Luiz Roberto Dante

PROJETO MÚLTIPLO

Caderno de Estudo

Matemática

Ensino Médio

VOLUME 3

editora ática

PROJETO MÚLTIPLO

Caderno de Estudo

Matemática

Ensino Médio

Luiz Roberto Dante

Livre-docente em Educação Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP.
Doutor em Psicologia da Educação: Ensino da Matemática, pela PUC – São Paulo.
Mestre em Matemática pela USP.
Pesquisador em ensino e aprendizagem da Matemática pela Unesp – Rio Claro, SP.
Ex-professor da rede estadual do Ensino Fundamental e Médio – São Paulo.
Autor de vários livros, entre os quais: *Formulação e resolução de problemas de Matemática – Teoria e prática; Didática da Matemática na pré-escola; Projeto Ápis – Matemática* (1º ao 5º ano); *Projeto Teláris Matemática* (6º ao 9º ano); *Projeto Voaz Matemática* (Ensino Médio – volume único); *Matemática – Contextos & Aplicações* (Ensino Médio – volume único).

editora ática

editora ática

Diretoria editorial: Lidiane Vivaldini Olo
Editoria de Ciências Exatas: Cármen Matricardi
Editoras: Monique Matos de Oliveira,
Cibeli de Oliveira Chibante Bueno, Letícia Mancini Martins (estag.)
Colaboradora editorial: Pamela Hellebrekers Seravalli
Supervisor de arte e produção: Sérgio Yutaka
Supervisor de arte e criação: Didier Moraes
Coordenadora de arte e criação: Andréa Dellamagna
Editor de arte: André Gomes Vitale
Diagramação: Wander Camargo
Design gráfico: UC Produção Editorial, Andréa Dellamagna (miolo e capa)
Gerente de revisão: Hélia de Jesus Gonsaga
Equipe de revisão: Rosângela Muricy (coord.), Ana Paula Chabaribery
Malfa, Claudia Virgilio, Luís Maurício Boa Nova; Flávia Venézio
dos Santos e Gabriela Macedo de Andrade (estags.)
Supervisor de iconografia: Sílvio Kligin
Pesquisadora iconográfica: Cláudia Bertolazzi
Tratamento de imagem: Cesar Wolf e Fernanda Crevin
Foto da capa: Gareth Byrne/Alamy/Glow Images
Grafismos: Shutterstock/Glow Images
Ilustrações: Theo Szczepansk

Direitos desta edição cedidos à Editora Ática S.A.
Av. das Nações Unidas, 7221, 3º andar, setor C
Pinheiros – São Paulo – SP
CEP 05425-902
Tel.: 4003-3061
www.atica.com.br/editora@atica.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Dante, Luiz Roberto
Projeto Múltiplo: Matemática : ensino médio /
Luiz Roberto Dante. -- São Paulo : Ática, 2014.

Obra em 3 v.

1. Projeto Múltiplo: Matemática (Ensino médio)
I. Título.

14-02256 CDD-510.7

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

2014
ISBN 978 85 08 16751-7 (AL)
ISBN 978 85 08 16752-4 (PR)
Código da obra CL 737771
CAE 501241 (AL)
CAE 501242 (PR)
1ª edição
1ª impressão

Impressão e acabamento

Uma publicação Abril EDUCAÇÃO

Apresentação

O Ensino Médio é a época na qual a maioria dos adolescentes faz uma escolha que os acompanhará por toda a vida: a da profissão que desejam seguir.

Além da profissão, a escolha da universidade também é um fator decisivo para o seu futuro sucesso profissional. E para que você tenha um bom desempenho no exame vestibular da universidade que escolher, além de conhecer muito bem todo o conteúdo do Ensino Médio, você deve ter uma ótima habilidade em resolver exercícios. Por esse motivo, este caderno reúne mais de 200 questões das mais renomadas universidades do país, questões de níveis complexos, que, no todo, representam um momento único de preparação para o vestibular. Para auxiliá-lo com as resoluções, cada sequência de exercícios de um mesmo tema é precedida por quadros-resumos que sintetizam os principais tópicos do conteúdo.

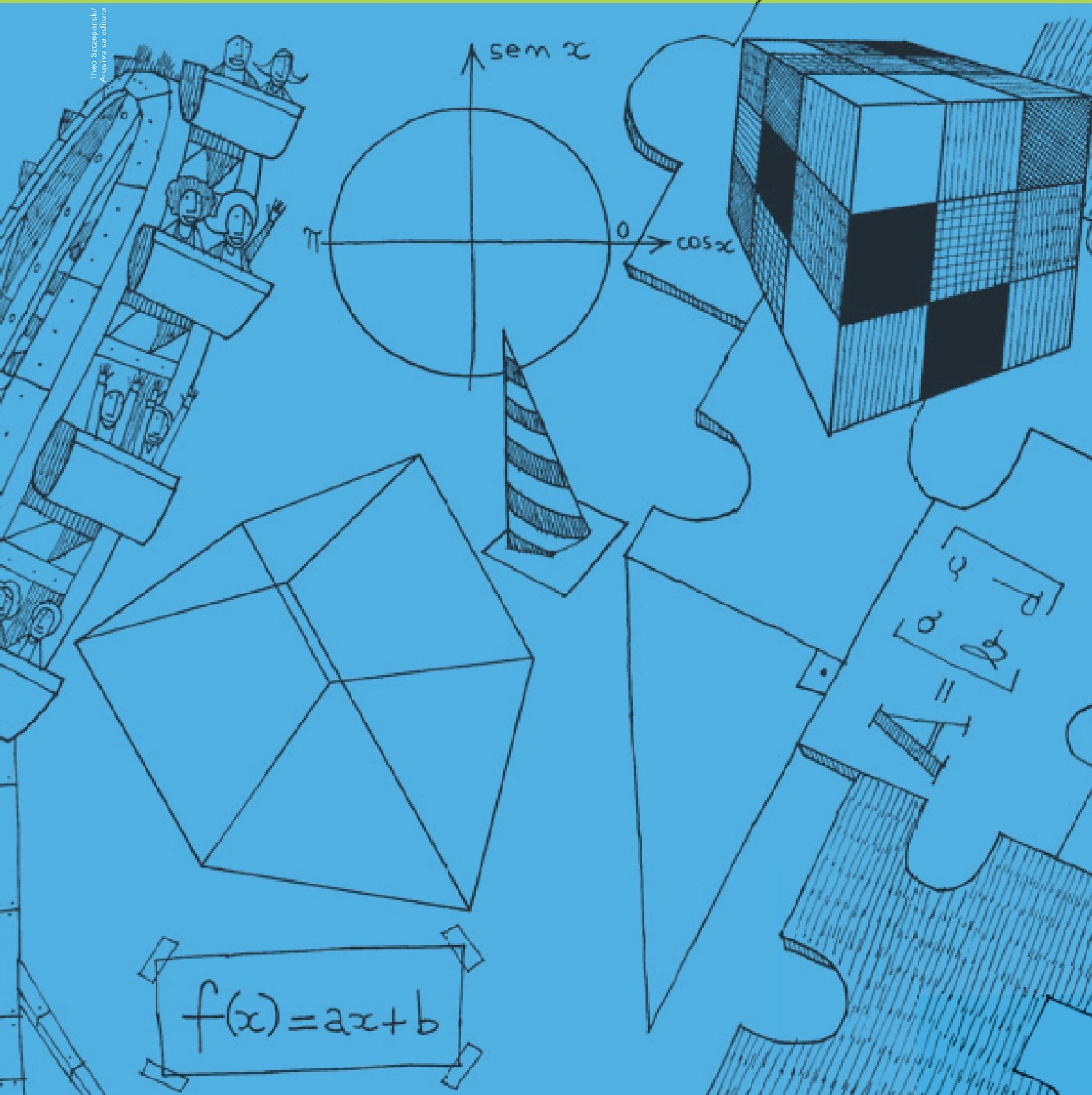
Encare o período de estudo com este caderno como oportunidade de aperfeiçoar sua capacidade de resolver exercícios de forma rápida e segura.

Utilize este caderno como um instrumento de aperfeiçoamento de suas habilidades e não desista dos seus sonhos.

Boa sorte!

Sumário

Vestibular em foco



Theo Szczepanski/ Arquivo da editora

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Revisão

Razão

A razão entre dois números reais a e b, com $b \neq 0$, é o quociente $a : b$, também representado por $\frac{a}{b}$ ou qualquer outra forma equivalente.

Razões especiais

- Porcentagem
- Escala
- Densidade demográfica

Razões equivalentes

Duas razões são **equivalentes** se, ao serem escritas na forma **irredutível**, elas resultam em um mesmo número.

Proporção

Se a razão entre os números a e b é igual à razão entre os números c e d, dizemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ é uma proporção.

Propriedade fundamental das proporções

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Grandezas proporcionais

Duas grandezas são **proporcionais** quando, ao multiplicarmos uma delas por um número, a outra fica **multiplicada** ou **dividida** pelo mesmo número. Elas podem ser classificadas por:

- grandezas diretamente proporcionais;
- grandezas inversamente proporcionais.

Regra de três

A regra de três pode ser utilizada na resolução de um problema envolvendo a comparação de duas ou mais grandezas proporcionais.

Regra de três simples

Utilizada na resolução de problemas envolvendo apenas duas grandezas.

Regra de três composta

Utilizada na resolução de problemas envolvendo mais de duas grandezas que, tomadas duas a duas, são direta ou inversamente proporcionais.

Porcentagem

É uma forma usada para indicar uma fração de denominador 100. Para representar uma porcentagem $\frac{x}{100}$ usamos a notação $x\%$.

Fator de atualização (f)

É a razão entre dois valores de uma grandeza em tempos diferentes (passado, presente ou futuro).

Aumentos e descontos

$$f = \frac{\text{valor novo}}{\text{valor velho}}$$

- $f > 1 \rightarrow$ aumento
- $f < 1 \rightarrow$ desconto
- $f = 1 \rightarrow$ não houve alteração

$f = 1 + i$

Aumentos e descontos sucessivos

$f_{\text{acumulado}} = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot \ldots$

Termos importantes

- C: capital
- M: montante
- j: juros
- i: taxa de juros
- t: tempo

Juros simples

$j = C \cdot i \cdot t$ e $M = C + j$

Juros compostos

$M = C(1 + i)^t$ e $j = M - C$

Exercícios

1. (UFPE) A população de pobres de um certo país, em 1981, era de 4 400 000, correspondendo a 22% da população total. Em 2001, este número aumentou para 5 400 000, correspondendo a 20% da população total. Indique a variação percentual da população do país no período.

A população em 1981 era de:

$$x \cdot \frac{22}{100} = 4\,400\,000 \Rightarrow x = 20\,000\,000$$

A população em 2001 era de:

$$y \cdot \frac{20}{100} = 5\,400\,000 \Rightarrow y = 27\,000\,000$$

Logo, a variação foi de:

$$\frac{y - x}{y} = \frac{7}{20} = 0{,}35 = 35\%$$

Resposta: 35%.

---

2. (Vunesp-SP) Os professores de Matemática e Educação Física de uma escola organizaram um campeonato de damas entre os alunos. Pelas regras do campeonato, cada colocação admitia apenas um ocupante. Para premiar os três primeiros colocados, a direção da escola comprou 310 chocolates, que foram divididos entre os 1º, 2º e 3º colocados no campeonato, em quantidades inversamente proporcionais aos números 2, 3 e 5, respectivamente. As quantidades de chocolates recebidas pelos alunos premiados, em ordem crescente de colocação no campeonato, foram:

a) 155, 93 e 62.
b) 155, 95 e 60.
c) 150, 100 e 60.
d) 150, 103 e 57.
e) 150, 105 e 55.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 310 \Rightarrow \frac{15x + 10x + 6x}{30} = 310 \Rightarrow x = 300$$

Então:

- 1º lugar: $\frac{x}{2} = \frac{300}{2} = 150$
- 2º lugar: $\frac{x}{3} = \frac{300}{3} = 100$
- 3º lugar: $\frac{x}{5} = \frac{300}{5} = 60$

Logo, os primeiros colocados receberam 150, 100 e 60 chocolates.

Resposta: alternativa **c**.

3. (IFMG) Um tanque possui duas torneiras, sendo uma de entrada, que o enche em 5 horas, e outra de saída, que o esvazia em 7 horas. Supondo que esse tanque esteja totalmente vazio e que as torneiras sejam abertas, ao mesmo tempo, às 15 horas, então, ele ficará totalmente cheio às:

a) 8h 30min. b) 8h 50min. c) 20h 30min. d) 20h 50min.

Torneira de entrada enche $\frac{1}{5}$ do tanque por hora e a torneira de saída esvazia $\frac{1}{7}$ do tanque por hora. Logo, cada hora enche $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$ do tanque.

O tanque ficará cheio em uma hora h, tal que $h\left(\frac{2}{35}\right) = 1$ (total). Então:

$\frac{2h}{35} = 1 \Rightarrow h = 17{,}5$ horas

Somando a quantidade de horas obtidas à hora inicial, obtemos a hora em que o tanque ficará completamente cheio. Então:
hora final = hora inicial + hora de enchimento $\Rightarrow H = 15 + 17{,}5 = 32{,}5$
Sabendo que 0,5 de hora corresponde a 30 min e que 32 horas = 24 horas + 8 horas, chegamos à conclusão de que o tanque ficará completamente cheio às 8h 30min.
Resposta: alternativa **a**.

4. (Unicamp-SP) Considere três modelos de televisores de tela plana, cujas dimensões aproximadas são fornecidas na tabela abaixo, acompanhadas dos preços dos aparelhos.

Modelo	**Largura** (cm)	**Altura** (cm)	**Preço** (R$)
23″	50	30	750,00
32″	70	40	1 400,00
40″	90	50	2 250,00

Com base na tabela, pode-se afirmar que o preço por unidade de área da tela:

a) aumenta à medida que as dimensões dos aparelhos aumentam.

b) permanece constante do primeiro para o segundo modelo, e aumenta do segundo para o terceiro.

c) aumenta do primeiro para o segundo modelo, e permanece constante do segundo para o terceiro.

d) permanece constante.

Calculando o preço de cada aparelho por unidade de área da tela, temos:

- modelo 23″ $= \frac{750}{50 \cdot 30} = 0{,}5$
- modelo 32″ $= \frac{1\,400}{70 \cdot 40} = 0{,}5$
- modelo 40″ $= \frac{2\,250}{90 \cdot 50} = 0{,}5$

Logo, concluímos que as razões permanecem constantes.
Resposta: alternativa **d**.

5. (PUC-SP) Duas máquinas, m_1 e m_2, foram disponibilizadas para tirar x cópias de um documento. Suponha que, se operarem juntas, em 10 horas de funcionamento elas serão capazes de tirar $\frac{5}{6}$ das x cópias pretendidas, enquanto que, operando sozinha, m_1 levará 3 horas para tirar $\frac{x}{5}$ cópias. Assim sendo, quantas horas m_2 levará para, sozinha, tirar $\frac{1}{3}$ das x cópias?

a) 24 b) 20 c) 18 d) 15 e) 12

- $m_1 + m_2 = \frac{5x}{6}$ (em 10 horas)
- $m_1 = \frac{x}{5}$ (em 3 horas)
- $m_2 = \frac{x}{6}$ (em z horas)

Se m_1 faz $\frac{x}{5}$ em 3 horas, ela fará y em 10 horas. Então:

$$\begin{array}{lcl} \frac{x}{5} & — & 3 \text{ horas} \\ y & — & 10 \text{ horas} \end{array} \Rightarrow y = \frac{2x}{3}$$

Mas:

$m_1 + m_2 = \frac{5x}{6} \Rightarrow \frac{2x}{3} + m_2 = \frac{5x}{6} \Rightarrow m_2 = \frac{x}{6}$

Se m_2 faz $\frac{x}{6}$ em 10 horas, ela fará $\frac{x}{3}$ em z horas. Logo:

$$\begin{array}{lcl} \frac{x}{6} & — & 10 \text{ horas} \\ \frac{x}{3} & — & z \end{array} \Rightarrow z = 20\text{h}$$

Resposta: alternativa **b**.

6. (Acafe-SC) "Infelizmente, durante a ocupação do Brasil, a maior parte de sua vegetação, principalmente na região sudeste, foi sendo derrubada para a extração da madeira e, depois, plantio de diversas culturas como o café. [...] A saída então, uma vez que não podemos voltar no tempo e reverter a situação, é tentar recuperar a região devastada através do reflorestamento. E zelar para que ninguém mais destrua."

Disponível em: <www.infoescola.com/ecologia/reflorestamento>. Acesso em: 30 abr. 2011.

Suponha que trinta agricultores reflorestam uma área de três hectares em 16 horas de trabalho. Quantos agricultores são necessários, no mínimo, para que uma área de quatro hectares seja reflorestada em 10 horas de trabalho?

a) 50 b) 46 c) 84 d) 64

agricultores		hectares		horas
30	—	3	—	16
x	—	4	—	10

$\frac{30}{x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{16} \Rightarrow \frac{30}{x} = \frac{15}{32} \Rightarrow x = 64$

Resposta: alternativa **d**.

7. (Uece) Lúcia comprou um vestido pagando em duas prestações mensais, sendo a primeira de R$ 119,34, paga um mês após a compra, e a segunda de R$ 260,10. Se a loja atualiza, a cada mês, o valor devido em 2%, qual o preço do vestido se pago à vista?

a) R$ 365,00 b) R$ 367,00 c) R$ 369,00 d) R$ 371,00

Preço da primeira parcela acrescido de 2% = $1{,}02x$

$1{,}02x = 119{,}34 \Rightarrow x = 117$

Preço da segunda parcela = $1{,}02 \cdot 1{,}02x = 1{,}0404x$

$1{,}0404x = 260{,}10 \Rightarrow x = 250$

Se pago à vista, o valor seria 117 + 250 = R$ 367,00.

Resposta: alternativa **b**.

---

8. (FGV-SP) Lúcio emprestou R$ 10 000,00 a César, cobrando juros de 10% ao ano sobre o saldo devedor do ano anterior. César pagou R$ 3 000,00 um ano após o empréstimo e R$ 4 000,00 dois anos após o empréstimo. O valor da terceira parcela, que quitou a dívida, paga três anos após a concessão do empréstimo, foi:

a) R$ 5 180,00. b) R$ 5 280,00. c) R$ 5 380,00. d) R$ 5 480,00. e) R$ 5 580,00.

Empréstimo = R$ 10 000,00

Após 1 ano = +10% = $1{,}1 \cdot 10\,000 = 11\,000$

Como César pagou R$ 3 000,00, temos:

$11\,000 - 3\,000 = 8\,000$

Após mais 1 ano = +10% = $1{,}1 \cdot 8\,000 = 8\,800$

Como César pagou R$ 4 000,00 após 1 ano, temos:

$8\,800 - 4\,000 = 4\,800$

Após mais 1 ano = +10% = $1{,}1 \cdot 4\,800 = 5\,280$

Resposta: alternativa **b**.

9. (FGV-SP) No início do ano 2000, Alberto aplicou certa quantia a juros compostos, ganhando 20% ao ano. No início de 2009, seu montante era de R$ 5 160,00. Se ele deixar o dinheiro aplicado, nas mesmas condições, o juro recebido entre o início de 2010 e o início de 2011 será aproximadamente de:

a) R$ 929,99. b) R$ 1 032,00. c) R$ 1 135,00. d) R$ 1 238,00. e) R$ 1 341,00.

Juro recebido entre o início de 2010 e o início de 2011 = montante recebido em 2011 – montante recebido em 2010.

Mas $M = C(1 + i)^t$, então:

$M = M_{2011} - M_{2010} \Rightarrow M = 5\,160(1 + 0{,}2)^2 - 5\,160(1 + 0{,}2)^1 \Rightarrow M = 7\,430 - 6\,192 \Rightarrow M = 1\,238$

Resposta: alternativa **d**.

10. (Unifor-CE) Ana Paula pretende comprar uma TV LCD de 32" para assistir todos os jogos da Copa do Mundo de Futebol de 2010 na África do Sul. Em uma loja o preço da TV é R$ 1 500,00 para pagamento à vista ou então com 30% de entrada mais uma parcela de R$ 1 200,00 após 3 meses. A taxa de juros simples, se Ana Paula decidir comprar sua televisão financiada, é:

a) 3,76%. b) 4,76%. c) 5,47%. d) 6,47%. e) 7,47%.

30% à vista = 30% · 1 500 = R$ 450,00 + parcela de R$ 1 200,00

Caso Ana Paula comprasse a TV à vista, pagaria R$ 1 500,00. Como ela está financiando, pagará 450 + 1 200 = 1 650. Logo, pagará um juro de 1 650 – 1 500 = 150.

Partindo de um capital inicial de 1 500 − 450 = 1 050 e obtendo um juro de R$ 150,00, podemos calcular a taxa no decorrer dos 3 meses.

$J = C \cdot i \cdot t \Rightarrow 150 = 1\,050 \cdot i \cdot 3 \Rightarrow i = \frac{150}{3\,150} \Rightarrow i = 4{,}76\%$

Resposta: alternativa **b**.

11. (UEFS-BA) A despesa mensal de uma empresa na produção de um bem é composta por uma parcela fixa e uma parcela variável, proporcional ao número de peças produzidas.
Sabe-se que:

- o custo unitário de produção dessas peças é de R$ 1,50;
- o preço unitário de venda das peças produzidas é de R$ 2,40;
- não há lucro nem prejuízo na produção de 800 unidades mensais.

Com base nessas informações e sabendo-se que a empresa investe mensalmente R$ 95 000,00, pode-se afirmar que a produção mensal mínima, para que o lucro mensal total nas vendas seja de, pelo menos, 8% do valor investido no mês, é de *n* peças, para *n* igual a:

a) 9 074. b) 9 120. c) 9 245. d) 9 400. e) 9 502.

Sabendo que o lucro é o preço de venda menos o preço de fabricação, temos:

$L(x) = V(x) - C(x)$

$V(x) = 2{,}4x$

$C(x) = 1{,}5x + b$

Para 800 unidades, não temos lucro, logo:

$L(800) = 0 \Rightarrow V(800) - C(800) = 0 \Rightarrow 2{,}4 \cdot 800 = 1{,}5 \cdot 800 + b \Rightarrow b = 1\,920 - 1\,200 \Rightarrow b = 720$

Para que o lucro mensal seja de, pelo menos, 8% do valor investido, temos:

$L(x) = V(x) - C(x) \Rightarrow 0{,}08 \cdot 95\,000 = 2{,}4x - (1{,}5x + 720) \Rightarrow x = \dfrac{7\,600 + 720}{0{,}9} \Rightarrow x = 9\,245$ peças

Resposta: alternativa **c**.

12. (FGV-SP) Um capital *A* de R$ 10 000,00 é aplicado a juros compostos, à taxa de 20% ao ano; simultaneamente, um outro capital *B*, de R$ 5 000,00, também é aplicado a juros compostos, à taxa de 68% ao ano. Utilize a tabela abaixo para resolver.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
log *x*	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,96

Depois de quanto tempo os montantes se igualam?

a) 22 meses b) 22,5 meses c) 23 meses d) 23,5 meses e) 24 meses

$M_1 = M_2 \Rightarrow C_1(1 + i_1)^t = C_2(1 + i_2)^t \Rightarrow 10\,000(1 + 0{,}2)^t = 5\,000(1 + 0{,}68)^t \Rightarrow 2(1{,}2)^t = (1{,}68)^t \Rightarrow 2 = \left(\dfrac{1{,}68}{1{,}2}\right)^t \Rightarrow 2 = 1{,}4^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 2 = t(\log 2 + \log 7 - \log 10) \Rightarrow 0{,}30 = t(0{,}30 + 0{,}85 - 1) \Rightarrow 0{,}30 = 0{,}15t \Rightarrow t = 2$ anos $= 24$ meses

Resposta: alternativa **e**.

13. (UFPE) Uma loja de eletrônicos oferece duas opções de pagamento:

- à vista, com 10% de desconto no preço anunciado;
- em duas prestações mensais iguais, sem desconto sobre o preço anunciado, sendo a primeira prestação paga no momento da compra.

Qual a taxa de juros mensais embutida nas vendas a prazo?

a) 10% b) 15% c) 20% d) 25% e) 30%

Valor do produto: x

Valor à vista: $0,9x$

Entrada: $0,5x$

1ª parcela: $0,5x$

O valor financiado é $0,9x - 0,5x = 0,4x$, ou seja, após um mês pagou-se $0,5x$ pelo empréstimo de $0,4x$. Assim:

$0,5x = (1 + i) \cdot 0,4x \Rightarrow 1 + i = 1,25 \Rightarrow i = 0,25 = 25\%$

Resposta: alternativa **d**.

14. (Fuvest-SP) Há um ano, Bruno comprou uma casa por R$ 50 000,00. Para isso, tomou emprestados R$ 10 000,00 de Edson e R$ 10 000,00 de Carlos, prometendo devolver-lhes o dinheiro, após um ano, acrescido de 5% e 4% de juros, respectivamente. A casa valorizou 3% durante este período de um ano. Sabendo-se que Bruno vendeu a casa hoje e pagou o combinado a Edson e Carlos, o seu lucro foi de:

a) R$ 400,00. b) R$ 500,00. c) R$ 600,00. d) R$ 700,00. e) R$ 800,00.

Bruno pagou $0,05 \cdot 10\,000 =$ R$ 500,00 a Edson e $0,04 \cdot 10\,000 =$ R$ 400,00 a Carlos.

Se a casa valorizou 3%, ele obteve um lucro de $0,03 \cdot 50\,000 =$ R$ 1 500,00 com a venda da casa.

Após pagar $500 + 400 =$ R$ 900,00, continuou com $1\,500 - 900 =$ R$ 600,00 de lucro.

Resposta: alternativa **c**.

15. (Fuvest-SP) No próximo dia 8/12, Maria, que vive em Portugal, terá um saldo de 2 300 euros em sua conta corrente, e uma prestação a pagar no valor de 3 500 euros, com vencimento nesse dia. O salário dela é suficiente para saldar tal prestação, mas será depositado nessa conta corrente apenas no dia 10/12. Maria está considerando duas opções para pagar a prestação:

1. pagar no dia 8. Nesse caso, o banco cobrará juros de 2% ao dia sobre o saldo negativo diário em sua conta corrente por dois dias;
2. pagar no dia 10. Nesse caso, ela deverá pagar uma multa de 2% sobre o valor total da prestação.

Suponha que não haja outras movimentações em sua conta corrente. Se Maria escolher a opção 2, ela terá, em relação à opção 1:

a) desvantagem de 22,50 euros.
b) vantagem de 22,50 euros.
c) desvantagem de 21,52 euros.
d) vantagem de 21,52 euros.
e) vantagem de 20,48 euros.

- 1ª opção: pagar um empréstimo de 3 500 − 2 300 = 1 200, por 2 dias com taxa de 2% ao dia.

  $M_1 = C(1 + i_1)^t = 1\,200(1 + 0{,}02)^2 = 1\,248{,}48$

  $J_1 = M_1 - C_1 = 48{,}48$

- 2ª opção: pagar multa de 2% sobre a prestação:

  $2\,500 \cdot 2\% = 70{,}00$

Escolhendo a opção 2, ela pagará, em relação à opção 1:

70,00 − 48,48 = 21,52 euros de desvantagem

Resposta: alternativa **c**.

16. (FGV-SP) Certo automóvel vale hoje R$ 10 000,00 e seu valor diminui 20% por ano. Carlos tem hoje uma poupança de R$ 5 000,00 aplicada com um rendimento de 10% ao ano. Quanto faltará para Carlos comprar esse mesmo automóvel daqui a dois anos?

a) R$ 2 000,00 b) R$ 350,00 c) R$ 1 000,00 d) R$ 0,00 e) R$ 700,00

Valor do automóvel: 10 000

Após 1 ano, sofre desvalorização de 20% = 0,8 · 10 000 = 8 000.

No segundo ano, sofrerá uma desvalorização de 20% = 0,8 · 8 000 = 6 400.

Carlos tem hoje 5 000.

Daqui a um ano, ele terá 1,1 · 5 000 = 5 500.

No segundo ano, ele terá 1,1 · 5 500 = 6 050.

Após o segundo ano, o carro custará R$ 6 400,00 e ele terá R$ 6 050,00. Logo, faltará 6 400 − 6 050 = R$ 350,00 para Carlos comprar o automóvel.

Resposta: alternativa **b**.

17. (UFG-GO) Analise o gráfico ao lado.

Analisando-se os dados apresentados, conclui-se que o número de voos:

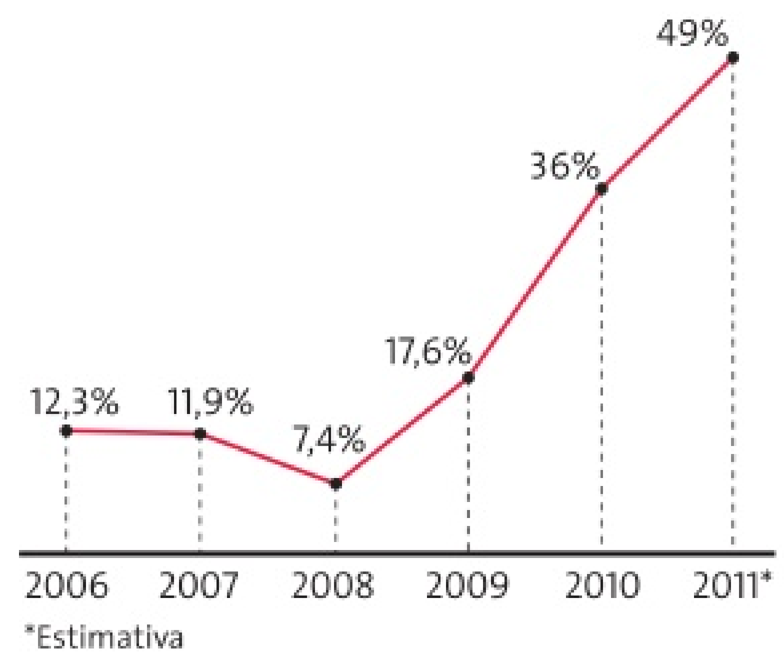
a) diminuiu em 2007 e 2008.

b) sofreu uma queda mais acentuada em 2008 do que em 2007.

c) teve aumento mais acentuado em 2009 do que em 2010.

d) é mais que o dobro em 2010, comparado a 2009.

e) é mais que o dobro em 2011 (estimativa), comparado a 2009.



Crescimento dos voos domésticos no Brasil, por ano, em relação ao ano anterior, no período de 2006 a 2011.

Entre o céu e o inferno. *Veja*, São Paulo, n. 2159, 7 abr. 2010, p. 70. Adaptado.

Analisando o gráfico, temos:

- em 2006, cresceu 12,3% em relação a 2005;
- em 2007, cresceu 11,9% em relação a 2006;
- em 2008, cresceu 7,4% em relação a 2007;
- em 2009, cresceu 17,6% em relação a 2008;
- em 2010, cresceu 36% em relação a 2009;
- em 2011, cresceu 49% em relação a 2010.

Então:

a) Houve crescimento em 2007 (para 2006) e em 2008 (para 2007).

b) Não houve queda e sim um crescimento menor.

c) O contrário (maior em 2010 que 2009).

d) Para ter mais que o dobro do número de voos, o crescimento deveria ser maior que 100%. (E não foi, foi de 36%.)

e) Em relação a 2009, subiu 36% e em relação a 2010, subiu 49%. Assim, o crescimento foi de 102,6%, pois $1,36 \cdot 1,49 = 2,026$.

Resposta: alternativa **e**.

18. (Unisc-RS) As substâncias radioativas emitem partículas e apresentam uma tendência natural a se desintegrarem. Assim, com o passar do tempo, sua massa vai diminuindo. Suponha que um certo material radioativo perde, todo dia, 5% da massa que possuía no dia anterior. Se hoje ele tem 15 g, que massa terá, aproximadamente, daqui a 2 dias?

a) 13 g b) 13,54 g c) 8,4 g d) 12,22 g e) 9,85 g

$x = 15 \cdot 0,95^2 = 13,54$

Resposta: alternativa **b**.

19. (Vunesp-SP) Cássia aplicou o capital de R$ 15 000,00 a juros compostos, pelo período de 10 meses e à taxa de 2% a.m. (ao mês). Considerando a aproximação $(1,02)^5 = 1,1$, Cássia computou o valor aproximado do montante a ser recebido ao final da aplicação. Esse valor é:

a) R$ 18 750,00. b) R$ 18 150,00. c) R$ 17 250,00. d) R$ 17 150,00. e) R$ 16 500,00.

$M = 15\,000 \cdot (1,02)^{10} \Rightarrow M = 15\,000 \cdot (1,02)^5 \cdot (1,02)^5 \Rightarrow M = 15\,000 \cdot 1,1 \cdot 1,1 = 18\,150$

Resposta: alternativa **b**.

---

20. (UEL-PR) Um automóvel zero km é comprado por R$ 32 000,00. Ao final de cada ano, seu valor diminui 10% em função da depreciação do bem. O valor aproximado do automóvel, após seis anos, é de:

a) R$ 15 006,00. b) R$ 19 006,00. c) R$ 16 006,00. d) R$ 12 800,00. e) R$ 17 006,00.

(32 000; 32 000 · 0,9; ...)

$a_7 = 32\,000 \cdot 0,9^6 \Rightarrow a_7 = 32\,000 \cdot 0,531 \Rightarrow a_7 \simeq 17\,006$

Resposta: alternativa **e**.

ESTATÍSTICA

Termos estatísticos

- População ou universo estatístico
- Amostra
- Indivíduo ou objeto
- Variável
  - qualitativa
    - nominal
    - ordinal
  - quantitativa
    - discreta
    - contínua
- Frequência absoluta
- Frequência relativa

Representação gráfica

- Gráfico de segmentos
- Gráfico de barras
- Gráfico de setores
- Histograma

Medidas de tendência central

Média aritmética (*MA*)

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Média ponderada (*MP*)

$$MP = \frac{p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + p_3 \cdot x_3 + ... + p_n \cdot x_n}{p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n}$$

Mediana (*Me*)

Dados n números em ordem crescente ou decrescente, a mediana será:

- o número que ocupar a posição central se n for ímpar;
- a média aritmética dos dois números que estiverem no centro se n for par.

Moda (*Mo*)

É a medida de tendência central definida como o valor mais frequente de um grupo de valores observados.

Medidas de dispersão

Variância (*V*)

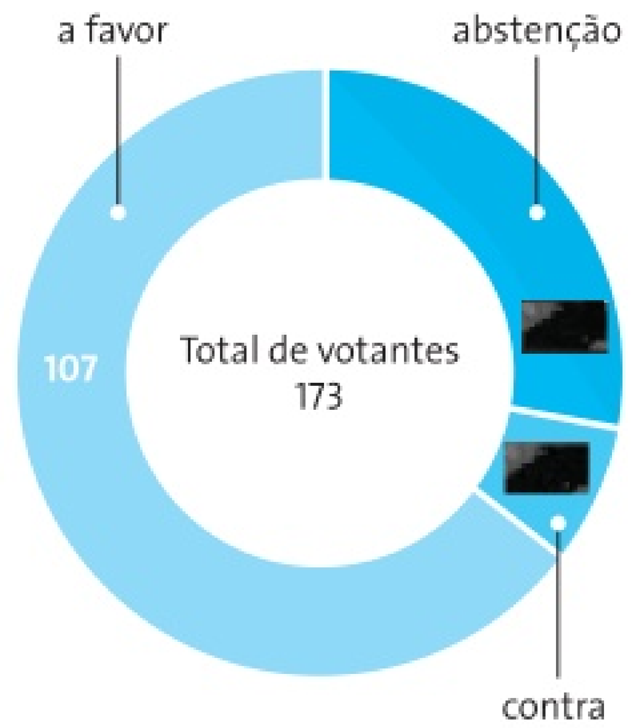
$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - MA)^2}{n}$$

Desvio Padrão (*DP*)

$$DP = \sqrt{V}$$

Exercícios

1. (UFG-GO) Um estudante encontrou um fragmento de jornal que apresentava o resultado da votação na Unesco sobre a admissão da Palestina como Estado-membro. Porém, as quantidades de abstenções e de votos contrários estavam ilegíveis, como indica a figura ao lado. Curioso para saber quantos países votaram contra e observando que se trata de um gráfico de setores, o estudante mediu com um transferidor o ângulo do setor circular correspondente aos votos contrários e obteve, aproximadamente, 29°. Com base nesta informação, determine o número de países que votaram contra a admissão da Palestina na Unesco.



Folha de S.Paulo, São Paulo, 1º nov. 2011. Adaptado.

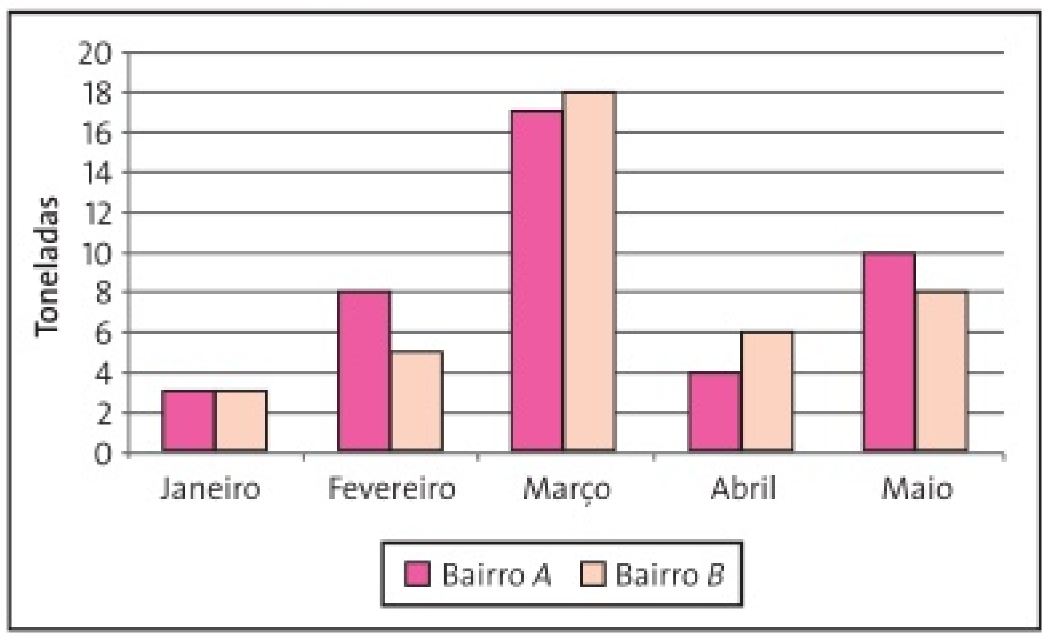
Sabendo que 173 votantes equivale a 360°, temos:

$$\left.\begin{array}{lcl} 173 & — & 360° \\ x & — & 29° \end{array}\right. \Rightarrow x \simeq 14$$

Resposta: 14 países.

2. (Acafe-SC) O gráfico ao lado representa a quantidade de lixo reciclável (em toneladas) produzido pelos bairros *A* e *B* durante cinco meses.
Analisando o gráfico 1, é correto afirmar:
   a) O bairro *A* produziu duas toneladas a mais de lixo do que o bairro *B* nesses cinco meses.
   b) A maior diferença (em toneladas) entre os dois bairros ocorreu no mês de março.
   c) O bairro *B* produziu mais lixo que o bairro *A* durante todos os cinco meses.
   d) A média de produção de lixo foi de 5 t/mês para o bairro *A* e 7 t/mês para o bairro *B*.

Gráfico 1: Quantidades mensais de lixo reciclável produzido nos bairros *A* e *B*



a) Verdadeiro. Somando as quantias de *A* temos 42 toneladas, e para *B* temos 40 toneladas.
b) Falso. A maior diferença ocorreu em fevereiro.
c) Falso. Em fevereiro e em maio *A* produziu mais que *B*.
d) Falso. A média de *A* foi 8,4 t/mês e a de *B*, 8 t/mês.
Resposta: alternativa **a**.

Texto para as questões 3 e 4.

Brasileiros dispostos a pagar diárias que podem chegar a € 11 mil (R$ 30,69 mil) por uma suíte são a bola da vez no mercado mundial de hotelaria de luxo.

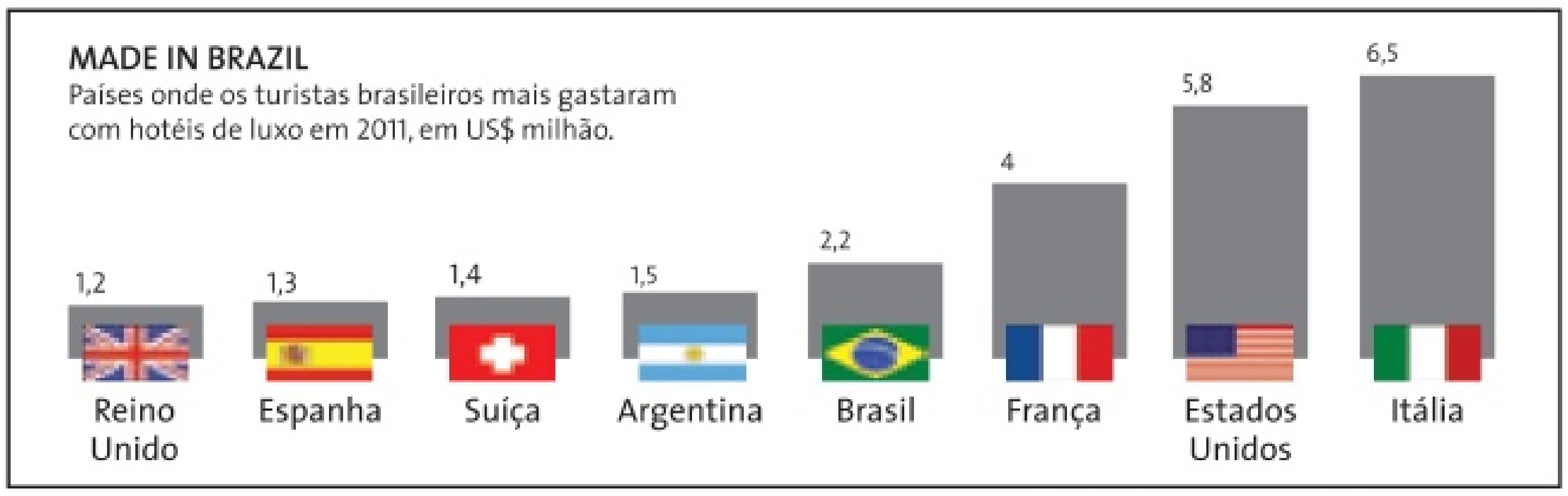
Disputada pelos mais requintados hotéis, a clientela do Brasil ocupa a terceira posição do *ranking* de reservas do The Leading Hotels of the World (LHW). O selo reúne alguns dos mais sofisticados estabelecimentos do mundo.

De 2010 para 2011, o faturamento local do LHW cresceu 16,26%.

No ano passado, o escritório brasileiro bateu o recorde de US$ 31 milhões (R$ 66,96 milhões) em reservas.

Turista, 2012, p. B3.

Turista brasileiro "AAA" é 3º do mundo



Cotações do câmbio turismo do dia 1º nov. 2012.

Fonte: Leading Hotels of the World.

3. (Uneb-BA) De acordo com os textos, pode-se afirmar que quando os turistas brasileiros saíram do país em 2011, o gasto médio com hotéis de luxo, em milhões de euros, foi igual a:

01) 2,1. 02) 2,2. 03) 2,3. 04) 2,4. 05) 2,5.

$$\bar{x} = \frac{1,2 + 1,3 + 1,4 + 1,5 + 4 + 5,8 + 6,5}{7} \Rightarrow \bar{x} = \frac{21,7}{7} = 3,1 \text{ milhões de dólares}$$

Então:

$31 \cdot 10^6$ milhões de dólares ——— 66,96 milhões de reais

$3,1 \cdot 10^6$ milhões de dólares ——— y

$\Rightarrow y = 6,696$ milhões de reais

Logo:

$11 \cdot 10^3$ euros ——— $30,69 \cdot 10^3$ reais

z ——— $6,696 \cdot 10^6$ reais

$\Rightarrow z = 2,4$ milhões de euros

Resposta: alternativa **04**.

4. (Uneb-BA) A mediana dos gastos, em milhões de reais, dos turistas brasileiros com hotéis de luxo, em 2011, é igual a:

01) 3,764. 02) 3,846. 03) 3,888. 04) 3,924. 05) 3,996.

Neste caso, a mediana será a média entre os valores centrais (1,5 e 2,2). Então:

$$\text{mediana} = \frac{1,5 + 2,2}{2} = 1,85 \text{ milhão de dólares}$$

Logo:

$$\begin{matrix} 31 \cdot 10^6 & \text{———} & 66,96 \cdot 10^6 \\ 1,85 \cdot 10^6 & \text{———} & x \end{matrix} \Rightarrow x = 3,996 \text{ milhões de reais}$$

Resposta: alternativa **05**.

5. (UFRN) A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep) é um projeto realizado com alunos do Ensino Básico que tem como objetivo estimular o estudo da Matemática por meio de resoluções de problemas motivantes, que despertem o interesse e a curiosidade de professores e alunos.

O quadro abaixo apresenta dados da Obmep referentes aos anos em que o Programa está em vigor.

Escolas, alunos e percentual de municípios participantes da Obmep por ano

	2005	2006	2007	2008	2009
Escolas	31 030	32 655	38 450	40 397	43 854
Alunos	10 520 830	14 181 705	17 341 732	18 326 029	19 198 710
Município	93,5%	94,5%	98,1%	98,7%	99,1%

Disponível em: <www.obmep.org.br>. Acesso em: 20 jun. 2010.

Admitindo que, para a aplicação das provas, cada escola utilize 20 pessoas como pessoal de apoio e que a população do Brasil seja de aproximadamente 192 870 418 pessoas, pode-se afirmar que, em 2009, o número de:

a) alunos, somado ao de pessoal de apoio, foi superior a 10% da população brasileira.

b) alunos, somado ao de pessoal de apoio, foi inferior a 10% da população brasileira.

c) escolas participantes foi 10% maior que em 2008.

d) alunos participantes foi 10% maior que em 2008.

a) Verdadeiro, pois 43 854 escolas $\cdot$ 20 = 877 080 pessoas de apoio. Somando-se ao número de alunos temos 20 075 790 pessoas, que corresponde a 10,4% da população brasileira.

b) Falso.

c) Falso, pois em 2008: 40 397 escolares; em 2009: 43 854 escolares, então, em 2009 o número de escolas foi 8,5% maior que em 2008.

d) Falso, pois em 2008: 18 326 029; em 2009: 19 198 710. Então, em 2009 o número de alunos foi 4,7% maior que em 2008.

Resposta: alternativa **a**.

6. (FGV-SP) Um pesquisador fez um conjunto de medidas em um laboratório e construiu uma tabela com as frequências relativas (em porcentagem) de cada medida, conforme se vê a seguir:

Valor medido	Frequência relativa (%)
1,0	3,5
1,2	7,5
1,3	45
1,7	12,5
1,8	5
	Total = 100

Assim, por exemplo, o valor 1,0 foi obtido em 30% das medidas realizadas. A menor quantidade possível de vezes que o pesquisador obteve o valor medido maior que 1,5 é:

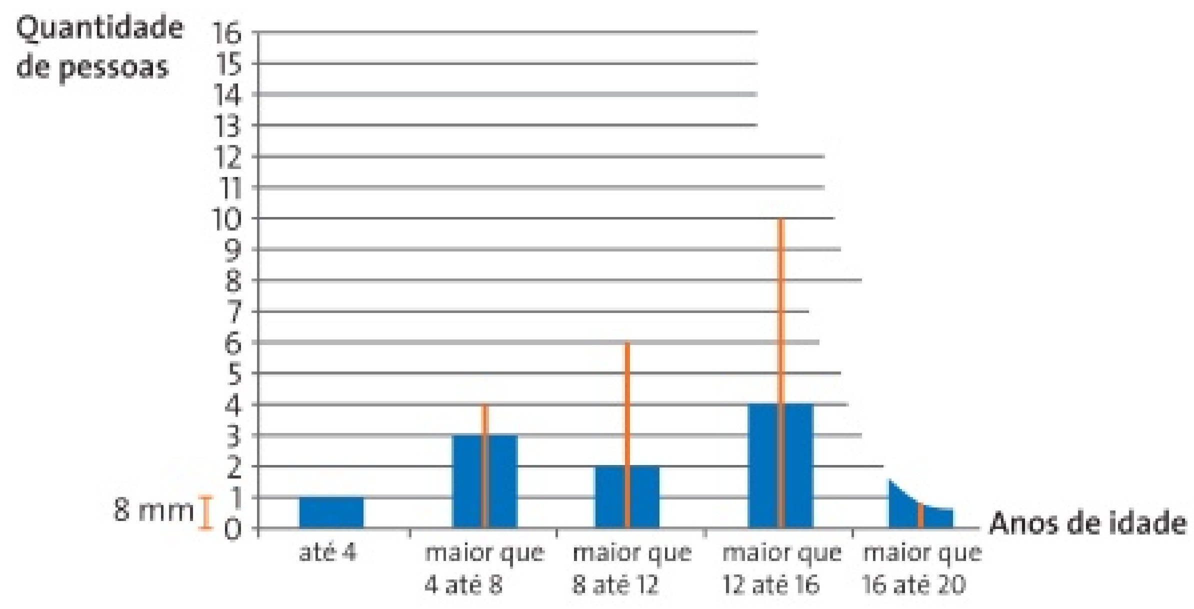
a) 6. b) 7. c) 8. d) 9. e) 10.

Para valores maiores que 1,5 temos 1,7 e 1,8. Somando suas frequências temos 17,5%.
Como todas as frequências da tabela são divisíveis no mínimo por 2,5, temos que os 100% correspondem a 40 medidas realizadas. Logo:

$$\begin{matrix} 100\% & \text{——} & 40 \\ 17{,}5\% & \text{——} & x \end{matrix} \Rightarrow x = 7 \text{ vezes}$$

Resposta: alternativa **b**.

7. (FGV-SP) O gráfico de barras indica como informação principal o número de pessoas atendidas em um pronto-socorro, por faixa etária, em um determinado dia. Outra informação apresentada no gráfico, por meio das linhas verticais, é a frequência acumulada. Em virtude de um rasgo na folha em que o gráfico estava desenhado, as informações referentes à última barra, e apenas elas, foram perdidas, como se vê na figura.



A média de idade do total de pessoas de 0 a 20 anos que frequentou o pronto-socorro nesse dia foi 12,4 anos. Nessas condições, na folha intacta do gráfico original, o comprimento da linha vertical posicionada na última barra, que indica a frequência acumulada até 20 anos de idade, em centímetros, era igual a:

a) 8,8. b) 9,6. c) 10,4. d) 11,2. e) 12,0.

$12{,}4 = \dfrac{2 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 14 \cdot 4 + 18 \cdot x}{2} \Rightarrow 124 + 12{,}4x = 2 + 18 + 20 + 56 + 18x \Rightarrow 5{,}6x = 28 \Rightarrow x = 5$ pessoas entre 16 e 20 anos

Para frequência acumulada temos um total de 15 pessoas e cada uma equivale a 0,8 cm no gráfico. Então:
$15 \cdot 0{,}8 = 12$ cm

Resposta: alternativa **e**.

8. (FGV-SP) Ao conjunto {5, 6, 10, 11} inclui-se um número natural n, diferente dos quatro números que compõem esse conjunto. Se a média aritmética dos cinco elementos do novo conjunto é igual a sua mediana, então, a soma de todos os possíveis valores de n é igual a:

a) 20. b) 22. c) 23. d) 24. e) 26.

Se o número for menor do que 6, então 6 será a mediana e a média. Logo:

$$6 = \frac{n + 5 + 6 + 10 + 11}{5} \Rightarrow n = -2 \text{ (não é natural)}$$

Se o número não for maior que 10, então 10 será mediana e média. Então:

$$10 = \frac{n + 5 + 6 + 10 + 11}{5} \Rightarrow n = 18$$

Entre 6 e 10, apenas 8 pode ser média e mediana ao mesmo tempo. Assim, os possíveis valores de n são 18 e 8, cuja soma é 26.

Resposta: alternativa **e**.

---

9. (Uece) A média aritmética das idades dos 45 alunos do 6º ano do Colégio S. Narcísio IV é $\frac{188}{15}$. Se a média aritmética das idades das meninas é 12 anos e a dos meninos é 13 anos, então, o produto do número de meninos pelo número de meninas é:

a) 494. b) 500. c) 504. d) 506.

Observação: Considere as idades dos alunos em número inteiro de anos. Por exemplo, se a idade de João é 12 anos, 7 meses e 4 dias, a idade a ser considerada é 12 anos.

x meninas: $\overline{x}_1 = 12$

$45 - x$ meninos: $\overline{x}_2 = 13$

Então:

$$\frac{12x + 13(45 - x)}{45} = \frac{188}{15} \Rightarrow 12x + 585 - 13x = 564 \Rightarrow -x = -21 \Rightarrow x = 21 \text{ meninas}$$

Portanto, existem 24 meninos na turma. Logo, temos a resposta:

$21 \cdot 24 = 504$

Resposta: alternativa **c**.

10. (Uerj) Na tabela abaixo, estão indicados os preços do rodízio de *pizzas* de um restaurante.

