AULA 6
Números Binomiais, Binômio de Newton e Polinômio de Leibniz

Vamos estudar as propriedades algébricas dos Números Binomiais, como aplicação provaremos o Binômio de Newton e o Polinômio de Leibniz.

Estudar os números binomiais é estudar um pouco sobre Pascal, então vamos conhecer um pouco sobre sua vida.
Órfão de mãe aos três anos de idade, Blaise Pascal foi educado pelo seu pai. Dizem que a princípio seu pai não deu livros de matemática a seu filho Blaise para encorajá-lo a desenvolver outros interesses, mas aos doze o menino mostrou tal talento geométrico que a partir daí sua inclinação foi encorajada.
Aos quatorze anos, Blaise, com seu pai, participou de reuniões informais da academia de Mersene, em Paris. Aí ele veio a conhecer as ideias de Desargues. Dois anos depois, em 1640, o jovem Pascal, então com dezesseis anos, publicou um Essay Pour Les Coniques.
Enquanto Pascal, em 1654, trabalhava em sua “As cônicas”, seu amigo, Chevalier De Mére propôs-lhe questões que tinha a idéia de probabilidade. Assim, Pascal ligou o estudo das probabilidades com o triângulo aritmético, levando a discussão tão mais longe que Cardan, que o arranjo triangular, a partir daí, é conhecido como triângulo de Pascal. O próprio triângulo tinha mais de 600 anos, mas Pascal descobriu algumas propriedades novas.

Definição 1. Dados n, k e $\mathbb{N}$, definimos $\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)}, 0 \le k \le n \\ 0, se\ k > n\ ou\ k < 0 \end{cases}$.

Quando estudamos combinações simples, aprendemos que se $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, então o número de subconjuntos de A com k elementos é $\binom{n}{k}$. Agora vamos estudar a definição destes números binomiais.

Definição 2. Seja n um número real e k um número natural, definimos:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}, k > 0 \\ 1, se\ k = 0 \end{cases}$$

Exemplos:

1. $\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!} = \frac{1}{16}$

2. $\binom{-5}{4} = \frac{(-5)(-6)(-7)(-8)}{4!} = 70$

Observação 1. A definição 2 será usada fortemente no teorema binomial quando o expoente for um número racional.

O TRIÂNGULO DE PASCAL

O triângulo aritmético de Pascal é uma tabela (em forma de triângulo) onde podemos dispor ordenadamente os coeficientes binomiais: $\binom{n}{k}, n, k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \swarrow & & \searrow & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
\swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \swarrow\ \searrow & & \\
 & & \swarrow\ \searrow & & & & & &
\end{array}$$

Olhando para estes números dispostos neste triângulo, ainda não dá para ver o significado, mas existem muitas propriedades interessantes. Alguns matemáticos dizem que foram os ‘’espíritos’’ que provaram.
Vamos provar as principais propriedades, as outras serão deixadas como exercício.

PROPRIEDADE 1. (STIFEL- PASCAL)
‘’ A partir da 3ª linha, cada elemento (com exceção do primeiro e do último) é a soma dos elementos da linha anterior, imediatamente acima dele ’’, isto é:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

PROVA: **(Algébrica):** $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$

$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)(n-k-1)!}+\frac{(n-1)!}{k!(k-1)(n-1-k)!}$

$=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left[\frac{1}{(n-k)}+\frac{1}{k}\right]$

$=\frac{n!}{k!(n-k)}=\binom{n}{k}$

PROPRIEDADE 2. (CHU SHIH-CHIEH)

$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}$, para todos $n,k\in\mathbb{N}$.

PROVA: Feita em Sala.

PROPRIEDADE 3. (CHU SHIH-CHIEH/1303)

$\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$, para todos $n,k\in\mathbb{N}$.

PROVA: Feita em Sala.

Teorema 1. Sejam $x,y\in\mathbb{R}$ e $n\in\mathbb{N}^*$, então:

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}.y^i$$

Prova: Feita em Sala.

Observações:

Termo geral: O termo $\binom{n}{i}x^{n-i}.y^i$ é chamado de termo geral, pois fazendo $i=0,1,2,\ldots,n$ obtemos todos os termos do desenvolvimento. Assim, escrevemos $t_{i+1}=\binom{n}{i}x^{n-i}.y^i$, $i\in\{0,1,2,\ldots,n+1\}$.

Teorema 2. (Leibniz) Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p$ números reais e $n\in\mathbb{N}^*$, então:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_p)^n=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=n}\frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_p!}x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}\ldots x_p^{\alpha_p}$$

Prova: Feita em Sala.

Exercício 1. Determine o valor numérico da soma:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\cdots+2008\cdot 2009.$$

Solução: A soma pode ser escrita da forma:

$$\sum_{k=1}^{2008}k(k+1).$$

O interessante é que $\binom{k+1}{2}=\frac{(k+1)!}{2!(k-1)!}=\frac{k(k+1)}{2}$. Logo, a soma é:

$$\sum_{k=1}^{2008}k(k+1)=2\cdot\sum_{k=1}^{2008}\binom{k+1}{2}$$

$$=2\cdot\left[\underbrace{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{2009}{2}}_{PROPRIEDADE\ (2)}\right]=2\cdot\binom{2010}{3}$$

Exercício 2. Calcule o 5.º termo do desenvolvimento de: $\left(\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{x}\right)^8$

Solução: Neste caso, $n=8$ e $p+1=5\therefore p=4$.

