLER, 2002). [...]

Insights

[...] O seu significado uniria visão e intuição, o sentido da visão somado a uma apreensão direta da realidade, como ver e sentir pela apreensão dos sentidos sem passar pelo raciocínio, pelo intelecto. [...]



Pangfolio.com/Shutterstock.com

A criação de algumas obras de arte envolve conceitos geométricos.

Conclusão

O acaso na arte é visto como um acontecimento surpreendente, fortuito, totalmente inesperado, que o artista acolhe movido pela sua intuição da forma; a serendipidade é a espera pelo acaso na ciência, um tesouro aguardado para completar um arcabouço especialmente construído em teorias e comprovado em experiências, que apenas os cientistas preparados podem encontrar. Mas o artista também pode preparar-se para a serendipidade, indo ao reino das formas, dos materiais e dos procedimentos mais diversos para encontrar seus tesouros. E o *insight* incorpora as duas possibilidades anteriores, definindo-se como um vislumbre, uma súbita visão interna que combina intuição, imaginação, percepção e elaborações do conhecimento simbólico.

portumen/Shutterstock.com

As cores de um quadro podem ser obtidas por processos que envolvem criatividade, serendipidade ou *insights*.

Bibliografia

FERREIRA, A. B. H. **Novo dicionário da língua portuguesa**, 2ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

ROBERTS, R. M. **Serendipity**: Accidental Discoveries in Science. New York, USA: Wiley Science Editions, 1989.

WECHSLER, S. M. **Criatividade**: descobrindo e encorajando. Campinas, SP: Livro Pleno, 2002.

Fonte: LARA, Regina. Acasos, serendipidades e *insights* nos processos criativos de artistas visuais. **Tríades**: Transversalidade, *Design*, Linguagens, dez. 2011. Disponível em: <http://www.revistatriades.com.br/blog/wp-content/uploads/2012/01/regina_lara_dez.pdf>. Acesso em: 9 dez. 2015.

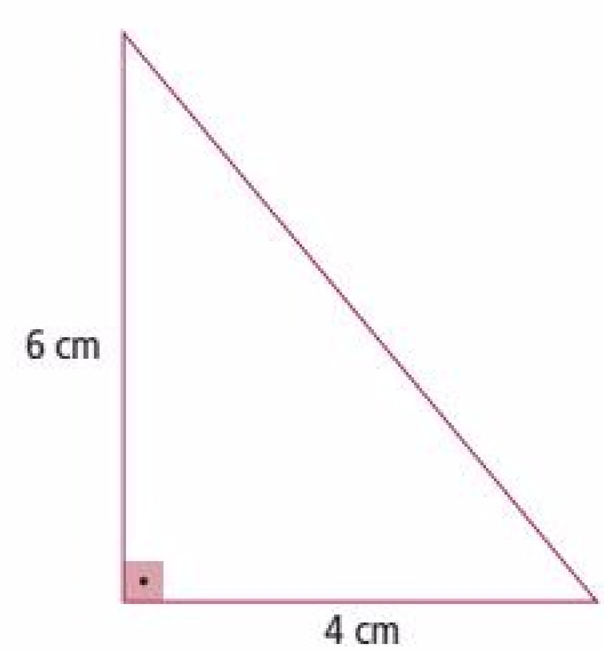
a) De acordo com o texto, os conceitos apresentados, acaso, serendipidade e *insight*, aproximam quais campos do conhecimento humano? Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Imagine uma obra de pintura em andamento, onde simplesmente a tela caia ao chão e é perfurada acidentalmente, provocando um rasgo no centro da obra. Diante da situação, o artista observa que o acontecido não foi de todo mal, alimentando ainda mais sua concepção. Esse caso compreende acaso, serendipidade ou *insight*, conforme apresentado no texto?

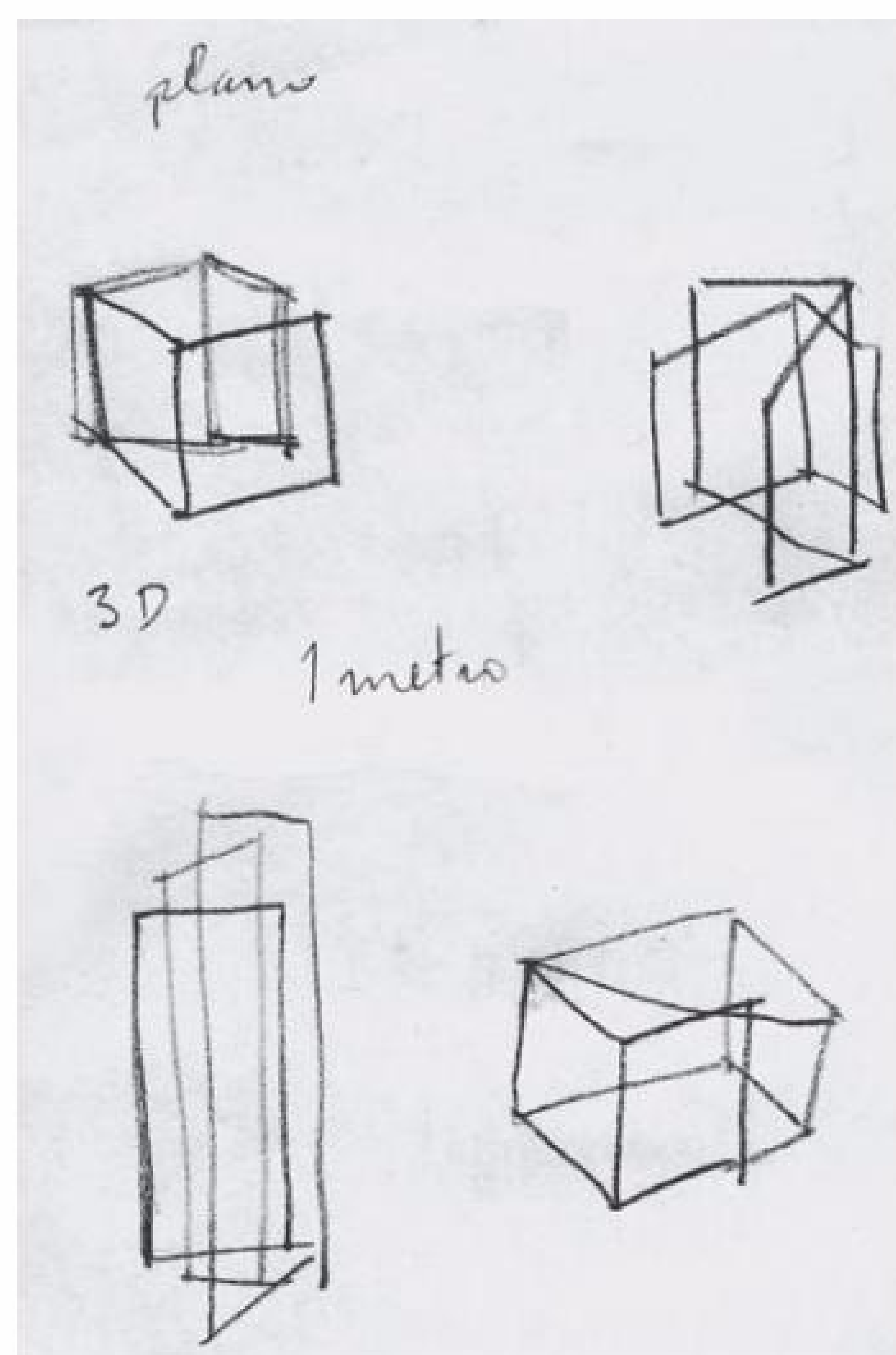
c) A construção de um artista, por vezes, passa pela fase do esboço, antes de seguir para o resultado final. A imagem ao lado representa os esboços do artista plástico Arnaldo Battaglini. Veja que o esboço não tem o tamanho real das construções.

i) Para chegar às medidas finais da construção real, sem perda da "essência" da obra em relação ao esboço, o artista precisaria utilizar qual conhecimento geométrico? Proporcionalidade.

ii) Um artista decidiu construir uma instalação com a forma de um triângulo retângulo em que cada lado do triângulo é formado por um tubo metálico. Para isso, ele fez o esboço ao lado. Sabendo que a instalação terá 3 metros de altura, quantos metros de tubo metálico seriam necessários para realizar a obra de arte? Considere $\sqrt{13} \simeq 3,6$.



Editoria de arte



Arnaldo Battaglini, Estudos em desenho para esculturas de parede, Disegno. Desenho. Designio / organização Edith Derdyk. – São Paulo : Editora Senac São Paulo, 2007, p.115

Esboço de uma obra de arte que utiliza conceitos geométricos.

d) Segundo uma lenda histórica, Isaac Newton, físico inglês, ao descansar sob uma macieira, foi surpreendido por uma maçã caindo sobre sua cabeça. Desse fato, surgiu a teoria da gravitação universal, que, de forma simplista, indica que os corpos sofrem ação de uma força invisível, de atração ao centro da Terra. Reflita e discuta com seus colegas qual dos três conceitos presentes em processos criativos se relaciona ao fato ocorrido na lenda de Isaac Newton.

CAPÍTULO 12

Trigonometria nos triângulos

Tábua Plimpton 322, uma das tábuas com escritas cuneiformes, oriunda da civilização babilônica e datada de cerca de 1700 a.C. Essa tábua contém uma tabela de ternas pitagóricas, ou seja, conjuntos de três números naturais que são medidas dos lados de um triângulo retângulo. A civilização babilônica adotava a base sexagesimal, utilizada até hoje nas medidas de ângulos em graus.

O significado da palavra trigonometria, do grego *trigonon*, "triângulo", e *metron*, "medida", se relaciona ao estudo dos lados e dos ângulos dos triângulos. Usamos a Trigonometria para resolver problemas geométricos que envolvem ângulos e distâncias.

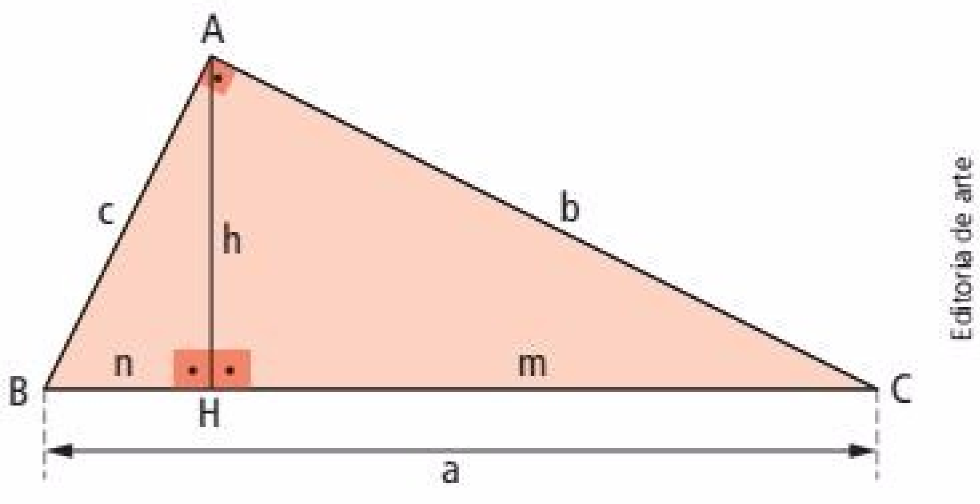
A origem da Trigonometria é incerta. No entanto, é possível afirmar que alguns de seus recursos já eram aplicados por antigas civilizações do Mediterrâneo e pela civilização egípcia. Além disso, o desenvolvimento dessa área da Matemática teve grande progresso com as necessidades geradas pelas navegações, astronomia e agrimensura.

Ao longo dos séculos, diversos estudiosos como Eratóstenes (276-195 a.C.), Hiparco de Niceia (190-120 a.C.) e Johann Müller (1436-1476) se dedicaram ao estudo da Trigonometria, dando importantes contribuições para o desenvolvimento e o aperfeiçoamento desse ramo da Matemática.

Neste capítulo, vamos estudar a Trigonometria aplicada aos triângulos.

Razões trigonométricas no triângulo retângulo

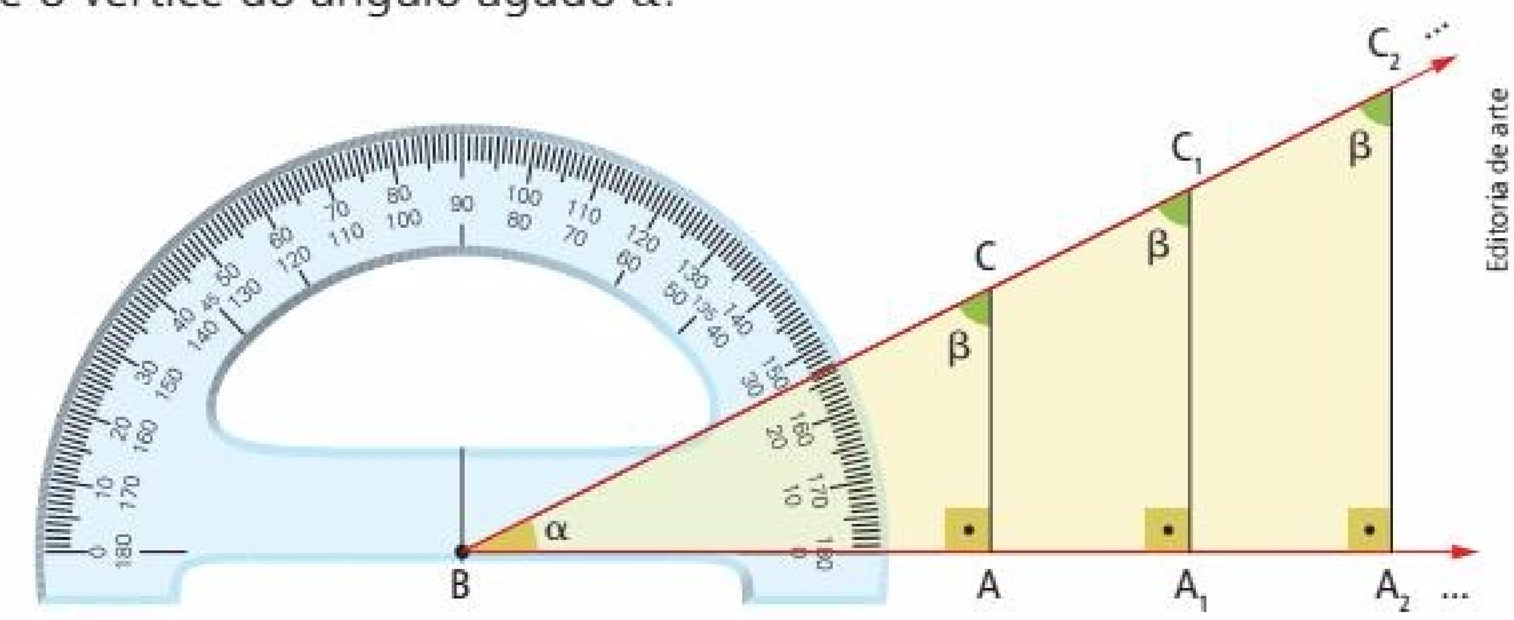
No capítulo anterior, apresentamos algumas relações métricas entre diferentes elementos de um triângulo retângulo. Por exemplo, estudamos a relação entre a hipotenusa e os catetos ($a^2 = b^2 + c^2$), a relação entre a altura relativa à hipotenusa e às suas projeções ortogonais ($h^2 = m \cdot n$) e a relação entre um cateto e a hipotenusa e sua respectiva projeção ($b^2 = a \cdot m$).



Agora, vamos estudar outras relações muito utilizadas, por exemplo, para determinar distâncias inacessíveis.

Seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo

Na figura abaixo, B é o vértice do ângulo agudo α.



Sobre um dos lados do ângulo tomamos arbitrariamente os pontos A, A_1, A_2... e, por esses pontos, traçamos perpendiculares ao lado $\overrightarrow{BA}$ que intersectam o outro lado do ângulo nos pontos C, C_1, C_2..., respectivamente. Obtemos, assim, os triângulos retângulos ABC, A_1BC_1, A_2BC_2..., que são semelhantes entre si pelo caso AA (ângulo-ângulo).

Assim, podemos escrever a seguinte relação:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = ... = k$$

A constante k não depende dos comprimentos dos segmentos envolvidos, e sim apenas do ângulo α.

Considerando o ângulo α como referência, essa relação é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida da hipotenusa, chamada de **seno de α** (**sen α**). Assim, escrevemos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} \quad (0° < \alpha < 90°)$$

Considerando novamente a semelhança de triângulos, podemos escrever a relação entre os segmentos de reta AB, A_1B, A_2B, ... e BC, BC_1, BC_2, ... respectivamente. Essa relação é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo α e a medida da hipotenusa, chamada de **cosseno de α** (**cos α**). Assim, escrevemos:

$$\cos \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AB}{BC} \quad (0° < \alpha < 90°)$$

Ainda considerando a semelhança de triângulos, podemos escrever a relação entre os segmentos de reta AC, A_1C_1, A_2C_2, ... e AB, A_1B, A_2B, ..., respectivamente. Essa relação é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo α e a medida do cateto adjacente ao ângulo α, chamada de **tangente de α** (**tg α**). Assim, escrevemos:

A tangente de um ângulo α também pode ser indicada por tan α. Essa notação aparece, por exemplo, na maioria das calculadoras científicas.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \frac{AC}{AB} \quad (0° < \alpha < 90°)$$

As razões $\text{sen } \alpha = \frac{AC}{BC}$, $\cos \alpha = \frac{AB}{BC}$ e $\text{tg } \alpha = \frac{AC}{AB}$ são chamadas de **razões trigonométricas** em relação ao ângulo α.

Considerando o ângulo β como referência e utilizando as relações correspondentes, as razões trigonométricas também são válidas, mas ao calculá-las obtemos outros valores. Assim, temos:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AB}{BC} \quad (0° < \beta < 90°)$$

$$\cos \beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \beta}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} \quad (0° < \beta < 90°)$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \beta} = \frac{AB}{AC} \quad (0° < \beta < 90°)$$

No final deste capítulo (página 245), apresentamos uma tabela com os valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos com medidas inteiras de 1° a 90°.

Relações entre razões trigonométricas

Vamos estudar algumas relações envolvendo seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo α.

1ª relação

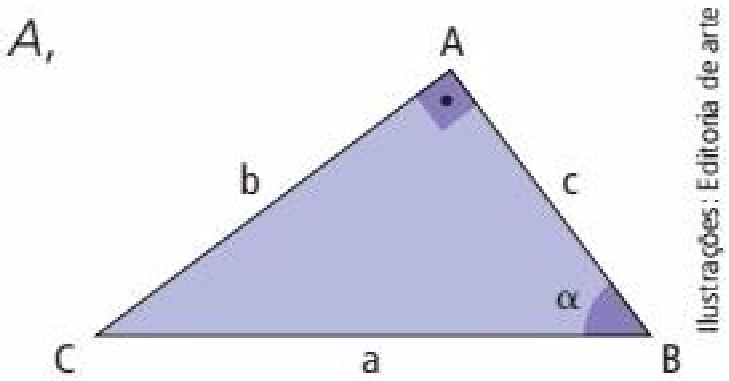
A soma do quadrado do seno de um ângulo agudo α com o quadrado do cosseno desse mesmo ângulo agudo α é igual a 1, ou seja:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Essa relação é chamada de **relação fundamental da trigonometria**.

Demonstração

Considere o triângulo ABC, retângulo em *A*, conforme figura ao lado.



Sendo $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$ e $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$, temos:

$$\begin{cases} \text{sen}^2\,\alpha = \dfrac{b^2}{a^2} \quad \text{(I)} \\[2ex] \cos^2\alpha = \dfrac{c^2}{a^2} \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Somando (I) e (II), membro a membro, obtemos:

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow \text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \quad \text{(III)}$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (III), temos: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Lembre-se de que ângulos complementares são dois ângulos cuja soma de suas medidas é igual a 90°.

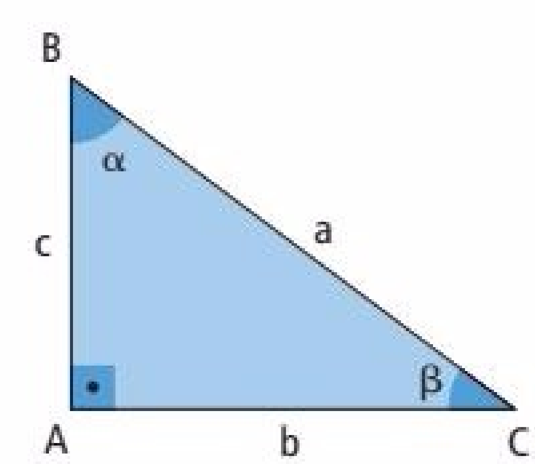
2ª relação

O seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento, ou seja:

$$\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90° - \alpha)$$

Demonstração

Considerando o triângulo ABC, retângulo em *A*, conforme figura ao lado, temos:



$$\begin{cases} \text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a} = \cos\beta \\[2ex] \text{sen}\,\beta = \dfrac{c}{a} = \cos\alpha \end{cases}$$

Como $\alpha + \beta = 90°$, obtemos: $\beta = 90° - \alpha$ ou $\alpha = 90° - \beta$. Assim, temos:

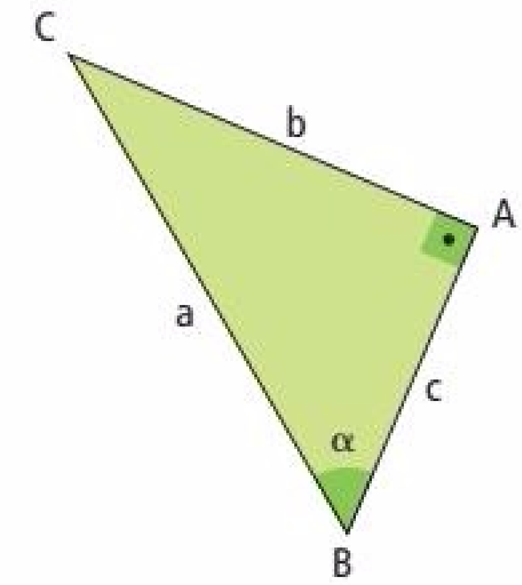
$\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90° - \alpha)$ ou $\text{sen}\,\beta = \cos\,(90° - \beta)$

3ª relação

A tangente de um ângulo agudo α é igual à razão entre o seno e o cosseno desse mesmo ângulo agudo α, ou seja:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Demonstração



Ilustrações: Editoria de arte

Considerando o triângulo ABC ao lado, temos: $\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a}$ e $\cos\alpha = \frac{c}{a}$

Dividindo sen α por cos α, obtemos:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \text{tg}\,\alpha$$

Exercícios resolvidos

1 Sabendo que sen 30° = 0,50 e cos 34° = 0,83, quais são os valores de cos 60° e sen 56°?

Resolução

Como o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno de seu complemento, vamos inicialmente determinar os complementos de 30° e de 34°.

$x + 30° = 90° \Rightarrow x = 60°$

$y + 34° = 90° \Rightarrow y = 56°$

Portanto, temos:

$\text{sen}\,30° = \cos 60° \Rightarrow \cos 60° = 0{,}5$

$\cos 34° = \text{sen}\,56° \Rightarrow \text{sen}\,56° = 0{,}83$

2 Sabendo que α é um ângulo agudo de um triângulo retângulo ABC e que $\cos(90° - \alpha) = \frac{1}{3}$, calcule o valor de tg α.

Resolução

Como $\text{sen}\,\alpha = \cos(90° - \alpha)$, então temos que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{3}$.

Pela relação fundamental, temos:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Pela 3ª relação, obtemos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

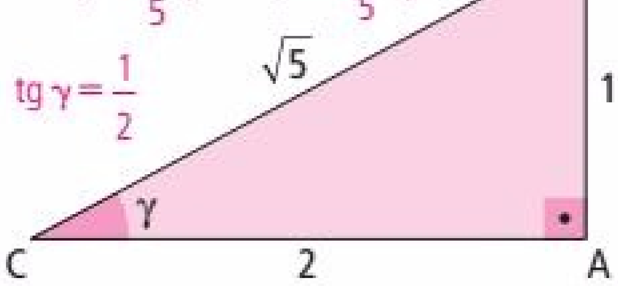
$$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Exercícios propostos

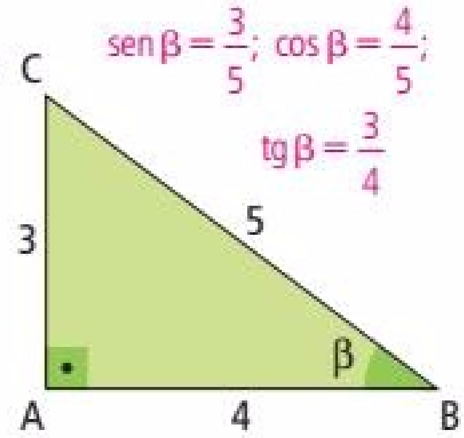
Escreva no caderno

1. Em cada caso, calcule o seno, o cosseno e a tangente do ângulo agudo destacado:

a) $\text{sen}\,\gamma = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos\gamma = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\text{tg}\,\gamma = \frac{1}{2}$



b) $\text{sen}\,\beta = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = \frac{4}{5}$; $\text{tg}\,\beta = \frac{3}{4}$



2. Em um triângulo retângulo, um cateto mede 15 cm, e a hipotenusa, 17 cm. Calcule o seno, o cosseno e a tangente do maior ângulo agudo desse triângulo.

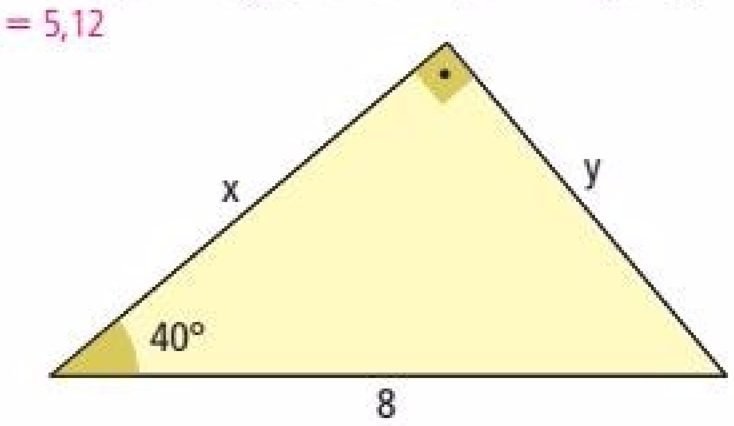
$\text{sen}\,\alpha = \frac{15}{17}$; $\cos\alpha = \frac{8}{17}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{15}{8}$

3. Sabendo que sen 10° = 0,17; sen 65° = 0,90 e cos 50° = 0,64, calcule:

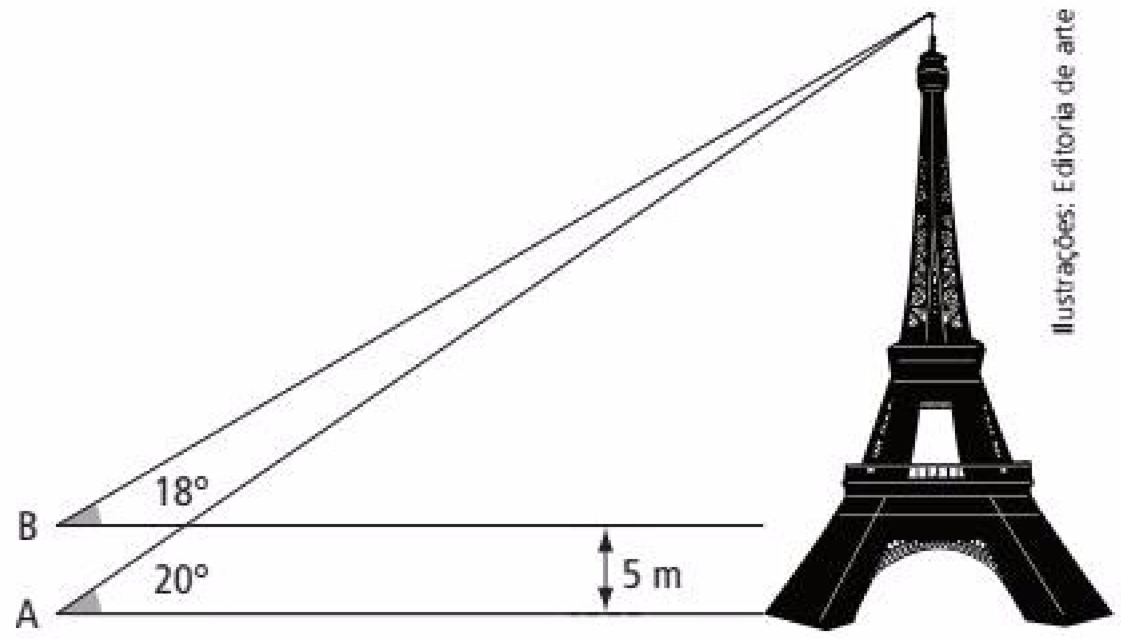
a) cos 25° 0,90 b) cos 80° 0,17 c) sen 40° 0,64

4. Calcule x e y no triângulo da figura.
(Dados: cos 40° = 0,77 e sen 40° = 0,64.)

$x = 6{,}16$; $y = 5{,}12$



5. (UFAL) De um ponto *A*, situado no mesmo nível da base de uma torre, o ângulo de elevação do topo da torre é de 20°. De um ponto *B*, situado na mesma vertical de *A* e 5 m acima, o ângulo de elevação do topo da torre é de 18°. Qual a altura da torre? Dados: use as aproximações tg 20° $\simeq$ 0,36 e tg 18° $\simeq$ 0,32.



Ilustrações: Editoria de arte

a) 42 m

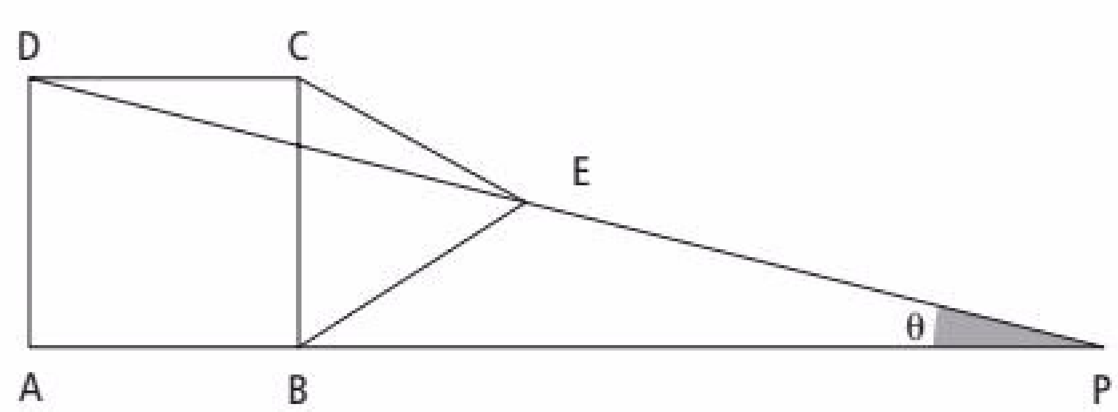
b) 43 m

c) 44 m

x d) 45 m

e) 46 m

6. (UFJF-MG) Na figura abaixo, estão representados o quadrado ABCD, de perímetro medindo 10 cm, e o triângulo equilátero BCE. Prolongam-se $\overline{DE}$ e $\overline{AB}$ até que se interceptem no ponto *P*, segundo um ângulo θ.



α	sen α	cos α	tg α
15°	0,26	0,97	0,27
30°	0,5	0,87	0,58
45°	0,71	0,71	1
60°	0,87	0,5	1,73
75°	0,97	0,26	3,73

Qual a medida aproximada do segmento DP? (Se necessário, use os valores da tabela acima.)

a) 37,04 cm

b) 17,24 cm

x c) 9,61 cm

d) 5,78 cm

e) 2,68 cm

7. A soma dos comprimentos das bases de um trapézio retângulo vale 30 m. A base maior mede o dobro da menor. Calcule a altura do trapézio, sabendo que seu ângulo obtuso mede 150°.
Considere sen 30° = 0,5. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ m

8. (UFMG) No triângulo ABC, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto, $BC = 5\sqrt{6}$ e $\cos(B\hat{A}C) = \frac{3}{\sqrt{15}}$. Considerando esses dados, calcule o comprimento do cateto $\overline{AB}$. 15

9. Em um triângulo retângulo, a tangente de um dos ângulos agudos é 1,05 e a soma dos comprimentos dos catetos é 41 cm. Qual é o comprimento da hipotenusa desse triângulo? 29 cm

10. Em uma noite, uma pessoa em um ponto de observação *A*, no solo, que está localizada a uma distância de 4 km do ponto de observação *B*, olhando na direção do ponto *B*, avistou, sob um ângulo de 50° (com a horizontal), um helicóptero. No mesmo instante, outra pessoa, localizada no ponto *B*, olhando na direção do ponto *A*, avistou o mesmo helicóptero, sob um ângulo de 45° (com a horizontal). Aproximadamente, a que altura do solo o helicóptero estava naquele momento? Considere sen 45° = cos 45° e tg 50° = 1,19.
Aproximadamente 2,17 km ou 2 170 m

mezzotint/Shutterstock.com

Nas grandes metrópoles, os helicópteros já são utilizados como meio de transporte.

11. Uma pessoa ao observar um edifício sob um ângulo de 45° conseguiu identificar o vigésimo andar do edifício. Sabendo que essa pessoa estava a 60 metros do edifício e que todos os andares têm a mesma altura, calcule a altura de cada andar. Considere sen 45° = cos 45°.

a) 2 m

b) 2,5 m

x c) 3 m

d) 3,5 m

e) 4 m

12. Uma pessoa, distante 10 m de um prédio, observa seu topo sob um ângulo de 58°. Ao afastar-se desse prédio, ainda observa o topo, porém, agora, sob um ângulo de 22°. Calcule a altura do prédio e a distância de afastamento entre os pontos de observação. Dados: tg 22° = 0,4 e tg 58° = 1,6.
O prédio possui 16 metros de altura e a pessoa se afastou 30 m.

Explorando a tecnologia

Razões trigonométricas usando o GeoGebra

Estudamos que as razões trigonométricas em um triângulo retângulo não dependem dos lados, e sim do ângulo em questão. Nesta seção, com o auxílio do GeoGebra, vamos comprovar esse fato com a construção de dois triângulos retângulos semelhantes. Para isso, siga a sequência de passos abaixo.

1. Clique em qualquer ponto da **Janela de Visualização** com o botão direito do *mouse* e clique em "Eixos" e, também, em "Malha". Desse modo os eixos ficam ocultos e aparecerá somente a malha.

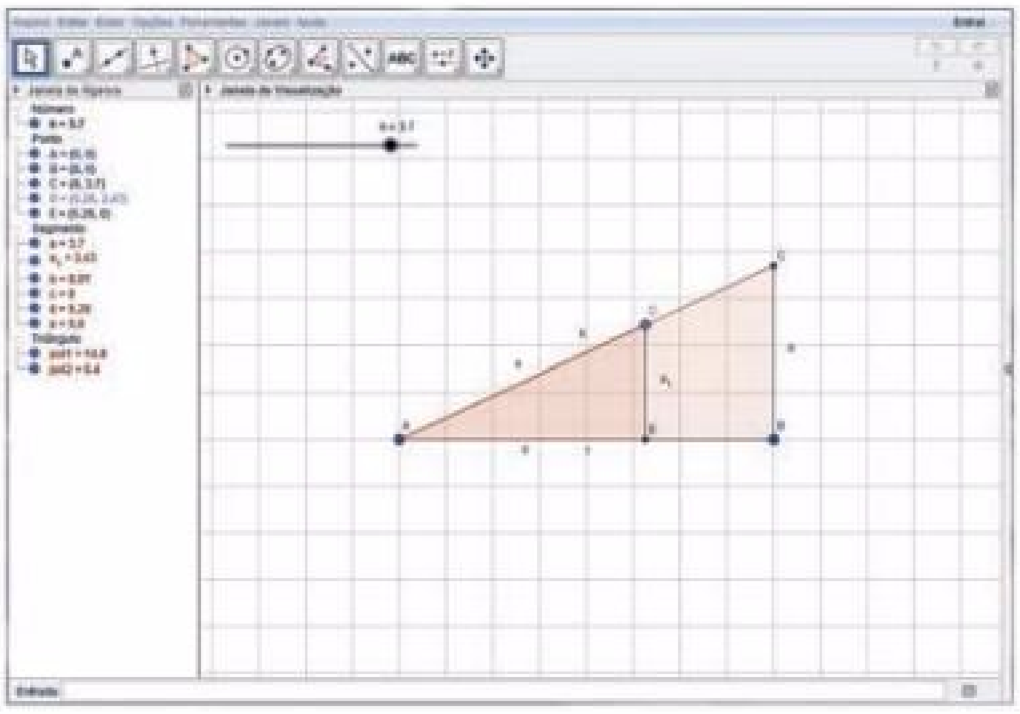
2. No **Campo de Entrada**, digite as coordenadas dos pontos *A*, *B* e *C* da seguinte forma: 'A=(0,0)', 'B=(8,0)' e 'C=(x(B),h)'. O programa exibirá uma tela perguntando se você deseja criar um controle deslizante para o parâmetro *h*. Clique em "Criar Controles Deslizantes".
A indicação x(B) significa que o ponto *C* possui a mesma abscissa de *B*. Desse modo, garantimos que o segmento BC sempre será perpendicular ao segmento AB, com comprimento igual ao valor do parâmetro *h*.

3. Utilizando a ferramenta **Polígono**, , clique sobre os pontos *A*, *B*, *C* e *A*, nesta ordem.

4. Selecione a ferramenta **Ponto**, , e clique em qualquer lugar sobre o segmento *b* (formado pelos vértices *A* e *C* do triângulo), criando o ponto *D*.

