AULA 4
PROBLEMAS DIVERSOS I

Vamos agora, usar todos os nosos conhecimentos aprendidos nas três aulas anteriores. Resolveremos problemas do ITA, IME, AFA e ESCOLA NAVAL.

PROBLEMAS DE APRENDIZAGEM 4

1.(AFA) Numa sala de aula, estão presentes 5 alunos e 6 alunas. Para uma determinada atividade, o professor deverá escolher um grupo formado por 3 dessas alunas e 3 dos alunos. Em seguida, os escolhidos serão dispostos em círculo de tal forma que os alunos do mesmo sexo não fiquem lado a lado. Determine o número de modos de fazer isso.

2.(EFOMM) A quantidade de anagramas da palavra **MERCANTE** que não posui vogais juntas é?

3.(ESCOLA NAVAL) A Escola Naval irá distribuir 4 viagens para a cidade de Fortaleza, 3 para a cidade de Natal e 2 para a cidade de Salvador. De quantos modos diferentes podemos distribuir-lás entre 9 aspirantes, dando somente uma viagem para cada um?

4.(ITA/2004) Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

5.(ITA/2007) Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é:

6.(IME/1980) Seja um barco com 8 lugares, numerados como no diagrama seguinte:

1		3		5		7	
	2		4		6		8

Há 8 remadores disponíveis para guarnecê-lo, com as seguintes restrições: Os remadores *A* e *B* só podem sentar no lado ímpar e o remador *C*, no lado par. Os remadores *D*, *E*, *F*, *G*, *H* podem ocupar quaisquer posições. Quantas configurações podem ser obtidas com o barco totalmente guarnecido?

7.(ITA/2002) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras *a, b* e *c* ?

8.(AFA) Uma caixa contém 10 bolas das quais 3 são amarelas e numeradas de 1 a 3; 3 verdes numeradas de 1 a 3 e mais 4 bolas de outras cores distintas e sem numeração. Determine a quantidade de maneiras distintas de se enfileirar essas 10 bolas de modo que as bolas de mesmo número fiquem juntas?

9.(EFOMM) Quantos anagramas é possível formar com a palavra **CARAVELAS**, não havendo duas vogais consecutivas e nem consoantes consecutivas?

10.(ESCOLA NAVAL) Qual a quantidade de números inteiros de 4 algarismos distintos, sendo dois algarismos pares e dois ímpares que podemos formar, usando os algarismos de 1 a 9?

11.(AFA) Dez vagas de um estacionamento serão ocupadas por seis carros, sendo 3 pretos, 2 vermelhos e 1 branco. Considerando que uma maneira de isso ocorrer se distingue de outra somente pela cor do carros, o total de possibilidades de os seis carros ocuparem as 10 vagas é?

12.(ITA/2001) Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?

13.(EFOMM) Uma turma do 1º ano da EFOMM tem aulas às segundas, quartas e sextas, de 8h40 às 10h20 e de 10h30 às 12h. As matérias são Arquitetura Naval, Inglês e Cálculo, cada uma com duas aulas semanais, em dias diferentes. De quantos modos pode ser feito o horário dessa turma?

14.(ITA/2007) Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, satisfazendo à seguinte regra: o número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou com 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

15.(IME/1988) Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas formas distintas esta primeira rodada pode ser realizada? Justifique sua resposta.

16.(IME/2002) Sejam *A* e *B* dois subconjuntos de □ . Por definição, uma função $f: A \rightarrow B$ é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e a_2 $\in A$

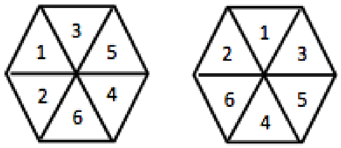
a) Para $A = \{1,\ 2\}$ e $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, quantas funções de *A* para *B* são crescentes?

b) Para $A = \{1,\ 2,\ 3\}$ e $B = \{1,\ 2, \ldots,\ n\}$, quantas funções de *A* para *B* são crescentes, onde *n* é um número inteiro maior que zero?

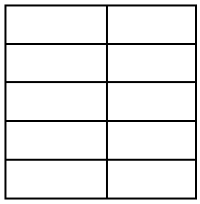
17.(IME/2006) Um grupo de nove pessoas, sendo duas delas irmãos, deverá formar três equipes, com respectivamente dois, três e quatro integrantes. Sabendo que os dois irmãos não podem ficar na mesma equipe, o número de equipes que podem ser organizadas é?

18.(IME/2014) Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos e diz que pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode se organizar para fazer o teste? (por exemplo, uma turma de 3 pode se organizar de 4 formas, e uma uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas)

19.(IME/2017) Um hexágono é dividido em 6 triângulos equiláteros. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 6 em cada triângulo, sem repetição, de maneira que a soma dos números em três triângulos adjacentes seja sempre múltiplo de 3? Soluções obtidas por rotação ou reflexão são diferentes, portanto as figuras abaixo mostram duas soluções distintas.