Termo geral: $T_{p+1}=(-1)^p C_n^p a^p x^{n-p}$

Por conseguinte,

$T_5=(-1)^4C_8^4\left(\frac{1}{x}\right)^4\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^4=\frac{35}{8}x^4y^4$

Exercício 3. Calcule, sem desenvolver, o termo independente de x de $\left(3x^4-\frac{2}{x^3}\right)^{14}$.

Solução:

Termo geral: $T_{p+1}=(-1)^p\cdot C_n^p\cdot a^p\cdot x^{n-p}$.

$T_{p+1}=(-1)^p\cdot C_{14}^p\cdot\left(\frac{2}{x^3}\right)^p\cdot(3x^4)^{14-p}$.

$T_{p+1}=(-1)^p\cdot C_{14}^p\cdot 2^p\cdot 3^{14-p}\cdot x^{56-4p-3p}$

$T_{p+1}=(-1)^p\cdot C_{14}^p\cdot 2^p\cdot 3^{14-p}\cdot x^{56-7p}$.

Para que o termo seja independente de x, deve-se ter:

$56-7p=0\Rightarrow p=8$.

Logo, o termo pedido é:

$T_9=(-1)^8\cdot C_{14}^8\cdot 2^8\cdot 3^{14-8}\cdot x^{56-7\cdot 8}=C_{14}^8\cdot 2^8\cdot 3^6$.

PROBLEMAS DE APRENDIZAGEM 6

1. Prove as seguintes propriedades:

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n, \forall\, n\in N.$

b) $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}, \forall\, n,k\ naturais\ com\ n\geq k+1.$

c) $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}, \forall\, n,k\ naturais.$

d) $\binom{k}{0}+\binom{k+1}{1}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}, \forall\, n,k\ naturais.$

e) **(BINÔMIO DE NEWTON)** Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, então: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i}.y^i$

f) **(POLINÔMIO DE LEIBNIZ)** Sejam $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$ números reais e $n \in \mathbb{N}^*$, então:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_p)^n = \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_p=n} \frac{n!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\dots\alpha_p!} x_1^{\alpha_1}.x_2^{\alpha_2}\dots x_p^{\alpha_p}$$

2. Determine o valor numérico da soma: $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + 2018\cdot 2019.$

3. Quantos termos racionais têm o desenvolvimento de: $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^{100}$?

4. **(ITA)** Determine o coeficiente de x^{17} no desenvolvimento de: $(1 + x^5 + x^7)^{20}$

5. **(IME/1994)** Determine a condição que o inteiro positivo m deve satisfazer para que exista termo independente de x, no desenvolvimento de: $\left(x^4 - \frac{1}{x^8}\right)^m$.

6. **(ITA/2006)** Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de: $(1 + x + x^2)^9$.

7. **(JERI HERMAN)** Determine o termo máximo do desenvolvimento de: $\left(1 + \sqrt{2}\right)^{100}$

8. Prove que: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$

9. Usando o desenvolvimento de $(a+b)^n$, prove que:

a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

b) $\sum_{k\ par}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$

c) $(2^{n+1} - 2)^n \geq n^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k}$.

10. **(CEARENSE/1997)** A soma

$$S = \frac{1}{1!.9!} + \frac{1}{3!.7!} + \frac{1}{5!.5!} + \frac{1}{7!.3!} + \frac{1}{9!.1!}$$

Pode ser escrita na forma $\frac{2^a}{b!}$ onde a e b são números inteiros positivos. Ache a e b.

11. **(ITA)** Para cada n, determine o valor numérico de:

$$1 - \binom{4n}{2} + \binom{4n}{4} - \cdots - \binom{4n}{4n-2} + \binom{4n}{4n}$$

12. (**LUÍS/2008**) Prove que $2007^{2007} + 2009^{2009}$ é múltiplo de 4.

13. **(HOÀNG XUÂN THANH)** Prove que:

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \cdot \binom{2n}{n}$$

14. Prove que:

a) **(FÓRMULA DE EULER)** $\binom{n}{0}\cdot\binom{m}{p} + \binom{n}{1}\cdot\binom{m}{p-1} + \cdots + \binom{n}{p}\cdot\binom{m}{0} = \binom{m+n}{p}$.

b) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} = \binom{2n-1}{n-1}$

c) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k}^2 = n \cdot \binom{2n-1}{n-1}$.

15. **(HUNGRIA/2003)** Seja n um ponto inteiro positive e a e b reais positivos. Prove que:

$$\log(a^n) + \binom{n}{1}\log(a^{n-1}\cdot b) + \binom{n}{2}\log(a^{n-2}\cdot b^2) + \cdots + \log(b^n) = \log\left((ab)^{n\cdot 2^{n-1}}\right).$$

16. (HOÀNG XUÂN THANH)

Sejam $n \geq m$ números naturais. Prove a igualdade abaixo:

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k}\cdot\binom{k}{m} = 2^{n-m}\cdot\binom{n}{m}$$

17. Sejam $= \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Considere a sequência: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

a) Prove que: $\mathrm{F_n} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathrm{a^n} - \mathrm{b^n})$

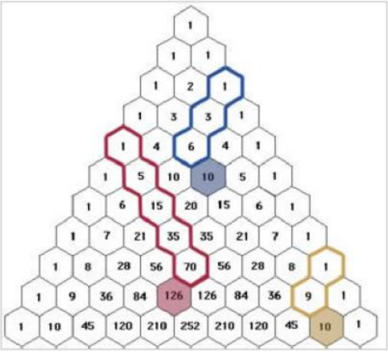
b) Prove que: $\mathrm{F_1}\binom{n}{1} + \mathrm{F_2}\binom{n}{2} + \cdots + \mathrm{F_n}\binom{n}{n} = \mathrm{F_{2n}}$.