5. No **Campo de Entrada**, digite 'E=(x(D),y(A))' para criar o ponto *E* que tem a mesma abscissa do ponto *D* e a mesma ordenada do ponto *A*. Desse modo, o segmento DE será sempre perpendicular ao lado AB e paralelo ao lado BC. Além disso, o ponto *E* será sempre um ponto pertencente ao lado AB.

6. Utilizando a ferramenta **Polígono** novamente, clique sobre os pontos *A*, *E*, *D* e *A*, nesta ordem.
A tela do GeoGebra ficará semelhante à figura abaixo.



Crédito de imagens: Geogebra

7. No **Campo de Entrada**, digite 'DE/AD'. **Na Janela de Álgebra**, aparecerá o número *f*, que representa a razão $f = \frac{DE}{AD}$. Em seguida, digite 'AE/AD' que será representado pela letra *g* e 'DE/AE' que será representado pela letra *i*.

8. Repita o processo do passo anterior, digitando: 'BC/AC' que será representado pela letra *j*, 'AB/AC' que será representado pela letra *k* e 'BC/AB' que será representado pela letra *l*. Observe que alguns dos números *f*, *g*, *i*, *j*, *k* e *l* têm valores iguais.

9. Altere a posição do controle deslizante *h* e verifique que os valores das razões se alteram, porém mantendo a igualdade observada anteriormente. Por outro lado, ao mudar a posição do ponto *D* nenhum dos valores se altera, mesmo alterando as medidas dos lados AD, AE e DE.

Atividades

Escreva no caderno

1. Os triângulos ABC e AED construídos são semelhantes. Indique o caso de semelhança e justifique.
Veja o Manual do Professor.

2. Utilize a ferramenta **Ângulo**, , e indique qual é a classificação desses triângulos em relação a seus ângulos.

3. Ao observar a **Janela de Álgebra**, percebemos que *f* tem o mesmo valor de *j*, assim como os pares de números *g* e *k*, e *i* e *l*. O que essas razões representam? O que podemos concluir com essa informação?

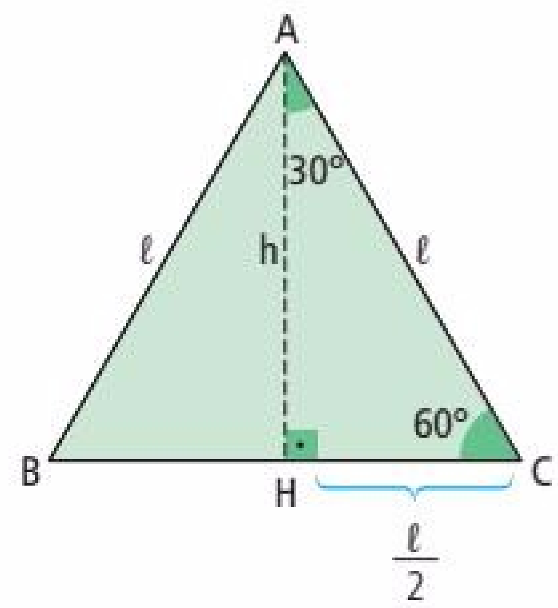
4. Ao alterar o valor do controle deslizante *h* todos os pares de números se alteram igualmente. Qual é o elemento da construção que se altera com a mudança do valor *h*? O que podemos concluir a partir disso?

5. Utilizando seus conhecimentos de trigonometria e com base nas respostas das questões anteriores, identifique cada um dos números *f*, *g* e *i* como cada uma das razões trigonométricas.

Ângulos notáveis

Os ângulos de 30°, 45° e 60° são conhecidos como **ângulos notáveis**. Esses ângulos aparecem com frequência em muitas situações e as razões trigonométricas relacionadas a eles podem ser obtidas a partir da análise das medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo equilátero e de um triângulo retângulo isósceles, como mostrado a seguir.

Seno, cosseno e tangente dos ângulos de 30° e 60°



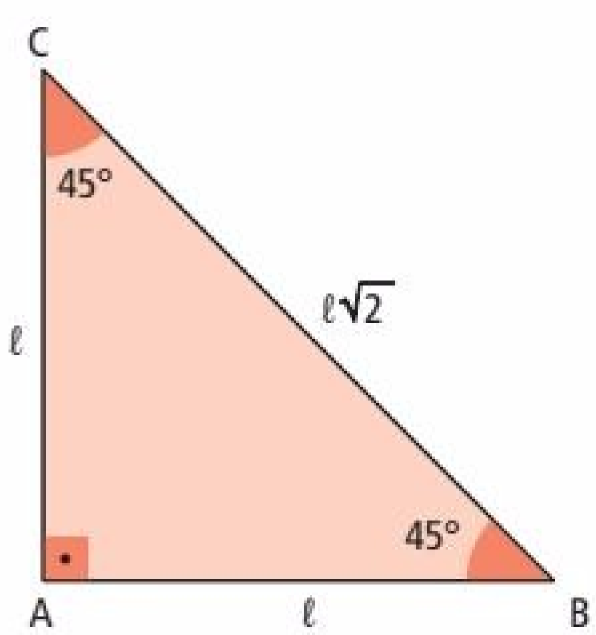
Ilustrações: Editoria de arte

Considere um triângulo equilátero ABC, no qual ℓ é a medida dos lados e $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ é a medida da altura relativa ao lado BC, conforme mostra a figura ao lado.

Do triângulo retângulo AHC, reto em *H*, obtemos as seguintes razões:

- $\operatorname{sen} 30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2}$
- $\cos 30° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{2}{\ell\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$
- $\operatorname{sen} 60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos 60° = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{\ell}{2} \cdot \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{2}$
- $\operatorname{tg} 60° = \dfrac{\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{2}{\ell} = \sqrt{3}$

Seno, cosseno e tangente do ângulo de 45°



Considere um triângulo retângulo e isósceles ABC, no qual ℓ é a medida dos catetos e $\ell\sqrt{2}$ é a medida da hipotenusa, conforme mostra a figura ao lado.

A partir desse triângulo ABC, obtemos as seguintes razões:

- $\operatorname{sen} 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\cos 45° = \dfrac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- $\operatorname{tg} 45° = \dfrac{\ell}{\ell} = 1$

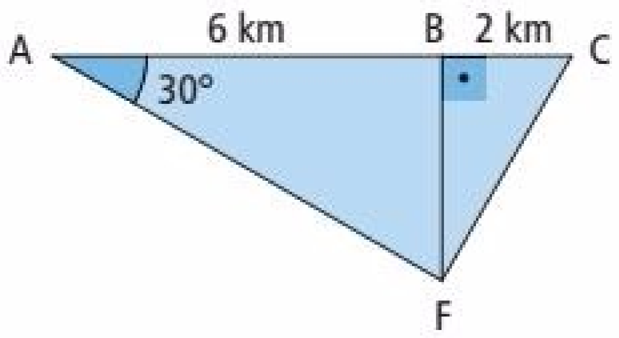
Podemos organizar as razões trigonométricas dos ângulos notáveis em uma tabela, como a apresentada a seguir. Ela será bastante utilizada nas resoluções dos exercícios e evita ter de fazer cálculos com valores aproximados como os que aparecem na tabela completa da página 245.

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exercício resolvido

3 (UFV-MG) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B e C. O comandante, quando o navio está em A, observa um farol F e determina que o ângulo $F\hat{A}C$ mede 30°. Após navegar 6 km até o ponto B, ele verifica que o ângulo $F\hat{B}C$ mede 90°. Calcule a distância, em km, que separa o farol F do navio quando este se encontra no ponto C, situado a 2 km do ponto B.

Resolução



A figura ao lado representa a situação.

Do triângulo retângulo ABF, obtemos: $\text{tg } 30° = \frac{BF}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{BF}{6} \Rightarrow BF = 2\sqrt{3}$

Logo, a distância BF é igual a $2\sqrt{3}$ km.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCF, temos:

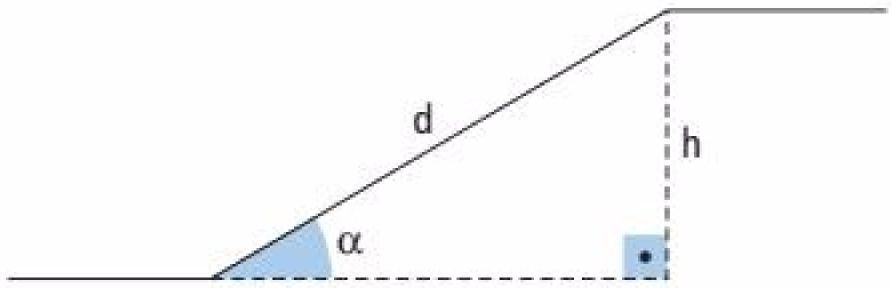
$(BF)^2 + (BC)^2 = (CF)^2 \Rightarrow (CF)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 \Rightarrow CF = \sqrt{16} \Rightarrow CF = 4$

Portanto, a distância entre o farol e o navio, no ponto C, é de 4 km.

Exercícios propostos

Escreva no caderno

13. (UFG-GO) Uma pessoa deseja subir uma rampa de comprimento d que forma um ângulo α com a horizontal. Após subir a rampa, esta pessoa estará h metros acima da posição em que se encontrava inicialmente, como mostra a figura abaixo:

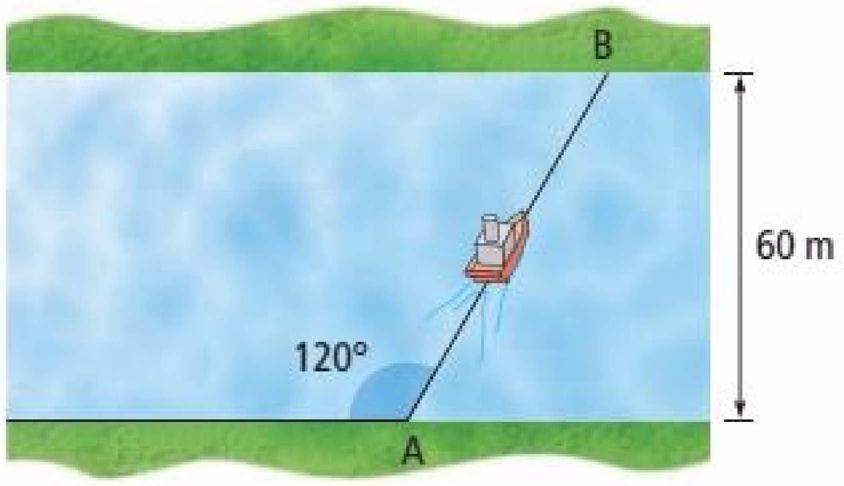


a) Que relação existe entre os valores de α, h e d? $\text{sen } \alpha = \frac{h}{d}$

b) Supondo $\alpha = 30°$ e $h = 1$ m, qual o valor de d? 2 metros

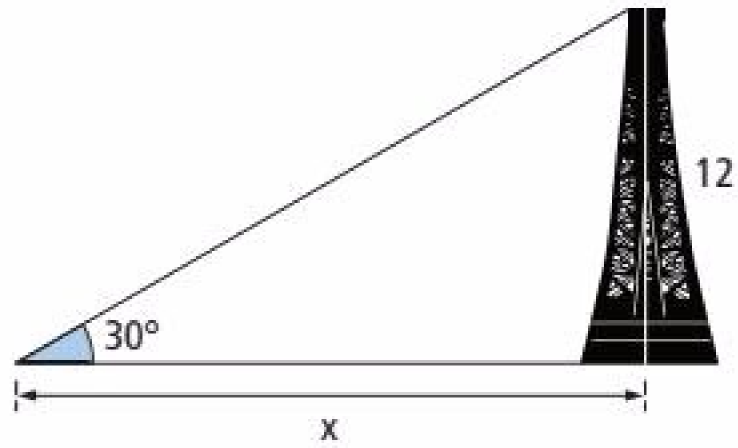
14. Um barco parte de A para atravessar um rio. A direção de seu deslocamento forma um ângulo de 120° com a margem do rio.

Sendo a largura do rio 60 m, qual é a distância AB percorrida pelo barco? $40\sqrt{3}$ metros



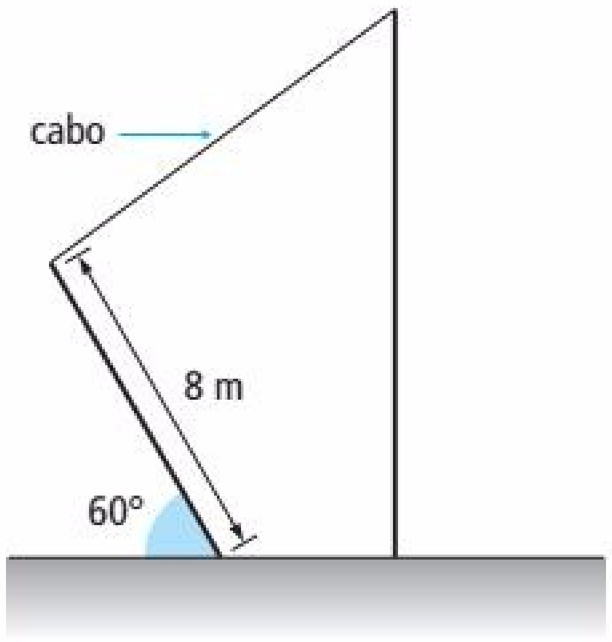
15. Uma escada, que mede 2,20 m de comprimento, acha-se apoiada em uma parede vertical e forma um ângulo de 60° como plano horizontal. Se uma pessoa está no topo da escada, a que altura ela se encontra do chão? (Use $\sqrt{3} = 1,73$.) 1,90 m

16. Uma torre vertical, de 12 metros de altura, é vista sob um ângulo de 30° por uma pessoa que se encontra a uma distância x da sua base. O plano da base da torre está no nível dos olhos do observador. Determine a distância x. (Dado: tg 30° = 0,58.) $x \simeq 20,6$ m



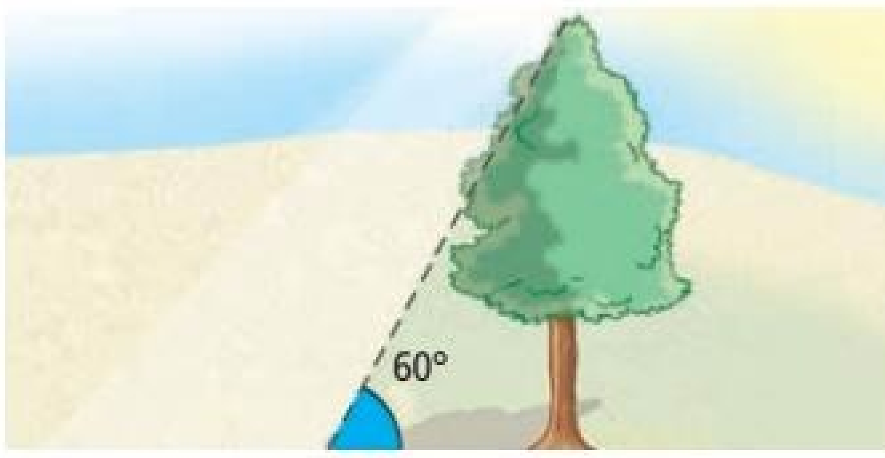
Ilustrações: Editoria de arte

17. (UFG-GO) Para dar sustentação a um poste telefônico, utilizou-se um outro poste com 8 m de comprimento, fixado ao solo a 4 m de distância do poste telefônico, inclinado sob um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo.



Considerando-se que foram utilizados 10 m de cabo para ligar os dois postes, determine a altura do poste telefônico em relação ao solo. 12,93 m

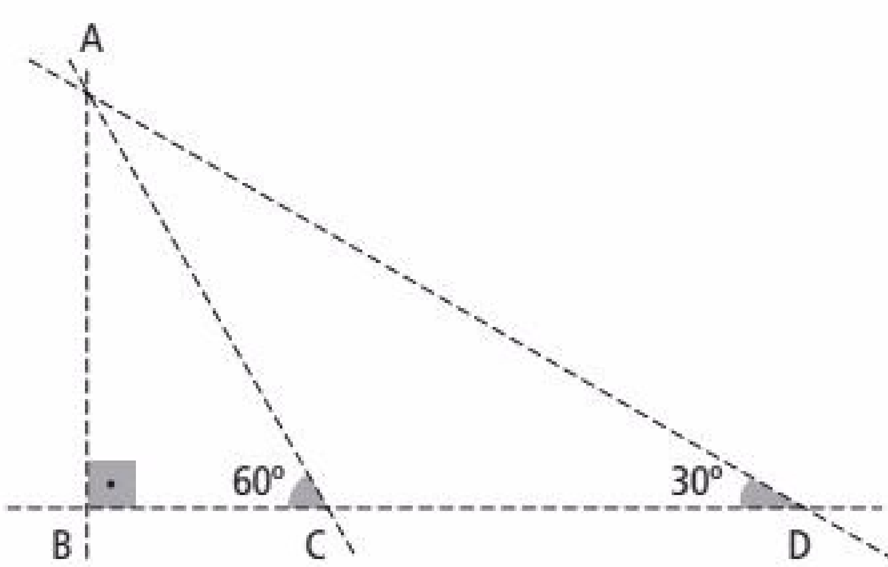
18. Em certa hora do dia, os raios do Sol incidem sobre um local plano com uma inclinação de 60° em relação ao plano horizontal.



Ilustrações: Editoria de arte

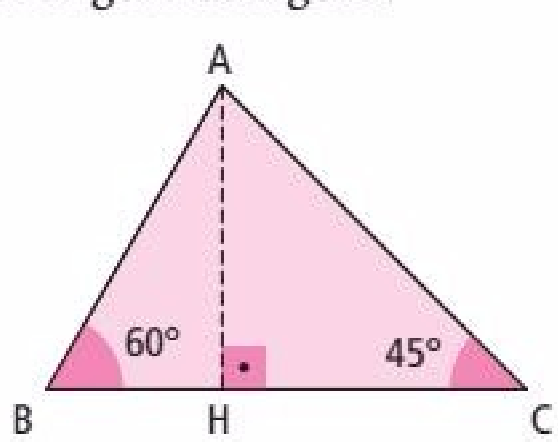
Nesse momento, qual é a altura de uma árvore que projeta uma sombra de 2,8 m de comprimento? (Use $\sqrt{3} = 1{,}73$.) 4,84 m

19. (IFSC) A ilustração a seguir representa a planta das ruas de uma cidade. A rua representada pelo segmento $\overline{BC}$ tem 50 m de comprimento. Um dos engenheiros do projeto de pavimentação dessas ruas esqueceu de indicar algumas distâncias. Considerando que um de seus técnicos efetuou os cálculos, é CORRETO afirmar que o total de metros da rua que vai do ponto *A* até o ponto *D* é de:



a) $50\sqrt{3}$ m
b) $150\sqrt{3}$ m
c) 50 m
d) 100 m
x e) $100\sqrt{3}$ m

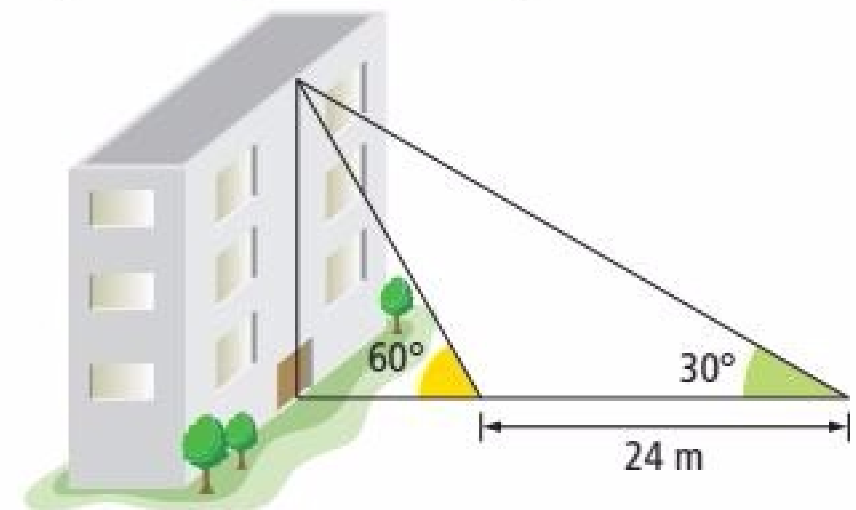
20. Considere o triângulo da figura:



Sabendo que $AB = 4\sqrt{6}$, calcule a medida de $\overline{AC}$ e $\overline{AH}$. $\overline{AC} = 12$ e $\overline{AH} = 6\sqrt{2}$

21. Na figura $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$, AB = 6 cm, AD = 4 cm e os ângulos internos de vértices *A* e *B* têm as medidas indicadas. Qual é a área, em centímetros quadrados, do quadrilátero ABCD? $8\sqrt{3}$ cm²

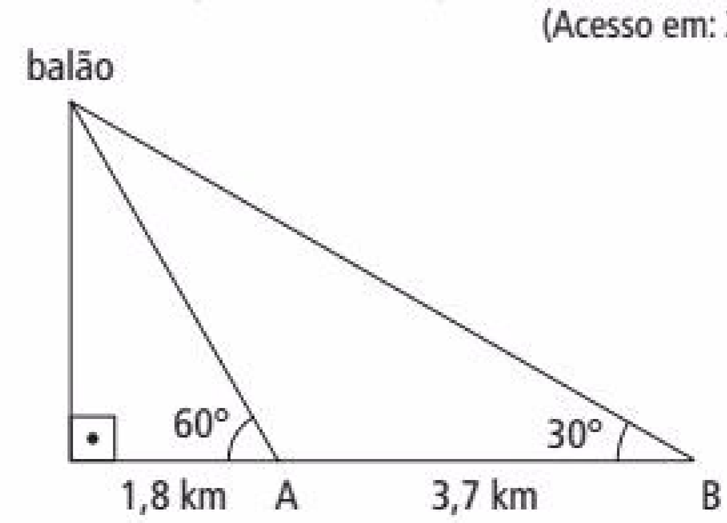
22. A partir de um ponto, observa-se o topo de um prédio sob um ângulo de 30°. Caminhando 24 m em direção ao prédio, atingimos outro ponto, de onde se vê o topo do prédio segundo um ângulo de 60°.



Desprezando a altura do observador, calcule, em metros, a altura do prédio. $12\sqrt{3}$ m

23. (Enem/MEC) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a Noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

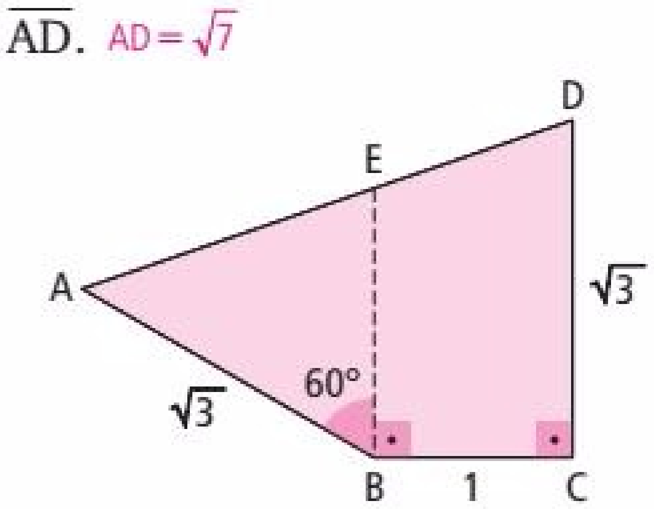
Disponível em: <http://www.correiodobrasil.com.br>.
(Acesso em: 2 maio 2010.)



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira, e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

a) 1,8 km
b) 1,9 km
x c) 3,1 km
d) 3,7 km
e) 5,5 km

24. (Fuvest-SP) No quadrilátero ABCD da figura abaixo, *E* é um ponto sobre o lado $\overline{AD}$ tal que o ângulo $A\hat{B}E$ mede 60° e os ângulos $E\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são retos. Sabe-se ainda que $AB = CD = \sqrt{3}$ e $BC = 1$. Determine a medida de $\overline{AD}$. $AD = \sqrt{7}$



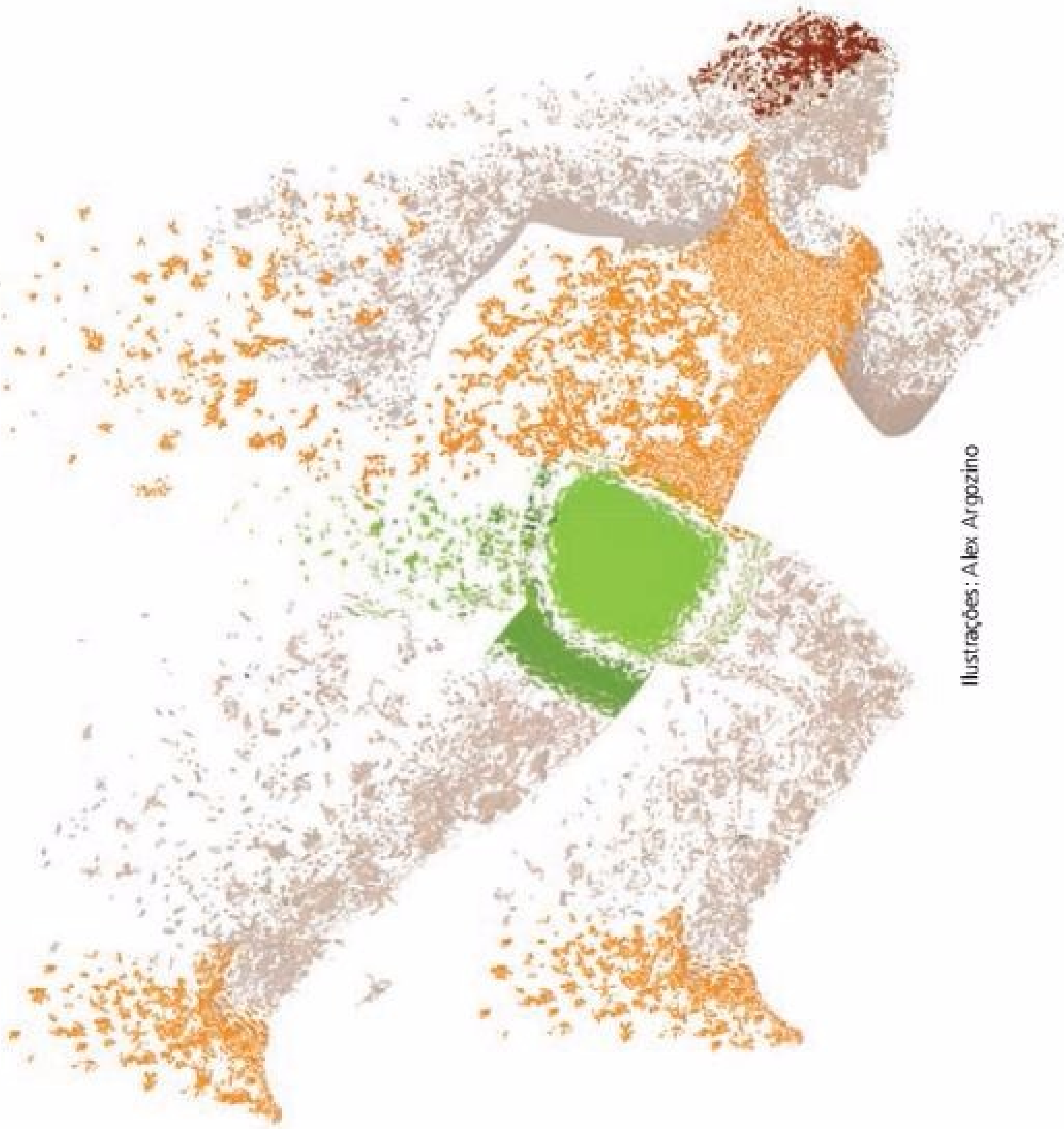
25. A prática esportiva auxilia no desenvolvimento saudável do organismo. Há um ramo da ciência específico para estudar as forças envolvidas no esporte, assunto diretamente relacionado à Física e à Matemática. Leia o texto a seguir a respeito de biomecânica do esporte e faça o que se pede.

Biomecânica do esporte e do exercício

[...] O termo biomecânica pode ser dividido em duas partes: o prefixo *bio-* e a palavra raiz *mecânica*. O prefixo *bio-* indica relação com sistemas vivos ou biológicos. [...] Nós poderíamos definir biomecânica do esporte e do exercício como o estudo das forças e de seus efeitos nos humanos envolvidos no exercício e no esporte.

Melhora no desempenho

A meta mais importante da biomecânica do esporte e do exercício é a melhora no desempenho na atividade em questão. Um objetivo secundário é a prevenção de lesão e a reabilitação. Essa segunda meta é fortemente relacionada à primeira e quase poderia ser considerada parte desta, visto que um atleta sem lesões apresentará melhor desempenho do que um praticante lesionado. Bem, como os biomecânicos trabalham para atingir essas metas?


Ilustrações: Alex Argozino

A prática de esportes associada a uma alimentação saudável é fundamental para uma boa qualidade de vida.

Melhora da técnica

O método mais comum para a melhora do desempenho em muitos esportes é aperfeiçoar a técnica do atleta. [...] A aplicação da biomecânica para aprimorar a técnica pode ocorrer de duas formas: professores e treinadores podem usar seus conhecimentos sobre mecânica para corrigir as ações de um estudante ou atleta com o intuito de melhorar a execução de uma habilidade ou um pesquisador da área pode descobrir uma técnica nova e mais efetiva para a realização de uma habilidade esportiva. No primeiro exemplo, professores e treinadores usam métodos qualitativos de análise biomecânica no ensino e no treinamento diário para efetuar mudanças na técnica. No segundo, um pesquisador usa métodos quantitativos de análise biomecânica para descobrir novas técnicas, as quais podem ser divulgadas para professores e treinadores, que as implementarão. [...]

Fonte: McGINNIS, Peter M. **Biomecânica do esporte e do exercício**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2015. p. 3-4.

a) Qual é o principal objetivo da biomecânica do esporte e do exercício? E como a biomecânica pode ser aplicada para o alcance desses resultados? Veja a seção *Resoluções* no Manual do Professor.

b) Analisar as pisadas de um atleta de atletismo de alto rendimento pode auxiliar em um direcionamento de treinamento corretivo, ampliando seu desempenho. A imagem ao lado representa a pisada de um atleta, na qual a força de reação vertical do solo, em relação ao pé do atleta, é de 1 200 N. Se a força de atrito aplicada é de 600 N, determine o ângulo entre a força resultante e o solo.

c) A prática esportiva é fundamental para o desempenho de todo cidadão. Discuta com os colegas as práticas esportivas realizadas por você, com base nos questionamentos abaixo.

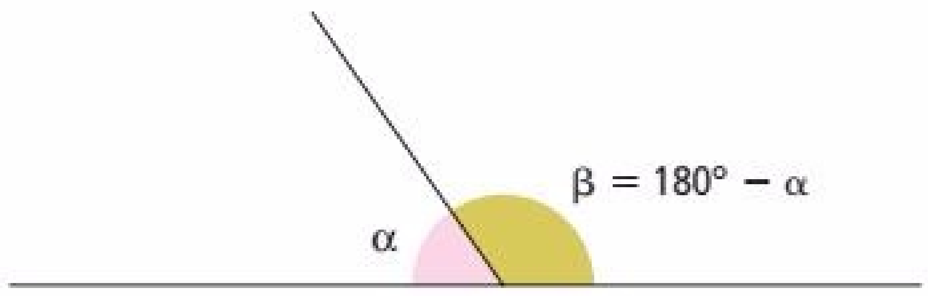
- Quais são os benefícios dessas práticas ao seu corpo e à sua mente?
- Elas são acompanhadas por um profissional de Educação Física?
- Qual é a importância de as atividades serem acompanhadas por um profissional?

d) Pesquise vídeos na internet que apresentem atividade realizada com o acompanhamento de profissionais da biomecânica. Compartilhe com seus colegas e, em conjunto, escolham o vídeo mais interessante sobre o assunto.

Seno e cosseno de ângulos suplementares

Já definimos as razões trigonométricas seno e cosseno de um ângulo agudo. Contudo, é possível ampliar os conceitos de seno e cosseno para ângulos de quaisquer medidas. Esse conteúdo será estudado no volume 2 desta coleção.

No entanto, para dar prosseguimento ao estudo dos conteúdos deste capítulo, será necessário calcular o seno e o cosseno de alguns ângulos obtusos. Por isso, neste momento, vamos apenas definir o seno e o cosseno do ângulo de 90° e de ângulos obtusos ($90° < \beta < 180°$), ou seja, sen $(180° - \alpha)$ e cos $(180° - \alpha)$, em que α é um ângulo agudo.



Lembre-se de que ângulos suplementares são dois ângulos cuja soma de suas medidas é igual a 180°.

- O seno do ângulo de medida 90° é igual a 1, ou seja, $\boxed{\text{sen } 90° = 1}$.
- O cosseno do ângulo de medida 90° é igual a 0, ou seja, $\boxed{\cos 90° = 0}$.
- O seno de um ângulo obtuso é igual ao seno do suplemento desse ângulo, ou seja:

$$\boxed{\text{sen } \alpha = \text{sen } (180° - \alpha)}$$

- O cosseno de um ângulo obtuso é oposto ao cosseno do suplemento desse ângulo, ou seja:

$$\boxed{\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)}$$

Exemplos de utilização dessas relações:

a) $\text{sen } 135° = \text{sen } (180° - 135°) = \text{sen } 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 150° = -\cos (180° - 150°) = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Lei dos cossenos

Em algumas situações, podemos modelar um problema por meio de um triângulo qualquer, em que é necessário calcular uma ou mais medidas dos lados ou dos ângulos. Para realizar esses cálculos utilizamos a **lei dos cossenos**, enunciada a seguir.

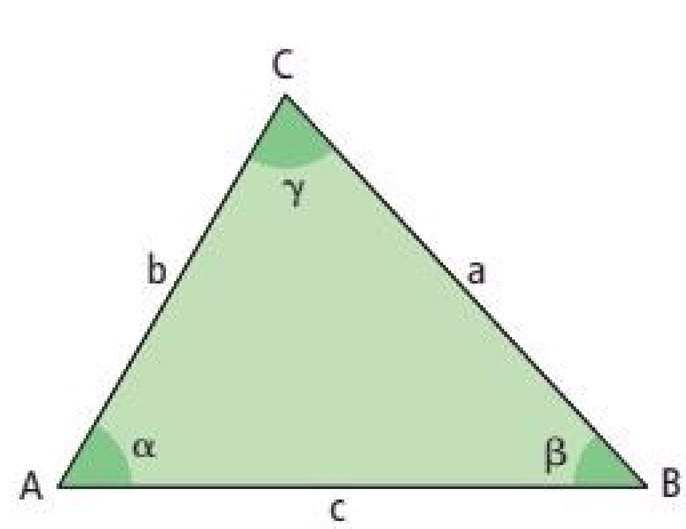
Em qualquer triângulo, o quadrado da medida de um lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois lados menos o dobro do produto das medidas desses lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Assim, dado um triângulo ABC qualquer com as medidas dos lados e dos ângulos como indicado na figura abaixo, podemos escrever:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

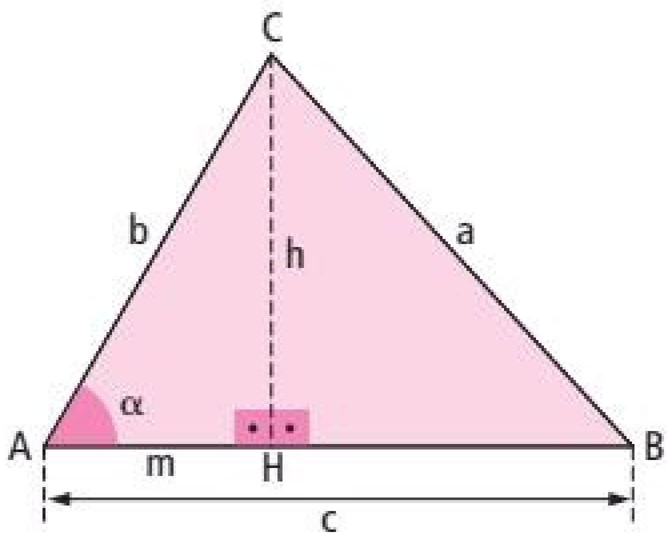


Ilustrações: Editoria de arte

Vamos demonstrar apenas a primeira expressão, para o ângulo α, as demais são análogas. Para isso, precisamos demonstrar a validade da expressão para os casos em que α é um ângulo de um triângulo acutângulo, obtusângulo e retângulo. Acompanhe a seguir cada um desses casos.

1º caso: triângulo acutângulo

Considere o triângulo acutângulo ABC, no qual $\overline{CH}$ é a altura relativa ao lado AB, conforme mostra a figura.



No triângulo retângulo BCH, temos: $a^2 = h^2 + (c - m)^2$ (I)

No triângulo retângulo ACH, temos: $b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos:

$a^2 = b^2 - m^2 + (c - m)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m$ (III)

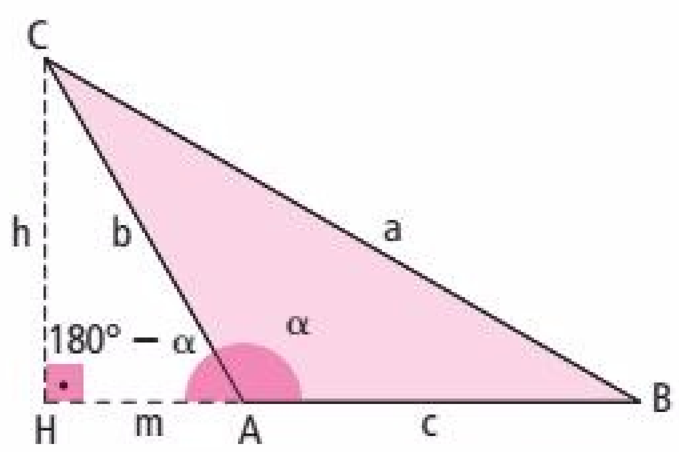
Ainda no triângulo retângulo ACH, temos: $\cos \alpha = \dfrac{m}{b} \Rightarrow m = b \cdot \cos \alpha$ (IV)

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot m \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot (b \cdot \cos \alpha) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

2º caso: triângulo obtusângulo

Considere o triângulo obtusângulo ABC, no qual $\overline{CH}$ é a altura relativa ao lado AB e $\hat{A}$ é o ângulo obtuso, conforme mostra a figura.