20.(IME/2008) Considere 10 carros A1,A2,B1,B2,,,,E1,E2 carros com a mesma letra são da mesma equipe. De quantos modos podemos colocá-los nos 10 espaços da figura abaixo de modo que em cada lugar fique somente um carro e carros da mesma equipe não podem estar emparelhados.



PROBLEMAS DE FIXAÇÃO 4

1.(ITA/1980) O número de soluções inteiras e não negativas da equação $x+y+z+w=5$ é:

a) 36 b) 48 c) 52 d) 54 e) 56

2.(ITA/1983) Um general possui *n* soldados para tomar uma posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois grupos, um frontal com *r* soldados e outro da retaguarda com *s* soldados $(r+s=n)$, ele poderá dispor seus homens de:

a) $\dfrac{n!}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.

b) $\dfrac{n!}{r!s!}$ maneiras distintas neste ataque.

c) $\dfrac{n!}{(rs)!}$ maneiras distintas neste ataque.

d) $\dfrac{2(n!)}{(r+s)!}$ maneiras distintas neste ataque.

e) $\dfrac{2(n!)}{r!s!}$ maneiras distintas neste ataque.

3.(ITA/1987) Quantos números de 3 algarismo distintos podemos formar, empregando os caracteres 1, 3, 5, 6, 8 e 9?

a) 60 b) 120 c) 240
d) 40 e) 80

4.(ITA/1987) O números de arranjos de $n+2$ objetos tomados cinco a cinco vale 180*n*. Nestas condições, concluímos que:
a) *n* é um número ímpar. b) *n* é um número primo.
c) *n* está compreendido entre 100 e 200.
d) *n* é um número par. e) *n* é divisível por 5.

5.(ITA/1988) Considere (P) um polígono regular de *n* lados. Suponha que os vértices de (P) determinam 2*n* triângulos, cujos lados não são lados de (P). O valor de *n* é:
a) 6 b) 8 c) 10 d) 20 e) Não existe um polígono regular com esta propriedade

6.(ITA/1991) Uma escola possui 18 professores sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada uma contenha exatamente 5 professores de Matemática, no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química?
a) 875 b) 1.877 c) 1.995
d) 2.877 e) n.d.a.

7. (ITA/1993) Possuo 3 vasos idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos vasos tenha 7 rosas e os outros dois no mínimo 5. Cada um deverá ter, 2 rosas vermelhas e 1 amarela, pelo menos. Quantos arranjos distintos poderei fazer usando as 18 rosas?
a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 14

8.(ITA/1993) Analise as afirmações classificando-as em verdadeiras ou falsas:
I.O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que cada pessoa premiada receba no máximo um prêmio é 21.
II.O número de maneiras que podemos distribuir 5 prêmios iguais a 7 pessoas de modo que 4 e apenas 4 sejam premiadas é 140.
III. Para todo natural *n*, $n \geq 5$, $\binom{n}{5} = \binom{n}{n-5}$.
Você concluiu que:
a) Apenas *I* é verdadeira b) apenas *II* e *III* são verdadeiras c) apenas *III* é verdadeira
d) Todas são verdadeiras e) Todas são falsas

9.(ITA/1994) Quantos anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham duas consoantes e que, entre as consoantes, haja pelo menos uma vogal?
a) 7.200 b)7.000 c)4.800
d)3.600 e)2.400

10.(ITA/1995) Considere todos os números de cinco algarismos formados pela justaposição de 1, 3, 5, 7 e 9 em qualquer ordem, sem repetição. A soma de todos esses números está entre:
a) 5×10^6 e 6×10^6 b) 6×10^6 e 7×10^6 c) 7×10^6 e 8×10^6
d) 9×10^6 e 10×10^6 e) 10×10^6 e 11×10^6

11.(ITA/1996) Três pessoas, *A*, *B* e *C*, chegam no mesmo dia a uma cidade onde há cinco hotéis H_1, H_2, H_3, H_4 e H_5. Sabendo que cada hotel tem pelo menos três vagas, qual/ quais das seguintes afirmações, referentes à distribuição das três pessoas nos cinco hotéis, é/são correta(s)?
I.Existe um total de 120 combinações.
II.Existe um total de 60 combinações se cada pessoa pernoitar num hotel diferente.
III.Existe um total de 60 combinações se duas e apenas duas pessoas pernoitarem no mesmo hotel.
a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Apenas a afirmação (*I*) é verdadeira.
c) Apenas a afirmação (*II*) é verdadeira.
d) Apenas as afirmações (*I*) e (*III*) são verdadeiras.
e) Apenas as afirmações (*II*) e (*III*) são verdadeiras.

12.(ITA/1998) O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:
a)12! b)(8!)(5!) c)12!- (8!)(5!)
d)12!- 8! e)12!- (7!)(5!)