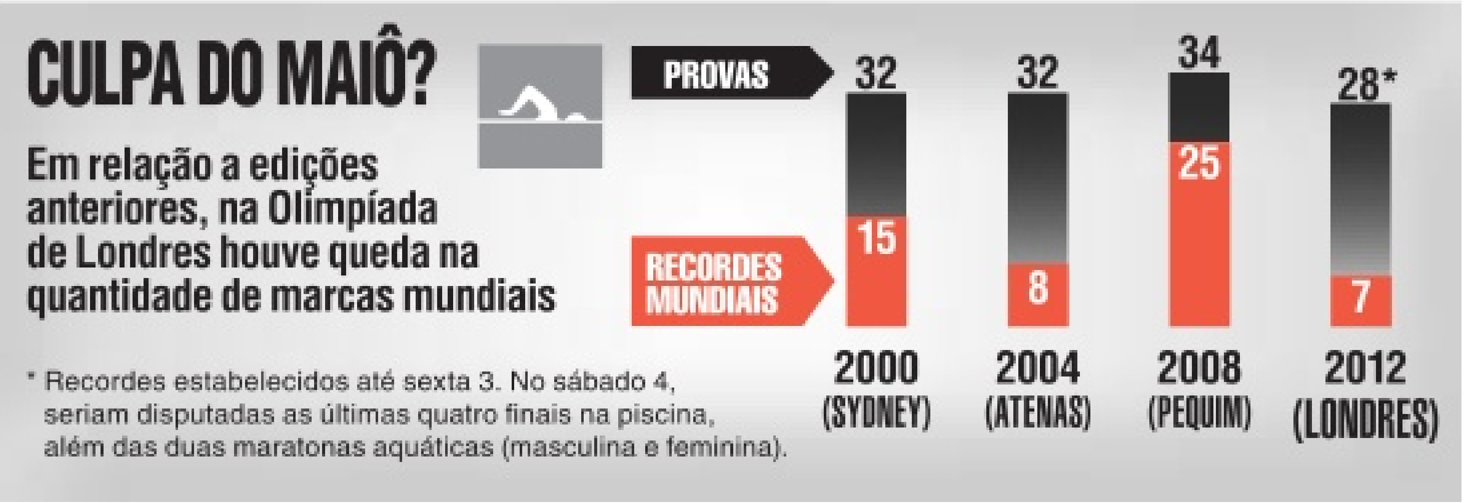
Dias da semana	Valor unitário do rodízio
segunda-feira, terça-feira, quarta-feira e quinta-feira	18,50
sexta-feira, sábado e domingo	22,00

Considere um cliente que foi a esse restaurante todos os dias de uma mesma semana, pagando um rodízio em cada dia. Determine o valor médio que esse cliente pagou, em reais, pelo rodízio nessa semana.

média $= \frac{18,5 \cdot 4 + 22 \cdot 3}{7} = \frac{74 + 66}{7} = 20$

Resposta: R$ 20,00.

11. (UPE) O gráfico ao lado mostra o número de competições de natação das últimas olimpíadas e o número de recordes mundiais quebrados em cada uma delas.
De acordo com esse gráfico:



Fonte: *Veja*, n. 2281, de 8 ago. 2012.

a) sem considerar a Olimpíada de 2012 em Londres, a maior razão entre o número de provas e o número de recordes quebrados aconteceu na Olimpíada de 2008, em Pequim.

b) para que a razão entre o número de provas e o número de recordes quebrados da Olimpíada de Londres se equipare à de Pequim, seriam necessários mais 4 recordes mundiais quebrados.

c) caso não seja quebrado mais nenhum recorde na Olimpíada de Londres, o número de recordes quebrados na Olimpíada de Sydney seria o mesmo do número de recordes quebrados em Atenas e Londres, juntos.

d) a média de recordes quebrados nas Olimpíadas de Sydney, Atenas e Pequim é de 17 recordes quebrados por olimpíada.

e) nas Olimpíadas de Sydney e Atenas, foram quebrados, ao todo, 64 recordes mundiais.

a) Falso, pois a maior razão entre provas e recordes ocorreu em Atenas, 2004.

b) Falso.

$\frac{34}{25} = \frac{28}{7 + x} \Rightarrow x = 13,6$

c) Verdadeiro, pois $8 + 7 = 15$.

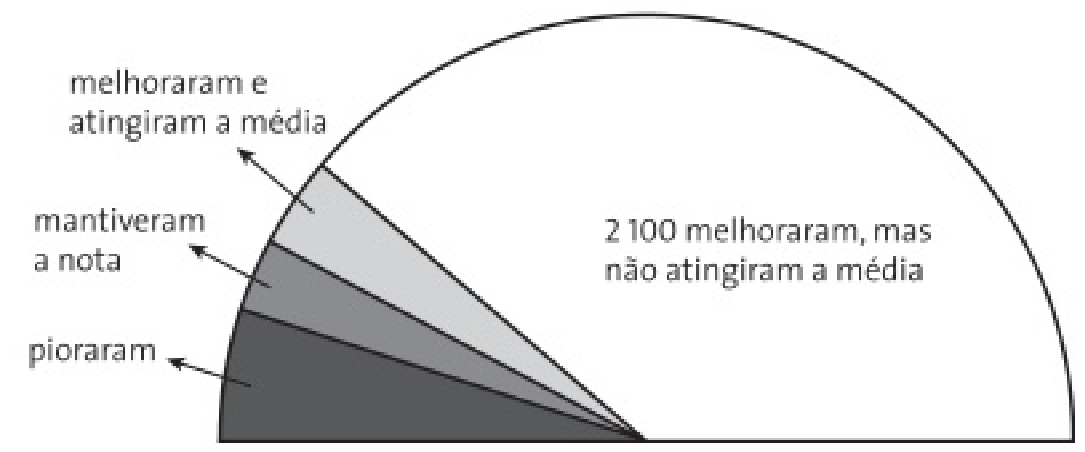
d) Falso.

média $= \frac{55}{4} = 13,75$

e) Falso, pois $15 + 8 = 23$.

Resposta: alternativa **c**.

12. (UFG-GO) O gráfico ao lado representa, em um semicírculo, como foi a evolução do Ideb (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) de 2011 em comparação ao Ideb de 2007, considerando-se as 2 700 escolas públicas brasileiras que obtiveram as menores notas em 2007. Pelo gráfico, sabe-se que as escolas que melhoraram, mas não atingiram a média nacional são representadas pelo setor circular determinado por um ângulo de 140° e que os setores circulares que indicam as escolas que mantiveram a mesma nota e as que pioraram correspondem a $\frac{2}{35}$ e $\frac{1}{7}$, respectivamente, da área do setor circular que indica as escolas que tiveram melhora, mas não atingiram a média nacional.
Diante do exposto, determine o número das escolas que melhoraram e atingiram a média, das que mantiveram a nota e das que pioraram.



Folha de S.Paulo. Em 4 anos, 15% das piores escolas não se recuperaram. São Paulo, 2 out. 2012, p. C4. Adaptado.

Temos:

- $\frac{1}{7} \cdot 2\,100 = 300$ escolas pioraram
- $\frac{2}{35} \cdot 2\,100 = 120$ escolas mantiveram

Mas:

$\frac{1}{7} \cdot 140° = 20°$

$\frac{2}{35} \cdot 140° = 8°$

$180° - 140° - 20° - 8° = 12°$

Logo:

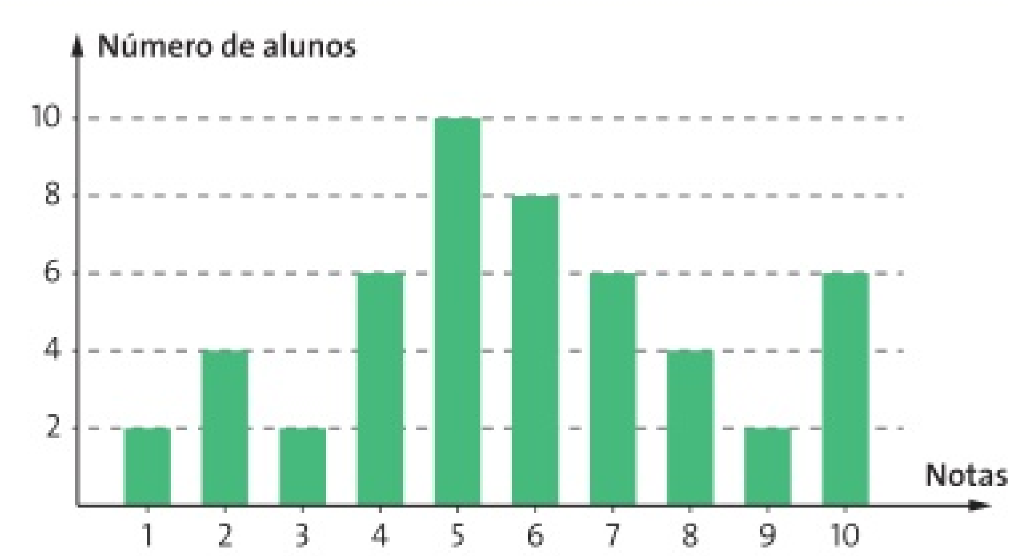
$$\begin{array}{ccc} 20° & \text{——} & 300 \\ 8° & \text{——} & x \end{array} \Rightarrow x = 180 \text{ escolas melhoraram}$$

Resposta: 300 escolas pioraram; 120 escolas mantiveram e 180 escolas melhoraram.

---

13. (Ibmec-SP) Chama-se mediana de um conjunto de 50 dados ordenados em ordem crescente o número x dado pela média aritmética entre o 25º e o 26º. Observe no gráfico ao lado uma representação para as notas de 50 alunos do primeiro semestre de Ciências Econômicas numa determinada prova. A mediana das notas dos 50 alunos de Ciências Econômicas nesta prova é igual a:

a) 3. b) 4. c) 5. d) 6. e) 7.



Total de notas 1: 2
Total de notas de 1 a 2: $2 + 4 = 6$
Total de notas de 1 a 3: $2 + 4 + 2 = 8$
Total de notas de 1 a 4: $2 + 4 + 2 + 6 = 14$
Total de notas de 1 a 5: $2 + 4 + 2 + 6 + 10 = 24$
Total de notas de 1 a 6: $2 + 4 + 2 + 6 + 10 + 8 = 32$
Portanto, o 25º e o 26º termos valem 6, logo:

$Me = \frac{6 + 6}{2} = 6$

Resposta: alternativa **d**.

14. (Uneb-BA) O XVI Campeonato Mundial de Basquete Masculino foi realizado na Turquia, entre 28 de agosto a 12 de setembro de 2010, nas cidades de Ancara, Esmirna, Istambul e Kayseri. Novamente o Brasil decepcionou a torcida, conseguindo apenas o 9º lugar.
O gráfico mostra a *performance* da seleção brasileira ao longo das 15 edições anteriores da competição.
Considerando-se as informações do texto e do gráfico, pode-se concluir que o Brasil, ao longo de todos os anos, nessa competição, ocupou uma posição média correspondente à:

01) 5ª colocação. 02) 6ª colocação. 03) 7ª colocação. 04) 8ª colocação. 05) 9ª colocação.

$$\text{média} = \frac{4+2+1+1+3+2+6+3+8+4+5+11+10+8+19}{15} \Rightarrow \text{média} = 5{,}8$$

Logo, ocupou a 6ª colocação.

Resposta: alternativa **02**.

15. (FGV-SP) A média aritmética de 20 números reais é 30, e a média aritmética de 30 outros números reais é 20. A média aritmética desses 50 números é:

a) 27. b) 26. c) 25. d) 24. e) 23.

I. $30 = \frac{\text{soma I}}{20} \Rightarrow \text{soma I} = 600$

II. $20 = \frac{\text{soma II}}{30} \Rightarrow \text{soma II} = 600$

Logo:

$$\text{média} = \frac{\text{soma I} + \text{soma II}}{50} \Rightarrow \text{média} = \frac{600 + 600}{50} = 24$$

Resposta: alternativa **d**.

16. (UEPB) O salário médio, em reais, dos funcionários de uma empresa, conforme nos mostra a tabela de distribuição abaixo, é:

Faixa salarial (em reais)	**Número de funcionários**
800 ⊢ 1100	300
1100 ⊢ 1400	600
1400 ⊢ 1700	150
1700 ⊢ 2000	50
2000 ⊢ 2300	30
2300 ⊢ 2600	20

a) 1408,60. b) 1380,60. c) 1281,30. d) 1283,50. e) 1285,50.

Faixa salarial (em reais)	**Número de funcionários**	**Média da faixa salarial**
800 ⊢ 1100	300	950
1100 ⊢ 1400	600	1250
1400 ⊢ 1700	150	1550
1700 ⊢ 2000	50	1850
2000 ⊢ 2300	30	2150
2300 ⊢ 2600	20	2450

$$\text{média} = \frac{950 \cdot 300 + 1\,250 \cdot 600 + 1\,550 \cdot 150 + 1\,850 \cdot 50 + 2\,150 \cdot 30 + 2\,450 \cdot 20}{1150} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{média} = \frac{285\,000 + 75\,000 + 232\,500 + 92\,500 + 64\,500 + 49\,000}{1\,150} \Rightarrow \text{média} = \frac{1\,473\,500}{1\,150} \Rightarrow \text{média} = 1\,281{,}30$$

Resposta: alternativa **c**.

17. (UFPA) A precipitação pluviométrica média mensal em Belém, entre os anos de 1961 e 1990, está representada na tabela abaixo, com valores em mm.

Jan.	**Fev.**	**Mar.**	**Abr.**	**Maio**	**Jun.**	**Jul.**	**Ago.**	**Set.**	**Out.**	**Nov.**	**Dez.**
366,5	417,5	436,2	360	304,4	140,2	152,1	131,1	140,8	116,1	111,8	216,4

Considerando os dados da tabela, podemos afirmar:

a) Não existe um período de alta precipitação pluviométrica.

b) A soma das três médias mensais de maior precipitação corresponde a mais de 50% da média da precipitação total.

c) As quatro médias mensais de menor precipitação correspondem a menos de 20% da precipitação total.

d) A soma das médias mensais dos seis meses de menores precipitações corresponde a menos de um quarto da precipitação média anual.

e) Apenas quatro das médias mensais ficam acima de um doze avos da precipitação média anual.

a) Falso.

b) Falso.

$436{,}2 + 417{,}5 + 366{,}5 = 1\,220{,}2$

Total de precipitação nos 12 meses: 2 893,1

$\frac{1\,220{,}2}{2\,893{,}1} = 0{,}42$ (42%)

c) Verdadeiro.

$111{,}8 + 116{,}1 + 132{,}1 + 140{,}2 = 499{,}2$

Soma dos 12 meses: 2 893,1

20% de $2\,893{,}1 \simeq 580$ mm

d) Falso.

Soma das 6 menores = 792,1

média total $= \frac{2\,893{,}1}{12} \simeq 241{,}1$

$\frac{1}{4}$ da média total é 60,275, então a soma das 6 maiores corresponde a mais que isso.

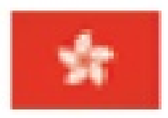
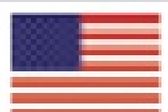
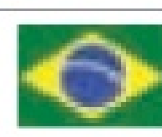
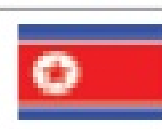
e) Falso.

$\frac{1}{12} \cdot 241{,}1 \simeq 20$

Todas as médias mensais ficam acima de um doze avos da precipitação média anual.

Resposta: alternativa **c**.

18. (UFF-RJ) O Índice de Liberdade Econômica (Index of Economic Freedom) é um indicador elaborado pelo The Wall Street Journal e The Heritage Foundation, que avalia o grau de liberdade econômica de um país. Esse índice varia de zero a cem. Quanto maior o seu valor, maior a "liberdade econômica" do país. Tal índice é uma média da liberdade econômica em dez âmbitos: negócios; comércio; liberdade fiscal; intervenção do governo; monetário; investimentos; financeiro; corrupção; trabalho; direitos de propriedade. A tabela a seguir fornece os índices de quatro países, no período de 2000 a 2009, e suas respectivas posições no *ranking* em 2009 (ano em que 179 países foram avaliados).

Posição em 2009	País		Índice de liberdade econômica									
			2009	2008	2007	2006	2005	2004	2003	2002	2001	2000
1	Hong Kong		90,0	89,7	89,9	88,6	89,5	90,0	89,8	89,4	89,9	89,5
6	Estados Unidos		80,7	81,0	81,2	81,2	79,9	78,7	78,2	78,4	79,1	76,4
105	Brasil		56,7	56,2	56,2	60,9	61,7	62,0	63,4	61,5	61,9	61,1
179	Coreia do Norte		2,0	3,0	3,0	4,0	8,0	8,9	8,9	8,9	8,9	8,9

Fonte: <www.heritage.org/Index/Explore.aspx?view=by-region-country-year>.

Com base nessa tabela, pode-se afirmar que o índice de liberdade econômica do Brasil:

a) teve um aumento superior a 1%, do ano de 2000 para o ano de 2001.

b) teve um decréscimo de 0,1%, no período de 2001 a 2004.

c) teve um aumento superior a 13%, do ano de 2003 para o ano de 2008.

d) teve um decréscimo de 30%, do ano de 2004 para o ano de 2005.

e) cresceu, ano a ano, no período de 2003 a 2008.

a) Verdadeiro, pois o aumento foi de 0,8, o que corresponde a um aumento de 1,3%.

b) Falso. De 2000 para 2004 o índice aumentou.

c) Falso, pois de 2003 para 2008 o índice diminuiu.

d) Falso, pois houve um decréscimo de 0,3 que corresponde a 0,5%.

e) Falso, pois caiu no período de 2003 a 2008.

Resposta: alternativa **a**.

19. (UFSM-RS) No ano de 2009, foi realizada a 17ª edição do Rally dos Sertões. A disputa começou em Goiânia-GO, passou por 7 estados brasileiros, terminando em Natal-RN. O percurso total do Rally foi de 5 038 km, divididos em 10 etapas; por sua vez, cada etapa possuía uma parte especial. A tabela a seguir apresenta o percurso total e o especial de cada etapa.

Etapa	Total da etapa	Especial da etapa
1ª	327 km	256 km
2ª	469 km	334 km
3ª	636 km	393 km
4ª	762 km	487 km
5ª	538 km	300 km
6ª	558 km	364 km
7ª	543 km	235 km
8ª	421 km	213 km
9ª	439 km	184 km
10ª	350 km	114 km

A média aritmética das cinco primeiras etapas do percurso especial é:

a) 304 km. b) 310 km. c) 322 km. d) 348 km. e) 354 km.

$\text{média} = \dfrac{256 + 334 + 393 + 487 + 300}{5} = \dfrac{1\,770}{5} = 354 \text{ km}$

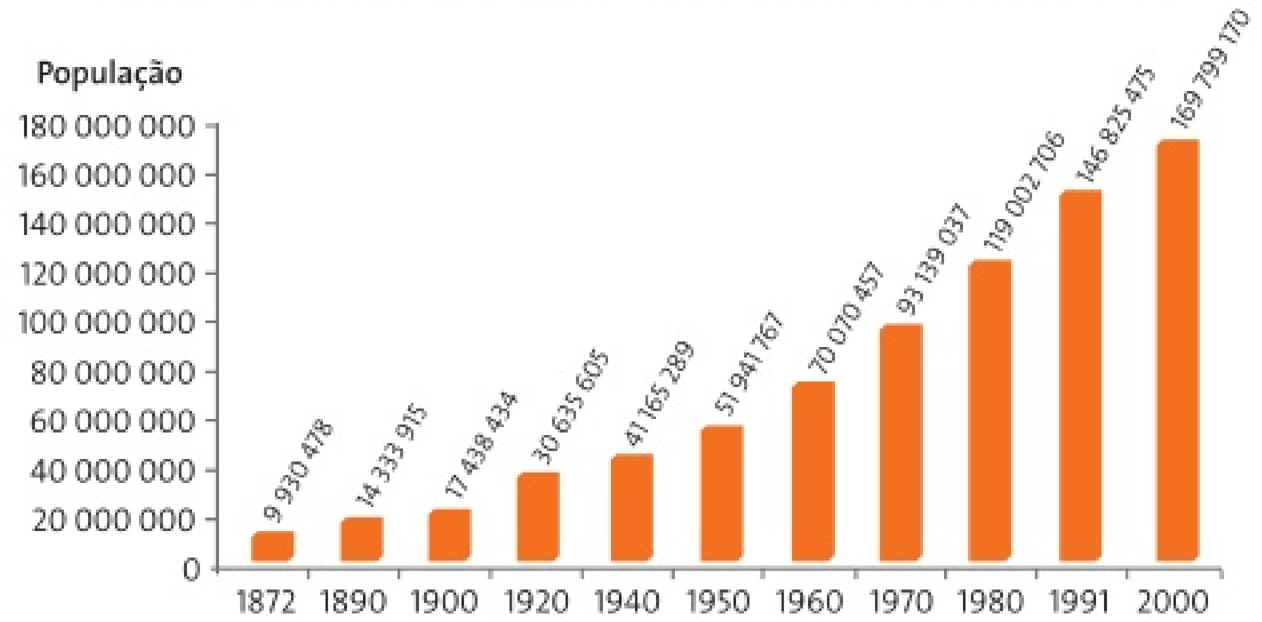
Resposta: alternativa **e**.

20. (UFCG-PB) A tabela ao lado foi extraída de dados do IBGE e representa o aumento da população brasileira ao longo dos anos de 1872 a 2000.

Analisando os dados apresentados nessa tabela, pode-se deduzir que:

a) A população brasileira teve um aumento linear ao longo dos anos.
b) A tendência da população brasileira é crescer e depois decrescer.
c) A taxa de crescimento da população brasileira entre os anos de 1940 e 1950 foi menor do que entre os anos de 1970 e 1980.
d) De cem em cem anos o número de habitantes duplica.
e) A taxa de crescimento da população brasileira de dez em dez anos se mantém constante.

População total recenseada no Brasil (1872-2000)



Fonte: Censo Demográfico 2000: Resultados do universo.

a) Falso.
b) Falso, pois a tendência é crescer.
c) Verdadeiro, pois entre 1940 e 1950 aumentou 20,7% e entre 1970 e 1980 aumentou 21,7%.
d) Falso.
e) Falso, pois a taxa sempre aumenta.

Resposta: alternativa **c**.

21. (FGV-SP) Um time de futebol tem 11 jogadores cuja média das idades é 24 anos. Álvaro tem 35 anos. Se Álvaro for excluído do time, a média das idades dos 10 jogadores restantes será:

a) 22,9 anos. b) 22,8 anos. c) 22,7 anos. d) 22,6 anos. e) 22,5 anos.

$24 = \dfrac{\text{soma das idades}}{11} \Rightarrow \text{soma das idades} = 264$

Então:

$\text{média} = \dfrac{\text{soma das idades} - 35}{10} \Rightarrow \text{média} = \dfrac{264 - 35}{10} \Rightarrow \text{média} = 22{,}9 \text{ anos}$

Resposta: alternativa **a**.

22. (Vunesp-SP) Durante o ano letivo, um professor de Matemática aplicou cinco provas para seus alunos. A tabela apresenta as notas obtidas por um determinado aluno em quatro das cinco provas realizadas e os pesos estabelecidos pelo professor para cada prova.

Prova	I	II	III	IV	V
Nota	6,5	7,3	7,5	?	6,2
Peso	1	2	3	2	2

Se o aluno foi aprovado com média final ponderada igual a 7,3, calculada entre as cinco provas, a nota obtida por esse aluno na prova **IV** foi:

a) 9,0. b) 8,5. c) 8,3. d) 8,0. e) 7,5.

$7{,}3 = \dfrac{6{,}5 \cdot 1 + 7{,}3 \cdot 2 + 7{,}5 \cdot 3 + x \cdot 2 + 6{,}2 \cdot 2}{10} \Rightarrow 6{,}5 + 14{,}6 + 22{,}5 + 2x + 12{,}4 = 73 \Rightarrow 2x = 17 \Rightarrow x = 8{,}5$

Resposta: alternativa **b**.

23. (Insper-SP) A tabela a seguir mostra as quantidades de alunos que acertaram e que erraram as 5 questões de uma prova aplicada em duas turmas. Cada questão valia dois pontos.

Questão	Acertos turma A	Erros turma A	Acertos turma B	Erros turma B
1	32	8	42	18
2	28	12	48	12
3	36	4	48	12
4	16	24	24	36
5	20	20	30	30

A média dos alunos da turma *A* e a média dos alunos da turma *B* nesta prova foram, respectivamente:

a) 6,80 e 6,20.
b) 6,60 e 6,40.
c) 6,40 e 6,60.
d) 6,20 e 6,80.
e) 6,00 e 7,00.

Sabendo que a turma *A* tem 40 alunos e a *B*, 60, temos:

- para a turma *A*:

$$\text{média} = \frac{\text{número de acertos} \cdot 2}{40} \Rightarrow \text{média} = \frac{132 \cdot 2}{40} \Rightarrow \text{média} = 6{,}6$$

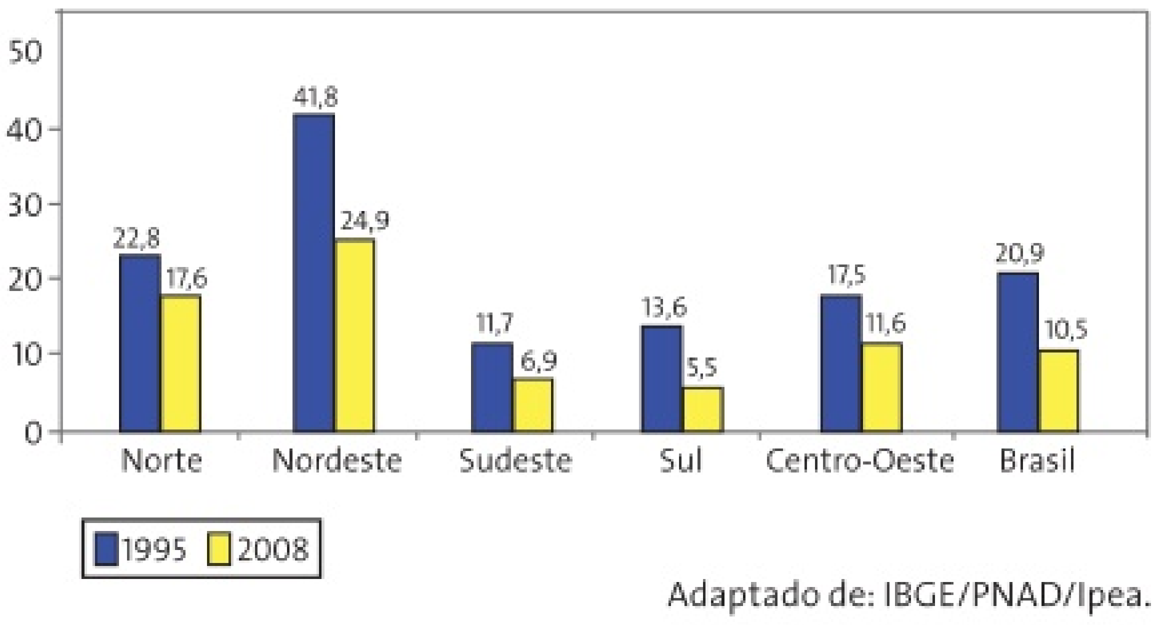
- para a turma *B*:

$$\text{média} = \frac{\text{número de acertos} \cdot 2}{60} \Rightarrow \text{média} = \frac{192 \cdot 2}{60} \Rightarrow \text{média} = 6{,}4$$

Resposta: alternativa **b**.

24. (UFF-RJ) Diz-se que uma família vive na pobreza extrema se sua renda mensal por pessoa é de, no máximo, 25% do salário mínimo nacional. Segundo levantamento do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), mais de treze milhões de brasileiros saíram da pobreza extrema entre 1995 e 2008. No entanto, a diminuição generalizada nas taxas de pobreza extrema nesse período não ocorreu de forma uniforme entre as grandes regiões geográficas do país, conforme ilustra o gráfico ao lado. Tendo em vista o gráfico, verifica-se que a taxa nacional de pobreza extrema caiu 49,8%, passando de 20,9% para 10,5%. Pode-se concluir, então, que a região em que a taxa de pobreza extrema (em %) caiu mais de 50% foi:

Taxas de pobreza extrema no Brasil e nas suas grandes regiões em 1995 e 2008 (em %)



Adaptado de: IBGE/PNAD/Ipea.

a) a região Norte.
b) a região Sudeste.
c) a região Nordeste.
d) a região Centro-Oeste.
e) a região Sul.

Basta observar que a região Sul é a única cujo valor referente a 2008 é menos da metade do valor referente a 1995.

Resposta: alternativa **e**.

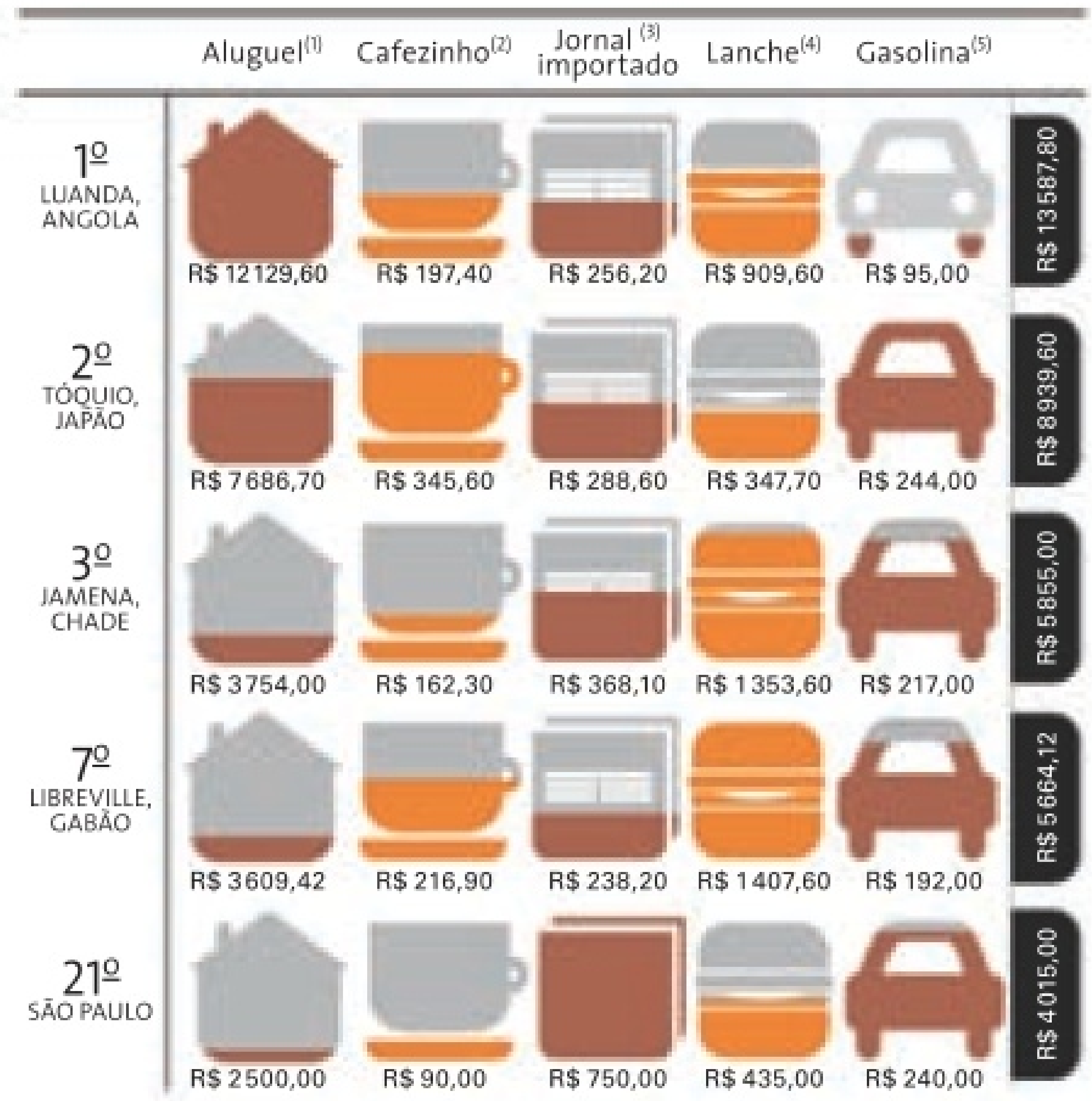
25. (Vunesp-SP) A revista *Superinteressante* trouxe uma reportagem sobre o custo de vida em diferentes cidades do mundo. A tabela mostra o *ranking* de cinco das 214 cidades pesquisadas pela “Mercer LLC”, empresa americana, em 2010. Observando as informações, numéricas e coloridas, contidas na tabela, analise as afirmações:

I. O custo do aluguel em Luanda é o mais alto do mundo.
II. O custo do cafezinho em Tóquio é o mais alto do mundo.
III. O custo do jornal importado em São Paulo é o mais alto do mundo.
IV. O custo do lanche em Libreville é o mais alto do mundo.
V. O custo da gasolina em Tóquio é o mais alto do mundo.

Estão corretas as afirmações:

a) I, III e V, apenas.
b) II, III e IV, apenas.
c) I, II, III e IV, apenas.
d) I, III, IV e V, apenas.
e) I, II, III, IV e V.

Cidade mais cara do mundo fica na África



(1) apartamento de dois quartos num bairro de classe média alta;
(2) 30 cafezinhos;
(3) 30 exemplares do New York Times;
(4) lanches do McDonald’s;
(5) 100 litros.

Superinteressante, janeiro de 2011. Adaptado.

Os valores da tabela representam a soma de quantidades constantes dos itens para cada cidade. Assim, o que apresenta maior valor na soma tem o maior custo por unidade. Então:
I. Verdadeiro
II. Falso
III. Verdadeiro
IV. Verdadeiro
V. Verdadeiro

Resposta: alternativa **d**.

---

26. (UFG-GO) Uma das características das maiores usinas hidrelétricas do Brasil é a formação de grandes lagos através de barragens para a geração de energia, conforme se visualiza no quadro.

Brasil: usinas hidrelétricas por área alagada e potência gerada – 2009		
Usina	**Área alagada** (km^2)	**Potência** (mv)
Tucuruí	2 430	4 200
Sobradinho	4 214	1 050
Itaipu	1 350	12 600
Ilha Solteira	1 077	3 330
Furnas	1 450	1 320

Fonte: Aneel, 2009.

De acordo com o quadro, é correto afirmar:

a) Ilha Solteira e Furnas em conjunto alagam uma área superior a 2 500 km^2 e geram juntas $\frac{2}{3}$ da energia produzida por Tucuruí.
b) em relação à área alagada e à produção de energia, a usina de Itaipu apresenta o melhor custo-benefício.
c) a usina de Sobradinho possui a maior área alagada, sendo a terceira colocada em produção de energia.
d) a proporção de geração de energia da usina de Tucuruí é de exatamente 2 mv/km^2.

a) Falso, pois juntas alagam 2 527 km^2, mas não geram $\frac{2}{3}$ da energia de Tucuruí.
b) Verdadeiro, pois é a segunda menor área alagada e a maior geradora de energia.
c) Falso, pois possui a maior área alagada, mais é quarta colocada em produção de energia.
d) Falso, pois a proporção é de 1,7 mv/km^2 aproximadamente.

Resposta: alternativa **b**.

27. (UFRGS-RS) A propagação do vírus H1N1, causador da gripe A, foi preocupação mundial em 2009. Quatro meses após a eclosão dos casos da gripe nos Estados Unidos e no México, foi feita uma avaliação dos danos causados pela moléstia, com a utilização de dados de 28 países.

Os quadros ao lado, publicados no jornal *Zero Hora* de 27/8/2009, apresentam os países onde havia ocorrido mais óbitos até aquela data e as maiores taxas de mortalidade, por 100 mil habitantes.

Com base nessas informações, é correto afirmar que, naquela data:

A moléstia no mundo

País	Óbitos
Brasil	557
EUA	522
Argentina	439
México	179
Austrália	132
Chile	128
Tailândia	119
Peru	80
Canadá	71
Malásia	69

País	Taxa de Mortalidade*
Argentina	1,08
Chile	0,75
Costa Rica	0,67
Uruguai	0,65
Austrália	0,61
Paraguai	0,61
Brasil	0,29
Peru	0,27
Malásia	0,24
Canadá	0,21

* Por 100 mil habitantes

a) o Uruguai havia registrado mais de 70 óbitos.

b) a taxa de mortalidade no Peru era de 27%.

c) a população da Austrália era maior que a população do Paraguai.

d) a população da Argentina era superior a 50 milhões de habitantes.

e) o Brasil era o país mais populoso dentre os citados.

a) Falso, pois o Uruguai não aparece na tabela de óbitos, o que significa que ele registrou menos de 69 óbitos.

b) Falso, pois a taxa é de 0,00027%.

c) Verdadeiro, pois analisando a relação taxa $= \frac{\text{óbitos}}{\text{habitantes}}$, temos que habitantes $= \frac{\text{óbitos}}{\text{taxa}}$. Como a taxa da Austrália e do Paraguai é a mesma, quanto maior o número de óbitos, maior o total de habitantes. Como o Paraguai não está na tabela de óbitos, podemos garantir que a Austrália teve mais óbitos e assim tem mais habitantes.

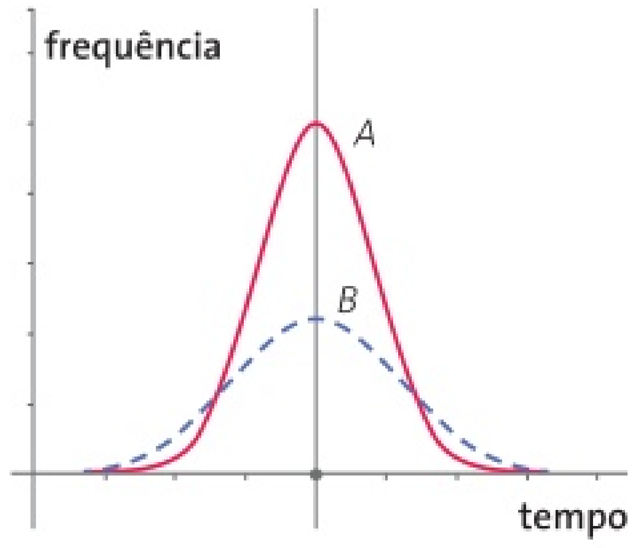
d) Falso.

$$\frac{1{,}08}{100\ 000} = \frac{439}{\text{pop.}} \Rightarrow \text{pop.} = \frac{43\ 900\ 000}{1{,}08} \Rightarrow \text{pop.} = 40\ 648\ 198 \text{ habitantes}$$

e) Falso, pois os Estados Unidos eram mais populosos do que o Brasil.

Resposta: alternativa **c**.

28. (UFRN) O gráfico ao lado, visto por um consumidor em uma revista especializada em Mecânica, corresponde às distribuições de frequência de substituição de uma peça de automóvel fornecida por dois fabricantes, em função do tempo. A curva contínua refere-se à peça feita pelo fabricante *A*, enquanto a curva tracejada corresponde ao produto do fabricante *B*. A partir da leitura do gráfico, o consumidor deve concluir que:



a) as peças do fabricante *A* duram menos.

b) as peças dos dois fabricantes duram, em média, o mesmo tempo, mas a duração do produto do fabricante *A* varia menos.

c) as peças dos dois fabricantes duram, em média, o mesmo tempo, mas a duração do produto do fabricante *B* varia menos.

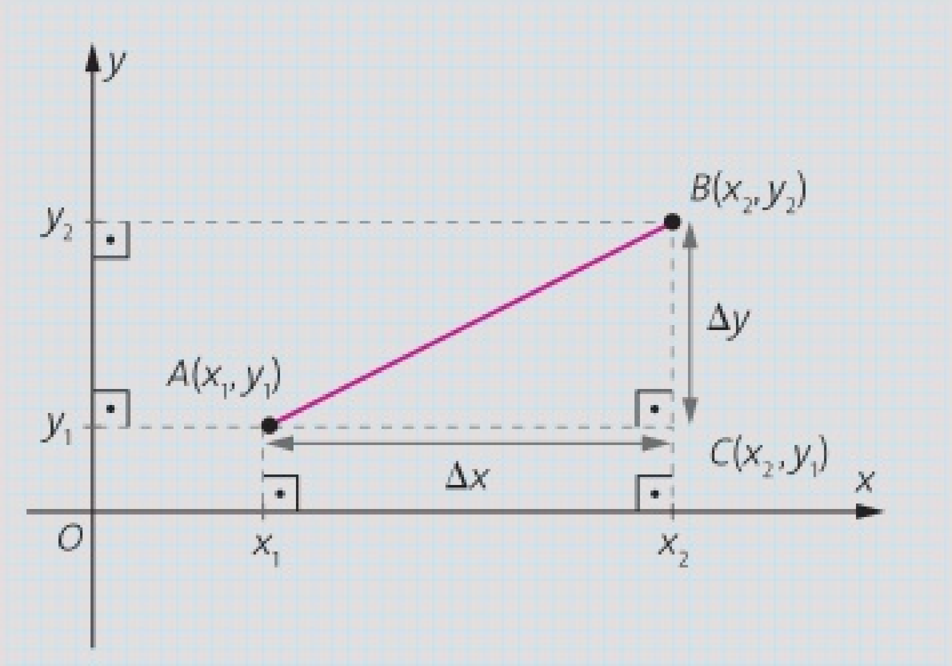
d) as peças do fabricante *B* duram menos.

Pela análise do gráfico as duas peças duram em média o mesmo tempo, e a maior concentração em torno da média na curva *A* indica que o desvio padrão é menor (varia menos).

Resposta: alternativa **b**.

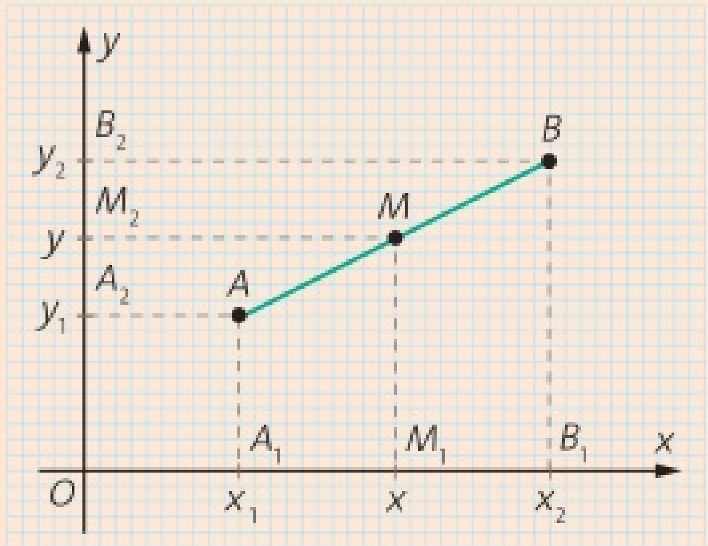
GEOMETRIA ANALÍTICA: PONTO E RETA

Distância entre dois pontos



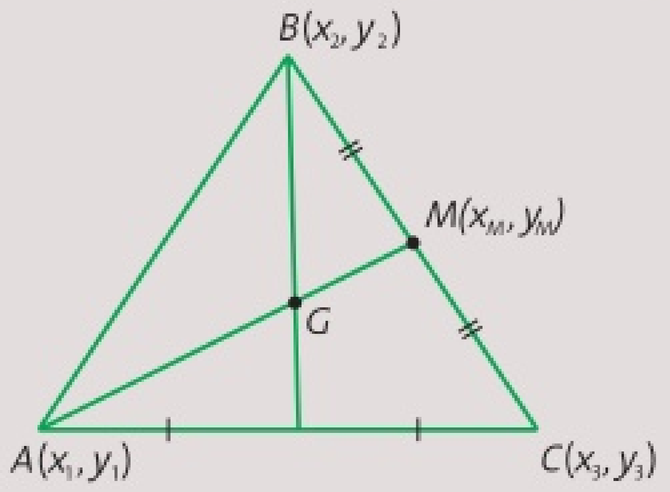
$$d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Coordenadas do ponto médio de um segmento de reta



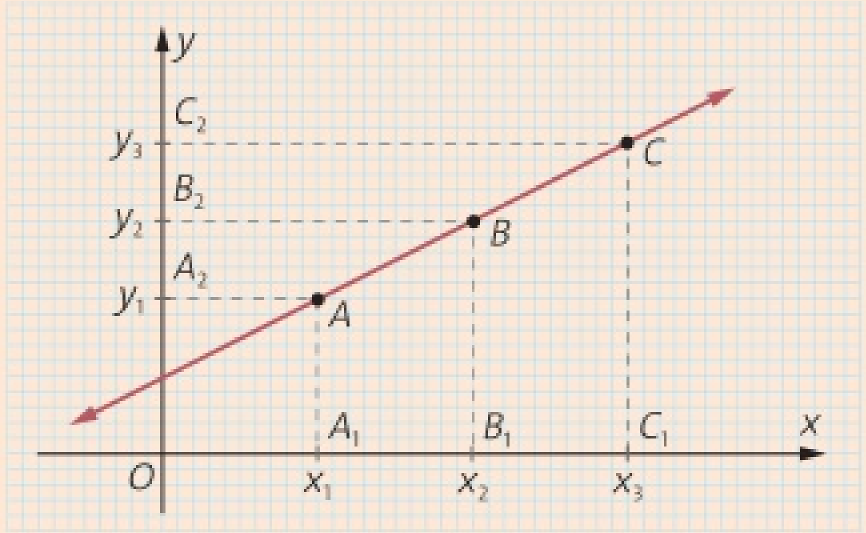
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Coordenadas do baricentro de um triângulo



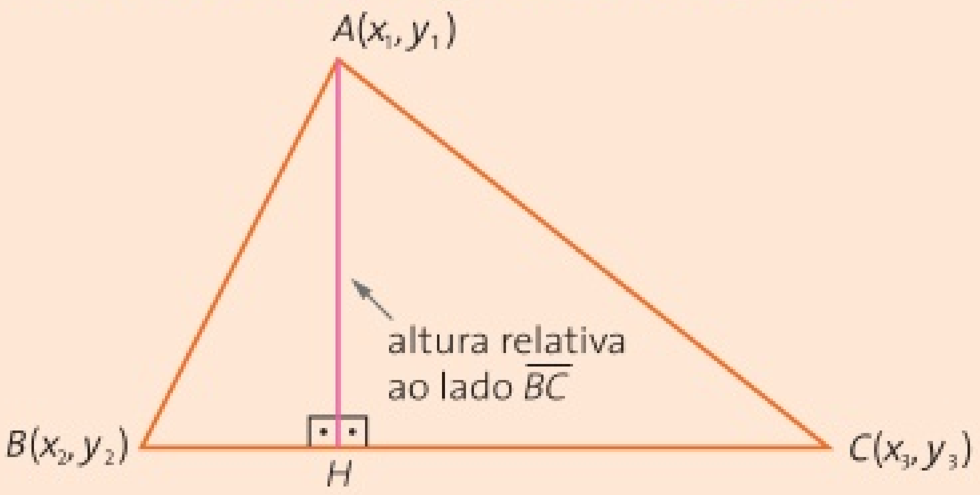
$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Condição de alinhamento de três pontos



$$D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Área de uma região triangular



$$S = \frac{1}{2}\left(\overline{BC}\right) \cdot \left(\overline{AH}\right)$$

ou

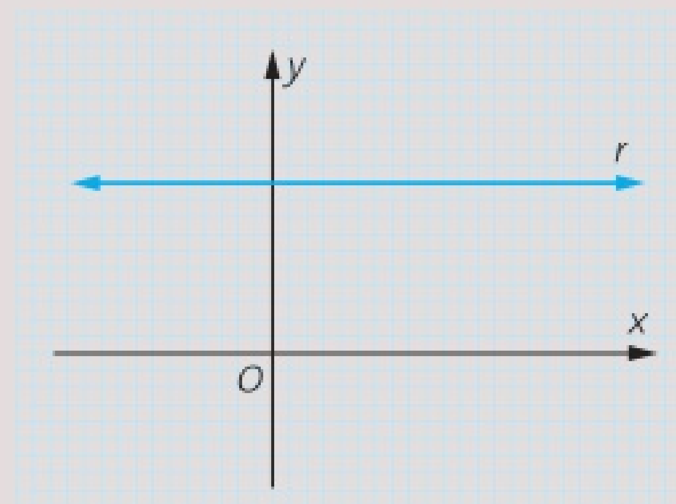
$$S = \frac{1}{2}|D| \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}, \text{ sendo } D \neq 0$$

Coeficiente angular de uma reta

$m = \text{tg}\ \alpha$

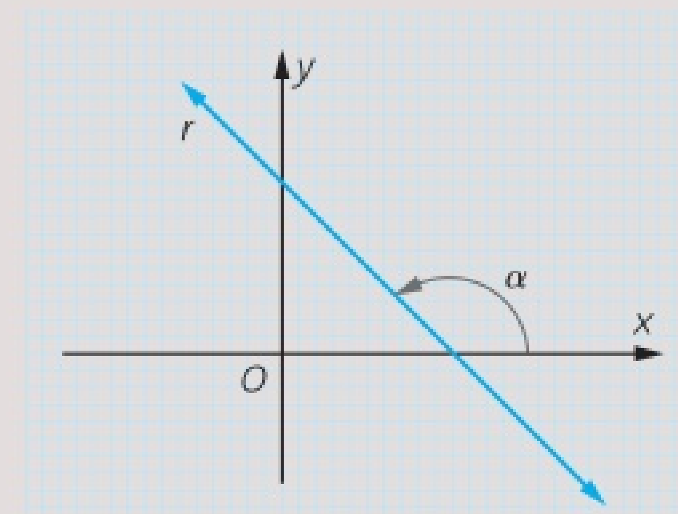
$\alpha = 0°$

$m = \text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ 0° = 0$



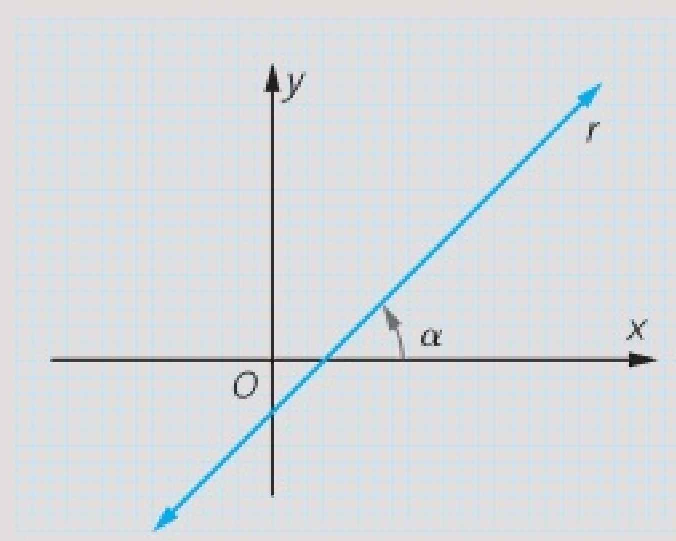
$90° < \alpha < 180°$

$\text{tg}\ \alpha < 0 \Rightarrow m < 0$



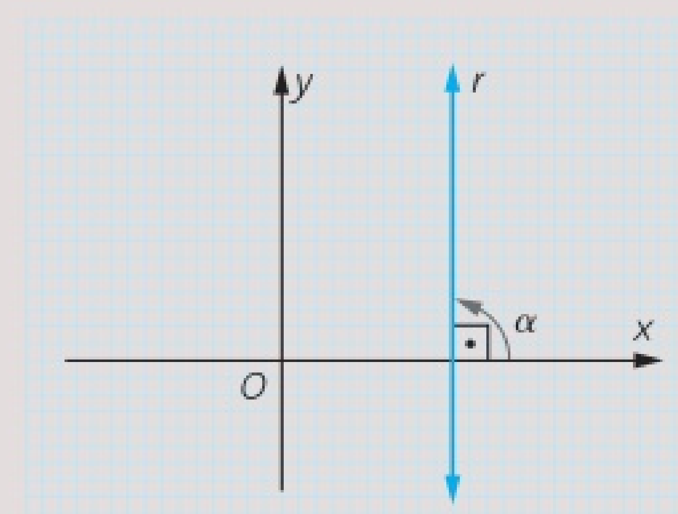
$0° < \alpha < 90°$

$\text{tg}\ \alpha > 0 \Rightarrow m > 0$



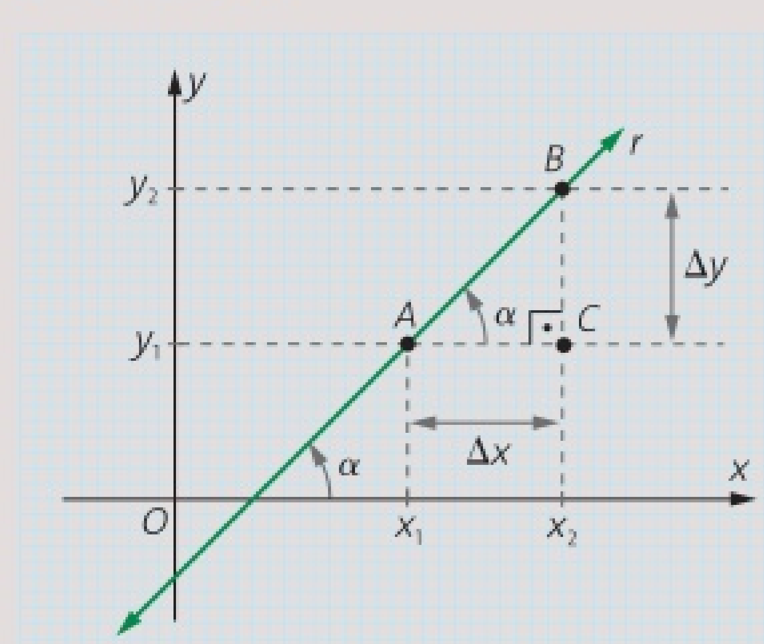
$\alpha = 90°$

tg α não é definida $\Rightarrow$ não existe m

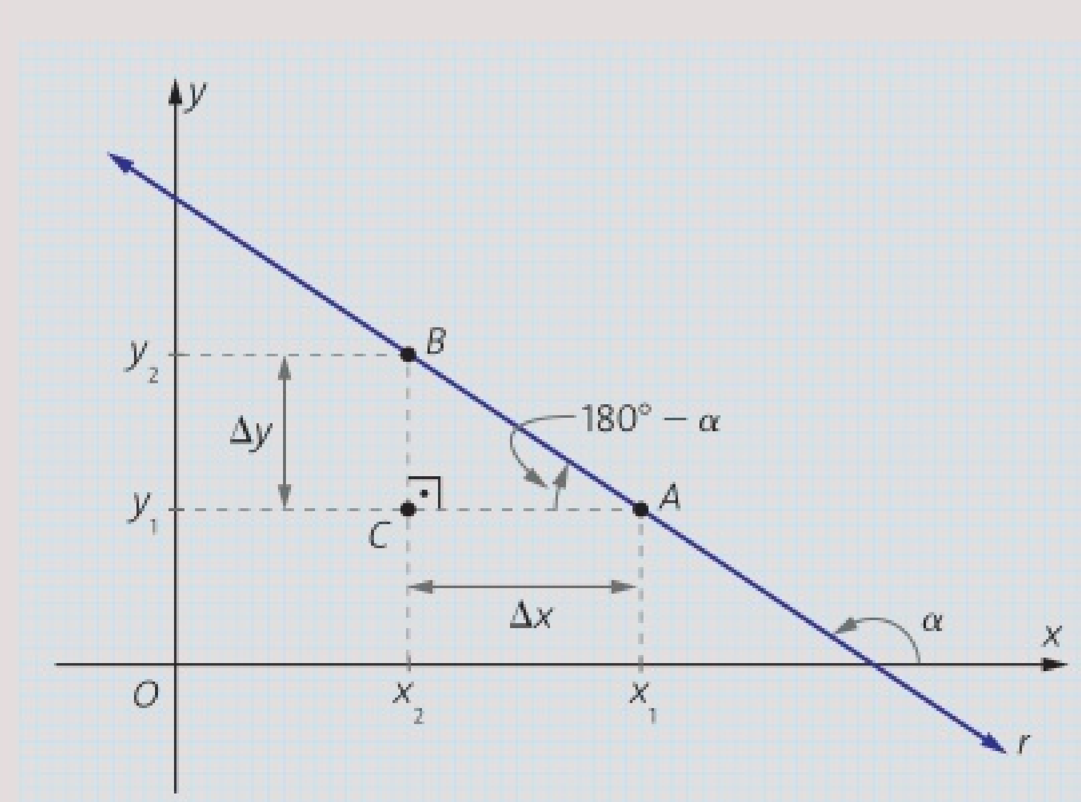


$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$0° < \alpha < 90°$



$90° < \alpha < 180°$



Formas da equação da reta

Equação reduzida

$y = mx + n$

n: coeficiente linear

m: coeficiente angular

Equação fundamental da reta

$y - y_0 = m(x - x_0)$

Equação geral da reta

$ax + by + c = 0$

Forma segmentária da equação de reta

Usando a forma reduzida $y = mx + n$, em que $m = -\dfrac{b}{a}$ e $n = b$, temos:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Equações paramétricas

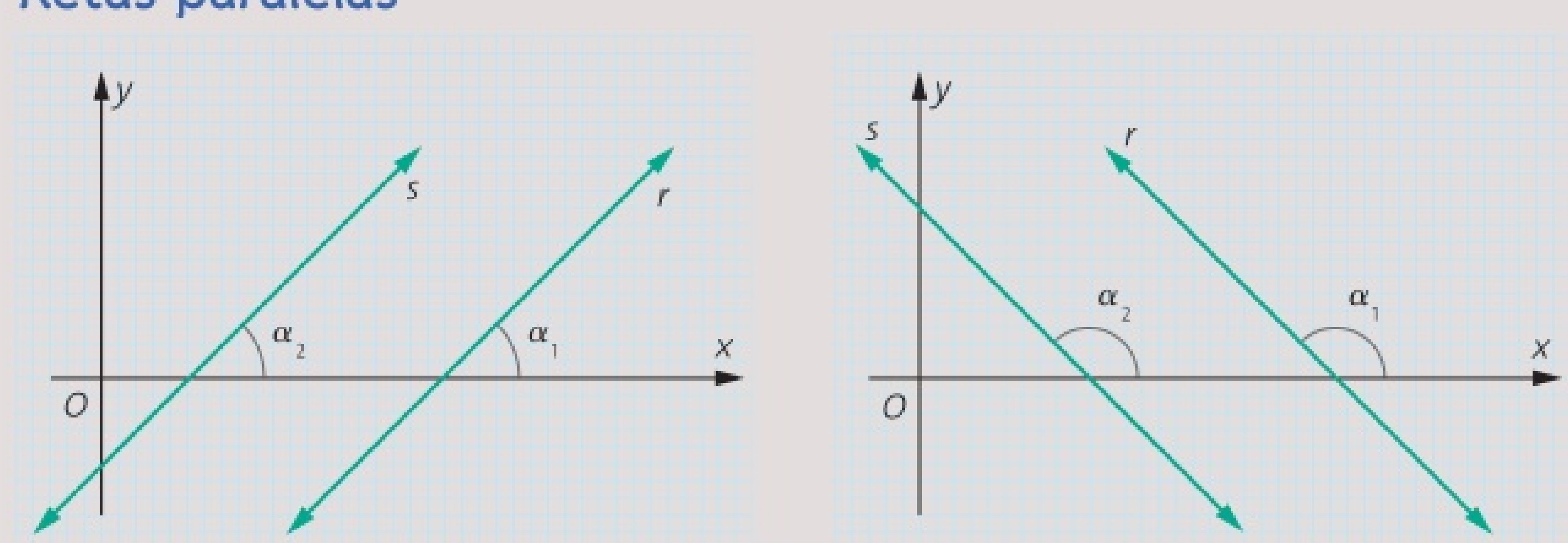
São formas de representar retas por meio de um parâmetro, nesse caso t.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções afins, então essas equações representam uma reta.