No triângulo retângulo BCH, temos: $a^2 = h^2 + (c + m)^2$ (I)

No triângulo retângulo ACH, temos: $b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2$ (II)

Substituindo (II) em (I), temos: $a^2 = b^2 - m^2 + (c + m)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot m$ (III)

Ainda no triângulo retângulo ACH, temos:

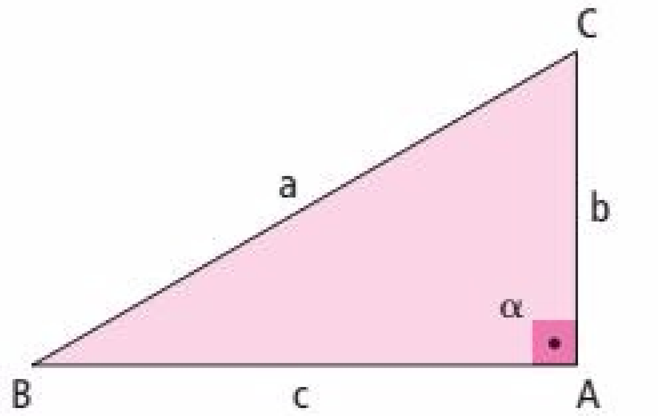
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{m}{b} \Rightarrow m = -b \cdot \cos \alpha \quad \text{(IV)}$$

Substituindo (IV) em (III), obtemos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot (-b \cdot \cos \alpha) \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

3º caso: triângulo retângulo

Considere um triângulo ABC retângulo em *A*, conforme mostra a figura.



Ilustrações: Editoria de arte

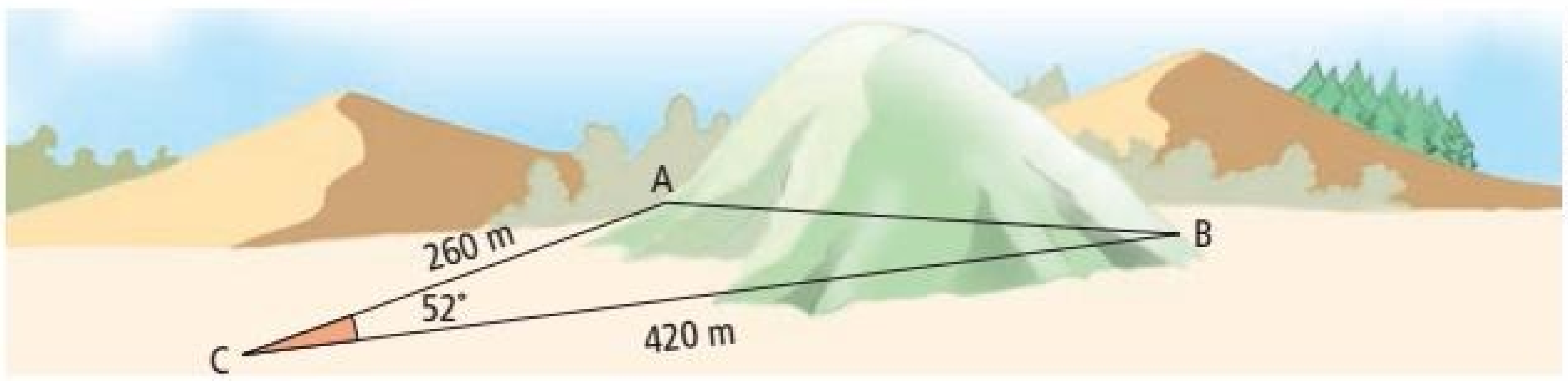
Como α é o ângulo reto e cos 90° = 0, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \underbrace{\cos 90°}_{0} \Rightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Note que, em relação ao ângulo reto, a lei dos cossenos fica reduzida ao teorema de Pitágoras.

Exercício resolvido

4 Um engenheiro quer construir um túnel entre os pontos *A* e *B*, onde se localiza um morro, conforme o esquema abaixo. Do ponto *C* ele visualiza os pontos *A* e *B* e obtém os valores AC = 260 m, BC = 420 m e $A\widehat{C}B = 52°$.



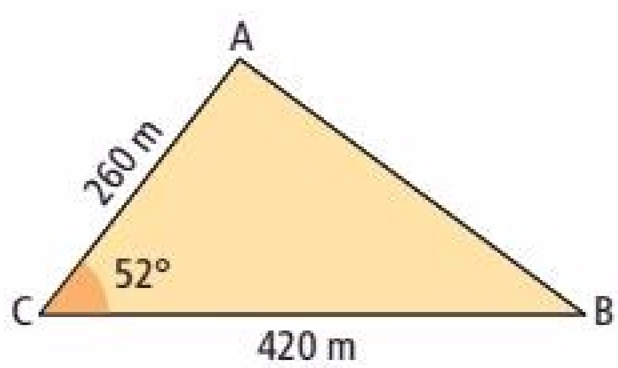
Alberto De Stefano

Qual será o comprimento desse túnel?

(Use cos 52° = 0,62.)

Resolução

Representando o triângulo, temos:



Aplicando a lei dos cossenos:

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2 \cdot (AC) \cdot (BC) \cdot \cos 52°$

$(AB)^2 = 260^2 + 420^2 - 2 \cdot 260 \cdot 420 \cdot 0{,}62$

$AB^2 = 67\,600 + 176\,400 - 135\,408$

$AB^2 = 108\,592$

$AB \simeq 329{,}53$

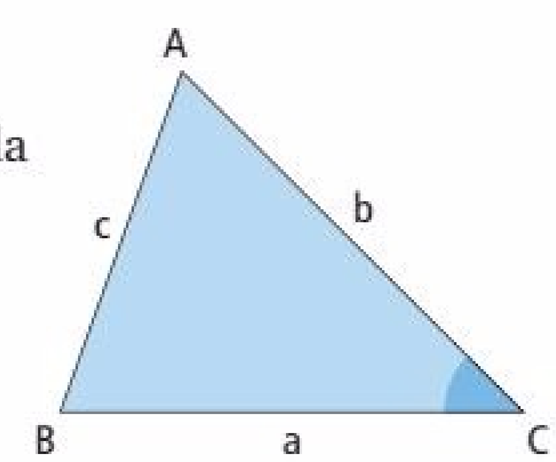
Portanto, o comprimento do túnel será de aproximadamente 329,53 m.

Exercícios propostos

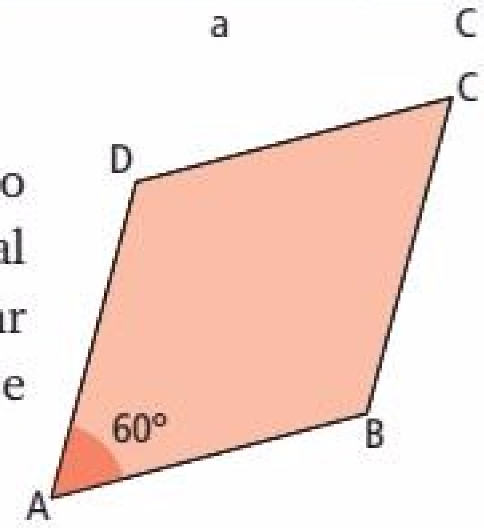
Escreva no caderno

26. Em um triângulo, *A* e *B* são vistos de *C* sob um ângulo de 60°. Se AC = 80 m e BC = 100 m, qual é a medida de $\overline{AB}$? AB ≃ 91,65 m

27. Calcule a medida *c* indicada na figura, sabendo que $a = 4$, $b = 3\sqrt{2}$ e $\text{med}(\widehat{C}) = 45°$. $c = \sqrt{10}$



28. (UFSC) No losango ABCD, o ângulo Â mede 60° e a diagonal AC mede $8\sqrt{3}$ m. Determinar (em metro) o perímetro desse losango. 32 m

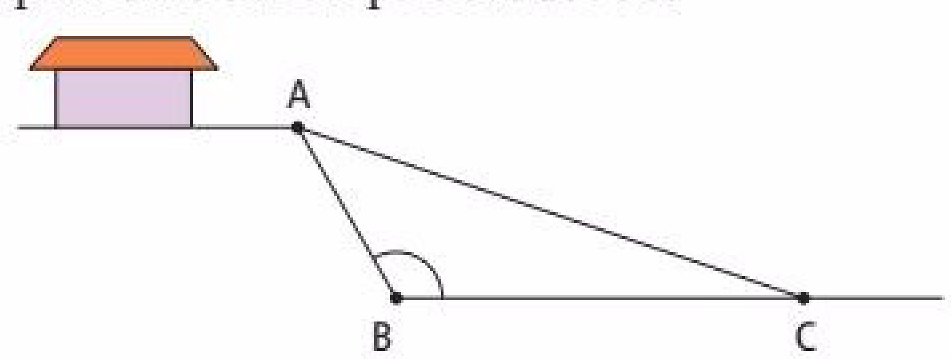


29. (UERJ) Um triângulo tem lados 3, 7 e 8. Um dos seus ângulos é igual a:

a) 30° b) 45° X c) 60° d) 90° e) 120°

30. Em um paralelogramo, dois lados consecutivos medem 7 cm e 4 cm, e a diagonal menor mede $\sqrt{37}$ cm. Calcule as medidas dos ângulos desse paralelogramo. 60° e 120°

31. (UEPA) A figura a seguir mostra o corte lateral de um terreno onde será construída uma rampa reta $\overline{AC}$, que servirá para o acesso de veículos a casa, que se encontra na parte mais alta do terreno. A distância de *A* a *B* é de 6 m, de *B* a *C* é de 10 m e o menor ângulo formado entre $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ é de 120°. Então, o valor do comprimento da rampa deve ser de:

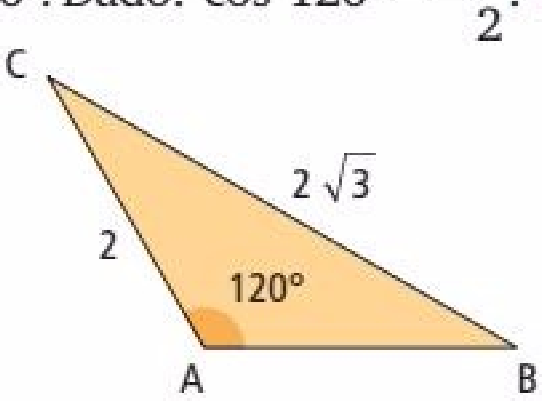


Ilustrações: Editoria de arte

a) 12 m c) 13 m X e) 14 m

b) 12,5 m d) 13,5 m

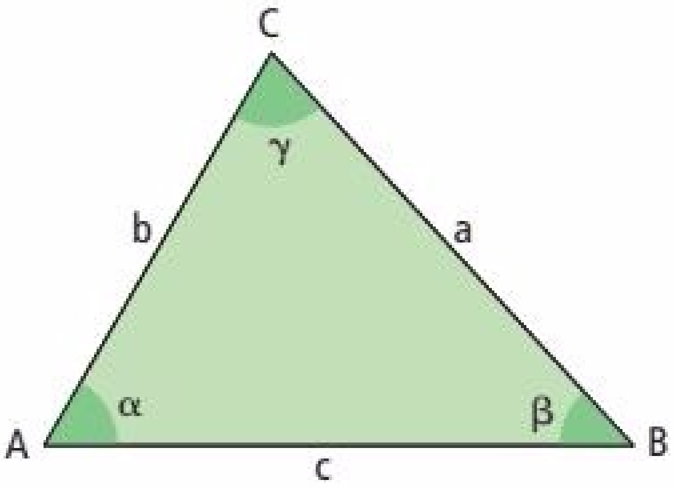
32. (Ufop-MG) Determine a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo da figura, sabendo que $BC = 2\sqrt{3}$, AC = 2 e $\text{med}(\widehat{A}) = 120°$. Dado: $\cos 120° = -\frac{1}{2}$. AB = 2



Lei dos senos

Outra maneira de calcular as medidas de lados e ângulos de um triângulo qualquer é por meio da **lei dos senos**, apresentada a seguir.

Em qualquer triângulo, as medidas dos lados são poporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos e a constante de proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita a esse triângulo.



Assim, dado um triângulo ABC qualquer com as medidas dos lados e dos ângulos como indicado na figura ao lado, podemos escrever:

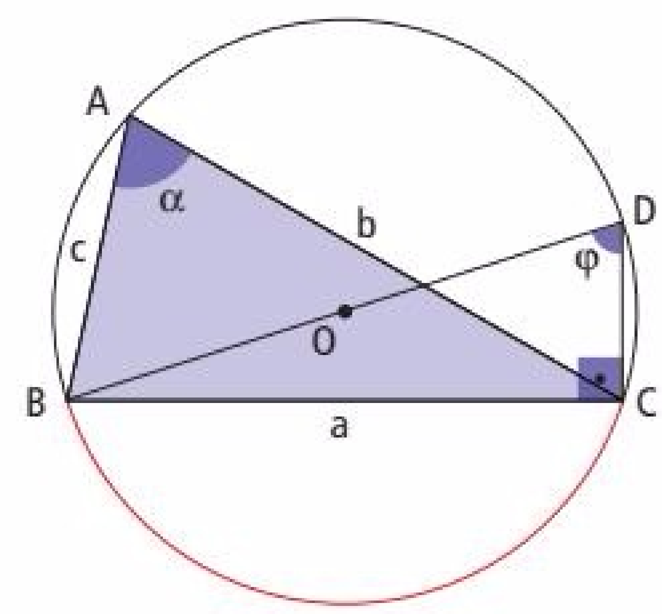
$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma} = 2R$$

Acompanhe a seguir a demonstração da lei dos senos para o ângulo α.

O triângulo ABC representado a seguir está inscrito em uma circunferência de centro *O* e raio *R*.

Nessa figura, traçamos o diâmetro $\overline{BD}$.

Como $\hat{A}$ e $\hat{D}$ são ângulos inscritos, temos:



$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\text{med}(\widehat{BC})}{2} \\ \varphi &= \frac{\text{med}(\widehat{BC})}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi = \alpha$$

Observe que o triângulo BCD é retângulo em *C*, pois está inscrito em uma semicircunferência. Assim, temos: $\text{sen}\,\varphi = \frac{a}{2R} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{a}{2R} \Rightarrow 2R = \frac{a}{\text{sen}\,\alpha}$

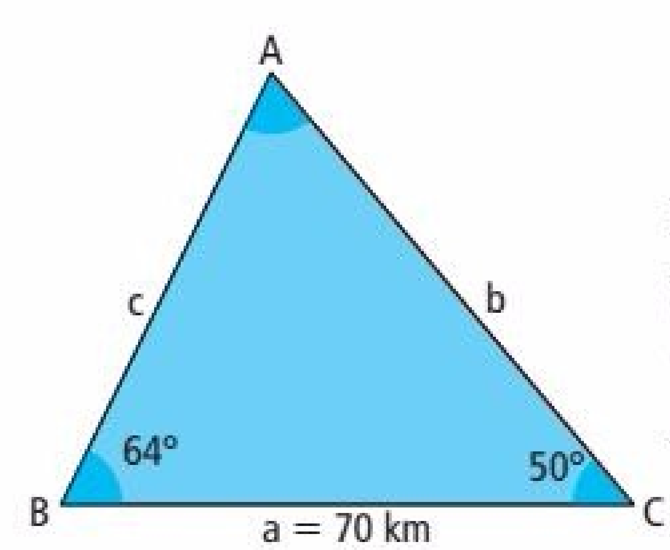
Analogamente, podemos provar que: $2R = \frac{b}{\text{sen}\,\beta}$ e $2R = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$

Exercício resolvido

5 Um barco pesqueiro *A* emite um sinal de socorro que é recebido por outros dois barcos, *B* e *C*, distantes entre si 70 km. Sabendo que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ medem, respectivamente, 64° e 50°, responda: qual dos barcos, *B* ou *C*, se encontra mais próximo do barco pesqueiro? A que distância ele está do barco *A*?

Resolução

Representando a situação em um triângulo ABC, temos a figura ao lado.



Ilustrações: Editoria de arte

A soma das medidas dos ângulos internos do triângulo ABC é 180°. Logo:

$\text{med}(\hat{A}) + \text{med}(\hat{B}) + \text{med}(\hat{C}) = 180° \Rightarrow \text{med}(\hat{A}) + 64° + 50° = 180° \Rightarrow \text{med}(\hat{A}) = 66°$

Portanto, o ângulo $\hat{A}$ mede 66°.

Usando a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{70}{\text{sen}\,66°} = \frac{b}{\text{sen}\,64°} = \frac{c}{\text{sen}\,50°}$$

Consultando a tabela de razões trigonométricas no final do capítulo, adotaremos as seguintes aproximações: sen 50° = 0,77, sen 64° = 0,90 e sen 66° = 0,91.

- Calculando a distância entre *A* e *C*, temos:

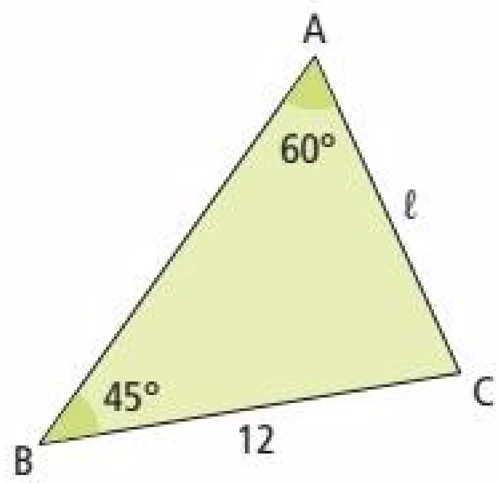
$$\frac{70}{0{,}91} = \frac{b}{0{,}90} \Rightarrow b = 69{,}2$$

- Calculando a distância entre *A* e *B*, temos:

$$\frac{70}{0{,}91} = \frac{c}{0{,}77} \Rightarrow c = 59{,}2$$

O barco mais próximo de *A* é o barco *B*, que está a 59,2 km de distância.

33. (UniFOA-RJ) Determine o lado ℓ de um triângulo de lado $\overline{BC} = 12$ cm de acordo com a figura abaixo.



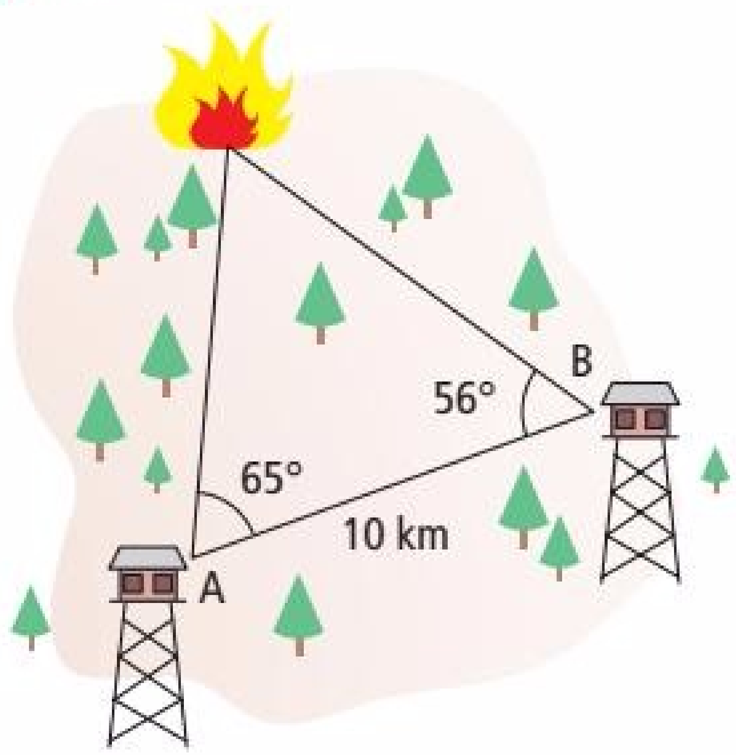
Ilustrações: Editoria de arte

a) $3\sqrt{6}$ cm
X b) $4\sqrt{6}$ cm
c) $12\sqrt{6}$ cm
d) $2\sqrt{6}$ cm
e) 4 cm

34. De duas torres de vigilância, *A* e *B*, distantes 10 km uma da outra, avista-se um foco de incêndio na floresta, conforme os ângulos assinalados na figura.

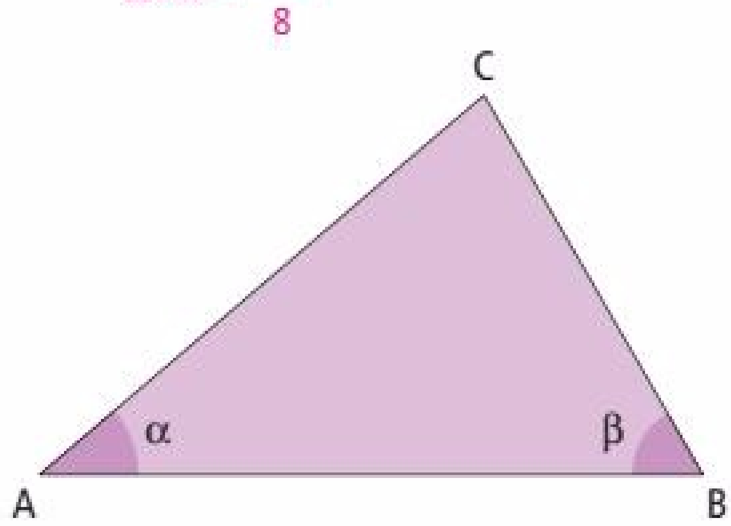
Qual é a distância aproximada de cada uma das torres até o foco do incêndio?

(Consulte a tabela trigonométrica, se necessário.)
9,67 km e 10,57 km



Alexandre Argozino Neto

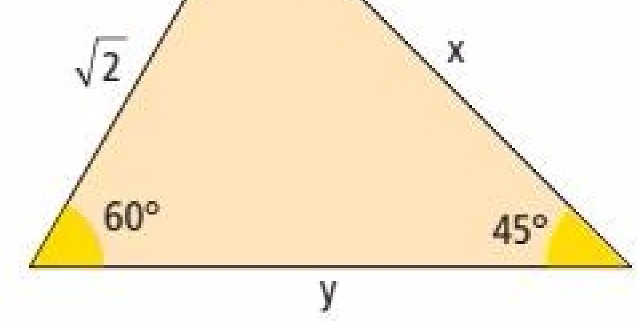
35. No triângulo seguinte, AC = 4 m, BC = 3 m e $\beta = 60°$. Calcule sen α. $\text{sen}\,\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8}$



36. (ITA-SP) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos *A*, *B* e *C*. O comandante, quando o navio está em *A*, observa um farol *L* e calcula o ângulo $L\hat{A}C = 30°$. Após navegar 4 milhas até *B*, verifica o ângulo $L\hat{B}C = 75°$. Quantas milhas separam o farol do ponto *B*? $2\sqrt{2}$ milhas

37. Dado o triângulo da figura, calcule *x* e *y*.

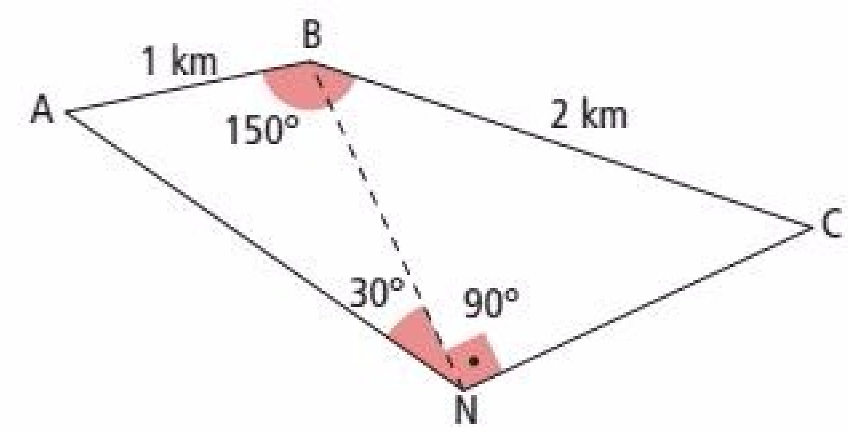
$x = \sqrt{3}$; $y = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$



38. Um triângulo ABC de lados 7 cm, 9 cm e 9 cm está inscrito numa circunferência de raio *R*. Determine:

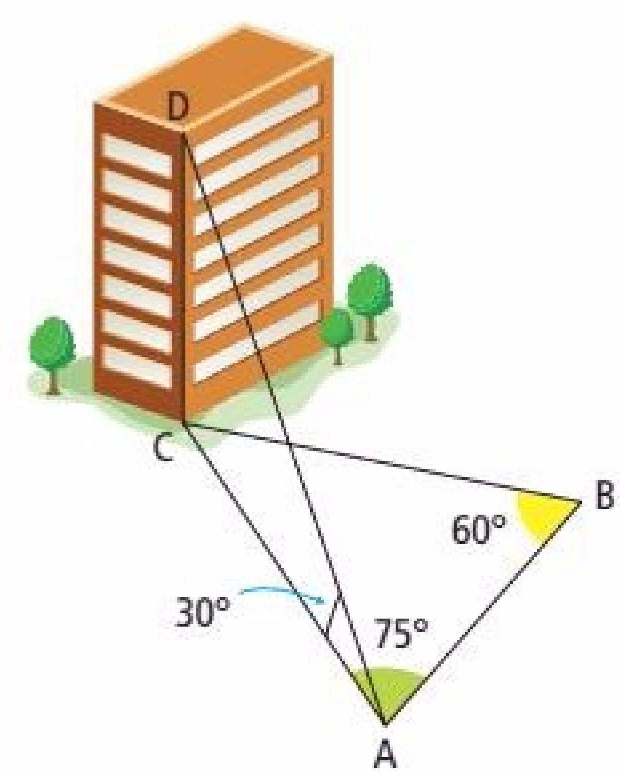
a) as medidas dos ângulos internos desse triângulo; $\alpha \simeq 67°$ e $\beta = 46°$
b) o valor de *R*. $\simeq 4{,}89$ cm

39. (Unicamp-SP) Sejam *A*, *B*, *C* e *N* quatro pontos em um mesmo plano, conforme mostra a figura abaixo.



a) Calcule o raio da circunferência que passa pelos pontos *A*, *B* e *N*. 1 km
b) Calcule o comprimento do segmento $\overline{NB}$. $\sqrt{2}$ km

40. (UnB-DF) Um observador, situado no ponto *A*, distante 30 m do ponto *B*, vê um edifício sob um ângulo de 30°, conforme a figura. Baseado nos dados da figura, determine a altura do edifício em metros e divida o resultado por $\sqrt{2}$. $CD = 15\sqrt{2}$ metros; 15 m



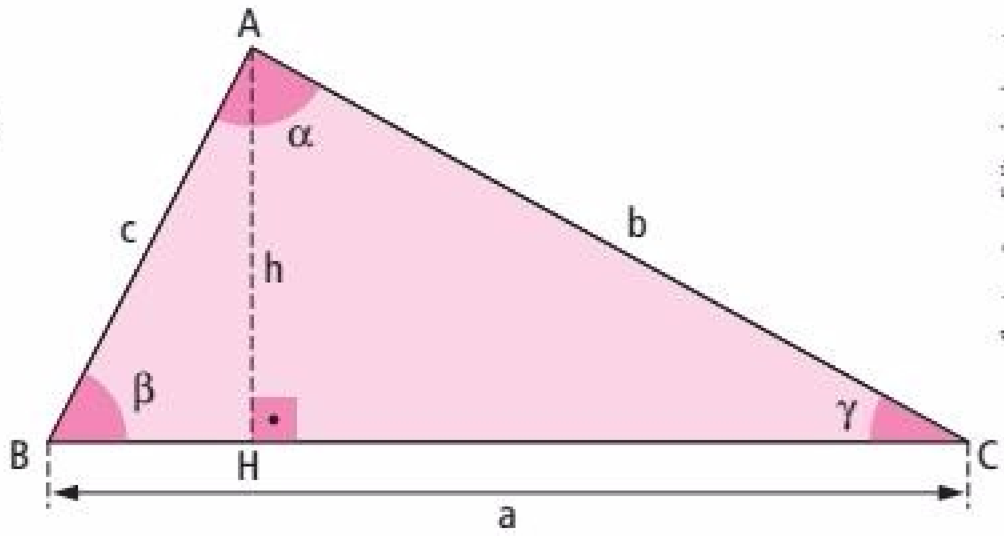
41. Um triângulo inscrito em uma circunferência de raio igual a 10 cm determina, nesta, três arcos cujos comprimentos são proporcionais aos números 3, 4 e 5.

Determine: **b)** $AB = 10\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm; $BC = 10\sqrt{2}$ cm; $AC = 10\sqrt{3}$ cm

a) os ângulos do triângulo; $B\hat{A}C = 45°$; $C\hat{B}A = 60°$; $B\hat{C}A = 75°$
b) os lados do triângulo.

Área de um triângulo qualquer

Podemos calcular a área de um triângulo qualquer quando a medida da altura é desconhecida utilizando o conceito de seno de um ângulo. Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:



Ilustrações: Editoria de arte

A área de um triângulo qualquer é igual ao semiproduto das medidas de dois de seus lados pelo seno do ângulo formado por esses lados.

Vamos demonstrar esse teorema para o ângulo γ, no caso em que γ é agudo e no caso em que é obtuso.

Demonstração

Considere o **triângulo acutângulo** ABC, no qual $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado BC, conforme mostra a figura ao lado.

Sabendo-se que a área *S* do triângulo é igual à metade do produto da medida da base pela medida da altura, temos:

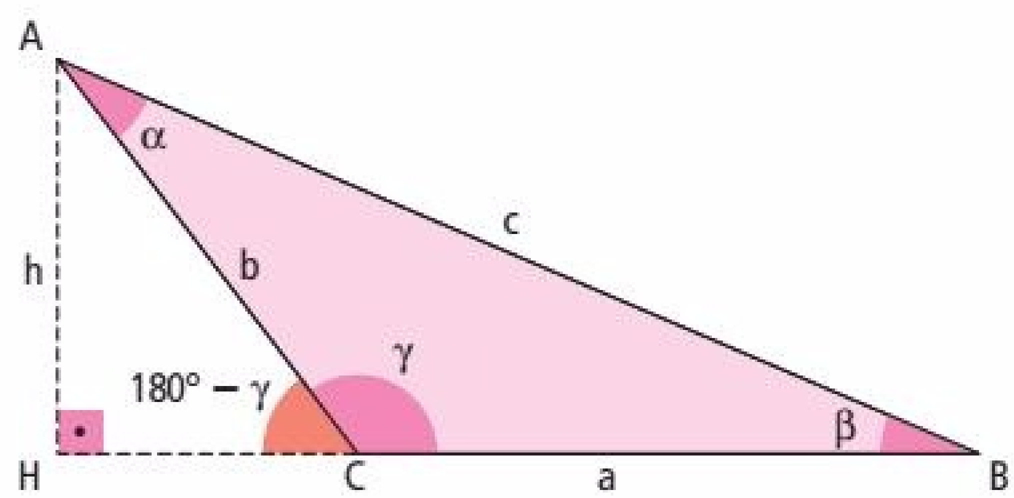
$$S = \frac{a \cdot h}{2} \quad \text{(I)}$$

Do triângulo retângulo AHC, temos:

$$\text{sen}\,\gamma = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\,\gamma \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos: $\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\gamma}{2}}$

Agora considere o **triângulo obtusângulo** ABC, no qual $\overline{AH}$ é a altura relativa ao lado BC, conforme mostra a figura abaixo.



Sabemos que a área *S* é dada por: $S = \frac{a \cdot h}{2}$ (I)

Do triângulo retângulo AHC, temos:

$$\text{sen}\,(180° - \gamma) = \text{sen}\,\gamma = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}\,\gamma \quad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos: $\boxed{S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\,\gamma}{2}}$

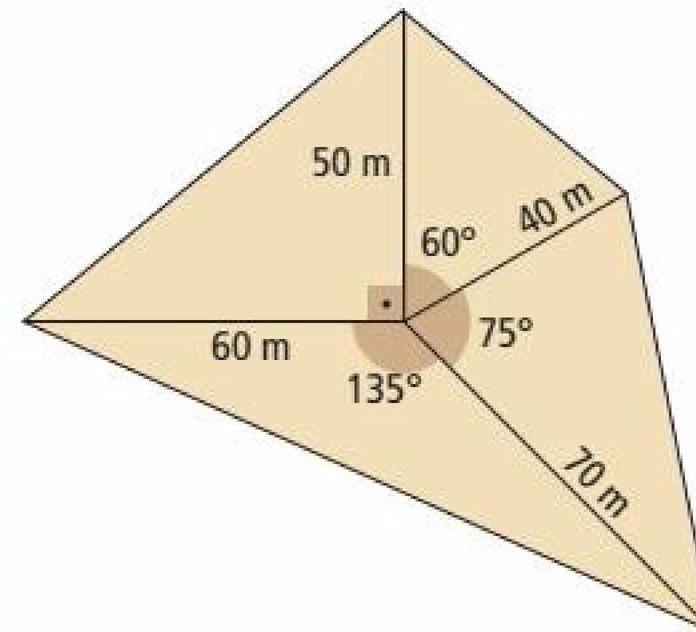
Analogamente, podemos mostrar que:

$$\boxed{S = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\,\beta}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\,\alpha}{2}}$$

Exercício resolvido

6 Para medir a área de um terreno irregular, um engenheiro dividiu o terreno em quatro regiões triangulares, formadas a partir de um mesmo vértice, como mostra a figura ao lado.

Qual é a área aproximada desse terreno? (Use as aproximações até centésimos.)

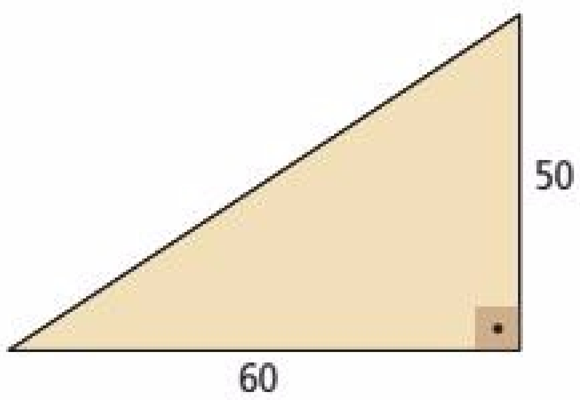


Ilustrações: Editoria de arte

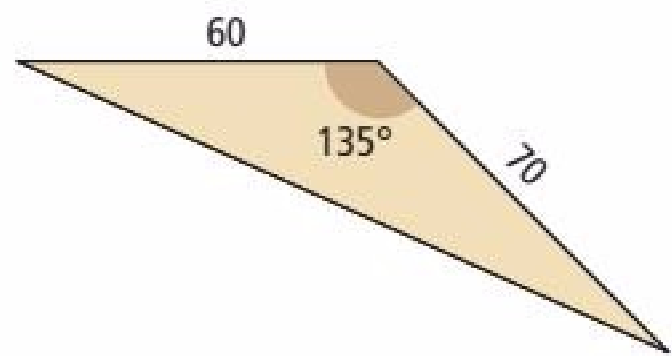
Resolução

Em cada um dos triângulos obtidos, temos as medidas de dois lados e do ângulo compreendido entre eles, conforme mostram os esquemas a seguir.