13.(ITA/1999) Listando-se em ordem crescente todos os números de cinco algarismos distintos, formados com os elementos do conjunto $\{1, 2, 4, 6, 7\}$, o número 62417 ocupa o n-ésimo lugar. Então *n* é igual a:
a) 74 b) 75 c) 79
d) 81 e) 92

14.(ITA/2000) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144 b) 180 c) 240
d) 288 e) 360

15.(ITA/2003) Considere o conjunto $S=\left\{(a,b)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : a+b=18\right\}$. A soma de todos os números da forma $\frac{18!}{a!b!}$, $\forall(a.b)\in S$, é:

a) 8^6 b) $9!$ c) 9^6
d) 12^6 e) $12!$

16.(ITA/2003) O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:
a) 24 b) 36 c) 48 d) 54
e) 72 nula

17.(ITA/2004) Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?
a) 210 b) 315 c) 410
d) 415 e) 521

18.(ITA/2006) Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

a) $4^4\cdot 30$ **b)** $4^3\cdot 60$ **c)** $5^3\cdot 60$
d) $\binom{7}{3}\cdot 4^3$ **e)** $\binom{10}{7}$

19.(ITA/2006) Considere *A* um conjunto não vazio com um número finito de elementos. Dizemos que:

$F=\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m\}\subset P(A)$ é uma **partição de** *A* se as seguintes condições são satisfeitas:

I. $A_i\neq\varnothing$, $i=1, 2, \ldots, m$
II. $A_i\cap A_j=\varnothing$, se $i\neq j$, para $i, j=1, 2, \ldots, m$
III. $A=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_m$.

Dizemos ainda que *F* é uma partição de ordem *k* se $n(A_i)=k$, $i=1, 2, \ldots, m$

Supondo que $n(A)=8$, determine
a) As ordens possíveis para uma partição de A.
b) O número de partições de A que tem ordem 2.

20.(ITA/2012) Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a:

a) 6. b) 8. c) 10. d) 12. e) 14.

21.(ITA/2013) Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando até 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

22. (IME/1966) De quantas maneiras 3 rapazes e 2 moças podem ocupar 7 cadeiras em fila, de modo que as moças sentem juntas uma das outras, e os rapazes juntos uns dos outros?

23.(IME 1972) Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5. Uma das permutações possíveis destes algarismos origina o número 42351. Determine a soma dos números formados, quando os algarismos acima são permutados de todos os modos possíveis.

24.(IME/1979) Um elevador com 7 pessoas parte do andar térreo de um prédio e faz 4 paradas em andares diferentes. Determinar de quantas maneiras diferentes, todas aquelas 7 pessoas podem desembarcar até a 4ª parada.

25.(IME/1981) O professor Sah Bido quer oferecer jantares para 3 alunos de cada vez. O professor tem 7 alunos e quer oferecer 7 jantares, com a restrição de que um mesmo par de alunos não pode ser convidado para mais de um jantar, isto é, se os alunos *A*, *B* e *C* comparecerem a um jantar, então a presença do aluno *A*, por exemplo, em outro jantar, impedirá a presença de *C* ou de *B* neste jantar. Chamando-se de programa a um conjunto de 7 jantares nas condições especificadas, pergunta-se: quantos programas diferentes poderão ser formados?

26.(IME/1982) Dado o número: $m=2^4\times 3^3\times 5^2$, determine quantos números inteiros positivos não maiores que m são primos relativos com m.

27.(IME/1984) Dois clubes do Rio de Janeiro participaram de um campeonato nacional de futebol de salão onde cada vitória valia um ponto, cada empate meio ponto e cada derrota zero ponto. Sabendo que cada participante enfrentou todos os outros apenas uma vez, que os clubes do Rio de Janeiro totalizaram, em conjunto, oito pontos e que cada um dos outros clubes alcançou a mesma quantidade k de pontos, determine a quantidade de clubes que participou do torneio.

28.(IME/1989) Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo e em cada círculo marcam-se n pontos. Unindo-se estes pontos,

a)Quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas?

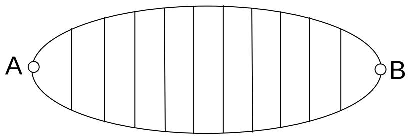
b)Quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados?

c)Quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados?

d)Quantos tetraedros, com todos os vértices em faces diferentes, podem ser formados?

Obs: Suponha que, se 4 pontos não pertencem a uma mesma face, então não são coplanares.

29.(IME/1990) Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão dupla ligam as duas estradas principais, como mostra a figura. Quantos caminhos, sem auto interseções, existem de A até B?



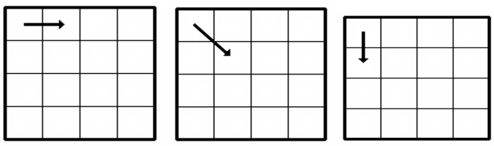
Obs: Caminho sem auto interseções é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.