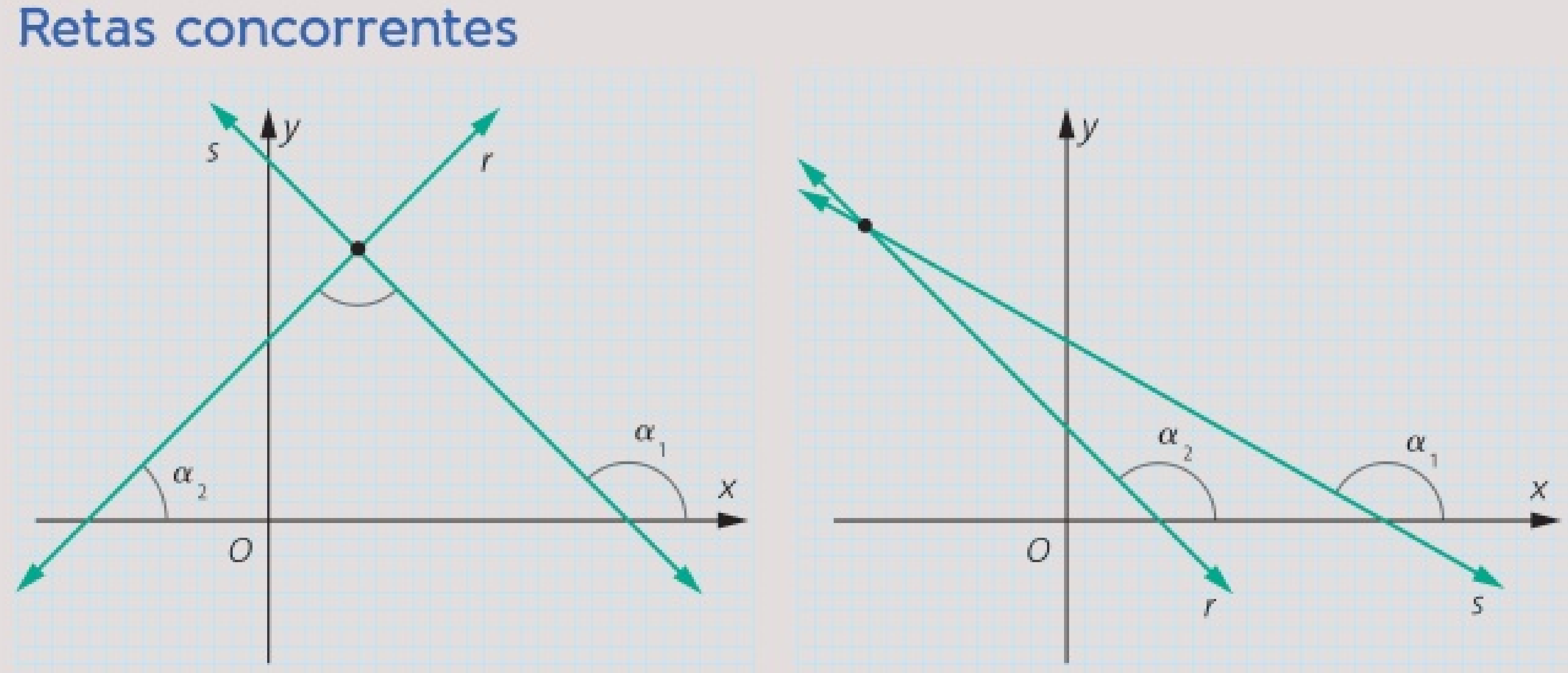
Posições relativas de duas retas

Retas paralelas



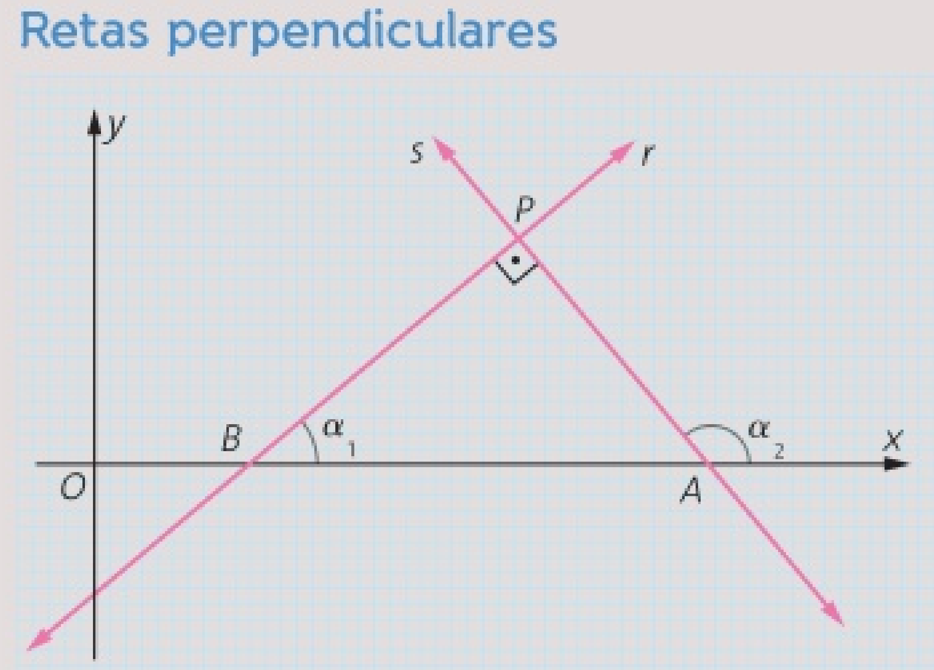
$\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \text{tg}\ \alpha_1 = \text{tg}\ \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 \Leftrightarrow r\ //\ s$

Retas concorrentes



$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Leftrightarrow \text{tg}\ \alpha_1 \neq \text{tg}\ \alpha_2 \Leftrightarrow m_1 \neq m_2 \Leftrightarrow r$ e s: concorrentes

Retas perpendiculares

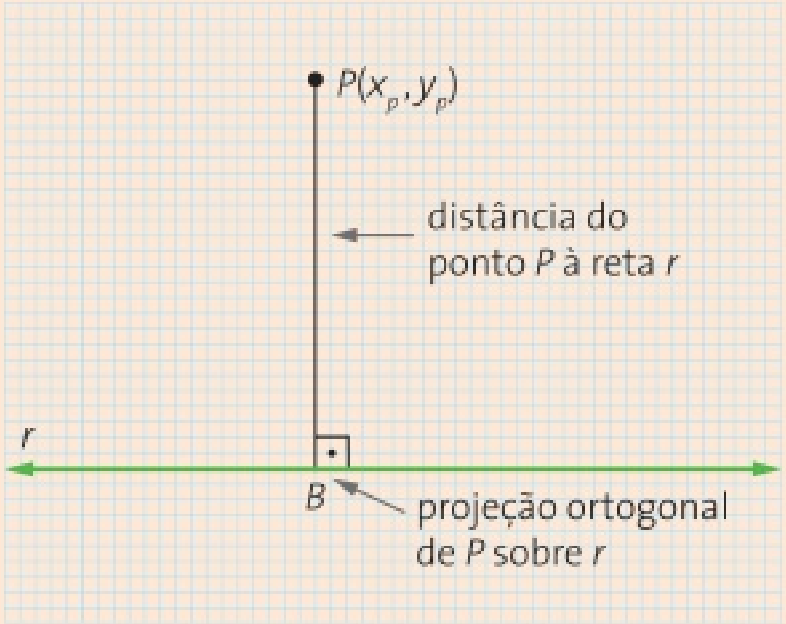


$r \perp s \Leftrightarrow m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$

ou

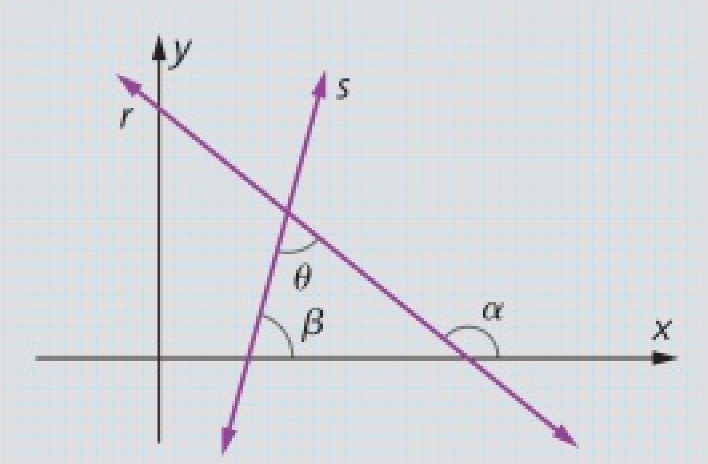
$r \perp s \Leftrightarrow m_1 m_2 = -1$

Distância de um ponto a uma reta



$$d = \frac{|ax_p + by_p + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

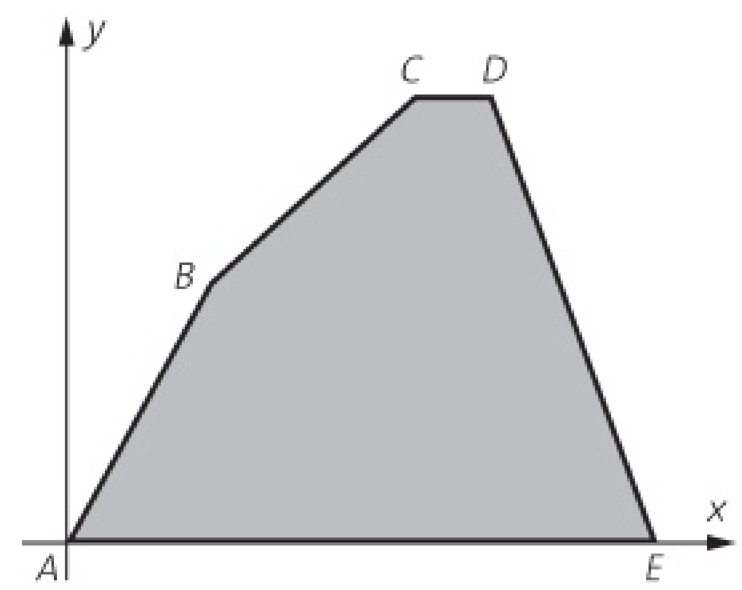
Ângulo formado por duas retas



$$\text{tg}\,\theta = \text{tg}\,(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta} = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right|$$

Exercícios

1. (Udesc) A região sombreada na figura tem como limitantes as retas $y = 0$, $y = 2x$, $y = x + 2$, $y = 7$ e $y = 25 - 3x$.



A área da região sombreada é:

a) $\frac{152}{3}$.

b) $\frac{319}{6}$.

c) $\frac{107}{3}$.

d) $\frac{214}{3}$.

e) $\frac{86}{3}$.

- $A(0, 0)$
- Ponto B: intersecção das retas $y = 2x$ e $y = x + 2$

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$$
$$x = 2$$

$y = 2x \Rightarrow y = 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 4$

Logo, $B(2, 4)$.

- Ponto C: intersecção das retas $y = x + 2$ e $y = 7$

$7 = x + 2 \Rightarrow x = 5$

Logo, $C(5, 7)$.

- Ponto D: intersecção das retas $y = 7$ e $y = 25 - 3x$

$7 = 25 - 3x \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

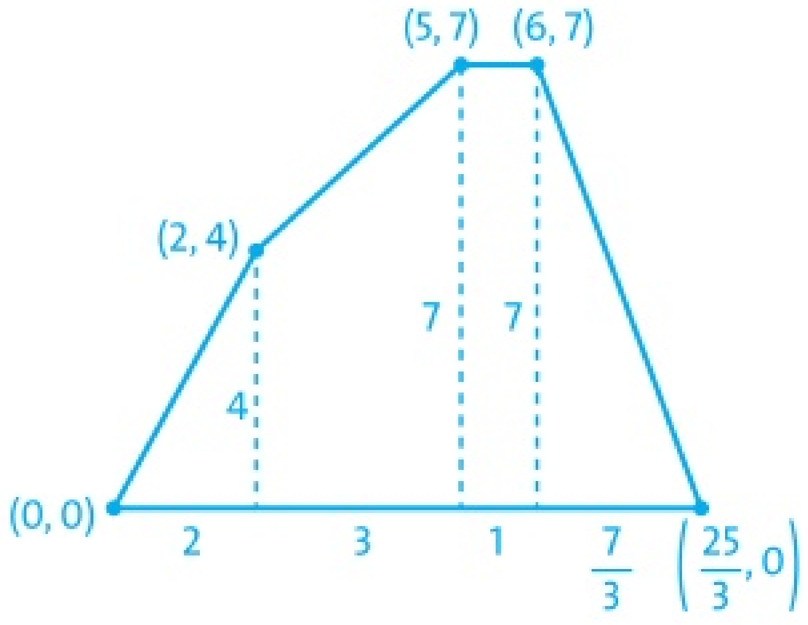
Logo, $D(6, 7)$.

- Ponto E: intersecção das retas $y = 25 - 3x$ e $y = 0$

$25 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{25}{3}$

Logo, $E\left(\frac{25}{3}, 0\right)$.

Então:

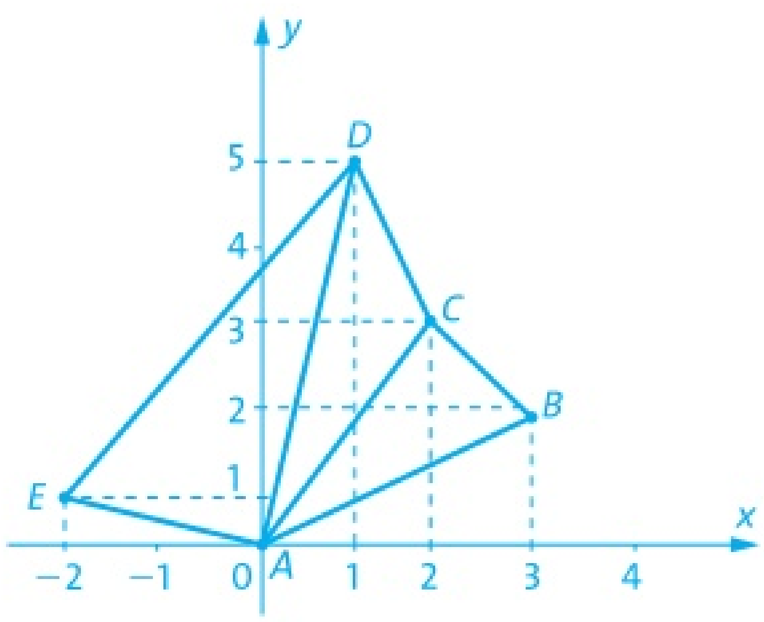


$$A = \frac{2 \cdot 4}{2} + \frac{(4 + 7) \cdot 3}{2} + 7 \cdot 1 + \frac{7 \cdot \frac{7}{3}}{2} \Rightarrow A = 4 + \frac{33}{2} + 7 + \frac{49}{6} \Rightarrow A = \frac{24 + 99 + 42 + 49}{6} \Rightarrow A = \frac{214}{6} \Rightarrow A = \frac{107}{3}$$

Resposta: alternativa **c**.

2. (Unimontes-MG) A área do pentágono cujos vértices são $A(0, 0)$, $B(3, 2)$, $C(2, 3)$, $D(1, 5)$ e $E(-2, 1)$ é:

a) 14,5. b) 10,5. c) 12,5. d) 11,5.



$A_{\text{pentágono}} = A_{\triangle EAD} + A_{\triangle ADC} + A_{\triangle ABC}$

Mas $A_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}|D_{ABC}|$. Então:

- $A_{\triangle EAD}$

$$D_{EAD} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 10 = 11$$

$$A_{\triangle EAD} = \frac{1}{2} \cdot |11| = \frac{11}{2}$$

- $A_{\triangle ADC}$

$$D_{ADC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 10 = -7$$

$$A_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot |-7| = \frac{7}{2}$$

- $A_{\triangle ABC}$

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot |5| = \frac{5}{2}$$

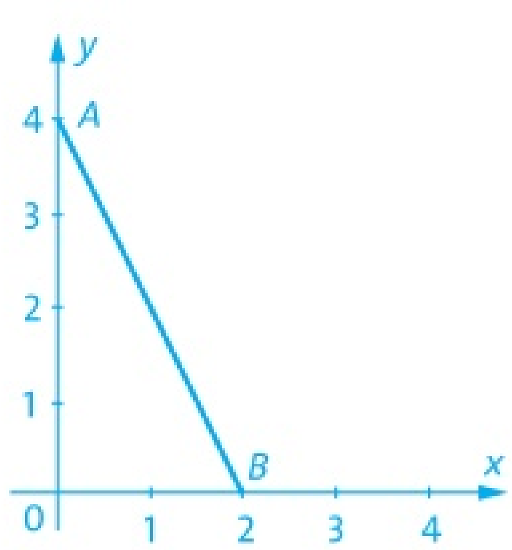
Logo:

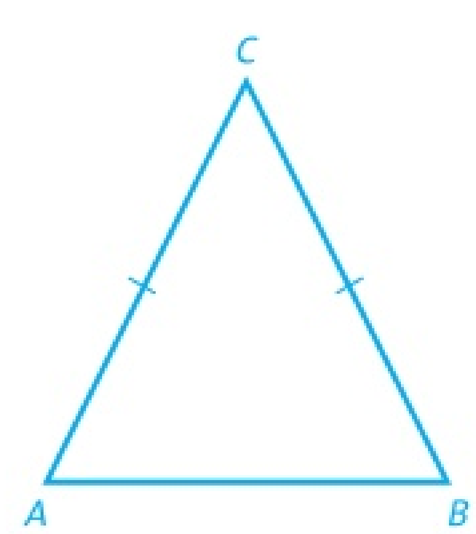
$$A_{\text{pentágono}} = \frac{11}{2} + \frac{7}{2} + \frac{5}{2} = 11{,}5$$

Resposta: alternativa **d**.

3. (ESPM-SP) O triângulo de vértices $A(0, 4)$, $B(2, 0)$ e $C(x, 0)$ é isósceles de base AB. Sua área mede:

a) 8. b) 10. c) 12. d) 14. e) 16.





$AC = BC \rightarrow$ triângulo isósceles

Como $AC = \sqrt{x^2 + 16}$ e $BC = \sqrt{(x-2)^2}$, temos:

$$\left(\sqrt{x^2 + 16}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 - 4x + 4}\right)^2 \Rightarrow x^2 + 16 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow 4x = -12 \Rightarrow x = -3$$

Logo, $C(-3, 0)$.

Mas:

$A = \dfrac{1}{2}|D|$. Então:

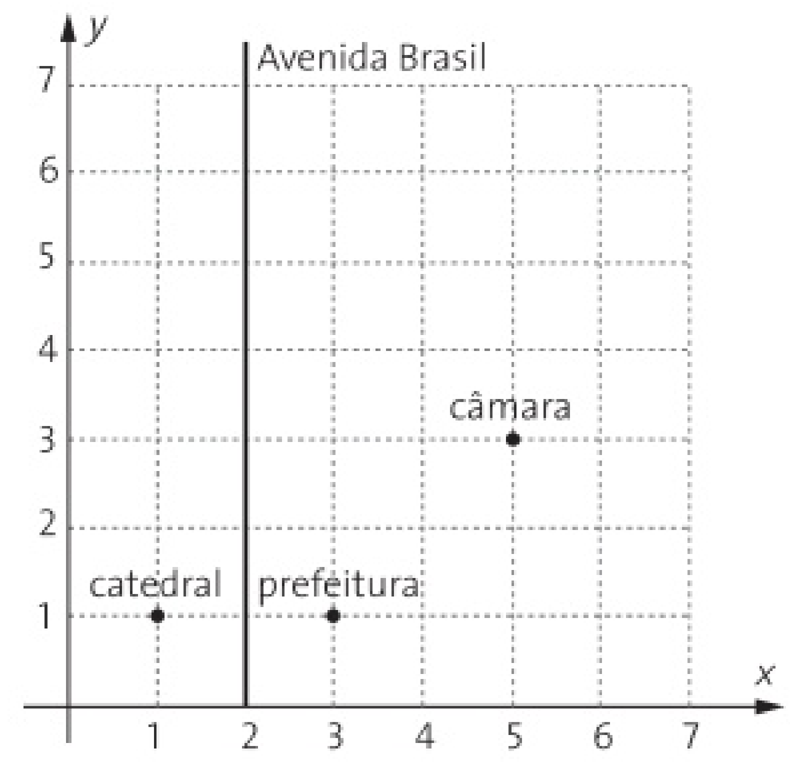
$$D = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 8 = -20$$

Portanto:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |-20| = 10$$

Resposta: alternativa **b**.

4. (Unicamp-SP) A figura ao lado apresenta parte do mapa de uma cidade, no qual estão identificadas a catedral, a prefeitura e a câmara de vereadores. Observe que o quadriculado não representa os quarteirões da cidade, servindo apenas para a localização dos pontos e retas no plano cartesiano. Nessa cidade, a Avenida Brasil é formada pelos pontos equidistantes da catedral e da prefeitura, enquanto a Avenida Juscelino Kubitschek (não mostrada no mapa) é formada pelos pontos equidistantes da prefeitura e da câmara de vereadores. Sabendo que a distância real entre a catedral e a prefeitura é de 500 m, podemos concluir que a distância real, em linha reta, entre a catedral e a câmara de vereadores é de:



a) 1 500 m.

b) $500\sqrt{5}$ m.

c) $1\,000\sqrt{2}$ m.

d) $500 + 500\sqrt{2}$ m.

Mapa: Catedral (C) (1, 1); Prefeitura (P) (3, 1); Câmara (R) (5, 3).

Então:

- $d(C, P) = \sqrt{(3-1)^2 + (1-1)^2} = 2$ (mapa)

  $d(C, P)$(real) $= 500$ m

- $d(C, R) = \sqrt{(5-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (mapa)

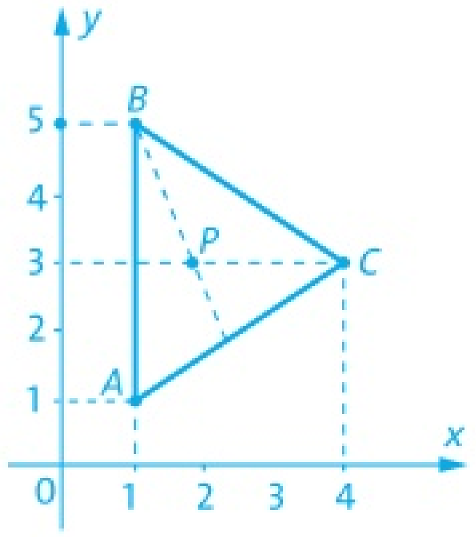
mapa		real
$2\sqrt{5}$	—	x m
2	—	500

$\Rightarrow x = 500\sqrt{5}$

Resposta: alternativa **b**.

5. (UEPB) Uma chapa metálica triangular é suspensa por um fio de aço, fixado em um ponto P de sua superfície, de sorte que a mesma fique em equilíbrio no plano horizontal determinado pelo sistema de eixos cartesiano xy. Se os vértices da chapa estão nos pontos $A(1, 1)$, $B(1, 5)$, $C(4, 3)$, então as coordenadas x, y do ponto P são, respectivamente:

a) 2 e 5.
b) 2 e 3.
c) 3 e 3.
d) 2 e 4.
e) 4 e 3.



Sendo $P(x_P, y_P)$ o baricentro do triângulo, temos:

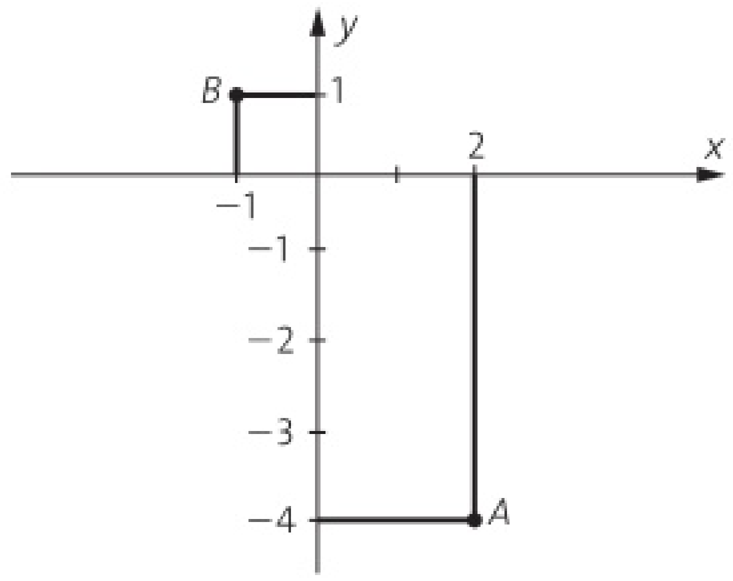
- $x_P = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_P = \dfrac{1 + 1 + 4}{3} = 2$

- $y_P = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_P = \dfrac{1 + 5 + 3}{3} = 3$

Portanto, $P(2, 3)$.

Resposta: alternativa **b**.

6. (UFU-MG) A "bocha" é um esporte trazido ao Brasil pelos imigrantes italianos. Ele consiste no lançamento de "bochas" (bolas), a partir de uma região delimitada, para situá-las o mais próximo possível de um "bolim" (bola pequena) previamente lançado. A "cancha", local onde o jogo é praticado, é uma espécie de raia e pode ser interpretada como uma porção de um plano, o qual assumiremos estar munido de um sistema de coordenadas cartesianas xOy.



Sabe-se que:

1) O bolim está localizado no ponto $A(2, -4)$.
2) Uma bocha já arremessada está localizada no ponto $B(-1, 1)$.

Um jogador deseja arremessar uma nova bocha que deverá colidir com a bocha em B, empurrando-a para próximo do bolim em A. Para facilitar o seu arremesso, ele busca posicionar-se na cancha em um ponto C, de maneira que A, B e C estejam alinhados. Se $C(h, 2)$, então, de acordo com as condições dadas, pode-se afirmar que:

a) $-2{,}1 \leqslant h < -1{,}9$. b) $-1{,}9 \leqslant h < -1{,}7$. c) $-1{,}7 \leqslant h < -1{,}5$. d) $-1{,}5 \leqslant h \leqslant -1{,}3$.

Se A, B e C estão alinhados, então:

$$\begin{vmatrix} h & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow h = -\frac{8}{5} = -1{,}6$$

Portanto, $-1{,}7 \leqslant h < -1{,}5$.

Resposta: alternativa **c**.

7. (PUC-RJ) Se os pontos $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (x, y)$ são vértices de um triângulo equilátero, então a distância entre A e C é:

a) 1. b) 2. c) 4. d) $\sqrt{2}$. e) $\sqrt{3}$.

Como $AB = AC = BC$, então:

$d(A, B) = \sqrt{2^2 + 0} \Rightarrow d(A, B) = 2$

Portanto, $AB = 2$ e $AC = 2$.

Resposta: alternativa **b**.

8. (Ufop-MG) A reta r contém os pontos $(-1, -3)$ e $(2, 3)$. O valor de m, de modo que o ponto $(m, 7)$ pertença a r, é:

a) 1. b) 2. c) 3. d) 4.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x + 2y - 3 + 6 - 3x + y = 0 \Rightarrow$$

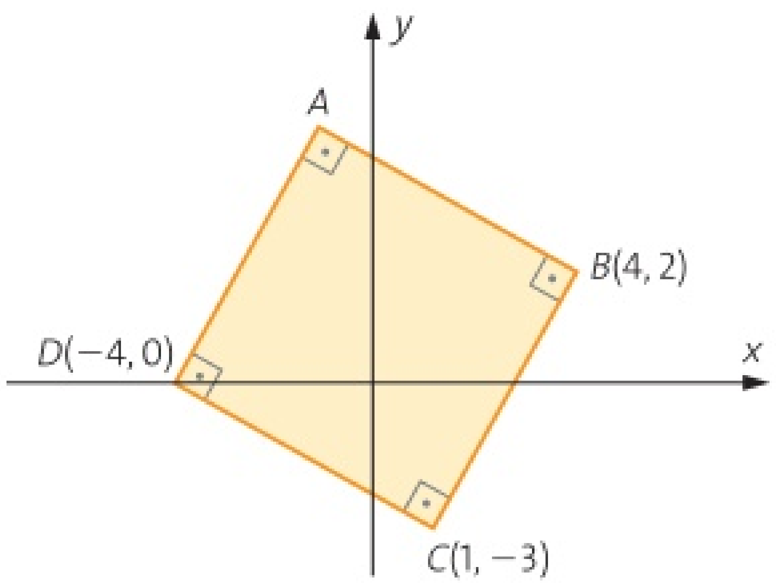
$\Rightarrow -6x + 3y + 3 = 0 \Rightarrow -2x + y + 1 = 0$

Como o ponto $(m, 7)$ pertence a r, então:

$-2m + 7 + 1 = 0 \Rightarrow -2m = -8 \Rightarrow m = 4$

Resposta: alternativa **d**.

9. (Unisa-SP) Na figura, $ABCD$ é um quadrado.



A distância do ponto A ao ponto (0, 0) é:

a) $\sqrt{30}$. b) $\sqrt{46}$. c) $\sqrt{26}$. d) $\sqrt{22}$. e) $\sqrt{38}$.

As diagonais do quadrado se encontram no ponto médio. Assim:

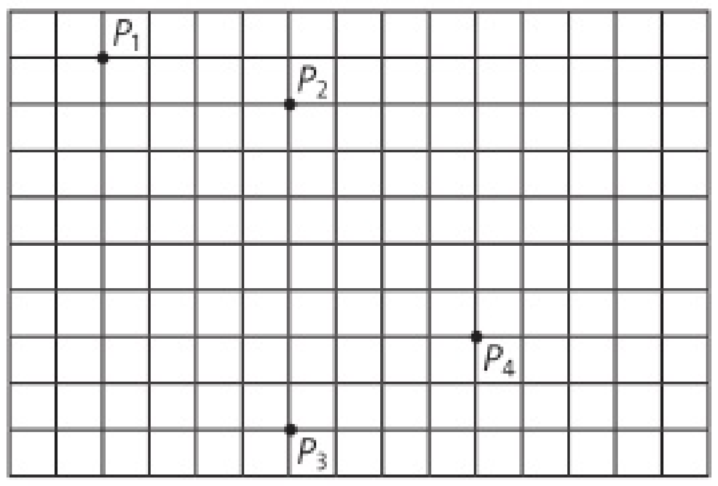
- $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow x_A + 1 = 4 - 4 \Rightarrow x_A = -1$
- $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow y_A - 3 = 2 + 0 \Rightarrow y_A = 5$

Logo, $A(-1, 5)$. Portanto:

$d(A, O) = \sqrt{(0 + 1)^2 + (0 - 5)^2} = \sqrt{26}$

Resposta: alternativa **c**.

10. (UFRN) O piso de um salão de 4 m de largura por 6 m de comprimento é revestido com pedras de granito quadradas, como mostra a figura abaixo. Em cada uma das posições – P_1, P_2, P_3 e P_4 – existe uma pessoa.



As distâncias entre P_2 e P_3 e entre P_1 e P_4 são, respectivamente:

a) 2,8 m e 4,0 m. b) 2,8 m e 3,4 m. c) 3,2 m e 3,2 m. d) 3,0 m e 3,6 m.

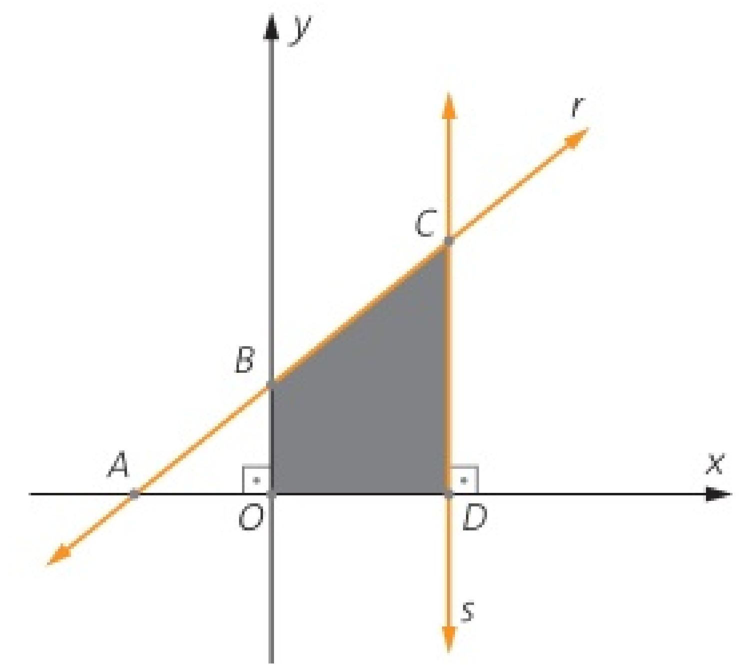
Do texto e da imagem, tem-se que cada pedra de granito mede 0,4 m. Assim:

$d(P_2, P_3) = \sqrt{0 + (2{,}8)^2} = 2{,}8$

$d(P_1, P_4) = \sqrt{(4 - 0{,}8)^2 + (1{,}2 - 3{,}6)^2} \Rightarrow d(P_1, P_4) = \sqrt{(3{,}2)^2 + (2{,}4)^2} \Rightarrow d(P_1, P_4) = \sqrt{16} = 4$

Resposta: alternativa **a**.

11. (UPE) A reta r da figura possui equação $2x - 3y + 6 = 0$, e o trapézio $OBCD$ tem área igual a 9 unidades de área. Qual é a equação da reta s?



a) $x - 2{,}5 = 0$ c) $x - 3{,}5 = 0$ e) $x - 4{,}5 = 0$

b) $x - 3 = 0$ d) $x - 4 = 0$

Como $B \in r$, temos:

$2(0) - 3y + 6 = 0 \Rightarrow y = 2$

Logo, $B(0, 2)$.

Vamos considerar $D(\alpha, 0)$ e $C(\alpha, \beta)$. Como $C \in r$, temos:

$2\alpha - 3\beta + 6 = 0 \Rightarrow \beta = \dfrac{2\alpha + 6}{3}$

Logo, $C\left(\alpha, \dfrac{2\alpha + 6}{3}\right)$.

Portanto, a área do trapézio é dada por:

$$\frac{\left(2 + \frac{2\alpha + 6}{3}\right) \cdot \alpha}{2} = 9 \Rightarrow 2\alpha + \frac{2\alpha^2 + 6\alpha}{3} = 18 \Rightarrow 2\alpha^2 + 12\alpha - 54 = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 6\alpha - 27 = 0 \Rightarrow \alpha = 3 \text{ ou } \alpha = -9$$

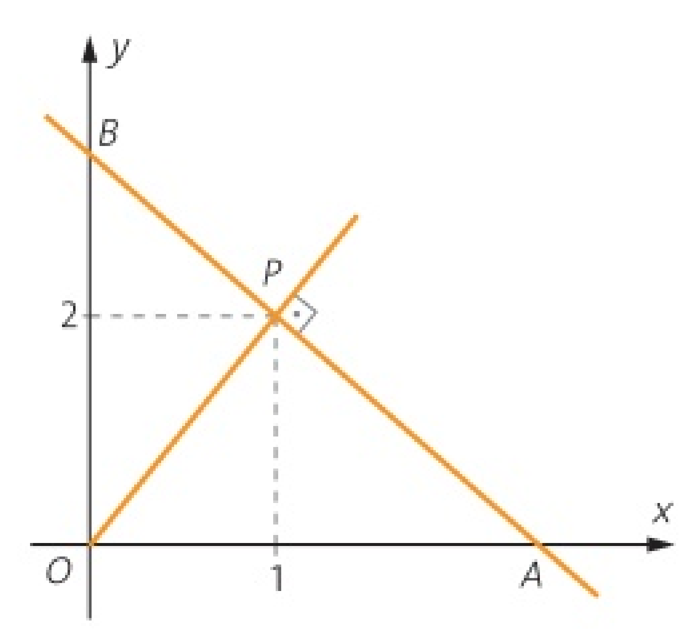
Assim, a equação da reta s é dada por:

$(s)\ x = 3 \Rightarrow (s)\ x - 3 = 0$

Resposta: alternativa **b**.

---

12. (Unicamp-SP) A área do triângulo OAB esboçado na figura ao lado é:



a) $\dfrac{21}{4}$. b) $\dfrac{23}{4}$. c) $\dfrac{25}{4}$. d) $\dfrac{27}{4}$.

Seja s a reta que passa por OP. Como $O(0, 0)$ e $P(1, 2)$, a equação de s é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = y - 2x = 0$$

Então:

$m_s = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{-2}{1} = 2$

Seja r a reta que passa por AB. Então $r \perp s$. Logo:

$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_r \cdot 2 = -1 \Rightarrow m_r = -\dfrac{1}{2}$

Vamos encontrar a equação da reta r:

$y - y_P = m_r(x - x_P) \Rightarrow y - 2 = -\dfrac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow 2y - 4 = -x + 1 \Rightarrow 2y + x - 5 = 0$

Como A e B pertencem a r, temos:

- $A(x, 0)$

  $2 \cdot 0 + x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

  Logo, $A(5, 0)$.

- $B(0, y)$

  $2y + 0 - 5 = 0 \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow y = \dfrac{5}{2}$

  Logo, $B\left(0, \dfrac{5}{2}\right)$.

Portanto:

$$A_{\triangle OAB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{5 \cdot \frac{5}{2}}{2} = \frac{25}{4}$$

Resposta: alternativa **c**.

13. (PUC-RJ) Quais os vértices do triângulo cujos lados são as retas $x + y = 0$, $y = x$ e $y = 3$?

a) (2, 2), (2, −2) e (3, 3)

b) (1, 1), (2, 2) e (3, −3)

c) (3, 3), (0, 0) e (−3, 3)

d) (3, 3), (−1, −1) e (2, 2)

e) (0, 0), (3, 3) e (3, 0)

- $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$
  $2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Logo, $x = 0$.

Portanto, o primeiro vértice do triângulo é (0, 0).

- $\begin{cases} x + y = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -y = -3 \end{cases}$
  $x = -3$

Portanto, o segundo vértice do triângulo é (−3, 3).

Resposta: alternativa **c**.

14. (UERN) Uma reta tem coeficiente angular igual a −2 e passa pelos pontos (3, 4) e (4, k). A soma do coeficiente linear da reta com o valor de k é:

a) 5. b) 7. c) 12. d) 14.

Se $m = -2$, então:

$\frac{k - 4}{4 - 3} = -2 \Rightarrow k - 4 = -2 \Rightarrow k = 2$

Sendo q o coeficiente linear, temos:

$y = -2x + q$

Como (3, 4) pertence à reta, temos:

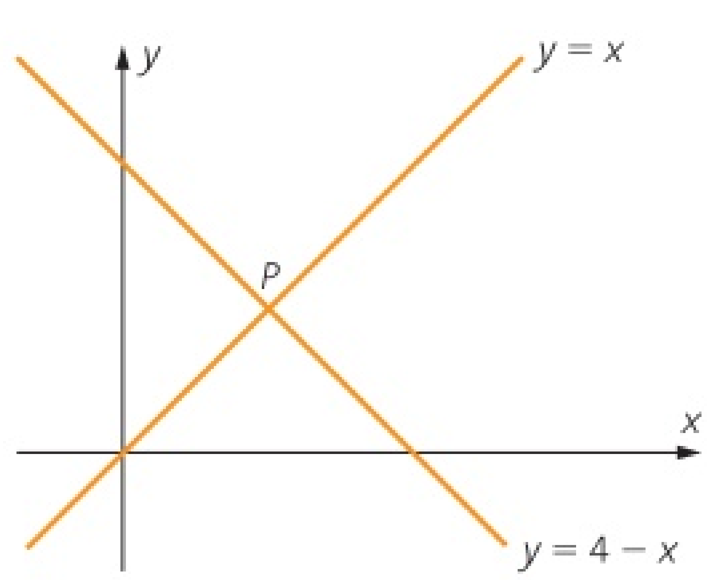
$4 = -2 \cdot 3 + q \Rightarrow q = 10$

Logo:

$k + q = 2 + 10 = 12$

Resposta: alternativa **c**.

15. (Unemat-MT) Dado o gráfico da figura abaixo:



Seja o ponto P intersecção das duas retas, seu par ordenado será dado por:

a) $P(1, 3)$. b) $P(2, 2)$. c) $P(2, 3)$. d) $P\left(\frac{2}{3}, 2\right)$. e) $P(2, 4)$.

$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases}$
$2x = 4 \Rightarrow x = 2$

Como $x = y$, temos $y = 2$.

Logo, $P(2, 2)$.

Resposta: alternativa **b**.

16. (FGV-SP) No plano cartesiano, o triângulo de vértices $A(1, 2)$, $B(m, 4)$ e $C(0, 6)$ é retângulo em A. O valor de m é igual a:

a) 7. b) 8. c) 9. d) 50. e) 51.

Se o triângulo ABC é retângulo em A, então $AB \perp AC$. Assim:

$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \frac{4-2}{m-1} \cdot \frac{6-2}{0-1} = -1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{m-1} \cdot (-4) = -1 \Rightarrow m - 1 = 8 \Rightarrow m = 9$

Resposta: alternativa **c**.

17. (Furg-RS) As retas $(r)\ y = 2x - 1$ e $(s)\ y = ax + b$ são perpendiculares no ponto $A(2, y)$. Os valores de a e b são:

a) $-\frac{1}{2}$ e 2. c) $-\frac{1}{2}$ e -1. e) $\frac{1}{2}$ e 2.

b) $-\frac{1}{2}$ e -4. d) $-\frac{1}{2}$ e 4.

$(r)\ 2x - y - 1 = 0$

$m_r = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_r = -\frac{2}{-1} \Rightarrow m_r = 2$

Mas:

$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{2}$

Como $A \in r$, vem:

$y = 2 \cdot 2 - 1 \Rightarrow y = 3$

Logo, $A(2, 3)$.

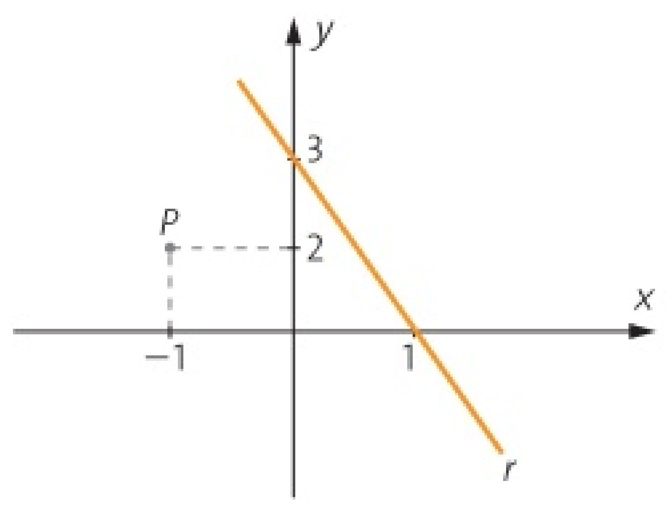
A equação da reta s pode ser dada por:

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$

Portanto, os valores de a e b são $-\frac{1}{2}$ e 4.

Resposta: alternativa **d**.

18. (Ufam) No gráfico abaixo, a reta s que passa pelo ponto P é paralela à reta r e tem como equação:



a) $3x - y - 1 = 0$. c) $x + 3y + 1 = 0$. e) $3x + y + 1 = 0$.

b) $3x + y - 3 = 0$. d) $3x + y - 1 = 0$.

$m_r = \frac{0-3}{1-0} = -3$

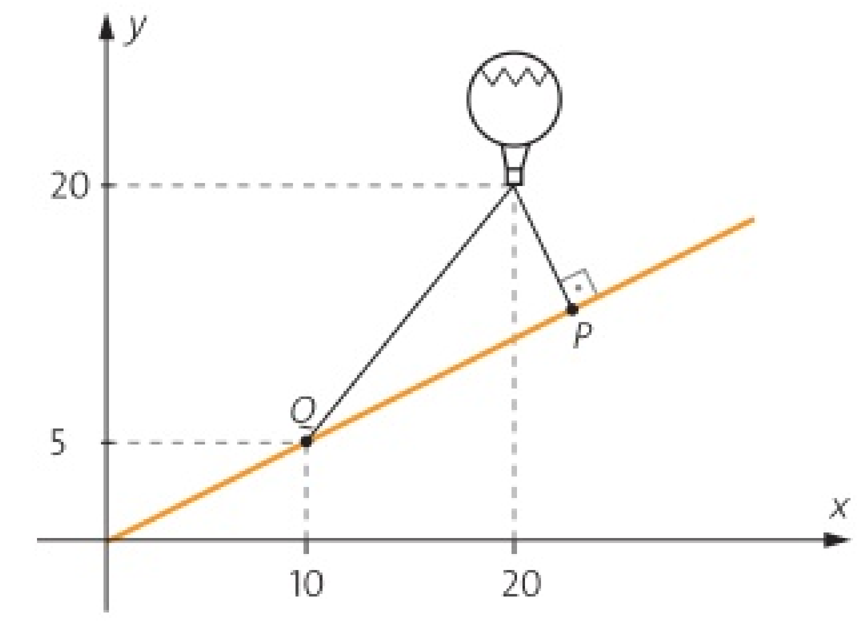
Como $r \parallel s$, então:

$y - 2 = -3(x + 1) \Rightarrow y - 2 = -3x - 3 \Rightarrow 3x + y + 1 = 0$

Resposta: alternativa **e**.

19. (UFPR) Um balão de ar quente foi lançado de uma rampa inclinada. Utilizando o plano cartesiano, a figura ao lado descreve a situação de maneira simplificada. Ao ser lançado, o balão esticou uma corda presa aos pontos P e Q, mantendo-se fixo no ar. As coordenadas do ponto P, indicado na figura, são, então:

a) (21, 7). b) (22, 8). c) (24, 12). d) (25, 13). e) (26, 15).



Reta $\overleftrightarrow{PQ}$ $\begin{cases} m = \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$

Como $P \in \overleftrightarrow{PQ}$, então $P\left(x, \dfrac{x}{2}\right)$.

Sendo $B(20, 20)$ temos $\overline{PB} \perp \overline{QP}$. Assim:

$$m_{QP} \cdot m_{PB} = -1 \Rightarrow \frac{\frac{x}{2} - 5}{x - 10} \cdot \frac{\frac{x}{2} - 20}{x - 20} = -1 \Rightarrow x = 24$$

Logo, $P(24, 12)$.

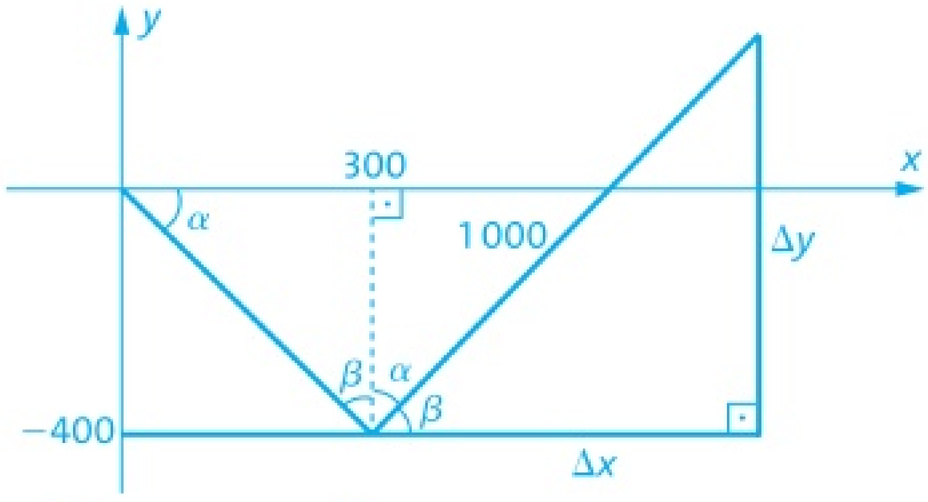
Observação: A única alternativa da forma $\left(x, \dfrac{x}{2}\right)$ é **c**, portanto não é necessário obter x para acertar a questão.

Resposta: alternativa **c**.

---

20. (Fepecs-DF) Um avião taxia (preparando para decolar) a partir do ponto que a torre de controle do aeroporto considera a origem dos eixos coordenados, com escala em metros. Ele segue em linha reta até o ponto (300, −400), onde realiza uma curva de 90° no sentido anti-horário, seguindo, a partir daí, em linha reta. Após algum tempo, o piloto acusa defeito no avião, relatando a necessidade de abortar a decolagem. Se, após a mudança de direção, o avião percorre 1 000 metros até parar, as coordenadas do ponto para o qual a torre deve encaminhar a equipe de resgate são:

a) (1 400, 400). b) (1 300, 600). c) (1 200, 300). d) (1 100, 200). e) (1 000, 500).



$$\frac{\Delta y}{1000} = \text{sen}\ \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \Delta y = 600$$

$$\frac{\Delta x}{1000} = \cos \beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \Delta x = 800$$

Então:

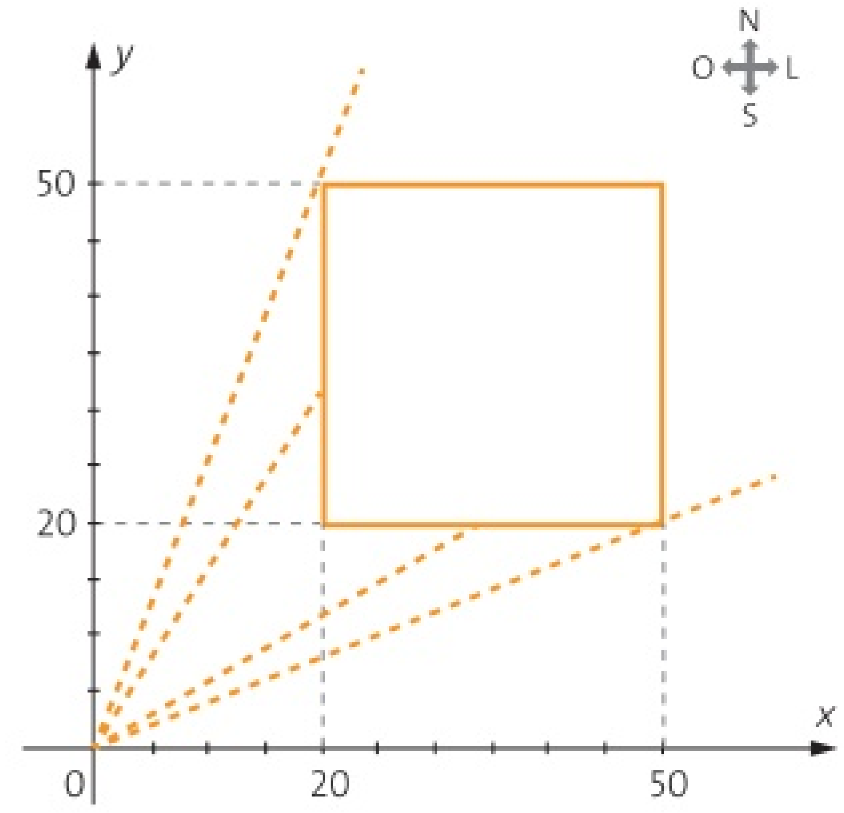
$300 + 800 = 1100$

$-400 + 600 = 200$

Logo, o ponto é (1 100, 200).