Vamos calcular a área de cada um.



$$A_1 = \frac{50 \cdot 60}{2} = 1500\ \text{m}^2$$



$$\text{sen } 135° = \text{sen } 45°$$

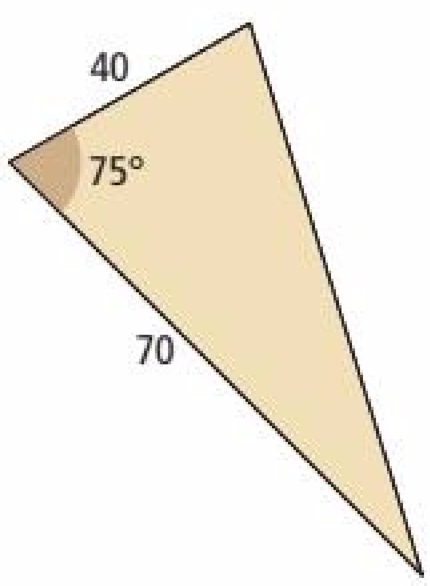
$$A_3 = \frac{60 \cdot 70 \cdot \text{sen } 135°}{2}$$

$$A_3 = \frac{4200 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$A_3 = 1050 \cdot \sqrt{2}$$

$$A_3 = 1050 \cdot 1{,}41$$

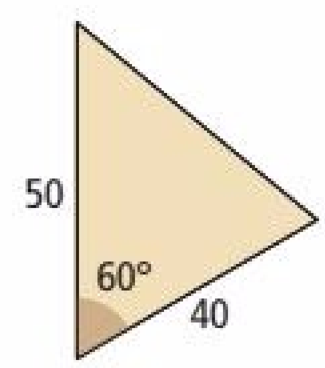
$$A_3 = 1480{,}5\ \text{m}^2$$



$$A_2 = \frac{40 \cdot 70 \cdot \text{sen } 75°}{2}$$

$$A_2 = 1400 \cdot 0{,}96$$

$$A_2 = 1344\ \text{m}^2$$



$$A_4 = \frac{50 \cdot 40 \cdot \text{sen } 60°}{2}$$

$$A_4 = 1000 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_4 = 500 \cdot 1{,}73$$

$$A_4 = 865\ \text{m}^2$$

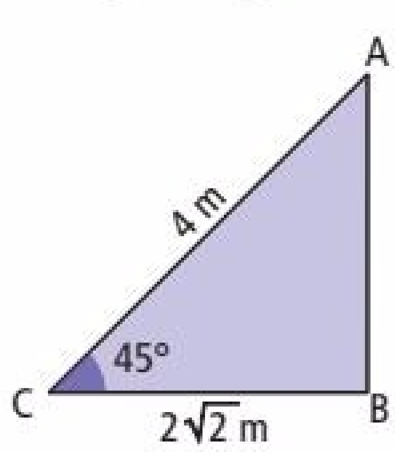
Então a área total (A_t) do terreno será: $A_t = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$A_t \simeq 1500\ \text{m}^2 + 1344\ \text{m}^2 + 1480{,}5\ \text{m}^2 + 865\ \text{m}^2 = 5189{,}5\ \text{m}^2$

Exercícios propostos

Escreva no caderno

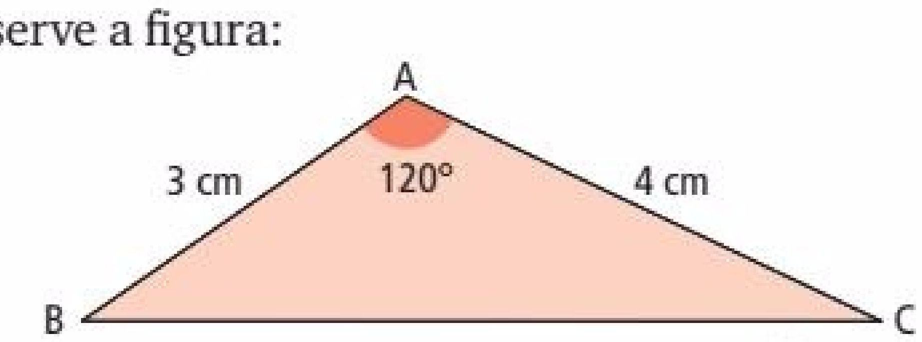
42. Calcule a área do triângulo representado na figura. $4\ \text{m}^2$



43. Qual é a área de um triângulo isósceles no qual cada lado congruente mede 10 cm e o ângulo adjacente à base mede 75°? $25\ \text{cm}^2$

44. Qual é a área de um paralelogramo no qual dois lados consecutivos medem 7 cm e 5 cm, sabendo que eles formam um ângulo de 120°? $\frac{35\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$

45. Observe a figura:



$\left(\text{Dados: } \cos 120° = -\frac{1}{2} \text{ e sen } 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}.\right)$

a) Qual é a medida de $\overline{BC}$? $BC = \sqrt{37}\ \text{cm}$

b) Qual é a área do triângulo ABC? $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$

46. O terreno ABCDE representado pela figura ao lado foi vendido a R$35,00 o metro quadrado. Qual é o seu valor? (Use sen 60° = 0,86.)
R$ 56476,00

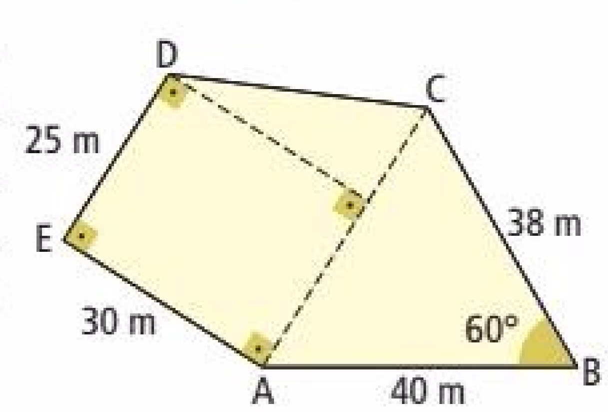


Tabela de razões trigonométricas

ângulo	seno (sen)	cosseno (cos)	tangente (tg)
1°	0,01745	0,99985	0,01746
2°	0,03490	0,99939	0,03492
3°	0,05234	0,99863	0,05241
4°	0,06976	0,99756	0,06993
5°	0,08716	0,99619	0,08749
6°	0,10453	0,99452	0,10510
7°	0,12187	0,99255	0,12278
8°	0,13917	0,99027	0,14054
9°	0,15642	0,98769	0,15838
10°	0,17365	0,98481	0,17633
11°	0,19087	0,98163	0,19438
12°	0,20791	0,97815	0,21256
13°	0,22495	0,97437	0,23087
14°	0,24192	0,97030	0,24933
15°	0,25882	0,96953	0,26795
16°	0,27564	0,96126	0,28675
17°	0,29237	0,95630	0,30573
18°	0,30902	0,95106	0,32492
19°	0,32557	0,94552	0,34433
20°	0,34202	0,93969	0,36397
21°	0,35837	0,93358	0,38386
22°	0,37461	0,92718	0,40403
23°	0,39073	0,92050	0,42447
24°	0,40674	0,91355	0,44523
25°	0,42262	0,90631	0,46631
26°	0,43837	0,89879	0,48773
27°	0,45399	0,89101	0,50953
28°	0,46947	0,88295	0,53171
29°	0,48481	0,87462	0,55431
30°	0,50000	0,86603	0,57735
31°	0,51504	0,85717	0,60086
32°	0,52992	0,84805	0,62487
33°	0,54464	0,83867	0,64941
34°	0,55919	0,82904	0,67451
35°	0,57358	0,81915	0,70021
36°	0,58779	0,80903	0,72654
37°	0,60182	0,79864	0,75355
38°	0,61566	0,78801	0,78129
39°	0,62932	0,77715	0,80978
40°	0,64279	0,76604	0,83910
41°	0,65606	0,75471	0,86929
42°	0,66913	0,74314	0,90040
43°	0,68200	0,73135	0,93252
44°	0,69466	0,71934	0,96569
45°	0,70711	0,70711	1,00000

ângulo	seno (sen)	cosseno (cos)	tangente (tg)
46°	0,71934	0,69466	1,03553
47°	0,73135	0,68200	1,07237
48°	0,74314	0,66913	1,11061
49°	0,75471	0,65606	1,15037
50°	0,76604	0,64279	1,19175
51°	0,77715	0,62932	1,23499
52°	0,78801	0,61566	1,27994
53°	0,79864	0,60182	1,32704
54°	0,80903	0,58779	1,37638
55°	0,81915	0,57358	1,42815
56°	0,82904	0,55919	1,48256
57°	0,83867	0,54464	1,53986
58°	0,84805	0,52992	1,60033
59°	0,85717	0,51504	1,66428
60°	0,86603	0,50000	1,73205
61°	0,87462	0,48481	1,80405
62°	0,88295	0,46947	1,88073
63°	0,89101	0,45399	1,96261
64°	0,89879	0,43947	2,05030
65°	0,90631	0,42262	2,14451
66°	0,91355	0,40674	2,24604
67°	0,92050	0,39073	2,35585
68°	0,92718	0,37461	2,47509
69°	0,93358	0,35837	2,60509
70°	0,93969	0,34202	2,74748
71°	0,94552	0,32557	2,90421
72°	0,95106	0,30902	3,07768
73°	0,95630	0,29237	3,27085
74°	0,96126	0,27564	3,48741
75°	0,96563	0,25882	3,73205
76°	0,97030	0,24192	4,01078
77°	0,97437	0,22495	4,33148
78°	0,97815	0,20791	4,70463
79°	0,98163	0,19087	5,14455
80°	0,98481	0,17365	5,67128
81°	0,98769	0,15643	6,31375
82°	0,99027	0,13917	7,11537
83°	0,99255	0,12187	8,14435
84°	0,99452	0,10453	9,51436
85°	0,99619	0,08716	11,43010
86°	0,99756	0,06976	14,30070
87°	0,99863	0,05234	19,08110
88°	0,99939	0,03490	28,63630
89°	0,99985	0,01745	57,29000
90°	1,00000	0,00000	——

Exercícios complementares

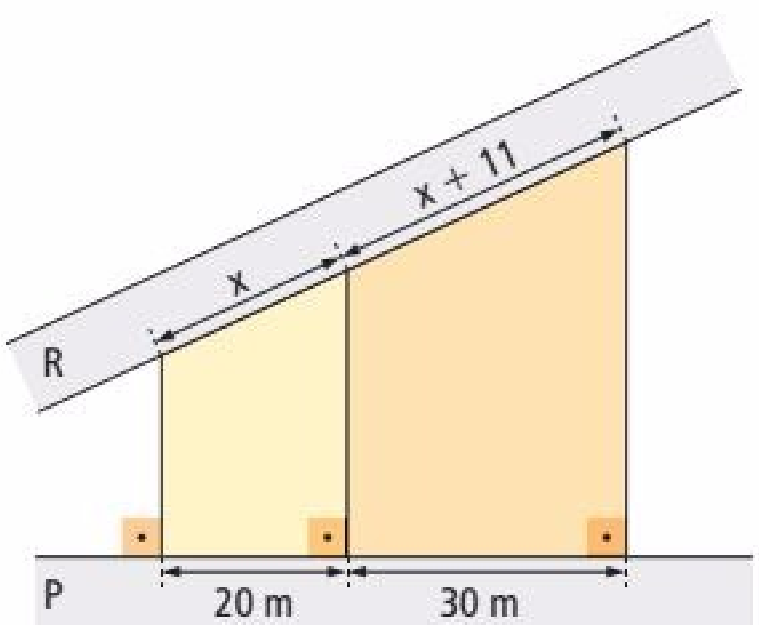
Escreva no caderno

1. (UEMA) Um prédio e um poste projetam simultaneamente sombras de 20 m e 4 m, respectivamente. Se a altura do poste é 5 m, pode-se concluir que a altura do prédio é:

x a) 25 m c) 16 m e) 10 m
b) 20 m d) 15 m

2. (Cefet-SP) Dois lotes estão representados na figura abaixo. Calcular as medidas de frente para a rua *R* de cada um dos terrenos, respectivamente.

a) 15 m e 26 m x c) 22 m e 33 m
b) 21 m e 32 m d) 23 m e 34 m



3. (Cefet-RJ) Sejam 20 cm e 30 cm, respectivamente, os perímetros de dois polígonos semelhantes e *x* e *y* dois de seus lados homólogos. Se $x = 6$ cm, o valor de *y* será:

a) 3 cm x c) 9 cm e) 5,2 cm
b) 4 cm d) 10,5 cm

4. (UEMT) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se mais tarde, a sombra do poste diminuir 50 cm, a sombra da pessoa passará a medir:

a) 30 cm c) 48 cm e) 25 cm
x b) 45 cm d) 36 cm

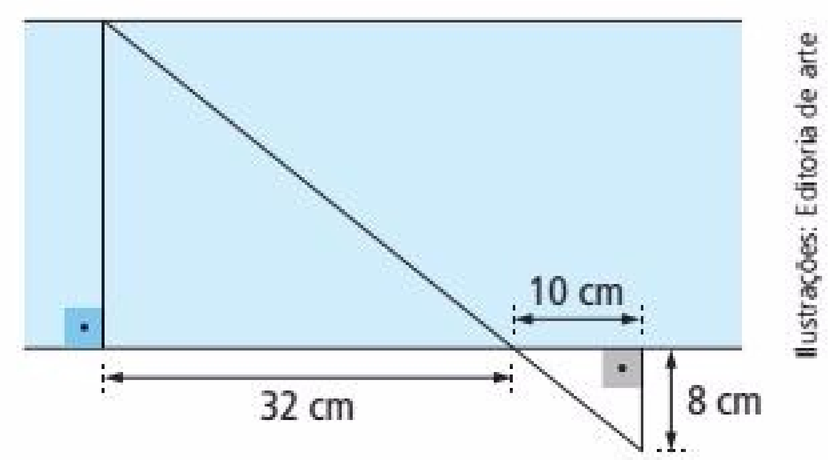
5. (IFSC) Para determinar a altura de um poste, Ana utilizou o seguinte artifício, com o auxílio de uma colega: mediu sua sombra e a do poste, obtendo 2,4 m e 3,7 m, respectivamente. Se Ana tem 1,5 m de altura, então é CORRETO afirmar que a altura do poste é de:

a) 1,0 m c) 5,9 m e) 2,0 m
x b) 2,3 m d) 2,6 m

6. (PUC-RS) Para medir a altura de uma árvore, foi usada uma vassoura de 1,5 m, verificando-se que, no momento em que ambas estavam em posição vertical em relação ao terreno, a vassoura projetava uma sombra de 2 m, e a árvore, de 16 m. A altura da árvore, em metros, é:

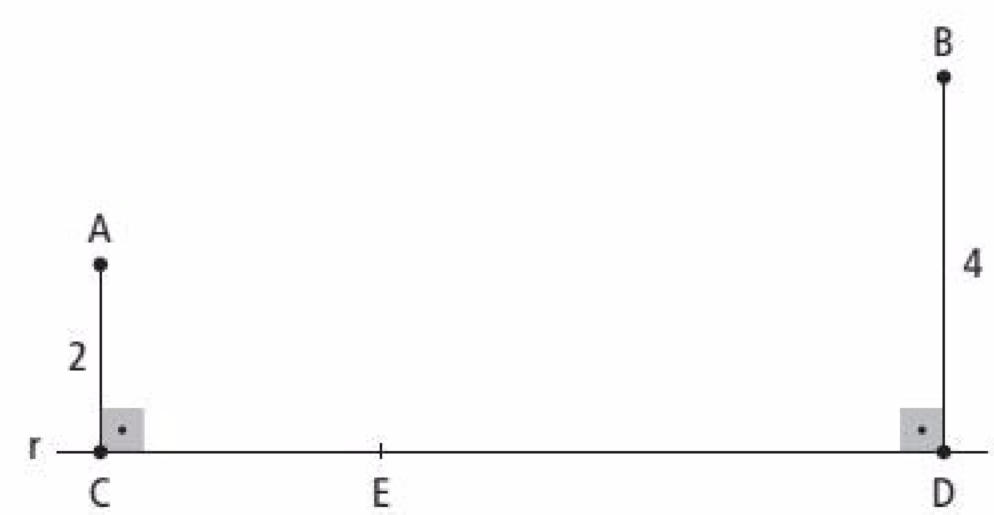
a) 3,0 x c) 12,0 e) 16,0
b) 8,0 d) 15,5

7. (UFPE) A figura seguinte representa um rio cujas margens são retas paralelas.



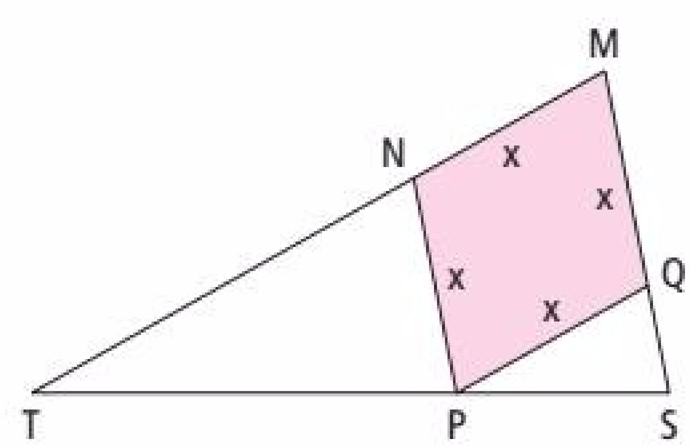
Qual é o número inteiro mais próximo da largura do rio, quando esta é medida em metros? 26 m

8. (Fuvest-SP) Na figura abaixo, as distâncias dos pontos *A* e *B* à reta *r* valem 2 e 4. As projeções ortogonais de *A* e *B* sobre essa reta são os pontos *C* e *D*. Se a medida de $\overline{CD}$ é 9, a que distância de *C* deverá estar o ponto *E*, do segmento $\overline{CD}$, para que $C\hat{E}A = D\hat{E}B$?



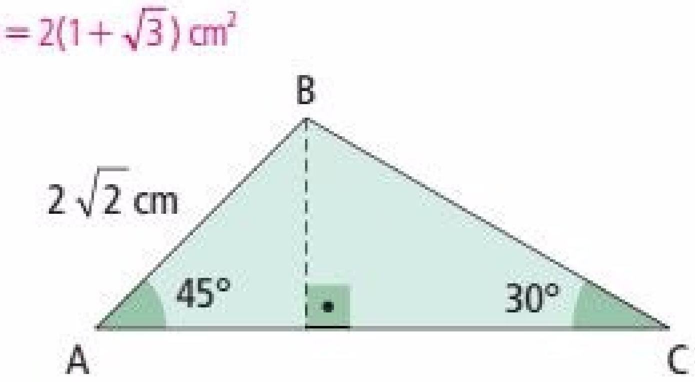
x a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

9. (Mack-SP) Na figura, o quadrilátero MNPQ é um losango cujo lado mede *x* cm. Sabendo que $MT = 12$ cm e $MS = 6$ cm, determine o perímetro do losango MNPQ.
16 cm

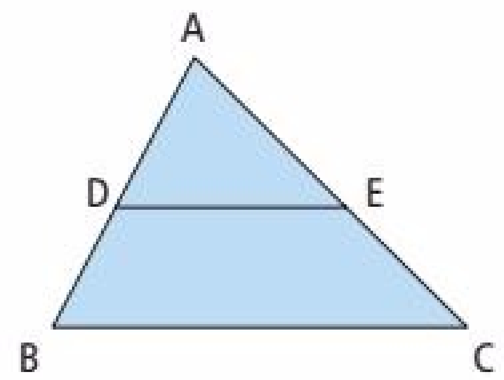


10. (Unicamp-SP) Num eclipse total do Sol, o disco lunar cobre exatamente o disco solar, o que comprova que o ângulo sob o qual vemos o Sol é o mesmo sob o qual vemos a Lua. Considerando que o raio da Lua é de 1 738 km e que a distância da Lua ao Sol é 400 vezes a distância da Terra à Lua, calcule o raio do Sol.
696 938 km

11. (FGV-SP) Qual a área do triângulo ABC indicado na figura? $S = 2(1 + \sqrt{3})\ \text{cm}^2$



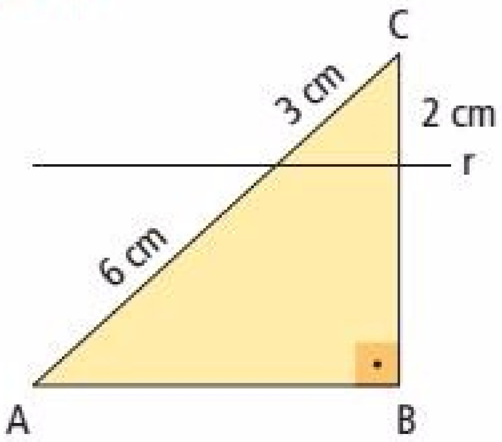
12. (FGV-SP) Os lados do triângulo ABC da figura ao lado são:



AB = 28 cm, AC = 21 cm e BC = 35 cm.

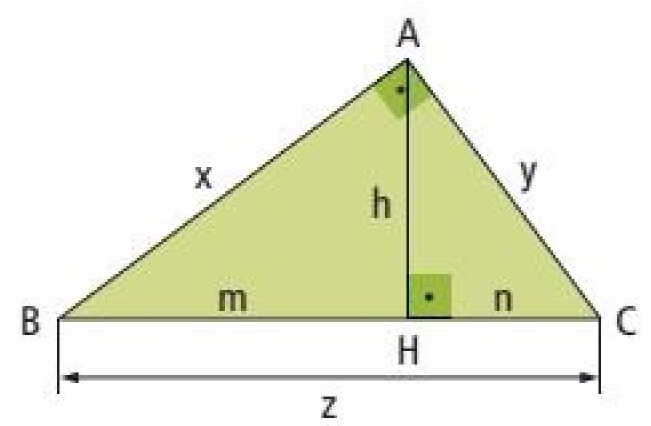
Uma paralela ao lado $\overline{BC}$ intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ nos pontos *D* e *E*, respectivamente. Determine a medida dos lados BD, DE e EC do trapézio BDEC, sabendo que o seu perímetro é 74 cm. BD = 8 cm, DE = 25 cm e EC = 6 cm

13. (UFSM-RS) Na figura, a reta *r* é paralela ao lado $\overline{AB}$ do triângulo retângulo ABC. Qual é o comprimento do lado $\overline{AB}$, em centímetros? $3\sqrt{5}$ cm



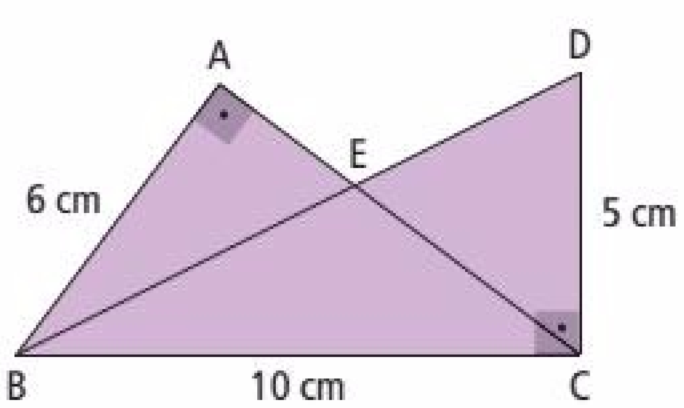
14. Observe o triângulo retângulo representado na figura.

Classifique as sentenças em verdadeiras (V) ou falsas (F).



F a) $y^2 + z^2 = x^2$
V b) $z^2 - y^2 = x^2$
F c) $h^2 = m + m$
V d) $y^2 \cdot x^2 = z^2 \cdot h^2$
F e) $x^2 = z \cdot n$
V f) $y^2 = z \cdot n$

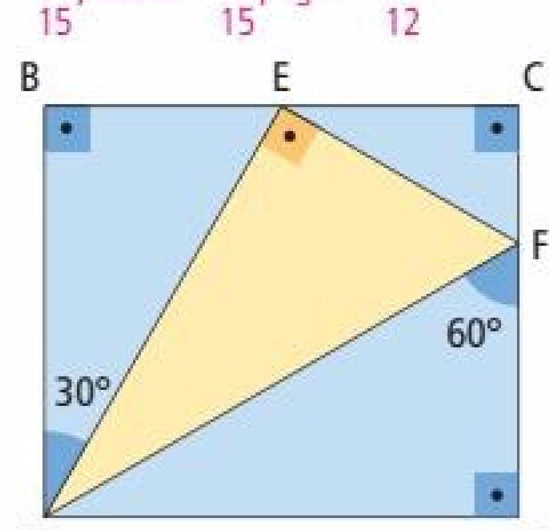
15. (ESPM-SP) Os triângulos ABC e BCD da figura abaixo são retângulos. A área do triângulo BCE, em centímetros quadrados, é igual a:



a) 12,5 X b) 15 c) 20 d) 17,5 e) 10

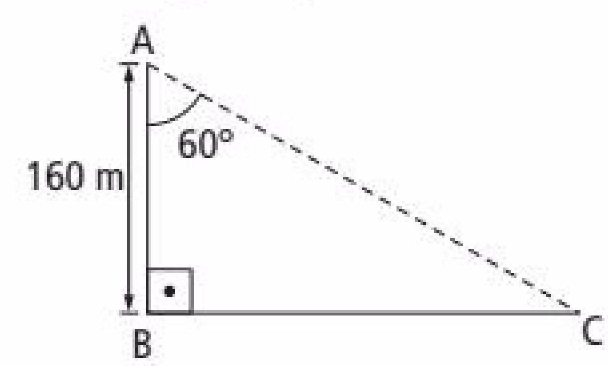
16. (UFRN) Determine o seno, o cosseno e a tangente do menor ângulo do triângulo retângulo cujos catetos medem 9 cm e 12 cm. $\text{sen}\,\alpha = \frac{9}{15}$; $\cos\alpha = \frac{12}{15}$; $\text{tg}\,\alpha = \frac{9}{12}$

17. (Cefet-PR) Se na figura abaixo AB = 9 cm, o segmento $\overline{DF}$ mede, em centímetros:



a) 5
b) 4
c) 8
d) 7
X e) 6

18. (PUC-GO) Um cidadão está próximo de encontrar água. Supondo que ele esteja na posição *A*, conforme ilustra a figura abaixo, e o poço de água encontra-se no ponto *C*, a distância que separa o cidadão do poço é de:



Ilustrações: Editoria de arte

a) 420 m X b) 320 m c) 160 m d) 600 m

19. (Unicamp-SP) Sejam *A*, *B* e *C* pontos de uma circunferência, tais que AB = 2 km, BC = 1 km e a medida do ângulo $A\hat{B}C$ seja de 135°.

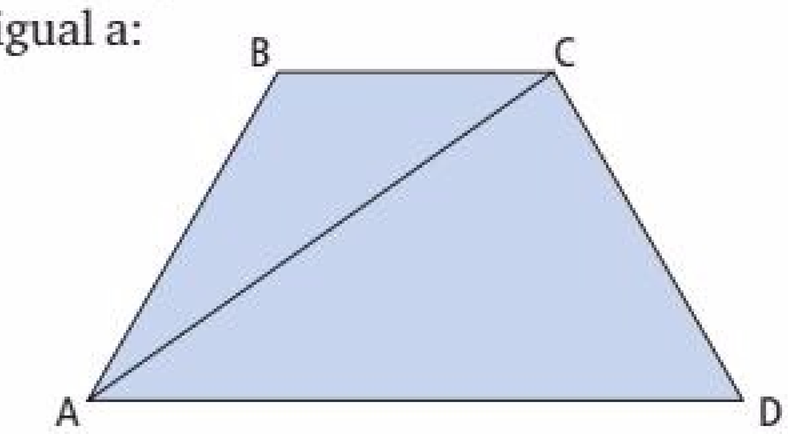
a) Calcule o raio dessa circunferência. $R = \frac{\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}}{2}$ km

b) Calcule a área do triângulo ABC. $S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ km²

20. (Unicamp-SP) A água utilizada na casa de um sítio é captada e bombeada do rio para uma caixa-d'água a 50 m de distância. A casa está a 80 m de distância da caixa-d'água e o ângulo formado pelas direções caixa-d'água-bomba e caixa-d'água-casa é de 60°. Se a ideia é bombear água do mesmo ponto de captação até a casa, quantos metros de encanamento são necessários? 70 m

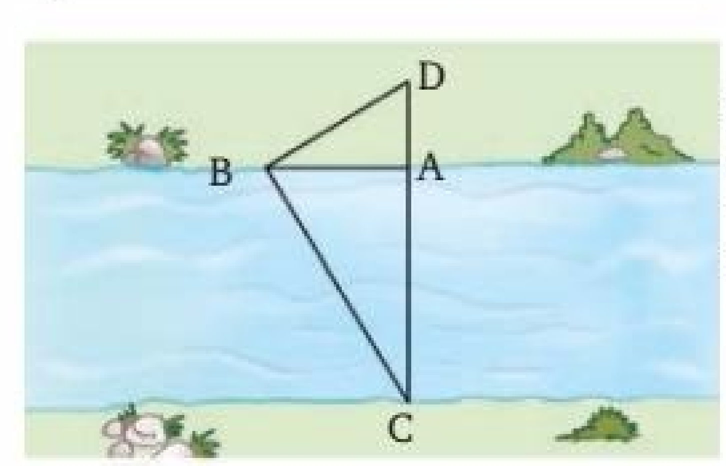
21. (PUC-MG) Quatro estações de um metrô ocupam os vértices de um trapézio isósceles, conforme indicado na figura. A linha $\overline{AD}$ mede 15 km, a linha $\overline{AB}$ tem 8 km e o ângulo entre as linhas $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, o maior do trapézio, mede 120°. Com base nessas informações, é CORRETO afirmar que a extensão da linha $\overline{AC}$, em quilômetro, é igual a:

a) 11
b) 12
X c) 13
d) 14



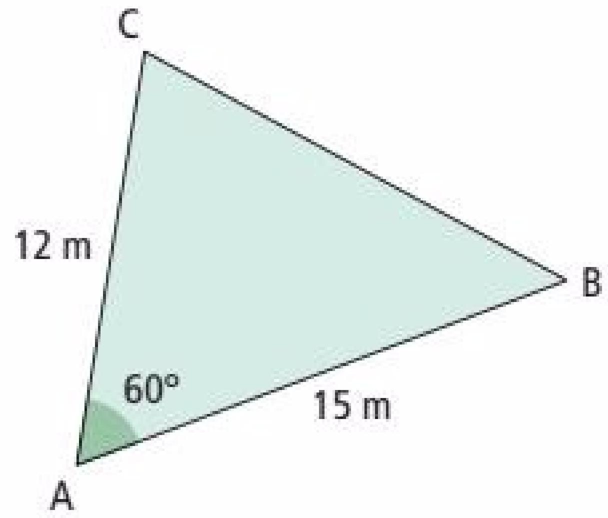
22. (Unicamp-SP) Para medir a largura $\overline{AC}$ de um rio um homem usou o seguinte procedimento: localizou um ponto *B* de onde podia ver na margem oposta o coqueiro *C*, de forma que o ângulo $A\hat{B}C$ fosse 60°; determinou o ponto *D* no prolongamento de $\overline{CA}$, de forma que o ângulo $C\hat{B}D$ fosse 90°. Medindo AD = 40 metros, achou a largura do rio. Determine essa largura e explique o raciocínio.

AC = 120 m



Alberto De Stefano

23. (UECE) Um garoto situado no ponto A está empinando duas pipas B e C, no ar, conforme figura. A pipa B já levou 15 metros de linha e a pipa C, 12 metros. O ângulo formado entre as duas linhas é de 60°.



Nessas condições, a distância, em metros, entre as pipas B e C é um número compreendido entre

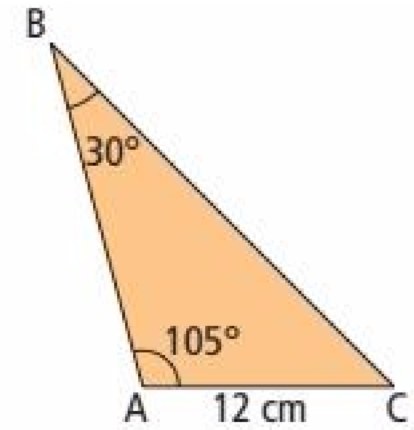
a) 11 e 12
b) 12 e 13
x c) 13 e 14
d) 14 e 15
e) 15 e 16

24. (Unifor-CE) Num triângulo, dois lados, cujas medidas são 4 cm e $3\sqrt{2}$ cm, formam um ângulo de 45°. Qual é a medida, em metros, do 3º lado?

a) $5\sqrt{2}$ m
x b) $\sqrt{10}$ m
c) 10 m
d) $\sqrt{14}$ m

25. (Mack-SP) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 m e 12 m e formam um ângulo de 60°. Calcule as diagonais. $AC = 4\sqrt{7}$ m e $BD = 4\sqrt{19}$ m

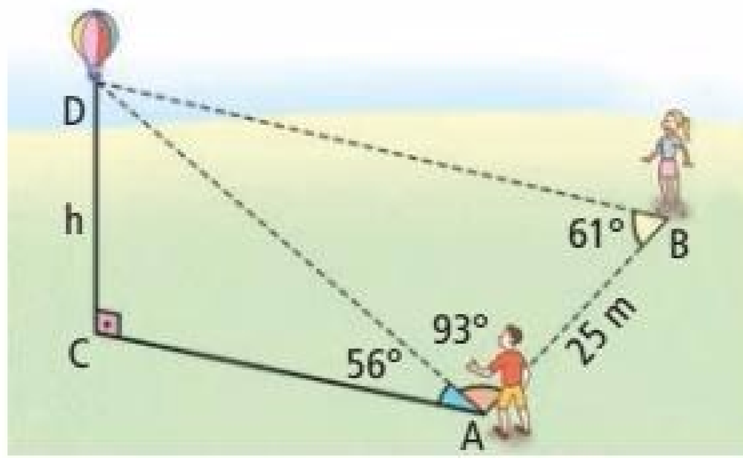
26. (Mack-SP) Três ilhas, A, B e C, aparecem num mapa, em escala 1 : 10 000, como na figura. Das alternativas, a que melhor aproxima a distância entre as ilhas A e B é:



Ilustrações: Editoria de arte

a) 2,3 km
b) 2,1 km
c) 1,9 km
d) 1,4 km
x e) 1,7 km

27. Observe a figura.



a) Qual é a distância do balão até o ponto A? $\simeq 49{,}43$ m

b) A quantos metros de altura o balão está do solo? $\simeq 41$ m

28. (PUC-SP) Um mapa é feito em uma escala de 1 cm para cada 200 km. O município onde se encontra a capital de certo estado está representado, nesse mapa, por um losango que tem um ângulo de 120° e cuja diagonal menor mede 0,2 cm. Determine a área desse município. $800\sqrt{3}$ km²

Retomando e pesquisando

Escreva no caderno

iStockphoto/Getty Images

Vulcão Mauna Kea, no Havaí. 2014.

Na abertura desta unidade você conheceu um pouco mais sobre o monte Everest e suas características.

O monte Everest é considerado o cume mais alto do mundo, tomando o nível do mar como referencial. Entretanto, partindo de outros referenciais como parâmetro, podemos obter resultados distintos. Acompanhe os exemplos a seguir.

O vulcão Mauna Kea, localizado no Havaí, atinge a altura de 4 205 m acima do nível do mar, estendendo-se a 5 898 m de profundidade, totalizando 10 103 m de altura. Ou seja, é a montanha mais alta do mundo, considerando a medição desde a sua base.

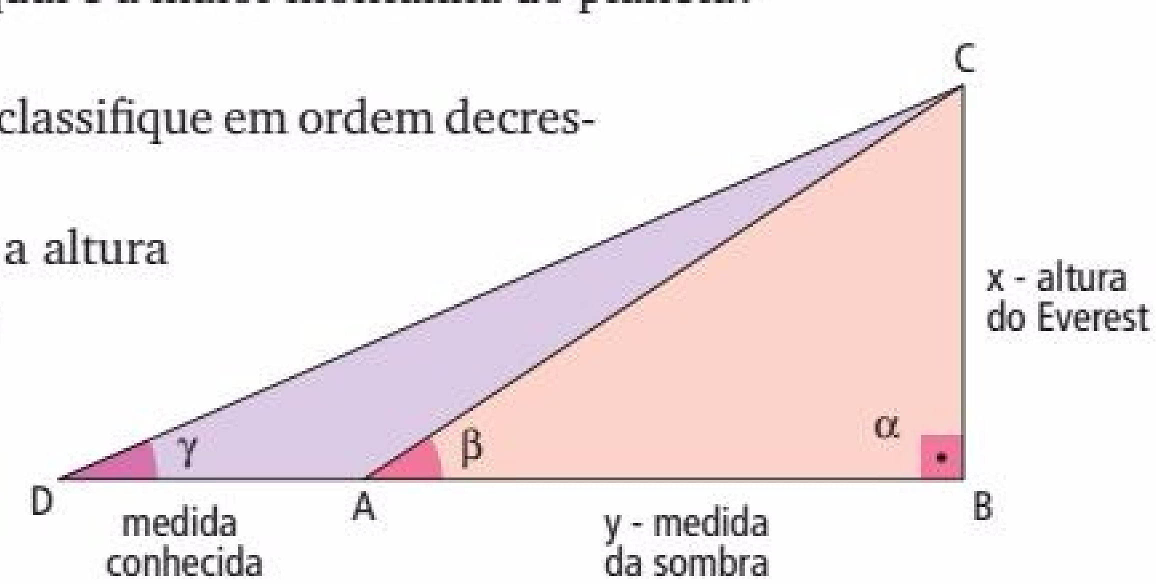
O estratovulcão (vulcão em forma de cone) Chimborazo, localizado no Equador, possui 6 263 m acima do nível do mar. Ele é considerado o pico mais alto do mundo, considerando sua altura em relação ao centro da Terra, devido ao formato achatado da Terra, em direção dos polos.

Utilize essas informações e seus conhecimentos a respeito dos conteúdos desta unidade para realizar as atividades a seguir.

1. De acordo com os textos acima e a abertura da unidade, qual é a maior montanha do planeta? Justifique sua resposta. Veja o Manual do Professor.

2. Considerando a medida da base ao topo como referência, classifique em ordem decrescente as montanhas apresentadas.

3. Utilizando o esquema ao lado, seria possível determinar a altura do Everest, a partir da medida do afastamento entre os pontos A e D, e dos ângulos β e γ indicados. Utilizando os conceitos de trigonometria no triângulo retângulo, demonstre como obter a medida x, altura do monte Everest, em função dos dados indicados.



Infográfico: Contexto histórico

Para muitas pessoas, a Matemática não passa de uma disciplina escolar excessivamente teórica e, portanto, "descolada" da realidade. Essa visão difundida promove alguns questionamentos do tipo "qual é a utilidade dessa matéria?", "por que esse assunto é importante?" ou então "o que esse conteúdo pode nos oferecer?".

Ao contrário do que esse ponto de vista sustenta, a Matemática é uma área intrinsecamente ligada à vivência humana. Desde os afazeres mais triviais, como a compra em um supermercado ou o rateio dos gastos de uma viagem, até empreendimentos de alta complexidade – a exemplo do lançamento de um satélite artificial –, usamos o saber proveniente do universo matemático.

Sem o raciocínio matemático e o extenso conhecimento ligado a essa capacidade, as sociedades humanas não teriam condições de superar os obstáculos que atravancavam sua existência. O que constatamos é que a "mais abstrata das disciplinas" é uma ferramenta imprescindível ao desenvolvimento de nossa espécie.

Por essa razão, não seria exagero parafrasear o filósofo alemão Friedrich Nietzsche (1844-1900) ao afirmar que o campo matemático é "humano, demasiado humano". O que constatamos é que, desde os primórdios, a história dos seres humanos e a evolução da Matemática sofrem uma influência mútua, constante e enriquecedora.

Assim como todos os povos, as produções humanas contam com uma história, ou seja, foram elaboradas e desenvolvidas a partir de contextos históricos específicos. Como consequência, não é raro encontrar publicações que apresentam a história do vestuário, da arquitetura ou da gastronomia.