30.(IME/1990) Dado o conjunto $A=\{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ 102\}$, pede-se o número de subconjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

31.(IME/1991) Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7.

32.(IME/1993) Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas as suas diagonais são traçadas, não há mais de duas diagonais se interceptando no mesmo ponto. Quantos pontos de interseção (de diagonais) existem neste octógono?

33.(IME/1995) É dado um tabuleiro quadrado 4x4. Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são os representados pelas setas:



De quantas maneiras isso é possível?

34.(IME/1997) Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e apenas um, do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens. **Observação: A ordem dos homens de cada lado distingue a tripulação.**

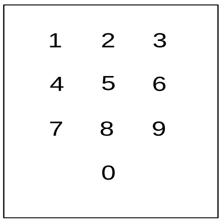
35.(IME/2000) Um comandante de companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas elas são formadas pelo mesmo número de homens. Cada homem participa de exatamente duas patrulhas. Cada duas patrulhas têm somente um homem em comum. Determine o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

36.(IME/2001) Calcule a soma dos números entre 200 e 500 que são múltiplos de 6 ou de 14, mas não simultaneamente múltiplos de ambos.

37.(IME/2004) O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:

• a senha utilizada possui 4 dígitos;
• o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
• o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.



Teclado numérico

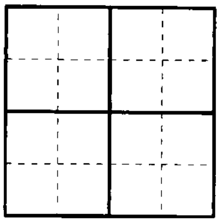
38.(IME/2006) Considere o conjunto formado por *m* bolas pretas e *n* bolas brancas. Determine o número de sequências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as *m*+*n* bolas.

39.(IME/2007) De quantas maneiras *n* bolas idênticas podem ser distribuídas em três cestos de cores verde, amarelo e azul?

40.(IME/2008) A figura abaixo é composta de 16 quadradinhos menores.De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1,2,3 e 4, de modo que um número não pode aparecer duas vezes em:

i)Uma mesma linha**ii)**Uma mesma coluna

iii) Cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas



GABARITO

1) E	11) E	21) 36	31) 180
2) B	12) C	22) 144	32) 70
3) B	13) D	23) 399960	33) 63
4) D	14) A	24) 4^7	34) 5760
5) B	15) A	25) 151200	35) 55 e 10
6) D	16) C	26) 2880	36) 20196
7) B	17) A	27) 9 OU 16	37) 171
8) D	18) A	28) *	38) *
9) A	19) A) 1,2,4,8 B) 105	29)20148	39) $\binom{n+2}{2}$
10) A	20) D	30) 57256	40) 288

38)

$$s(m,n)=\begin{cases}\phi(\frac{m}{2},\frac{n}{2}), & \text{se } m \text{ e } n \text{ são pares}\\ \phi(\frac{m}{2},\frac{n-1}{2}), & \text{se } m \text{ é par e } n \text{ é ímpar}\\ \phi(\frac{m-1}{2},\frac{n}{2}), & \text{se } m \text{ é ímpar e } n \text{ é par}\\ 0, & \text{se } m \text{ e } n \text{ são ímpares}\end{cases}$$

$$\phi(a,b)=C^a_{a+b}=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

SUGESTÕES E/OU SOLUÇÕES

5) Solução: O número de triângulo cujos vértices são vértices do polígono (P) é $C_{n.3}$. Destes, o total de triângulos que não convém é [n(n - 2) - n] pois:
n(n - 2): número de triângulos com ao menos um lado no polígono (P).
n: número de triângulos com dois lados coincidindo com lados do polígono. (contados portanto duas vezes em n(n - 2)).

Daí:
$C_{n.3}$ - [n(n-2) - n] = 2n

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-[n^2-3n]=$$

2n isto é: $n(n^2 - 9N + 8) = 0$ $\begin{cases} n=0(não convém)\\ n=1(não convém)\\ n=8\end{cases}$

6) Solução: Alternativa (**d**)
M = número de professores de Matemática
Q = número de professores de Química
F = número de professores de Física
N = número de professores de outras matérias
P = número de possibilidades de escolha

M	F	Q	N	P
5	2	0	5	$C_{7,5} . C_{3,2} . C_{4,0} . C_{4,5} = 0$
5	2	1	4	$C_{7,5} . C_{3,2} . C_{4,1} . C_{4,4} = 252$
5	2	2	3	$C_{7,5} . C_{3,2} . C_{4,2} . C_{4,3} = 1512$
5	3	0	4	$C_{7,5} . C_{3,3} . C_{4,0} . C_{4,4} = 21$
5	3	1	3	$C_{7,5} . C_{3,3} . C_{4,1} . C_{4,3} = 336$
5	3	2	2	$C_{7,5} . C_{3,3} . C_{4,2} . C_{4,2} = 756$

O número total de comissões é 2 877
7) Solução: Alternativa (**b**)
As 18 rosas devem ser distribuídas entre os vasos, o primeiro com 7 rosas, o segundo com 6 e o terceiro com 5. Cada um deve ter 2 vermelhas e 1 amarela, sobrando,

portanto,4 vermelhas e 5 amarelas para completar os arranjos florais. Se x, y e z são as quantidades de rosas vermelhas a serem colocadas no 1º, 2º e 3º vasos, respectivamente, então o número de possibilidades é o número de soluções naturais da equação x + y + z = 4. O número de soluções desta equação é $C_{4+3-1,\,3-1} = C_{6,\,2}$ $= \dfrac{6\,.\,5}{2} = 15$.