18. Prove que $2+\sqrt{3}$ nn é ímpar para todo nn natural.

19.(ESPANHA) Determine os inteiros positivos n e k que satisfazem:

$$\frac{\binom{n}{n-1}^6 + \binom{n-2}{k}^6 + \binom{n+3}{n+1}^3}{3\binom{n-2}{k}^2\cdot\binom{n+3}{2}} = n^2$$

20. **(ARGENTINA)** Achar os três últimos dígitos do número 19^{97}.



PROBLEMAS DE FIXAÇÃO 6

1.(IME/1993) Determine o termo independente de *x* de: $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

2.(IME/1994) Determine a condição que o inteiro *m* deve satisfazer para que exista termo independente de *x* no desenvolvimento de: $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^8}\right)^{m}$.

3.(IME/2016) Determine o valor da soma:

$$\binom{2016}{5} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} + \binom{2016}{6}$$

4.(IME/1969) Seja *n* um número inteiro e positivo tal que os coeficientes dos 5.º, 6.º e 7.º termos do desenvolvimento de $\left(\dfrac{\log_{n\sqrt{2}} n}{\log_e n \cdot \log_{n\sqrt{2}} e} + x\right)^{n}$ ordenados segundo as potências decrescentes de *x*, estão em progressão aritmética. Determine *n*.

5.Determine o termo central do desenvolvimento de $\left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{8}$

6.Determine o termo independente x no desenvolvimento de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^3}\right)^{10}$

7.Para que valores de *n* o desenvolvimento de $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x^3}\right)^{n}$ possui um termo independente de x?

8.Determine o termo independente de x em $\left(1 + x + \dfrac{2}{x}\right)^{3}$.

9.Encontrar o coeficiente de x^3, no desenvolvimento de: $(x^2 + 2x + 2)^n$.

10.(PUC) Qual coeficiente de x^8 no desenvolvimento de: $(1 + x^2 - x^3)^9$?

11.(UFRJ) Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de: $(x^3 + 2x^2 + x - 1)^4$.

12. Ache o coeficiente de x^{18} em $(1 + x^5 + x^6 + x^9)^4$.

13. Determine o coeficiente de x^{28} no desenvolvimento de $(x+2)^{20}(x^2-1)^5$

14. Determine o coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(1-x)^2(1+x)^n$

15. Determine o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de: $\left(2x + \dfrac{1}{x^2}\right)^3 . \left(x^2 + \dfrac{1}{2x}\right)^3$

16. Determine o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de: $(2x-3)^4 \cdot (x+2)^5$.

17.(ITA/73) Seja $n \in N^*,\ p \in N^*$, onde $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $N^* = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Então, $\sum_{p=0}^{n} (-1)^{p-n} \cdot (-1)^{p} \cdot (-1)^{n-p} \cdot \binom{n}{p}$, vale:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) n.r.a.

18.(ITA/86) Para quais valores de $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ e de $n \in \mathbb{N}$ temos a igualdade:

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot(secx-tgx)^{n-i}\cdot\frac{1}{(secx+tgx)^{i}}=\frac{255}{(secx+tgx)^{n}}$$

19.(ITA/1988) No desenvolvimento de $(1+3x)^m$, a razão entre os coeficientes dos termos de terceiro e primeiro graus em *x* é $6(m-1)$. O valor de *m* é:

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8
e) 10

20.(ITA/1989) Considere o desenvolvimento $(x+y)^{10}=A_1\,x^{10}+A_2\,x^9y+...,$ onde *x* e *y* são números reais. A oitava parcela do lado direito é igual a $\frac{405}{2}(\log_k 2)^3$, para algum $k>1$, $x=\frac{2\log_2 k}{\sqrt{\log_k 2}}$ e $y=\frac{\sqrt{\log_k 2}}{2\log_2 k}$. Neste caso:

a) $k^2=2$ b) $k^2=3$ c) $k^3=2$
d) $k^3=7$ e) $k^3=5$

21.(ITA/1989) Escreva o desenvolvimento do binômio $(tgx^3-cosecx^6)^m$, onde $m\in\mathbb{N}$ não nulo, em termos de potências inteiras de $senx$ e $cosx$. Para determinados valores do expoente, este desenvolvimento possuirá uma parcela P, que não conterá a função $senx$. Seja m o menor valor para o qual isto ocorre. Então $P=\frac{-64}{9}$ quando x for igual a ?

22.(ITA/1990) Sejam os números reais α e *x* onde $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ e $x\neq 0$. Se no desenvolvimento de $\left((\cos\alpha)\cdot x+(sen\alpha)\cdot\frac{1}{x}\right)^8$ o termo independente de *x* vale $\frac{35}{8}$, então o valor de α é:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{12}$
d) $\frac{\pi}{4}$ e) *n.d.a.*

23.(ITA/1991) Sejam $A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 3^k$ e $B=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\cdot 11^k$. Se $\ell n\,B-\ell n\,A=\ell n\frac{6561}{4}$ então *n* é igual a:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8
e) *n.d.a*

24.(ITA/1992) A igualdade $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\binom{n}{k}7^n+\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}2^m=64$, é valida para:

a) Quaisquer que sejam *n* e *m* naturais positivos.
b) Qualquer que seja *n* natural positivo e $m=3$.
c) $n=13$ e $m=6$.
d) *n* ímpar e *m* par.
e) *n.d.a.*