Sendo uma antiquíssima criação humana, a Matemática também ostenta uma rica historicidade. Ao contrário do que muitas pessoas acreditam, os saberes matemáticos não "caíram do céu", mas foram forjados e aprimorados em vários períodos da nossa história. Egípcios, gregos, árabes, renascentistas ou pensadores iluministas contribuíram, cada um à sua forma, para enriquecer o milenar campo do conhecimento matemático.

A partir dessa constatação, procuramos tornar a aprendizagem da Matemática mais instigante por meio da elaboração de um infográfico que apresenta uma linha do tempo sobre a história da Matemática de alguns conteúdos abordados nesta coleção.

A utilização de um infográfico se deve ao seu potencial de valorizar visualmente informações. Diversos veículos de comunicação, peças publicitárias e campanhas públicas utilizam esse recurso, constituído por quadros informativos que misturam textos e imagens com um chamativo apelo visual.

O infográfico que construímos está organizado de acordo com as diferentes fases da humanidade. Em cada período da história, procuramos apresentar pensadores ou estudos que proporcionaram grande desenvolvimento ao campo matemático. Também temos uma legenda que indica o volume desta coleção que aborda os conteúdos citados. Os períodos em que o infográfico foi organizado são os seguintes:

Pré-história (cerca de 2,5 milhões de anos atrás – 4.000 a.C.)	**Antiguidade** (4.000 a. C. – 476 d.C.)	**Idade Média** (476 – 1453/1492)	**Idade Moderna** (1453/1492 – 1789)	**Era Contemporânea** (1789 – dias atuais)

Caso haja alguma dúvida, não deixe de consultar seus professores de Matemática e de História.

CONTEXTO HISTÓRICO

Principais conteúdos matemáticos abordados nesta coleção

Legenda

X Número correspondente ao volume em que o conteúdo é apresentado.

Sítio Arqueológico gruta do Pitoco, Alcinópolis. MS. Bufinha/SEMUDES

Milhares de anos

Estilo geométrico produzido por povos ancestrais do Brasil, Gruta do Pitoco (MS).

Números

Durante o período Paleolítico, a maioria das comunidades humanas usava apenas três números: um, dois e "muitos". Mesmo com um conhecimento numérico rudimentar, tais povos vivenciavam a Matemática de uma forma empírica, ao entrar em contato com elementos geométricos da natureza.

1

PRÉ-HISTÓRIA

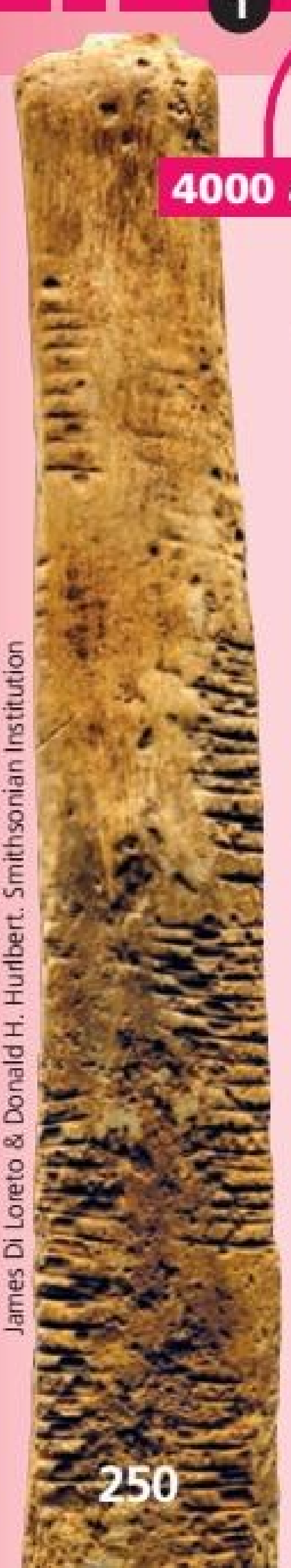
(cerca de 2,5 milhões de anos atrás-4000 a.C.)

1

4000 a.C.

Registro numérico

A partir do período Neolítico, diversas comunidades humanas sedentarizaram-se e passaram a estocar o alimento excedente. Gradualmente, surgem os primeiros centros urbanos, as relações comerciais, a divisão social e o conceito de propriedade privada. A necessidade de contar motivou a associação entre uma quantidade de objetos e a mesma quantidade de pequenos seixos. Surgem registros de números, como marcas em ossos, pedaços de madeira e pedra.



James Di Loreto & Donald H. Hurlbert. Smithsonian Institution

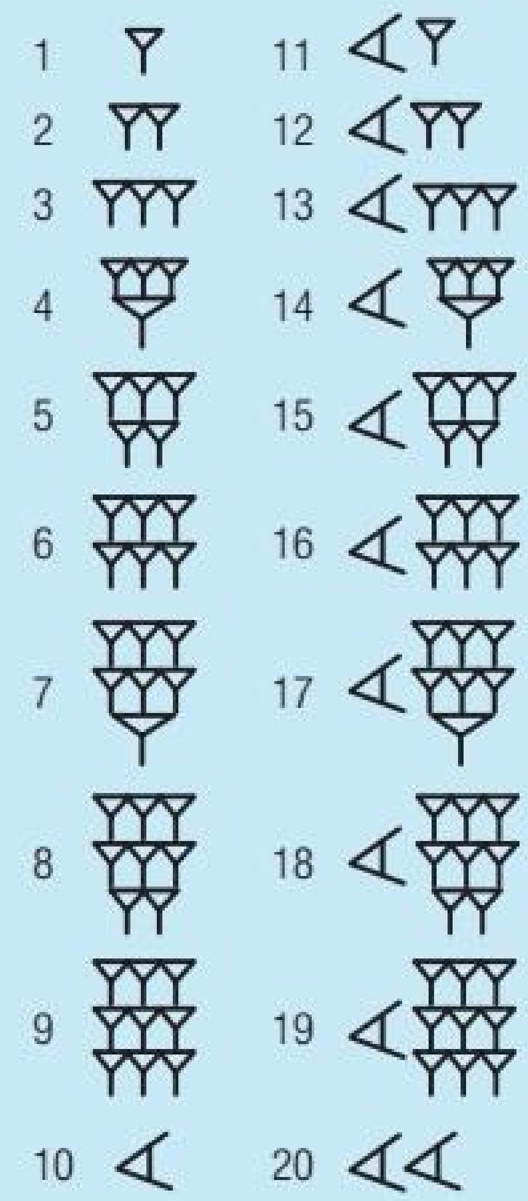
Fragmento de osso marcado por comunidades da Pré-História.

3000 a.C.

Números naturais

Durante a Antiguidade, egípcios, mesopotâmicos e outras civilizações promoveram um notável desenvolvimento da Matemática, impulsionado, sobretudo, por demandas do cotidiano. A construção de monumentos fúnebres, a contagem do tempo e a construção de canais de irrigação são alguns dos problemas superados com o auxílio do saber matemático.

Mesopotâmicos e egípcios criaram símbolos para representar os números naturais. Egípcios usavam base 10, mas notação não posicional. Já os sumérios, um dos povos da Mesopotâmia, usavam base 60 com notação posicional. Os matemáticos da antiga Suméria precisavam de 59 símbolos diferentes para representar seus números. Não existia representação do zero. Quando nada havia, deixava-se um espaço em branco.



Editoria de Arte

Sistema numérico arcaico desenvolvido na Suméria (atual Iraque).

1

1

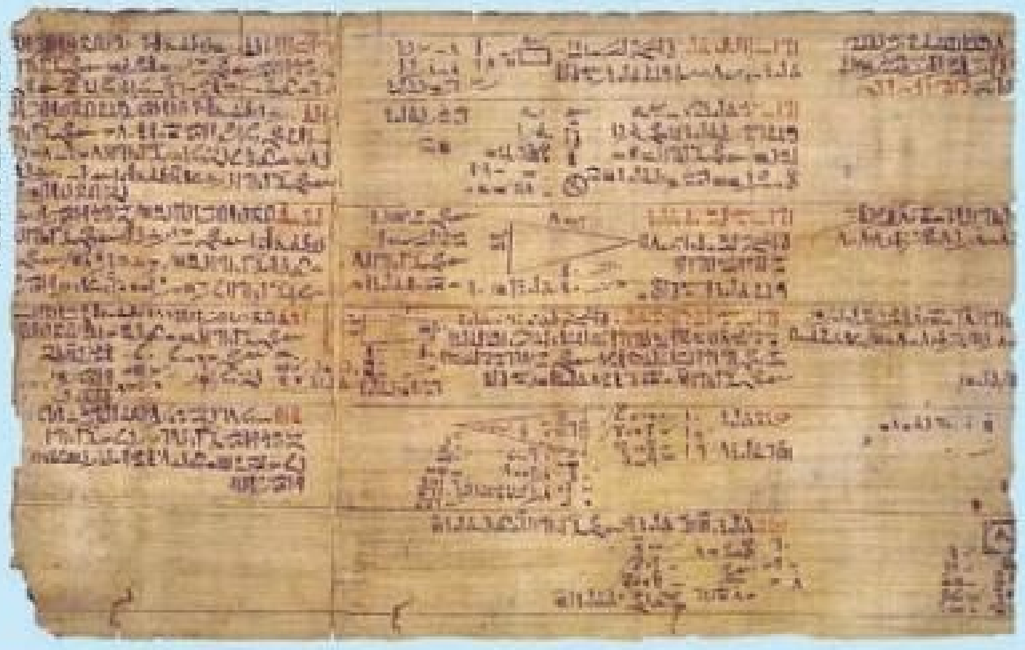
2000 a.C.

Frações

Por volta do segundo milênio antes de Cristo, povos antigos já contavam com muitas invenções consagradas, a exemplo da roda, da escrita, da Astronomia e do calendário. Em tal contexto, mesopotâmicos e egípcios criaram símbolos para representar as frações. Os egípcios usavam apenas frações de numerador 1. Assim, no Egito antigo, a fração $\frac{3}{5}$ era representada como $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$.

Fonte de pesquisa do infográfico:
BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 3 ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2012.
EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Unicamp, 2007.
KINDER, Hermann; HILGEMANN, Werner; HERGT, Manfred. **Atlas histórico mundial**: De los orígenes a nuestros días. Madrid: Akal, 2007.

A linha do tempo não está representada em escala.


Album/Latinstock

Trecho do papiro restaurado de Ahmes.

1800 a.C.

Progressões

No Egito antigo, os escribas, grupo profissional que detinha o domínio da leitura e da escrita, produziram uma vasta quantidade de documentos sobre diversos assuntos concernentes a essa civilização. Atualmente, tais documentos são uma preciosa fonte de estudo para se compreender aspectos relevantes dessa civilização. Em um papiro elaborado pelo escriba Ahmes, por exemplo, aparecem problemas envolvendo sequências aritméticas e geométricas.


Werner Forman/ Werner Forman/Corbis/Latinstock

Imagem de agrimensores egípcios trabalhando em uma plantação às margens do rio Nilo.

Século XVI a.C.

Conceito de área

As áreas de figuras próximas do retângulo eram calculadas no antigo Egito pelo produto das médias dos lados opostos do quadrilátero. Não era um método exato, mas resultava em uma boa aproximação para a área. Tal conhecimento foi imprescindível para o surgimento da agrimensura, atividade que tem como função medir e dividir lotes de terra. Em muitas imagens produzidas por essa sociedade, podemos observar o árduo trabalho dos agrimensores às margens do rio Nilo, sua principal fonte de água.

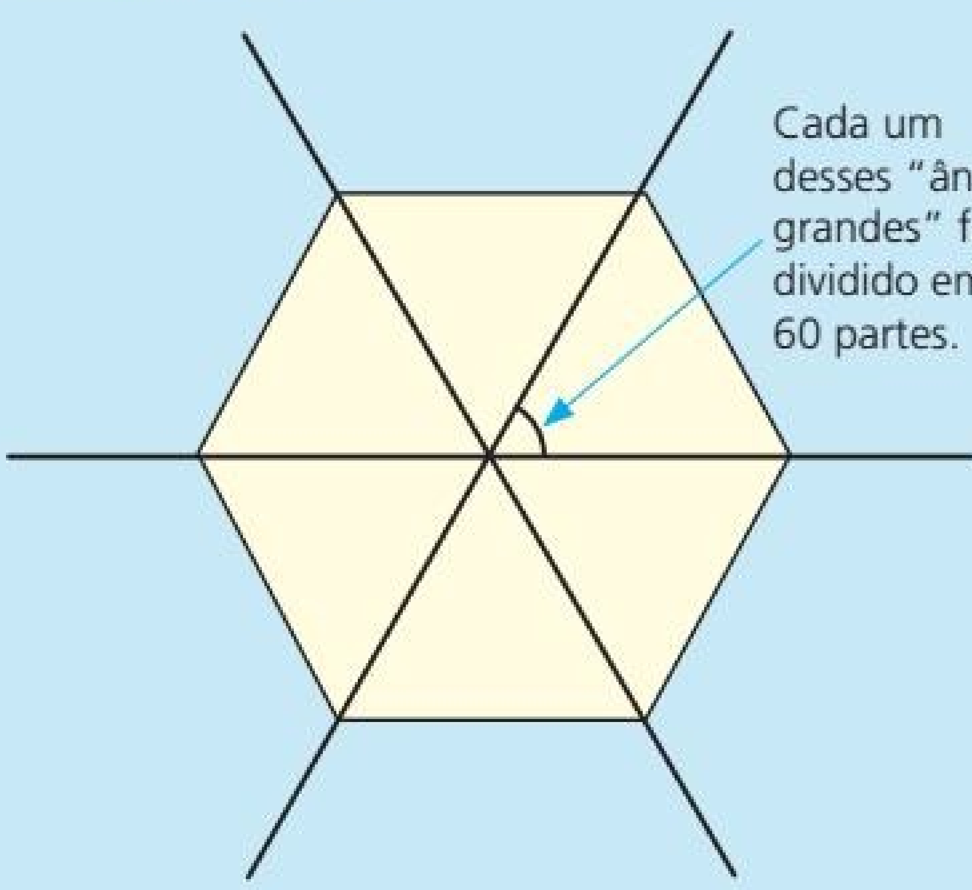
1 2 **ANTIGUIDADE** 1

(4000 a.C.-476 d.C.)

Século XVI a.C.

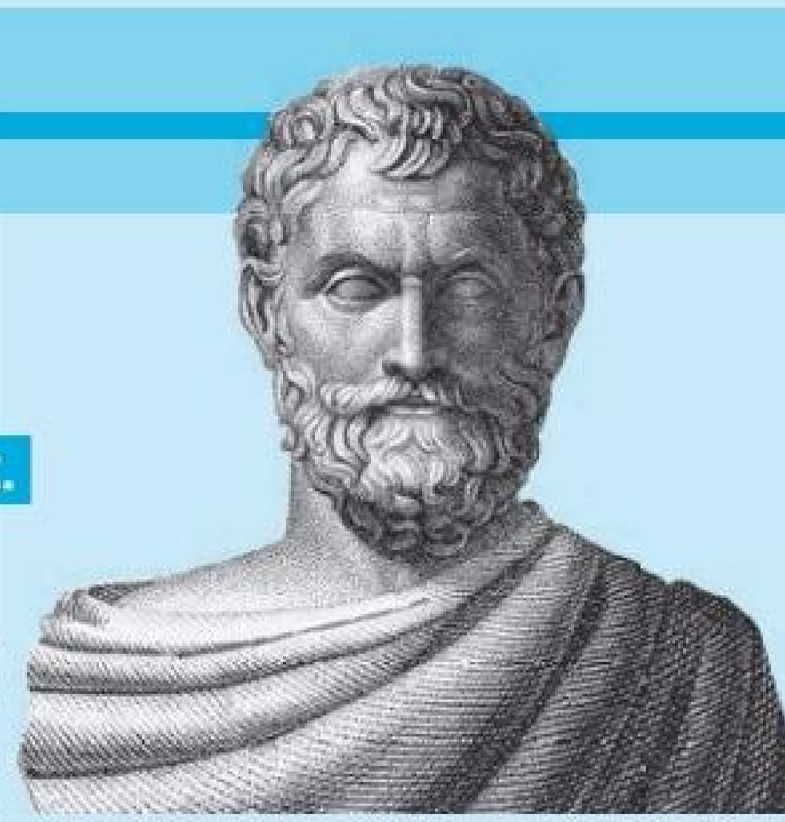
Medida de ângulos

Os mesopotâmicos conheciam o hexágono regular. Como seu sistema de numeração era em base 60, optaram por dividir cada “ângulo grande” em 60 partes.



Editoria de Arte

Século VI a.C.


Corbis/Latinstock

Busto de Tales de Mileto, considerado o primeiro filósofo da História ocidental.

Semelhança

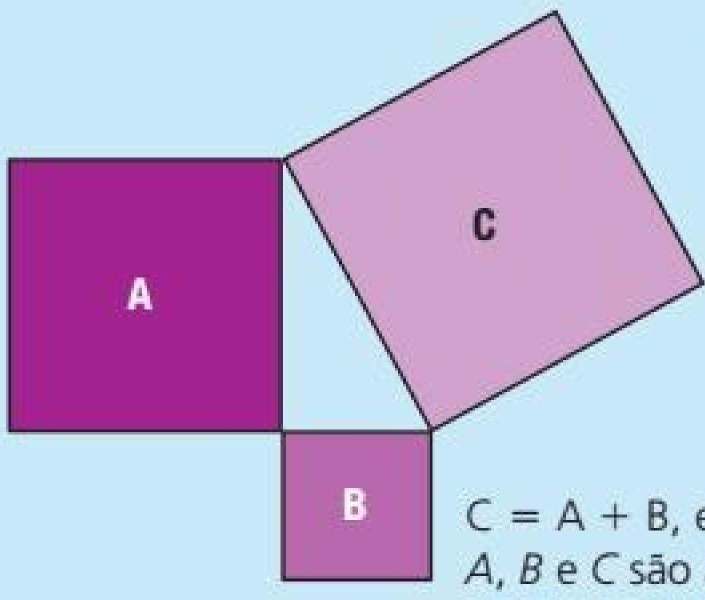
Nas colônias gregas da Ásia Menor (atual Turquia), um grupo de pensadores desprendeu-se gradualmente das explicações mitológicas usadas para a compreensão do mundo. Esse lento processo promoveu o surgimento do racionalismo, da Filosofia e do pensamento científico. Seu precursor foi Tales de Mileto (c. 623 a.C.-c. 546 a.C.), um hábil astrônomo que sustentava a ideia de que todos os elementos do Universo foram criados a partir da água. Na Matemática, Tales de Mileto demonstrou diversas propriedades de figuras geométricas e desenvolveu o conceito de semelhança mostrando diversas aplicações.

Professor, comente com os alunos que é muito comum em História da Matemática escrever “c.” (cerca de) quando não se tem certeza da data.

500 a.C.

Teorema de Pitágoras

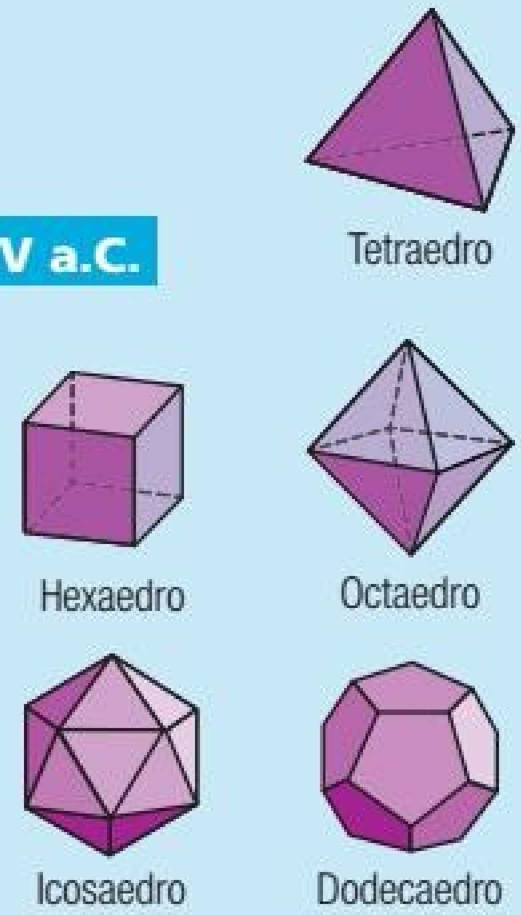
Nos primórdios da Filosofia grega, Pitágoras de Samos (c. 570 a.C. - c. 495 a.C.) afirmava que a essência das coisas são os números. Estudioso profícuo da Música e da Matemática, sua mais famosa contribuição é a confirmação de um antigo enunciado matemático: "Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos".



Editoria de Arte

C = A + B, em que *A*, *B* e *C* são as áreas dos respectivos quadrados.

Século V a.C.



Editoria de Arte

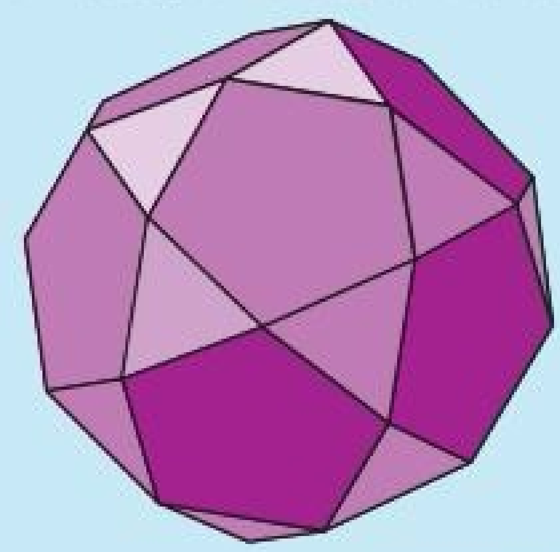
Poliedros

No auge da civilização grega, Atenas havia se convertido na *pólis* (cidade--estado) modelar, adornada com templos e monumentos custeados pelo comércio marítimo. Sócrates (c. 469 a.C. - c. 399 a.C.), Platão (c. 428 a.C. - c. 348 a.C.) e outros filósofos de renome promoviam debates, envolvendo, por exemplo, os conceitos de moral, beleza e verdade. No campo da Matemática, por sua vez, estudiosos já dominavam o conhecimento sobre os cinco poliedros regulares, representados acima.

Século III a.C.

Poliedros

Arquimedes de Siracusa (c. 287 a.C. - c. 212 a.C.) é considerado o maior matemático da Antiguidade. Filho de um astrônomo, estudou em Alexandria e desenvolveu célebres contribuições ao universo das ciências exatas – entre as quais as leis físicas do empuxo e da alavanca. Arquimedes também descobriu os 13 poliedros semirregulares. Um deles está representado na figura. O icosidodecaedro é formado por 12 pentágonos e 20 triângulos. No total, tal figura apresenta 32 faces, 30 vértices e 60 arestas.



Editoria de Arte

Representação de um icosidodecaedro.

ANTIGUIDADE

(4000 a.C.-476 d.C.)

400 a.C.

Matemática financeira

A princípio, as relações comerciais entre as primeiras comunidades humanas ocorriam com base na noção de escambo: os produtos eram trocados de forma amonetária, isto é, sem a utilização de moedas. Entretanto, o aprimoramento do comércio e a introdução de moedas exigiram a elaboração de novos saberes matemáticos. A primeira operação de Matemática financeira foi o câmbio, sendo necessário estabelecer as relações de equivalência entre o sistema monetário de diversas regiões.

Século III a.C.

Corpos redondos

No século III a.C., Arquimedes já sabia calcular os volumes dos sólidos redondos: cilindro, cone e esfera. Em 212 a.C., morreu tragicamente, aos 75 anos, pela espada de um soldado romano durante as Guerras Púnicas – um conjunto de conflitos travados entre Roma e Cartago. Sua tumba foi adornada com a relação entre os volumes da esfera e do cilindro de acordo com seu desejo.

Século III a.C.

Números irracionais e Geometria espacial de posição

Para promover seu poder, o conquistador Alexandre, o Grande (356 a.C.-323 a.C.) fundou diversas cidades com o nome de Alexandria – entre as quais se destaca o centro urbano do norte do Egito. Após sua morte, tal cidade converteu-se em um cobiçado polo de pesquisa, atraindo inúmeros sábios do mundo antigo a sua prestigiosa biblioteca, dotada de uma grande coleção de obras de caráter científico.

Em Alexandria, Euclides (c. 330 a.C.-?) escreveu a obra **Os Elementos**, a qual reunia grande parte do conhecimento matemático da época. Nessa coleção de 13 volumes, aparece a demonstração da existência de segmentos de retas que não podem ser medidos em nenhuma unidade. O 11º volume de tal publicação apresenta a Geometria espacial de posição, a qual se propõe a analisar as relações entre pontos, retas e planos.

Egypt Exploration Fund/University of Pennsylvania Museum of Archaeology and Antropology

Fragmento da obra **Os Elementos**, de Euclides de Alexandria.

A linha do tempo não está representada em escala.

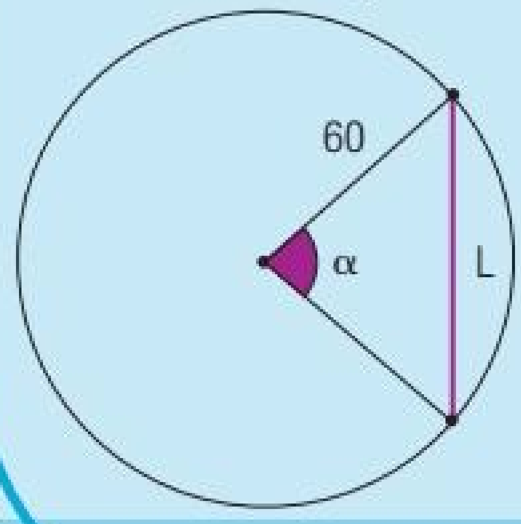
150

Trigonometria

Claudio Ptolomeu (c. 90 - c. 168) foi outro grande intelectual a habitar a cidade de Alexandria. Além da Matemática e da Astronomia, tal pensador apresentou grande contribuição no campo da Geografia. Suas produções cartográficas e a teoria geocêntrica que elaborou influenciaram os pensadores europeus até o fim da Idade Média.

Além disso, Ptolomeu construiu a primeira tabela de cordas. Em uma circunferência de raio 60, para cada ângulo α (de meio em meio grau) está associado o comprimento L da corda correspondente.

Por exemplo, para $\alpha = 80°$ tem-se $L = 77,13$. A metade da corda dividida por 60 é o seno da metade do ângulo.



Editoria de Arte

Século III a.C.

Comprimento da circunferência

Eratóstenes de Cirene (c. 276 a.C. - c. 194 a.C.) mediu a circunferência da Terra. Ele calculou a medida de 5 000 estádios para a distância entre Siena (Assuã) e Alexandria e descobriu que entre essas cidades o ângulo central é de 7,5°. Como o estádio era uma unidade aproximadamente igual a 185 m, Eratóstenes estimou a circunferência terrestre em cerca de 46 000 km.

O resultado apresenta uma pequena margem de erro diante das medições atuais, que estipulam o valor em 40 075 km.

Representação moderna de Eratóstenes de Cirene.

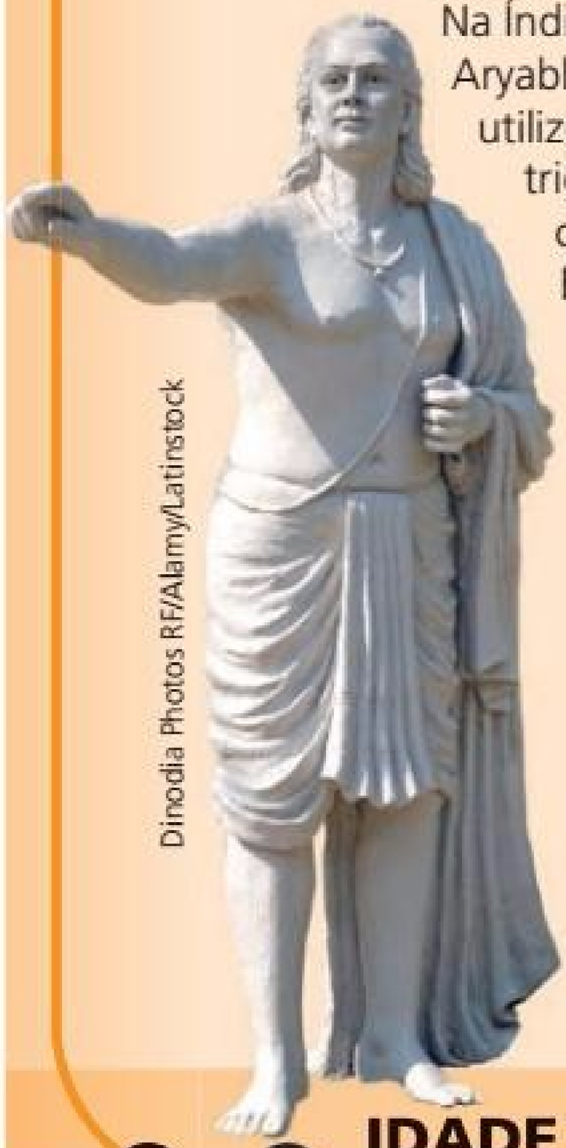
Sammlung Rauch/ Interfoto/Latinstock

500

Trigonometria

Durante a Idade Média, uma força religiosa arrebatadora espalhou-se pela Europa: o Cristianismo. O conhecimento produzido na época submeteu-se aos ditames da Igreja, conferindo uma autonomia relativa ao desenvolvimento da Ciência. Paralelamente a esse fenômeno, civilizações de destaque foram forjadas na África e no Oriente, a exemplo dos bizantinos, indianos e árabes muçulmanos.

Na Índia, o astrônomo Aryabhata (476-550) utilizou as razões trigonométricas como fazemos hoje em dia.



Estátua do estudioso indiano Aryabhata na Universidade de Pune, em Maharashtra, Índia. Fotografia de 2008.

Dinodia Photos RF/Alamy/Latinstock

IDADE MÉDIA

(476-1453/1492)

Século X

Relações entre funções trigonométricas e Trigonometria

A partir do século VII, o Islamismo foi difundido a diversas regiões do Oriente Médio, norte da África, Ásia Central e Península Ibérica. No antigo território da Pérsia (atual Irã), o matemático muçulmano Abu al-Wafa al-Buzjani (940-998) mostrou as relações entre as funções trigonométricas e utilizou, pela primeira vez, a circunferência de raio 1. Ele também deduziu as seguintes fórmulas:

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a\, \text{sen}\, b$
- $\text{sen}\, 2x = 2\text{sen}\, x \cos x$

Séculos VII ao XV

Números negativos

Na Idade Média, o surgimento de números negativos em civilizações do Oriente comprovava sua sofisticação intelectual. Os primeiros registros datam do século VII, na Índia, em uma época de esplendor do império Brahmagupta. Duzentos anos depois, o muçulmano persa Al-Khwarizmi (780-c.-850) aprimora os estudos sobre os números negativos. Tempos depois, Abu al-Wafa também aprofundou o conhecimento matemático em tal área.

A Europa, por sua vez, sofreu uma mudança de mentalidade a partir do alvorecer da Idade Moderna. O Teocentrismo da Idade Média cedeu lugar ao Racionalismo e ao Humanismo do Renascimento. No auge de tal período, o italiano Luca Pacioli (1445-1517) entra em contato com os saberes matemáticos do Oriente e promove relevantes estudos acerca dos números negativos.

Luca Pacioli.

Akg-Images/Latinstock

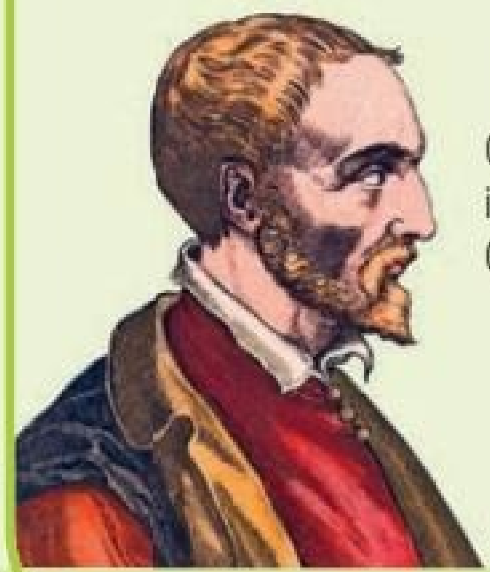
Estátua no Uzbequistão homenageia Al-Khwarizmi, considerado por muitos matemáticos como o "pai da Álgebra". Fotografia de 2013.

Melvyn Longhurst/Alamy/Latinstock

1526

Probabilidade

Durante a Renascença, o norte da Península Itálica presenciou o enriquecimento de cidades de tradição comercial, em especial Florença, Veneza e Gênova. As riquezas acumuladas foram utilizadas para o patrocínio de artistas geniais. Filippo Brunelleschi (1377-1446), Sandro Botticelli (1445-1510), Leonardo da Vinci (1452-1519) e Michelangelo Buonarroti (1475-1564) são alguns dos nomes consagrados em tal contexto.
Já no final do Renascimento, Girolamo Cardano (1501-1576), um cientista e matemático italiano, escreveu o livro **Liber de ludo aleae** (Livro dos jogos de azar). Esse livro marcou o início do estudo da probabilidade em jogos, sendo publicado apenas em 1663.



Gravura do cientista italiano Girolamo Cardano.

Akg-Images/Latinstock

1614

Logaritmos

A revolução científica contou com figuras do quilate de Nicolau Copérnico (1473-1543), Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630). Tal fenômeno, que engloba grande parte da Idade Moderna, passou a questionar as antigas verdades por meio da atenta observação do objeto do conhecimento e da experimentação de hipóteses produzidas.
Durante essa profunda transformação do paradigma da Ciência, o escocês John Napier (1550-1617) publicou seu trabalho sobre logaritmos, cujo título em latim é **Mirifici logaritmorum canonis descriptio**.

1624

Equações polinomiais

Em meados do século XVII, a revolução científica chegou à França da Idade Moderna, momento de esplendor da corte dos Bourbon, caso do extravagante Luís XIV. Durante a época de Luís XIII, pai do "rei Sol", Albert Girard (1595-1632) lançou o livro **Invention nouvelle en l'algebre** contendo as relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial.

Meados do século XVII

Probabilidade

Cartas entre Pierre de Fermat e o filósofo e teólogo Blaise Pascal (1623-1662) auxiliaram no desenvolvimento do raciocínio de probabilidade em jogos. Christian Huygens (1629-1695), matemático holandês, escreveu um livro sobre probabilidades, cujo título é **De Ratiociniis in ludo aleae** (Sobre o raciocínio em jogos de azar).

IDADE MODERNA

(1453/1492-1789)

2 3 1 3 3 3 2

1542

Números complexos

Girolamo Cardano elaborou a solução da equação $x^3 + px + q = 0$, que tinha sido descoberta por Scipione del Ferro (1465-1526) e Niccoló Tartaglia (1499-1557).
Na solução de uma dessas equações aparece a igualdade $\sqrt[3]{2+\sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-4}} = -2$, a qual contém um número negativo dentro de uma raiz quadrada; apesar disso, o resultado é um número real.
Esse fato marcou o nascimento dos números complexos, compreendidos apenas séculos depois.

1635

Cálculo

A Idade Moderna vivenciou também a Reforma religiosa, uma ruptura da cristandade europeia motivada, entre outros fatores, pela ascensão de uma mentalidade questionadora e irreverente. Como resposta ao surgimento das correntes protestantes, o católico Ignácio de Loyola fundou a Companhia de Jesus em 1534, cujos membros são conhecidos como jesuítas. Entre os seguidores da ordem, o italiano Bonaventura Cavalieri (1598-1647) conquistou reconhecimento ao produzir a obra **Geometria indivisibilibus continuorum**. Tal produção contém o famoso princípio que serviu de inspiração ao aparecimento e ao desenvolvimento do Cálculo.

1636

Geometria analítica

O francês Pierre de Fermat (1601-1665) teve a ideia de representar pontos no plano por meio de duas coordenadas. Com elas, ele estudou as cônicas. Tal proposta foi também enunciada pelo filósofo René Descartes (1596-1650), um dos pensadores mais versáteis da Idade Moderna. Sua produção matemática foi tão relevante quanto suas divagações filosóficas, entre as quais a famosa sentença *"cogito, ergo sum"* (penso, logo existo).

A linha do tempo não está representada em escala.

1637

Geometria analítica

René Descartes produziu a obra **Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências**. No apêndice desse livro, aparecem os fundamentos que permitiram o aparecimento da Geometria analítica décadas depois. Descartes foi um dos primeiros matemáticos a ter a ideia de reunir a Geometria e a Álgebra.

O filósofo francês René Descartes mostrou como poucos o espírito da Ciência moderna no século XVII.

Georgios Kollidas/Shutterstock.com

1666

Combinatória

Com apenas 20 anos, Gottfried Leibniz (1646-1716), matemático, cientista e diplomata alemão, lançou o trabalho **Dissertatio de arte combinatoria** com as principais técnicas de contar de forma eficiente.

Pensador e diplomata alemão Gottfried Leibniz.

Nicku/Shutterstock.com

1702

Representação de funções

O século XVIII ficou conhecido como "Era das Luzes", uma vez que contou com o esplendor do Iluminismo. Os membros de tal corrente intelectual defendiam a tese de que a razão e o saber resolveriam os males da humanidade. Suas críticas, por sua vez, voltavam-se ao fanatismo, à ignorância e a outras características da sociedade europeia da Idade Moderna. No início do século, o estudioso suíço Jean Bernoulli (1667-1748) propôs o símbolo φ (x) para representar uma função de *x*. A partir dessa época, as funções elementares tornam-se comuns.

Jean Bernoulli foi uma figura de grande relevância para o estudo das funções.