Resposta: alternativa **d**.

21. (UFPB) A figura ao lado mostra, no plano cartesiano, a vista superior de um museu que possui a forma de um quadrado. Como parte do sistema de segurança desse museu, há, localizado no ponto (0, 0), um emissor de raios retilíneos o qual detecta a presença de pessoas. Os raios emitidos são paralelos ao plano do piso e descrevem trajetórias paralelas às semirretas $y = \lambda x$, com $x \geqslant 0$, onde λ é um parâmetro que ajusta a direção dos raios, de acordo com o ponto que se deseja proteger. No museu, só existem entradas nos lados oeste e sul, os quais devem ficar totalmente protegidos pelo sistema de segurança. De acordo com essas informações, o parâmetro λ deve variar, pelo menos, no intervalo:



a) $\left[\frac{2}{7}, 2\right]$.
b) $\left[\frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right]$.
c) $\left[3, \frac{7}{2}\right]$.
d) [8, 10].
e) [11, 13].

- $m_r = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$

Logo, (r): $y = \frac{5}{2}x$.

- $m_s = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$

Logo, (s): $y = \frac{2}{5}x$.

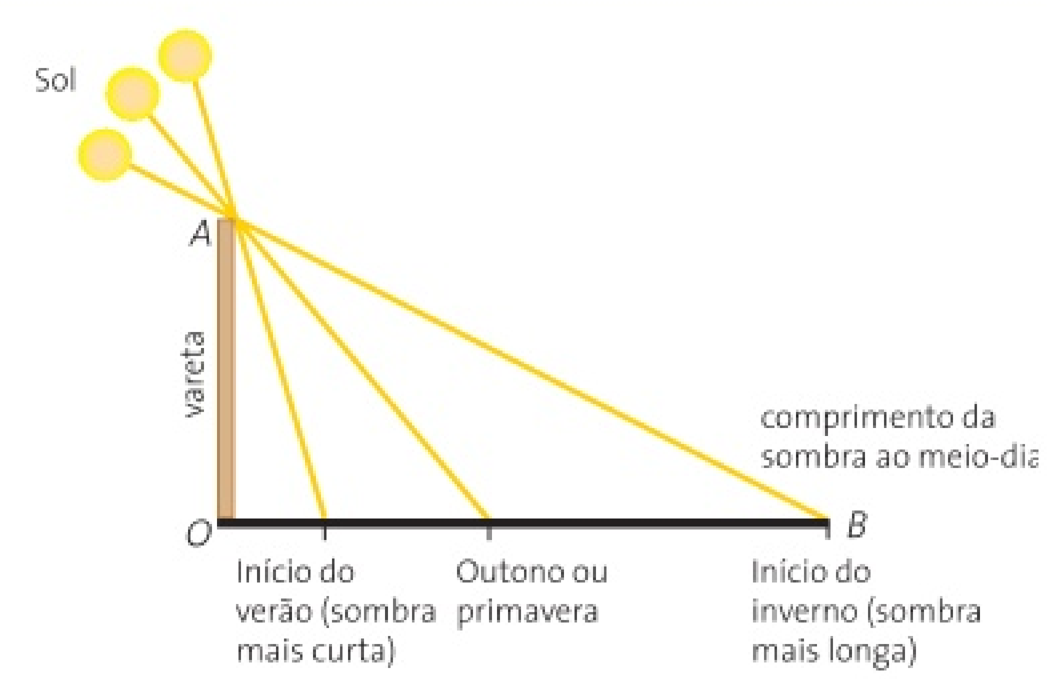
Portanto, λ varia no intervalo $\left[\frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right]$.

Resposta: alternativa **b**.

---

22. (Uerj) Sabedoria egípcia

Há mais de 5 000 anos os egípcios observaram que a sombra no chão provocada pela incidência dos raios solares de um gnômon (um tipo de vareta) variava de tamanho e de direção. Com medidas feitas sempre ao meio-dia, notaram que a sombra, com o passar dos dias, aumentava de tamanho. Depois de chegar a um comprimento máximo, ela recuava até perto da vareta. As sombras mais longas coincidiam com dias frios. E as mais curtas, com dias quentes.



Adaptado de: Revista *Galileu*, janeiro de 2001.

Um estudante fez uma experiência semelhante à descrita no texto, utilizando uma vareta OA de 2 metros de comprimento. No início do inverno, mediu o comprimento da sombra OB, encontrando 8 metros. Utilizou, para representar sua experiência, um sistema de coordenadas cartesianas, no qual o eixo das ordenadas (y) e o eixo das abscissas (x) continham, respectivamente, os segmentos de reta que representavam a vareta e a sombra que ela determinava no chão. Esse estudante pôde, assim, escrever a seguinte equação da reta que contém o segmento AB:

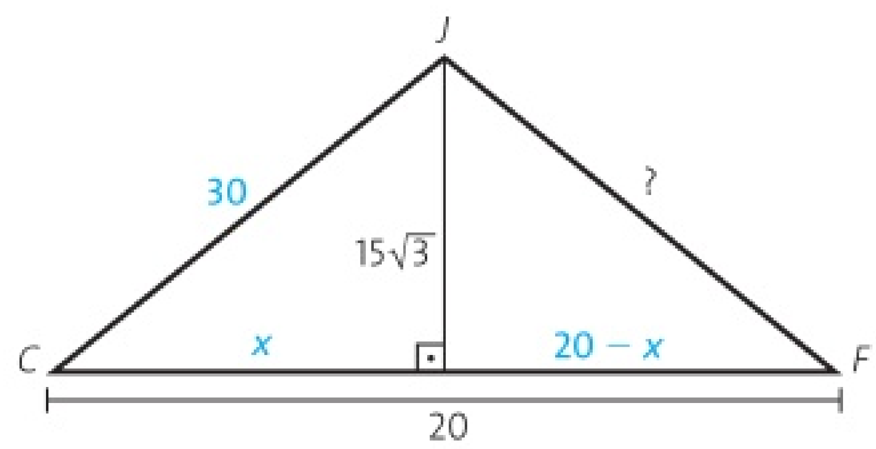
a) $y = 8 - 4x$.
b) $x = 6 - 3y$.
c) $x = 8 - 4y$.
d) $y = 6 - 3x$.

As coordenadas de A e B são $A(0, 2)$ e $B(8, 0)$. Então:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 8y - 16 = 0 \Rightarrow x = 8 - 4y$$

Resposta: alternativa **c**.

23. (Ufes) Numa região plana e horizontal, um jovem encontra-se em um ponto *J* distante 30 metros de um cavalo que está em um ponto *C*. Um fumante encontra-se em um ponto *F* distante 20 metros do ponto *C*. A distância do ponto *J* à reta que passa pelos pontos *C* e *F* mede $15\sqrt{3}$ cm.



A distância, em metros, entre o jovem e o fumante é:

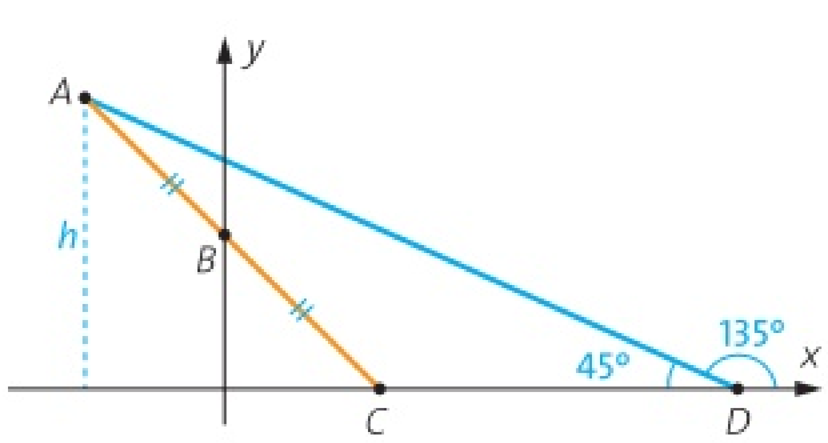
a) $9\sqrt{3}$.
b) $8\sqrt{5}$.
c) $10\sqrt{5}$.
d) $10\sqrt{6}$.
e) $10\sqrt{7}$.

$(30)^2 = (15\sqrt{3})^2 + x^2 \Rightarrow 900 = 675 + x^2 \Rightarrow x = 15$

$JF^2 = (5)^2 + (15\sqrt{3})^2 \Rightarrow JF^2 = 25 + 675 \Rightarrow JF^2 = 700 \Rightarrow JF = 10\sqrt{7}$

Resposta: alternativa **e**.

24. (Uesc-BA) Os pontos *A*, *B*, *C* e *D* representam, no sistema de coordenadas cartesianas, a localização de quatro cidades, e a poligonal *ABCD* representa a trajetória de um automóvel que vai de *A* até *D*, passando por *B* e *C*. Sabe-se que *B* é o ponto médio do segmento *AC*, cuja reta-suporte é $r: y = -\sqrt{3}(x - 1)$, e que a reta-suporte do segmento *AD* faz com o eixo das abscissas um ângulo $\theta = 135°$. Com base nessas informações, pode-se concluir que a distância de *A* até *D* é dada por um número:



01) divisível por 20.
02) divisível por 12.
03) divisor de 20.
04) divisor de 12.
05) irracional.

Do texto, temos:

$r: y = -\sqrt{3}(x - 1)$

Portanto, $B(0, \sqrt{3})$.

Como *B* é ponto médio de *AC*, temos $y_A = 2\sqrt{3}$.

Assim, $h = 2\sqrt{3}$.

Da figura, temos:

$\text{sen } 45° = \frac{h}{AD} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{h}{AD} \Rightarrow AD = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}$

Resposta: alternativa **05**.

25. (Furg-RS) Dada uma reta r cuja equação é $y = -x + 4$, seja s uma reta que não intercepta r e passa pelo ponto $(3, -1)$. Então, a equação da reta s é dada por:

a) $y = 2x - 7$. b) $y = x - 4$. c) $y = -2x + 5$. d) $y = -3x + 8$. e) $y = -x + 2$.

(r): $y = -x + 4$

Se s não intercepta r, então $r \mathbin{//} s$ e (s): $y = -x + k$.

Como $(3, -1) \in s$, temos:

$-1 = -3 + k \Rightarrow k = 2$

Logo, (s): $y = -x + 2$.

Resposta: alternativa **e**.

---

26. (Ufam) Considere as equações:

I. $2x - y - 5 = 0$ II. $5x + 2y + 4 = 0$ III. $5x - 2y + 4 = 0$ IV. $4x - 2y + 7 = 0$

Qual das afirmações é verdadeira?

a) II e III representam retas coincidentes.

b) I e III representam retas perpendiculares.

c) II e III representam retas paralelas.

d) I e IV representam retas paralelas.

e) I e III representam retas paralelas.

Condição de retas coincidentes: $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

- Vamos verificar se II e III são coincidentes:

  $\dfrac{5}{5} \neq \dfrac{2}{-2} \neq \dfrac{4}{4}$

  $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{-1}{1} \neq \dfrac{1}{1}$

  Logo, não são coincidentes.

- Vamos verificar se I e III são retas perpendiculares: $m_{I} \cdot m_{III} = -1$.

  $m_{I} = -\dfrac{a}{b} = 2$

  $m_{III} = \dfrac{5}{2}$

  Portanto, $m_{I} \cdot m_{III} = 5 \neq -1$.

  Logo, não são perpendiculares.

- Vamos verificar se II e III são retas paralelas: $m_{II} = m_{III}$.

  $m_{II} = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{5}{2}$

  $m_{III} = \dfrac{5}{2}$

  Portanto, $m_{II} \neq m_{III}$.

  Logo, não são paralelas.

- Vamos verificar se I e IV são paralelas: $m_{I} = m_{IV}$.

  $m_{I} = 2$

  $m_{IV} = 2$

  Logo, são paralelas.

- Vamos verificar se I e III são paralelas: $m_{I} = m_{III}$.

  $m_{I} = 2$

  $m_{III} = \dfrac{5}{2}$

  Portanto, $m_{I} \neq m_{III}$.

  Logo, não são paralelas.

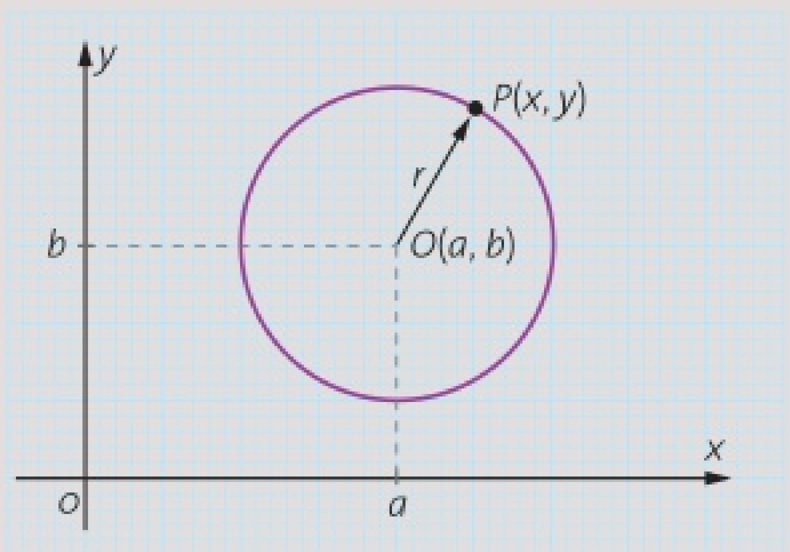
Resposta: alternativa **d**.

GEOMETRIA ANALÍTICA: A CIRCUNFERÊNCIA

Definição

Uma circunferência com centro $O(a, b)$ e raio r é o conjunto de todos os pontos $P(x, y)$ do plano equidistante de O, ou seja:

$$d(P, O) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$



Equação reduzida da circunferência

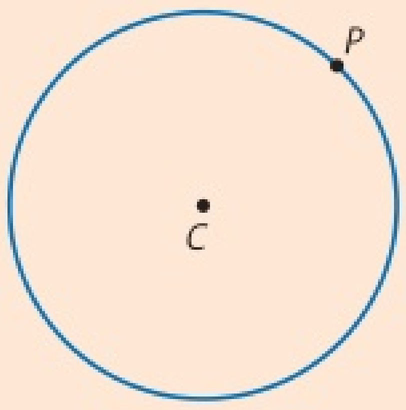
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Equação geral da circunferência

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0$

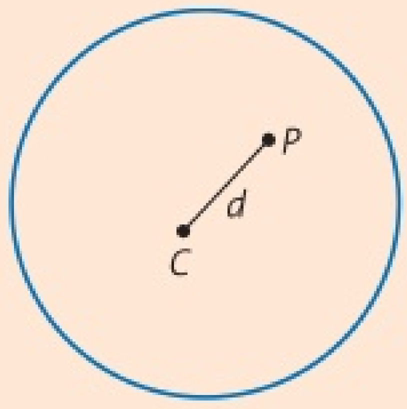
Posições relativas entre ponto e circunferência

Ponto pertence à circunferência



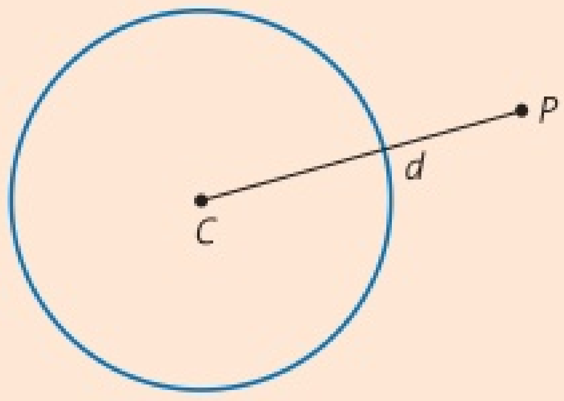
$d(P, C) = r \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$

Ponto interno à circunferência



$d(P, C) < r \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 < 0$

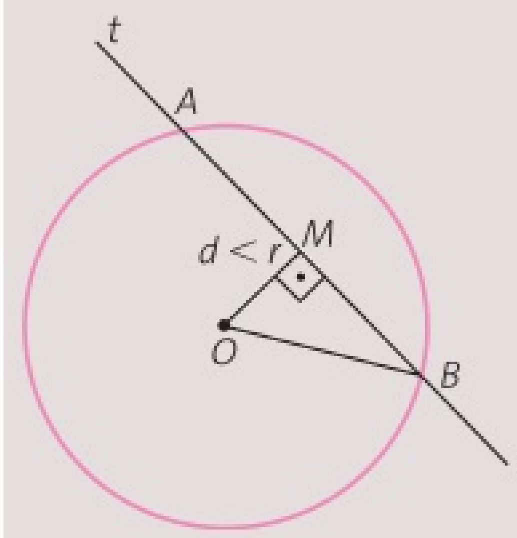
Ponto externo à circunferência



$d(P, C) > r \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2 \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 > 0$

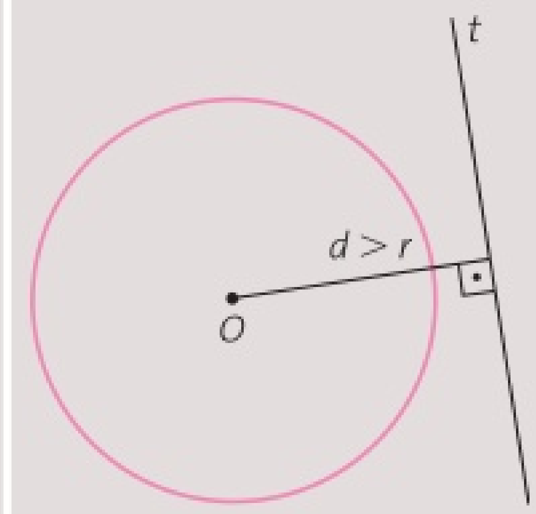
Posições relativas entre reta e circunferência

Reta secante à circunferência



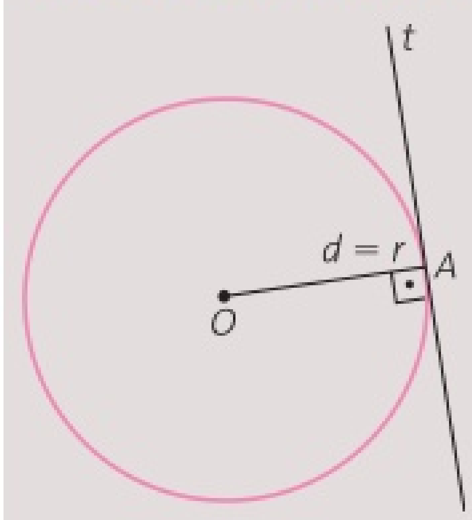
$d(O, t) < r$

Reta exterior à circunferência



$d(O, t) > r$

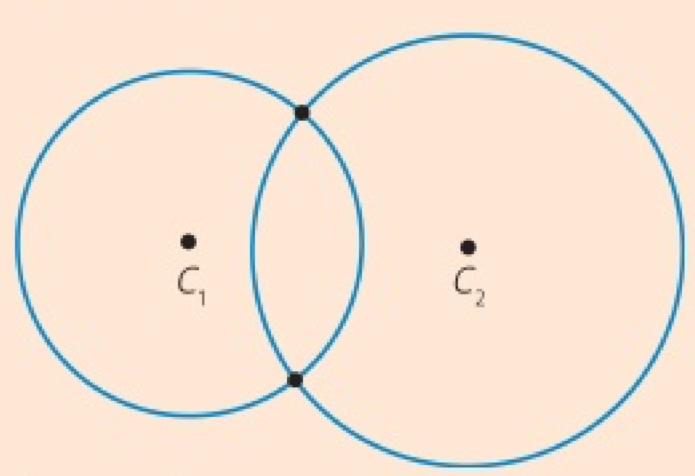
Reta tangente à circunferência



$d(O, t) = r$

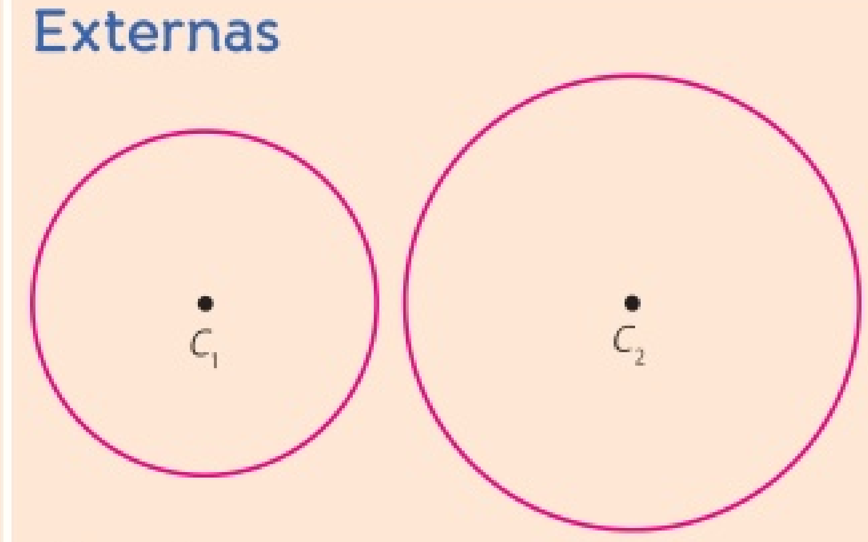
Posições relativas de duas circunferências

Secantes



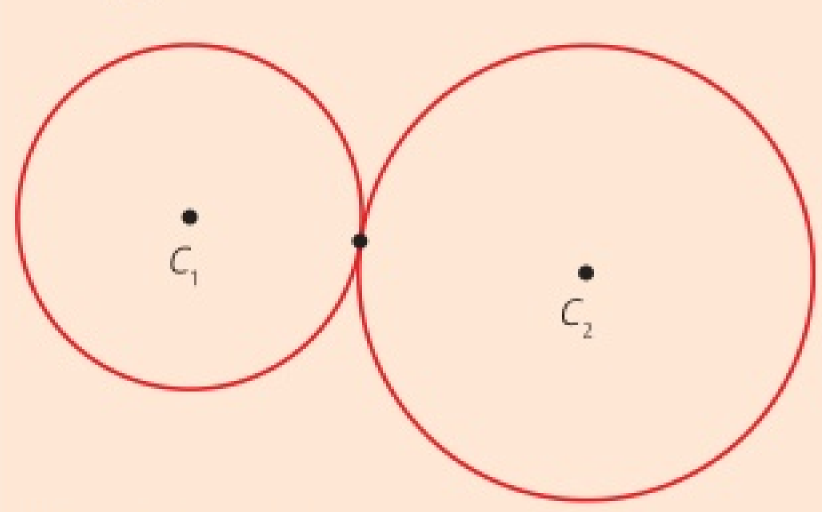
$|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$

Externas



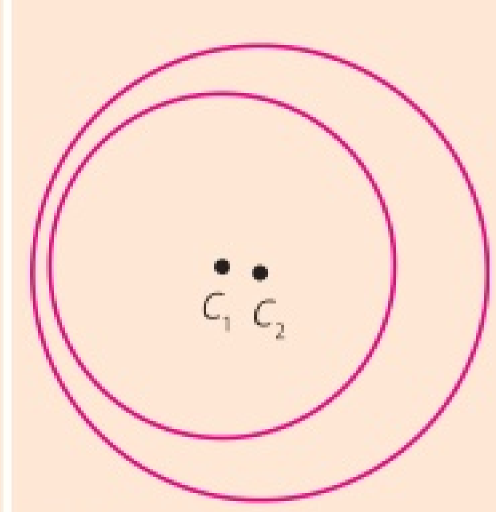
$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$

Tangentes externas



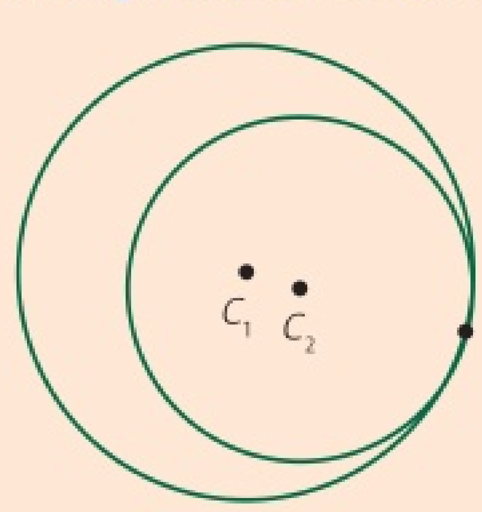
$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

Internas



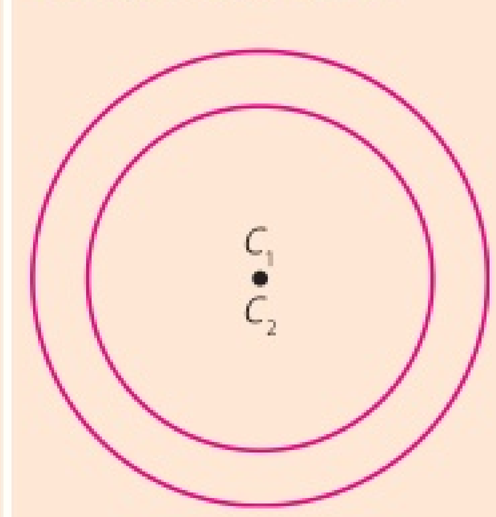
$d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$

Tangentes internas



$d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$

Concêntricas



$C_1 \equiv C_2$, $d(C_1, C_2) = 0$

Exercícios

1. (PUC-RS) Três dardos são jogados em um plano cartesiano e acertam uma circunferência de equação $(x - 9)^2 + (y + 4)^2 = 25$. Um quarto dardo é jogado e acerta o centro desta circunferência. Então, as coordenadas do último dardo são:

a) $(-3, 2)$.
b) $(3, -2)$.
c) $(9, -4)$.
d) $(-9, 4)$.
e) $(-5, -5)$.

Seja, $P(x_0, y_0)$ o centro da circunferência dada. Então, $x_0 = 9$ e $y_0 = -4$.

Logo, $C(9, -4)$.

Resposta: alternativa **c**.

2. (UFRR) Qual é o volume de uma esfera que possui círculo máximo no plano xy descrito pela equação $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$?

a) $\frac{1}{3}\pi$
b) $\frac{3}{4}\pi$
c) $\frac{4}{3}\pi$
d) $\frac{1}{4}\pi$
e) π

Da equação da circunferência, temos:

- $R_c = 1$
- $V = \frac{4}{3}\pi R^2 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi$

Resposta: alternativa **c**.

3. (PUC-RS) A distância entre o centro da circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$ e a reta de equação $2y + 5x = 0$ é:

a) -5.
b) 0.
c) 2.
d) 5.
e) 9.

Da equação da circunferência, temos: $C(2, -5)$. Assim:

$$d_{c,r} = \frac{|5 \cdot 2 - 5 \cdot 2|}{\sqrt{29}} = 0$$

Resposta: alternativa **b**.

4. (UFSJ-MG) No plano cartesiano, a reta de equação $2y = x + 2$ intercepta o eixo y no ponto C. A equação da circunferência que tem centro em C e raio 2 é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.
b) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$.
c) $x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0$.
d) $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$.

Se $x = 0$, então:
$2y = 2 \Rightarrow y = 1$
Logo, $C(0, 1)$.
Portanto:
$x^2 + (y - 1)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$

Resposta: alternativa **b**.

5. (UFPR) Qual das seguintes retas passa pelo centro da circunferência $x^2 + y^2 + 4y - 3 = 0$?

a) $x + 2y = 4$
b) $5x - y = 2$
c) $x + y = 0$
d) $x - 5y = -2$
e) $2x + y = 7$

Obtendo o centro:
$x^2 + y^2 + 4y + 4 = 3 + 4 \Rightarrow x^2 + (y + 2)^2 = 7$
Logo, $C(0, -2)$.
Resposta: alternativa **a**.

6. (Uece) O centro da circunferência $x^2 + 2x + y^2 = 1$ pertence à reta r e esta reta é perpendicular à reta $x + y = 8$. Um ponto pertencente à reta r é o ponto:

a) (3, 5).
b) (2, 4).
c) (3, 4).
d) (5, −5).

Obtendo o centro C da circunferência:
$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 1 + 1 \Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 2$
Logo, $C(-1, 0)$.
Seja s a reta $x + y = 8$. Então, $m_s = -1$. Como $s \perp r$, temos $m_r = 1$.
Mas, r: $y = a + b$ e como C pertence à reta, temos:
$0 = -1 + b \Rightarrow b = 1$
Logo, r: $y = x + 1$ e os pontos $(x, x + 1)$ pertencem à reta.
Resposta: alternativa **c**.

7. (Uespi) Suponha que x e y são reais e satisfazem $x^2 + y^2 = 6x + 6y - 10$. Qual o valor máximo de $x + y$?

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 = -10 + 9 + 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 8$
Logo, $(3, 3)$ e $r = \sqrt{8}$.

Se k for o valor máximo de $x + y$, então $x + y = k$ é uma reta que tangencia a circunferência dada. Nessas condições a distância do centro à reta é o raio:

$$\sqrt{8} = \frac{|3 + 3 - k|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \Rightarrow |6 - k| = \sqrt{8} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow |6 - k| = 4 \Rightarrow$$

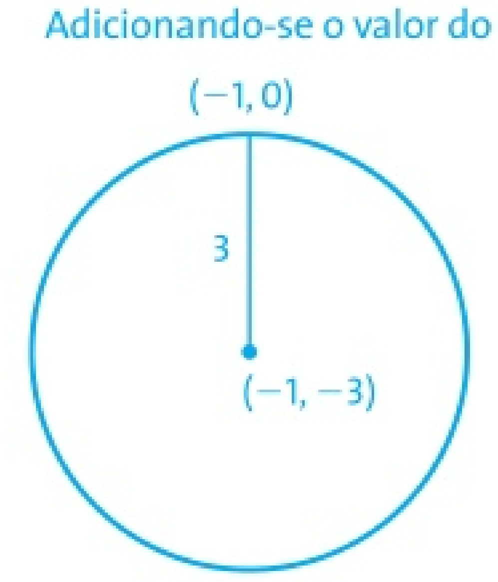
$$\Rightarrow \begin{cases} 6 - k = 4 \Rightarrow k = 2 \\ \text{ou} \\ 6 - k = -4 \Rightarrow k = 10 \end{cases}$$

Assim, $x + y$ máximo é 10.
Resposta: alternativa **e**.

8. (EsPCEx-SP) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$ que tem ordenada máxima é:

a) (0, −6).
b) (−1, −3).
c) (−1, 0).
d) (2, 3)
e) (2, −3).

$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = -1 + 1 + 9 \Rightarrow (x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$
Logo, $C(-1, -3)$ e $r = 3$.
Adicionando-se o valor do raio à ordenada do centro, temos (−1, 0).



Resposta: alternativa **c**.

9. (Fatec-SP) A área do quadrilátero determinado pelos pontos de intersecção da circunferência de equação $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 10$ com os eixos coordenados, em unidades de área, é igual a:

a) 4.
b) 6.
c) 8.
d) 10.
e) 12.

• Para $x = 0$ temos:

$(y - 3)^2 = 1 \Rightarrow y - 3 = \pm 1 \Rightarrow y = 4$ e $y = 2$

• Para $y = 0$ temos:

$(x + 3)^2 = 1 \Rightarrow x + 3 = \pm 1 \Rightarrow x = -2$ e $x = -4$

Logo:

$A = \frac{4 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} \Rightarrow A = 8 - 2 \Rightarrow A = 6$ u.a.

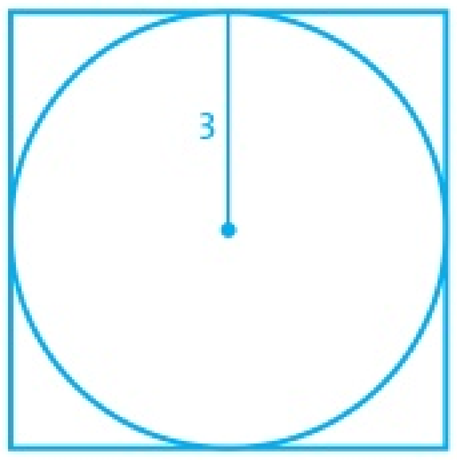
Resposta: alternativa **b**.

10. (IFMG) O lado do quadrado circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$ é:

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.

$x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 9$

Logo, $C(2, 0)$ e $r = 3$.



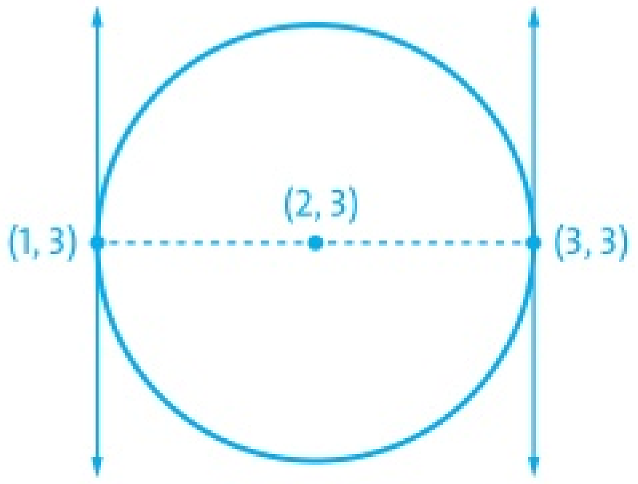
$\ell = 2 \cdot 3 = 6$

Resposta: alternativa **d**.

11. (FGV-SP) No plano cartesiano, a reta de equação $x = k$ tangencia a circunferência de equação $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$. Os valores de k são:

a) -2 ou 0.
b) -1 ou 1.
c) 0 ou 2.
d) 1 ou 3.
e) 2 ou 4.

As retas do tipo $x = k$ são verticais. A circunferência dada tem centro (2, 3) e raio 1. Assim:



A reta vertical que passa por (1, 3) é $x = 1$ e a que passa por (3, 3) é $x = 3$.

Resposta: alternativa **d**.

12. (UEL-PR) Determine a equação da circunferência centrada no vértice da parábola $y = x^2 - 6x + 8$ e que passa pelos pontos em que a parábola corta o eixo x.

a) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$
b) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$
c) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$
d) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = \sqrt{2}$
e) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

Da parábola temos:

$\begin{cases} y_V = -1 \\ x_V = 3 \end{cases}$

Logo, o centro da circunferência é $(3, -1)$.

Para $y = 0$, temos:

$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x'' = 4$ e $x' = 2$

Assim, a circunferência $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = r^2$ passa por (4, 0) e (2, 0). Portanto:

$(4 - 3)^2 + (0 + 1)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 2$

Logo, $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 2$.

Resposta: alternativa **b**.

13. (FGV-SP) Considere a circunferência de equação $x^2 - y^2 = 7$. A quantidade de pontos (x, y) de coordenadas inteiras que estão no interior dessa circunferência é:

a) 25. b) 21. c) 14. d) 7. e) 28.

Como $r = \sqrt{7}$ e $\sqrt{7} < 3$, os valores inteiros contidos em cada eixo são $-2, -1, 0, 1, 2$.

Logo, 25 pares (x, y) são formados com esses valores.

Entretanto, 4 deles $(-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2)$ estão no exterior da circunferência.

Portanto, 21 pares estão no interior dela.

Resposta: alternativa **b**.

14. (UFTM-MG) Sabe-se que M, ponto médio do segmento AB, é centro de uma circunferência que passa pela origem $(0, 0)$. Sendo $A(-1, 4)$ e $B(5, 2)$, conclui-se que o raio dessa circunferência é igual a:

a) $4\sqrt{5}$. c) $4\sqrt{2}$. e) $\sqrt{13}$.

b) $3\sqrt{5}$. d) $\sqrt{17}$.

Como $x_M = 2$ e $y_M = 3$, temos $M(2, 3)$.

Então:

$(0 - 2)^2 + (0 - 3)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 4 + 9 \Rightarrow r^2 = 13 \Rightarrow r = \sqrt{13}$

Resposta: alternativa **e**.

15. (Unifran-RS) Considere o triângulo de vértices $A(1, 4)$, $B(0, 2)$ e $C(6, 2)$ e a circunferência de centro em C e cujo raio é a metade do lado BC. A equação da reta que passa por A e pelo ponto da circunferência que tem a maior ordenada é:

a) $y = x + 4$. b) $y = 0{,}2x + 3{,}8$. c) $y = 2x + 4$. d) $y = x + 3{,}8$. e) $y = 0{,}2x + 4$.

$d^2_{BC} = (6 - 0)^2 + (2 + 2)^2 \Rightarrow d_{BC} = 6$

Então, $r = 3$.

Assim, $C(6, 2)$.

Logo, o ponto de maior coordenada será $(6, 5)$. Portanto, a equação da reta pedida é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 5y - 19 = 0 \Rightarrow 5y = x + 19 \Rightarrow y = 0{,}2x + 3{,}8$$

Resposta: alternativa **b**.

16. (UFU-MG) Inúmeras pinturas e desenhos em tela fazem uso de sobreposição de formas circulares, conforme ilustra a figura ao lado.
Para a representação gráfica desses trabalhos artísticos, faz-se necessária a determinação de elementos geométricos associados. Suponha que, relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas xOy, duas circunferências, presentes no desenho, sejam dadas pelas equações $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ e $x^2 + y^2 - 6x - 2y = -6$.
Assim sendo, a reta que passa pelos centros dessas circunferências pode ser representada pela equação:

a) $2x + 3y = 9$.
b) $2x + 3y = -9$.
c) $x + 2y = 4$.
d) $x + 2y = -4$.

Pinturas circulares. Robert Delaunay.

Disponível em: <www.google.com.br>. Acesso em: 1º jul. 2012.

λ_1: $x^2 + (y - 3)^2 = 4 \rightarrow C_1(0, 3)$

λ_2: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \rightarrow C_2(0, 3)$

Logo, a reta que passa por C_1 e C_2 é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - 9 = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 9$$

Resposta: alternativa **a**.

17. (ESPM-SP) No plano cartesiano de origem O, a reta de equação $2x + y - 10 = 0$ intercepta a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$ nos pontos A e B. A área do triângulo OAB é igual a:

a) 10.
b) 12.
c) 8.
d) 5.
e) 15.

$2x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 2x$

Substituindo na equação da circunferência, temos:

$x^2 + (10 - 2x)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + 100 - 40x + 4x^2 = 25 \Rightarrow 5x^2 - 40x + 75 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x' = 5$ e $x'' = 3$

- Para $x' = 5$, vem:
  $y = 10 - 10 = 0$
  Portanto, $(5, 0)$.
- Para $x'' = 3$, vem:
  $y = 10 - 6 = 4$
  Portanto, $(3, 4)$.

Logo:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |20| = 10 \text{ u.a.}$$

Resposta: alternativa **a**.

18. (FGV-SP) No plano cartesiano, o ponto $C(2, 3)$ é o centro de uma circunferência que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{CP}$, em que P é o ponto de coordenadas $(5, 7)$. A equação da circunferência é:

a) $4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 27 = 0$.

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 7 = 0$.

c) $4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 29 = 0$.

d) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$.

e) $4x^2 + 4y^2 - 16x - 24y + 31 = 0$.

Seja M o ponto médio de $\overline{CP}$. Então, $M\left(\frac{7}{5}, 5\right)$. Logo:

$\left(\frac{7}{5} - 2\right)^2 + (5 - 3)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{9}{4} + 4 \Rightarrow r^2 = \frac{25}{4}$

Mas:

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y - 9 = \frac{25}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y - 9) = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x^2 - 4y^2 - 16x + 24y + 27 = 0$

Resposta: alternativa **a**.

19. (UFC-CE) Em um sistema cartesiano de coordenadas, o valor positivo de b tal que a reta $y = x + b$ é tangente ao círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$ é:

a) 2.

b) 1.

c) $\sqrt{2}$.

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

e) 3.

$y = x + b \Rightarrow x - y + b = 0$

$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow C(0, 0)$ e $r = 1$

Como a distância do centro à reta é o raio, temos:

$\frac{|0 - 0 + b|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1 \Rightarrow |b| = \sqrt{2} \Rightarrow b = \pm 2$

Resposta: alternativa **c**.

20. (Unir-RO) Uma circunferência tem centro (a, b) no primeiro quadrante e raio r tangente aos eixos coordenados. Nessas condições, é correto afirmar:

a) $a = b$.

b) $a > b$.

c) $a < b$.

d) $a^2 + b^2 = r^2$.

e) $a^2 + b^2 = r$.

Se a circunferência é tangente aos dois eixos, temos que:

$(a - a)^2 + (b - 0) = (a - 0)^2 + (b - b)^2 \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow b = a$

(a circunferência se encontra no primeiro quadrante)

Resposta: alternativa **a**.

21. (UFSM-RS) A massa utilizada para fazer pastéis folheados, depois de esticada, é recortada em círculos (discos) de igual tamanho. Sabendo que a equação matemática da circunferência que limita o círculo é $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 36 = 0$ e adotando $\pi = 3{,}14$, o diâmetro de cada disco e a área da massa utilizada para confeccionar cada pastel são, respectivamente:

a) 7 e 113,04.

b) 7 e 153,86.

c) 12 e 113,04.

d) 14 e 113,04.

e) 14 e 153,86.

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$

Então:

$r^2 = 49 \Rightarrow r = 7$

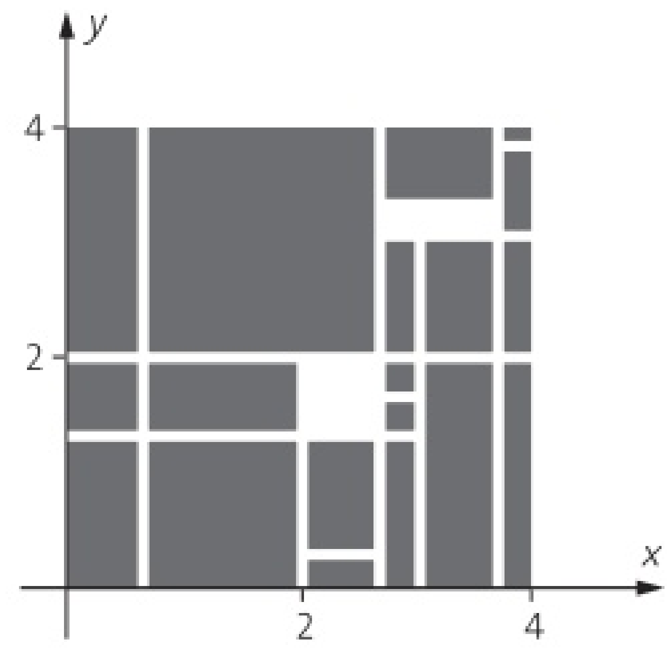
Logo, $d = 14$.

Portanto:

$A = \pi r^2 \Rightarrow A = 3{,}14 \cdot 49 = 153{,}86$

Resposta: alternativa **e**.

22. (PUC-RS) Observe o logotipo da Biblioteca Central da PUC-RS a seguir:



A circunferência inscrita no quadrado que circunscreve o logotipo tem equação:

a) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4.$

b) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4.$

c) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8.$

d) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 8.$

e) $(x + 4)^2 + (y + 4)^2 = 8.$

Da figura temos que $r = 2$ e $C(2, 2)$. Portanto, a equação pedida é:

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Resposta: alternativa **a**.

---

23. (UFRN) Uma praça, em formato retangular, tem uma fonte luminosa de forma circular no seu centro. Suponha que as coordenadas dos cantos da praça sejam (0, 0), (40, 0), (0, 60) e (40, 60) e que o raio da circunferência da fonte seja $r = 3$. Em relação aos pontos $P(22, 32)$ e $Q(17, 29)$, pode-se afirmar:

a) P está fora da fonte e Q está dentro.

b) P está dentro da fonte e Q também.

c) P está dentro da fonte e Q está fora.

d) P está fora da fonte e Q também.

Sendo $C(20, 30)$ e $r = 3$, temos:

$(x - 20)^2 + (y - 30)^2 = 9$

Substituindo P, temos:

$4 + 4 < 9$

Portanto, P está dentro.

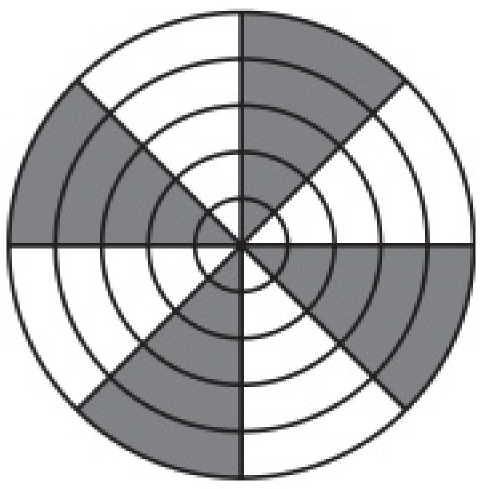
Substituindo Q, temos:

$9 + 1 > 9$

Portanto, Q está fora.

Resposta: alternativa **c**.

24. (UFSM-RS) A construção da cobertura de um palanque usado na campanha política, para o 1º turno das eleições passadas, foi realizada conforme a figura ao lado. Para fixação da lona sobre a estrutura de anéis, foram usados rebites assim dispostos: 4 no primeiro anel, 16 no segundo, 64 no terceiro e assim sucessivamente.



Se, no plano cartesiano, a equação da circunferência externa do anel externo da figura é $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 43 = 0$, então o centro e o raio dessa circunferência são, respectivamente:

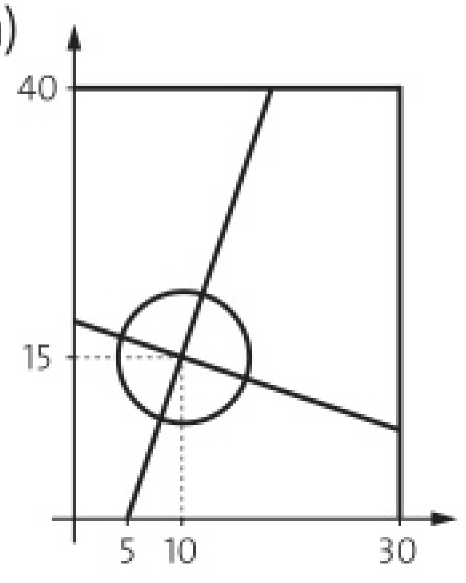
a) $(6, -4)$ e 3.
b) $(-6, 4)$ e 9.
c) $(6, -4)$ e 9.
d) $(-6, 4)$ e 3.
e) $(6, 4)$ e 3.

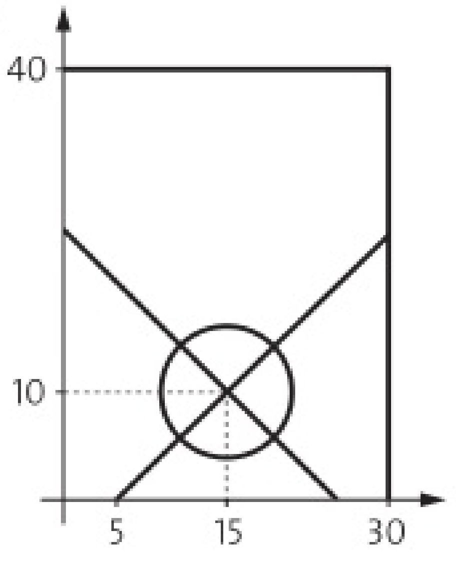
$x^2 - 12x + 36 + y^2 + 8y + 16 = -42 + 36 + 16 \Rightarrow (x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 9$

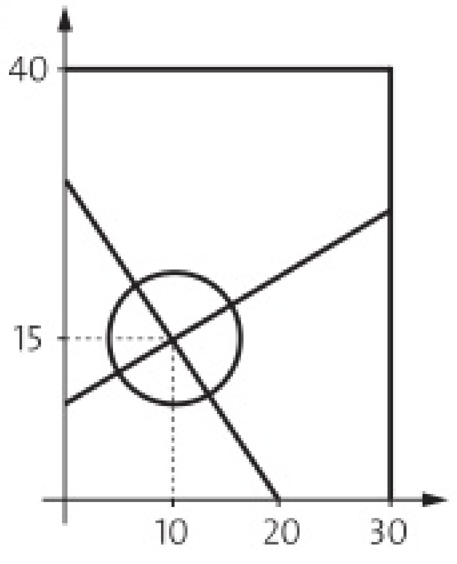
Logo, $C(6, -4)$ e $r = 3$.

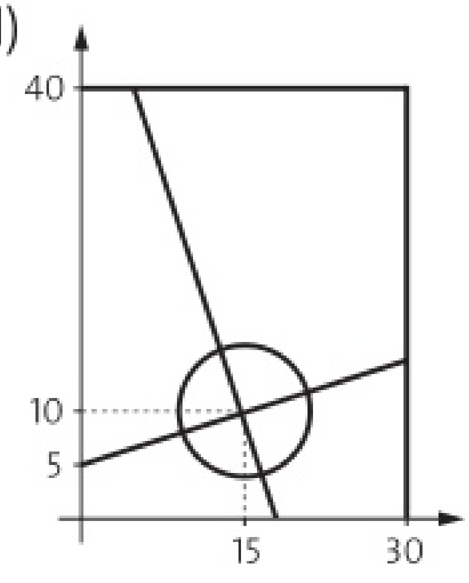
Resposta: alternativa **a**.

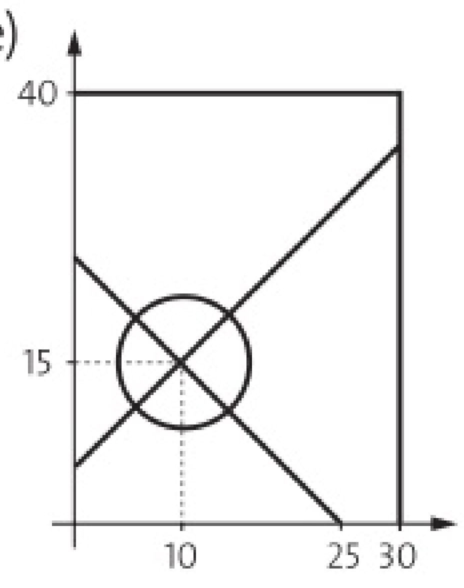
25. (UFSM-RS) Um terreno retangular que mede 30 m na frente e nos fundos e 40 m nas laterais está sendo preparado para receber uma feira de produtos orgânicos. Inicialmente o terreno foi cercado por muros, e a única entrada é um portão com 10 m de largura localizado numa das extremidades de sua frente. A fim de viabilizar e organizar o tráfego de pessoas e mercadorias, decidiu-se demarcar, no terreno, uma circunferência e duas retas perpendiculares. A circunferência tem raio 7 m, e seu centro está situado a 15 m da frente do terreno e a 10 m da lateral imediatamente próxima ao portão de entrada. As duas retas passam pelo centro da circunferência, e uma delas se inicia no ponto médio do vão do portão. Considerando o terreno perfeitamente plano, desprezando as espessuras dos muros e do portão e sabendo que cada unidade dos eixos corresponde a 1 m, identifique, no plano cartesiano, a figura que melhor representa o terreno com a circunferência e as retas nele demarcadas.

a)


b)


c)


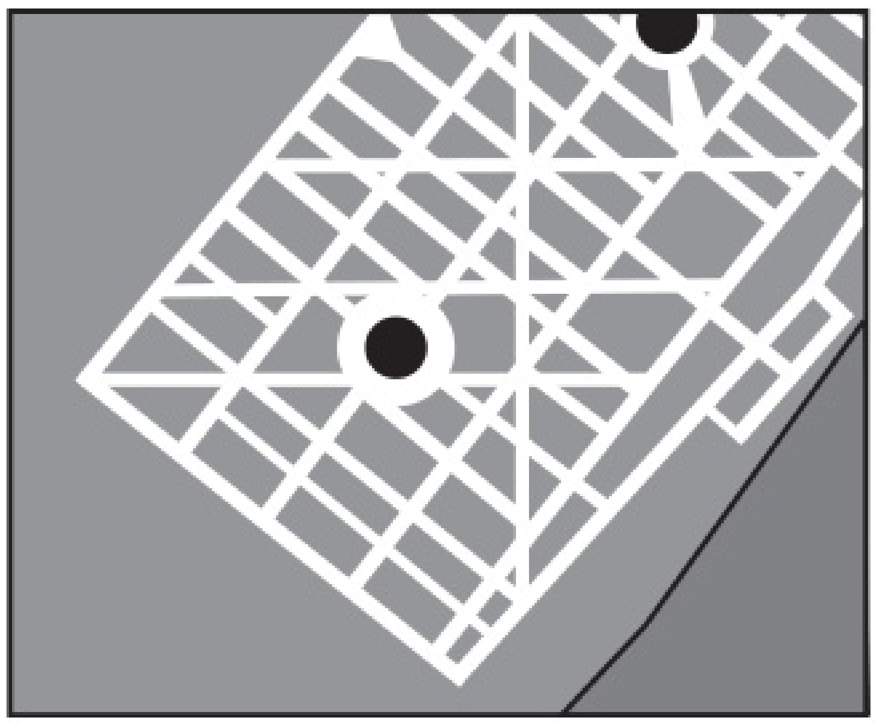
d)


e)


O centro da circunferência está a 15 m do portão de 10 m de largura, com uma das retas perpendiculares passando pelo ponto médio do portão e pelo centro da circunferência.

Resposta: alternativa **a**.