Entretanto, $y \le 3$ e $z \le 2$, o que elimina 2 possibilidades para z = 3, 1 possibilidade para z = 4 e 1 possibilidade para y = 4. Logo o número total de arranjos florais distintos é 15 – 4 = 11.

9) Solução:

Para formar tais anagramas devemos escolher duas consoantes dentre Q, M e D, o que podemos fazer de $\binom{3}{2}$ maneiras, e quatro vogais dentre A, E, I, O e U, o que podemos fazer de $\binom{5}{4}$ maneiras. Tendo escolhido os 6 caracteres distintos, podemos formar 6! anagramas com eles, mas em alguns as duas consoantes aparecerão juntas e devemos excluí-las de nossa contagem.

Como nestes anagramas as consoantes aparecem juntas, podemos considerar que elas formam um único símbolo e, portanto, existem 2 . 5! anagramas com esta propriedade (o 2 aparece porque as consoantes podem ser agrupadas de 2 maneiras, por exemplo: QM e MQ).

Logo, podemos formar $\binom{3}{2} \cdot \binom{5}{4} \cdot (6! - 2\,.\,5!) = 7\,200$ anagramas.

13) Solução:

Listando-se em ordem crescente tem-se
80 = 24 + 24 + 24 + 6 + 2 números anteriores a 62417
pois existem:

P_4 = 24 números da forma 7 _ _ _ _

P_4 = 24 números da forma 2 _ _ _ _

P_4 = 24 números da forma 4 _ _ _ _

P_3 = 6 números da forma 6 1 _ _ _

P_2 = 2 números da forma 6 2 1 _ _

Logo, 62417 é o 81º número.

15) Solução:

Alternativa: A

Do enunciado, temos: b = 18 – a, com a, b ∈ N e $\dfrac{18!}{a!b!} = \dfrac{18!}{a!(18-a)!} = \binom{18}{a}$

Assim, a soma pedida é dada por: $\sum_{a=0}^{18}\binom{18}{a} = 2^{18} \Rightarrow \boxed{\sum_{a=0}^{18}\binom{18}{a} = 8^6}$

16) Solução:

Alternativa: C

Sabemos que $17640 = 2^3.3^2.5^1.7^2$.

Assim, o total de divisores de 17640 que são divisíveis por 3 é dado por:

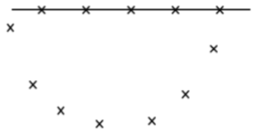
$$\underset{\substack{2^0\\2^1\\2^2\\2^3}}{\underline{4}} \cdot \underset{\substack{3^1\\3^2}}{\underline{2}} \cdot \underset{\substack{5^0\\5^1}}{\underline{2}} \cdot \underset{\substack{7^0\\7^1\\7^2}}{\underline{3}} = 48$$

Números de divisores positivos (ou só negativos) = 48

17) Solução:

Alternativa: A

Considere a figura representativa da situação:



Então:

$$C_{12,3} - C_{5,3} = \frac{12!}{3!9!} - \frac{5!}{3!2!} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}.11.10}{\cancel{3.2}.1} - \frac{5.\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{2}.1} = 220 - 10 = \boxed{210}$$

19) Solução:

(a) De acordo com as condições (II) e (III) podemos concluir que

$n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_m) = n(A)$.

Assim, para que $F = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ seja uma partição de ordem k devemos ter:

$\underbrace{k + k + \ldots + k}_{m \text{ vezes}} = 8$, ou seja, k é divisor de 8. Então, são 4 as possíveis ordens de F: $\boxed{1, 2, 4, 8}$.

(b) O número de partições distintas de A que têm ordem 2 é $\dfrac{C_8^2 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2 \cdot C_2^2}{4!} = \boxed{105}$.

20) Solução:

Alternativa: D

Sendo x, y e z os respectivos números de moedas de um, cinco e dez centavos, temos, da equação diofantina $x + 5y + 10z = 25$, que x é múltiplo de cinco.

Fazendo $x = 5k$, temos que encontrar o número de soluções naturais da equação $k + y + 2z = 5$.