Heritage Images/Getty Images

1662

Estatística

O britânico John Graunt (1620-1674) elaborou métodos para analisar o censo populacional na Inglaterra, reunindo grande quantidade de dados sobre a população da época. Seu livro **Natural and Political Observations Mentioned in a Following Index and Made upon the Bills of Mortality** apresentava tabelas sobre a expectativa de vida da população e marcou o início da Estatística moderna. O aumento exponencial da população europeia converteu-se em um assunto prioritário dos Estados modernos, interessados em utilizar o "capital" humano à disposição para atender a seus interesses políticos e econômicos. Já no século XVIII, o economista britânico Thomas Malthus (1766-1834) criou uma teoria populacional alarmista. De acordo com sua pesquisa, a população mundial cresceria em um ritmo maior que a oferta de alimento. Entretanto, tal previsão não se concretizou ao longo do tempo.

1700

Determinantes

Leibniz inventou uma operação com os elementos de uma matriz quadrada que ele chama de "resultado". É o mesmo número chamado, tempos depois, de "determinante".

Final do século XVII

Sistema cartesiano ortogonal

Sir Isaac Newton (1643-1727), considerado um dos maiores físicos da história, consagrou o processo de Revolução Científica. Ao longo de suas pesquisas, o famoso inglês fundamentou a Mecânica clássica, afirmando que as mesmas leis que governam os corpos celestes também são aplicadas aos objetos. No final do século XVII, Newton utilizou eixos cartesianos ortogonais e desenvolveu o Cálculo diferencial ao estudar diversas funções.

Science Photo Library/Latinstock

Sir Isaac Newton.

1730

Determinantes

Colin Maclaurin (1698-1746), um matemático de origem escocesa, escreveu sua obra **Treatise on Algebra** contendo propriedades dos determinantes. Nessa publicação, Maclaurin havia mostrado a regra para resolver sistemas lineares 2 × 2 e 3 × 3. Anos depois, iniciou-se a Primeira Revolução Industrial na Inglaterra, fenômeno que promoveu uma mudança sem precedentes no processo de produção de mercadorias.

Meados do século XVIII

Sistemas lineares

Em 1750, o matemático suíço Gabriel Cramer (1704-1752) elaborou o método geral para a resolução de sistemas lineares com *n* equações e *n* incógnitas usando determinantes. Já em 1764, o estudioso francês Étienne Bézout (1730-1783) descobriu métodos para calcular determinantes grandes.

1772

Determinantes

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), intelectual francês que organizou a chamada Astronomia Matemática, publicou a **Teoria geral dos determinantes**. Por meio desse estudo, Laplace explicou a regra de expansão que permitiu representar um determinante de ordem *n* por meio de uma soma de determinantes de ordem $n-1$.

Representação artística do matemático francês Laplace.

Science Photo Library/Latinstock

IDADE MODERNA

(1453-1789)

1748

Função exponencial e poliedros

O suíço germanófilo Leonhard Euler (1707-1783) descobriu que $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$.

Em 1752, desenvolveu a fórmula dos poliedros convexos: $A + 2 = F + V$, em que *A* é o número de arestas, *F* é o número de faces e *V* é o número de vértices de um poliedro convexo.

Leonhard Euler consagrou-se na história da Matemática por causa de suas contribuições no campo da Geometria espacial e das funções.

© Roger-Viollet/Glow Images

1807

Polinômios

O italiano Paolo Ruffini (1765-1882) produziu um livro de Álgebra elementar contendo o algoritmo da divisão de um polinômio p(x) por (x – a).

Paolo Ruffini foi um matemático de destaque na Álgebra elementar.

De Agostini Picture Library/Glow Images

1812

Matrizes e determinantes

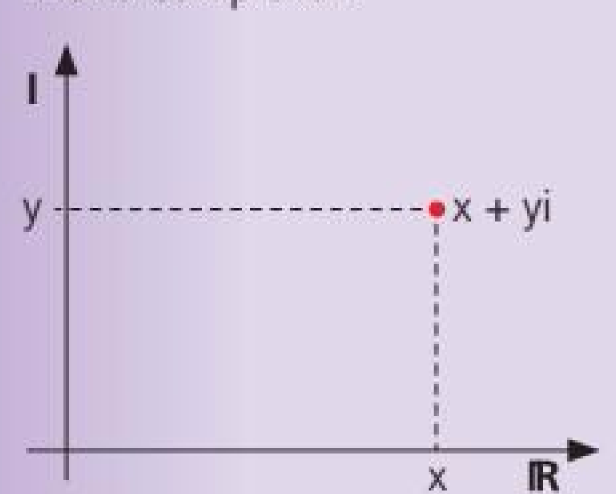
Jacques Binet (1786-1856), matemático de origem francesa, descobriu a regra de multiplicação de matrizes e provou que "o determinante do produto de duas matrizes quadradas é o produto dos seus determinantes".

$\det(AB) = \det A \cdot \det B$

1806

Números complexos

No século XIX, os saberes científicos, notadamente as chamadas ciências exatas, galgaram uma importância incomparável na civilização europeia. Em tal contexto, o francês Auguste Comte (1798-1857) fundou o Positivismo, corrente de pensamento que defendia a inquestionabilidade do método científico, único instrumento capaz de promover a "ordem" e o "progresso" aos países evoluídos. No campo da Matemática, o suíço e matemático amador Jean--Robert Argand (1768-1882) teve a ideia de representar geometricamente os números complexos e criou o "Plano complexo".



1841

Determinantes

O pensador alemão Carl Gustav Jacobi (1804-1851) lançou o livro **De determinantibus functionalibus** contendo diversas propriedades dos determinantes e aplicações em Cálculo diferencial.

Retrato do alemão Carl Gustav Jacobi.

Corbis Corporation/Fotoarena

A linha do tempo não está representada em escala.

Meados do século XIX

Matriz

Em 1850, o britânico James Sylvester (1814-1897) inventou a expressão "matriz" para representar um quadro retangular de números. Cinco anos depois, Arthur Cayley (1821-1895), matemático inglês, descobriu métodos para calcular o que chamou de "matriz inversa" de uma determinada matriz.

1842

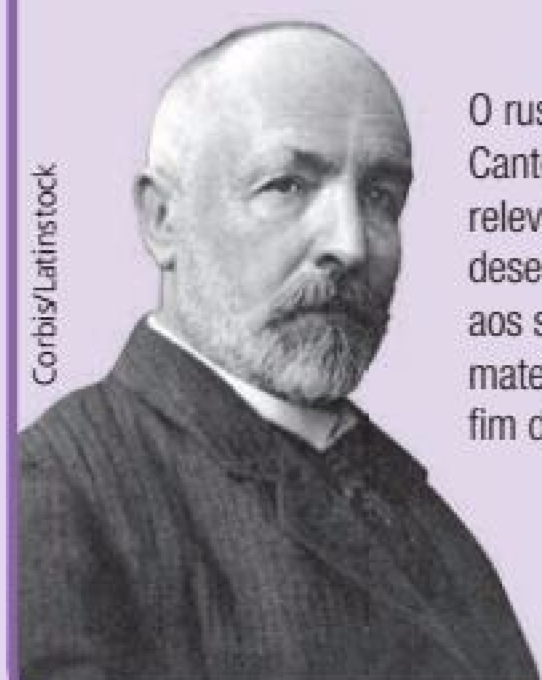
Determinantes

O matemático francês Pierre Sarrus (1798-1861) divulgou a regra para o cálculo do determinante 3×3, a qual foi universalmente adotada pelos estudantes.

1870

Conjuntos

Por volta de 1860, iniciou-se a Segunda Revolução Industrial, nova fase de aprimoramento da produção fabril. Em tal conjuntura, algumas invenções difundidas mundialmente foram criadas, como a locomotiva, o telefone, o telégrafo, o rádio e o cinema. Na segunda metade do século XIX, o russo Georg Cantor (1845-1918) e o estudioso alemão Richard Dedekind (1831-1916) começaram a desenvolver a **Teoria dos Conjuntos**. A grande dúvida era como tratar conjuntos com número infinito de elementos.



Corbis/Latinstock

O russo Georg Cantor promoveu relevante desenvolvimento aos saberes matemáticos no fim do século XIX.

Década de 1930

Nas pesquisas da Química, o alemão Werner Heisenberg (1901-1976) elaborou o princípio da incerteza: não se pode determinar de forma simultânea a posição e a velocidade das partículas atômicas.
Na década de 1930, a Matemática também vivenciou uma quebra de paradigmas. Kurt Gödel (1906-1978), um estudioso austríaco naturalizado estadunidense, demonstrou que o conjunto de preceitos que estruturam a Matemática é incompleto. Por meio do Teorema da Incompletude, assegurou que não se pode demonstrar nem a verdade nem a falsidade de algumas propriedades matemáticas.

Kurt Gödel causou uma fissura nas certezas matemáticas ao fundar o Teorema da Incompletude.

Granger/Fotoarena

2 2 1 **ERA CONTEMPORÂNEA**

(1789-dias atuais)

Início do século XX

O entusiasmo quanto à suposta onisciência e onipotência da Ciência no século XIX deu lugar a um profundo sentimento de desesperança nas primeiras décadas do século XX, pois o primoroso desenvolvimento científico contribuiu com extermínios em massa nas grandes guerras.
No campo da Física, a Mecânica clássica de Newton é questionada pela Teoria da Relatividade de Albert Einstein (1879-1955). Como consequência, ganhou força o indeterminismo e o probabilismo entre os estudiosos dos fenômenos físicos.

GL Archive/Alamy/Latinstock

Albert Einstein revolucionou o universo da Física ao problematizar a Mecânica clássica de Isaac Newton e inaugurar a Teoria da Relatividade.

Meados do século XX e início do século XXI

O terceiro estágio da Revolução Industrial ocorreu nas últimas décadas do século XX e início do século XXI. Testemunha-se uma evolução em diversas áreas do saber, sobretudo nas telecomunicações, na robótica, na informática e na engenharia genética. Intelectuais e outras figuras ligadas ao conhecimento são conclamados a solucionar demandas criadas pela própria humanidade, caso da degradação ambiental. É crescente o número de pensadores que procuram questionar uma visão tecnicista do mundo, ao passo que valorizam uma postura científica mais humana, inclusiva e plural.

Michael D. Brown/Shutterstock.com

A robótica foi uma das áreas tecnológicas que conheceram grande impulso graças ao advento da Terceira Revolução Industrial.

Respostas

Unidade 1 – Conjuntos

Capítulo 1 – Introdução aos conjuntos

Exercícios propostos

1. a) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$
b) $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$
c) $C = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

2. a) Verdadeira.
b) Verdadeira.
c) Verdadeira.
d) Verdadeira.
e) Verdadeira.
f) Falsa.

3. a) $\{6, 7, 8, 9\}$
b) $\{4, 6, 8, 10\}$
c) $\{7, 9, 11\}$

4. a) $\{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 6, 8\}, \{4, 6, 8\}$
b) $\{2, 4, 6, 8\}$

5. 1

6. $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}, \{C, D\}$

7. a) Verdadeira.
b) Verdadeira.
c) Falsa.
d) Falsa.
e) Verdadeira.
f) Verdadeira.
g) Verdadeira.
h) Verdadeira.

8. a) $A \subset B$
b) $A \subset C$
c) $A \subset D$
d) $B \not\subset C$
e) $B \subset D$
f) $C \not\subset D$

9. a) $A \subset B$
b) $A \subset C$
c) $B \not\subset C$

10. a) Verdadeira.
b) Falsa.
c) Verdadeira.
d) Verdadeira.
e) Falsa.
f) Verdadeira.
g) Falsa.
h) Falsa.

11. a) Verdadeira.
b) Verdadeira.
c) Falsa.
d) Verdadeira.
e) Verdadeira.
f) Verdadeira.
g) Verdadeira.
h) Verdadeira.

12. a) Falsa.
b) Falsa.
c) Falsa.
d) Verdadeira.
e) Falsa.

13. 4 conjuntos.

14. $A = B = C$

15. Alternativa **a**.

16. a) $\{0, 1, 2, 3, 5\}$
b) $\{0, 1, 2, 3, 5, 7, 9\}$
c) $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
d) $\{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
e) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$
f) $\{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

17. a) $\{0, 1, 2\}$
b) $\{0, 2, 4\}$
c) $\{1, 3\}$
d) $\{0, 2\}$
e) $\{0, 2\}$
f) $\varnothing$

18. a) $\{0\}$
b) $\{0, 1\}$
c) $\{1\}$
d) $\{1\}$
e) $\{1\}$
f) $\{0, 1, 2, 3\}$

19. a) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$
b) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$
c) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
d) $\{2, 6\}$
e) $\{2\}$
f) $\{1, 3, 9\}$
g) $\{4\}$

20. $\{3, 4, 5\}$

21. a) $\{10, 11\}$
b) $\{0\}$
c) $\varnothing$

22. a) $\{1, 3, 4, 6, 7\}$
b) $\{0, 2, 4, 6\}$
c) $\{0, 1, 3, 5, 7\}$

23. a) $\{3, 6, 15, 30\}$
b) $\{0, 4, 8, 12, ...\}$
c) $\{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$
d) $\{0, 35, 70, ...\}$

24. Alternativa **d**.

25. 340

26. a) 260
b) 120
c) 470
d) 160

27. a) 36
b) 59
c) 20

28. a) Resposta pessoal.
b) Pesquisa.
c) 27%

Capítulo 2 – Conjuntos numéricos

Exercícios propostos

1. a) $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
b) $B = \{3, 4, 5\}$
c) $C = \{-2, -1, 1, 2, 3\}$
d) $D = \{..., -5, -4, -3, -2\}$

2. Respostas possíveis:
a) $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 6 \leq x \leq 8\}$
b) $S = \{y \in \mathbb{N} \mid y > 3\}$
c) $T = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq -1\}$
d) $V = \{y \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq y \leq 3\}$

3. a) $\in$
b) $\notin$
c) $\in$
d) $\notin$
e) $\in$
f) $\notin$

4. a) $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $\{0, 1, 2, 3\}$

5. a) $A = \{0, 2, 4, ...\}$
b) $B = \{0, 1, 4, 9, ...\}$
c) $C = \{6\}$

6. Sim, são iguais.

7. a) $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
b) $B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
c) $C = \{1, 2, 3, 6\}$

8. $\{3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57, 63, 69\}$

9. 15 e 16

10. a) $\notin$
b) $\in$
c) $\notin$
d) $\notin$
e) $\in$
f) $\in$

11. a) $\frac{32}{99}$
b) $\frac{11}{9}$
c) $\frac{2\,713}{999}$
d) $\frac{8}{9}$

12. a) $M = \left\{-5, \frac{1}{2}\right\}$
b) $N = \{1\}$
c) $P = \{-2, 1, 3\}$
d) $S = \{5\}$

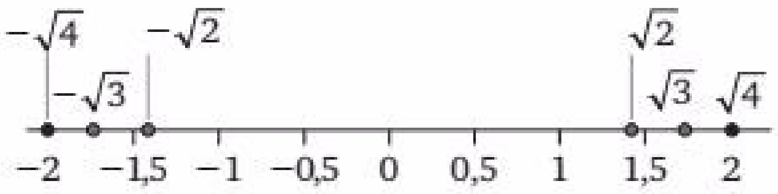
13. Alternativa **b**.

14. Alternativa **a**.

15. Alternativa **d**.

16. Alternativa **d**.

17.



18. a) $\{2\}$
b) $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$
c) $\{1, 2\}$
d) $\{-1, 1\}$
e) $\varnothing$

19. a) 1,866
b) 0,616

20. a) $AC = 2\sqrt{5}$, $AD = 2\sqrt{6}$, $AF = 4\sqrt{2}$

b) $P_{ABCD} = 8 + 2\sqrt{6}$

21. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 6 \leqslant x \leqslant 10\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 5\}$

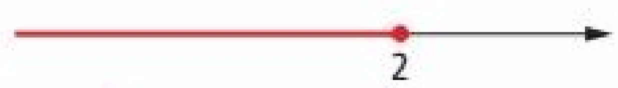
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 0\}$

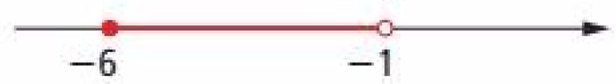
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

f) $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 10\}$

22. a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

f) 

23. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 4\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} < x < 5\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$

24. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leqslant 1 \text{ ou } 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -2\}$

25. a) $]-4, -1[$

b) $]-2, -1[\cup]2, 4[$

26. a) Conter em sua composição alimentos naturais; ser colorida e composta por alimentos variados; saborosa; ter qualidade e ser consumida na quantidade certa e estar livre de contaminação.

b) Obesidade, pressão alta, diabetes e doenças do coração.

c) i) IMC = 27,7; sobrepeso.

ii) Normal: $18{,}5 \leqslant \text{IMC} \leqslant 24{,}9$; sobrepeso: $25{,}0 \leqslant \text{IMC} \leqslant 29{,}9$; obesidade: $30{,}0 \leqslant \text{IMC} \leqslant 39{,}9$; obesidade grave: $\text{IMC} > 40$.

d) Resposta pessoal.

Exercícios complementares

1. Alternativa **c**.
2. Alternativa **c**.
3. Alternativa **e**.
4. 3 pessoas.
5. 44
6. Alternativa **c**.
7. Alternativa **e**.
8. Alternativa **b**.
9. Alternativa **d**.
10. Alternativa **a**.
11. Alternativa **c**.
12. Alternativa **d**.
13. Alternativa **b**.
14. Alternativa **b**.
15. Alternativa **a**.
16. Alternativa **c**.

Unidade 2 – Introdução às funções

Capítulo 3 – Funções

Exercícios propostos

1. a) Variável independente: O número de barras de chocolate.

b) Variável independente: Duração de uma chamada local.

c) Variável independente: Andar que a pessoa mora.

2. Alternativa **c**.

3. $P = 6x$; $A = 2x^2$; $d = x\sqrt{5}$

4. $y = 2x + 3$

5. a) $p = 300t$

b) 1 050 pães

6. Alternativa **c**.

7. Não.

8. a) $Im(f) = \{-8, -1, 0, 1\}$

b) $Im(f) = \{2, 3, 4, 5\}$

c) $Im(f) = \{-3, 0, 1\}$

9. Respostas possíveis:

a) $y = x + 2$ ou $f(x) = x + 2$

b) $y = x^2$ ou $h(x) = x^2$

10. a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

c) $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \dfrac{1}{2}\right\}$

11. a)

Nº de palitos	1	2	3	4	5	6
Total de palitos	3	6	9	12	15	18

b) $y = 3x$

c) Domínio: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$

Imagem: $\{3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$

d) 15 palitos

12. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{4, 5\}$

b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -1 \text{ e } x \neq 0\}$

13. Alternativa **b**.

14. 80

15. a) R$ 12,90 b) 21 km

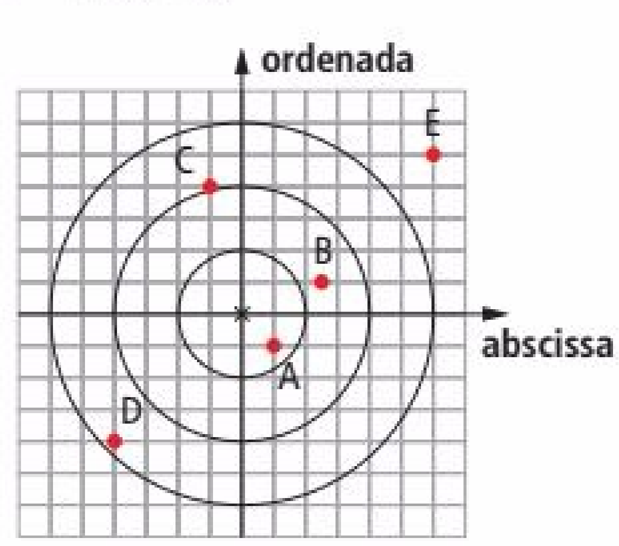
16. a) 20 componentes.

b) 28 componentes.

17. A(2, 2), B(0, 0), C(5, 0), D(0, 6), E(−3, 0), F(0, −2), G(−2, 4), H(−5, −5), I(5, −3) e J(−5, 1)

18. $a = -1$ e $b = 5$

19. a)



b) 1 flecha

c) 500 pontos

20. a) Não. c) Sim.

b) Sim. d) Não.

21. Sim, pode representar uma função.

22. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x < 3\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant y < 2\}$

b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant y \leqslant 3\}$

c) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 4 \text{ e } x \neq 1\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid -2 < y \leqslant 3\}$

d) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$

e) $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$

f) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ e

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

23. a) Resposta pessoal.

b) Domínio em anos e imagem em ppm (partes por milhão).

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

e) Resposta pessoal.

24. Linha vermelha: farmacêutico.

Linha azul: agrotóxicos.

25. a) crescente: $[-2, 1]$ e $[2, 3]$

decrescente: $[3, 4]$

b) Permanece constante.

26. Alternativa **b**.

27. Alternativa **a**.

28. Alternativa **d**.

29. a) Bijetora

b) Sobrejetora

c) Injetora

30. IV

31. Alternativa **e**.

32. Alternativa **a**.

33. a) Sim. b) Não.

34. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

35. a) $y = x + 3$

b) $y = 4x - 2$

36. $g(x) = \dfrac{-x - 2}{6}$

37. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$ c) 2

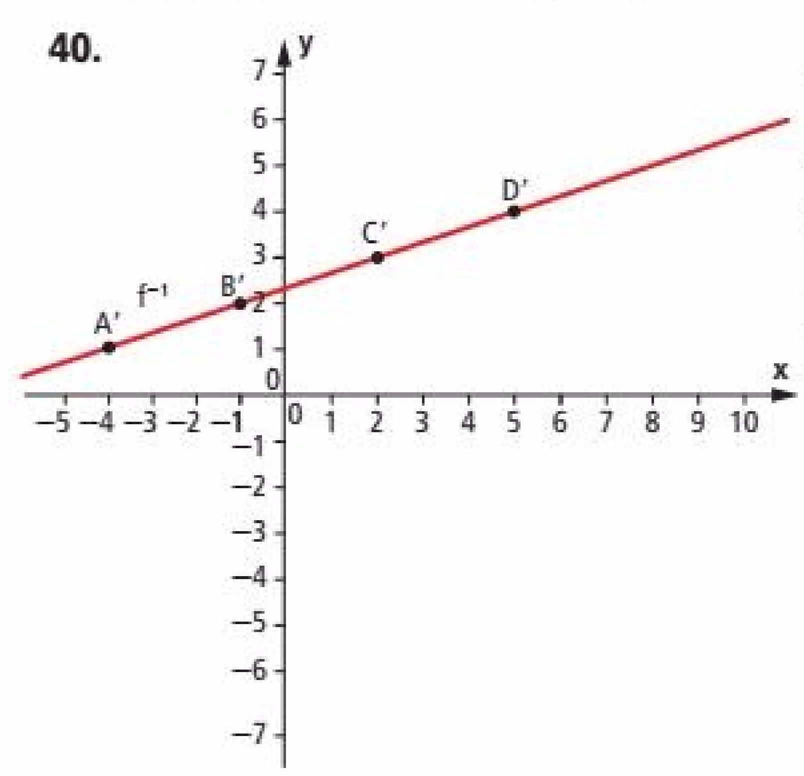
b) $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

38. $a = 3$

39. a) Sim. c) Sim.

b) Não. d) Não.

40.



Ilustrações: Editoria de arte

Exercícios complementares

1. a) 1, 64 m
b) Paula: 54 kg; Paulo: 56 kg.
2. Alternativa **b**.
3. Alternativa **e**.
4. Alternativa **a**.
5. 13
6. Alternativa **d**.
7. $m = 0$ ou $m = \frac{1}{4}$
8. a) Às 2 h e às 8 h.
b) Varia de −5 °C a 13 °C.
c) Das 0 h às 2 h e das 8 h às 24 h.
9. Alternativa **b**.
10. Alternativa **d**.

Unidade 3 – Estudo das funções afim, quadrática e modular

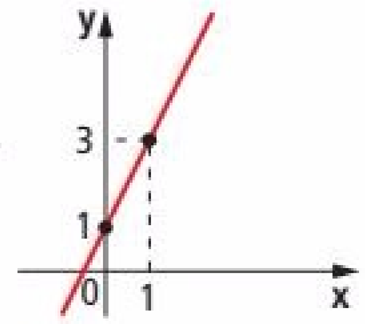
Capítulo 4 – Função afim

Exercícios propostos

1. a) II, III e IV
b) II: função polinomial do 1º grau; III: função polinomial do 1º grau e função linear; IV: função constante.
c) II) $a = -2$, $b = \sqrt{3}$ III) $a = \frac{2}{5}$, $b = 0$
IV) $a = 0$ e $b = 0{,}01$
2. a) 8 b) $x = \frac{2}{5}$
3. $f(x) = -2x + 6$; $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 7$
4. Alternativa **e**.
5. 6
6. 125 mg.
7. a) $d = 80t$. Sim.
b) 800 cm; 3 200 cm
c) 125 s.
8. a) $y_A = 0{,}30n$ e $y_B = 0{,}25n$
b) Sim.
c) R$ 250,00
9. a) Qualquer cidadão que comprovar o tempo total de 35 anos de contribuição para a Previdência Social, se homem, ou 30 anos de contribuição, se mulher.
b) O aumento da expectativa de vida dos brasileiros e a diminuição da taxa de fecundidade.
c) Homem: $i(x) = 100 - x$; mulher: $i(x) = 90 - x$
d) Sim; $D_H = \{x \in \mathbb{N} \mid 35 \leq x \leq 100\}$ e $D_M = \{x \in \mathbb{N} \mid 30 \leq x \leq 90\}$
e) Resposta pessoal.
f) Resposta pessoal.
g) Resposta pessoal.

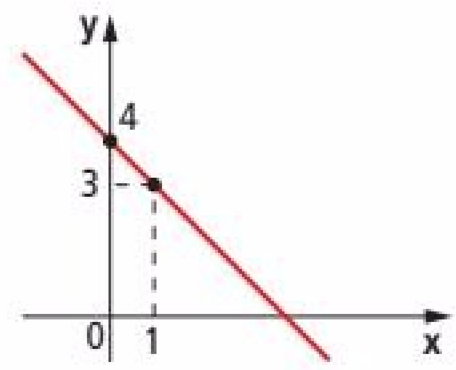
10. a) $f(x) = 2x + 1$

x	y
0	1
1	3



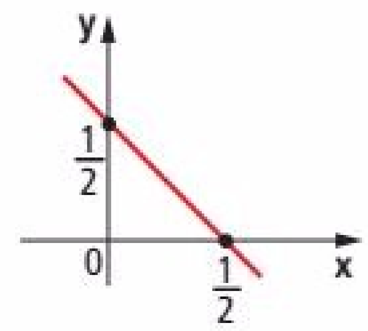
b) $f(x) = -x + 4$

x	y
0	4
1	3



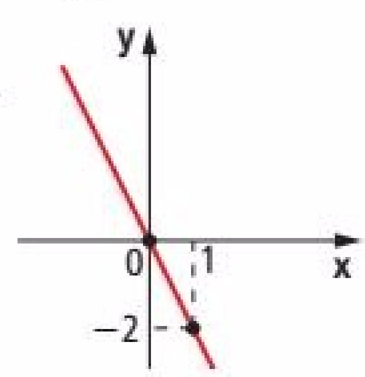
c) $y = \frac{1}{2} - x$

x	y
0	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	0

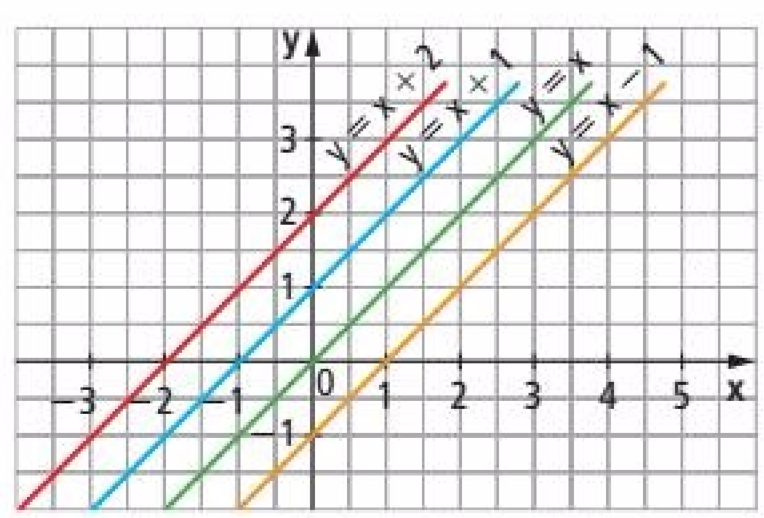


d) $g(x) = -2x$

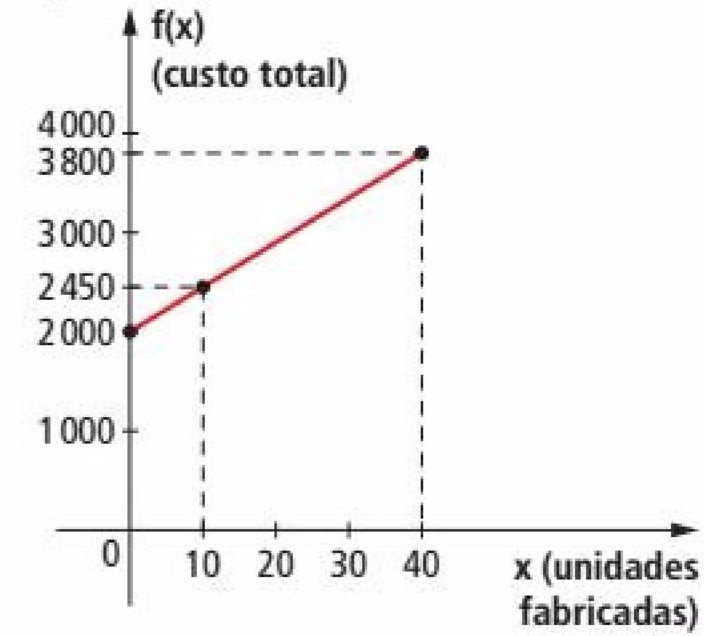
x	y
0	0
1	−2



11.



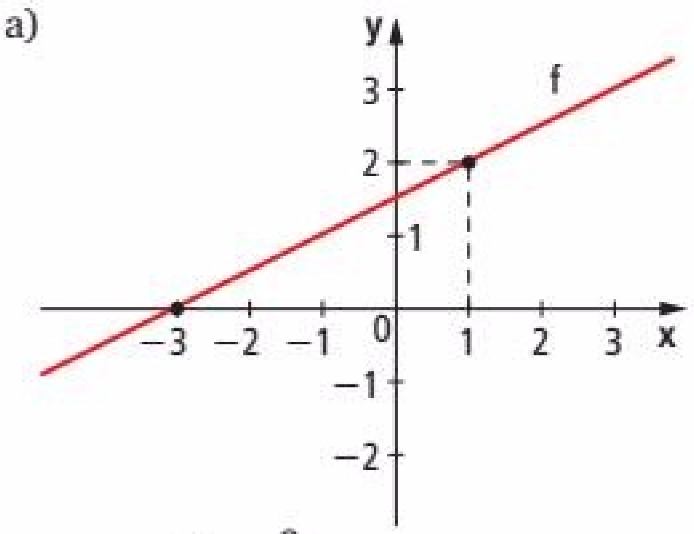
12. a) $y = 3{,}50x$.
b) Sim, pois $\frac{y}{x}$ é constante.
c) 8 bolas.
13. $p = 6$
14. $m = \frac{1}{4}$
15. a) $\frac{4}{3}$
b) 0
c) −4
d) −24
16. a) $P = 156 - 2{,}5n$
b) 15 semanas
17. a) $f(x) = 45x + 2000$
b) R$ 2 450,00
c) 40 unidades
d)



Ilustrações: Editoria de arte

18. $f(x) = -x + 4$; $g(x) = x$
19. a) $y = 10x + 10$
b) R$ 80 000,00
20. a) Crescente
b) Decrescente
c) Constante
d) Decrescente
e) Decrescente
f) Constante
21. a) $f(x) = 0$ para $x = -5$
$f(x) > 0$ para $x > -5$
$f(x) < 0$ para $x < -5$
b) $y = 0$ para $x = 3$
$y > 0$ para $x < 3$
$y < 0$ para $x > 3$
c) $f(x) = 0$ para $x = \frac{2}{3}$
$f(x) > 0$ para $x < \frac{2}{3}$
$f(x) < 0$ para $x > \frac{2}{3}$
d) $f(x) = 0$ para $x = -\frac{5}{2}$
$f(x) > 0$ para $x > -\frac{5}{2}$
$f(x) < 0$ para $x < -\frac{5}{2}$
e) $y = 0$ para $x = 2$
$y > 0$ para $x < 2$
$y < 0$ para $x > 2$
f) $g(x) = 0$ para $x = \frac{1}{5}$
$g(x) > 0$ para $x < \frac{1}{5}$
$g(x) < 0$ para $x > \frac{1}{5}$
g) $y = 0$ para $x = 3$
$y > 0$ para $x > 3$
$y < 0$ para $x < 3$
h) $f(x) = 0$ para $x = -4$
$f(x) > 0$ para $x > -4$
$f(x) < 0$ para $x < -4$
22. a) A função é decrescente.
b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$
c) $f(x) > 0$ para $x < 6$; $f(x) < 0$ para $x > 6$; $f(x) = 0$ para $x = 6$
23. a) $f(x) = x + 1$
b) $x = -1$
c) $x > -1$

24. a)



b) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

c) $f(x) > 0$ para $x > -3$; $f(x) < 0$ para $x < -3$; $f(x) = 0$ para $x = -3$.

25. a) 1 min 15 s

b) Positiva em: $1{,}25 < t < 5$
Negativa em: $0 \leqslant t < 1{,}25$

26. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{11}{23}\right\}$

27. $S = \{0, 1, 2\}$

28. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -9\}$

29. a) $x > 5$ b) $x \geqslant 6$

30. 6

31. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -23\}$

32. a) $L_A(x) = 10x - 500$, para $x \geqslant 0$

b) $x > 75$

33. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 5\}$

34. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, -1 < x < \frac{1}{3}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 1\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 7\}$

35. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 6 < x < 12\}$

36. $x = 18$

37. $S = \varnothing$

38. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 17 \leqslant x \leqslant 26\}$

39. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\}$

b) $S = \mathbb{R}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1\}$

40. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 4\}$

41. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

42. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leqslant 3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } 1 < x \leqslant 4\}$

43. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

44. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x > 1\}$

45. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid m < 2 \text{ ou } m \geqslant 3\}$

46. 7

47. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 1 \text{ ou } x > 5\}$

Capítulo 5 – Função quadrática

Exercícios propostos

1. a) $a = 3$, $b = -5$ e $c = \sqrt{2}$

b) $a = -\frac{3}{4}$, $b = -2$ e $c = 1$

c) $a = 7$, $b = 0$ e $c = \frac{5}{3}$

d) $a = -9$, $b = 0$ e $c = 0$

e) $a = -\sqrt{5}$, $b = 0$ e $c = -4$.

2. a) 4 d) 10

b) 0 e) $6 - 5\sqrt{2}$

c) $\frac{7}{4}$ f) $\frac{21 + 5\sqrt{5}}{5}$

3. a) $x = 1$ ou $x = 8$

b) $x = 3$ ou $x = 6$

c) $x = \frac{9 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{9 - \sqrt{5}}{2}$

d) $x = \frac{1}{2}$ ou $x = \frac{17}{2}$

4. 1 275

5. $\frac{15}{4}$

6. -70

7. Alternativa **d**.

8. Alternativa **e**.

9. 1 506 g

10. Alternativa **b**.

11. a) $L(x) = -x^2 + 400x - 10\,000$

b) R$ 20 000,00

12. a) 54 m

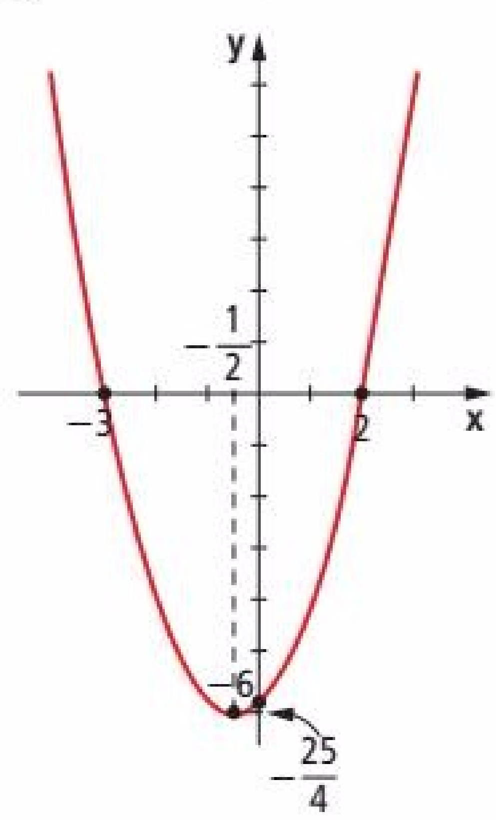
b) $t = 2$ s ou $t = 10$ s

c) Aos 2 segundos, o objeto atinge 40 m na subida e aos 10 segundos atinge a mesma altura, mas na descida.