25.(ITA/1992) No desenvolvimento $(x+y)^6$, ordenado segundo as potências decrescentes de *x*, a soma do 2^{o} termo com $\frac{1}{10}$ do termo de maior coeficiente é igual a oito vezes a soma de todos os coeficientes. Se $x=(2)^{z+1}$ e $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{z-\frac{1}{2}}$, então:

a) $z\in[0,\ 1]$ b) $z\in(20,\ 50)$ c) $z\in(-\infty,\ 0]$
d) $z\in[1,\ 15]$ e) *n.d.a.*

26.(ITA/1994) No desenvolvimento de $A=\left(\frac{3a^2}{2}+\frac{2m}{3}\right)^{10}$, a razão entre a parcela contendo o fator $a^{16}m^2$ e a parcela contendo o fator $a^{14}m^3$ é igual a $\frac{9}{16}$. Se *a* e *m* são números reais positivos tais que $A=(m^2+4)^5$, então:

a) $a\cdot m=\frac{2}{3}$ b) $a\cdot m=\frac{1}{3}$ c) $a+m=\frac{5}{2}$
d) $a+m=5$ e) $a-m=\frac{5}{2}$

27.(ITA/1997) Seja $m\geq 10$ e *D* o desenvolvimento do binômio $(a+b)^m$, ordenado segundo as potências crescentes de *b*. Quando $a = x^n$ e $b = x^{-n^2}$, o sexto termo de *D* fica independente de *x*. Quando $a = x$ e $b = x^{-\frac{1}{n}}$. O oitavo termo de *D* se torna independente de *x*. Então *m* é igual a:

a) 10 b) 12 c) 14
d) 16 e) 18

28.(ITA/2000) Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{20} \frac{20!}{n!\,(20-n)!} x^n$ uma função real de variável real em que *n*! indica o fatorial de *n*. considere as afirmações:

I. $f(1) = 2.$
II. $f(-1) = 0.$
III. $f(-2) = 1.$

Podemos concluir que:
a) Somente as afirmações *I* e *II* são verdadeiras.
b) Somente as afirmações *II* e *III* são verdadeiras.
c) Apenas a afirmação *I* é verdadeira.
d) Apenas a afirmação *II* é verdadeira.
e) Apenas a afirmação *III* é verdadeira.

29.(ITA/2001) Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em *x* e *y*, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x+y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de *m* elementos, tomados 2 a 2, é:
a) 80 b) 90 c) 70 d) 100
e) 60

30.(ITA/2001) A respeito das combinações $a_n = \binom{2n}{n}$ e $b_n = \binom{2n}{n-1}$ temos que, para cada $n = 1, 2, 3, ..,$ a diferença $a_n - b_n$ é igual a:

a) $\frac{n!}{n+1} a_n$ b) $\frac{2n}{n+1} a_n$ c) $\frac{n}{n+1} a_n$

d) $\frac{2}{n+1} a_n$ e) $\frac{1}{n+1} a_n$

31.(ITA/2002) Mostre que $\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4}$, para quaisquer *x* e *y* reais positivos.

32.(ITA/2004) O termo independente de *x* no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é:

a) $729\sqrt[3]{45}$ b) $972\sqrt[3]{15}$ c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ e) $165\sqrt[3]{75}$

33.(ITA/2014) Para os inteiros positivos *k* e *n*, com $k \le n$, sabe-se que:

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Então, o valor de $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ é igual a

A( ) $2^n + 1.$ B( ) $2^{n+1} + 1.$

C( ) $\frac{2^{n+1}+1}{n}.$ D( ) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$

E( ) $\frac{2^n - 1}{n}.$

34.(IME/1996) Determine o termo máximo do desenvolvimento de: $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{65}.$

35. Mostre que:

$$\left(C_n^0 + C_n^1\right)\left(C_n^1 + C_n^2\right)\left(C_n^2 + C_n^3\right)\ldots\left(C_n^{n-1} + C_n^n\right) = \frac{(n+1)^n}{n!} C_n^1 C_n^2 C$$

36. Determine em função de n, a soma abaixo:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$$

37. Determine em função de n, a soma abaixo:

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

38. Determine em função de n, a soma abaixo:

$$S = \sum_{k=1}^{n} k(2k+1)$$

39. Determine em função de n, a soma abaixo:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} 3^k$$

40. Determine em função de n, a soma abaixo:

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{2^{p-1} \cdot C_n^p}{p+1}$$

GABARITO

1) -252	11) 13	21) *	31) DEMONSTRAÇÃO
2) m deve ser divisível por 3.	12) 10	22) D	32) E
3) $\binom{2021}{6}$	13) 755	23) E	33) D
4) n=7 ou n=14	14) *	24) B	34) 17º TERMO
5) 70	15) 24	25) C	35) DEMONSTRAÇÃO
6) 210	16) -32	26) C	36) *
7) n divisível por 5.	17) B	27) B	37) *
8) 13	18) *	28) A	38) *
9) *	19) m=6	29) B	39) *
10) 378	20) C	30) E	40) *

9) $\frac{n \cdot (n^2-1) \cdot 2^{n-1}}{3}$

14) $\frac{n^2 - 5n + 2}{2}$

18) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in Z$ e $n = 8$

21) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in Z$

36) $n\binom{2n-1}{n-1}$

37) $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

38) $\frac{n \cdot (n+1) \cdot (4n+5)}{6}$

39) $3 \cdot n \cdot 4^{n-1}$

40) $\sum_{p=0}^{n} \frac{2^{p-1} \cdot C_n^p}{p+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

SUGESTÕES E/OU SOLUÇÕES

1)

Solução:
O $(k+1)$-ésimo termo da expansão do binômio é

$$a_{k+1} = \binom{10}{k}(\sqrt{x})^{10-k}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = \binom{10}{k}(-1)^k x^{5-k}$$

Logo, o termo independente de x é

$$a_6 = \binom{10}{5}(-1)^5 = -\frac{10!}{5!5!} = -252$$

2)Solução: Termo geral do binômio $\left(x^4 - \frac{1}{x^8}\right)^m$.

$$T_{p+1} = \binom{m}{p} \cdot x^{-8p} \cdot x^{4(m-p)} \cdot (-1)^p = (-1)^p \cdot \binom{m}{p} \cdot x^{4m-12p}$$

Para haver termo independente de x, devemos ter: $4m - 12p = 0,\ m = 3p\ \left(p \in N^*\right)$

Portanto m deverá ser um múltiplo natural de 3.