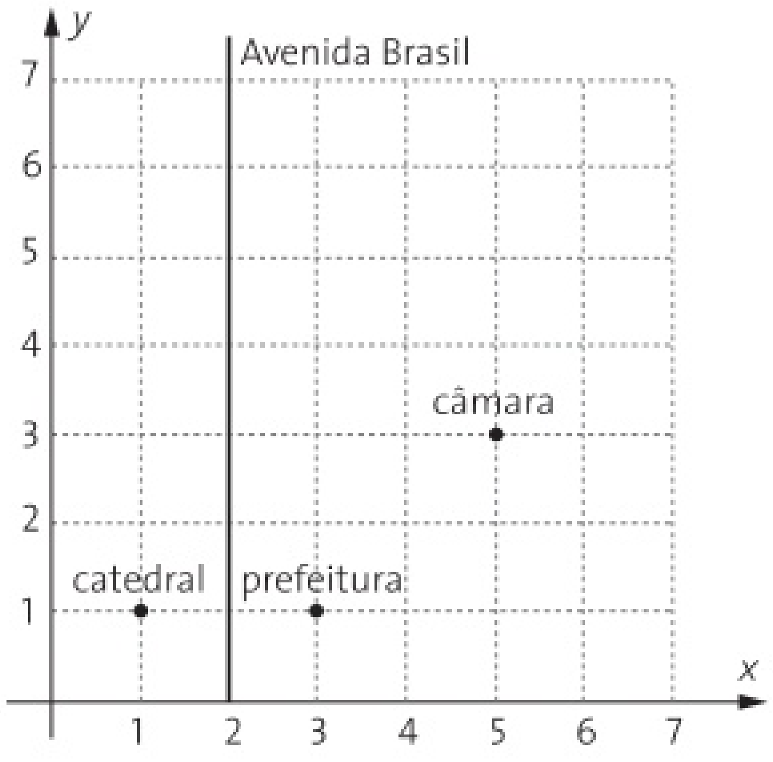
26. (Ufpel-RS) No chamado meio ambiente urbano, as praças públicas são bens de uso comum, contribuindo para o embelezamento das cidades, auxiliando sobremaneira na melhoria das condições sanitárias e higiênicas dos núcleos urbanos e promovendo o intercâmbio social e cultural. Na figura ao lado, observa-se que algumas ruas atravessam a praça, outras a tangenciam em um único ponto e outras nem passam por ela. Considere uma praça circular delimitada por uma circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ e uma das ruas representada pela equação $4x + 3y - 4 = 0$. De acordo com o texto e seus conhecimentos, é correto afirmar que a rua representada pela equação acima:



a) tangencia a praça no ponto $A(2, -4)$.
b) tangencia a praça no ponto $A(-4, 8)$.
c) não atravessa a praça.
d) tangencia a praça no ponto $A(-2, 4)$.
e) atravessa a praça.

Da equação da circunferência, obtemos:
$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$
Logo, $C(2, -4)$ e $r = 6$.
A distância do centro $(2, -4)$ à reta dada é:
$$\frac{|4 \cdot 2 + 3(-4) - 4|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5} = 1{,}6$$
Como $1{,}6 < 6$, a reta atravessa a praça.
Resposta: alternativa **e**.

27. (Unicamp-SP) A figura ao lado apresenta parte do mapa de uma cidade, no qual estão identificadas a catedral, a prefeitura e a câmara de vereadores. Observe que o quadriculado não representa os quarteirões da cidade, servindo apenas para a localização dos pontos e retas no plano cartesiano.
Nessa cidade, a Avenida Brasil é formada pelos pontos equidistantes da catedral e da prefeitura, enquanto a Avenida Juscelino Kubitschek (não mostrada no mapa) é formada pelos pontos equidistantes da prefeitura e da câmara de vereadores. O ponto de interseção das avenidas Brasil e Juscelino Kubitschek pertence à região definida por:



a) $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 \leqslant 1$.
b) $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 \leqslant 2$.
c) $x \in \,]1, 3[\,, y \in \,]4, 6[$.
d) $x = 2, y \in [5, 7]$.

A Av. Juscelino Kubitschek é a mediatriz do segmento prefeitura-câmara. O ponto de intersecção das avenidas pertence à reta $x = 2$, portanto é do tipo $(2, \alpha)$ e pertence à mediatriz, portanto equidista da prefeitura e da câmara. Logo:
$(2 + 3)^2 + (\alpha - 1)^2 = (2 - 5)^2 + (\alpha - 3)^2 \Rightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 9 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 \Rightarrow 4\alpha = 16 \Rightarrow \alpha = 4$
Portanto, o ponto de intersecção é $(2, 4)$.
Logo:
a) $0 + 4 \leqslant 1$ (*F*)
b) $1 + 1 \leqslant 2$ (*V*)
c) (*F*)
d) (*F*)
Resposta: alternativa **b**.

28. (UFSM-RS) Uma luminária foi instalada no ponto $C(-5, 10)$. Sabe-se que a circunferência iluminada por ela é tangente à reta que passa pelos pontos $P(30, 5)$ e $Q(-30, -15)$. O comprimento da linha central do passeio correspondente ao eixo y, que é iluminado por essa luminária, é:

a) 10 m. b) 20 m. c) 30 m. d) 40 m. e) 50 m.

A reta mencionada é dada por:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 30 & 5 & 1 \\ -30 & -15 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 20x - 60y - 300 = 0 \Rightarrow x - 3y - 15 = 0$$

O raio da circunferência é a distância do centro à reta:

$$d_{P,r} = \frac{|1 \cdot (-5) + (-3) \cdot 10 + 15|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|-50|}{\sqrt{10}} = 5\sqrt{10}$$

Portanto, raio $= 5\sqrt{10}$.

Assim, a equação da circunferência é:

$(x + 5)^2 + (y - 10)^2 = 250$

Os pontos onde a circunferência corta o eixo y $(x = 0)$ são:

$25 + y^2 - 20y + 100 = 250 \Rightarrow y^2 - 20y + 125 = 0 \Rightarrow y' = 25$ e $y'' = -5$

Logo:

- para $y' = 25$, temos $(0, 25)$
- para $y'' = -5$, temos $(0, -5)$

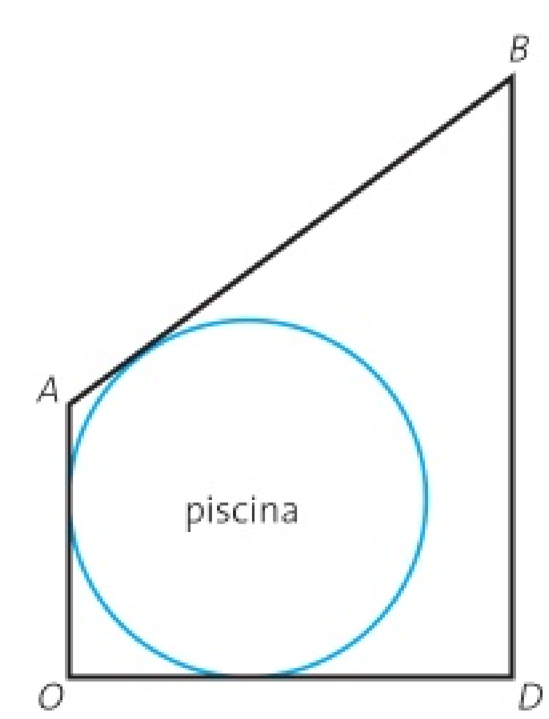
Então, o comprimento do eixo y "iluminado" é:

$d = 25 - (-5) \Rightarrow d = 30$ m

Resposta: alternativa **c**.

---

29. (UFCG-PB) Uma piscina na forma circular será construída em um terreno na forma de um trapézio, segundo o desenho ao lado. Sabe-se que num sistema de coordenadas em que o ponto O é a origem e o ponto D está sobre o eixo x, a equação da reta que passa pelos pontos A e B é $3x - 4y + 6 = 0$, com as variáveis x e y medidas em metro. Dessa maneira, o raio r e o centro C da piscina são, respectivamente:



a) $r = \frac{6}{5}$ m e $C\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$.

b) $r = 1{,}2$ m e $C\left(\frac{6}{5}, 1\right)$.

c) $r = 0{,}9$ m e $C(1, 1)$.

d) $r = 1{,}0$ m e $C(1, 1)$.

e) $r = 1{,}1$ m e $C\left(\frac{3}{5}, 1\right)$.

De acordo com os dados, o centro é da forma (α, α) e o raio é α. Fazendo a distância do centro à reta dada ser igual ao raio, temos:

$$\frac{|3\alpha - 4\alpha + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \alpha \Rightarrow |6 - \alpha| = 5\alpha$$

- para $6 - \alpha \geqslant 0 \Rightarrow \alpha \leqslant 6$, temos:

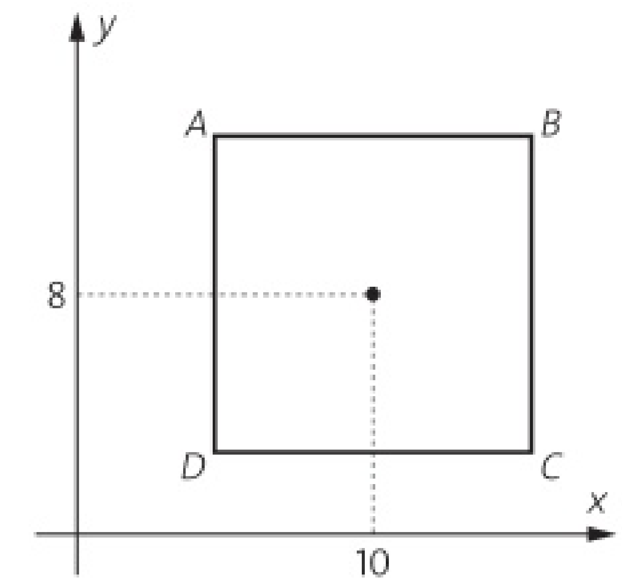
  $6 - \alpha = 5\alpha \Rightarrow \alpha = 1$

- para $6 - \alpha \leqslant 0 \Rightarrow \alpha \geqslant 6$, temos:

  $-6 - \alpha = 5\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$ (não convém)

Resposta: alternativa **d**.

30. (UFSM-RS) A equipe de arquitetos e decoradores que fez o projeto de um *shopping* deseja circunscrever uma circunferência ao quadrado maior Q_1, que possui lado de 10 m. Se as coordenadas do centro da circunferência forem dadas pelo ponto (10, 8) e se forem usadas a parede da porta de entrada (x) e a lateral esquerda (y) como eixos coordenados referenciais, a equação da circunferência será:



a) $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 139 = 0.$

b) $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 64 = 0.$

c) $x^2 + y^2 - 20x - 16y + 114 = 0.$

d) $x^2 + y^2 - 20x - 16y - 36 = 0.$

e) $x^2 + y^2 - 16x - 20y + 139 = 0.$

Como $C(10, 8)$, então:

$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow d = 10\sqrt{2}$

Logo, $r = 5\sqrt{2}$.

Portanto:

$(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 50 \Rightarrow x^2 + y^2 - 20x - 16y + 114 = 0$

Resposta: alternativa **c**.

31. (PUC-RS) Uma formiga caminha sobre um plano onde está localizado um referencial cartesiano. Inicia seu deslocamento S em um ponto sobre a curva de equação $x^2 + y^2 = 1$ (x e y em cm) na qual está se movimentando, e NÃO passa por um mesmo ponto mais de uma vez. Então, S é um número real tal que:

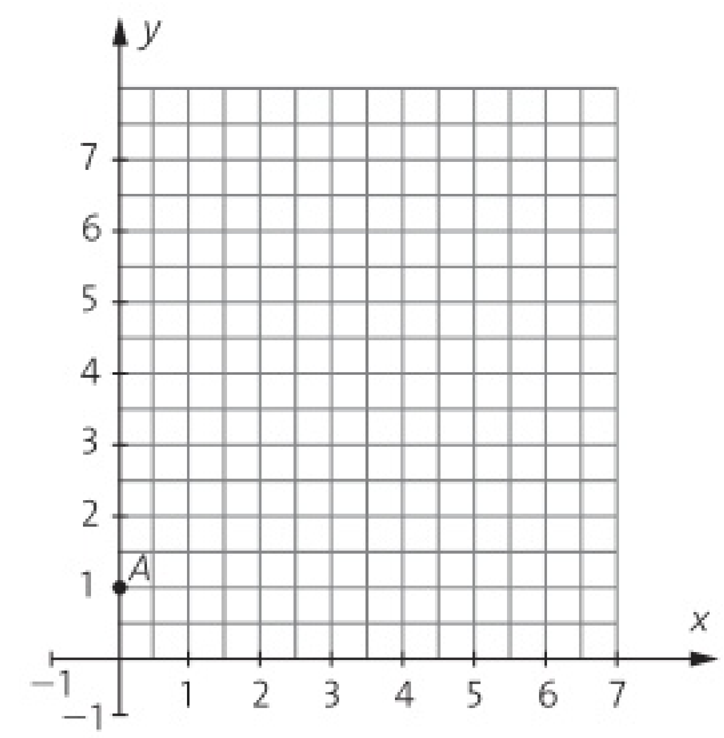
a) $0 \leqslant S \leqslant 2\pi.$ b) $\pi \leqslant S \leqslant 2\pi.$ c) $0 \leqslant S \leqslant \pi.$ d) $0 \leqslant S < 2\pi.$ e) $\pi \leqslant S < 2\pi.$

A formiga se movimenta na circunferência e não passa pelo mesmo ponto duas vezes. Então:

$0 \leqslant S < 2\pi r \Rightarrow 0 \leqslant S < 2\pi$

Resposta: alternativa **d**.

32. (Insper-SP) Num *show* de patinação no gelo, o casal que se apresenta está inicialmente sobre o ponto A indicado na figura. Ambos partem de A ao mesmo tempo, o rapaz sobre a reta de equação $y = 1 + 0{,}5x$ e a moça sobre a reta de equação $y = 1 + 2x$, os dois no sentido dos valores positivos de x e y. Com velocidade maior, o rapaz se desloca sobre a reta até chegar no ponto de tangência de sua trajetória com a circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 5$. A partir daí, ele passa a patinar sobre o perímetro desta circunferência, a caminho do ponto em que sua nova trajetória tangencia a reta sobre a qual patina a sua parceira, onde ambos se encontram novamente. Neste plano cartesiano, a distância que foi percorrida pela moça nesta *performance* foi:



a) $2\sqrt{3}$.   b) $2\sqrt{5}$.   c) $3\sqrt{5}$.   d) $2\sqrt{6}$.   e) $3\sqrt{6}$.

De acordo com o texto, a moça se desloca até o ponto de tangência com a circunferência dada. Vamos obter esse ponto:

$$\begin{cases} y = 1 + 2x \text{ (I)} \\ (x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$(x^2 - 10x + 25) + (4x^2 - 20x + 25) = 5 \Rightarrow 5x^2 - 30x + 45 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 5$ e $y = 7$

Portanto, o ponto é $(3, 7)$.

A moça patina de $A(0, 1)$ a $P(3, 7)$. Então:

$d^2 = 3^2 + 6^2 \Rightarrow d^2 = 9 + 36 \Rightarrow d^2 = 45 \Rightarrow d = 3\sqrt{5}$

Resposta: alternativa **c**.

33. (Unifor-CE) Considere a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$. Então podemos afirmar que uma das retas que é tangente à circunferência e que passa pela origem tem como equação:

a) $y = x$.   b) $y = -x$.   c) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.   d) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.   e) $y = 2x$.

Completando-se os quadrados obtemos a equação reduzida da circunferência:

$(x - 2)^2 + y^2 = -3 + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 1$

Logo, $C(2, 0)$ e $r = 1$.

Como r passa pela origem, vem:

$y = mx \Rightarrow mx - y = 0$

Logo:

$$\frac{|2m - 0|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1 \Rightarrow |2m| = \sqrt{m^2 + (-1)^2} \Rightarrow (2m)^2 = m^2 + 1 \Rightarrow 4m^2 = m^2 + 1 \Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

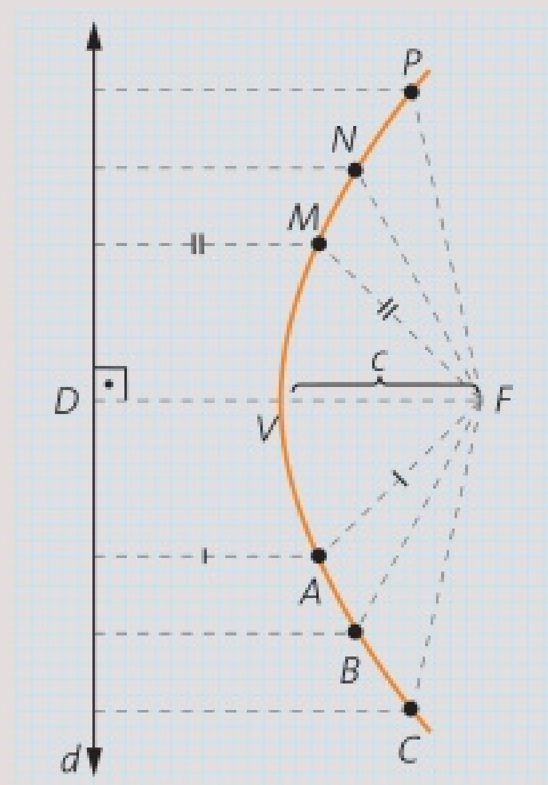
Portanto, $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Resposta: alternativa **c**.

GEOMETRIA ANALÍTICA: SECÇÕES CÔNICAS

Parábola

Elementos



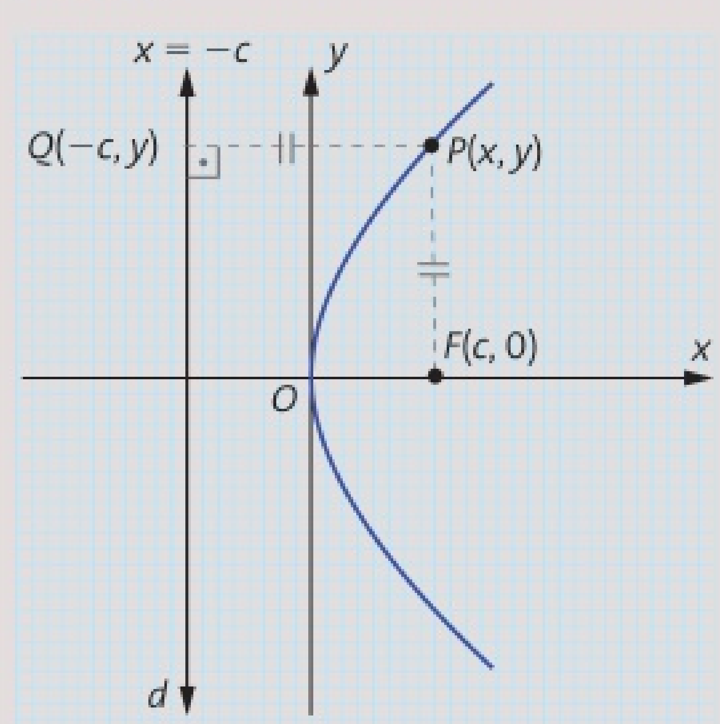
- ponto F: foco da parábola;
- reta d: diretriz da parábola;
- ponto V: vértice da parábola;
- reta que passa por F, perpendicular à diretriz d: eixo de simetria da parábola;
- medida de $\overline{FD}$: parâmetro da parábola ($2c$).

Definição

Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que distam igualmente de uma reta fixa d, a diretriz, e de um ponto fixo F, não pertencente à diretriz, o foco.

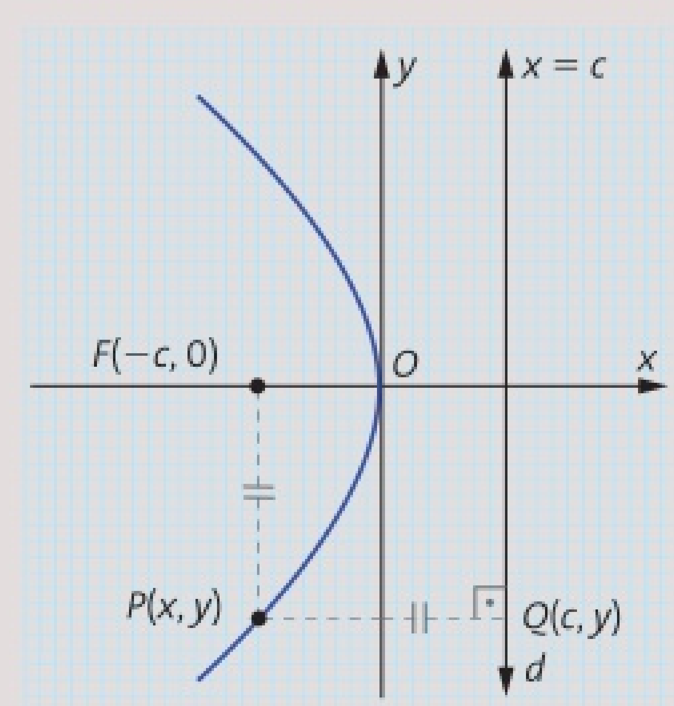
Equações da parábola com vértice na origem

1º caso



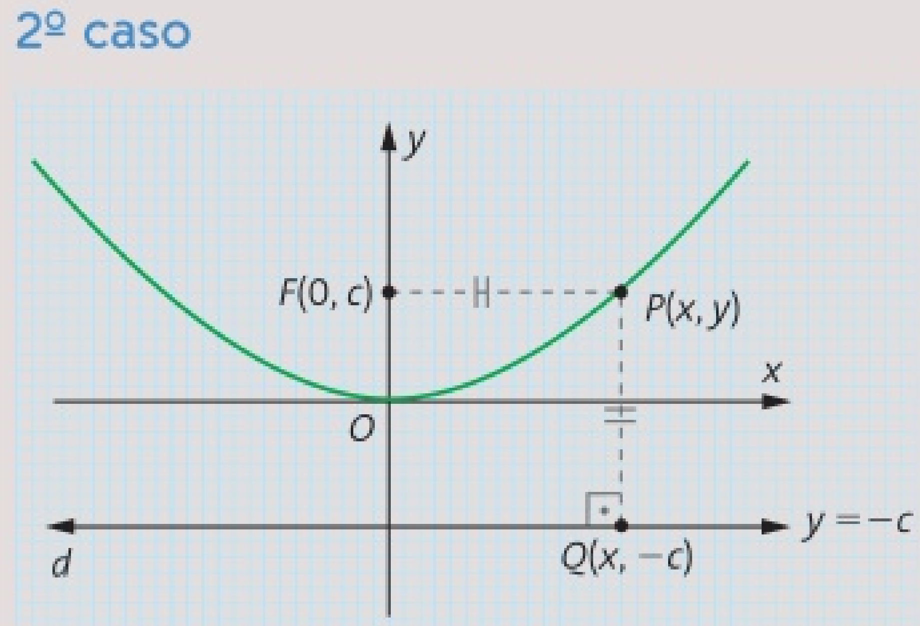
$y^2 = 4cx$

3º caso



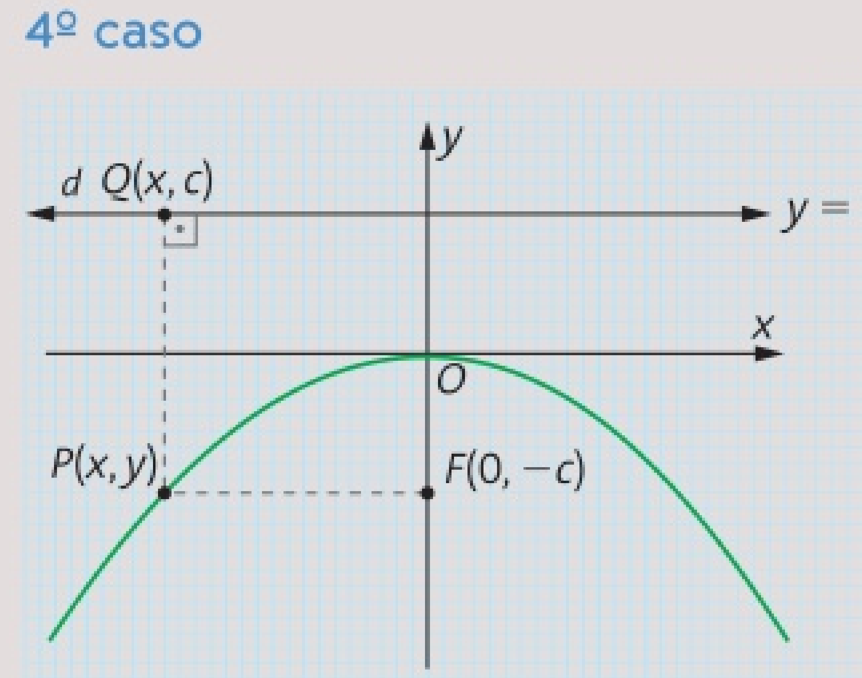
$y^2 = -4cx$

2º caso



$x^2 = 4cy$

4º caso

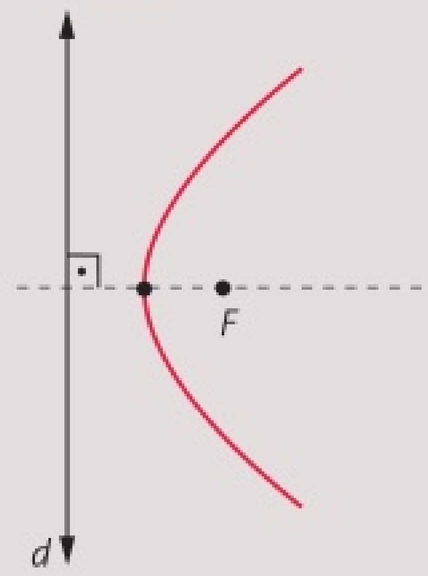


$x^2 = -4cy$

Parábola

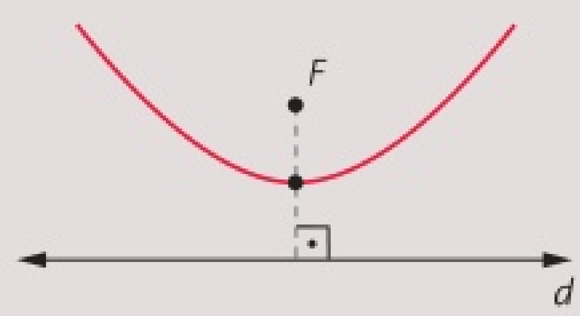
Equações da parábola com vértice em um ponto qualquer

1º caso



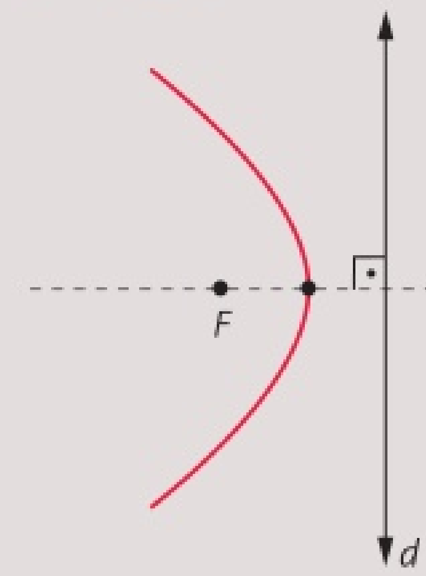
$(y - y_v)^2 = 4c(x - x_v)$

2º caso



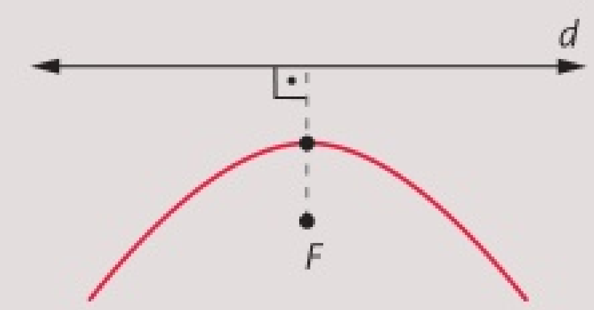
$(x - x_v)^2 = 4c(y - y_v)$

3º caso



$(y - y_v)^2 = -4c(x - x_v)$

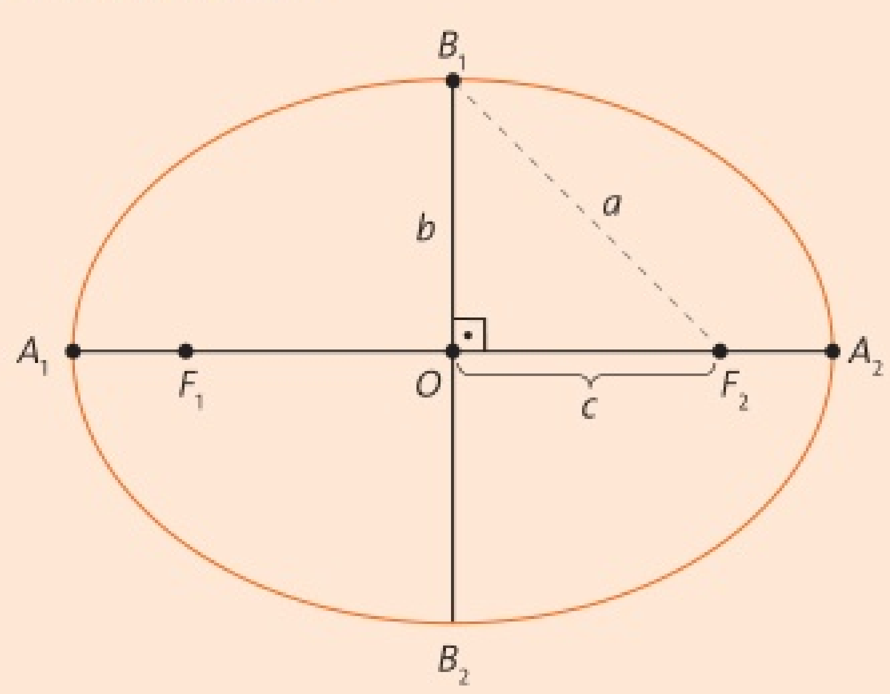
4º caso



$(x - x_v)^2 = -4c(y - y_v)$

Elipse

Elementos



- F_1 e F_2: focos da elipse; distância focal igual a $2c$;
- $\overline{A_1A_2}$: eixo maior da elipse cuja medida é $2a$;
- $\overline{B_1B_2}$: eixo menor da elipse cuja medida é $2b$;
- O: centro da elipse.

Excentricidade da elipse

$e = \dfrac{c}{a}\ (0 < e < 1)$

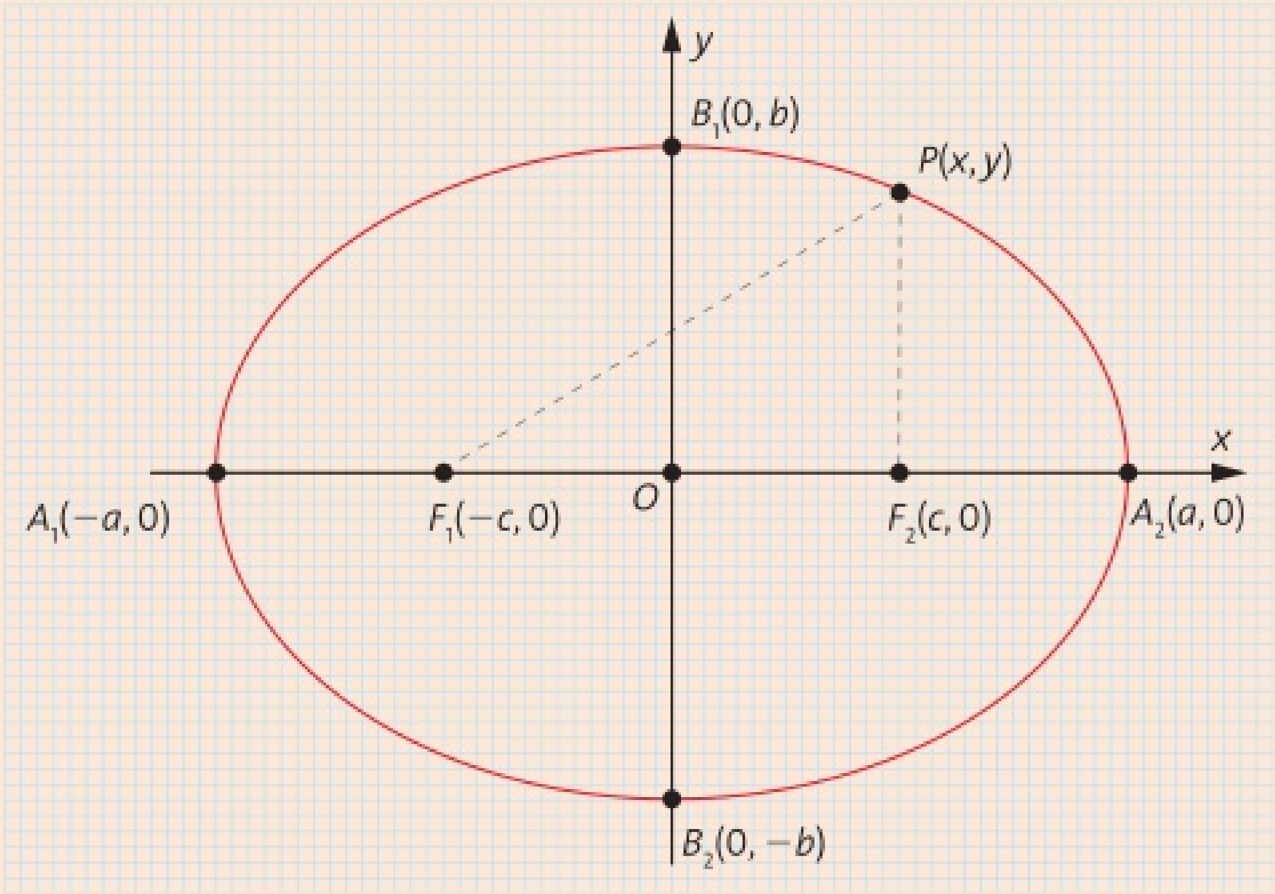
Definição

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tais que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, denominados focos, seja constante, igual a $2a$ e maior que a distância entre os focos ($2a > 2c$).

Elipse

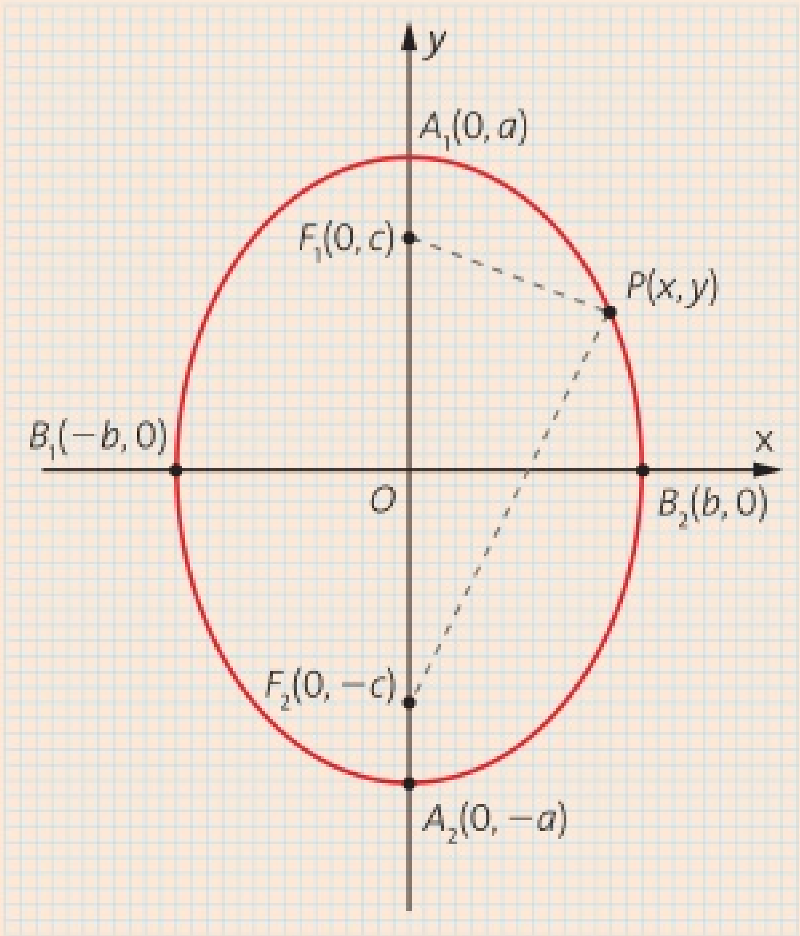
Equações da elipse com centro na origem

1º caso



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

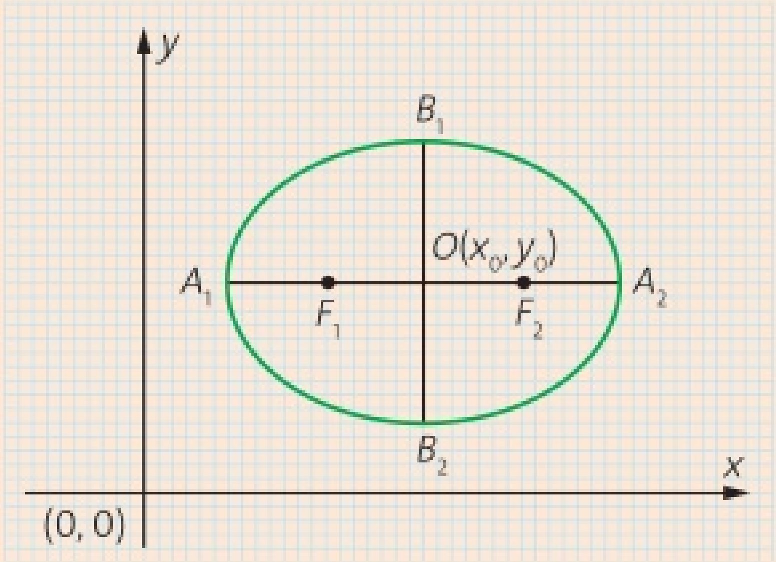
2º caso



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

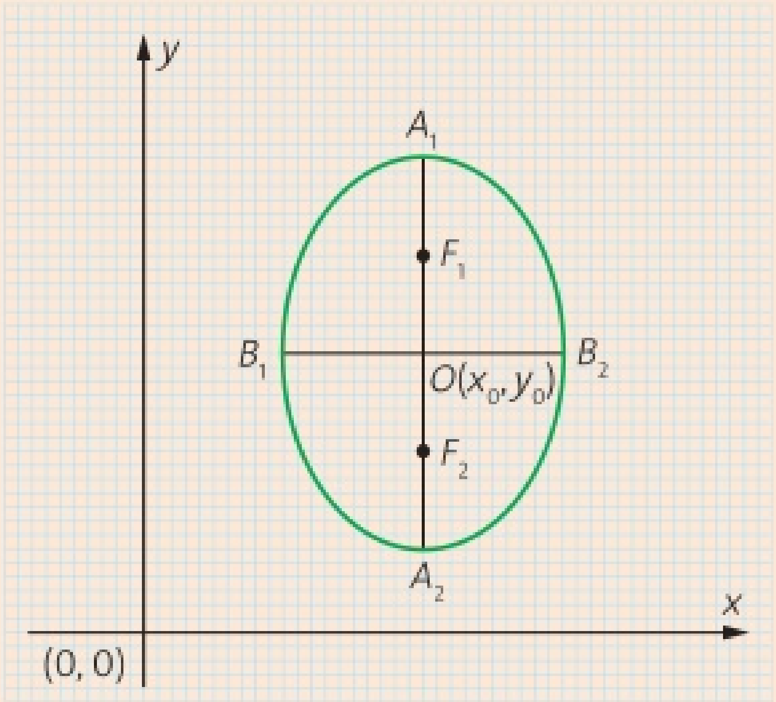
Equações da elipse com centro em um ponto qualquer

1º caso



$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

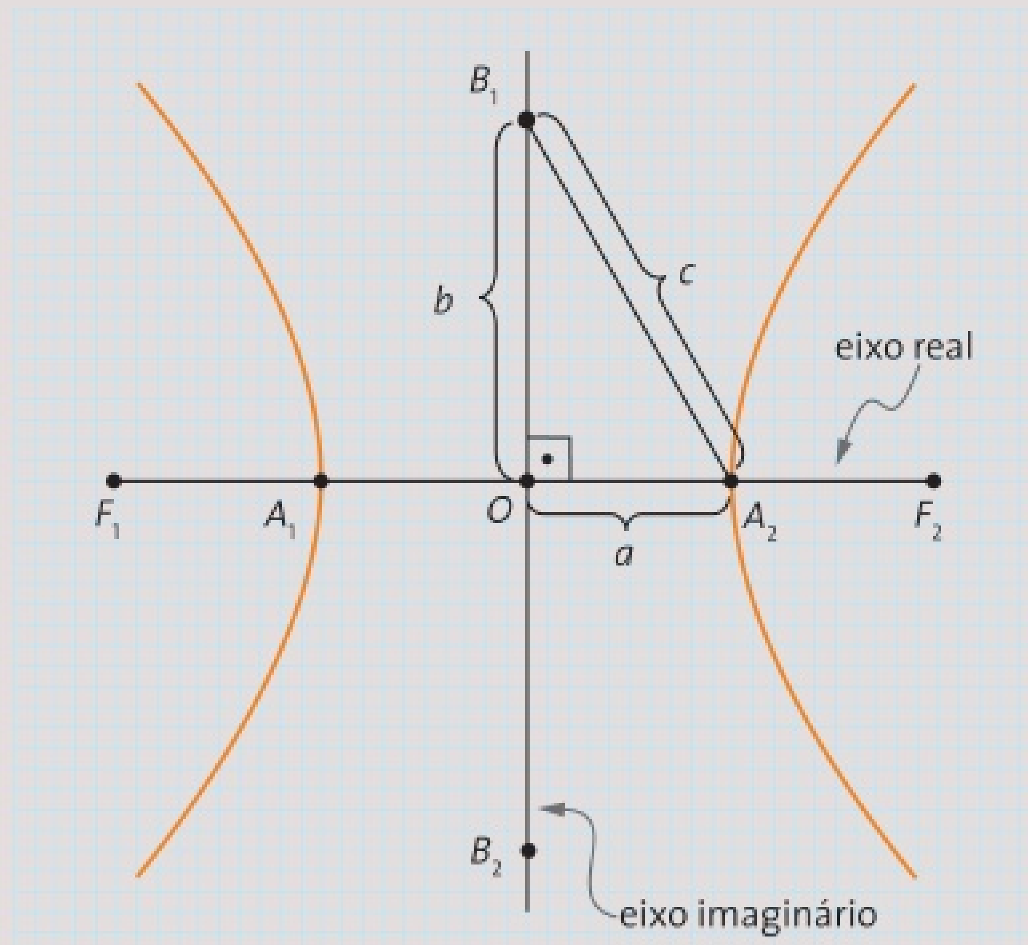
2º caso



$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Hipérbole

Elementos



- F_1 e F_2: focos da hipérbole; distância focal igual a $2c$;
- A_1 e A_2: vértices da hipérbole, sendo $A_1A_2 = A_1F_2 - A_1F_1 = 2a$;
- O: centro da elipse.

Excentricidade da elipse

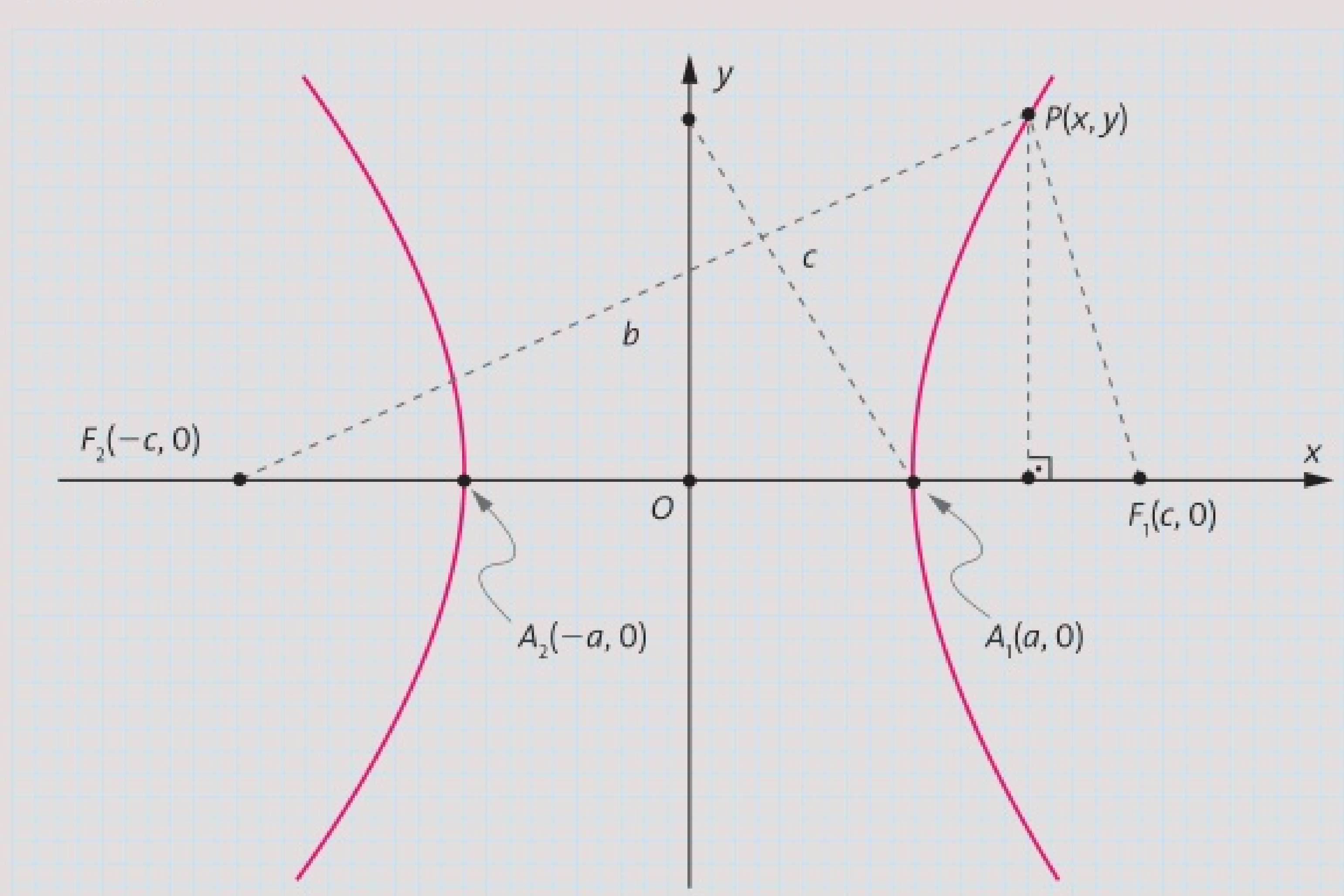
$e = \dfrac{c}{a}$ ($e > 1$, pois $c > a$)

Definição

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ de um plano tais que a diferença (em módulo) de suas distâncias a dois pontos fixos, F_1 e F_2, é constante ($2a < 2c$), com $F_1F_2 = 2c$.

Equações da hipérbole com centro na origem

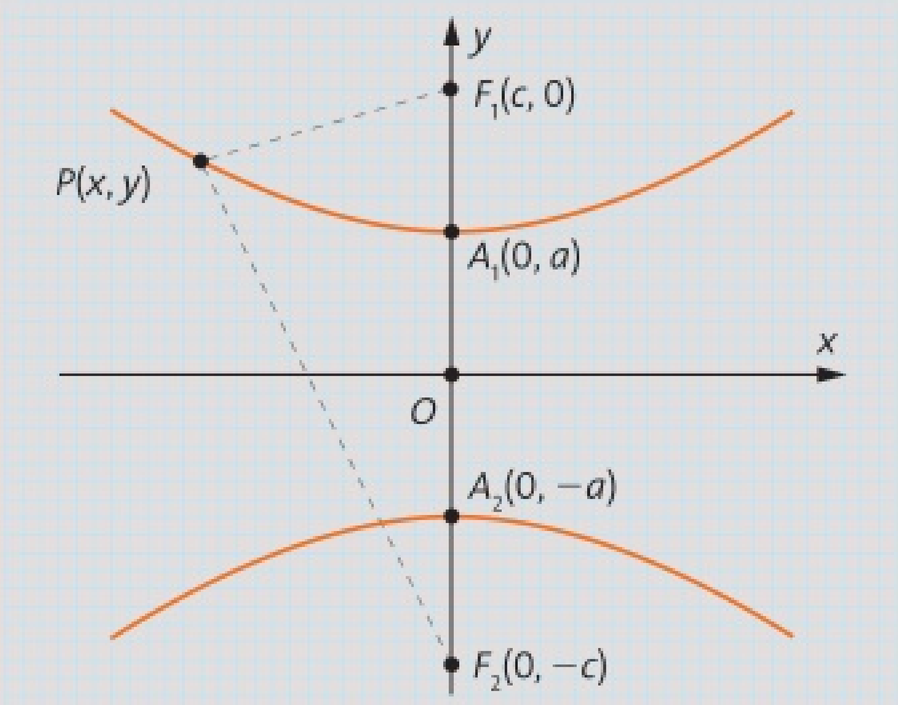
1º caso



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hipérbole

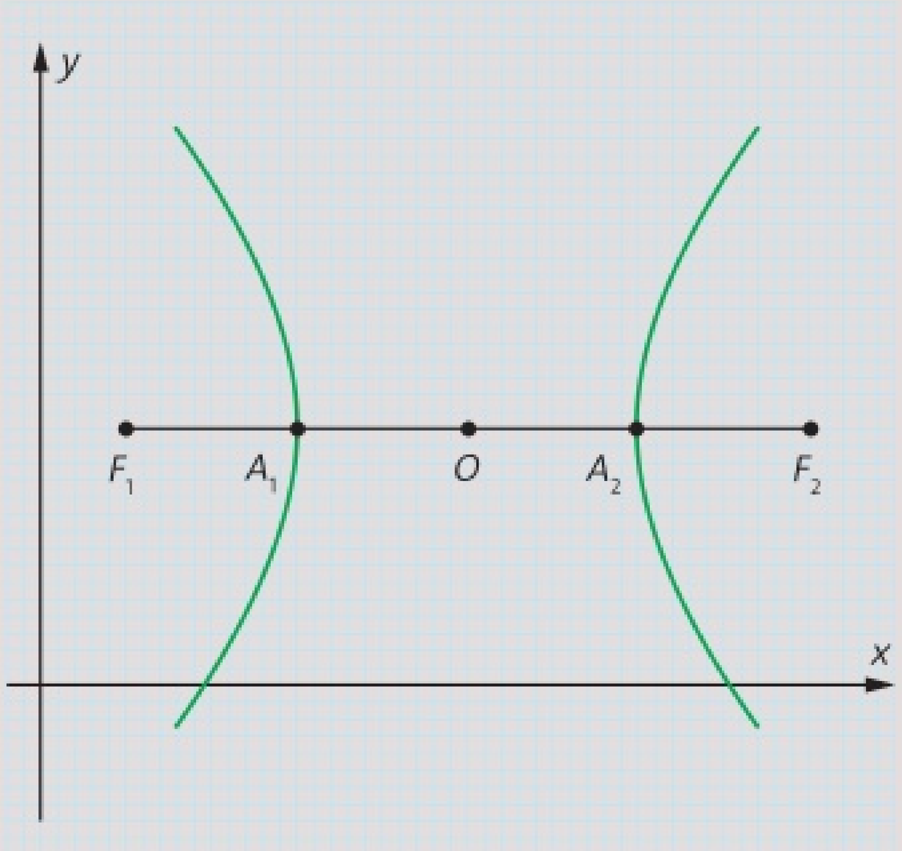
2º caso



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

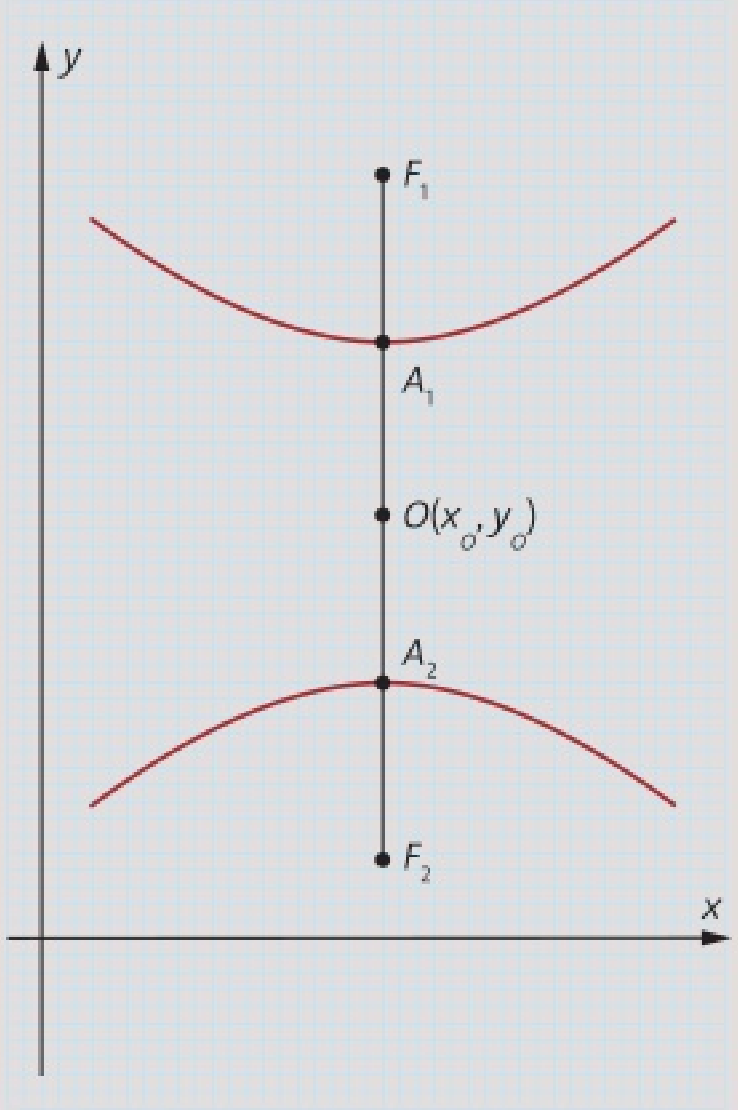
Equações da hipérbole com centro em um ponto qualquer

1º caso



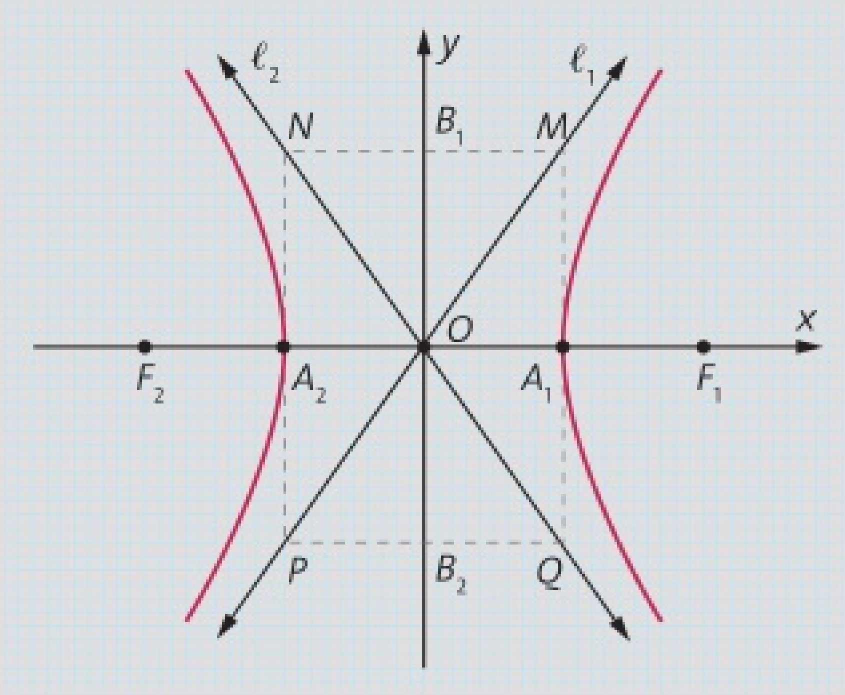
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

2º caso



$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Assíntotas da hipérbole



$y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$

Exercícios

1. (UFPA) A distância do vértice da parábola $y = 1 - x^2$ à reta $3x + 4y - 2 = 0$ é:

a) $\frac{1}{5}$. b) $\frac{2}{5}$. c) $\frac{3}{5}$. d) $\frac{4}{5}$. e) 1.