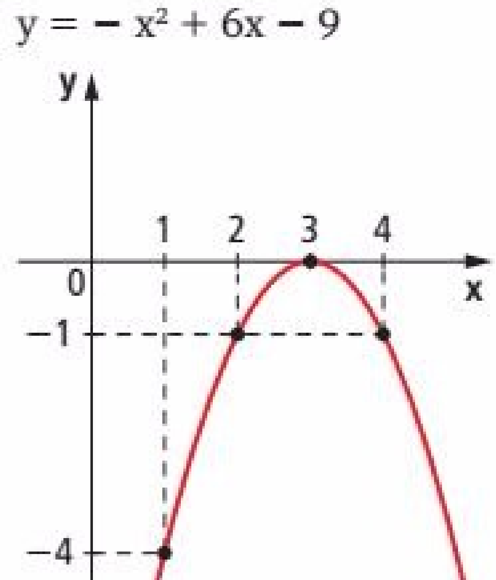
13. a) $C(t) = -30t^2 + 600t + 50$

b) $t = 5$

14. a) $y = x^2 + x - 6$

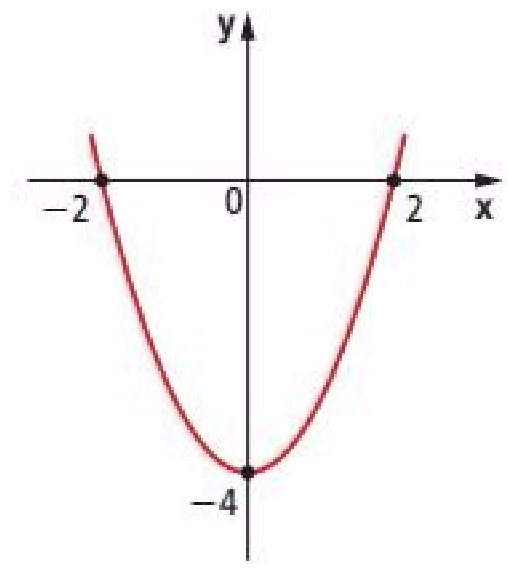


b) $y = -x^2 + 6x - 9$

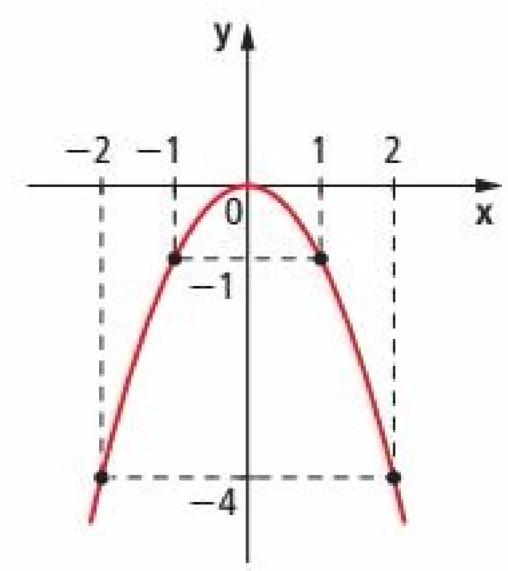


Ilustrações: Editoria de arte

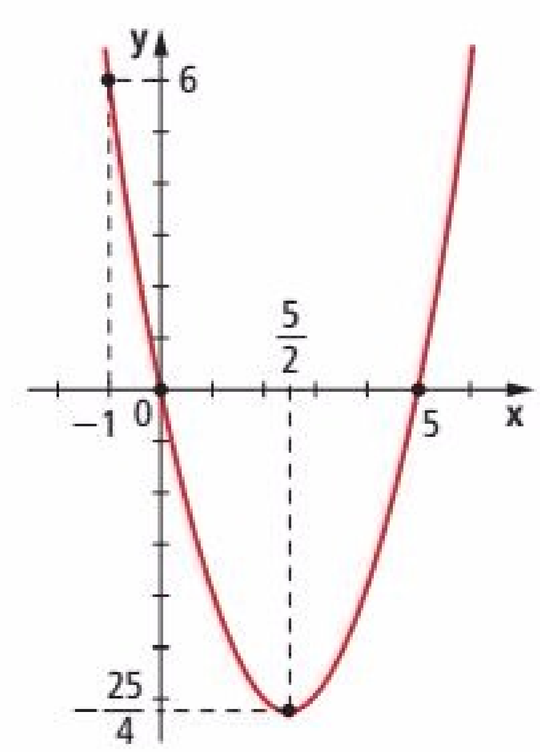
c) $y = x^2 - 4$



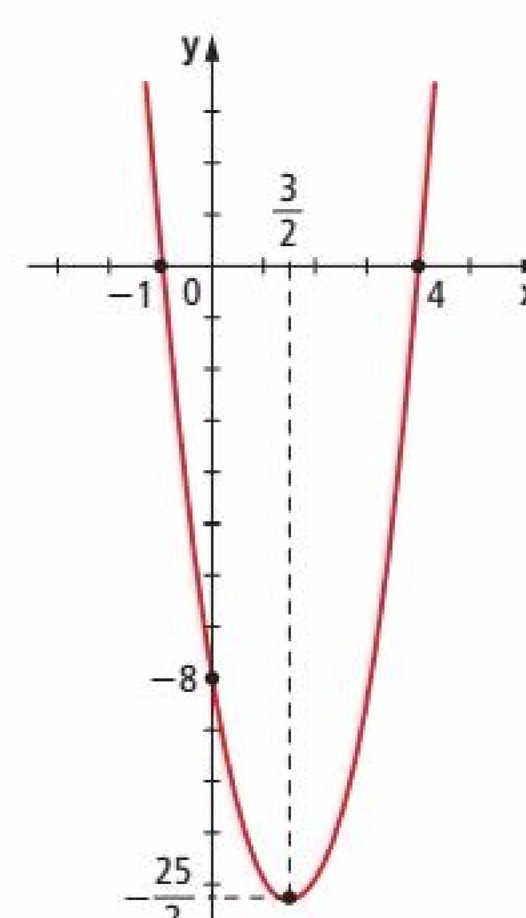
d) $y = -x^2$



e) $y = x^2 - 5x$



f) $y = 2x^2 - 6x - 8$

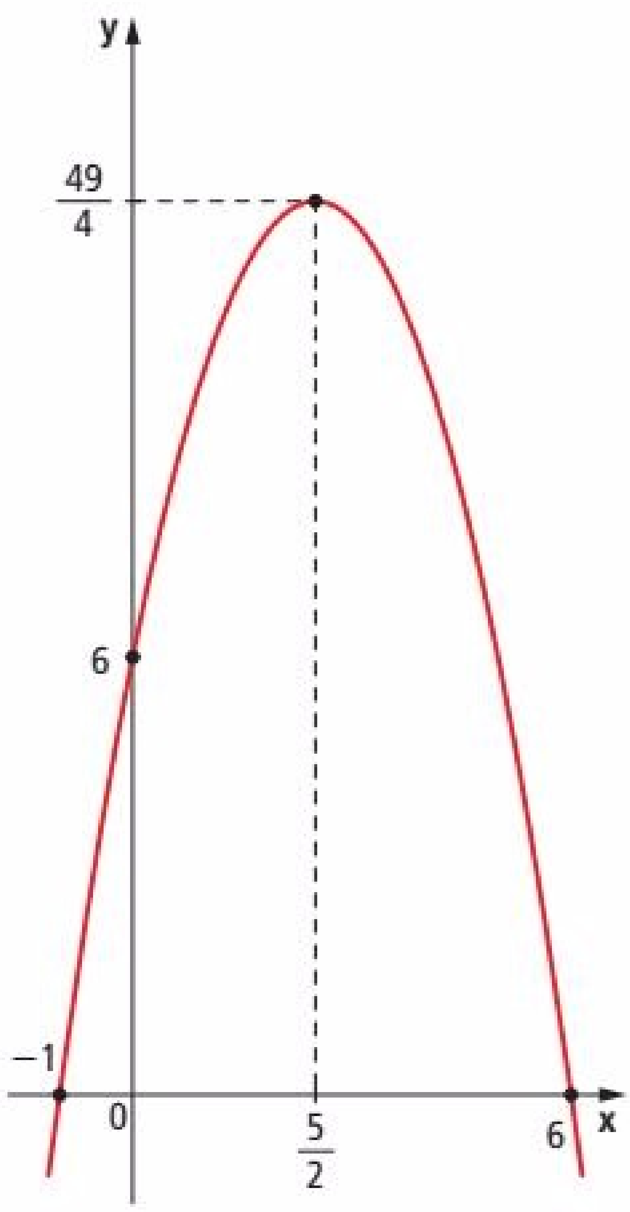


15. $m = 4$

16. $S = \{m \in \mathbb{R} \mid m < -2 \text{ ou } m > 1\}$.

17. a) $a = -1$, $b = 5$ e $c = 6$

b)



18. A(0, 8), B(0, 3) e C(10, 5)

19. a) $V\left(3, -4\right)$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$

b) $V\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{4}{3}$

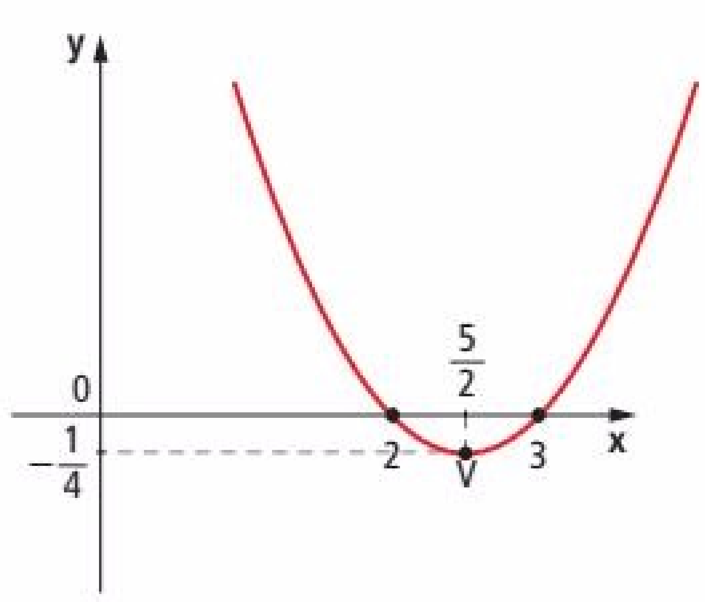
c) $V\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{4}\right)$, a função não tem zeros.

d) $V(0, -9)$, $x_1 = -3$ e $x_2 = 3$

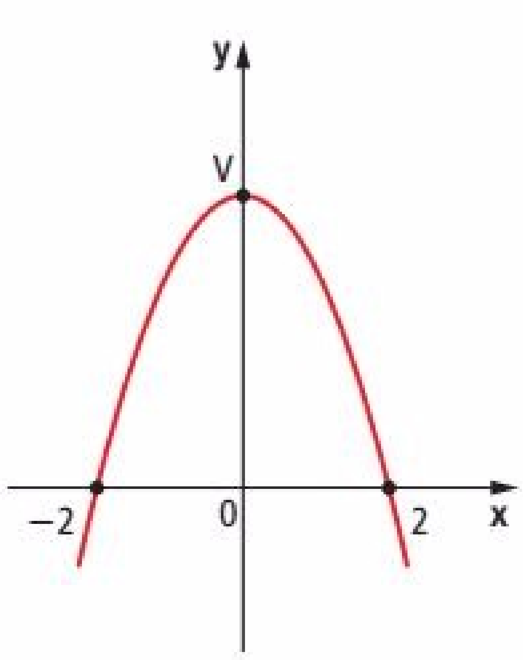
e) $V(0, 0)$, $x = 0$

f) $V\left(\frac{1}{8}, \frac{43}{80}\right)$, a função não tem zeros.

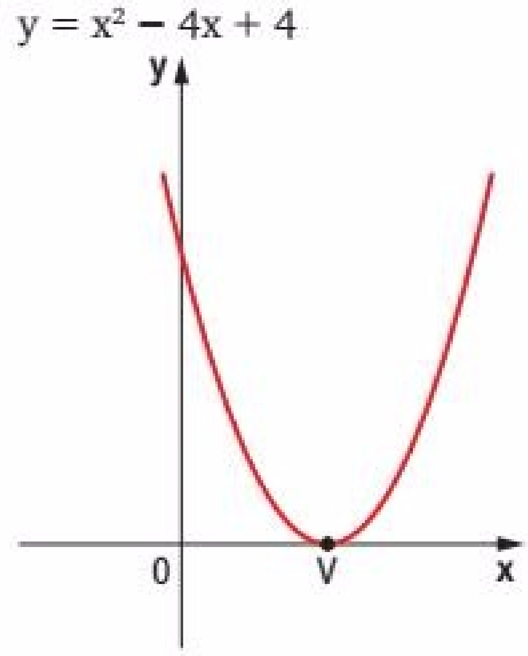
20. a) $y = x^2 - 5x + 6$



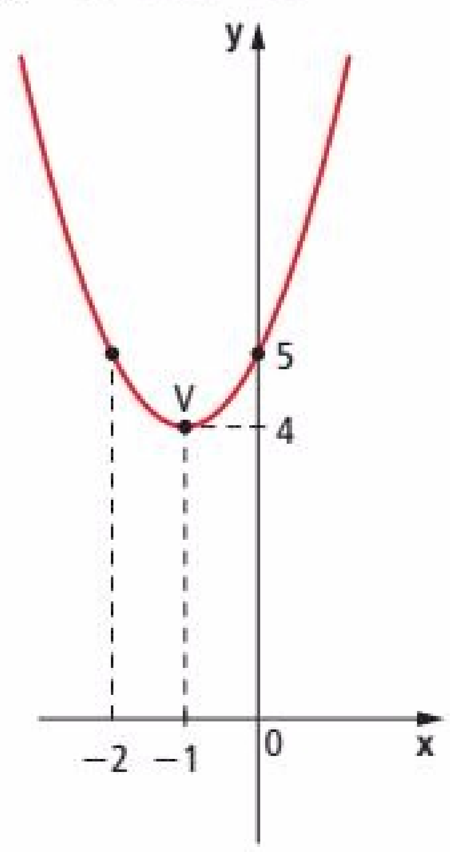
b) $y = -x^2 + 4$



c) $y = x^2 - 4x + 4$



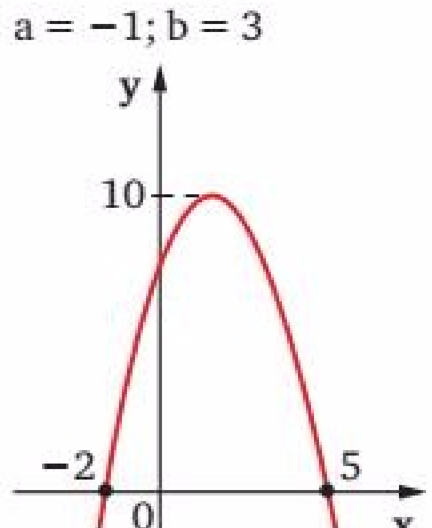
d) $y = x^2 + 2x + 5$



21. $k = \frac{1}{4}$

22.

$a = -1$; $b = 3$



23. $k = \frac{1}{3}$

24. a) $m = \pm 4$

b) $m = -6$

c) $m = \pm 4$

25. Alternativa **a**.

26. Alternativa **a**.

27. Alternativa **b**.

28. a) Demonstração.

b) Demonstração.

29. Alternativa **b**.

30. $a = 1$

31. $a = 1$; $b = -5$

32. $\left(\frac{5}{6}, \frac{47}{24}\right)$

33. $k = 8$

34. $a = 1$, $b = -2$, $c = -15$

35. a) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -16\}$

b) $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{4}{3}\right\}$

c) $Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{9}{4}\right\}$

d) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

e) $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -9\}$

36. 20 cm

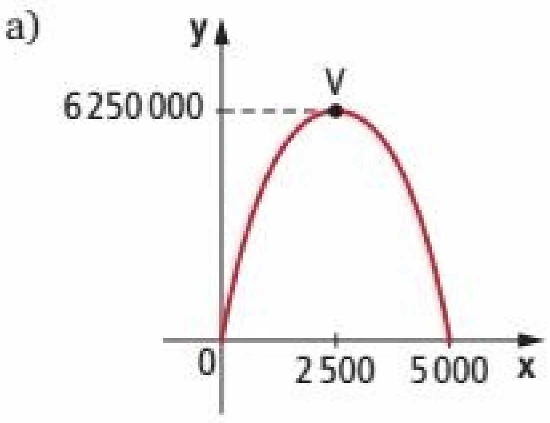
37. 40 cm e 30 cm; 1 200 cm²

38. $t = 2$

39. 50

40. Alternativa **a**.

41. a)



b) 2 500

42. a) Prática de hábitos de consumo sustentável, conjunto de instrumentos para propiciar o aumento da reciclagem e da reutilização dos resíduos sólidos, além de destinação ambientalmente adequada aos rejeitos.

b) i) $A_C(x) = -2x^2 + 240x + 2400$

ii) $A_d(x) = 2x^2 - 240x + 7600$

iii) $D(A_C) = D(A_d) = \mathbb{R}_+$

iv) $x_v = 60$

v) $A_C = 9600$ cm²

vi) Resposta pessoal.

c) Consumo consciente é o equilíbrio entre a preservação do ambiente, o bem-estar da sociedade e sua satisfação pessoal. Desperdício é o consumo além do necessário, eliminando aquilo que serviria para outras pessoas ou para ser utilizado em outra ocasião.

43. a) $f(x) = 0$ para $x = -2$ ou $x = 5$

$f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 5\}$

$f(x) < 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 5\}$

b) $f(x) = 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ ou } x = 2\}$

$f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$

$f(x) < 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 2\}$

c) $f(x) = 0$ para $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{1}{2}\right\}$

$f(x) > 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0$

$f(x) < 0$ para $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{2}\right\}$

d) $f(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) \leq 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

e) $f(x) = 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x = -3\}$

$f(x) < 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

$f(x) > 0$ para $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -3\}$

44. $\left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -\frac{1}{4}\right\}$

45. $\{k \in \mathbb{R} \mid k < 0\}$

46. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$

Ilustrações: Editoria de arte

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\leqslant-\frac{1}{9}\text{ ou }x\geqslant1\right\}$

c) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq5\}$

d) $S=\varnothing$

e) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq2\}$

f) $S=\mathbb{R}$

47. $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant1\text{ ou }x\geqslant7\}$

48. $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant-1\text{ ou }x\geqslant4\}$

49. a) $5<n<13$

b) $n=9$; R$ 80,00

50. Alternativa **a**.

51. a) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 0<x<1\}$

b) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x\leqslant0\text{ ou }2\leqslant x<3\}$

c) $S=\varnothing$

52. $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\leqslant x<-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}<x\leqslant2\}$

53. a) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x<-4$ ou $3<x<4\}$

b) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\leqslant x\leqslant1\}$

54. a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-1<x<\frac{1}{2}\text{ ou }2<x<3\right\}$

b) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant-5$ ou $-3\leqslant x\leqslant0$ ou $1\leqslant x\leqslant3\}$

55. a) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x<1$ ou $2<x<4$ ou $x>5\}$

b) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x<2\}$

56. a) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\leqslant x<0\right.$ ou $\left.1<x\leqslant\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\leqslant-1\text{ ou }\frac{1}{2}<x<1\right.$ ou $\left.x\geqslant2\right\}$

57. $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$

58. $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\leqslant\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{ ou }x>3\right\}$

59. a) $p=2$, $q=2$, $a=-1$, $b=2$ e $c=3$

b) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid x<3\text{ e }x\neq1\}$

60. a) $c=-4$

b) $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-4\leqslant x<\frac{1}{2}\right\}$

Capítulo 6 – Função modular

Exercícios propostos

1. a) $-\frac{4}{3}$ ou 2

b) -2 ou 0

2. Alternativa **c**.

3. a) 2 d) 7

b) 2 e) 5

c) 8 f) -8

4. a) $y=0$ b) $y=1$

5. a) -12 c) -1

b) $\frac{3}{7}$

6. a) $-2x-2$ c) $2x+2$

b) 2

7. $3x+2$

8. a) 3 b) -3

9. A sentença II.

10. 1, se $x>2$, e -1, se $x<2$

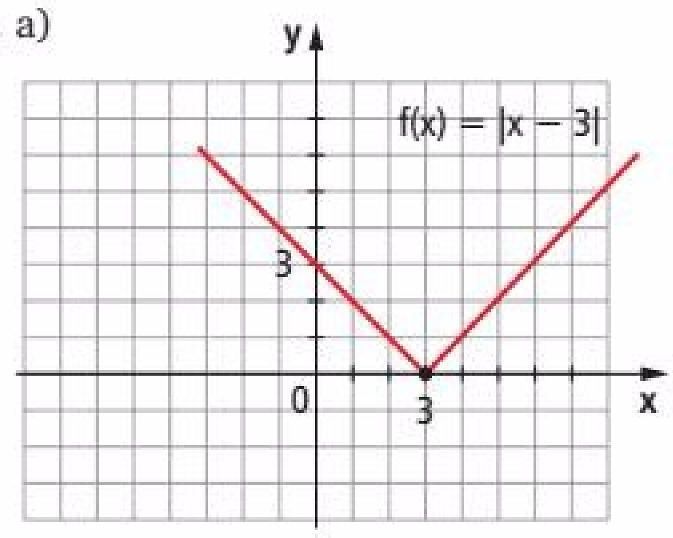
11. a) Para $x=3$ a função não se define.

b) $\frac{4}{5}$

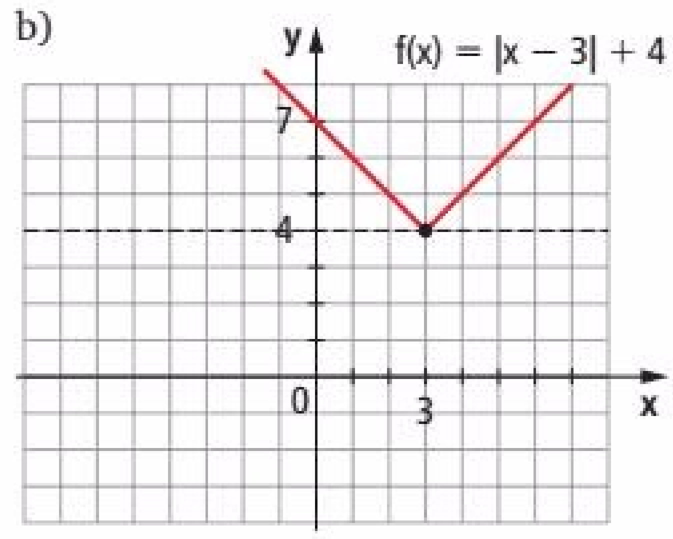
12. $f(x)=|x+1|+2$;

$\mathrm{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant2\}$ e $D(f)=\mathbb{R}$

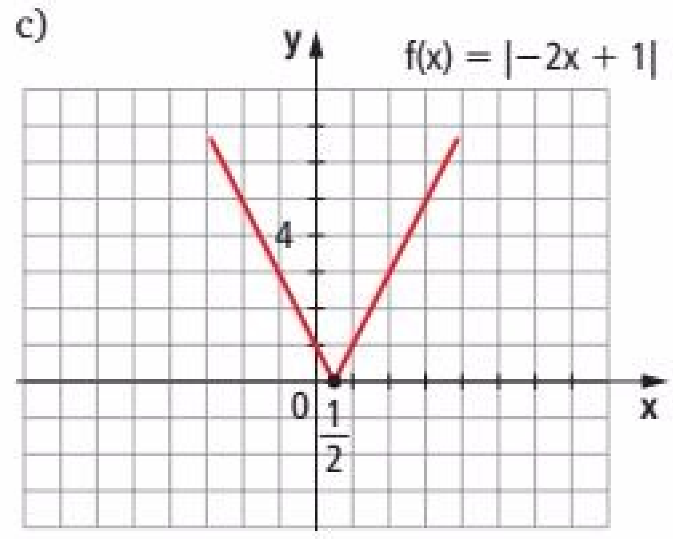
13. a)



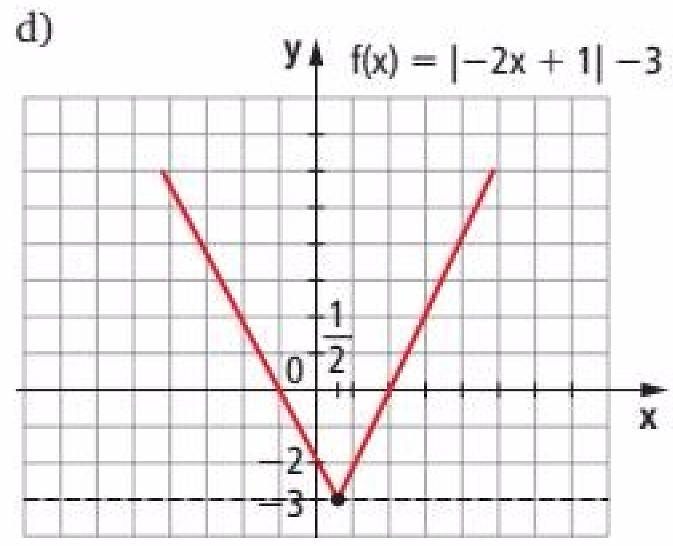
b)



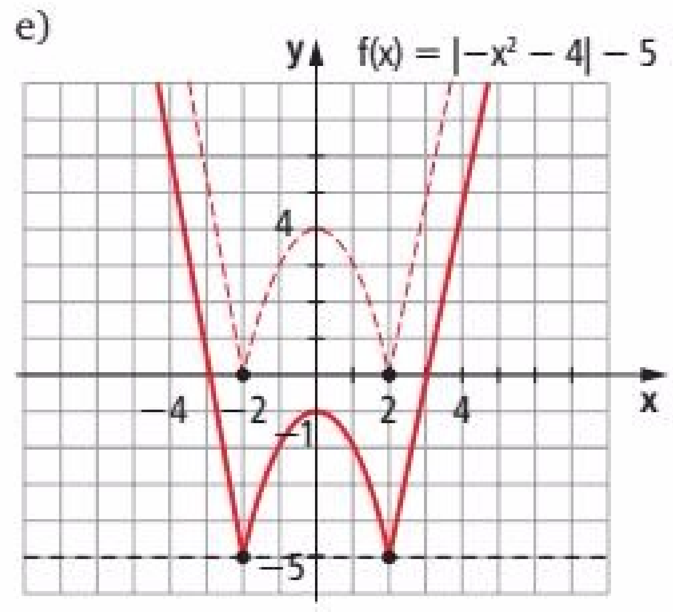
c)



d)

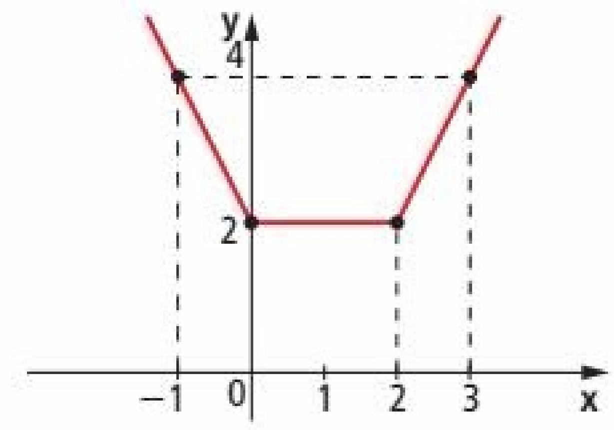


e)



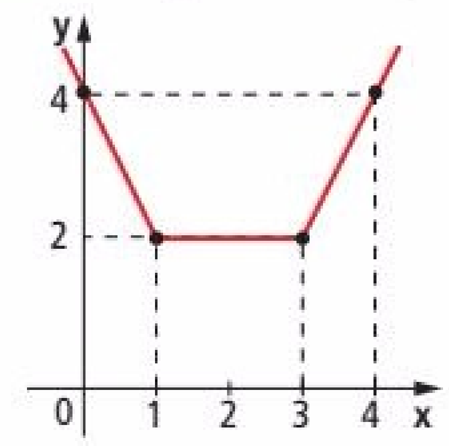
14. $n=12$

15. a) $\mathrm{Im}(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant2\}$ e $D(f)=\mathbb{R}$



Ilustrações: Editoria de arte

b) $\mathrm{Im}(g)=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant2\}$ e $D(g)=\mathbb{R}$



16. a) $\left\{-\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right\}$

b) $\{-1,5\}$

c) $\{-6,2\}$

d) $\{-5,5\}$

e) $\{-2,-1,1,2\}$

f) $\{-11,1,3,15\}$

17. Alternativa **d**.

18. Alternativa **d**.

19. a) $\{-1,0,2,3\}$

b) $S=\{-1,4\}$

20. Alternativa **e**.

21. Alternativa **a**.

22. Alternativa **a**.

23. $S=\{-2,6\}$

24. Alternativa **c**.

25. Alternativa **b**.

26. Alternativa **c**.

27. a) Saúde, educação e renda; Adequação ao contexto brasileiro e à disponibilidade de indicadores nacionais.

b) 0,705.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

28. Alternativa **d**.

29. a) $\{x\in\mathbb{R}\mid -8<x<4\}$

b) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x<4\}$

c) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 1-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant1+\sqrt{2}\}$

d) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid -5\leqslant x\leqslant11\}$

e) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x<3\}$

30. Alternativa **b**.

31. a) $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant-5\text{ ou }x\geqslant5\}$

b) $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant-2\text{ ou }x\geqslant4\}$

c) $D=\{x\in\mathbb{R}\mid x<-2\text{ ou }x>6\}$

32. a) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\leqslant x\leqslant5\}$

b) $S=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\leqslant x\leqslant5\}$

33. $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\}$

34. Alternativa **c**.

Exercícios complementares

1. Alternativa **d**.
2. Alternativa **d**.
3. F, F, F, F e V
4. Alternativa **c**.
5. Alternativa **a**.
6. Alternativa **a**.
7. Alternativa **b**.
8. 01 + 02 + 16 = 19
9. Alternativa **a**.
10. Alternativa **d**.
11. Alternativa **d**.
12. Alternativa **e**.
13. a) $A(x)=\begin{cases}18, \text{se } 0<x\leq 10\\ 18+2(x-10), \text{se } x>10\end{cases}$
    b) O valor a ser pago será maior na cidade *B* para um consumo acima de 20m³.
14. 10 h e 11 h
15. a) $p = -1$
    b) $S = \{5\}$
16. Alternativa **b**.
17. Alternativa **d**.
18. Alternativa **c**.
19. Alternativa **b**.
20. Alternativa **d**.
21. Alternativa **e**.
22. Alternativa **c**.
23. Alternativa **b**.
24. Alternativa **a**.
25. 17,4 milhões de insetos; $\frac{4}{3}$ milhão de insetos.
26. Alternativa **d**.
27. Alternativa **a**.
28. Alternativa **c**.
29. Alternativa **e**.
30. Alternativa **d**.

Unidade 4 – Funções exponencial e logarítmica

Capítulo 7 – Função exponencial

Exercícios propostos

1. a) $\frac{1}{64}$ b) 1,44 c) 0,01 d) $\frac{16}{81}$

2. a) $\sqrt[4]{5^3}$ b) $\sqrt{10}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[4]{3}$ e) $\sqrt[4]{\pi}$ f) $\sqrt{3^{-1}}$ ou $\sqrt{\frac{1}{3}}$

3. a) 3^9 b) x^{12} c) 7^{13} d) 10^7 e) 10^6 f) a^{2n-1}

4. a) 3^{-2} b) 10^{-4} c) 2^{-5} d) 6^{-2} e) 2^{-1} f) x^{-2}

5. a) $\simeq 11,18$ b) $\simeq 1,86$ c) $\simeq 2,30$ d) $\simeq 140,29$ e) $\simeq 6,06$ f) $\simeq 1,89$

6. a) $a = 27; b = -8; c = \frac{1}{9}; d = -\frac{1}{8}$
b) $-8; -\frac{1}{8}; \frac{1}{9}; 27$

7. 2^{2011}

8. 64

9. 1

10. ab

11. Alternativa **e**.

12. $7\sqrt[5]{7}$

13. Passagem 3; 25

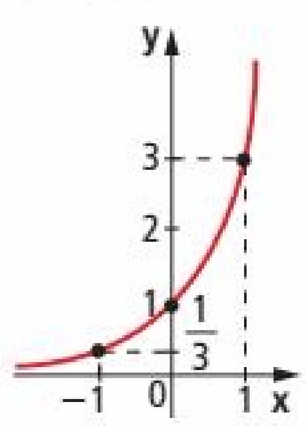
14. 30

15. Alternativa **a**.

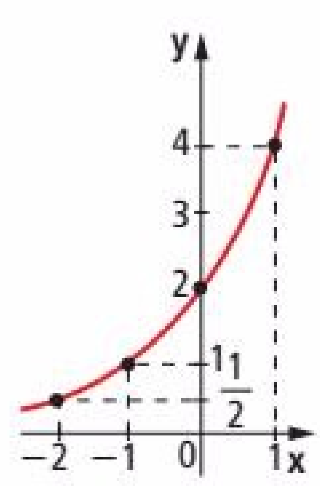
16. Alternativa **e**.

17. a) Crescente.
b) Decrescente.
c) Decrescente.
d) Crescente.

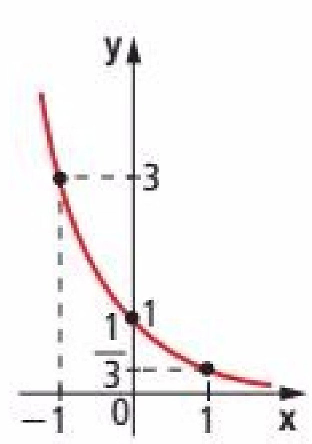
18. a) $f(x) = 3^x$



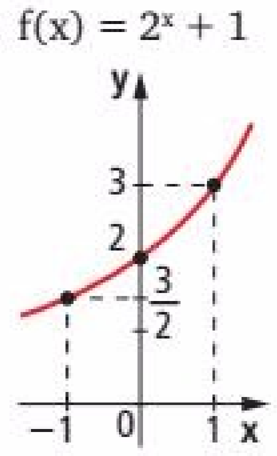
b) $f(x) = 2^{x+1}$



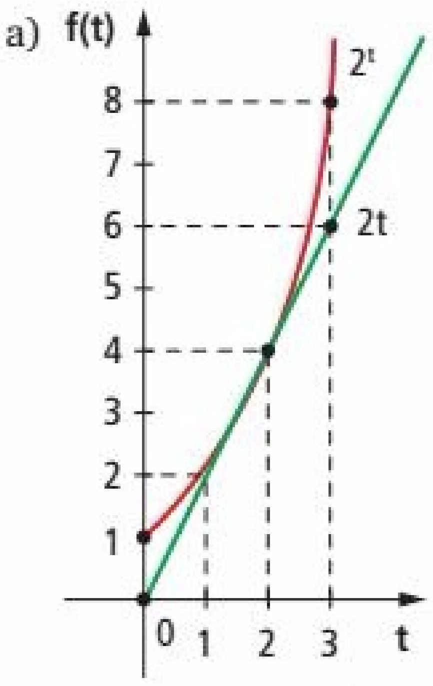
c) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$



d) $f(x) = 2^x + 1$



19. a)



Ilustrações: Editoria de arte

b) Sim, para t = 1 h e t = 2 h.
c) Para t > 2 o crescimento da função 2^t é maior.
d) 2 000 bactérias.

20. a) Urânio.
b) Não. Há rejeitos de baixa, média e alta atividade. Cada um deles, conforme seu risco ao meio ambiente, deve ser tratado de forma específica antes de ser descartado.
c) Demonstração.
d) Resposta pessoal.

21. a) $S = \{6\}$ b) $S = \{3\}$ c) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ d) $S = \{5\}$ e) $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ f) $S = \{-3\}$ g) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ h) $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$

22. Alternativa **d**.

23. a) $S = \{6\}$
b) $S = \{4\}$

24. $\sqrt{13}$

25. Alternativa **b**.

26. Alternativa **a**.

27. Alternativa **c**.

28. 16 200 bactérias.

29. a) $\alpha = 54; \beta = -\frac{1}{90}$
b) 360 minutos

30. a) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq 1 \text{ ou } x\geq 2\}$
b) $S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x>\frac{3}{2}\right\}$
c) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x<2\}$
d) $S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -\frac{4}{3}\right\}$
e) $S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x<-\frac{6}{7}\right\}$

31. $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x>2\}$

32. $S=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 2\}$

33. a) $D=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq\frac{1}{2}\right\}$
b) $D=\{x\in\mathbb{R} \mid 2\leq x\leq 3\}$

34. a) $h(-1) = -\frac{3}{2}; h(1) = 3$
b) $S=\{x\in\mathbb{R} \mid -2<x<0 \text{ ou } x>2\}$

35. Alternativa **e**.

36. Alternativa **b**.

37. Alternativa **b**.

Capítulo 8 – Função logarítmica

Exercícios propostos

1. a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 7 f) 27

2. a) $\frac{4}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{5}{4}$ d) -6 e) $\frac{1}{6}$ f) $\frac{3}{4}$ g) $\frac{3}{4}$ h) 35

3. 9

4. $-\frac{1}{2}$

5. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

6. a) S = {1,465} b) S = {1,322} c) S = {1,176} d) S = {5,392}

7. a) 8 b) 54 c) 0 d) $\frac{4}{9}$

8. S = {−1; 3}

9. m = 110

10. a) 1,146
b) 2,322
c) −0,222
d) −0,176
e) 0,176
f) 1,908
g) −1,431
h) 0,466

11. a) 3 b) 5 c) 3 d) 2

12. a) 3 b) 13

13. Alternativa **b**.

14. 1

15. 1

16. $\frac{1}{4}$

17. S = {(10, 10)}

18. $\frac{4}{3}$

19. a) −0,154901
b) −0,920818
c) −0,078833
d) −5
e) −0,025258
f) −0,916454

20. a) 76 b) 57 c) 493 d) 2,86

21. a) 1,875061
b) 2,808210
c) 3,120573
d) 4,866381
e) 6
f) 0,602059

22. a) 0,3162
b) 0,7079
c) −0,3010
d) 0,3010
e) 2,3026
f) −0,6931
g) −1,8971
h) −5,2983

23.