3)Solução:
São 9 termos. O termo central é o de ordem (1+9)/2 = 5.

$$T_5 = C_8^4\left(-\frac{1}{x}\right)^4 \left(x^2\right)^{8-4} = 70x^4.$$

6)Solução:

$T_{p+1} = C_{10}^p\left(\frac{1}{x^3}\right)^p (x^2)^{10-p} = C_{10}^p x^{20-5p}$ independerá de x para 20 - 5p = 0, ou seja, p =

A resposta é $T_5 = C_{10}^4 x^0 = 210.$

7)Solução:

$$T_{p+1} = C_n^p\left(\frac{-1}{x^3}\right)^p (2x^2)^{n-p} = C_n^p(-1)^p 2^{n-p} x^{2n-5p}$$

independerá de x se 2n – 5p = 0, isto é, $p = \frac{2n}{5}$. Como p deve ser inteiro e $0 \le p \ge n, n$ deve ser múltiplo não-negativo de 5.

14)Solução:

$(1-x)^2 = 1 - 2x + x^2 e (1+x)^n = x^n + nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} + ...$

Os termos em x^n no produto são:

$$1.x^n = x^n; -2x.nx^{n-1} = -2nx^n; x^2.\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}x^n.$$

A resposta é $1-2n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-5n+2}{2}$.

15)Solução:

$$\left(2x+\frac{1}{x}\right)^3\cdot\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^3=\frac{\left(2x^3+1\right)^6}{8x^9}$$

A resposta é $\frac{1}{8}$ do coeficiente de x^{15} no desenvolvimento de $\left(2x^3+1\right)^6$.

O termo genérico do desenvolvimento de $\left(2x^3+1\right)^6$ é $T_{p+1}=C_6^p\left(2x^3\right)^{6-p}=C_6^p\,2^{6-p}x^{18-3p}$.

O termo em x^{15} é obtido para p=1 e seu coeficiente é $C_6^1.2^5=192$.

A resposta é $\frac{1}{8}192=24$.

16)Solução:

Seja T_{p+1} o termo geral de $\left(2x-3\right)^4$ e T_{q+1} o termo geral de $\left(x+2\right)^5$.

Assim:

$T_{p+1}=(-1)^p\cdot C_4^p\cdot 3^p\cdot(2x)^{4-p}=(-1)^p\cdot C_4^p\cdot 3^p\cdot 2^{4-p}\cdot x^{4-p}$.

$T_{q+1}=C_5^p\cdot 2^q\cdot x^{5-q}$. Um termo genérico do produto $\left(2x-3\right)^4\cdot\left(x+2\right)^5$ é da forma:

$T=T_{p+1}\cdot T_{q+1}=(-1)^p\cdot C_4^p\cdot C_5^q\cdot 2^{4-p+q}\cdot 3^p\cdot x^{9-p-q}$.

Para se obter o termo em x^3, devemos ter:

$9-p-q=3\Rightarrow p+q=6$. (1)

Observemos que: $p\in\{0,1,2,3,4\}$ e $q\in\{0,1,2,3,4,5\}$.

Assim, as possíveis soluções de (1) são:

$4+2=6\Rightarrow(p=4,\ \ q=2)$,

$3+3=6\Rightarrow(p=3,\ \ q=3)$

$2+4=6\Rightarrow(p=2,\ \ q=4)$,

$1+5=6\Rightarrow(p=1,\ \ q=5)$

Então, os termos em x^3 são:

$p=4$ e $q=2\Rightarrow$

$(-1)^4\cdot C_4^4\cdot C_5^2\cdot 2^2\cdot 3^4\cdot x^3=40\cdot 81x^3=3240x^3$.

$p=3$ e $q=3\Rightarrow$

$(-1)^3\cdot C_4^3\cdot C_5^3\cdot 2^4\cdot 3^3\cdot x^3=-40\cdot 16\cdot 27x^3=-17280x^3$

.

$p=2$ e $q=4\Rightarrow$

$(-1)^2\cdot C_4^2\cdot C_5^4\cdot 2^6\cdot 3^2\cdot x^3=6\cdot 5\cdot 64x^3=17280x^3$

$p=1$ e $q=5\Rightarrow$

$(-1)^1\cdot C_4^1\cdot C_5^5\cdot 2^8\cdot 3^1\cdot x^3=-4\cdot 256\cdot 3x^3=-3072x^3$

18)Solução: Alternativa (**d**)

Como sec x – tg x = $\frac{(\sec x-\operatorname{tg}x)(\sec x+\operatorname{tg}x)}{(\sec x+\operatorname{tg}x)}=\frac{\sec^2 x-\operatorname{tg}^2 x}{\sec x+\operatorname{tg}x}=\frac{1}{\sec x+\operatorname{tg}x}$

, para $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in Z$

temos $\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(\sec x-\operatorname{tg}x)^{n-i}\frac{1}{(\sec x+\operatorname{tg}x)^i}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}$