Do enunciado, temos:

$x^2 = 1 - y$

Mas a equação da parábola é da forma:

$x^2 = -4c(y - y_0)$

Logo,

$x^2 = -4 \cdot \frac{1}{4}(y - y_0)$

Assim, $V(0, 1)$.

Vamos calcular a distância entre ponto e reta:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow d(P, r) = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 2|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow d(P, r) = \frac{2}{5}$$

Resposta: alternativa **b**.

2. (UEPB) Sendo e_1 e e_2 as respectivas excentricidades das elipses de equações $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ e $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, o quociente entre e_1 e e_2 é:

a) $\frac{\sqrt{21}}{5}$. b) $\frac{\sqrt{21}}{3}$. c) $\frac{\sqrt{21}}{15}$. d) $\frac{\sqrt{21}}{45}$. e) $\sqrt{21}$.

Na elipse 1, temos:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 4 + c^2 \Rightarrow c^2 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

Então:

$e_1 = \frac{c}{a} \Rightarrow e_1 = \frac{\sqrt{21}}{5}$

Na elipse 2, temos:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

Então:

$e_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow e_2 = \frac{3}{5}$

Logo:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{\frac{\sqrt{21}}{5}}{\frac{3}{5}} \Rightarrow \frac{e_1}{e_2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

Resposta: alternativa **b**.

3. (Uema) A elipse com focos nos pontos $F_1(-4, 0)$ e $F_2(0, 4)$ tem excentricidade $e = 0{,}8$. Dessa forma, os pontos $P(x, y)$ sobre essa curva satisfazem a equação:

a) $9x^2 + 16y^2 - x - y - 25 = 0.$

b) $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0.$

c) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0.$

d) $4x^2 + 16y^2 - xy + 16 = 0.$

e) $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0.$

Sendo $c = 4$ e $e = 0{,}8$, temos:

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 0{,}8 = \frac{4}{a} \Rightarrow a = 5$

Assim:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 16 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Então:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$

Resposta: alternativa **c**.

4. (UEPB) Se $t \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, as equações paramétricas $\begin{cases} x = 5 \cos(t) \\ y = i \operatorname{sen}(t) \end{cases}$ representam:

a) duas retas paralelas.

b) uma circunferência.

c) uma parábola com vértice na origem.

d) duas retas concorrentes.

e) uma hipérbole com centro na origem.

$$\begin{cases} x^2 = 25 \cos^2 t \\ y^2 = -\operatorname{sen}^2 t \end{cases}$$

$x^2 - y^2 = 25 \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t \Rightarrow x^2 - y^2 = 25 \Rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{25} = 1$ (hipérbole com centro na origem)

Resposta: alternativa **e**.

5. (EsPCEx-SP) A representação no sistema cartesiano ortogonal da equação $9x^2 - y^2 = 36x + 8y - 11$ é dada por:

a) duas retas concorrentes.
b) uma circunferência.
c) uma elipse.
d) uma parábola.
e) uma hipérbole.

$9x^2 - y^2 - 36x - 8y + 11 = 0 \Rightarrow 9(x-2)^2 - (y+4)^2 = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{1} - \dfrac{(y-4)^2}{9} = 1$ (hipérbole)

Resposta: alternativa **e**.

6. (Ibmec-RJ) As equações $y^2 - x^2 + 1 = 0$, $2y^2 + x^2 - 1 = 0$ e $x^2 - 2x + y^2 = 0$ representam no plano, respectivamente:

a) uma elipse, uma hipérbole e uma parábola.
b) uma hipérbole, uma elipse e uma circunferência.
c) uma parábola, uma elipse e uma circunferência.
d) uma reta, uma parábola e uma elipse.
e) uma hipérbole, uma parábola e uma elipse.

I. $y^2 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow y^2 - x^2 = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$ (hipérbole)

II. $2y^2 + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 2y^2 + x^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{y^2}{\frac{1}{2}} + x = 1$ (elipse)

III. $x^2 - 2x + y^2 = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$ (circunferência)

Resposta: alternativa **b**.

7. (Unimontes-MG) As cônicas representadas pelas equações $x^2 + 2y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 2$:

a) interceptam-se em dois pontos.
b) não se interceptam.
c) interceptam-se em quatro pontos.
d) interceptam-se em três pontos.

$$\begin{cases} \cancel{x^2} + 2y^2 = 1 \\ \cancel{x^2} + y^2 = 2 \quad \cdot(-1) \end{cases}$$
$$y^2 = -1$$

Não há valor possível para y. Logo, as cônicas não se interceptam.

Resposta: alternativa **b**.

8. (UEPB) A excentricidade da elipse, denotada por "e", de equação $16(x-3)^2 + 25(y-4)^2 = 400$ é dada por:

a) $e = \dfrac{4}{5}$.
b) $e = \dfrac{2}{5}$.
c) $e = \dfrac{3}{5}$.
d) $e = \dfrac{1}{5}$.
e) $e = \dfrac{2}{3}$.

$\dfrac{16(x-3)^2}{400} + \dfrac{25(y-4)^2}{400} = \dfrac{400}{400} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{(x-3)^2}{25} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = \dfrac{400}{400}$

Então:

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = 16 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

Então:

$e = \dfrac{c}{a} \Rightarrow e = \dfrac{3}{5}$

Resposta: alternativa **c**.

9. (UFCG-PB) Um projétil é lançado do solo e sua trajetória é descrita por uma parábola $y = ax^2 + bx + c$, a partir do lançamento no ponto de abscissa $x = 1$, onde o solo é representado pelo eixo das abscissas do sistema cartesiano de coordenadas. O projétil alcança a sua altura máxima no ponto de coordenadas (2, 2) e atinge o solo no ponto de abscissa $x = 3$. Com esses dados, a trajetória do projétil é descrita pela equação:

a) $y = 2x^2 + 8x - 6$.
b) $y = 2x^2 - 8x + 6$.
c) $y = x^2 + 8x - 6$.
d) $y = -x^2 + 8x + 6$.
e) $y = -2x^2 + 8x - 6$.

- Para (1, 0), temos:
  $a + b + c = 0$
- Para (2, 2), temos:
  $4a + 2b + c = 2$
- Para (3, 0), temos:
  $9a + 3b + c = 0$

Então:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b \ \text{(I)} \\ 4a + 2b + c = 2 \ \text{(II)} \\ 9a + 3b + c = 0 \ \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II) e (III), temos:

$$\begin{cases} 4a + 2b - a - b = 2 \\ 9a + 3b - a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 2 \\ 8a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6a - 2b = -4 \\ 8a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

$3a + b = 2 \Rightarrow 3(-2) + b = 2 \Rightarrow b = 8$

Logo:

$c = -a - b \Rightarrow c = -6$

Portanto, a equação é $y = -2x^2 + 8x - 6$.

Resposta: alternativa **e**.

---

10. (UEPB) Uma antena parabólica, interceptada por um plano que contém o centro da antena e o eixo de simetria, oferece a equação de uma parábola, dada por $y = 12x$. Deste modo, a distância, em metros, do foco da antena ao vértice da parábola será de:

a) 12.
b) 3.
c) 6.
d) 24.
e) 18.

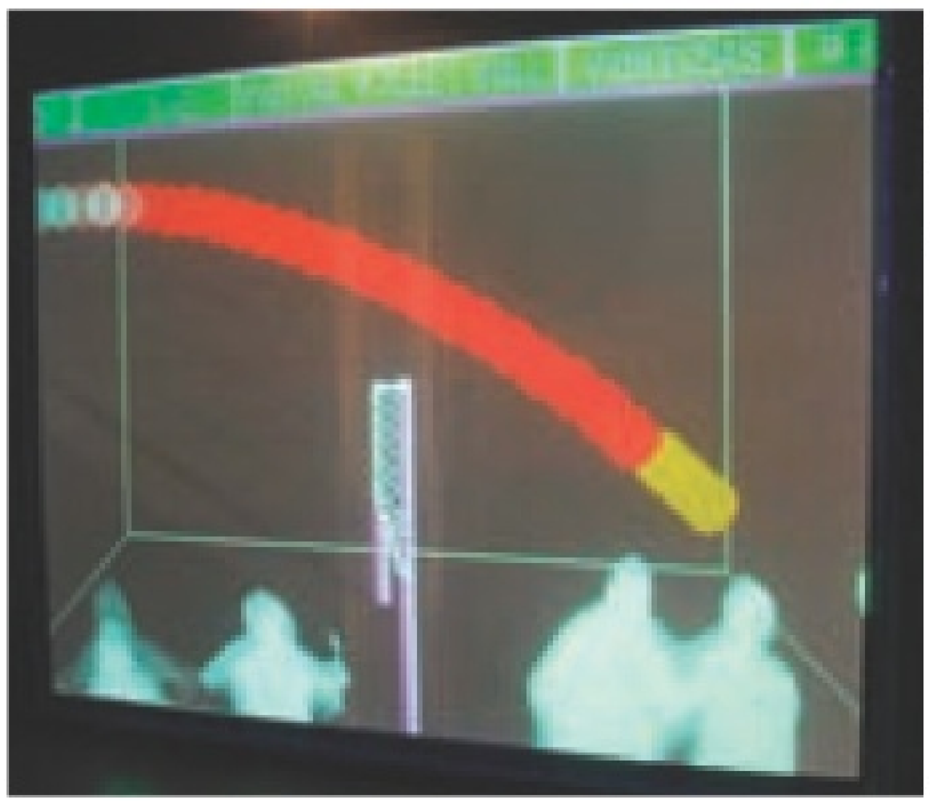
$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 4cx \\ y^2 = 12x \end{array}\right\} 4cx = 12x \Rightarrow 4c = 12 \Rightarrow c = 3$$

Logo, a distância entre o foco e o vértice é de 3 m.

Resposta: alternativa **b**.

11. (PUC-RS) Existe, em um ponto privilegiado do museu, um jogo de vôlei virtual. Ao observar o jogo, percebemos que o trajeto percorrido pela bola, quando "rebatida", pode ser determinado por uma função real representada geometricamente por uma parábola. Dentre as expressões abaixo, aquela que representa uma parábola é:

a) $y^2 + 2 + x = 0$.
b) $y^2 = 4x^2 - 2x + 8$.
c) $x^2 - y^2 - 4 = 0$.
d) $y = 2x - 5$.
e) $y = x(x^2 - 6x + 5)$.



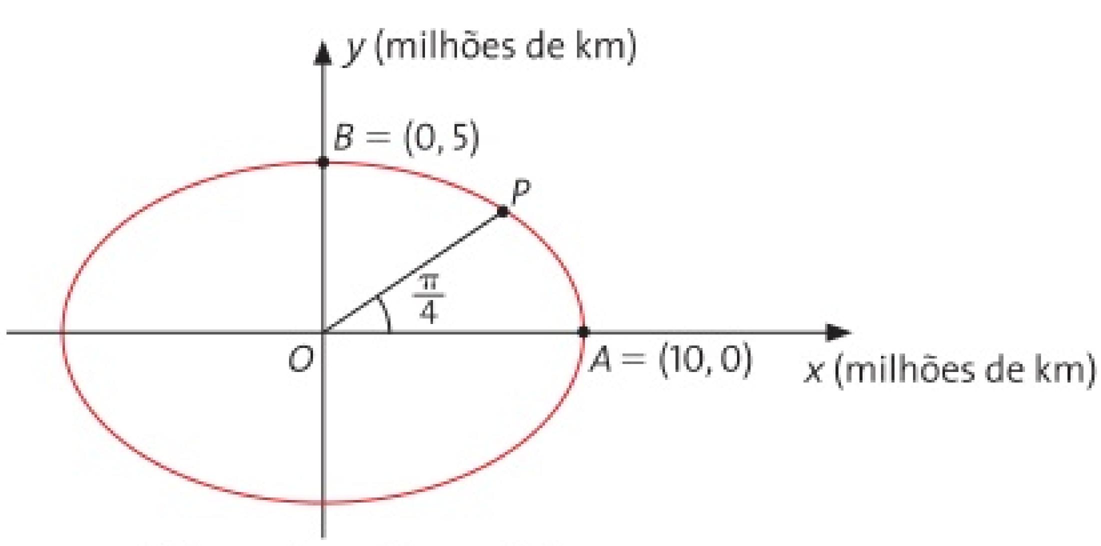
a) Verdadeiro.

$y^2 = -4cx \Rightarrow y^2 = -4c(x + 2) \Rightarrow y^2 = -4 \cdot \frac{1}{4}(x + 2) \Rightarrow y^2 + x + 2 = 0$

b) Falso, pois para ser parábola apenas x ou apenas y pode estar ao quadrado.
c) Falso. Idem à alternativa **b**.
d) Falso, pois ou x ou y deve estar ao quadrado.
e) Falso, pois x está elevado ao cubo.

Resposta: alternativa **a**.

12. (Vunesp-SP) Suponha que um planeta P descreva uma órbita elíptica em torno de uma estrela O, de modo que, considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, sendo a estrela O a origem do sistema, a órbita possa ser descrita aproximadamente pela equação $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, com x e y em milhões de quilômetros. A figura representa a estrela O, a órbita descrita pelo planeta e sua posição no instante em que o ângulo $P\hat{O}A$ mede $\frac{\pi}{4}$. A distância, em milhões de km, do planeta P à estrela O, no instante representado na figura, é:



(figura fora de escala)

a) $2\sqrt{5}$.
b) $2\sqrt{10}$.
c) $5\sqrt{2}$.
d) $10\sqrt{2}$.
e) $5\sqrt{10}$.

Como o ângulo $P\hat{O}A$ mede $\frac{\pi}{4}$, P está na bissetriz do 1º quadrante, e portanto é da forma $P(\ell, \ell)$. Assim:

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1 \Rightarrow 25x^2 + 100y^2 = 2\,500$

Substituindo P na equação de elipse, temos:

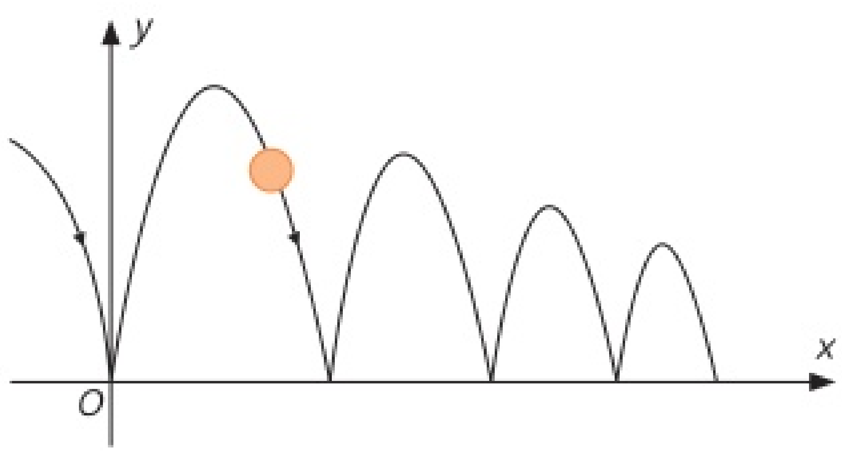
$25\ell^2 + 100\ell^2 = 2\,500 \Rightarrow 125\ell = 2\,500 \Rightarrow \ell^2 = 20 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{5}$

Como sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, então:

sen $\frac{\pi}{4} = \frac{\ell}{d} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{d} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot d = 4\sqrt{5} \Rightarrow d = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{10}}{2} = 2\sqrt{10}$

Resposta: alternativa **b**.

13. (Ufla-MG) Uma bolinha de tênis, após se chocar com o solo, no ponto *O*, segue uma trajetória ao longo de quatro parábolas, como pode ser observado no gráfico. A altura máxima atingida em cada uma das parábolas é $\frac{3}{4}$ do valor da altura máxima da parábola anterior. Sabendo-se que as distâncias entre os pontos onde a bolinha toca o solo são iguais e que a equação da primeira parábola é $y = -4x^2 + 8x$, a equação da quarta parábola é:



a) $y = x^2 - 14x + 48$.

b) $y = -x^2 - 14x + 48$.

c) $y = -\frac{27}{16}(x - 6)(x - 8)$.

d) $y = -\left(\frac{3}{4}\right)^3(x - 6)(x - 8)$.

e) $y = -8x^2 + 16x$.

Na 1ª parábola, temos:

- $x_V = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_V = \frac{-8}{2(-4)} = 1$
- $y_V = y(1) = -4(1)^2 + 8 \cdot 1 = 4$

Logo, o vértice da parábola é $V(1, 4)$.

Assim, temos os vértices:

- da 2ª parábola: $V(3, 3)$;
- da 3ª parábola: $V\left(5, \frac{9}{4}\right)$;
- da 4ª parábola: $V\left(5, \frac{27}{16}\right)$.

Achando c na 4ª parábola, temos:

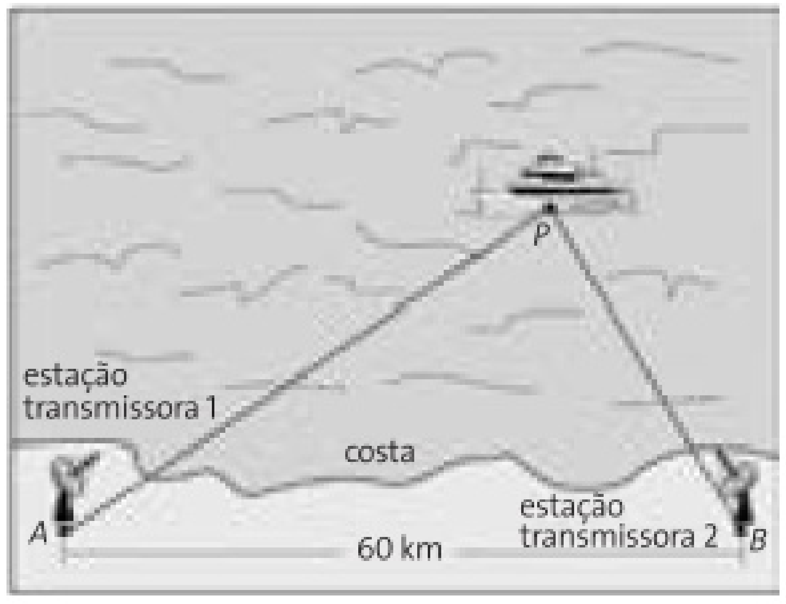
$(6 - 7)^2 = 4c\left(0 - \frac{27}{16}\right) \Rightarrow 1 = \frac{27}{4}c \Rightarrow c = \frac{4}{27}$

Então, a equação da 4ª parábola é dada por:

$(x - 7)^2 = -\frac{16}{27}\left(y - \frac{27}{16}\right) \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = -\frac{16}{27}y + 1 \Rightarrow -\frac{16}{27}y = x^2 - 14x + 48 \Rightarrow -\frac{16}{27}y = (x - 6)(x - 8) \Rightarrow y = -\frac{27}{16}(x - 6)(x - 8)$

Resposta: alternativa **c**.

14. (UFPB) Em certo sistema marítimo de navegação, duas estações de rádio, localizadas na costa, nos pontos A e B, transmitem simultaneamente sinais de rádio para qualquer embarcação que se encontre no mar, na área de alcance dessas estações. Sendo P o ponto onde está localizada uma embarcação que recebe esses sinais, o computador de bordo da embarcação calcula a diferença, $PA - PB$, das distâncias da embarcação a cada uma das estações.
Um navio que estava ancorado no mar recebeu o sinal da estação localizada em B e, 120 microssegundos (μs) depois, recebeu o sinal da estação localizada em A, conforme a figura ao lado. Considere as estações de rádio e o ponto P onde esse navio estava ancorado como pontos de um plano cartesiano, onde a unidade de comprimento é o quilômetro e $A(-30, 0)$ e $B(30, 0)$.



Dados:
- $1\ s = 10^6\ \mu s$;
- a velocidade do sinal de rádio é de 300 000 km/s.

Nesse contexto, é correto afirmar que a hipérbole com focos nos pontos A e B e que contém o ponto P tem como equação a expressão:

a) $\dfrac{x^2}{324} + \dfrac{y^2}{576} = 1.$

b) $\dfrac{x^2}{361} - \dfrac{y^2}{676} = 1.$

c) $\dfrac{x^2}{576} - \dfrac{y^2}{324} = 1.$

d) $\dfrac{x^2}{676} - \dfrac{y^2}{361} = 1.$

e) $\dfrac{x^2}{289} - \dfrac{y^2}{625} = 1.$

$v = \dfrac{PA - PB}{\text{tempo}} \Rightarrow 3 \cdot 10^5 = \dfrac{PA - PB}{10 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow PA - PB = 36$

Mas:

$PA - PB = 2a \Rightarrow 2a = 36 \Rightarrow a = 18$

Como $a = 18$, $c = 30$, temos:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 900 = 324 + b^2 \Rightarrow b^2 = 576 \Rightarrow b = 24$

Logo, a equação da hipérbole é dada por:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{324} + \dfrac{y^2}{576} = 1$

Resposta: alternativa **a**.

15. (UFPB) Um arquiteto fez o projeto de uma praça em formato elíptico, com quadras poliesportivas, um anfiteatro e alguns quiosques, e desenhou a planta dessa praça em um plano cartesiano, tendo o metro como a unidade de comprimento. Nos focos da elipse que contorna a praça, estão dois quiosques, representados pelos pontos $A(2, 80)$ e $B(2, -80)$. Um terceiro quiosque, sobre a elipse, está representado pelo ponto $C(2, -100)$. Nesse contexto, a equação dessa elipse é:

a) $\dfrac{(x-2)^2}{6\,400} + \dfrac{y^2}{10\,000} = 1.$

b) $\dfrac{(x-2)^2}{3\,600} + \dfrac{y^2}{10\,000} = 1.$

c) $\dfrac{(x-2)^2}{10\,000} + \dfrac{y^2}{64\,000} = 1.$

d) $\dfrac{(x-2)^2}{3\,600} + \dfrac{y^2}{6\,400} = 1.$

e) $\dfrac{y^2}{10\,000} + \dfrac{(x-2)^2}{6\,400} = 1.$

Temos:
- Centro (2, 0)
- $a = 100$
- $c = 80$

Então:

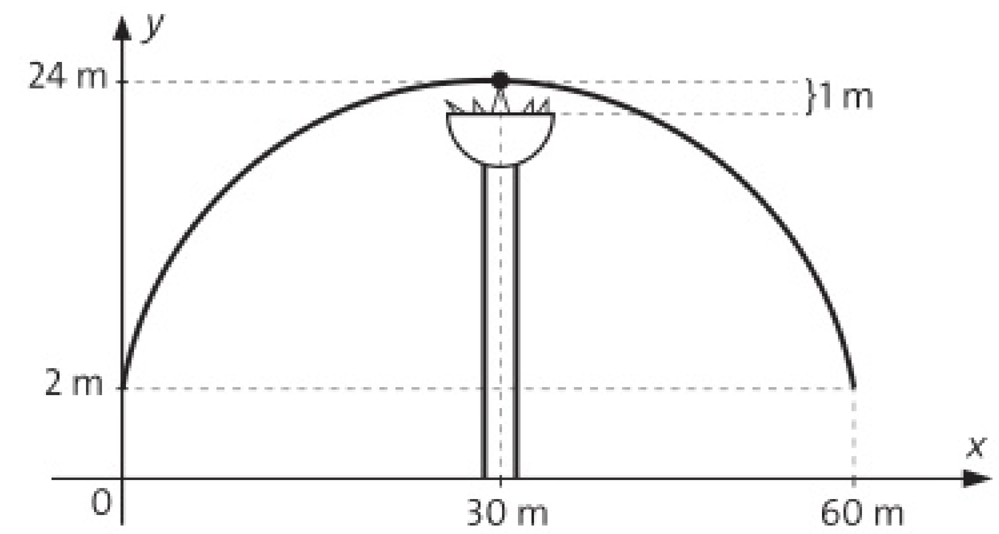
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 10\,000 = b^2 + 6\,400 \Rightarrow b^2 = 3\,600$

Assim, podemos determinar a equação da elipse:

$\dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{3\,600} + \dfrac{y^2}{10\,000} = 1$

Resposta: alternativa **b**.

16. (Unimontes-MG) Na abertura dos Jogos Olímpicos de 1992, em Barcelona, Antonio Rebollo, o arqueiro que havia ganho uma medalha de bronze, acendeu a pira olímpica com uma flecha em chamas. Rebollo atirou a flecha a uma altura de 2 m acima do nível do solo e a 30 m de distância da pira olímpica de 23 m de altura.



Unimonte/2012

Unimonte/2012

Se ele queria que a flecha alcançasse a altura máxima, exatamente 1 m acima do centro da pira, então a parábola descrita pela flecha em chamas tinha a equação:

a) $y = -\dfrac{11}{450}x^2 - \dfrac{22}{15}x + 2.$

b) $y = -\dfrac{11}{450}x^2 + \dfrac{22}{15}x - 2.$

c) $y = \dfrac{11}{450}x^2 - \dfrac{22}{15}x - 2.$

d) $y = -\dfrac{11}{450}x^2 + \dfrac{22}{15}x + 2.$

A equação é da forma $(x - x_0)^2 = -4c(y - y_0)$, então devemos encontrar c para determiná-la.

Assim, no ponto (0, 2), temos:

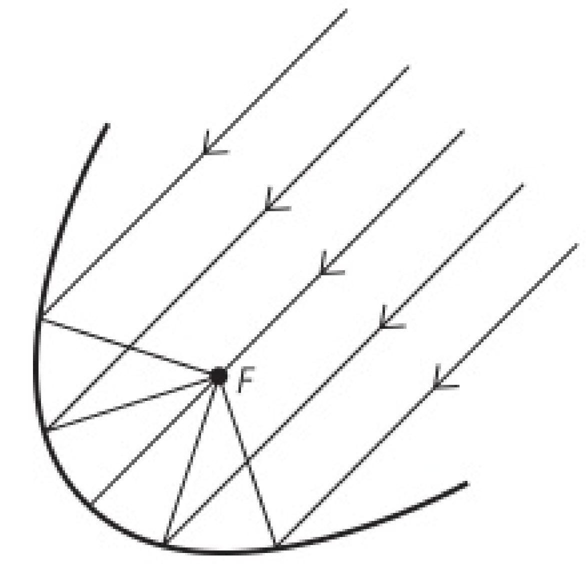
$(x - x_0)^2 = -4c(y - y_0) \Rightarrow (0 - 30)^2 = -4c(2 - 24) \Rightarrow 900 = 88c \Rightarrow c = \dfrac{900}{88} = \dfrac{255}{22}$

Logo:

$(x - 30)^2 = -4 \cdot \dfrac{255}{22}(y - 24) \Rightarrow 11(x - 30)^2 = -450(y - 24) \Rightarrow 450y = -11x^2 + 660x + 900 \Rightarrow y = -\dfrac{11x^2}{450} + \dfrac{22x}{15} + 2$

Resposta: alternativa **d**.

17. (UFRN) Em uma antena parabólica, os sinais vindos de muito longe, quando incidem em sua superfície, refletem e se concentram no foco *F*, conforme a figura ao lado. Com base nesse princípio, se *C* é uma circunferência qualquer, com centro no foco *F* da parábola, é correto afirmar que a circunferência *C*:



a) intercepta a parábola em pelo menos um ponto.

b) só pode interceptar a parábola em um ponto.

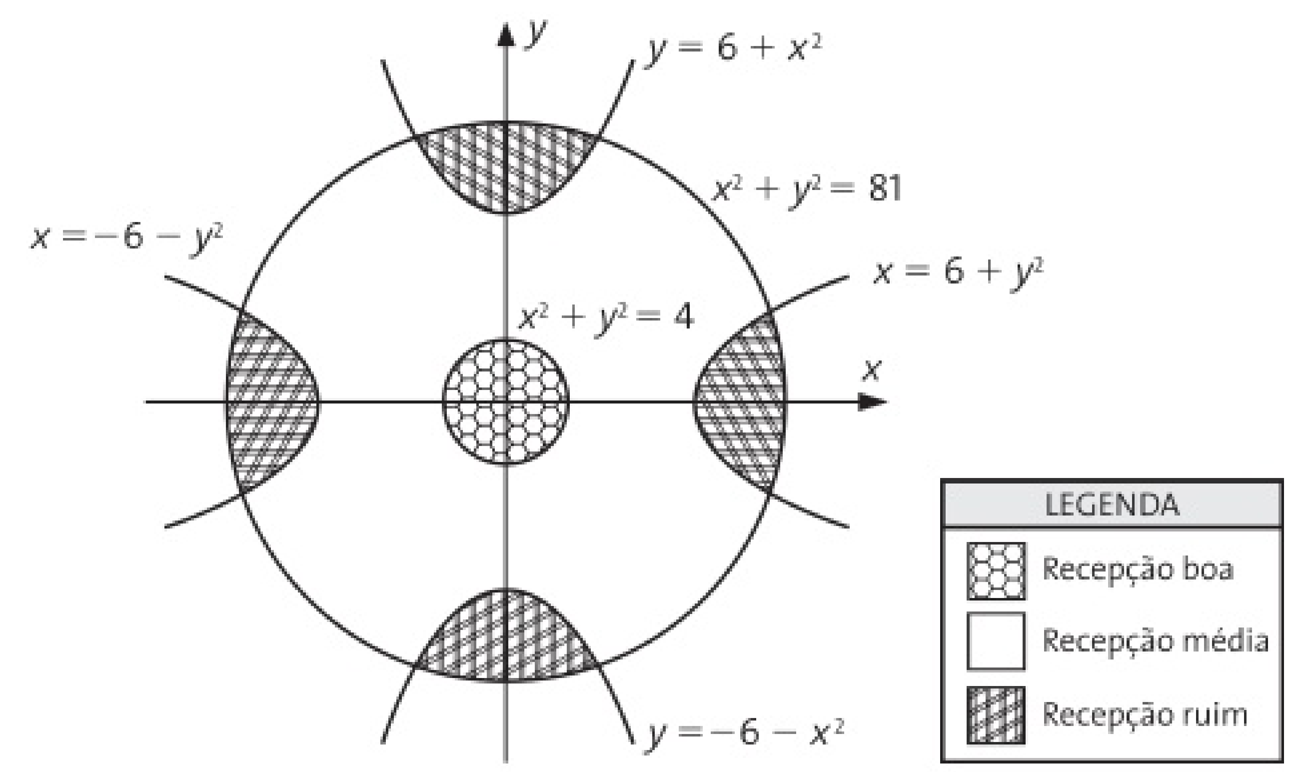
c) só pode tangenciar a parábola em um ponto.

d) tangencia a parábola em dois pontos distintos.

De acordo com o texto, apenas a alternativa **c** é correta.

Resposta: alternativa **c**.

18. (UFPB) Uma empresa de telefonia celular mapeou sua área de cobertura em certa cidade, utilizando o plano cartesiano. Devido às características do relevo e do planejamento urbano da cidade, na região exterior à circunferência de equação $x^2 + y^2 = 81$ não há recepção de sinal e, nas demais regiões, a recepção do sinal ficou classificada conforme a figura ao lado.



Nesse contexto, identifique as afirmativas corretas:

I. O ponto (1, 1) está na região de recepção boa.

II. O ponto (5, 1) está na região de recepção ruim.

III. A localidade delimitada pela região retangular de vértices (4, 6), (4, 10), (12, 10) e (12, 6) está parcialmente contida na região de recepção boa.

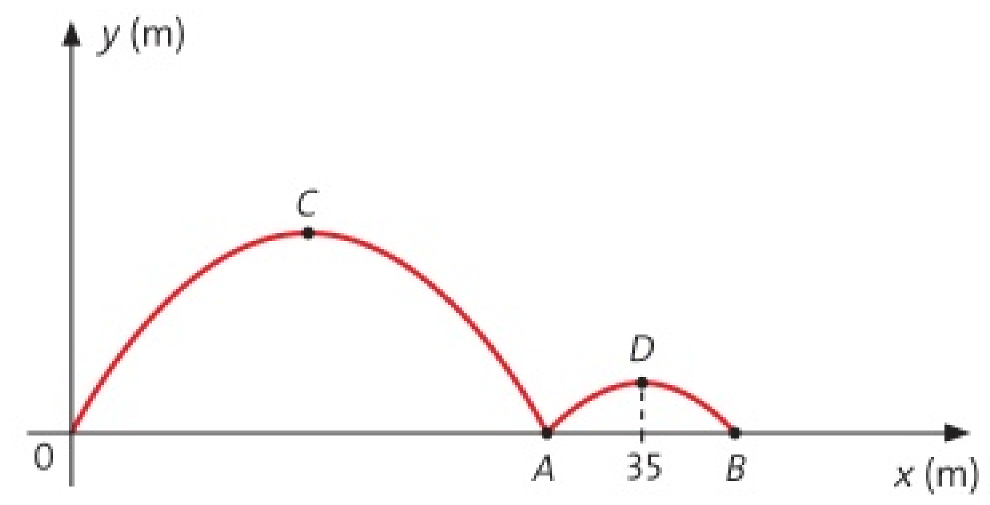
IV. A localidade delimitada pelo quadrado de vértices (1, −1), (−1, −1), (−1, 1) e (1, 1) está totalmente contida na região de recepção boa.

V. A localidade delimitada pelo retângulo de vértices (−1, 1), (1, 1), (−1, 8) e (1, 8) possui pontos de recepção boa, recepção média e recepção ruim.

I. Verdadeiro.
II. Falso.
III. Falso.
IV. Verdadeiro.
V. Verdadeiro.

Resposta: **I**, **IV** e **V**.

19. (Uerj) Uma bola de beisebol é lançada de um ponto *O* e, em seguida, toca o solo nos pontos *A* e *B*, conforme representado no sistema de eixos ortogonais:



Durante sua trajetória, a bola descreve duas parábolas com vértices *C* e *D*. A equação de uma dessas parábolas é $y = -\dfrac{x^2}{75} + \dfrac{2x}{5}$. Se a abscissa de *D* é 35 m, a distância do ponto *O* ao ponto *B*, em metros, é igual a:

a) 38. b) 40. c) 45. d) 50.

Para $y = 0$, temos:

$$0 = -\frac{x^2}{75} + \frac{2x}{5} \Rightarrow \frac{x}{5}\left(-\frac{x}{15} + 2\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \text{ (ponto } O\text{)} \\ x = 30 \text{ (ponto } A\text{)} \end{cases}$$

Na 2ª parábola, o eixo da simetria é $x = 35$. Como $A(30, 0)$, então $B(40, 0)$.

Assim, $OB = 40$.

Resposta: alternativa **b**.

NÚMEROS COMPLEXOS

Forma algébrica de z $z = a + bi$	**Parte real de z** $\text{Re}(z) = a$
	Parte imaginária de z $\text{Im}(z) = b$
	Unidade imaginária i, tal que $i^2 = -1$

Potências de i

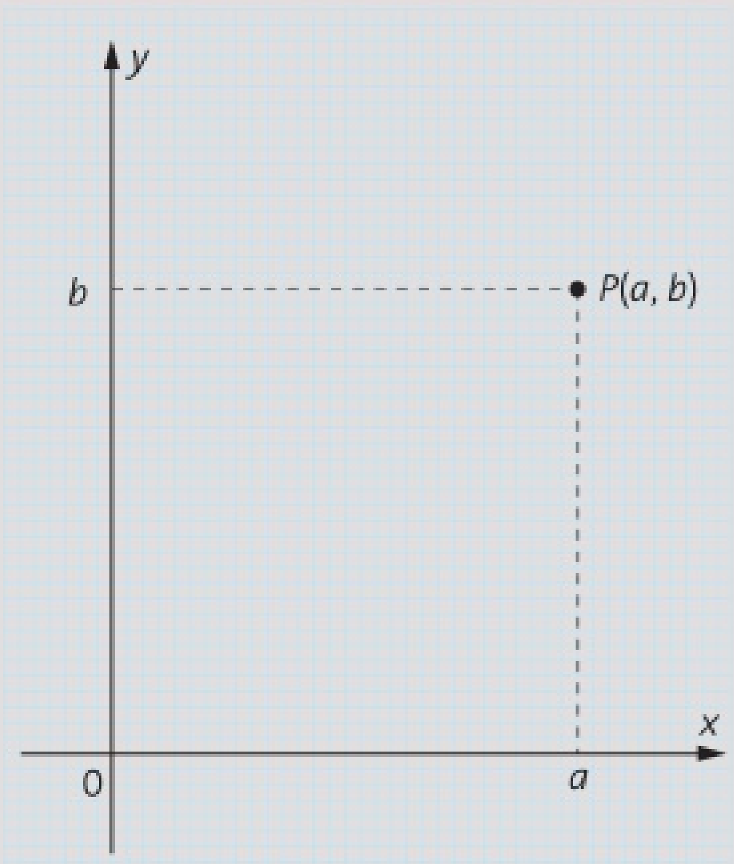
- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^n = i^p$, em que p é o resto da divisão de n por 4.

Conjugado de um número complexo $(\overline{z})$

Se $z = a + bi$, então $\overline{z} = a - bi$.

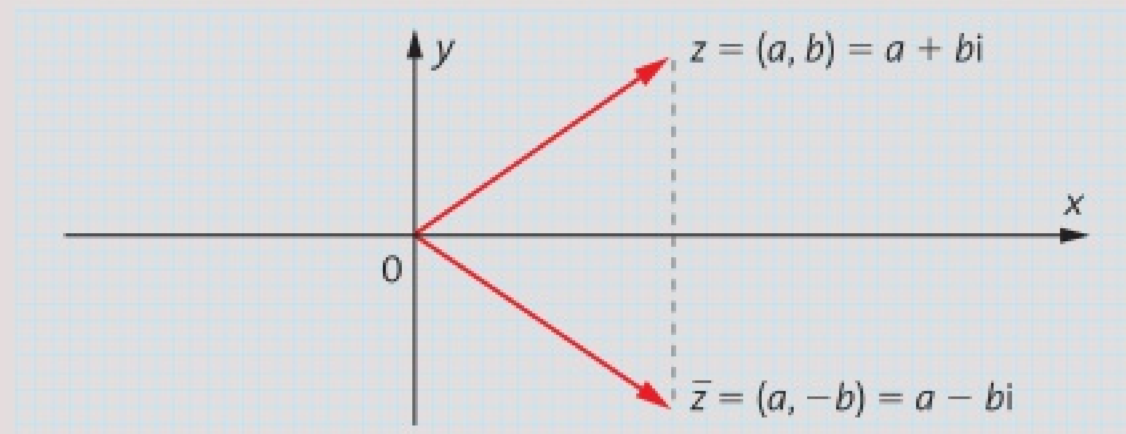
Operações com números complexos Seja $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$.	**Adição** $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
	Subtração $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$
	Multiplicação $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad - bc)i$
	Divisão $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$, com $z_2 \neq 0$

Representação geométrica

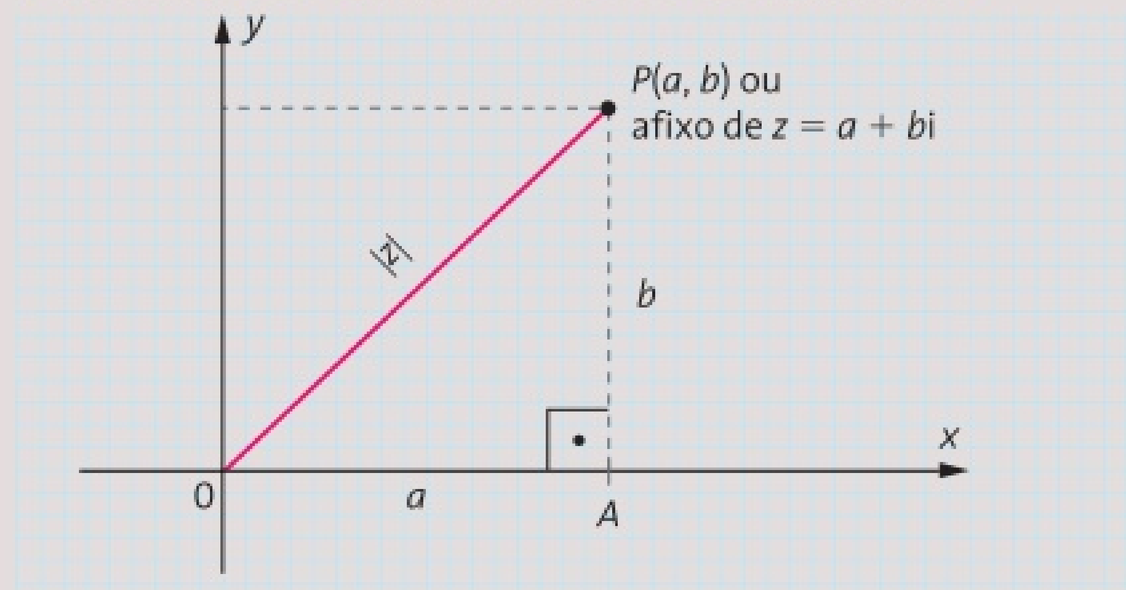


O ponto $P(a, b)$ é o afixo do número complexo $z = a + bi$.

Interpretação geométrica do conjugado

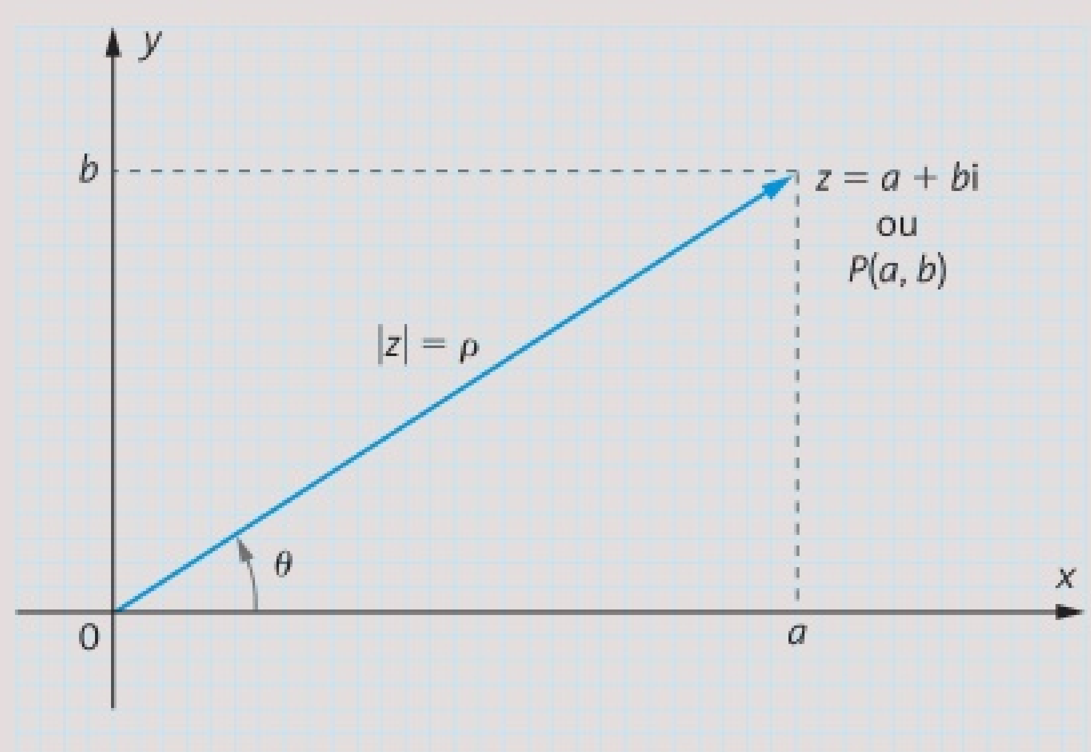


Módulo de um número complexo



$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento de z (θ)



$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \text{ e } \operatorname{sen}\theta = \frac{b}{|z|}, \text{ com } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Forma trigonométrica ou polar de z

$z = |z|(\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$

Multiplicação

$z_1z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Potenciação (1ª fórmula de De Moivre)

$z^n = |z|^n[\cos(n\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(n\theta)]$

Radiciação (2ª fórmula de De Moivre)

As n raízes enésimas de z são dadas por:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot \operatorname{sen}\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

com $k = 0, 1, 2, ..., (n - 1)$.

Exercícios

1. (UFPE) Se a é um número real e o número complexo $\dfrac{a-5i}{5-i}$ é real, qual o valor de a?

$$\frac{a-5i}{5-i}\cdot\frac{5+i}{5+i}=\frac{5a-25i+ai-5i^2}{5^2-i^2}=\frac{5a+5-25i+ai}{26}=$$
$$=\frac{5a+5}{26}+\frac{a-25}{26}i$$

Como o número a é real, então a parte imaginária é igual a zero. Logo:

$$\frac{a-25}{26}=0\Rightarrow a=25$$

Resposta: $a=25$.

2. (Unimontes-MG) O valor da potência i^{2n+1}, onde $n\in\mathbb{N}$, é:

a) i ou – i.
b) i.
c) 1 ou –1.
d) –1.

$2n+1$ é sempre ímpar. Assim:

$i^{2n+1}=i^1=i$

ou

$i^{2n+1}=i^3=-i$

Resposta: alternativa **a**.

3. (UEG-GO) A soma $S=\sum\limits_{j=0}^{50} i^j=i^0+i^1+i^2+...+i^{49}+i^{50}$ em que i é um número complexo, é igual a:

a) $1+i$.
b) $-i$.
c) $1-i$.
d) i.

$i^1+i^2+i^3+i^4=0$, ou seja, de i^1 até i^{48} a soma é 0, pois é o maior divisor de 4 menor que 50. Logo:

$i^0+i^{49}+i^{50}=1+i+(-1)=i$

Resposta: alternativa **d**.

4. (UEPB) O valor da expressão $(2+3i)(4-2i)+\dfrac{6+8i}{1-i}+i^{123}$ é igual a:

a) $13-14i$.
b) $14+13i$.
c) $13+14i$.
d) $14-13i$.
e) i.

I. $(2+3i)(4-2i)=8-4i+12i+6=14+8i$

II. $\dfrac{6+8i}{1-i}=\dfrac{6+8i}{1-i}\cdot\dfrac{1+i}{1+i}=\dfrac{6+6i+8i-8}{1+1}=-1+7i$

III. $i^{123}=i^{120}\cdot i^3=(i^4)^{30}\cdot i^3=-i$

Então:

$I+II+III=14+8i-1+7i-i=13+14i$

Resposta: alternativa **c**.

5. (Unifor-CE) Seja z um número complexo dado por $z = \dfrac{(3 + 4i) \cdot (-1 + i)^4}{(3 - 3i)^2}$. Considerando as aproximações $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, o valor de $\log |z|$ é:

a) 0,02.
b) 0,04.
c) 0,06.
d) 0,4.
e) 0,6.

$(-1 + i)^4 = ((-1 + i)^2)^2 = (1 - 2i + i^2)^2 = (1 - 2i - 1)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$

Então:

$$z = \frac{(3 + 4i)(-4)}{(3 - 3i)^2} = \frac{-12 - 16i}{-18i} = \frac{6 + 8i}{9i} \cdot \frac{9i}{9i} = \frac{54i + 72i^2}{81i^2} = \frac{54i - 72i^2}{-81} \Rightarrow z = \frac{8}{9} - \frac{6i}{9}$$

Logo:

$$|z| = \sqrt{\frac{64}{81} + \frac{36}{81}} = \sqrt{\frac{100}{81}} = \frac{10}{9}$$

Portanto:

$$\log |z| = \log \frac{10}{9} = \log 10 - 2 \log 3 \Rightarrow \log |z| = 1 - 2 \cdot 0{,}48 = 0{,}04$$

Resposta: alternativa **b**.

6. (Unimontes-MG) Dados os números complexos $z = 3 + i$ e $w = \dfrac{10}{3 - i}$, se $\overline{w}$ é o complexo conjugado de w, então:

a) $z = \overline{w}$.
b) $\overline{z} = w$.
c) $z = w$.
d) $\overline{z} = \overline{w}$.

$$w = \frac{10}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} \Rightarrow w = \frac{30 + 10i}{9 - i^2} \Rightarrow w = \frac{30 + 10i}{10} \Rightarrow$$

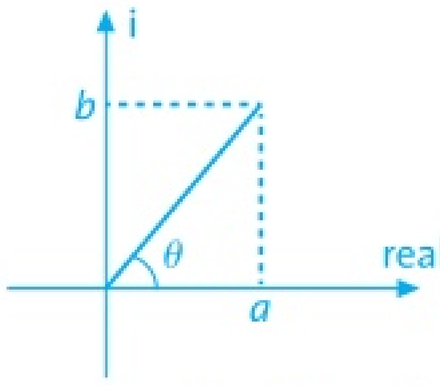
$\Rightarrow w = 3 + i$

Logo, $z = w$.

Resposta: alternativa **c**.

7. (UFCG-PB) Um número complexo z é tal que $z = a + 3i$, sendo a um número real. O valor de a para que um dos argumentos de z seja $\dfrac{\pi}{6}$ será:

a) $3\sqrt{3}$.
b) 27.
c) 9.
d) $\sqrt{3}$.
e) 3.



$$\text{sen}\ \theta \simeq \frac{1}{|z|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{|z|} \Rightarrow |z| = 6$$

$$\cos \theta \simeq \frac{a}{|z|} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{6} \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$$

Resposta: alternativa **a**.

8. (UFRGS-RS) O argumento do número complexo z é $\frac{\pi}{6}$, e o seu módulo é 2. Então, a forma algébrica de z é:

a) $-$ i.
b) i.
c) $\sqrt{3}$ i.
d) $\sqrt{3} - $ i.
e) $\sqrt{3} + $ i.

$z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

Resposta: alternativa **e**.

9. (EsPCEx-SP) Seja o número complexo $z = \frac{x + yi}{3 + 4i}$ com x e y reais e $i^2 = -1$. Se $x^2 + y^2 = 20$, então o módulo de z é igual a:

a) 0.
b) $\sqrt{5}$.
c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.
d) 4.
e) 10.

$z = \frac{x + yi}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} = \frac{3x - 4xi + 3yi - 4yi^2}{3^2 - (4i)^2} =$

$= \frac{3x + 4y}{25} + \frac{(3y - 4x)i}{25}$

$|z| = \sqrt{\left(\frac{3x + 4y}{25}\right)^2 + \left(\frac{3y - 4x}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{\cancel{25}(x^2 + y^2)}{25^{\cancel{2}}}} =$

$= \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Resposta: alternativa **c**.

10. (Ifal) O valor da potência $(1 - i)^{10}$ é:

a) 11i.
b) 5i.
c) -32i.
d) -50i.
e) $1 - 5$i.

$(1 - i)^{10} = [(1 - i)^2]^5 = [1 - 2i + i^2]^5 = [1 - 2i + 1]^5 = (-2i)^5 = -32i$

Resposta: alternativa **c**.

11. (FGV-SP) Sendo $i = \sqrt{-1}$ a unidade imaginária do conjunto dos números complexos, o valor da expressão $(i + 1)^6 - (1 - i)^6$ é:

a) 0.
b) 16.
c) -16.
d) 16i.
e) -16i.

$(i + 1)^6 = [(i + 1)^2]^3 = [1 + 2i + i^2]^3 = (2i)^3 = 8i^3 = -8i$

Analogamente, $(i - 1)^6 = (-2i)^3 = -8i^3 = 8i$.

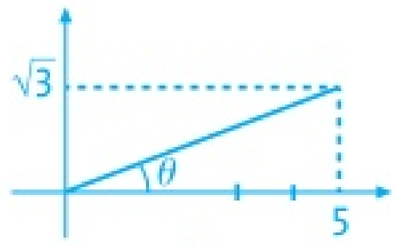
Então:

$(i + 1)^6 - (i - 1)^6 = -8i - 8i = -16i$

Resposta: alternativa **e**.

12. (UFMT) A imagem do número complexo $z = 5 + i\sqrt{3}$ é um vértice de um hexágono regular com centro na origem. O outro vértice desse hexágono, que também está localizado no primeiro quadrante, é a imagem do número complexo:

a) $2 + 3i\sqrt{3}$. b) $1 + 2i\sqrt{3}$. c) $2 + 2i\sqrt{3}$. d) $1 + 3i\sqrt{3}$. e) $3 + 3i\sqrt{3}$.



$\text{sen}\ \theta = \dfrac{b}{|z|}$

$\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$

$|z| = \sqrt{25 + 3} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

Então:

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

$\cos\theta = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$

I. $\text{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\ \theta \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} + \text{sen}\ \dfrac{\pi}{3} \cdot \cos\theta \Rightarrow \text{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{5}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \text{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{7}} + \dfrac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{7}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen}\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{6\sqrt{3}}{4\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$

Logo, $b = 3\sqrt{3}$.

II. $\cos^2\theta = 1 - \text{sen}^2\ \theta = 1 - \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)^2 = 1 - \dfrac{9 \cdot 3}{4 \cdot 7} = 1 - \dfrac{27}{28} = \dfrac{1}{28}$

Logo, $a = 1$.