Como $2z < 5$ e $z \in \mathbb{N}$ implicam $z \in \{0,\ 1,\ 2\}$, temos:

- para z = 0, que a equação k + y = 5 admite $C_{6,5} = 6$ soluções naturais;
- para z = 1, que a equação k + y = 3 admite $C_{4,3} = 4$ soluções naturais;
- para z = 2, que a equação k + y = 1 admite $C_{2,1} = 2$ soluções naturais.

Logo, há 6 + 4 + 2 = 12 maneiras diferentes de se trocar essa moeda.

21) Solução:

1º caso: Usando apenas uma cor.
Basta escolher a cor que será utilizada: 4 possibilidades.

2º caso: Usando apenas duas cores.
Escolha das cores: $C_{4,2} = 6$
Sejam A e B as cores escolhidas podemos ter:
AABB, AAAB, ABBB 3 possibilidades
Em todos os casos existe apenas uma maneira de formar o tetraedro, logo temos 6 . 3 = 18 possibilidades.

3º caso: Usando 3 cores.
Escolha das cores: $C_{4,3} = 4$
Escolha da cor que irá repetir: 3 possibilidades.
Existe apenas uma maneira de formar o tetraedro, logo, 3 . 4 . 1 = 12 possibilidades.

4º caso: $\dfrac{4!}{4\,.\,3}$ = 2 possibilidades (dividimos por 12 para descontar as rotações)

Total: 4 + 18 + 12 + 2 = 36.

25) Solução:

Nenhum aluno pode comparecer a mais de três jantares. Com efeito, se A_1 vai a um jantar com A_2 e A_3, ele só pode ir a outro jantar com outros dois estudantes, digamos A_4 e A_5 e só pode ir a um terceiro jantar em companhia de outros dois, digamos A_6 e A_7 e não terá companhia para ir ao quarto jantar. Como há 21convites e são 7 estudantes, cada estudante terá que comparecer exatamente 3 jantares.

Se A_1 comparece a três jantares, podemos escolher os seus companheiros dividindo os outros 6 estudantes em 3 grupos de 2, o que pode ser feito de $\frac{C_6^2\ X\ C_4^2\ X\ 1}{3!}$ = 15 modos.

Então, os 3 jantares são, digamos, $A_1A_2A_3$, $A_1A_4A_5$, $A_1A_6A_7$. A_2 deverá comparecer a mais dois jantares, nenhum deles em companhia de A_3, e A_3 também deverá comparecer a mais dois jantares. Portanto, os 4 jantares que faltam são:

A_2 ___ ___, A_2 ___ ___, A_3 ___ ___, A_3 ___ ___.

Como A_4 deve comparecer a mais dois jantares (A_4 não pode comparecer a ambos em companhia A_2 nem a ambos em companhia de A_3), esses quatro jantares são:

A_2 A_4 ___, A_2 ___ ___, A_3 A_4 ___, A_3 ___ ___;

A_5 tem que comparecer ainda a dois jantares, nenhum deles em companhia de A_4.

A_2A_4 ___, A_2A_5 ___, A_3 A_4 ___, A_3A_5 ___.Agora há duas possibilidades:

$A_2A_4A_6, A_2A_5A_7, A_3A_4A_7, A_3A_5A_6$ e $A_2A_4A_7, A_2A_5A_6, A_3A_4A_6, A_3A_5A_7$.

Há portanto 15 X 2 = 30 maneiras de escolher os grupos de convidados.Para distribuir os 7 grupos nos 7 dias, há 7! alternativas.

A resposta é 7! X30 = 151.200.

26)

Solução:
Existem $\frac{m}{2}$ múltiplos de 2, $\frac{m}{3}$ múltiplos de 3, $\frac{m}{5}$ múltiplos de 5, $\frac{m}{6}$ múltiplos de 2 e 3 simultaneamente, $\frac{m}{10}$ múltiplos de 2 e 5 simultaneamente, $\frac{m}{15}$ múltiplos de 3 e 5 simultaneamente e $\frac{m}{30}$ múltiplos de 2, 3 e 5 simultaneamente. Logo, o número N de primos com m são

$$N = m - \left(\frac{m}{2}+\frac{m}{3}+\frac{m}{5}\right) + \left(\frac{m}{6}+\frac{m}{10}+\frac{m}{15}\right) - \frac{m}{30} = \frac{8m}{30}$$

Assim, para $m = 2^4 \times 3^3 \times 5^2$, tem-se $N = 2880$.

27)

Solução:
Cada partida distribui sempre o total de 1 ponto. Logo, o número total de pontos do campeonato é igual ao número total de partidas realizadas ao longo do mesmo. Assim, seja N o número de clubes, têm-se

$$8+(N-2)k = \frac{N(N-1)}{2} \Rightarrow k = \frac{(N+1)}{2} - \frac{14}{2(N-2)}$$

Logo, $2(N-2)$ deve ser divisor de 28. Verificando as possibilidades, observamos que as únicas alternativas viáveis são

$$\begin{cases} 2(N-2) = 14 \Rightarrow N = 9 \Rightarrow k = 4 \\ 2(N-2) = 28 \Rightarrow N = 16 \Rightarrow k = 8 \end{cases}$$

de modo que $N = 9$ ou $N = 16$ clubes.