$(\sec x-\operatorname{tg}x)^{n-i}(\sec x-\operatorname{tg}x)^i=$

$=[(\sec x-\operatorname{tg}x)+(\sec x-\operatorname{tg}x)]^n-(\sec x-\operatorname{tg}x)^n=$

$=[2(\sec x-\operatorname{tg}x)]^n-(\sec x-\operatorname{tg}x)^n$

Assim, $2^n\ .\ (\sec x-\operatorname{tg}x)^n-(\sec x-\operatorname{tg}x)^n=\frac{255}{(\sec x+\operatorname{tg}x)^n}$]

$$\leftrightarrow\ \left|\begin{array}{l}2^n(\sec x-\operatorname{tg}x)^n=256(\sec x-\operatorname{tg}x)^n\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\in Z\end{array}\right.\ \leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}2^n=2^8\\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi; k\in Z\end{array}\right.$$

Logo, a igualdade é válida para: $x\in R$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$; $k\in Z$ e n = 8

19)

Solução: O termo de grau 3 é $(\frac{m}{3})3^3\ .\ x^3$

O termo de grau 1 é $(\frac{m}{1})3^1.\ x^1$

Tem-se que: 3^3.

$\frac{m}{3})=6(m-1).(\frac{m}{1})3\rightarrow 3^3.\frac{m(m-1)(m-2)\cancel{(m-3)!}}{3!\cancel{(m-3)!}}=6(m-1)(3m)$

Como m ≥ 3 tem-se que: m - 2 = 4 ou ainda m = 6

20)Solução: A oitava parcela do desenvolvimento do binômio é: $\binom{10}{7}x^3.y^7$. Então:

$\binom{10}{7}x^3y^7=\frac{405}{2}(\log_k 2)^3$. Tomemos $\log_k 2$ = t.

Temos:

$$\binom{10}{7}x^3y^7 = \frac{120.8.\left(\frac{1}{t}\right)^3}{\left(\sqrt{t}\right)^3}.\frac{\left(\sqrt{t}\right)^7}{\left(2.\frac{1}{t}\right)^7} = \frac{15}{2}t^6 \text{ e}$$

$$\frac{405}{2}(\log_k 2)^3 = \frac{405}{2}t^3. \text{ Então, } \frac{15}{2}t^6 = \frac{405}{2}t^3 \Leftrightarrow$$

$$\left| \begin{array}{l} t=0 \\ \vee \\ t^3 = 27 \end{array} \right.$$

Mas, t $\neq$ 0, logo: t = 3; assim, $\log_k 2 = 3 \Leftrightarrow K^3 = 2$.

21)Solução: O termo geral de $\left(tg^3x - \cos ec^6 x\right)^m$ é:

$$T_{k+1} = (-1)^k.\binom{m}{k}\frac{(senx)^{3m-3k}}{(\cos x)^{3m-3k}}.\frac{1}{(senx)^{6k}} = (-1)^k.\binom{m}{k}\frac{(senx)^{3m-9k}}{(\cos x)^{3m-3k}}.$$

Para que se tenha termo independente da função sen x devemos ter:

$3m - 9k = 0 \Leftrightarrow m = 3k.$ Assim, o menos valos inteiro positivo de m será 3.

Logo:

$$-\binom{3}{1}.\frac{1}{\cos^6 x} = -\frac{64}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^6 x} = \frac{64}{27} \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow$$

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in Z.$ Logo, P = $-\frac{64}{9}$ quando

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi; k \in Z$$

23)Solução: Alternativa (**e**)

$$A = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.1^{n-k}.3^k = (1+3)^n = 4^n$$

$$B = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}11^k = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}.1^{n-1-k}.11^k = (1+11)^{n-1} = 12^{n-1}$$

$$\ell n\ 12^{n-1} - \ell n\ 4^n = \ell n\frac{6561}{4} \leftrightarrow \ell n\frac{12^{n-1}}{4^n} = \ell n\frac{6561}{4} \leftrightarrow$$

$$\frac{12^{n-1}}{4^n} = \frac{6561}{4} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \frac{3^{n-1}.4^{n-1}}{4^n} = \frac{6561}{4} \leftrightarrow 3^{n-1} = 6561 \leftrightarrow 3^{n-1} = 3^8$$

$$\leftrightarrow n - 1 = 8 \leftrightarrow n = 9$$

24)Solução: Alternativa (**b**)

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}7^n + \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{j}2^m = 64 \Leftrightarrow 7^n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} + 2^m\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j} = 64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^m.2^m = 64 \Leftrightarrow 2^{2m} = 64 \Leftrightarrow 2^{2m} = 2^6 \Leftrightarrow 2m = 6$$

$$\Leftrightarrow m = 3$$

25)

Solução: Alternativa (**c**)

O termo geral de $(x + y)^6$ é $\binom{6}{k}.x^{6-k}.y^k$ se ordenado segundo as potências decrescentes de **x**, logo:

$$\binom{6}{1}x^5y + \frac{1}{10}\binom{6}{3}x^3y^3 = 8.2^6 \Leftrightarrow 6x^5y + 2x^3y^3 = 8.2^6 \Leftrightarrow 3x^5y + x^3y^3 = 2^8 \ (*)$$

Mas $x = (2)^{z+1}$ e $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{z-\frac{1}{2}}$.Substituindo em (*), temos:

$$3.2^6.2^{3Z} + 2^6.2^{-3Z} = 2^8 \Leftrightarrow 3.2^{3Z} + \frac{1}{2^{3Z}} = 4 \Leftrightarrow 3.(2^{3Z})^2 - 4.2^{3Z} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{3Z} = 1 \vee 2^{3Z} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3Z = 0 \vee 3Z = \log_2\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow Z = 0 \vee Z = -\frac{1}{3}\log_2 3$$

Então: $Z \in (-\infty, 0]$

26)Solução: Alternativa C.