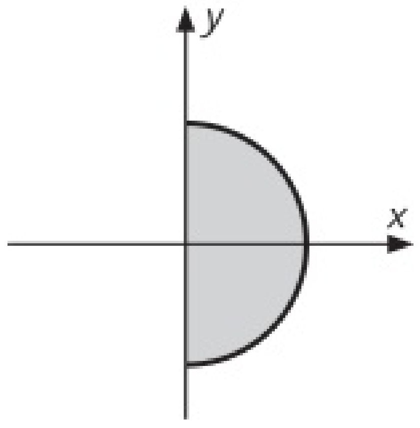
Portanto:

$z = a + bi \Rightarrow z = 1 + 3i\sqrt{3}$

Resposta: alternativa **d**.

---

13. (Vunesp-SP) A figura ao lado representa, no plano complexo, um semicírculo de centro na origem e raio 1. Indique por $\text{Re}(z)$, $\text{Im}(z)$ e $|z|$ a parte real, a parte imaginária e o módulo de um número complexo $z = x + yi$, respectivamente, onde i indica a unidade imaginária. A única alternativa que contém as condições que descrevem totalmente o subconjunto do plano que representa a região sombreada, incluindo sua fronteira, é:



a) $\text{Re}(z) \geqslant 0$, $\text{Im}(z) \geqslant 0$ e $|z| \leqslant 1$.

b) $\text{Re}(z) \geqslant 0$, $\text{Im}(z) \leqslant 0$ e $|z| \leqslant 1$.

c) $\text{Re}(z) \geqslant 0$ e $|z| \geqslant 1$.

d) $\text{Im}(z) \geqslant 0$ e $|z| \geqslant 1$.

e) $\text{Re}(z) \geqslant 0$ e $|z| \leqslant 1$.

Região destacada $z = (x, y)$, tal que $x \geqslant 0$ e $x^2 + y^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow \left(x \geqslant 0 \text{ e } \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant 1\right) \to \text{Re}(z) \geqslant 0 \text{ e } |z| \leqslant 1$

Resposta: alternativa **e**.

14. (UFPB) Um percurso feito por um atleta, em uma região plana, pode ser representado no plano cartesiano por um segmento de reta $\overline{AB}$. Sabendo-se que os pontos A e B são as representações geométricas dos números complexos $z_1 = \dfrac{2 + 4i^{35}}{3 - i}$ e $z_2 = 4 + 3i$, é correto afirmar que esse percurso, em unidades de comprimento, mede:

a) 6.
b) 4,5.
c) 5,5.
d) 5.
e) 6,5.

$$z_1 = \frac{2 + 4i^{35}}{3 - i} \Rightarrow z_1 = \frac{2 - 4i}{3 - i} \Rightarrow z_1 = \frac{2 - 4i}{3 - i} \cdot \frac{3 + i}{3 + i} \Rightarrow z_1 = \frac{10 - 10i}{10} \Rightarrow z_1 = 1 - i$$

Pontos no plano cartesiano:

- $z_1 = (1, -1)$
- $z_2 = (4, 3)$

$$D_{z_1z_2} = \sqrt{(1 - 4)^2 + (-1 - 3)^2} \Rightarrow D_{z_1z_2} = \sqrt{9 + 16} \Rightarrow D_{z_1z_2} = 5 \text{ u.c.}$$

Resposta: alternativa **d**.

15. (UEM-PR) Seja $z = 3\left(\cos \dfrac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{3}\right)$ um número complexo. É correto afirmar que o conjugado de z é:

a) $\overline{z} = 3\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.
b) $\overline{z} = \dfrac{3}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$.
c) $\overline{z} = \dfrac{3}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.
d) $\overline{z} = \dfrac{3}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$.
e) $\overline{z} = 3\left(1 - i\sqrt{3}\right)$.

$$z = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \overline{z} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overline{z} = \frac{3}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right)$$

Resposta: alternativa **b**.

16. (Unimontes-MG) Se $z = 2\left(\cos \dfrac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4}\right)$, então o conjugado de z^2 vale:

a) $-4i$.
b) $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$.
c) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$.
d) $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

$$z^2 = 2^2\left(\cos \frac{\pi}{4} \cdot 2 + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cdot 2\right) \Rightarrow z^2 = 4(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z^2 = 4i \Rightarrow \overline{z}^2 = -4i$$

Resposta: alternativa **a**.

17. (Cefet-PR) Considere todos os números complexos $z = x + yi$. O lugar geométrico de todos os números complexos que possuem módulo 1 é dado pela equação:

a) $x^2 + y^2 = 1$.
b) $x = 1$.
c) $y = 1$.
d) $x + y = 1$.
e) $x^2 + y^2 + 1 = 0$.

$|z| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$

Resposta: alternativa **a**.

18. (UEPB) Um número complexo z está escrito na forma $z = (\cos 7\theta + i \operatorname{sen} 7\theta) \cdot (\cos 7\theta - i \operatorname{sen} 7\theta)$. O valor de z^n é:

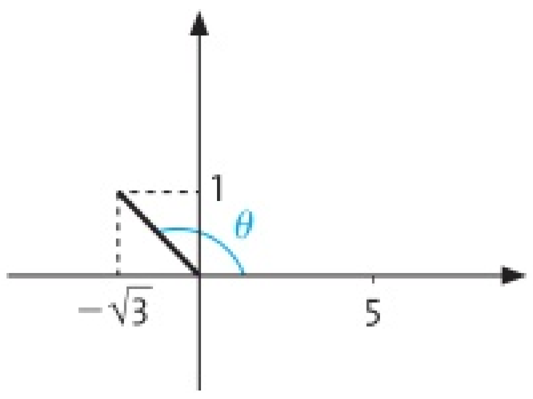
a) $i\theta$.
b) -1.
c) $e^{i\theta}$.
d) 1.
e) 2.

$z = (\cos 7\theta + i \operatorname{sen} 7\theta)(\cos 7\theta - i \operatorname{sen} 7\theta) \Rightarrow$
$\Rightarrow z = (\cos^2 7\theta - i^2 \cdot \operatorname{sen}^2 7\theta) \Rightarrow z = \cos^2 7\theta + \operatorname{sen}^2 7\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow z = 1 \Rightarrow z^n = 1^n = 1$

Resposta: alternativa **d**.

19. (UFPB) Considere, no plano complexo de Argand-Gauss, um relógio cujo centro coincide com a origem do plano e que, em determinado instante, a extremidade do ponteiro dos minutos está sobre o ponto do plano correspondente ao número complexo $2\sqrt{3} + i$. Nesse contexto, exatamente cinco minutos após esse instante, a extremidade desse ponteiro estará sobre o ponto do plano correspondente ao número complexo:

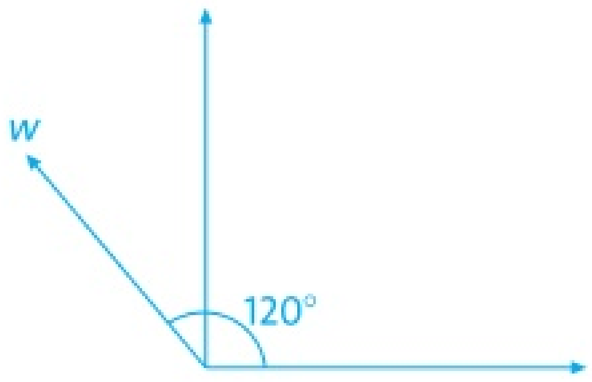
a) $\sqrt{3} + i$.
b) $-\sqrt{3} - i$.
c) $-1 + \sqrt{3}i$.
d) $-1 - \sqrt{3}i$.
e) $1 + \sqrt{3}i$.



$z^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4 \Rightarrow |z| = 2$

Como $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2}$ e $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, então $\theta = 150°$.

Em 5 min, o ponteiro varia 30° no sentido horário. Assim, passamos a ter a seguinte condição:



$w = 2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) \Rightarrow w = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow w = -1 + \sqrt{3}\,i$

Resposta: alternativa **c**.

POLINÔMIOS

Definição

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Observações

- $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_2, a_1, a_0$ são números complexos denominados coeficientes.
- n é um número inteiro positivo ou nulo.
- O maior expoente de x, com coeficiente não nulo, é o grau do polinômio.

Polinômio identicamente nulo

Polinômio cujos coeficientes são todos nulos.

Assim, $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ é polinômio nulo $\Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = a_{n-2} = ... = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, ou seja, $p(x) = 0$.

Observação

Não se define grau para esse polinômio.

Valor numérico de um polinômio

O valor numérico de $p(x)$ para $x = \alpha$ é $p(\alpha)$.

Observações

- Se $p(\alpha) = 0$, então α é a **raiz** de $p(x)$.
- Se $\alpha = 1$, o valor numérico de $p(x)$ é a soma dos coeficientes.
- Se $\alpha = 0$, o valor numérico de $p(x)$ é o termo independente.

Igualdade de polinômios

$p(x) = q(x) \Leftrightarrow p(\alpha) = q(\alpha), \forall\ \alpha \in \mathbb{C}$.

Observação

$p(x) - q(x)$ deve ser um polinômio identicamente nulo, assim todos os coeficientes dos termos de mesmo grau de $p(x)$ e $q(x)$ são todos iguais.

Divisão de polinômio

Método da chave

$$\begin{array}{l|l} p(x) & h(x) \\ \cline{2-2} r(x) & q(x) \end{array} \rightarrow p(x) = h(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Observações

- $p(x)$ é o dividendo.
- $h(x)$ é o divisor.
- $q(x)$ é o quociente.
- $r(x)$ é o resto.
- O grau de $r(x)$ deve ser menor do que o grau de $h(x)$ ou $r(x) = 0$.

Divisão por $(x - \alpha)$: dispositivo prático de Briot-Ruffini

termo constante do divisor, com sinal trocado	coeficientes de x do dividendo $p(x)$	termo constante do dividendo $p(x)$
	coeficientes do quociente	resto

Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x - a)$ é $p(a)$.

Teorema de D'Alembert

Um polinômio $p(x)$ é divisível por $(x - a)$ se, e somente se, a é raiz de $p(x)$, isto é, $p(a) = 0$.

Teorema do fator

Se c é uma raiz de um polinômio $p(x)$, de grau $n > 0$, então $(x - c)$ é um fator de $p(x)$.

EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS

Definição

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (com $a_n \neq 0$)

Teorema fundamental da Álgebra

Toda equação algébrica $p(x) = 0$ de grau n ($n \geqslant 1$) possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).

Decomposição em fatores de 1º grau

$p(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdot ... \cdot (x - x_n)$, em que x_i são raízes de $p(x)$ e a_n é o coeficiente de x_n.

Multiplicidade da raiz

É o número de vezes que uma mesma raiz aparece.

1 vez: raiz simples.

2 vezes: raiz dupla ou multiplicidade 2.

3 vezes: raiz dupla ou multiplicidade 3.

⋮

n vezes: raiz de multiplicidade n.

Relações de Girard

Na equação do 2º grau

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$
- $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$

Na equação do 3º grau

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

- $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}$
- $x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}$

Na equação do 4º grau

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\dfrac{b}{a}$
- $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{c}{a}$
- $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\dfrac{d}{a}$
- $x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{e}{a}$

Na equação de grau n

$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ de raízes $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$, são válidas as seguintes relações de Girard entre as raízes e os coeficientes:

1ª) A soma das raízes é: $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$

2ª) O produto das raízes é: $x_1x_2x_3 \cdot ... \cdot x_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

3ª) A soma dos produtos das raízes, quando tomadas:

a) duas a duas, é: $x_1x_2 + x_1x_3 + ... + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$

b) três a três, é: $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + ... + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}$

c) quatro a quatro, é: $x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + ... + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-4}}{a_n}$

Raízes complexas não reais em uma equação algébrica

Se uma equação polinomial de coeficientes reais admite como raiz o número complexo $a + bi$, com $b \neq 0$, então o complexo conjugado $a - bi$ também é raiz dessa equação.

Exercícios

1. (IFSC) Dada a função polinomial $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, o valor de $f(-3) + f(0) + f(f(-1))$ é:

a) -20.
b) -18.
c) -16.
d) 20.
e) 16.

$f(-3) = -27 + 9 - 3 + 1 = -20$
$f(0) = 1$
$f(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$
$f(f(-1)) = f(0) = 1$
Então:
$f(-3) + f(0) + f(f(-1)) = -20 + 1 + 1 = -18$

Resposta: alternativa **b**.

2. (UEPB) O polinômio $P(x) = (2x + 1)(2x + 1)^2(2x + 1)^3 \dots (2x + 1)^{100}$ é de grau:

a) 505.
b) 5 050.
c) 5 030.
d) 5 020.
e) 5 000.

O grau do polinômio será a soma de todos os expoentes de $(2x + 1)$, ou seja, a soma de 1 até 100, o que forma uma PA de razão 1. Por soma dos termos de uma PA, temos:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S = \frac{(1 + 100)}{2} \cdot 100 \Rightarrow S = 5\,050$$

Portanto, o polinômio é de grau 5 050.

Resposta: alternativa **b**.

3. (Cefet-PR) Se os polinômios p, r e s são de graus 2, 3 e 4, respectivamente, pode-se afirmar que o grau de $p + r - s$:

a) não pode ser determinado.
b) é igual a 1.
c) é igual a 4.
d) é igual a 9.
e) é igual a 2.

Na soma de polinômios, o grau do polinômio formado é igual ao do polinômio de maior grau dentre os que estão sendo somados. Neste caso, $p + r - s$ tem grau 4 (maior grau é o de s).

Resposta: alternativa **c**.

4. (UFTM-MG) Dividindo-se o polinômio $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + mx + 1$ por $(x - 1)$ ou por $(x + 1)$, os restos são iguais. Nesse caso, o valor de m é igual a:

a) -2.
b) -1.
c) 1.
d) 2.
e) 3.

Pelo teorema dos restos, $p(1) = p(-1)$. Então:
$3 - 2 + m + 1 = 3 + 2 - m + 1 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$

Resposta: alternativa **d**.

5. (FGV-SP) O quociente da divisão do polinômio $P(x) = (x^2 + 1)^4 \cdot (x^3 + 1)^3$ por um polinômio de grau 2 é um polinômio de grau:

a) 5. c) 13. e) 18.
b) 10. d) 15.

Considere:

- $(x^2 + 1)^4 \to$ grau 8
- $(x^3 + 1)^3 \to$ grau 9

Assim:
grau $P(x) = 8 + 9 = 17$

Então:
grau $Q(x) = 17 - 2 = 15$

Resposta: alternativa **d**.

7. (UFRGS-RS) Se 2 é raiz dupla do polinômio $p(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$, então a soma das outras raízes é:

a) -1. c) 0. e) 1.
b) $-0{,}5$. d) $0{,}5$.

soma das raízes $= x_1 + x_2 + 2 + 2 \Rightarrow$ soma das raízes $= x_1 + x_2 + 4$

Mas:

$$-\frac{a_1}{a_0} = x_1 + x_2 + 4 \Rightarrow \frac{7}{2} = x_1 + x_2 + 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 3{,}5 - 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_1 + x_2 = -0{,}5$$

Resposta: alternativa **b**.

6. (UEL-PR) Na divisão do polinômio $x^4 + x^3 - 7x^2 + x + 9$ por $x^2 + 2x + 1$ pode-se afirmar que:

a) o quociente é $-x^2 + x + 6$.
b) o quociente é $x^2 - x + 6$.
c) o resto da divisão é 15.
d) o resto da divisão é $14x + 15$.
e) a divisão é exata, isto é, o resto é 0.

Pelo método da chave:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & +\,x^3 & -\,7x^2 & +\,x & +\,9 & x^2 + 2x + 1 \\
-\cancel{x^4} & -\,2x^3 & -\,x^2 & & & x^2 - x - 6 \\
\hline
& -\cancel{x^3} & -\,8x^2 & +\,x & +\,9 & \\
& +\cancel{x^3} & +\,2x^2 & +\,x & & \\
\hline
& & -\cancel{6x^2} & +\,2x & +\,9 & \\
& & +\cancel{6x^2} & +\,12x & +\,9 & \\
\hline
& & & 14x & +\,15 &
\end{array}$$

Resposta: alternativa **d**.

8. (ESPM-SP) O resto da divisão do polinômio $x^5 - 3x^2 + 1$ pelo polinômio $x^2 - 1$ é:

a) $x - 1$. c) $2x - 1$. e) $x - 2$.
b) $x + 2$. d) $x + 1$.

Sabendo que:

- $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$
- $r(x) = ax + b$

Temos:
$x^5 - 3x^2 + 1 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot q(x) + ax + b$

Então:

- $p(-1) = -3 = -a + b$
- $p(1) = -1 = a + b$

Logo:

$$\begin{cases} -\cancel{a} + b = -3 \\ \cancel{a} + b = -1 \end{cases}$$
$$2b = -4 \Rightarrow b = -2$$

$a + b = -1 \Rightarrow a - 2 = -1 \Rightarrow a = 1$

Portanto:
$r(x) = ax + b \Rightarrow r(x) = x - 2$

Resposta: alternativa **e**.

9. (Cesgranrio-RJ) Se $x^3 - 2x^2 + 5x - 4 = 0$ tem uma raiz $x = 1$, então as outras duas raízes da equação são:

a) complexas não reais.
b) racionais.
c) positivas.
d) negativas.
e) reais de sinais opostos.

Como $x = 1$, então o polinômio é divisível por $x - 1$.

Por Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 & -4 \\ \hline & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^2 - x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{-15}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{1 + i\sqrt{15}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{15}}{2}$

Logo, as outras duas raízes são complexas não reais.

Resposta: alternativa **a**.

10. (PUC-SP) Sabe-se que -1 é raiz do polinômio $f = x^3 + x^2 - 2x - 2$. As demais raízes desse polinômio são números:

a) irracionais.
b) não reais.
c) racionais não inteiros.
d) inteiros positivos.
e) inteiros e opostos entre si.

Se -1 é raiz de f, então é divisível por $x + 1$. Por Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}$ e $x_2 = -\sqrt{2}$

Portanto, as demais raízes são irracionais.

Resposta: alternativa **a**.

11. (UFRN) Se 2 é uma raiz de multiplicidade 3 da equação $x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24 = 0$, então seu conjunto solução é:

a) {1, 2}.
b) {1, 3}.
c) {2, 3}.
d) {1, 2, 3}.
e) {1, 2, 3, 4}.

Pela soma das raízes, temos:

$-\dfrac{a_1}{a_0} = x_1 + 2 + 2 + 2 \Rightarrow 9 = x_1 + 6 \Rightarrow x_1 = 3$

Assim, o conjunto solução é {2, 3}.

Resposta: alternativa **c**.

12. (Furg-RS) O polinômio $x^3 - 7x^2 + 16x - 12$ tem:

a) uma raiz real com multiplicidade 3.
b) uma raiz real com multiplicidade 2.
c) raízes reais e distintas.
d) uma raiz complexa.
e) duas raízes complexas.

Possíveis raízes reais: $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$.

Testando uma a uma, encontramos que 2 é uma das raízes. Então:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 1 & -7 & 16 & -12 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

Assim, o polinômio tem uma raiz real com multiplicidade 2.

Resposta: alternativa **b**.

13. (Unifor-CE) Uma das raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + k$, em que $k \in \mathbb{R}$, é igual à soma das outras duas. Nessas condições, é correto afirmar que f é divisível por:

a) $x - 4$.   b) $x - 1$.   c) $x + 2$.   d) $x + 3$.   e) $x + 4$.

Temos:

• $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0}$

• $x_1 = x_2 + x_3$

Então:

$2x_1 = -\dfrac{a_1}{a_0} \Rightarrow 2x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 3$

Sendo 3 uma das raízes de $f(x)$, temos:

$27 - 54 + 15 + k = 0 \Rightarrow k = 12$

Então, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ é divisível por $x - 3$.

Por Briot-Ruffini, temos:

$$\begin{array}{c|ccc:c} 3 & 1 & -6 & 5 & 12 \\ \hline & 1 & -3 & 4 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$ e $x_3 = -1$

Logo, $f(x)$ é divisível por $x - 4$.

Resposta: alternativa **a**.

14. (Uespi) Para qual valor do real k, as raízes da equação $x^3 + 6x^2 + kx - 10 = 0$ são termos de uma progressão aritmética?

a) 1   b) 2   c) 3   d) 4   e) 5

Raízes em PA: $(x - r, x, x + r)$.

Soma das raízes: $x - r + x + x + r = -\dfrac{a_1}{a_0}$.

Então:

$3x = -6 \Rightarrow x = -2$

Sendo -2 uma das raízes, podemos encontrar k:

$x^3 + 6x^2 + kx - 10 = 0 \Rightarrow -8 + 24 - 2k - 10 = 0 \Rightarrow 2k = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = 3$

Resposta: alternativa **c**.

15. (FEI-SP) A soma das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$ é:

a) 7.   b) 3.   c) 4.   d) 8.   e) 0.

$x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 7$

Resposta: alternativa **a**.

16. (PUC-MG) No polinômio $P(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$ uma das raízes é 2i. Então, a raiz real de $P(x)$ é:

a) -2. b) -1. c) 0. d) 1. e) 2.

Se 2i é raiz, então -2i também é.

Logo, as raízes são: 2i, -2i e r.

A soma das raízes é:

$$\cancel{2i} + (-\cancel{2i}) + r = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{(-1)}{1} = 1 \Rightarrow r = 1$$

Portanto, a raiz real é 1.

Resposta: alternativa **d**.

17. (ITA-SP) Sendo 1 e 1 + 2i raízes da equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b, e c são números reais, então:

a) $b + c = 4$. c) $b + c = 2$. e) $b + c = 0$.
b) $b + c = 3$. d) $b + c = 1$.

Se 1 + 2i é raiz, então 1 $-$ 2i também é. Pela soma das raízes, temos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0} \Rightarrow 1 + 1 + 2i + 1 - 2i = -a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a = 3 \Rightarrow a = -3$$

Como $x = 1$ também é raiz da equação, vem:

$1 + a + b + c = 0 \Rightarrow 1 - 3 + b + c = 0 \Rightarrow b + c = 2$

Resposta: alternativa **c**.

18. (Uerj) Para fazer uma caixa sem tampa com um único pedaço de papelão, utilizou-se um retângulo de 16 cm de largura por 30 cm de comprimento. De cada um dos quatro cantos desse retângulo foram retirados quadrados de área idêntica e, depois, foram dobradas para cima as abas resultantes. Determine a medida do lado do maior quadrado a ser cortado do pedaço de papelão, para que a caixa formada tenha:

a) área lateral de 204 cm^2; b) volume de 600 cm^3.

a) $2(30 - 2x) \cdot x + 2(16 - 2x) \cdot x = 204 \Rightarrow 60x - 4x^2 + 32x - 4x^2 - 204 = 0 \Rightarrow 8x^2 - 92x + 204 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 23x + 51 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{23 \pm 11}{4} \Rightarrow x = 8{,}5$ (não convém) e $x = 3$

Assim, a medida a ser cortada é 3 cm.

b) $(30 - 2x) \cdot (16 - 2x) \cdot x = 600 \Rightarrow (480 - 60x - 32x + 4x^2) \cdot x = 600 \Rightarrow 4x^3 - 92x^2 + 480x - 600 = 0 \Rightarrow x^3 - 23x^2 + 120x - 150 = 0$

Possíveis raízes reais: $\{\pm1; \pm2; \pm3; \pm5; \pm6\}$.

Por tentativa, temos que 5 é raiz. Então:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 5 & 1 & -23 & 120 & -150 \\ \hline & 1 & -18 & 30 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 18x + 30 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{18 \pm 2\sqrt{51}}{2} \Rightarrow x_1 = 9 + \sqrt{51} \simeq 16{,}1$ (não serve) e $x_2 = 9 - \sqrt{51} \simeq 1{,}85$

Logo, a medida a ser cortada é $\left(9 - \sqrt{51}\right)$ cm.

Respostas: a) 3 cm

b) $\left(9 - \sqrt{51}\right)$ cm

19. (IFMG) Uma fábrica utiliza dois tanques para armazenar combustível, sendo seus níveis expressos, respectivamente, por:

$H_1(t) = 250t^3 - 190t + 10$

$H_2(t) = 150t^3 + 210t + 10$, sendo t o tempo em horas.

O nível de combustível deles se iguala em $t = 0$ e também para:

a) $t = 1{,}0$. b) $t = 1{,}5$. c) $t = 2{,}0$. d) $t = 2{,}5$.

Igualando os níveis, temos:

$H_1(t) = H_2(t) \Rightarrow 250t^3 - 190t + 10 = 150t^3 + 210t + 10 \Rightarrow 100t^3 - 400t = 0 \Rightarrow 100t(t^2 - 4) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 100t = 0 \Rightarrow t = 0 \\ t^2 - 4 = 0 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t_1 = 2 \text{ e } t_2 = -2 \end{cases}$$

Portanto, os níveis também se igualam quando $t = 2$.

Resposta: alternativa **c**.

20. (Uneb-BA) Em uma maratona de conhecimentos, o vencedor da prova sobre expressões algébricas encontrou corretamente o resto da divisão do polinômio $x^{10} + x^9 + x^8 + ... + x - 9$ por $x^2 - 1$. Esse resto é:

01) $5x - 4$. 02) $4x + 5$. 03) $-5x$. 04) 9. 05) 0.

Sabendo que $x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$ e que $r(x) = ax + b$, temos:

$x^{10} + x^9 + x^8 + ... + x - 9 = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot q(x) + ax + b$

- $P(1) = 1 + 1 + 1 + ... + 1 - 9 = a + b = 1$
- $P(-1) = 1 - 1 + 1 - ... - 1 - 9 = -a + b = -9$

Então:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = -9 \end{cases}$$

$$2b = -8 \Rightarrow b = -4$$

$a + b = 1 \Rightarrow a = 1 + 4 \Rightarrow a = 5$

Então, o resto da divisão por $x^2 - 1$ será:

$r(x) = ax + b \Rightarrow r(x) = 5x - 4$

Resposta: alternativa **01**.

21. (Ufac) Numa sala de aula de uma determinada escola, um professor insistia em ensinar Matemática deixando de fundamentar os conceitos que ali tratava. Dentre algumas "verdades" usadas por ele, listadas nos itens abaixo, qual é a que não afronta as propriedades ou definições matemáticas?

a) O motivo pelo qual $\sqrt{36} = 6$ é que $6^2 = 36$.

b) Se a e b são números reais vale que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

c) $x^2 + 2x + 5$ é uma função do 2º grau.

d) $f(x) = x^3 + 4x^2 + 21$ é um polinômio de grau 3 e a variável x pode ser considerada em $\mathbb{R}$.

e) Uma função f é par se, e somente se, seu domínio está contido em $\mathbb{R}$ e para todo número real x temos $f(x) = f(-x)$.

a) Falso, pois $\sqrt{36} = 6$, mas $6^2 = 36$ e $(-6)^2 = 36$.
b) Falso, pois a e b devem ser reais não negativos.
c) Falso, pois para ser função deve haver um y em função de x.
d) Verdadeiro.
e) Falso, pois deve especificar que o número real x está contido no domínio.
Resposta: alternativa **d**.

22. (Ufal) Em um evento gastronômico realizado em Maceió, sofisticados *chefs* da culinária francesa usaram na elaboração de seus pratos, além de outros ingredientes, cacau, castanha e pequi. Curiosamente foi observado que esses três ingredientes lhes foram fornecidos em quantidades que, em quilogramas, eram numericamente iguais às raízes do polinômio $4x^3 - 29x^2 + 55x - 12$. Se eles receberam $\frac{1}{4}$ kg de pequi e, entre os três ingredientes, a quantidade maior era de castanha, a quantidade de cacau, em quilogramas, era:

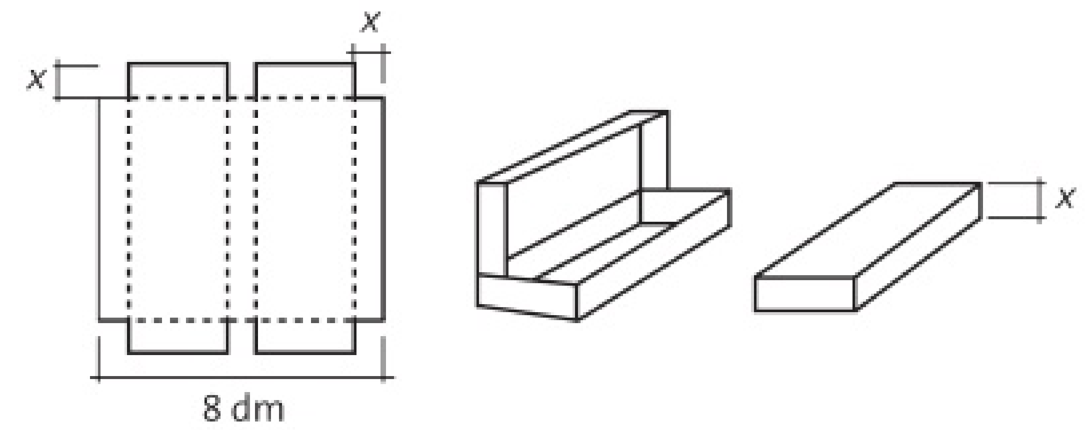
a) 1,5. b) 2. c) 2,5. d) 3. e) 3,5.

Se $\frac{1}{4}$ é raiz, o polinômio é divisível por $x - \frac{1}{4}$.
Assim:

$$\begin{array}{c|ccc:c} \frac{1}{4} & 4 & -29 & 55 & -12 \\ \hline & 4 & -28 & 48 & 0 \end{array}$$

$4x^2 - 28x + 48 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$ e $x_2 = 3$
Logo, são 3 kg de cacau.
Resposta: alternativa **d**.

23. (Uerj) Para fazer uma caixa, foi utilizado um quadrado de papelão de espessura desprezível e 8 dm de lado, do qual foram recortados e retirados seis quadrados menores de lado x. Em seguida, o papelão foi dobrado nas linhas pontilhadas, assumindo a forma de um paralelepípedo retângulo, de altura x, como mostram os esquemas. Quando $x = 2$ dm, o volume da caixa é igual a 8 dm^3. Determine outro valor de x para que a caixa tenha volume igual a 8 dm^3.



$2a + 3x = 8 \Rightarrow 2a = 8 - 3x \Rightarrow a = \dfrac{8 - 3x}{2}$

Se 2 é uma das raízes, então o polinômio é divisível por $x - 2$.

Então:

$V(x) = 8 \Rightarrow \left(\dfrac{8 - 3x}{2}\right) \cdot (8 - 2x) \cdot x = 8 \Rightarrow (32 - 8x - 12x + 3x^2) \cdot x = 8 \Rightarrow 3x^3 - 20x^2 + 32x - 8 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 3 & -20 & 32 & -8 \\ \hline & 3 & -14 & 4 & 40 \end{array}$$

$3x^2 - 14x + 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{14 \pm 2\sqrt{37}}{6} \Rightarrow x_1 = \dfrac{7 + \sqrt{37}}{3}$ (não convém) e $x_2 = \dfrac{7 - \sqrt{37}}{3}$

Resposta: $\dfrac{7 - \sqrt{37}}{3}$ dm.

---

24. (UEG-GO) João gosta de brincar com números e fazer operações com eles. Em determinado momento, ele pensou em três números naturais e, em relação a esses números, observou o seguinte:

- a soma desses números é 7;
- o produto deles é 8;
- a soma das três parcelas resultantes dos produtos desses números tomados dois a dois é 14.

Assim, os três números pensados por João são raízes da equação:

a) $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0.$

b) $x^3 + 7x^2 - 14x + 8 = 0.$

c) $x^3 - 7x^2 - 14x - 8 = 0.$

d) $x^3 + 7x^2 - 14x - 8 = 0.$

Considerando a, b e c raízes, temos:

$$\begin{cases} a + b + c = -\dfrac{a_1}{a_0} \\ a \cdot b \cdot c = -\dfrac{a_3}{a_0} \\ a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c = -\dfrac{a_2}{a_0} \end{cases}$$

Como $a_0 = 1$, vem:

$$\begin{cases} -\dfrac{a_1}{a_0} = -7 \\ -\dfrac{a_3}{a_0} = -8 \\ -\dfrac{a_2}{a_0} = -14 \end{cases}$$

Como esses três números são raízes da equação, temos:

$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 \Rightarrow x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

Resposta: alternativa **a**.

25. (Ufpel-RS) O estudo e o desenvolvimento dos métodos de resolução de equações de graus superiores a 2 tiveram grande impulso nos séculos XV e XVI, com grupos de matemáticos italianos. O primeiro a encontrar um método para determinar a resolução de equações do 3º grau foi Scipione Del Ferro. Outro matemático italiano, conhecido como Tartaglia, também desenvolveu um método de resolução para equação do 3º grau. As fórmulas de Tartaglia são as mais célebres da Álgebra, sendo conhecidas como fórmulas de Cardano.

Considerando o polinômio do 3º grau $t^3 - 4t^2 + t + 6$, é correto afirmar que a soma dos módulos das raízes desse polinômio é:

a) 4. b) 5. c) 6. d) 3. e) 1.

Possíveis raízes reais: $\{\pm1; \pm2; \pm3; \pm6\}$.

Por tentativa, achamos que 2 é raiz, portanto o polinômio é divisível por $x - 2$.

Assim:

$$\begin{array}{c|ccc:c} 2 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ \hline & 3 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

Como resultado da divisão, temos:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$ e $x_3 = -1$

Logo, a soma dos módulos das raízes será:

$|2| + |3| + |-1| = 2 + 3 + 1 = 6$

Resposta: alternativa **c**.

---

26. (UFSM-RS) Motoristas de uma determinada cidade que, durante 5 anos, não cometeram infração de trânsito serão agraciados com um "mimo" que deverá ser embalado numa caixa, sem tampa, na forma de um paralelepípedo regular, construída a partir de uma folha retangular de cartolina de 30 cm de largura e 50 cm de comprimento. Para isso, será removido dos cantos da folha um quadrado de lado x cm, e a folha será dobrada.

O volume, em cm^3, dessa caixa é dado pela função polinomial $V(x) =$ ________, cuja soma S das raízes é ________.

Complete com a alternativa que preenche corretamente as lacunas.

a) $4(x^3 - 40x^2 + 375x)$; 40

b) $4(x^3 + 40x^2 - 375x)$; 80

c) $4(x^3 - 80x^2 + 375x)$; 40

d) $4(x^3 + 80x^2 - 375x)$; 60

e) $4(x^3 + 80x^2 + 375x)$; 60

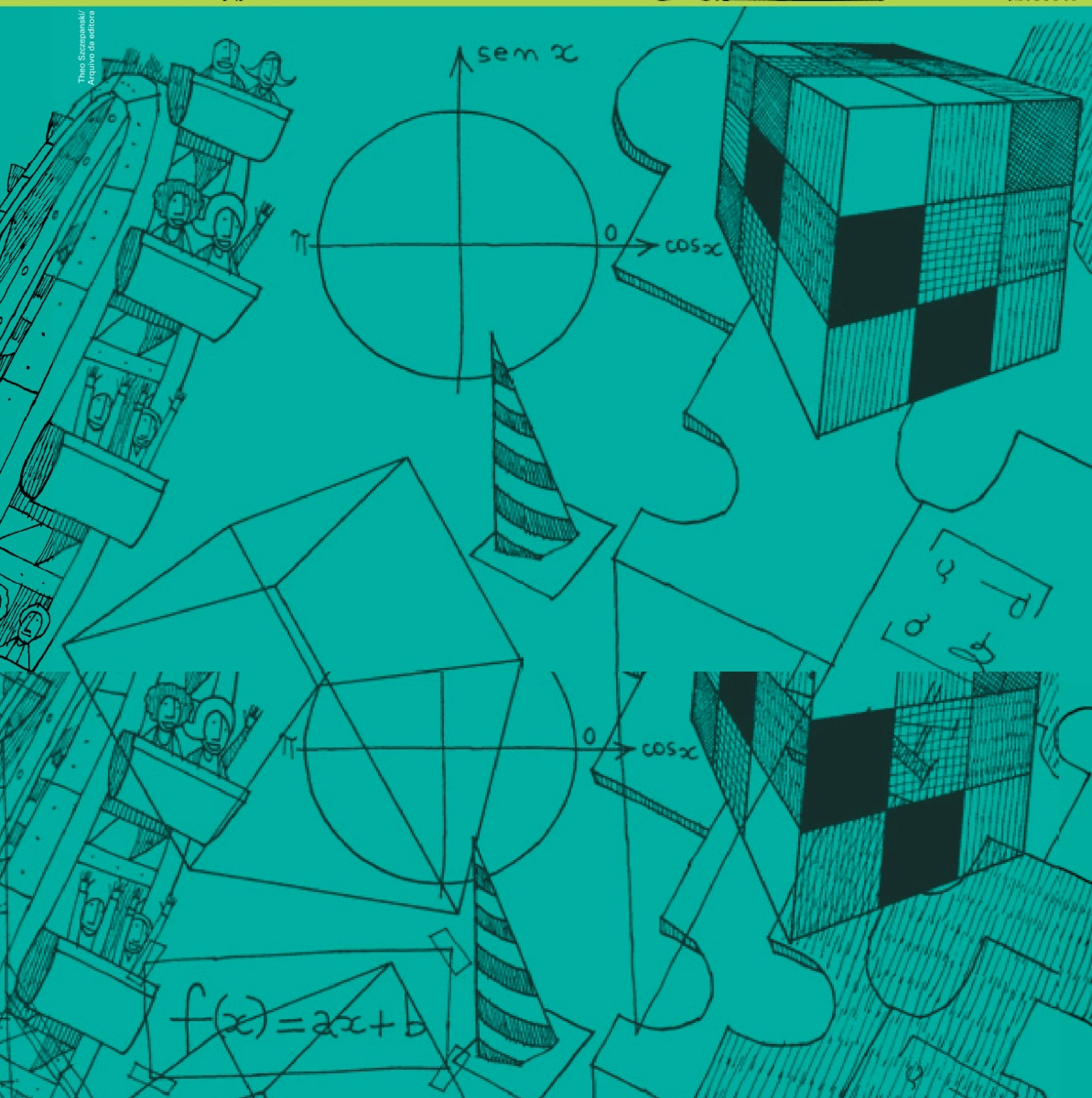
$V(x) = (30 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x \Rightarrow V(x) = (1\,500 - 60x - 100x + 4x^2) \cdot x \Rightarrow V(x) = 4x^3 - 160x^2 + 1\,500x \Rightarrow V(x) = 4(x^3 - 40x^2 + 375x)$

A soma das raízes é dada por:

$x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_1}{a_0} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{-40}{1} \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 40$

Resposta: alternativa **a**.

Desafio



Theo Szczepanski/
Arquivo da editora

1. (OBM) O gráfico de $y = x^2 - 5x + 9$ é rodado 180° em torno da origem. Qual é a equação da nova curva obtida?

a) $y = x^2 + 5x + 9$
c) $y = -x^2 + 5x - 9$
e) $y = -x^2 - 5x - 9$
b) $y = x^2 - 5x - 9$
d) $y = -x^2 - 5x + 9$

Ao girar o ponto $P(x, y)$ em torno da origem, obtemos $P'(-x, -y)$.
Assim, para obtermos a equação da nova parábola basta substituirmos o x por $-x$ e o y por $-y$ na equação da parábola dada, $y = x^2 - 5x + 9$.
Portanto:
$y = x^2 - 5x + 9 \Rightarrow -y = (-x)^2 - 5(-x) + 9 \Rightarrow y = -x^2 - 5x - 9$.

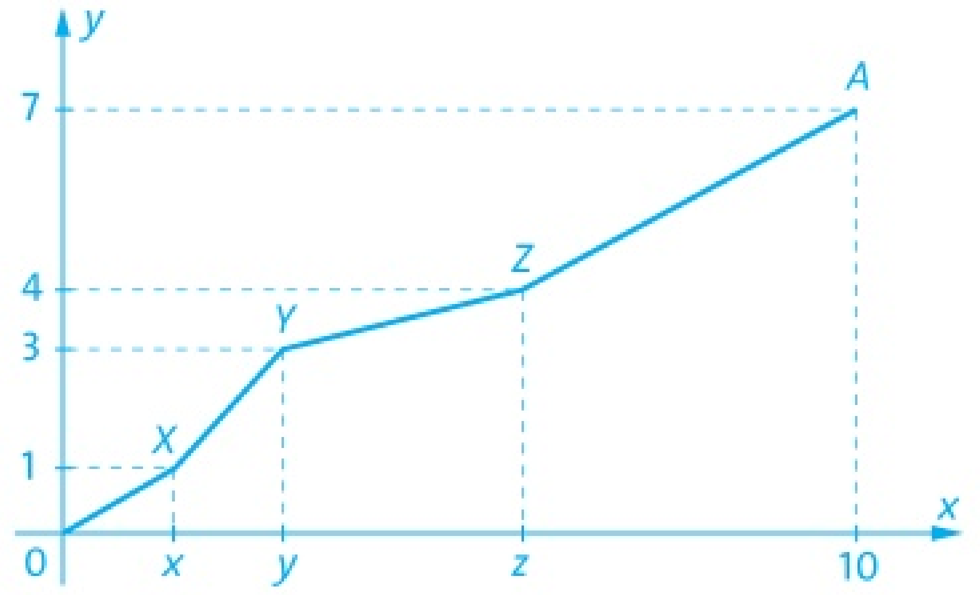
Resposta: alternativa **e**.

2. (OBM) Qual é o menor valor que a expressão $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(y - x)^2 + 4} + \sqrt{(z - y)^2 + 1} + \sqrt{(10 - z)^2 + 9}$ pode assumir, sendo x, y e z reais?

a) 7
b) 13
c) $4 + \sqrt{109}$
d) $3 + \sqrt{2} + \sqrt{90}$
e) $\sqrt{149}$

Considere os pontos $O(0, 0)$, $X(x, 1)$, $Y(y, 3)$, $Z(z, 4)$ e $A(10, 7)$ do plano cartesiano.

A expressão $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(y - x)^2 + 4} + \sqrt{(z - y)^2 + 1} + \sqrt{(10 - z)^2 + 9}$ representa a soma dos comprimentos dos segmentos $\overline{OX}$, $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ e $\overline{ZA}$, conforme ilustra a figura a seguir:



Usando a desigualdade triangular, a expressão dada é maior ou igual a $OA = \sqrt{10^2 + 7^2} = \sqrt{149}$. Portanto, o valor mínimo da expressão é $\sqrt{149}$.

Resposta: alternativa **e**.

3. (OBM) Um polinômio $p(x)$ é par quando $p(-x) = p(x)$, para todo x real. Qual é o número máximo de soluções reais da equação $p(x) = k$, sendo p um polinômio par não constante com coeficientes não negativos e k um real fixado?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 4
e) n, em que n é o grau de $p(x)$

Como $p(x)$ é par, temos:

$p(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + ... + a_2x^2 + a_0$, com $a_{2n-2}, ..., a_0 \geqslant 0$

Logo:

- Para $x \geqslant 0$: p é uma função crescente de x.
- Para $x < 0$: p é uma função decrescente de x.

Então, $p(x) = k$ pode ter no máximo duas soluções (uma não negativa e outra negativa).

Resposta: alternativa **c**.

4. (OBM) A soma das raízes reais de $x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$ é:

a) -3.
b) $1 - \sqrt[3]{2}$.
c) 1.
d) $\sqrt[3]{2} - 1$.
e) 3.

$x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x - 1 + 2 = 2 \Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 2 \Rightarrow (x + 1)^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} - 1$

Como $\sqrt[3]{2} - 1$ é a única raiz real da equação, é também a soma de suas raízes reais.

Resposta: alternativa **d**.

5. (OBM) Seja $P(x) = a_{2\,000}x^{2\,000} + a_{1\,999}x^{1\,999} + a_{1\,998}x^{1\,998} + ... + a_1x + a_0$. Então $a_{2\,000} + a_{1\,998} + a_{1\,996} + ... + a_0$ é igual a:

a) $\dfrac{P(1) - P(-1)}{2}$.

b) $\dfrac{P(1) + P(-1)}{2}$.

c) $P(2\,000) + P(1\,998) + ... + P(0)$.

d) $P(0) \cdot P(1)$.

e) $P(-1) \cdot P(1)$.

Considere:

- $P(1) = a_{2\,000}1^{2\,000} + a_{1\,999}1^{1\,999} + a_{1\,998}1^{1\,998} + ... + a_1 1 + a_0 \Rightarrow P(1) = a_{2\,000} + a_{1\,999} + a_{1\,998} + ... + a_1 + a_0$
- $P(-1) = a_{2\,000}(-1)^{2\,000} + a_{1\,999}(-1)^{1\,999} + a_{1\,998}(-1)^{1\,998} + ... + a_1(-1) + a_0 \Rightarrow P(1) = a_{2\,000} - a_{1\,999} + a_{1\,998} - ... - a_1 + a_0$

Adicionando membro a membro as igualdades $\begin{cases} P(1) = a_{2\,000} + a_{1\,999} + a_{1\,998} + ... + a_1 + a_0 \\ P(-1) = a_{2\,000} - a_{1\,999} + a_{1\,998} - ... - a_1 + a_0 \end{cases}$, obtemos:

$P(1) + P(-1) = 2 \cdot (a_{2\,000} + a_{1\,998} + a_{1\,996} + ... + a_2 + a_0) \Rightarrow a_{2\,000} + a_{1\,998} + a_{1\,996} + ... + a_2 + a_0 = \dfrac{P(1) + P(-1)}{2}$

Resposta: alternativa **b**.

6. (OBM) Sejam a, b, c números reais. Prove que pelo menos uma das três equações:

$x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0$

$x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$

$x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$

possui solução real.

Aleatoriamente, suponhamos que as duas primeiras equações não tenham solução real (outras possibilidades podem ser tratadas de modo análogo). Portanto, seus discriminantes, Δ_1 e Δ_2, são negativos, isto é:

$\begin{cases} \Delta_1 = (a - b)^2 - 4(b - c) < 0 \\ \Delta_2 = (b - c)^2 - 4(c - a) < 0 \end{cases}$

Adicionando membro a membro as desigualdades, temos:

$(a - b)^2 + (b - c)^2 < 4 \cdot (b - a)$

Como a, b e c são números reais, então:

$0 < (a - b)^2 + (b - c)^2 < 4 \cdot (b - a) \Rightarrow 4 \cdot (b - a) > 0 \Rightarrow 4(a - b) < 0$

O discriminante Δ_3 da terceira equação é: $\Delta_3 = (c - a)^2 - 4(a - b)$.

Mas:

- $(c - a)^2 \geqslant 0$
- $4(a - b) < 0$

Logo:

$(c - a)^2 \geqslant 0 > 4(a - b) \Rightarrow (c - a)^2 > 4(a - b) \Rightarrow (c - a)^2 - 4(a - b) > 0 \Rightarrow \Delta_3 > 0$

7. (Obmep) Sobre a equação $2\,007x^3 + 2\,006x^2 + 2\,005x = 0$ é certo afirmar:

a) Não possui raízes.

b) Tem 3 raízes reais distintas.

c) Tem 2 raízes iguais.

d) Tem apenas uma raiz real.

e) Tem 3 raízes positivas.

Colocando x em evidência, temos:

$2\,007x^3 + 2\,006x^2 + 2\,005x = 0 \Rightarrow x(2\,007x^2 + 2\,006x + 2\,005) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $2\,007x^2 + 2\,006x + 2\,005 = 0$

Considere $a = 2\,006$.

Assim, a equação $2\,007x^2 + 2\,006x + 2\,005 = 0$ pode ser escrita:

$(a + 1)x^2 + ax + (a - 1) = 0$

$\Delta = a^2 - 4(a + 1) \cdot (a - 1) = a^2 - 4a^2 + 4 = -3a^2 + 4$

Logo, $\Delta < 0$, pois para $a = 2\,006$, tem-se:

$-3 \cdot 2\,006^2 + 4 < 0$

Portanto, a única raiz real da equação dada é 0.

Resposta: alternativa **d**.

8. (OCM-PB) No início, os números complexos não eram vistos como números, mas sim como um artifício algébrico útil para se resolver equações. Descartes, no século XVII, os chamou de números imaginários. Abraham de Moivre e Euler, no século XVIII começaram a estabelecer uma estrutura algébrica para os números complexos. Em particular, Euler denotou $i^2 = -1$. Baseado nisso, quanto vale a soma: $S = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + ... + i^{2\,012}$?

a) 1 b) -1 c) i d) $-i$ e) 0

As primeiras quatro potências de expoente inteiro e não negativo de i são:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = 1$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$

Então:

$i^0 + i^1 + i^2 + i^3 = 1 + 1 + (-1) + (-1) = 0$

Como as potências inteiras e não negativas de i são cíclicas de 4 em 4, se agruparmos as parcelas da soma $S = i^0 + i^1 + i^2 + i^3 + ... + i^{2\,012}$ (de 2 013 parcelas) de 4 em 4, teremos sempre blocos de soma nula.

Como $2\,013 = 4 \cdot 503 + 1$, podemos reescrever a soma S como a soma de 503 blocos de soma 0 mais a parcela $i^{2\,012}$. Logo:

$S = i^{2\,012} = 1$

Resposta: alternativa **a**.

9. (OMRN) Com relação à equação: $x^3 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)x^2 + \left(\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}\right)x - \sqrt{30} = 0$, podemos afirmar que:

a) possui apenas uma raiz real.
b) possui três raízes reais.
c) não possui raízes reais.
d) possui uma raiz real negativa.
e) todas as suas raízes complexas têm módulo igual a 2.

Considere a, b e c as raízes do polinômio:
$p(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$
Então:
$p(x) = x^3 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)x^2 + \left(\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}\right)x - \sqrt{30} \Rightarrow$
$\Rightarrow p(x) = x^3 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)x^2 + \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}\right)x - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$
Logo, as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right)x^2 + \left(\sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15}\right)x - \sqrt{30}$ são os números reais $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.
Resposta: alternativa **b**.

10. (OMRN) Dado $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, o resto da divisão de $f(x^5)$ por $f(x)$ é:

a) 1.
b) $x^5 + 1$.
c) $x^4 + 1$.
d) 5.
e) 3.

Considere:
$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \Rightarrow f(x^5) = x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1$
Mas temos que:
- $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1} \Rightarrow x^5 - 1 = (x - 1) \cdot (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = (x - 1) \cdot f(x)$
- $f(x^5) = x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1 = (x^{20} - 1) + (x^{15} - 1) + (x^{10} - 1) + (x^5 - 1) + 5$

Então:
- $x^{20} - 1 = (x^{10})^2 - 1^2 = (x^{10} - 1) \cdot (x^{10} + 1) = ((x^5)^2 - 1^2) \cdot (x^{10} + 1) = (x^5 - 1) \cdot (x^5 + 1) \cdot (x^{10} + 1) = (x - 1) \cdot f(x) \cdot (x^5 + 1) \cdot (x^{10} + 1) = f(x) \cdot g_1(x)$, com $g_1(x) = (x - 1) + (x^5 + 1) + (x^{10} + 1)$
- $x^{15} - 1 = (x^5)^3 - 1^3 = (x^5 - 1) \cdot (x^{10} + x^5 + 1) = (x - 1) \cdot f(x) \cdot (x^{10} + x^5 + 1) = f(x) \cdot g_2(x)$, com $g_2(x) = (x - 1) \cdot (x^{10} + x^5 + 1)$
- $x^{10} - 1 = (x^5)^2 - 1^2 = (x^5 - 1) \cdot (x^5 + 1) = (x - 1) \cdot f(x) \cdot (x^5 + 1) = f(x) \cdot g_3(x)$, com $g_3(x) = (x - 1) \cdot (x^5 + 1)$

Logo:
$f(x^5) = (x^{20} - 1) + (x^{15} - 1) + (x^{10} - 1) + (x^5 - 1) + 5 = f(x) \cdot g_1(x) + f(x) \cdot g_2(x) + f(x) \cdot g_3(x) + (x - 1) \cdot f(x) + 5 =$
$= f(x) \cdot \underbrace{[g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + (x - 1)]}_{q(x)} + 5 = f(x) \cdot q(x) + 5$
Portanto, o resto da divisão de $f(x^5)$ por $f(x)$ é igual a 5.
Resposta: alternativa **d**.

11. (OMRN) Seja $p(x)$ um polinômio de grau n, com coeficientes reais, tal que $p(k) = \frac{k}{(k+1)}$, para $k = 0, 1, 2, ..., n$. Determine $p(n+1)$.

Temos:

$p(x) = \frac{x}{(x+1)} \Rightarrow (x+1) \cdot p(x) - x = 0$

Portanto, os números 0, 1, 2, ..., n são as raízes do polinômio de grau $n+1$ definido pela relação $q(x) = (x+1) \cdot p(x) - x$.

Assim, podemos escrever o polinômio $q(x)$ em sua forma fatorada da seguinte maneira:

$q(x) = (x+1) \cdot p(x) - x = a_n \cdot (x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-n)$, onde a_n é o coeficiente dominante (coeficiente do termo de maior grau)

Substituindo $x = -1$ na identidade $(x+1) \cdot p(x) - x = a_n \cdot (x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-n)$, temos:

$1 = a_n \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot ... \cdot [-(n+1)] = a_n \cdot (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \Rightarrow a_n = \frac{1}{(-1)^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

Finalmente, fazendo $x = n+1$ na identidade: $(x+1) \cdot p(x) - x = a_n \cdot (x-0) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot ... \cdot (x-n)$, obtemos:

$(n+2) \cdot p(n+1) - (n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot (n+1) \cdot n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow (n+2) \cdot p(n+1) - (n+1) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot (n+1)! \Rightarrow$

$\Rightarrow p(n+1) = \frac{n+1-(-1)^{n+1}}{n+2}$

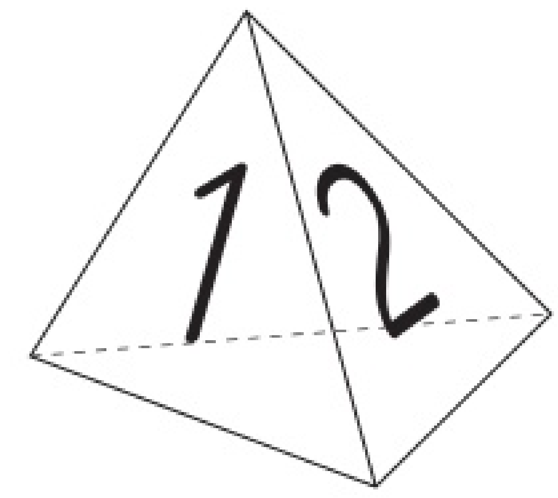
Resposta: $p(n+1) = \frac{n+1-(-1)^{n+1}}{n+2}$.