28)

Solução:

a) Cada um dos $6n$ pontos pode ser conectado a $5n$ pontos das demais faces para formar uma reta. Eliminando a redundância das retas AB e BA, tem-se um total de apenas $\frac{6n \times 5n}{2} = 15n^2$ possibilidades.

b) O total de triângulos possíveis é $\frac{6n\times(6n-1)\times(6n-2)}{6}$, onde o fator de $\frac{1}{6}$ elimina as permutações dos vértices. Deste total, $6 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ estão sobre uma mesma face. Assim, o total de triângulos não contidos numa mesma face é $[n(6n-1)(6n-2) - n(n-1)(n-2)] = 5n^2(7n-3)$.

c) Cada um dos $n(n-1)(n-2)$ em uma face pode ser conectado a $5n$ pontos das demais faces para compor o tetraedro, dando um total de $5n^2(n-1)(n-2)$ possíveis tetraedros.

d) Temos 15 combinações de 6 faces 4 a 4. Como cada face do cubo tem n pontos, o total de possibilidades aqui é $15n \times n \times n \times n = 15n^4$.

30)

Solução:
Sejam os subconjuntos auxiliares

$$A_1 = \{a_1\} = \{1, 4, 7, \ldots, 100\}$$
$$A_2 = \{a_2\} = \{2, 5, 8, \ldots, 101\}$$
$$A_3 = \{a_3\} = \{3, 6, 9, \ldots, 102\}$$

cada um com 34 elementos. Os subconjuntos desejados devem ser necessariamente dos tipos

$$\{a_1, a_1', a_1''\} : \frac{34 \times 33 \times 32}{6} = 5984 \text{ possibilidades}$$
$$\{a_2, a_2', a_2''\} : \frac{34 \times 33 \times 32}{6} = 5984 \text{ possibilidades}$$
$$\{a_3, a_3', a_3''\} : \frac{34 \times 33 \times 32}{6} = 5984 \text{ possibilidades}$$

31)

Solução:
Há um total de $6 \times 7 \times 7$ possíveis números de três algarismos na base 7, assumindo que o algarismo da "centena" não possa ser 0. Destes, há 6 possibilidades de números do tipo aaa, com $a = 1,2,3,4,5,6$. Além disto, há ainda 6×6 possibilidades de números para cada tipo abb, aba e aab, com $a = 1,2,3,4,5,6$ e $b = 0,1,2,3,4,5,6,7 - \{a\}$. Logo, o número desejado é

$$294 - 6 - 36 - 36 - 36 = 180$$

sln: Se a "centena" puder ser 0, o total sobe para 210.

32) Solução: Vamos generalizar o problema para um polígono convexo de n lados, tendo como vértices os pontos A_1, A_2, A_3, ... , A_n. Seja $\boldsymbol{A}$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n\}$ com cardinalidade 4. Pela convexidade do polígono cada 4 vértices determinam um quadrilátero também convexo, cujo as diagonais interceptam-se num ponto interior do polígono. Seja $\boldsymbol{D}$ o conjunto dos pontos de interseção das diagonais. Podemos afirmar que a função que associa a cada subconjunto que é elemento de $\boldsymbol{A}$, a interseção de suas diagonais é uma bijeção de $\boldsymbol{A}$ em $\boldsymbol{D}$. De fato, a função é injetora pois não há 3 diagonais interceptando-se no mesmo ponto e também é evidentemente sobrejetora. Logo $n(D) = n(A) = \binom{n}{4}$.

Em particular se $n = 8$, então $n(D) = \binom{8}{4} = 70$.

33)Solução:
Vamos inicialmente nomear cada movimento
Movimento na linha: ***L***; Movimento na diagonal: ***D***; Movimento na coluna: ***C***

- Se não usarmos movimentos do tipo ***D***, teremos que usar três movimentos do tipo ***L*** e três movimentos do tipo ***C,LLLCCC.*** De onde temos $P_6^{3,3}=\dfrac{6!}{3!\cdot 3!}=20$.

- Se usarmos um movimento do tipo ***D***, teremos que usar dois movimentos do tipo ***L*** e dois movimentos do tipo ***C***, ***DLLCC.*** De onde temos $P_5^{2,2}=\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$
- Se usarmos dois movimentos do tipo ***D***, teremos que usar um movimento do tipo ***L*** e um movimento do tipo ***C***, ***DDLC.*** De onde temos $P_4^{2}=\dfrac{4!}{2!}=12$.
- Se usarmos três movimentos do tipo ***D***, já é suficiente e não precisaremos usar nenhum outro tipo de movimento, ***DDD.*** De onde temos $P_3^{3}=\dfrac{3!}{3!}=1$.Logo, a resposta é $20+30+12+1=63$ maneiras.