A parcela que contém o fator $a^{16}.m^2$ é o 3º termo: $T_3 = \binom{10}{2}.\left(\frac{3a^2}{2}\right)^8.\left(\frac{2m}{3}\right)^2 = \frac{45.3^6.a^{16}.m^2}{2^6}$

A parcela que contém o fator $a^{14}.m^3$ é o 4º termo: $T_4 = \binom{10}{3}.\left(\frac{3a^2}{2}\right)^7.\left(\frac{2m}{3}\right)^3 = \frac{120.3^4.a^{14}.m^3}{2^4}$

$\frac{T_3}{T_4} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \frac{45.3^6.a^{16}.m^2}{2^6}.\frac{2^4}{120.3^4.a^{14}.m^3} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow 3a^2 = 2m.$ Mas $\left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2m}{3}\right)^{10} =$

$= (m^2+4)^5 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{2m}{2} + \frac{2m}{3}\right)^2\right]^5 = (m^2+4)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{5m}{3}\right)^2 = m^2 + 4 \Leftrightarrow m^2 = \frac{9}{4}$. Como m > 0

e a > 0, temos: $m = \frac{3}{2}$ e $3a^2 = 2.\frac{3}{2} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$. Assim, $a + m = \frac{5}{2}$.

27)Solução:

1º) O sexto termo do desenvolvimento de $(x^n + x^{-n^2})^m$, ordenado segundo o enunciado, é dado por:

$$T_6 = \binom{m}{5}.x^{n(m-5)}.x^{-5n^2} = \binom{m}{5}x^{n(m-5n-5)}$$

Tal termo fica independente de x, se:

$$m - 5n - 5 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{m-5}{5} \ (I)$$

2º) O oitavo termo do desenvolvimento de $\left(x + x^{-\frac{1}{n}}\right)^m$, ordenado segundo o enunciado, é dado por:

$$T_8 = \binom{m}{7}x^{m-7}.x^{-\frac{7}{n}} = \binom{m}{7}x^{\frac{n(m-7)-7}{n}}$$

Tal termo se torna independente de x, se:

$$n(m-7) - 7 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{7}{m-7} \ (II)$$

3º) De (I) e (II) tem-se:

$$\frac{m-5}{5}=\frac{7}{m-7}\Leftrightarrow m^2-12m=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m=12} \text{ pois } m\neq 0$$

28)Solução: Temos f(x)

$$\sum_{n=0}^{20}\frac{20!}{n!(20-n)!}.x^n=\sum_{n=0}^{20}\binom{20}{n}.1^{20-n}.x^n=(1+x)^{20},\ f:R\to R.$$

Logo:

I. Falsa. $f(1) = (1 + 1)^{20} = 2^{20}$.

II. Verdadeira. $f(-1) = (1+(-1))^{20} = 0$.

III. Verdadeira. $f(-2) = (1+(-2))^{20} = 1$.

29)Solução:

A soma dos coeficientes do polinômio $(x+y)^m$ é igual a $(1+1)^m=2^m$. Então:

$$2^m=1024\Rightarrow m=10\Rightarrow A_{m,2}=A_{10,2}=10\times 9=90$$

30)Solução:

$$a_n-b_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=$$

$$=\frac{(2n)!}{n!\,n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!}=$$

$$=\frac{(2n)!}{n!\,n!}-\frac{(2n)!\,n}{n!\,.\,(n+1)\,.\,n!}=$$

$$=\frac{(2n)!}{n!\,n!}\cdot\left[1-\frac{n}{n+1}\right]=a_n\cdot\frac{n+1-n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\cdot a_n$$

32) Solução:

Termo geral:

$$T=\binom{12}{p}\cdot\left(\sqrt{\frac{3\cdot x^{1/3}}{5\cdot x}}\right)^{12-p}\cdot(-1)^p\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{5\cdot x}{3\cdot x^{1/2}}}\right)^p$$

$$T=\binom{12}{p}\cdot 3^{6-\frac{p}{2}}\cdot\left(x^{\frac{1}{3}-1}\right)^{6-\frac{p}{2}}\cdot 5^{-6+\frac{p}{2}}\cdot(-1)^p\cdot 5^{\frac{p}{3}}\left(x^{1-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{p}{3}}\cdot 3^{-\frac{p}{3}}\Rightarrow$$

$$T=\binom{12}{p}\cdot 3^{6-\frac{5p}{6}}\cdot 5^{-6+\frac{5p}{6}}\cdot x^{-4+\frac{p}{2}}\cdot(-1)^p$$

Condição para o termo independente: $-4+\frac{p}{2}=0\Rightarrow p=8$

. Substituindo $p = 8$, temos: $T=\binom{12}{8}\cdot 3^{6-\frac{5\cdot 8}{6}}\cdot 5^{-6+\frac{5\cdot 8}{6}}\cdot(-1)^8\Rightarrow T=495\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$T=165\cdot 3\cdot\sqrt[3]{\frac{5^2}{3^2}}=165\cdot\sqrt[3]{3\cdot 5^2}\Rightarrow\boxed{T=165\cdot\sqrt[3]{75}}$$

33)Solução:

Sendo $S=\binom{n}{0}+\frac{1}{2}\binom{n}{1}+\frac{1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$,

temos:

$$(n+1)\,S=\frac{n+1}{1}\binom{n}{0}+\frac{n+1}{2}\binom{n}{1}+\frac{n+1}{3}\binom{n}{2}+\ldots+$$

$$+\frac{n+1}{n}\binom{n}{n-1}+\frac{n+1}{n+1}\binom{n}{n}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(n+1)\,S=\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}+\ldots+\binom{n+1}{n}+$$

$$+\binom{n+1}{n+1}\Leftrightarrow(n+1)\,S=2^{n+1}-\binom{n+1}{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(n+1)\,S=2^{n+1}-1\Leftrightarrow S=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

34) Solução:

Termo geral:

$$T_{p+1}=\binom{65}{p}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^p$$

Seja T_{p+1}, o termo máximo, temos então que: $T_{p+1}\geq T_p$ e $T_{p+1}\leq T_{p+2}$.