Número (N)	Potência de 10	log N
75	$10^{1,875061}$	1,875061
643	$10^{2,808210}$	2,808210
1320	$10^{3,120573}$	3,120573
1000000	10^{6}	6
0,00001	10^{-5}	−5
0,7	$10^{-0,154901}$	−0,154901
0,834	$10^{-0,078833}$	−0,078833

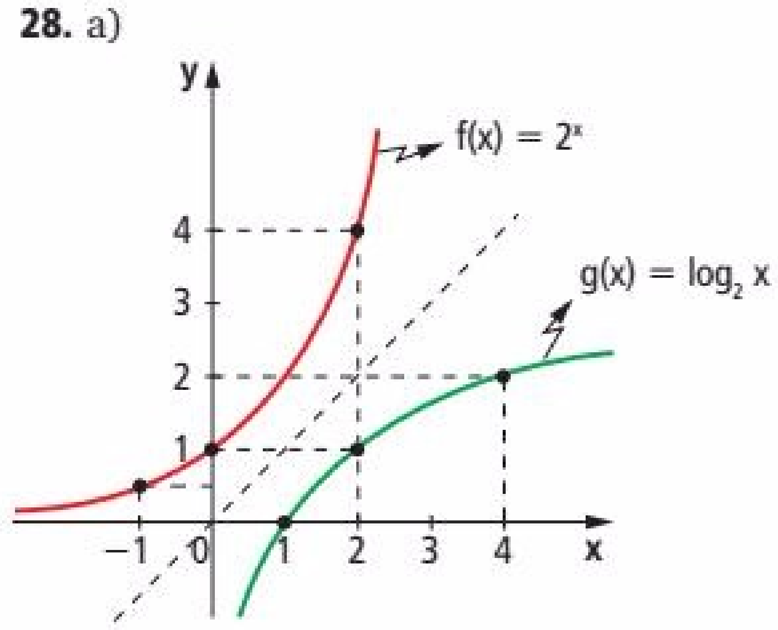
24. a) b = 3
b) b = 7
c) b = 0,5
d) b = 0,367879
e) b = 1

25. 32,5

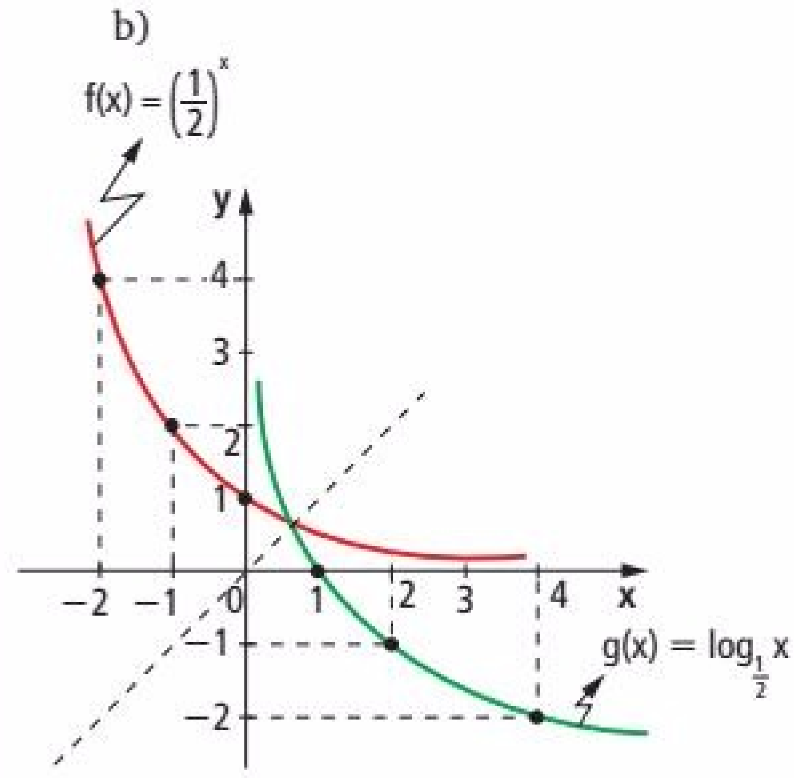
26. $10^{1,9294189} = 85$; 1,9294189 é o logaritmo de 85 na base 10.

27. 0

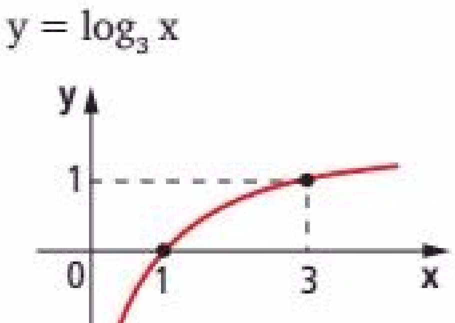
28. a)



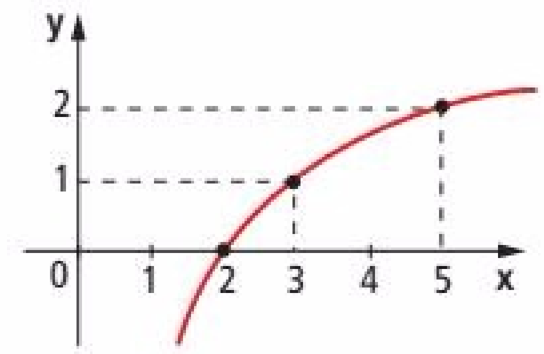
b)



29. a) $y = \log_3 x$



b) $y = \log_2 (x - 1)$



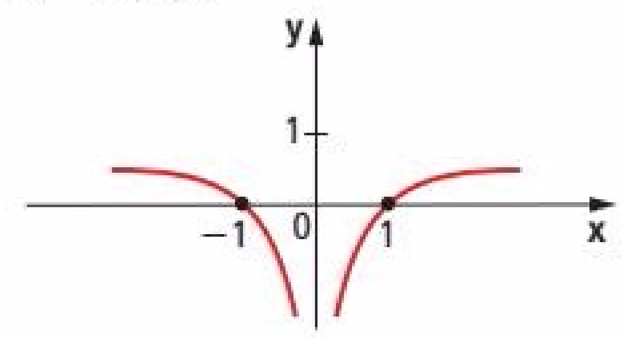
30. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 4\}$

31. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 4 \text{ e } x \neq 5\}$

32. Alternativa **a**.

33. a = 6

34. $y = \log |x|$



Ilustrações: Editoria de arte

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
$Im = \mathbb{R}$

35. a) n = 2 e K = 200
b) E = 900

36. $\frac{1}{2}$ u.a.

37. Alternativa **b**.

38. a) Automedicação.
b) Pesquisa.
c) Aproximadamente 2,5 h.

39. S = {1,9207}

40. $S = \left\{\frac{1}{2}, 16\right\}$

41. S = {2, 4}

42. a) S = {−6} b) S = {−7, 3} c) S = {5} d) S = {3} e) S = {2} f) S = {2, 3}

43. x = 100

44. 20 000 residências.

45. Alternativa **c**.

46. a) $S = \{a \in \mathbb{R} \mid -9 < a < 11 \text{ e } a \neq 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x < -5 \text{ ou } 1 < x \leq 3\}$

47. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3 \text{ e } x \neq 2\}$

48. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2\}$

49. Alternativa **a**.

50. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 6\}$

51. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{8}{5}\right\}$

52. Alternativa **a**.

Exercícios complementares

1. Alternativa **b**.

2. Soma: 26 (02 + 08 + 16)

3. Alternativa **e**.

4. Alternativa **d**.

5. Alternativa **b**.

6. 9

7. a) t = 4 anos. b) 500

8. Alternativa **b**.

9. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } x > 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 1 - \sqrt{5}$ ou $-1 \leq x < 0$ ou $3 < x \leq 1 + \sqrt{5}\}$

10. Alternativa **a**.

11. Alternativa **a**.

12. Alternativa **a**.

13. Alternativa **b**.

14. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 3\}$

15. Cinco números inteiros.

16. Alternativa **e**.

17. Alternativa **c**.

18. a) $y = 1 + 3{,}3x$

b) $\log 1{,}7 \simeq 0{,}2$

19. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 12\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 4 \text{ ou } x > 12\}$

20. Alternativa **e**.

21. Alternativa **c**.

22. Alternativa **b**.

23. Alternativa **e**.

24. Alternativa **e**.

25. Alternativa **a**.

26. Alternativa **c**.

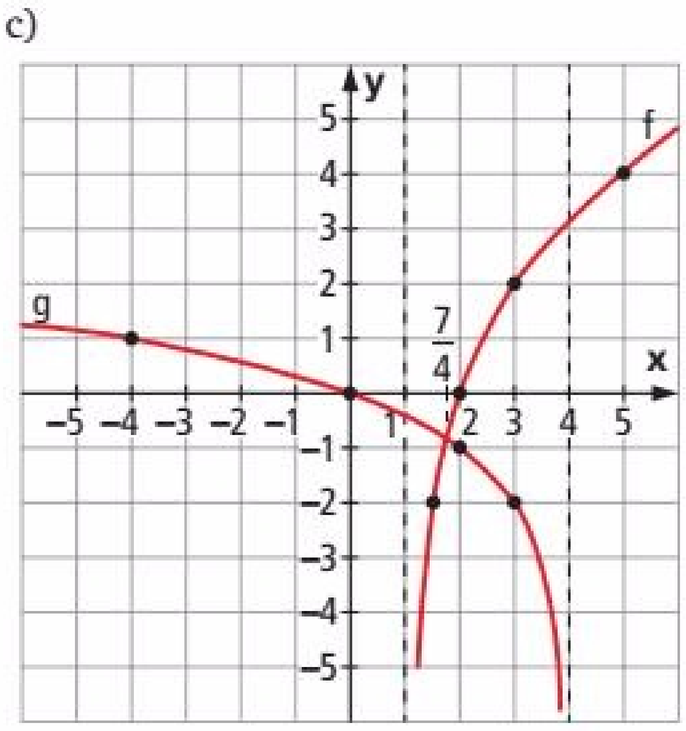
27. a) Demonstração.

b) $S = \{-0{,}7; 0{,}7\}$

28. a) $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$; $f(2) = 0$; $f(3) = 2$; $g(-4) = 1$; $g(0) = 0$; $g(2) = -1$;

b) $x = \frac{7}{4}$

c)



29. Alternativa **e**.

30. Alternativa **a**.

31. a) $D_f =]4, +\infty[$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \left]\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$

32. a) $a = 2$ e $b = 4$

b) 21 u.a.

c) $x = 4$ ou $x = 8$

Unidade 5 – Estudo das progressões e Matemática financeira

Capítulo 9 – Progressões

Exercícios propostos

1. a) (2, 5, 8, 11, ...)

b) (1, 2, 4, 8, ...)

2. a) $a_5 = 16$; $a_8 = 25$

b) 16ª

c) Não.

3. a) 199

b) 50ª

c) A soma é sempre igual a 14.

4. a) 17

b) $\frac{1}{125}$

c) 720

d) 2

5. Alternativa **b**.

6. a) Não.

b) Sim, $r = 0$.

c) Sim, $r = -6$.

d) Não.

7. a) (10, 13, 16, 19, 22)

b) (−3, 2, 7, 12, 17, 22)

c) $(a+2, 2a+2, 3a+2, 4a+2)$

8. a) 3

b) −0,125

c) 1

9. (5, 10, 15)

10. a) $x = 21$

b) $y = 15$

c) $x = 63$

d) $y = 7$

11. 6 unidades de área.

12. a) 1, 4, 7 e 10

b) 1, 2, 6 e 13

13. 87

14. 9º

15. $a_n = 5n - 3$

16. 119

17. a) 21 m²

b) 14º dia

18. 201 palitos.

19. 60° e 80°

20. $a_1 = 2$; $r = 2$

21. Alternativa **d**.

22. 43 meses

23. (−1, 2, 5, ...)

24. (3, 6, 9, 12, 15, 18)

25. (2, 5, 8, 11, 14)

26. 5 000

27. Alternativa **a**.

28. R$ 165,00

29. Alternativa **c**.

30. 16 fileiras.

31. Alternativa **c**.

32. 90

33. Depois de 300 dias.

34. $S = \{20\}$

35. 50 tijolos; 1 275 tijolos.

36. a) 4

b) $\frac{1}{2}$

c) −3

d) 5

e) $\sqrt{5}$

f) 2^4

g) $\frac{1}{2}$

h) 10^2

37. a) Constante.

b) Decrescente.

c) Decrescente.

d) Oscilante.

e) Crescente.

f) Crescente.

g) Crescente.

38. −5

39. 256

40. Alternativa **e**.

41. Alternativa **a**.

42. $x = y = 100$

43. $x = 1$

44. 5^9

45. 16

46. 2 048

47. $q = \pm 2$

48. $q = 2$ e $a_1 = 2$

49. 32

50. 512

51. 3

52. Alternativa **e**.

53. 486

54. Alternativa **a**.

55. a) $A_n = 8 \cdot (1{,}5)^n$

b) 7 anos.

56. a) 2 046

b) $\frac{2^{20} - 1}{5}$

57. $S_6 = 555\,555$

58. 8 190 litros.

59. Alternativa **a**.

60. $S = \{3\}$

61. Alternativa **a**.

62. Alternativa **d**.

63. Demonstração.

64. a) $S = 40$

b) $S = \frac{25}{4}$

c) $S = \frac{1}{3}$

d) $S = \frac{10}{9}$

65. a) $S = 25$

b) $S = \frac{2}{3}$

c) $S = \frac{10}{9}$

d) $S = \frac{10}{11}$

66. Esperou por 1 h.

67. a) 5 859 000 de possíveis leitores.

b) Apenas o autor será o leitor da obra.

68. a) $S = \{2\}$

b) $S = \{3\}$

69. a) 1

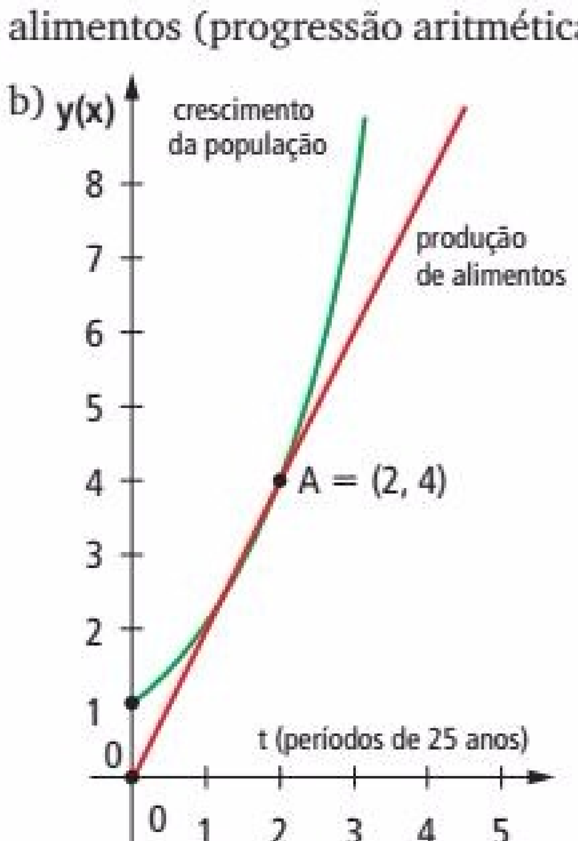
b) $\frac{127}{300}$

c) $\frac{8}{3}$

d) $\frac{61}{45}$

70. a) Teoria Malthusiana. A teoria previa que não haveria oferta de alimentos para toda a população, dado o aumento mais acelerado (progressão geométrica) do crescimento populacional em relação ao crescimento da produção de alimentos (progressão aritmética).

b)



Ilustrações: Editoria de arte

c) 256 milhões.

d) Pesquisa.

Capítulo 10 – Noções de Matemática financeira

Exercícios propostos

1.

Fração	Representação decimal	Porcentagem
$\frac{9}{10}$	0,9	90%
$\frac{1}{4}$	0,25	25%
$\frac{13}{200}$	0,065	6,5%
$\frac{47}{100}$	0,47	47%
$\frac{2}{25}$	0,08	8%

2. a) 420 c) 1,8
b) 22,5 d) 240

3. a) 92 250 habitantes.
b) 94 556 habitantes.

4. R$ 163,50
5. R$ 4 320,00
6. $x = 50$ e $y = 30$
7. R$ 231,53
8. R$ 334,80
9. R$ 2 500,00
10. Aumento percentual de 38%.
11. R$ 295,00
12. R$ 1 032,00
13. R$ 24,15
14. a) R$ 175,50 b) 17%
15. R$ 6 000,00
16. a) R$ 700,00
b) R$ 2 520,00
c) R$ 945,00
17. R$ 72,90
18. R$ 25 000,00
19. R$ 13 620,00
20. 2,5% a.m.
21. 3% a.m.
22. 0,25% a.m.
23. Alternativa **d**.
24. Alternativa **a**.
25. 02, 04 e 08
26. Alternativa **c**.
27. R$ 4 489,64
28. R$ 231 938,68
29. Alternativa **b**.
30. R$ 1 632,59
31. R$ 19 487,17
32. R$ 7 103,53
33. Alternativa **c**.
34. R$ 17 022,23
35. a) R$ 4 499,46
b) R$ 43 060,65
c) R$ 4 376,66
36. R$ 5 796,37; R$ 796,37
37. R$ 13 824,00
38. R$ 3 520,00
39. R$ 16 345,00
40. Alternativa **c**.
41. Alternativa **d**.
42. a) Resposta pessoal.
b) Uma caderneta de poupança é um investimento que rentabiliza por meio de juros. O valor poupado é acrescido da taxa de juros da poupança em vigor, a cada 30 dias após a aplicação.
c) R$ 2 015,05
43. $\simeq$ 11 meses
44. a) 3 meses
b) 2 anos
45. a) 14 meses e 6 dias.
b) 22 meses e 16 dias.
46. 6%
47. Alternativa **b**.
48. a) R$ 12 000,00; R$ 15 000,00; R$ 30 000,00.
b) $\simeq$ 6 meses
c) 3% a.m.
49. F, F, V, F, V
50. Alternativa **c**.

Exercícios complementares

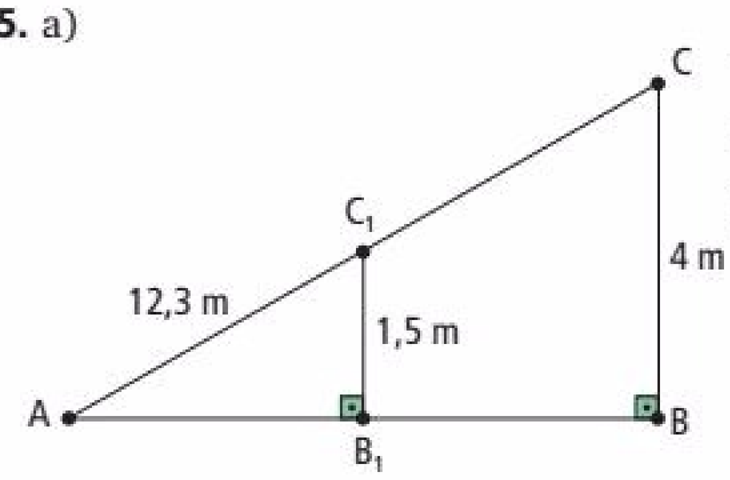
1. 6 cm
2. 157 termos.
3. 77 números.
4. Alternativa **b**.
5. Alternativa **e**.
6. $S = 5000$
7. R$ 17,80.
8. 36
9. 6, 10 e 14.
10. R$ 187,50
11. Alternativa **b**.
12. a) $V = 8000 \cdot (1{,}1)^t$
b) R$ 14 172,49
13. 8 termos.
14. Alternativa **c**.
15. Alternativa **c**.
16. Alternativa **c**.
17. $S = 48\pi$
18. a) 67,5
b) $n = 8$
19. 60 metros.
20. Alternativa **c**.
21. 6%
22. 3% a.m.
23. Alternativa **b**.
24. R$ 2 433,00
25. a) 3,02%
b) R$ 5 151,00
26. R$ 3 873,43
27. Alternativa **a**.

Unidade 6 – Introdução à trigonometria

Capítulo 11 – Proporcionalidade e semelhança

Exercícios propostos

1. $\frac{3}{4}$
2. 35 cm e 25 cm
3. $x = 12{,}5$
4. $x = 4{,}5$; $y = 6{,}75$
5. $BC = 128$ m; $AM = 37{,}5$ m
6. $RS = 60$ cm
7. 5 cm
8. $x = 2{,}5$
9. Alternativa **b**.
10. 15,2 cm
11. 44 cm
12. $AB = 20$ cm e $CD = 15$ cm
13. 15,25
14. $MN = 10$
15. 18 m
16. $a = 6$ km; $b = 60$ km; $c = 8$ cm
17. $a = 25$; $b = 30$; $c = 35$; $d = 20$
18. a) Sim, porque a razão entre os lados correspondentes são proporcionais.
b) 1 : 50
c) 5,6 cm
19. 4,32 cm
20. a) Sim.
b) $\overline{BC}$ e $\overline{PQ}$; $\overline{AC}$ e $\overline{OQ}$; $\overline{AB}$ e $\overline{OP}$
21. 80 cm
22. Alternativa **c**.
23. 3 m
24. 15 cm, 18 cm e 27 cm.
25. a)



Editoria de arte

b) 20,5 m
26. 18 unidades de área.
27. Demonstração.
28. Alternativa **c**.
29. $AB = BC = \sqrt{29}$ cm; $AC = 3\sqrt{2}$ cm
30. Alternativa **a**.
31. Alternativa **d**.
32. $m = 4$; $n = 12$; $h = 4\sqrt{3}$; $c = 8\sqrt{3}$
33. 20 m
34. 3, 4 e 5
35. 34 cm

36. a) Artes e Ciências.
b) Acaso.
c) i) Proporcionalidade
ii) 8,6 m.
d) Resposta pessoal.

Capítulo 12 – Trigonometria nos triângulos

Exercícios propostos

1. a) $\text{sen}\gamma=\frac{\sqrt{5}}{5}; \cos\gamma=\frac{2\sqrt{5}}{5}; \text{tg}\ \gamma=\frac{1}{2}$
b) $\text{sen}\beta=\frac{3}{5}; \cos\beta=\frac{4}{5}; \text{tg}\ \beta=\frac{3}{4}$
2. $\text{sen}\alpha=\frac{15}{17}; \cos\alpha=\frac{8}{17}; \text{tg}\ \alpha=\frac{15}{8}$
3. a) 0,90
b) 0,17
c) 0,64
4. x = 6,16; y = 5,12
5. Alternativa **d**.
6. Alternativa **c**.
7. $h=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ m
8. 15
9. 29 cm
10. Aproximadamente 2,17 km ou 2 170 m
11. Alternativa **c**.
12. O prédio possui 16 metros de altura e a pessoa se afastou 30 metros.
13. a) $\text{sen}\ \alpha=\frac{h}{d}$
b) 2 metros
14. $40\sqrt{3}$ metros
15. h = 1,90 m
16. $x \simeq 20{,}6$ m
17. 12,93 m
18. 4,84 m
19. Alternativa **e**.
20. AC = 12 e AH = $6\sqrt{2}$
21. $8\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
22. $12\sqrt{3}$ m
23. Alternativa **c**.
24. AD = $\sqrt{7}$
25. a) Melhoria no desempenho dos atletas. Pode ser aplicada por meio da correção das ações do atleta ou na descoberta de uma nova e mais efetiva técnica.
b) 60°
c) Resposta pessoal.
d) Resposta pessoal.
26. AB = 91,65 cm
27. $c=\sqrt{10}$
28. 32 m
29. Alternativa **c**.
30. 60° e 120°
31. Alternativa **e**.
32. AB = 2
33. Alternativa **b**.
34. 9,67 km e 10,57 km
35. $\text{sen}\ \alpha=\frac{3\sqrt{3}}{8}$
36. $2\sqrt{2}$ milhas
37. $x=\sqrt{3}, y=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$
38. a) $\alpha \simeq 67°$ e $\beta = 46°$
b) Aproximadamente 4,89 cm
39. a) 1 km
b) $\sqrt{2}$ km
40. $CD=15\sqrt{2}$ metros; 15 m.
41. a) $B\hat{A}C=45°; C\hat{B}A=60°; B\hat{C}A=75°$
b) $AB=10\sqrt{2+\sqrt{3}}$ cm;
$BC=10\sqrt{2}$ cm;
$AC=10\sqrt{3}$ cm
42. 4 m²
43. A = 25 cm²
44. $A_T=\frac{35\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^2$
45. a) $BC=\sqrt{37}$ cm
b) $S=3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
46. R$ 56 476,00

Exercícios complementares

1. Alternativa **a**.
2. Alternativa **c**.
3. Alternativa **c**.
4. Alternativa **b**.
5. Alternativa **b**.
6. Alternativa **c**.
7. 26 m
8. Alternativa **a**.
9. 16 cm
10. 696 938 km
11. $S=2(1+\sqrt{3})\ \text{cm}^2$
12. BD = 8 cm, DE = 25 cm e EC = 6 cm
13. $3\sqrt{5}$ cm
14. F – V – F – V – F – V
15. Alternativa **b**.
16. $\text{sen}\alpha=\frac{9}{15}; \cos\alpha=\frac{12}{15}; \text{tg}\ \alpha=\frac{9}{12}$
17. Alternativa **e**.
18. Alternativa **b**.
19. a) $R=\frac{\sqrt{10+4\sqrt{2}}}{2}$ km
b) $S_{ABC}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{km}^2$
20. 70 m
21. Alternativa **c**.
22. AC = 120 m
23. Alternativa **c**.
24. Alternativa **b**.
25. $AC=4\sqrt{7}$ m e $BD=4\sqrt{19}$ m
26. Alternativa **e**.
27. a) Aproximadamente 49,43 m
b) Aproximadamente 41 m
28. $800\sqrt{3}\ \text{km}^2$

Sugestões para pesquisa e leitura

Sites

Nos *sites* indicados a seguir você encontra leituras e aplicativos para aprofundar seus estudos.

http://tub.im/qceb3p

Publicação do Instituto Ciência Hoje (CH), organização social vinculada à Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC). Traz notícias científicas sobre diversos assuntos. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/twgjmm

Apresenta uma visão panorâmica sobre vários tópicos de Matemática, como Geometria Analítica, Trigonometria etc. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/wnii3r

Informações sobre o Cabri-Géomètre, *software* de geometria dinâmica. Acesso em: 16 abr. 2016

http://tub.im/9cqokk

Conteúdo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) para pesquisa de dados estatísticos regionais e nacionais do Brasil. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/topzkx

Laboratório de Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/hw2rnc

Site do Centro de Aperfeiçoamento do Ensino de Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), que traz a história da Matemática, problemas, entre outros. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/dyg67g

Página desenvolvida por professores e alunos do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). Entre outros itens, este *site* apresenta vários textos sobre história da Matemática, alguns aplicativos que podem ser usados para estudar a disciplina, além de problemas e desafios. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/99tt4j

Informações sobre o GeoGebra, *software* de geometria dinâmica. No *site*, é possível baixar o programa para diversas plataformas, além de apresentar materiais para estudo em diversas áreas da Matemática usando o GeoGebra. Acesso em: 19 abr. 2016.

http://tub.im/e7pvo5

Revista **Números Lógicos**; traz jogos *on-line* e outros passatempos. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/uzhuk9

Olimpíada Brasileira de Matemática. Traz as questões das provas, *links*, bibliografias, entre outros. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/roe3dx

Informações relacionadas à Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, como informações sobre inscrições, datas das provas, provas anteriores, banco de questões etc. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/tu3tdg

Questões da Olimpíada Iberoamericana de Matemática. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/8i5htr

Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), com dissertações, teses, jornais, boletins, concursos etc. Acesso em: 16 abr. 2016

http://tub.im/c23hyf

Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com publicações, notícias sobre eventos e olimpíadas da disciplina, por exemplo. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/coje77

Apresenta biografias, provas *on-line*, grande acervo de *softwares* matemáticos, artigos, jogos, curiosidades, histórias e muito mais. Acesso em: 16 abr. 2016.

http://tub.im/wkrj88

Página da Universidade Federal Fluminense, que disponibiliza vários aplicativos voltados para o estudo de conteúdos matemáticos. Os aplicativos podem ser baixados (*download*) ou acessados pelo *link* indicado na página. Acesso em: 16 abr. 2016.

Livros e revistas

A Geometria na Antiguidade Clássica, de Francisco C. P. Milies e José Hugo de Oliveira Bussad. São Paulo: FTD, 1999.

A janela de Euclides, de Leonard Mlodinow. Trad. Enézio E. Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2008.

Aplicações da Matemática escolar, de Donald Burshaw e outros. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1997.

Aprenda álgebra brincando, de J. Perelmann. Trad. Milton da Silva Rodrigues. São Paulo: Hemus, 2001.

A vida secreta dos números, 50 deliciosas crônicas sobre como trabalham e pensam os matemáticos, de George G. Szpiro. Trad. J. R. Souza. Rio de Janeiro: Difel, 2008.

Coleção Contando a história da Matemática, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática.
Volume: Equação: o idioma da álgebra, 1999.

Coleção Fundamentos da Matemática elementar, de Gelson Iezzi e Osvaldo Dolce (Coords.). São Paulo: Atual.
Volumes: Geometria plana, de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeu (8. ed., 2005).
Conjuntos, funções, de Gelson Iezzi e Carlos Murakami (8. ed., 2004).

Coleção Imortais da Ciência, de Marcelo Gleiser (Coord.). São Paulo: Odysseus.
Volume: Euclides: a conquista do espaço, de Carlos Tomei, 2003.

Coleção Investigação matemática, São Paulo: Scipione.
Volumes: Atividades e jogos com estimativas, de Smoothey Marion, 1998. Trad. Sérgio Quadros.
Atividades e jogos com círculos, de Smoothey Marion, 1999. Trad. Antônio Carlos Brolezzi.

Coleção Noções de Matemática, de Aref Antar Neto e outros. Fortaleza: VestSeller, 2009.

Coleção Pra que serve a Matemática, de Luiz M. Imenes, José Jakubovic e Marcelo Lellis. São Paulo: Atual, 2009.

Coleção Primeiros passos, São Paulo: Brasiliense (vários anos).
Volume: O que é estatística, de Sônia Vieira e Ronaldo Wada (2. ed., 2010).

Coleção Tópicos de história da Matemática para uso em sala de aula, São Paulo: Atual.
Volumes: Álgebra, de John K. Baumgart, 1992.

Coleção Vivendo a Matemática, de Nilson José Machado (Coord.). São Paulo: Scipione, 2006.

Computação, de Harold T. Davis, 1994.

Descobrindo padrões pitagóricos, de Ruy Madsen Barbosa. São Paulo: Atual, 1993.

Geometria, de Howard Eves, 2005.

Introdução à história da Matemática, de Howard Eves. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

Logaritmos, de Elon Lages Lima. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1996.

Matemática e língua materna, de Nilson José Machado. 4. ed. São Paulo: Cortez, 1998.

O homem que calculava, de Malba Tahan. 79. ed. Rio de Janeiro: Record, 2010.

Os números da natureza: a realidade irreal da imaginação matemática, de Ian Stewart. Trad. Alexandre Tort. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

O que é Matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos, de Richard Courant e Herbert Robbins. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

O teorema do papagaio, de Denis Guedj. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

Padrões numéricos e sequências, de Maria Cecília Costa e Silva Carvalho. São Paulo: Moderna, 1998.

Lista de siglas

Cefet-PR: Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
Cefet-RJ: Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
Cefet-SP: Centro Federal de Educação Tecnológica de São Paulo
Cespe/UnB-DF: Centro de Seleção e de Promoção de Eventos Universidade de Brasília
Enem/MEC: Exame Nacional do Ensino Médio
Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar
EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército
ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e Marketing
Fafeod-MG: Faculdade Federal de Odontologia de Diamantina
Famerp-SP: Faculdade de Medicina de São José do Rio Preto
FEI-SP: Faculdade de Engenharia Industrial
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (SP)
FRB-BA: Faculdade Ruy Barbosa
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular
IFCE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IFMG: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais
IFPE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco
IFSC: Instituto Federal de Santa Catarina
IFSul-RS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense
IME-RJ: Instituto Militar de Engenharia
IMT-SP: Instituto Mauá de Tecnologia
Inatel-MG: Instituto Nacional de Telecomunicações
Insper-SP: Instituto de Ensino e Pesquisa
ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Mack-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie
OBMEP: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
Osec-SP: Faculdade de Odontologia Santo Amaro
Pasusp-SP: Programa de Avaliação Seriada da Universidade de São Paulo
PUCCamp-SP: Pontifícia Universidade Católica de Campinas
PUC-MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-GO: Pontifícia Universidade Católica de Goiás
PUC-PR: Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Saresp-SP: Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
UA-AM: Universidade do Amazonas
UAM-SP: Universidade Anhembi-Morumbi
UCB-DF: Universidade Católica de Brasília
UCSal-BA: Universidade Católica de Salvador
Udesc-SC: Universidade do Estado de Santa Catarina
UEA-AM: Universidade Estadual do Amazonas
UECE: Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina
UEM-PR: Universidade Estadual de Maringá
UEMA: Universidade Estadual do Maranhão
UEMG: Universidade Estadual de Minas Gerais
UEPA: Universidade do Estado do Pará
UEPB: Universidade Estadual da Paraíba
UEPG-PR: Universidade Estadual de Ponta Grossa
UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UERN: Universidade Estadual do Rio Grande do Norte
Uesc-BA: Universidade Estadual de Santa Cruz
UFAC: Universidadse Federal do Acre
UFAL: Universidade Federal de Alagoas
UFAM: Universidade Federal do Amazonas
UFBA: Universidade Federal da Bahia
UFC-CE: Universidade Federal do Ceará
UFF-RJ: Universidade Federal Fluminense
UFG-GO: Universidade Federal de Goiás
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora
Ufla-MG: Universidade Federal de Lavras
UFMA: Universidade Federal do Maranhão
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
UFMT: Universidade Federal do Mato Grosso
Ufop-MG: Universidade Federal de Ouro Preto
UFPA: Universidade Federal do Pará
UFPB: Universidade Federal da Paraíba
UFPE: Universidade Federal de Pernambuco
UFPel-RS: Universidade Federal de Pelotas
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFS-SE: Universidade Federal de Sergipe
UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina
UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria
UFU-MG: Universidade Federal de Uberlândia
UFV-MG: Universidade Federal de Viçosa
UMC-SP: Universidade de Mogi das Cruzes
Umesp-SP: Universidade Metodista de São Paulo
UnB-DF: Universidade de Brasília
Unemat-MT: Universidade do Estado do Mato Grosso
Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas
Unifei-SP: Centro Universitário da FEI (FEI + ESAN + FCI)
Unifesp-SP: Universidade Federal de São Paulo
UniFOA-RJ: Centro Universitário de Volta Redonda
Unifor-CE: Universidade de Fortaleza
Unimontes-MG: Universidade Estadual de Montes Claros
Unilasalle-RS: Centro Universitário La Salle
Unirio-RJ: Universidade do Rio de Janeiro
Unisinos-RS: Universidade do Vale do Rio dos Sinos
Unitau-SP: Universidade de Taubaté
UPF-RS: Universidade de Passo Fundo
USF-SP: Universidade São Francisco
Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

Referências bibliográficas

AGUIAR, Alberto Flávio Alves; XAVIER, Airton; RODRIGUES, José Euny. **Cálculo para ciências médicas e biológicas**. São Paulo: Harbra, 2009.

AMOROSO COSTA, M. **As ideias fundamentais da Matemática e outros ensaios**. São Paulo: Edusp, 1971.

ARTIGUES, Christian et al. **Géométrie**. Paris: Hachette Lycées, 1992.

ARTIGUES, Christian et al. **Math**: Analyse et probabilités: **Math**. Paris: Hachette Lycées, 1992.

ARTIGUES, Christian et al. **Math**: term C et E. Algèbre & Géométrie. Paris: Hachette Lycées, 1992.

ARTIGUES, Christian et al. **Mathématiques. 1res S et E**. 2. ed. Paris: Hachette Lycées, 1990.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. 3. ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos fundamentais de Matemática. In: **A educação**. Lisboa: Sá da Costa, 1984.

DINIZ, Maria Ignez de S. V.; SMOLE, Kátia Cristina S. **MC512: discussão sobre a área de Matemática a partir do documento de Ciência e Tecnologia para o Ensino Médio elaborado pelo SEMTC/MEC**. VI Enem, jul. 1998.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1997.

GUZMÁN, Miguel de; COLERA, José. **Matemáticas I e II**. Barcelona: Anaya, 1989.

HERRERO, Fernando A.; GARCÍA, Carmen; VILA, Antonio. **Matemáticas – Factor 3**. Barcelona: Editorial Vicens-vives, 1987.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de Matemática elementar**. 5 ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 8.

LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento matemático**: provas e refutações. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997. (Coleção do professor de Matemática, v. 1, 2 e 3).

LINTZ, Rubens G. **História da Matemática**. Blumenau: Editora da FURB, 1999. v. 1.

LOPES, Maria Laura M. Leite; NASSER, Lílian (Coords.). **Geometria**: na era da imagem e do movimento. Rio de Janeiro: Editora UFRJ, 1996.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1983 a 2013.

SAMPAIO, Fausto Arnaud. **Matemática**: História, aplicações e jogos matemáticos. 2. ed. Campinas/São Paulo: Papirus, 2005.

SANTOS, Vânia Maria P. dos; REZENDE, Jovana Ferreira de. **Números**: linguagem universal. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1996.

SÃO PAULO (Estado). **Prática pedagógica**: Matemática 2º grau: Geometria I. São Paulo, 1994. v. 2.

SÃO PAULO (Estado). **Prática pedagógica**: Matemática 2º grau. São Paulo, 1992. v. 1.

SÃO PAULO (Estado). **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática**: 2º grau. 3. ed. São Paulo, 1992.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação/Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática**: 2º grau. 3. ed. São Paulo, 1992.

SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP. **Matemática**: curso colegial. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1965. v.1.

SMOOTHEY, Marion. **Atividades e jogos com estimativas**. São Paulo: Scipione, 1998.

SMOOTHEY, Marion. **Atividades e jogos com círculos**. São Paulo: Scipione, 1998.

ZWIRNER, G. **Complementi di algebra e nozioni di analisi matematica**. Pádua: Cedam, 1991.