34) Solução:
Número de modos de sentar o remador que só rema do lado esquerdo: 4 possibilidades.
Número de modos de sentarem os remadores que só remam do lado direito: $4\cdot 3=12$ possibilidades.
Número de modos de sentarem os outros remadores: $5!=120$ possibilidades. Total: $4\cdot 12\cdot 120=5760$

35) Solução:
Basta interpretar cada homem como uma diagonal ou lado de um undecágono e cada vértice do polígono como sendo uma patrulha. Logo, teremos $C_{11}^2=55$ voluntários. Como em cada vértice chegam exatamente 10 diagonais ou lados são 10 integrantes por patrulha.

36) Solução:
a) 204, 210, ... , 498

Temos, então: $n_1=50$ e $S_1=\dfrac{(204+498)\cdot 50}{2}=17550$

b) 210, 224, ... , 490

Temos, então: $n_1=21$ e $S_2=\dfrac{(210+490)\cdot 21}{2}=7350$

c) 204, 252, ... , 462

Temos, então: $n_1=7$ e $S_3=\dfrac{(210+462)\cdot 7}{2}=2352$

Portanto $S=S_1+S_2-2S_3=20196$

37)Solução: O primeiro e o último dígito estão na segunda, terceira ou quarta linha.
Caso 1: Se o primeiro e o último estiverem na última linha, só temos uma possibilidade para eles (iguais a zero); como o segundo e o terceiro encontram-se na linha imediatamente superior, temos 3 possibilidades para o segundo dígito e 3 para o terceiro, Neste caso temos 1 × 3 × 3 = 9 senhas possíveis.
Caso 2: Se o primeiro e o último dígitos estiverem na terceira linha, temos 3 modos de escolhermos o primeiro dígito e 3 modos de escolhermos o último dígito; o segundo e o terceiro encontram-se na segunda linha, com 3 possibilidades para o segundo dígito e 3 para o terceiro. Neste caso temos 3 × 3 × 3 × 3 = 81 senhas possíveis.Caso 3: Se o primeiro e o último dígitos estiverem na segunda linha, temos 3 modos de escolhermos o primeiro dígito e 3 modos de escolhermos o último dígito; o segundo e o terceiro encontram-se na primeira linha, com 3 possibilidades para o segundo dígito e 3 para o terceiro. Neste caso temos 3 × 3 × 3 × 3 = 81 senhas possíveis.
Logo, o total de senhas é 9 + 81 + 81 = 171.

38)

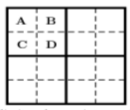
Solução:
Seja $\phi(a,b)$ o número de seqüências distintas, não necessariamente simétricas, que podem ser formadas com a bolas pretas e b bolas brancas, ou seja

$$\phi(a,b)=C_{a+b}^{a}=\frac{(a+b)!}{a!\,b!}$$

Para seqüências simétricas, a primeira parte da seqüência, determina exatamente (por simetria, é claro) a composição da segunda parte da mesma. Se o número total de bolas é ímpar, a bola central deve ser da cor que tem um número ímpar de bolas. Se o número total de bolas é par, m e n devem ser simultaneamente pares para ser possível formar seqüências simétricas. Assim, o número desejado de seqüências simétricas é dado por

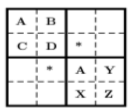
$$s(m,n)=\begin{cases}\phi(\frac{m}{2},\frac{n}{2}), & \text{se } m \text{ e } n \text{ são pares}\\ \phi(\frac{m}{2},\frac{n-1}{2}), & \text{se } m \text{ é par e } n \text{ é ímpar}\\ \phi(\frac{m-1}{2},\frac{n}{2}), & \text{se } m \text{ é ímpar e } n \text{ é par}\\ 0, & \text{se } m \text{ e } n \text{ são ímpares}\end{cases}$$

40) Solução: Começamos preenchendo o quadrado supeior esquerdo. Temos 4! Modos de fazer isso, obrendo uma configuração com abaixo:



Em seguida, preenchemos o quadrado inferior direito, do seguinte modo:

- escolhemos a posição do A. Temos 4 possibilidades.
- se dois números estão numa mesma linha do quadrado inicial, eles não poderão estar numa mesma coluna do segundo quadrado. Dessa forma, se X e Y são os vizinhos de A, como indicado no diagrama, devemos ter X ≠ B e Y ≠ C (se X = B ou Y = C, as casas marcadas com ∗ não poderão ser preenchidas).



Escolhida a posição de A no quadrado inferior direito, temos 3 possibilidades de preencher suas casas restantes, que correspondem às 3 escolhas possíveis do número que ficará na posição Z:

Uma vez que estes dois primeiros quadrados estão preenchidos, temos 1 modo de preencher as casas restantes. Logo, temos $4!\cdot 4\cdot 3\cdot 1=288$ modos de resolver o problema.