Como $T_{p+1}\geq T_p$, temos:

$$\frac{65!}{p!\cdot(65-p)!}\cdot\frac{1}{3^p}\geq\frac{65!}{(p-1)!\cdot(66-p)!}\cdot\frac{1}{3^{p-1}}$$

$$\frac{1}{3p}\geq\frac{1}{66-p}$$

$$66-p\geq 3p$$

$$p\leq 16{,}5$$

Como $T_{p+1}\geq T_{p+2}$, temos:

$$\frac{65!}{p!\cdot(65-p)!}\cdot\frac{1}{3^p}\geq\frac{65!}{(p+1)!\cdot(64-p)!}\cdot\frac{1}{3^{p+1}}$$

$$\frac{1}{64-p}\geq\frac{1}{3\cdot(p+1)}$$

$$3p+3\geq 65-p$$

$$p\geq 15{,}5$$

Portanto como $15{,}5\leq x\leq 16{,}5$, temos: $p=16$.

Termo máximo: $T_{17}=\binom{65}{16}\cdot\frac{1}{3^{16}}$.

35)Solução:

$$C_n^0+C_n^1=C_{n+1}^1=\frac{n+1}{1}C_n^n$$

$$C_n^1+C_n^2=C_{n+1}^2=\frac{n+1}{2}C_n^{n-1}$$

$$C_n^2+C_n^3=C_{n+1}^3=\frac{n+1}{3}C_n^1$$

.

$$C_n^{n-1}+C_n^n=C_{n+1}^n=\frac{n+1}{n}C_n^1$$

Multiplicando-se essas *n* igualdades, obtemos:

$$\left(C_n^0+C_n^1\right)\left(C_n^1+C_n^2\right)\left(C_n^2+C_n^3\right)\ldots\left(C_n^{n-1}+C_n^n\right)=\frac{(n+1)^n}{n!}C_n^1C_n^2C_n^3\ldots C_n^{n-1}C_n^n$$

.

obtemos:

$$\left(C_n^0+C_n^1\right)\left(C_n^1+C_n^2\right)\left(C_n^2+C_n^3\right)\ldots\left(C_n^{n-1}+C_n^n\right)=\frac{(n+1)^n}{n!}C_n^1C_n^2C_n^3\ldots C_n^{n-1}C_n^n$$

36)Solução:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k}$$

$$= n\binom{2n-1}{n-1}$$

37)Solução:

$$k^3 = Ak(k+1)(k+2) + Bk(k+1) + Ck + D$$

$$k^3 = Ak^3 + (3A+B)k^2 + (2A+B+C)k + D$$

$$A = 1, 3A + B = 0, 2A + B + C = 0, D = 0$$

$$A = 1, B = -3, C = 1, D = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n}[k(k+1)(k+2) - 3k(k+1) + k] =$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[6C_{k+2}^{3} - 6C_{k+1}^{2} + C_{k}^{1}\right] = 6C_{n+3}^{3} - 6C_{n+2}^{3} + C_{n+1}^{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

38)Solução:

$$k(2k+1) = Ak(k+1) + Bk + C$$

$$2k^2 + k = Ak^2 + (A+B)k + C$$

$$A = 2, A + B = 1, C = 0$$

$$A = 2, B = -1, C = 0$$

$$S = \sum_{k=1}^{n}[2k(k+1) - k] = \sum_{k=1}^{n}\left[4C_{k+1}^{2} - C_{k}^{1}\right]$$

$$= 4C_{n+2}^{3} - C_{n+1}^{2} = \frac{n(n+1)(4n+5)}{6}$$

39)Solução:

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k 3^k = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!(n-k)!}3^k = \sum_{k=1}^{n} n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}3^k = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}3^k = 3n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}3^{k-1}$$

$$= 3n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}3^p = 3n(1+3)^{n-1} = 3n.4^{n-1}$$

40)

***Solução*:**

$\frac{1}{p+1}C_n^p = \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{p+1}$, Daí, vem:

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{2^{p-1}\cdot C_n^p}{p+1} = \sum_{p=0}^{n}\frac{2^{p-1}}{n+1}\cdot C_{n+1}^{p+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{2^{p-1}\cdot C_n^p}{p+1} = \frac{1}{n+1}\cdot\sum_{p=0}^{n}2^{p-1}\cdot C_{n+1}^{p+1} \Rightarrow$$

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{2^{p-1}\cdot C_n^p}{p+1} = \frac{1}{n+1}\cdot$$

$$[C_{n+1}^{1}\cdot 2 + C_{n+1}^{2}\cdot 2^2 + C_{n+1}^{3}\cdot 2^3 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}\cdot 2^{n+1}] \Rightarrow.$$

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{2^{p-1}\cdot C_n^p}{p+1} = \frac{1}{n+1}\cdot[(1+2)^{n+1} - 1] \Rightarrow.$$

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{2^{p-1}\cdot C_n^p}{p+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}.$$