12. (OMRN) Sejam α, β e γ números reais tais que $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$; $\beta^3 + p\beta + q = 0$ e $\gamma^3 + p\gamma + q = 0$, onde p, q são números reais. Mostre que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Os números α, β e γ são as raízes da equação $x^3 + px + q = 0$.

Portanto, pelas relações de Girard, temos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

13. (OPM-SP) Num jogo, pontos são ganhos somando-se os valores obtidos ao se jogarem dois dados em forma de tetraedro regular, cujas faces são numeradas 1, 2, 3 e 4. O valor obtido é aquele que está na face voltada para baixo. Observe a figura ao lado.



a) Desenvolva: $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$.

b) Mostre que o número de maneiras de se obter n pontos utilizando estes dados é igual ao coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$. Por exemplo, o coeficiente de x^6 é 3 e há três maneiras distintas de se obter 6 pontos: $2 + 4$; $3 + 3$ e $4 + 2$.

c) Por defeito de fabricação, um jogo veio com um dado numerado 1, 2, 2 e 3 e o outro, 1, 3, 3 e 5. Ao receber o jogo para substituição, o dono da fábrica, que era matemático, argumentou que o jogo não mudaria mesmo utilizando os dados defeituosos, isto é, que o número de maneiras de se obter n pontos, $2 \leqslant n \leqslant 8$, com os dados defeituosos e com os dados normais era o mesmo. Ele tinha razão? Explique.

a) $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4) = x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2$

b) Quando efetuamos a multiplicação $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$, obtemos parcelas do tipo $x^j \cdot x^i = x^{j+i}$.
Assim, o coeficiente de x^n representa o número de maneiras distintas de obtermos o termo x^n, ou seja:
$x^{j+i} = x^n \Rightarrow j + i = n$
Por isso o coeficiente do x^n corresponde ao número de maneiras distintas de se obter n pontos utilizando os dados oferecidos pelo enunciado.

c) Para os dados defeituosos o polinômio seria $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4) = x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2$, o mesmo polinômio obtido a partir dos dados “normais” (conforme o item **a**).
Como os coeficientes destes polinômios representam o número de maneiras de se obter n pontos utilizando os dados, temos que no jogo com os dados defeituosos o número de maneiras de se obter n pontos, $2 \leqslant n \leqslant 8$, é o mesmo que o número de maneiras de se obter n pontos com os dados normais.

---

14. (OPM-PB) Determine todos os polinômios $p(x)$ que satisfazem as seguintes condições:

I. $p(0) = 0$;

II. $p(x^{2\,011} + 1) = [p(x)]^{2\,011} + 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Considere p o polinômio procurado. Logo:

- Para $x = 0$: $p(0^{2\,011} + 1) = [p(0)]^{2\,011} + 1 \Rightarrow p(1) = 0^{2\,011} + 1 \Rightarrow p(1) = 1$
- Para $x = 1$: $p(1^{2\,011} + 1) = [p(1)]^{2\,011} + 1 \Rightarrow p(2) = 1^{2\,011} + 1 \Rightarrow p(2) = 2$
- Para $x = 2$: $p(2^{2\,011} + 1) = [p(2)]^{2\,011} + 1 \Rightarrow p(2) = 2^{2\,011} + 1 \Rightarrow p(2^{2\,011} + 1) = 2^{2\,011} + 1$
- Para $x = 2^{2\,011} + 1$: $p((2^{2\,011} + 1)^{2\,011} + 1) = [p(2^{2\,011} + 1)]^{2\,011} + 1 \Rightarrow p((2^{2\,011} + 1)^{2\,011} + 1) = (2^{2\,011} + 1)^{2\,011} + 1$

Prosseguindo dessa mesma forma iremos obter uma lista infinita de números complexos α tais que $p(\alpha) = \alpha$. Mas, definindo o polinômio f por $f(x) = p(x) - x$, temos que todos os números α dessa lista infinita são zeros do polinômio f.

Assim, o polinômio f possuirá infinitos zeros reais, desde que seja identicamente nulo, uma vez que um polinômio que não é identicamente nulo possui uma quantidade finita de raízes. Logo:
$f(x) = 0 \Rightarrow p(x) - x = 0 \Rightarrow p(x) = x, \forall x \in \mathbb{C}$

Portanto, o único polinômio p que cumpre as condições impostas pelo enunciado é o polinômio $p(x) = x$.

Resposta: $p(x) = x$.

15. (Omerj) Quantas raízes reais possui a equação $x^9 - 5x^3 + 1 = 0$?

Considerando $x^3 = y$, temos:

$y^3 - 5y + 1 = 0$

Mas o polinômio $p(y) = y^3 - 5y + 1 = 0$ é tal que:

- $p(-3) < 0$ e $p(-2) > 0$
- $p(0) = 1$ e $p(1) > 0$
- $p(2) < 0$ e $p(3) > 0$

Portanto, pelo teorema de Bolzano, o polinômio p possui uma raiz real em cada um dos intervalos, ou seja, existem três valores de y para os quais $y^3 - 5y + 1 = 0$.

Como $x^3 = y$, para valor de y podemos, então, determinar um único valor real de x (e dois valores complexos não reais).

Resposta: 3 raízes reais.

16. (OMRS)

a) Mostre que o gráfico cartesiano da função $y = x + \frac{1}{x}$ (definida para $x > 0$) não tem nenhum ponto com ordenada < 2.

b) Deduza do item anterior que, para quaisquer números reais positivos (a, b, c, d, e), vale:

$$\frac{1}{a}(1 + ab) + \frac{1}{b}(1 + bc) + \frac{1}{c}(1 + ac) + \frac{1}{d}(1 + de) + \frac{1}{e}(1 + de) \geqslant 10.$$

a) Como $x > 0$, temos que:

- $\frac{1}{x} > 0$
- Para números reais positivos a média aritmética é sempre maior ou igual que a média geométrica.

Logo:

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

Portanto, quando $x > 0$ a função $y = x + \frac{1}{x}$ não possui nenhum ponto de ordenada menor que 2.

b) Considere:

- $\frac{1}{a}(1 + ab) = \frac{1}{a} + b$
- $\frac{1}{b}(1 + bc) = \frac{1}{b} + c$
- $\frac{1}{c}(1 + ac) = \frac{1}{c} + a$
- $\frac{1}{d}(1 + de) = \frac{1}{d} + e$
- $\frac{1}{e}(1 + de) = \frac{1}{e} + d$

Adicionando membro a membro as cinco igualdades acima, obtemos:

$$\frac{1}{a}(1 + ab) + \frac{1}{b}(1 + bc) + \frac{1}{c}(1 + ac) + \frac{1}{d}(1 + de) + \frac{1}{e}(1 + de) = \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} + a + \frac{1}{d} + e + \frac{1}{e} + d =$$

$$= \left(\frac{1}{a} + a\right) + \left(\frac{1}{b} + b\right) + \left(\frac{1}{c} + c\right) + \left(\frac{1}{d} + d\right) + \left(\frac{1}{e} + e\right) > 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$$

Ou seja:

$$\frac{1}{a}(1 + ab) + \frac{1}{b}(1 + bc) + \frac{1}{c}(1 + ac) + \frac{1}{d}(1 + de) + \frac{1}{e}(1 + de) \geqslant 10$$

17. (OMRS) Dados n números reais positivos $a_1, a_2, ..., a_n$, tais que $a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = 1$ mostre que: $(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) ... (1 + a_n) \geqslant 2^n$.

Como $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais positivos e a média aritmética de números reais positivos nunca é menor que a média geométrica, temos:

$\frac{1 + a_i}{2} \geqslant \sqrt{1 \cdot a_i} \Rightarrow 1 + a_i \geqslant 2\sqrt{a_i}$, com $1 \leqslant i \leqslant n$

Aplicando a última desigualdade acima n vezes, obtemos:

$(1 + a_1) \cdot (1 + a_2) \cdot ... \cdot (1 + a_n) \geqslant 2\sqrt{a_1} \cdot 2\sqrt{a_2} \cdot ... \cdot 2\sqrt{a_n} = 2^n \cdot \sqrt{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} = 2^n \cdot \sqrt{1} = 2^n \Rightarrow (1 + a_1) \cdot (1 + a_2) ... (1 + a_n) \geqslant 2^n$

18. (OMSC) Dados um ponto F e uma reta d, chama-se de parábola o conjunto dos pontos equidistantes de F e d (figura 1).

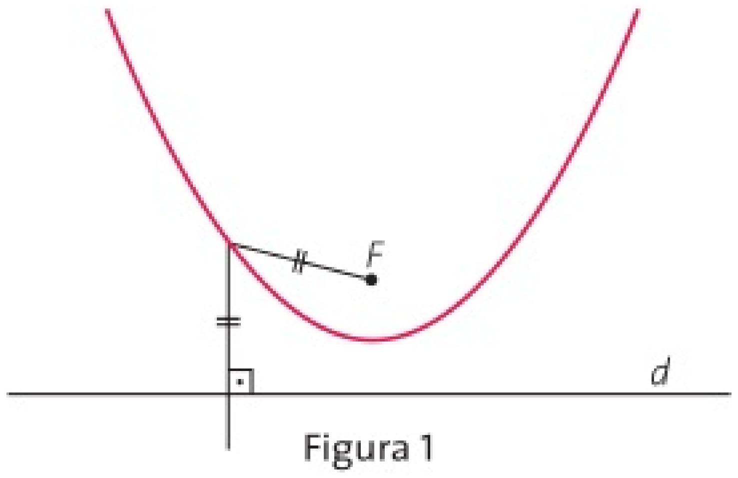


Figura 1

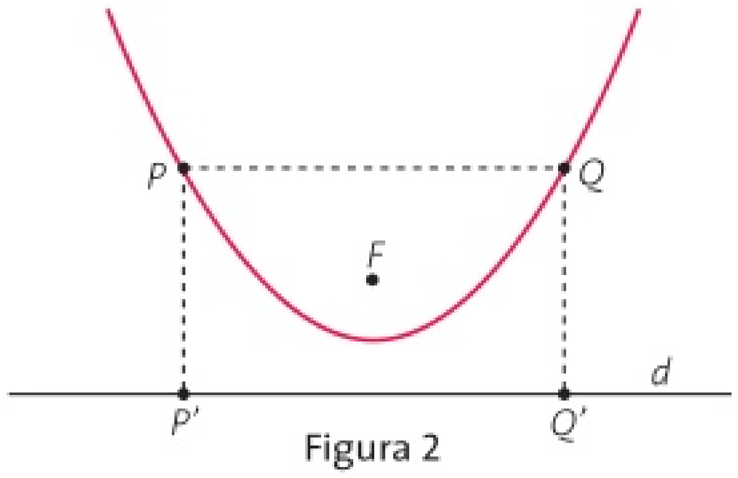
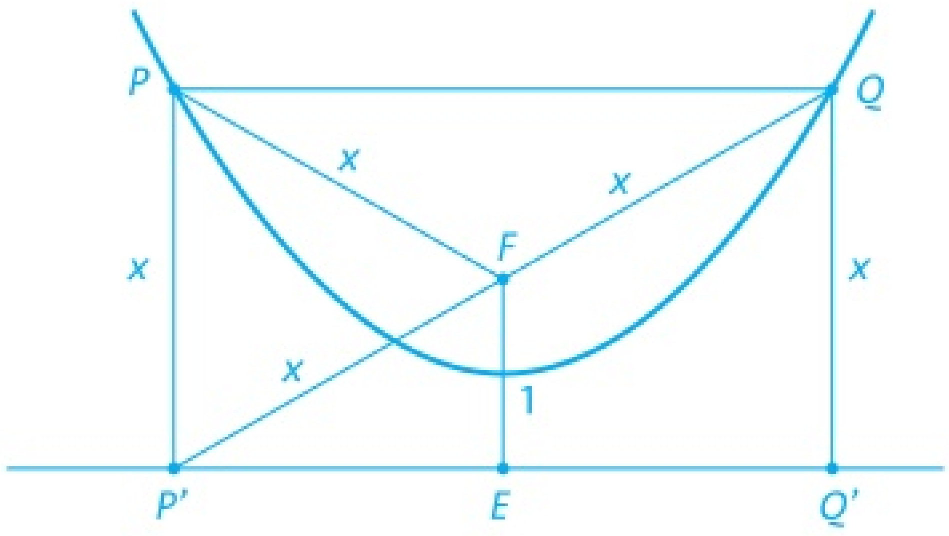


Figura 2

Na figura 2, P e Q são pontos da parábola e P' e Q' pontos da reta d tais que a reta PQ é paralela a d, as retas PP' e QQ' são perpendiculares a d e P', F e Q são colineares. Sabendo que a distância de F a d é igual a 1 cm, calcule a área do retângulo $PP'Q'Q$.

Considere $FQ = QQ' = x$.

Como PQ é paralelo a d, pela simetria da parábola, temos que $FP = PP' = x$, conforme ilustra a figura ao lado.



Os triângulos $P'FE$ e $P'QQ'$ são semelhantes, logo:

$\frac{1}{x} = \frac{x}{2x} \Rightarrow x = 2$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $P'QQ'$, temos:

$P'Q^2 = QQ'^2 + P'Q'^2 \Rightarrow 4^2 = 2^2 + P'Q'^2 \Rightarrow P'Q' = 2\sqrt{3}$

$A_{PQQ'P'} = 2\sqrt{3} \cdot 2 = 4\sqrt{3}$

Resposta: $4\sqrt{3}$.

19. (OMRN) Na cantina Peso Honesto há uma balança de pratos que não está bem regulada, de modo que, ao colocarmos um peso de 1,0 kg em cada um dos seus pratos, a balança fica desequilibrada para uma dos seus lados conforme ilustra a figura ao lado.

Um dia, o Sr. José vai à cantina Peso Honesto comprar um quilograma de açúcar que é pesado diante dos seus olhos na bendita balança defeituosa. No dia seguinte, o Sr. José retorna à cantina Peso Honesto para comprar mais um quilo de açúcar, mas, desconfiado sobre a honestidade da balança, ele exige que as posições do pacote de açúcar e do peso de 1,0 kg usado para fazer a pesagem sejam invertidas em relação à posição do dia anterior. Diga, justificando, se, ao final dos dois dias, o Sr. José levou para casa exatamente 2,0 kg, menos de 2,0 kg ou mais de 2,0 kg de açúcar.

Pondo massas m_1 e m_2 em cada um dos pratos da balança, ela ficará equilibrada quando $m_1 \cdot a = m_2 \cdot b$, em que a e b são os comprimento dos braços da balança em cada um dos seus lados.

Assim, para manter a balança em equilíbrio no primeiro dia, temos:

- 1º dia: $x \cdot a = b \cdot 1$, em que x = verdadeira massa de açúcar posta no primeiro dia, em kg.
- 2º dia: $1 \cdot a \cdot y \cdot b$, em que y = a verdadeira massa de açúcar posta na balança no segundo dia, em kg.

Logo:

$$\begin{cases} x \cdot a = b \cdot 1 \\ 1 \cdot a = y \cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xa = b \\ a = by \end{cases} \Rightarrow x(by) = b \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

A massa total de açúcar adquirido pelo Sr. José nos dois dias foi, então:

$$x + y = x + \frac{1}{x}$$

Mas, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2, \forall x > 0$, pois pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos:

$$MA \geqslant MG \Rightarrow \frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

Mas, a igualdade ocorre se, e somente se:

$$x = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, \text{ pois } x > 0$$

Como $x \neq 1$, pois a balança não é honesta (então a massa de açúcar comprada no primeiro dia não era 1,0 kg), temos:

$$x + \frac{1}{x} > 2$$

Resposta: Mais de 2,0 kg de açúcar ao final dos dois dias.

20. (OMSC)

a) Verifique que, para todo número real $y < 0$, $y + \dfrac{1}{y} \geqslant 2$.

b) Utilizando o resultado anterior, verifique que, para $x > 1$, $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}} \geqslant 2$.

a) $y > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{y} > 0$

Sabendo que a média aritmética de dois números reais positivos é sempre maior ou igual à média geométrica desses mesmos números, obtemos:

$$MA \geqslant MG \Rightarrow \frac{y + \frac{1}{y}}{2} \geqslant \sqrt{y \cdot \frac{1}{y}} \Rightarrow y + \frac{1}{y} \geqslant 2$$

b) Temos:

- $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}} = \dfrac{(x+2)+(x-1)}{\sqrt{x^2+x-2}} = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}} + \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}$
- $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}} \cdot \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}} = \dfrac{(x+2)\cdot(x-1)}{x^2+x-2} = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-2} = 1$

Logo:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}} = \frac{1}{\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}}$$

Assim, se $x > 1$, então $x + 2 > 0$, $x + 2 > 0$ e $x^2 + x - 2 > 0$.

Fazendo a mudança de variáveis $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}$, temos que $y > 0$ e:

$$\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}} = \frac{1}{\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}} = \frac{1}{y}$$

Portanto:

$$\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x-2}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+x-2}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}} + \frac{1}{\frac{x-1}{\sqrt{x^2+x-2}}} = y + \frac{1}{y} \geqslant 2$$

21. (OPM-PB) Seja $p(x)$ o polinômio de grau 2 011, com coeficientes reais, dado por:

$p(x) = \left[x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2\,011}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2\,011}\right)\right]^{2\,011}$. Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $d(x) = x^2 + 1$.

Como o polinômio $d(x) = x^2 + 1$ é de grau 2, o resto da divisão do polinômio $p(x) = \left[x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2\,011}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2\,011}\right)\right]^{2\,011}$ pelo polinômio $d(x) = x^2 + 1$ tem, no máximo, grau 1, ou seja: $r(x) = ax + b$. Assim, pelo algoritmo da divisão, podemos escrever:

$$p(x) = \left[x \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2\,011}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2\,011}\right)\right]^{2\,011} = (x^2 + 1) \cdot q(x) + ax + b$$

Considerando $x = i$ e $x = -i$, e aplicando a fórmula de Moivre, temos:

$z = p(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha) \Rightarrow z^n = p^n[\cos(n\alpha) + i \operatorname{sen}(n\alpha)]$, com n natural

Portanto:

- $\left[i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2\,011}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2\,011}\right)\right]^{2\,011} = (i^2 + 1) \cdot q(x) + ax + b \Rightarrow 1 = a \cdot i + b$
- $\left[-i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{2\,011}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{2\,011}\right)\right]^{2\,011} = ((-i)^2 + 1) \cdot q(x) + ax + b \Rightarrow 1 = a \cdot (-i) + b$

Ou seja:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 1 \\ -a \cdot 1 + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 1 \Rightarrow r(x) = ax + b$$

Logo, $r(x) = 1$.

Resposta: $r(x) = 1$.

22. (Usamo) Sabendo que uma raiz da equação polinomial $2x^2 + rx + s = 0$, com r e s reais é o número $3 + 2i$, com $i^2 = -1$, então o valor de s é:

a) indeterminado.
b) 5.
c) 6.
d) -13.
e) 26.

Como os coeficientes da equação $2x^2 + rx + s = 0$ são, por hipótese, reais, segue que o conjugado do número complexo $3 + 2i$ também é uma raiz da referida equação. Como a equação $2x^2 + rx + s = 0$ é do segundo grau, segue que as suas raízes são $3 + 2i$ e $3 - 2i$. Portanto, o produto das raízes é dado por:

$$(3 + 2i) \cdot (3 - 2i) = \frac{s}{2} \Rightarrow s = 2 \cdot (3^2 - (2i)^2) = 2 \cdot 13 = 26$$

Resposta: alternativa **e**.

23. (Usamo) Uma reta r "passa" pelo ponto $A(-a, 0)$ no plano cartesiano e forma com os eixos coordenados no segundo quadrante um triângulo de área T. A equação cartesiana desta reta é:

a) $2Tx + a^2y + 2aT = 0.$
b) $2Tx - a^2y + 2aT = 0.$
c) $2Tx + a^2y - 2aT = 0.$
d) $2Tx - a^2y - 2aT = 0.$
e) $-2Tx + a^2y + 2aT = 0.$

Suponha que a reta r intersecta o eixo y no ponto $B(0, b)$.

Assim:

$$\frac{ab}{2} = T \Rightarrow ab = 2T \Rightarrow b = \frac{2T}{a}$$

Mas a equação da reta que "passa" pelos pontos $A(-a, 0)$ e $B(0, b)$ é:

$$\frac{x}{-a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow -bx + ay = ab$$

Então, como $b = \frac{2T}{a}$, temos:

$$-bx + ay = ab \Rightarrow -\frac{2T}{a} \cdot x + ay = a \cdot \frac{2T}{a} \Rightarrow -2Tx + a^2y - 2Ta = 0 \Rightarrow 2Tx - a^2y + 2Ta = 0$$

Resposta: alternativa **b**.

24. (Usamo) Se $y = (x - a)^2 + (x - b)^2$, com a e b constantes reais, para qual valor de x o valor de y será mínimo?

a) $\frac{a + b}{2}$
b) $a + b$
c) $\sqrt{ab}$
d) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$
e) $\frac{a + b}{2ab}$

A equação $y = (x - a)^2 + (x - b)^2$ é a equação cartesiana de uma parábola que pode ser reescrita como:

$y = (x - a)^2 + (x - b)^2 = 2x^2 - (2a + 2b)x + (a^2 + b^2)$

Assim, a equação assume o seu valor mínimo quando $x = x_V = -\frac{-(2a + 2b)}{2 \cdot 2} = \frac{a + b}{2}$.

Resposta: alternativa **a**.

25. (Usamo) Se n é múltiplo de 4, a soma $S = 1 + 2i + 3i^2 + ... + (n + 1)i^n$, onde $i^2 = -1$, é igual a:

a) $1 + i$.

b) $\frac{1}{2} \cdot (n + 2)$.

c) $\frac{1}{2} \cdot (n + 2 - ni)$.

d) $\frac{1}{2} \cdot [(n + 1) \cdot (1 - i) + 2]$.

e) $\frac{1}{8} \cdot (n^2 + 8 - 4ni)$.

Multiplicando a expressão $S = 1 + 2i + 3i^2 + ... + (n + 1)i^n$ pela unidade imaginária, obtemos:

$$\begin{cases} S = 1 + 2i + 3i^2 + \ ... \ + (n+1)i^n \\ Si = 1i + 2i^2 + 3i^3 + \ ... \ + (n+1)i^{n+1} \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro, temos:

$$S(1 - i) = 1 + i + i^2 + ... + i^n - (n + 1)i^{n+1} \Rightarrow S(1 - i) = \frac{1 \cdot (i^{n+1} - 1)}{i - 1} - (n + 1)i^{n+1} \Rightarrow S(1 - i) = \frac{i^n \cdot i - 1}{i - 1} - (n + 1)i^n \cdot i$$

Mas sabemos por hipótese que n é múltiplo de 4. Portanto, $i^n = 1$, logo:

$$S(1 - i) = \frac{i^n \cdot i - 1}{i - 1} - (n + 1)i^n \cdot i \Rightarrow S(1 - i) = \frac{i - 1}{i - 1} - (n + 1)i \Rightarrow S = \frac{1 - (n + 1)i}{1 - i}$$

Então:

$$S = \frac{1 - (n + 1)i}{1 - i} \Rightarrow S = \frac{1 - (n + 1)i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \Rightarrow S = \frac{1}{2}(n + 2 - ni)$$

Resposta: alternativa **c**.

26. (OIM-CAN) Se $z = a + bi$, com $i^2 = -1$ é um número complexo tal que $z^{2\,010} = 3 + 4i$ e $z^{2\,009} = 1 - i$, podemos afirmar que z é igual a:

a) $-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$.

b) $-\frac{7}{2} + \frac{1}{2}i$.

c) $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

d) $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.

e) $-\frac{11}{2} + \frac{13}{2}i$.

$$z = \frac{z^{2\,010}}{z^{2\,009}} = \frac{3 + 4i}{1 - i} = \frac{3 + 4i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{3 + 3i + 4i + 4i^2}{1^2 - i^2} = \frac{-1 + 7i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$$

Resposta: alternativa **a**.

27. (OMA) Um polinômio p de grau 2 e coeficientes reais é tal que toda permutação dos seus coeficientes determina um polinômio com as mesmas raízes que p. Determine as raízes de p.

Considere $p(x) = ax^2 + bx + c$. O número 0 não pode ser raiz de p, pois também seria raiz do polinômio $p_1(x) = cx^2 + bx + a$, o que implicaria $a = 0$. Mas, nesse caso, o polinômio p não seria de grau 2, o que contraria as condições impostas pelo enunciado.

Além disso, p não pode possuir uma raiz dupla. Caso contrário, poderíamos escrever $p(x) = a(x - r)^2 = ax^2 - 2arx + ar^2$, sendo r a única raiz de p. Assim, permutando-se o termo de 1º grau e o termo constante obteríamos $p_2(x) = ax^2 + ar^2x - 2ar$, que, pelas condições impostas pelo enunciado, também admitiria r como raiz, ou seja:

$p_2(r) = 0 \Rightarrow ar^2 + ar^2r - 2ar = 0 \Rightarrow ar(r + r^2 - 2) = 0 \Rightarrow r^2 + r - 2 = 0$, para $r \neq 0$

Mas:

$r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r = -2$ ou $r = 1$, o que é um absurdo, pois estaríamos supondo que o polinômio tem uma única raiz.

Então, p tem duas raízes distintas (e não nulas), sendo uma delas $\alpha \neq 1$, que, pelas condições impostas pelo enunciado, será raiz do polinômio original $p(x) = ax^2 + bx + c$ e também dos polinômios $q(x) = bx^2 + ax + c$ e $s(x) = ax^2 + cx + b$. Portanto:

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 \\ b\alpha^2 + a\alpha + c = 0 \\ a\alpha^2 + c\alpha + b = 0 \end{cases}$$

Subtraindo as duas primeiras equações, temos:

$\alpha(\alpha - 1) \cdot (a - b) = 0 \Rightarrow a = b$

E subtraindo a primeira da terceira equação, obtemos:

$(\alpha - 1) \cdot (b - c) \Rightarrow b = c$

Então, podemos concluir que $b = c = a$. Portanto:

$p(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + ax = a = a(x^2 + x + 1)$

Finalmente:

$p(x) = 0 \Rightarrow a(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$

Resposta: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$.

---

28. (OMA) Mostre que o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + ax - \dfrac{1}{3}$ não pode ter todas as suas raízes positivas, qualquer que seja o número real a.

Suponha que o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + ax - \dfrac{1}{3}$ admita três raízes reais positivas r, s e t. Pelas relações de Girard, temos:

$$\begin{cases} r + s + t = 2 \\ rst = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Lembrando que a média geométrica de três números reais e positivos é sempre menor ou igual à média aritmética dos mesmos três números, obtemos:

$\sqrt[3]{rst} \leqslant \dfrac{r + s + t}{3} \Rightarrow \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} \leqslant \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{8}{27} \Rightarrow 27 \leqslant 24$, o que seria um absurdo.

Portanto, a suposição inicial de que o polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + ax - \dfrac{1}{3}$ tivesse três raízes reais e positivas não pode ser verdadeira.

29. (OMA) Dois alunos colocam alternadamente números inteiros nos “lugares vazios” dos coeficientes da equação abaixo (um coeficiente por vez!):

$x^3 + (\ )x^2 + (\ )x + (\ ) = 0$

Neste jogo um aluno será considerado vencedor se na sua última jogada a equação final tiver três raízes inteiras. Mostre que o primeiro a jogar sempre poderá ganhar o jogo.

O primeiro a jogar põe um 0 (zero) na posição do último parênteses, deixando a equação com a forma $x^3 + (\ )x^2 + (\ )x + 0 = 0$, que já admite 0 (zero) como uma das suas raízes.

Se o segundo jogador colocar o inteiro n numa das duas posições que restam, a equação assumirá uma das formas:

- $x^3 + n \cdot x^2 + (\,)x = 0$
- $x^3 + (\,) \cdot x^2 + nx = 0$

Em qualquer dos dois casos, o primeiro a jogar pode na rodada final colocar o número $(-n - 1)$ em uma das posições que restam e a soma dos coeficientes será 0 (zero), o que implicará que 1 é uma das raízes.

Neste ponto, a equação já possui duas raízes inteiras: 0 e 1. E, pelas relações de Girard, a terceira raiz também é inteira, uma vez que a soma das raízes será inteira nas duas equações:

- $x^3 + n \cdot x^2 + (\,)x = 0$
- $x^3 + (\,) \cdot x^2 + nx = 0$

Desse modo, o primeiro a jogar sempre pode vencer o jogo.

---

30. (OBMJ-ROM) Seja a um real positivo tal que $a^3 = 6(a + 1)$. Prove que a equação $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ não possui solução real.

Considere:

$a^3 = 6(a + 1) = 6a + 6 \Rightarrow a^3 - 6a = 6 \Rightarrow a(a^2 - 6) = 6 \Rightarrow a^2 = \dfrac{6}{a} + 6$

Como $a > 0$, temos $\dfrac{6}{a} < 0$. Então, $a^2 > 6$. Portanto:

$a(a^2 - 6) = 6 < a^2 \Rightarrow a^2 - a - 6 < 0 \Rightarrow -2 < a < 3$

Logo:

$a < \sqrt{6} < -2 \Rightarrow \sqrt{6} < a < 3$

Substituindo na equação em x, $(a^2 - 6)$ por $\dfrac{6}{a}$, teríamos como raízes:

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - \dfrac{24}{a}}}{2}$$

Mas estas raízes não são reais, pois $a^2 - \dfrac{24}{a} < 0$, uma vez que:

$a^3 = 6(a + 1) < 6(3 + 1) = 24 \Rightarrow a^3 < 24 \Rightarrow a^2 < \dfrac{24}{a} \Rightarrow a^2 - \dfrac{24}{a} < 0$

Assim, se $a^3 = 6(a + 1)$, então a equação $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ não possui raízes reais.

31. (OIM-ING) Determine o número inteiro a para que o polinômio $q(x) = x^2 - x - 1$ seja um fator do polinômio $p(x) = ax^{17} + bx^{16} + 1$.

Se $q(x) = x^2 - x - 1$ for um fator do polinômio $p(x) = ax^{17} + bx^{16} + 1$, temos como raízes do polinômio $q(x) = x^2 - x - 1$:

- $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
- $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

Mas α e β também serão raízes do polinômio $p(x) = ax^{17} + bx^{16} + 1$. Assim:

$$\begin{cases} a\alpha^{17} + b\alpha^{16} + 1 = 0 \\ a\beta^{17} + b\beta^{16} + 1 = 0 \end{cases}$$

Para isolarmos o valor de a, basta multiplicarmos a primeira equação por β^{16} e a segunda por α^{16}. Logo:

$$\begin{cases} a\alpha^{17} + b\alpha^{16} + 1 = 0 \\ a\beta^{17} + b\beta^{16} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\alpha^{17}\beta^{16} + b\alpha^{16}\beta^{16} + \beta^{16} = 0 \\ a\beta^{17}\alpha^{16} + b\beta^{16}\alpha^{16} + \alpha^{16} = 0 \end{cases}$$

Subtraindo as duas últimas equações, obtemos:

$$a\alpha^{16}\beta^{16}(\alpha - \beta) + \beta^{16} - \alpha^{16} = 0 \Rightarrow a = \frac{\alpha^{16} - \beta^{16}}{\alpha^{16}\beta^{16}(\alpha - \beta)}$$

Como α e β são zeros do polinômio $q(x) = x^2 - x - 1$, temos $ab = -1$. Então:

$$a = \frac{\alpha^{16} - \beta^{16}}{\alpha^{16}\beta^{16}(\alpha - \beta)} \Rightarrow a = \frac{\alpha^{16} - \beta^{16}}{(\alpha - \beta)}$$

Portanto:

$$\alpha - \beta = \sqrt{5} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{16} - \beta^{16})$$

Aplicando a fórmula de Binet para o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci, obtemos, então:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n - \beta^n)$$

Mas:

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^{16} - \beta^{16}) \Rightarrow a = f_{16}$$

Portanto:

$f_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...)$

Logo, $a = 987$.

Resposta: $a = 987$.

32. (MIT-EUA) No plano cartesiano, um quadrilátero convexo é determinado pelos pontos de interseção das curvas $x^4 + y^4 = 100$ e $xy = 4$; determine a medida da sua área.

Pela simetria imposta pelas equações dadas, o quadrilátero é um retângulo com eixos de simetria, sendo as retas de equações $y = x$ e $y = -x$.
Considerando o ponto $A(a, b)$ o vértice do retângulo que fica no primeiro quadrante, a sua área pode ser calculada por:

$$A_{\text{retângulo}} = \left(\sqrt{2}(a-b)\right) \cdot \left(\sqrt{2}(a+b)\right) = 2(a^2 - b^2) = 2\sqrt{(a^2 - b^2)^2} =$$

$$= 2\sqrt{a^4 + b^4 - 2a^2b^2} = 2\sqrt{100 - 2 \cdot 4^2} = 4\sqrt{17}$$

Resposta: $4\sqrt{17}$.

33. (HU-EUA) Mostre que $-1 - \sqrt[3]{6}$ é uma raiz da equação $x^3 + 3x^2 + 3x + 7 = 0$.

$$x^3 + 3x^2 + 3x + 7 = 0 \Rightarrow (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^3 = -6 \Rightarrow x = -1 + \sqrt[3]{6} \Rightarrow x = -1 - \sqrt[3]{6}$$

34. (OIM-URSS) Mostre que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

Considere a, b e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$.

Logo:

- $p(a) = 0 \Rightarrow a^3 - (a + b + c)a^2 + (ab + ac + bc)a - abc = 0$
- $p(b) = 0 \Rightarrow b^3 - (a + b + c)b^2 + (ab + ac + bc)b - abc = 0$
- $p(c) = 0 \Rightarrow c^3 - (a + b + c)c^2 + (ab + ac + bc)c - abc = 0$

Adicionando membro a membro as igualdades à direita, temos:

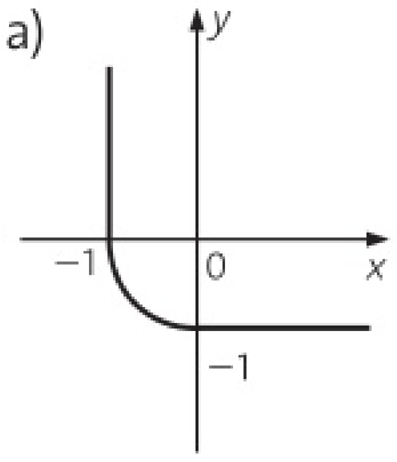
$a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2) + (ab + ac + bc) \cdot (a + b + c) - 3abc = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + ac + bc) \cdot (a + b + c) \Rightarrow$

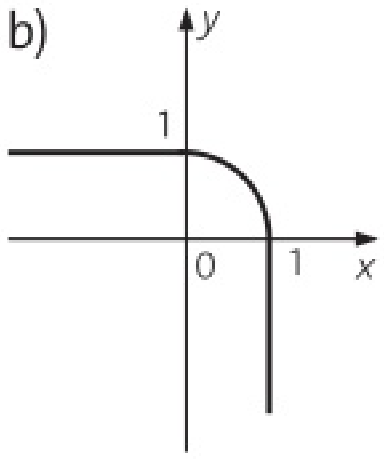
$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

35. (CMF-PRT) Qual destas representações gráficas corresponde ao conjunto de todas as soluções da equação $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$?

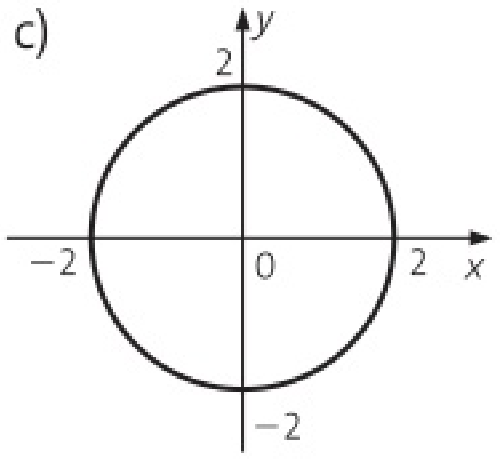
a)



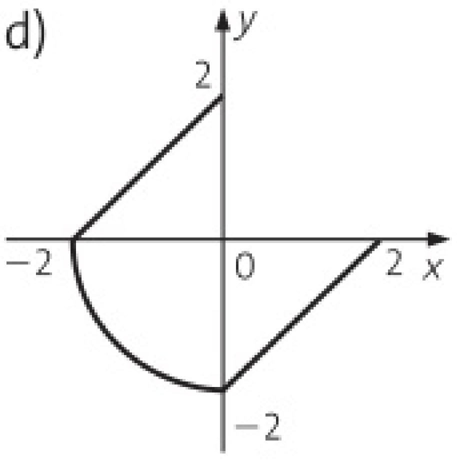
b)



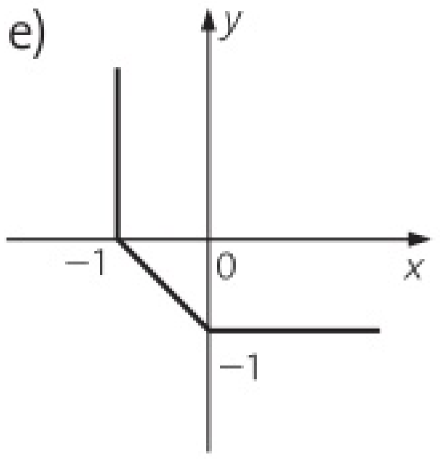
c)



d)



e)



Considerando $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$, temos $|x| = x$ e $|y| = y$. Então:

$(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = (x - x)^2 + (y - y)^2 = 0 \neq 4$

Portanto, a curva $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$ não possui pontos no primeiro quadrante.

Logo:

- Se $x < 0$ e $y \geqslant 0$, temos $|x| = -x$ e $|y| = y$. Então:
  $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4 \Rightarrow (x - (-x))^2 + (y - y)^2 = 4 \Rightarrow 4x^2 = 4 \Rightarrow x = -1$ (pois $x < 0$)
  Logo, no segundo quadrante, a representação gráfica é uma semirreta vertical que passa pelo ponto de abscissa $x = -1$.
- Se $x < 0$ e $y < 0$, temos $|x| = -x$ e $|y| = -y$. Então:
  $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4 \Rightarrow (x - (-x))^2 + (y - (-y))^2 = 4 \Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$
  Logo, no terceiro quadrante, a representação gráfica é um arco de circunferência.
- Se $x > 0$ e $y < 0$, temos $|x| = x$ e $|y| = -y$. Então:
  $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4 \Rightarrow (x - x)^2 + (y - (-y))^2 = 4 \Rightarrow 4y^2 = 4 \Rightarrow y = -1$ (pois $y < 0$)
  Logo, no quarto quadrante, a representação gráfica é uma semirreta horizontal que passa pelo ponto de ordenada igual a $y = -1$.

Resposta: alternativa **a**.

36. (AHSME) Quatro números complexos são os vértices de um quadrado no plano complexo. Três desses números são: $1 + 2i$, $-2 + i$ e $-1 - 2i$. O quarto vértice é:

a) $2 + i$. b) $2 - i$. c) $1 - 2i$. d) $-1 + 2i$. e) $-2 - i$.

Identificando o plano complexo e o plano cartesiano, as coordenadas dos vértices do quadrado seriam:

- $1 + 2i$: $A(1, 2)$
- $-2 + i$: $B(-2, 1)$
- $-1 - 2i$: $C(-1, -2)$
- $a + bi$: $D(a, b)$

Dispondo os pontos A, B e C no plano cartesiano, é fácil perceber que os pontos A e C são vértices diametralmente opostos do quadrado. Então, o ponto $M(x_M, y_M)$, médio da diagonal AC, pode ser obtido da seguinte forma:

- $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{1 + (-1)}{2} = 0$
- $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{2 + (-2)}{2} = 0$

Assim $M(0, 0)$.

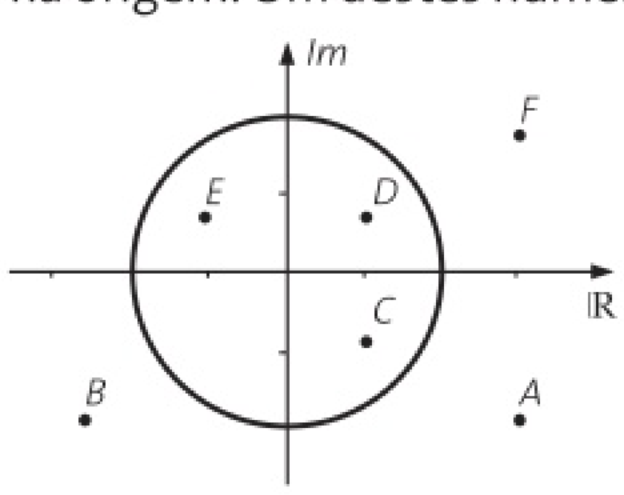
Mas este ponto $M(0, 0)$ também é o ponto médio da diagonal BD. Logo:

- $x_M = \dfrac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow 0 = \dfrac{-2 + a}{2} \Rightarrow a = 2$
- $y_M = \dfrac{y_B + y_D}{2} \Rightarrow 0 = \dfrac{1 + b}{2} \Rightarrow b = -1$

Como $a + bi$ representa o ponto $D(a, b)$, segue que o quarto vértice do quadrado é o número complexo $2 - i$.

Resposta: alternativa **b**.

37. (AHSME) O diagrama abaixo mostra alguns números no plano complexo. O círculo unitário está centrado na origem. Um destes números é o inverso de F. Qual?



a) A b) B c) C d) D e) E

Considere:

$z = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho}(\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha))$

Como F é um número complexo localizado na parte externa do círculo unitário, temos:

$\rho > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\rho} < 1$

o que significa que ρ inverso de F está no interior do círculo unitário.

Mas o argumento de F é um ângulo cuja medida $\rho > 1$. Então, $\dfrac{1}{\rho} < 1$ é tal que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Logo:

$-\dfrac{\pi}{2} < -\alpha < 0$ (4º quadrante)

Assim, o inverso de F está no interior do círculo unitário e no 4º quadrante, que corresponde apenas ao ponto C.

Resposta: alternativa **c**.

38. (AHSME) Se $x = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ e $y = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, onde $i^2 = -1$, então entre as alternativas assinale aquela que não é correta:

a) $x^5 + y^5 = -1$.

b) $x^7 + y^7 = -1$.

c) $x^9 + y^9 = -1$.

d) $x^{11} + y^{11} = -1$.

e) $x^{13} + y^{13} = -1$.

Reescrevendo x e y, temos:

- $x = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} i = \cos 120° + i \cdot \operatorname{sen} 120°$
- $y = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{1}{2} + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) i = \cos 240° + i \cdot \operatorname{sen} 240°$

Assim, para qualquer inteiro n:

- $x^n = \cos(n \cdot 120°) + i \cdot \operatorname{sen}(n \cdot 120°)$
- $y^n = \cos(n \cdot 240°) + i \cdot \operatorname{sen}(n \cdot 240°)$

Quando n assume os valores 5, 7, 9, 11 e 13 podemos perceber que apenas no caso $n = 9$ não ocorre $x^n + y^n = -1$.

Resposta: alternativa **c**.

39. (AHSME) Para qualquer número complexo $w = a + bi$, $|w|$ é definido como sendo o número real $\sqrt{a^2 + b^2}$. Se $w = \cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40°$, então $|w + 2w^2 + 3w^3 + ... + 9w^9|^{-1}$ é igual a:

a) $\frac{1}{9} \cdot \operatorname{sen} 40°$. b) $\frac{2}{9} \cdot \operatorname{sen} 20°$. c) $\frac{1}{9} \cdot \cos 40°$. d) $\frac{1}{18} \cdot \cos 20°$. e) $\frac{1}{18} \cdot \cos 80°$.

Considere:

$S = w + 2w^2 + 3w^3 + ... + 9w^9$

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por w, obtemos:

$wS = w^2 + 2w^3 + 3w^4 + ... + 9w^{10}$

Assim, temos:

$$\begin{cases} S = w + 2w^2 + 3w^3 + 4w^4 + \ ... \ + 9w^9 \\ wS = w^2 + 2w^3 + 3w^4 + \ ... \ + 8w^9 + 9w^{10} \end{cases}$$

Subtraindo membro a membro as igualdades acima, temos:

$(1 - w)S = w + w^2 + w^3 + ... + w^9 - 9w^{10}$

Mas:

$w + w^2 + w^3 + ... + w^9 = \dfrac{w(w^9 - 1)}{w - 1}$

Então:

$w = \cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40° \Rightarrow w = \cos (9 \cdot 40°) + i \cdot \operatorname{sen} (9 \cdot 40°) \Rightarrow w = \cos 360° + i \cdot \operatorname{sen} 360° \Rightarrow w = 1$

Logo, $w^9 - 1 = 0$. Assim:

$(1 - w)S = w + w^2 + w^3 + ... + w^9 - 9w^{10} \Rightarrow (1 - w)S = \dfrac{w(w^9 - 1)}{w - 1} - 9w^{10} \Rightarrow (1 - w)S = 0 - 9w^{10} \Rightarrow (1 - w)S = -9w^{10}$

Então:

$|(1 - w)S| = |-9w^{10}| \Rightarrow \dfrac{1}{|S|} = \dfrac{|1 - w|}{|-9| \cdot |w|^{10}}$

Como $w = \cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40°$, então $|w| = 1$. Portanto:

$|S|^{-1} = \dfrac{|1 - w|}{9 \cdot 1^{10}} = \dfrac{|1 - w|}{9}$

Mas:

$w = \cos 40° + i \cdot \operatorname{sen} 40° \Rightarrow 1 - w = (1 - \cos 40°) - i \cdot \operatorname{sen} 40°$

Então:

$$|1 - w| = \sqrt{(1 - \cos 40°)^2 + \operatorname{sen}^2 40°} = \sqrt{1 - 2\cos 40° + \underbrace{\cos^2 40° + \operatorname{sen}^2 40°}_{1}} = \sqrt{2 - 2\cos 40°} =$$

$$= \sqrt{2 - 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 20°)} = \sqrt{4\operatorname{sen}^2 20°} = 2\operatorname{sen} 20°$$

Finalmente, temos:

$|S|^{-1} = \dfrac{|1 - w|}{9} \Rightarrow |w + 2w^2 + 3w^3 + ... + 9w^9|^{-1} = \dfrac{2}{9} \operatorname{sen} 20°$

Resposta: alternativa **b**.

Respostas

Vestibular em foco

Matemática financeira

1. 35%
2. c
3. a
4. d
5. b
6. d
7. b
8. b
9. d
10. b
11. c
12. e
13. d
14. c
15. c
16. b
17. e
18. b
19. b
20. e

Estatística

1. 14 países
2. a
3. 04
4. 05
5. a
6. b
7. e
8. e
9. c
10. R$ 20,00
11. c
12. 300 escolas pioraram; 120 escolas mantiveram e 180 escolas melhoraram
13. d
14. 02
15. d
16. c
17. c
18. a
19. e
20. c
21. a
22. b
23. b
24. e
25. d
26. b
27. c
28. b

Geometria analítica: ponto e reta

1. c
2. d
3. b
4. b
5. b
6. c
7. b
8. d
9. c
10. a
11. b
12. c
13. c
14. c
15. b
16. c
17. d
18. e
19. c
20. d
21. b
22. c
23. e
24. 05
25. e
26. d

Geometria analítica: a circunferência

1. c
2. c
3. b
4. b
5. a
6. c
7. e
8. c
9. b
10. d
11. d
12. b
13. b
14. e
15. b
16. a
17. a
18. a
19. c
20. a
21. e
22. a
23. c
24. a

25. a
26. e
27. b
28. c
29. d
30. c
31. d
32. c
33. c

Geometria analítica: secções cônicas

1. b
2. b
3. c
4. e
5. e
6. b
7. b
8. c
9. e
10. b
11. a
12. b
13. c
14. a
15. b
16. d
17. c
18. I, IV e V
19. b

Números complexos

1. $a = 25$
2. a
3. d
4. c
5. b
6. c
7. a
8. e
9. c
10. c
11. e
12. d
13. e
14. d
15. b
16. a
17. a
18. d
19. c

Polinômios e Equações polinomiais ou algébricas

1. b
2. b
3. c
4. d
5. d
6. d
7. b
8. e
9. a
10. a
11. c
12. b
13. a
14. c
15. a
16. d
17. c
18. a) 3 cm
    b) $\left(9 - \sqrt{51}\right)$ cm
19. c
20. 01
21. d
22. d
23. $\dfrac{7 - \sqrt{37}}{3}$ dm
24. a
25. c
26. a

Desafio

1. e
2. e
3. c
4. d
5. b
7. d
8. a
9. b
10. d
11. $p(n + 1) = \dfrac{n + 1 - (-1)^{n+1}}{n + 2}$
13. a) $x^8 + 2x^7 + 3x^6 + 4x^5 + 3x^4 + 2x^3 + x^2$
    c) Sim
14. $p(x) = x$
15. 3 raízes reais
18. $4\sqrt{3}$
19. Mais de 2,0 kg de açúcar
21. $r(x) = 1$
22. e
23. b
24. a
25. c
26. a
27. $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$
31. $a = 987$
32. $4\sqrt{17}$
35. a
36. b
37. c
38. c
39. b

Significado das siglas

Acafe-SC	Associação Catarinense das Fundações Educacionais (Santa Catarina)
AHSME	American High School Mathematics Examination (Exame Norte-Americano de Matemática do Ensino Médio)
AIME	American Invitational Mathematics Examination (Exame Norte-Americano de seleção de Matemática)
Cefet-PR	Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
Cesgranrio-RJ	Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio (Rio de Janeiro)
CMF-PRT	Canguru Matemático sem Fronteiras (Portugal)
EsPCEx-SP	Escola Preparatória de Cadetes do Exército (São Paulo)
ESPM-SP	Escola Superior de Propaganda e Marketing (São Paulo)
Fatec-SP	Faculdade de Tecnologia (São Paulo)
FEI-SP	Centro Universitário da Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
Fepecs-DF	Fundação de Ensino e Pesquisa em Ciências da Saúde
FGV-SP	Fundação Getúlio Vargas (São Paulo)
Furg-RS	Fundação Universidade Federal do Rio Grande (Rio Grande do Sul)
Fuvest-SP	Fundação Universitária para o Vestibular (São Paulo)
HU-EUA	Harvard University (Universidade de Harvard – Estados Unidos da América)
Ibmec-RJ	Faculdades do Instituto Brasileiro de Mercado de Capitais (Rio de Janeiro)
Ifal	Instituto Federal de Alagoas
IFMG	Instituto Federal de Minas Gerais
IFSC	Instituto Federal de Santa Catarina
Insper-SP	Instituto de Ensino e Pesquisa (São Paulo)
ITA-SP	Instituto Tecnológico de Aeronáutica (São Paulo)
MIT-EUA	Massachusetts Institute of Technology (Instituto de Tecnologia de Massachusetts – Estados Unidos da América)
OBM	Olimpíada Brasileira de Matemática
Obmep	Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
OBMJ-ROM	Olimpíada Balcânica de Matemática Pentru Juniori (Olimpíada Balcânica Júnior de Matemática – Romênia)
OCM-PB	Olimpíada Campinense de Matemática (Paraíba)
OIM-CAN	Olimpíada Internacional de Matemática (Canadá)
OIM-ING	Olimpíada Internacional de Matemática (Inglaterra)
OIM-URSS	Olimpíada Internacional de Matemática (União das Repúblicas Socialistas Soviéticas)
OMA	Olimpíada Matemática Argentina (Olimpíada de Matemática da Argentina)
Omerj	Olimpíadas de Matemática do Estado do Rio de Janeiro
OMRN	Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Norte
OMRS	Olimpíada de Matemática do Rio Grande do Sul
OMSC	Olimpíada de Matemática de Santa Catarina
OPM-PB	Olimpíada Pessoense de Matemática (Paraíba)
OPM-SP	Olimpíada Paulista de Matemática (São Paulo)
PUC-MG	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-RJ	Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS	Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP	Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Udesc	Universidade do Estado de Santa Catarina
Uece	Universidade Estadual do Ceará
UEFS-BA	Universidade Estadual de Feira de Santana (Bahia)
UEG-GO	Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR	Universidade Estadual de Londrina (Paraná)
Uema	Universidade Estadual do Maranhão
UEM-PR	Universidade Estadual de Maringá (Paraná)
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
Uerj	Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UERN	Universidade do Estado do Rio Grande do Norte
Uesc-BA	Universidade Estadual de Santa Cruz (Bahia)
Uespi	Universidade Estadual do Piauí
Ufac	Universidade Federal do Acre
Ufal	Universidade Federal de Alagoas
Ufam	Universidade Federal do Amazonas
UFC-CE	Universidade Federal do Ceará
UFCG-PB	Universidade Federal de Campina Grande (Paraíba)
Ufes	Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ	Universidade Federal Fluminense (Rio de Janeiro)
UFG-GO	Universidade Federal de Goiás
Ufla-MG	Universidade Federal de Lavras (Minas Gerais)
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso
Ufop-MG	Universidade Federal de Ouro Preto (Minas Gerais)
UFPA	Universidade Federal do Pará
UFPB	Universidade Federal da Paraíba
UFPE	Universidade Federal de Pernambuco
Ufpel-RS	Universidade Federal de Pelotas (Rio Grande do Sul)
UFPR	Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRN	Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFRR	Universidade Federal de Roraima
UFSJ-MG	Universidade Federal de São João del-Rei (Minas Gerais)
UFSM-RS	Universidade Federal de Santa Maria (Rio Grande do Sul)
UFTM-MG	Universidade Federal do Triângulo Mineiro (Minas Gerais)
UFU-MG	Universidade Federal de Uberlândia (Minas Gerais)
Uneb-BA	Universidade do Estado da Bahia
Unemat-MT	Universidade do Estado de Mato Grosso
Unicamp-SP	Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unifor-CE	Fundação Edson Queiroz Universidade de Fortaleza (Ceará)
Unifran-RS	Centro Universitário Franciscano (Rio Grande do Sul)
Unimontes-MG	Universidade de Montes Claros (Minas Gerais)
Unir-RO	Universidade Federal de Rondônia
Unisa-SP	Universidade de Santo Amaro (São Paulo)
Unisc-RS	Universidade de Santa Cruz do Sul (Rio Grande do Sul)
UPE	Universidade de Pernambuco
Usamo	USA Mathematical Olympiad (Olimpíada de Matemática dos Estados Unidos da América)
Vunesp-SP	Fundação para o Vestibular da Unesp (São Paulo)

PROJETO
MÚLTIPLO

Os Cadernos de Estudo do **Projeto Múltiplo** foram elaborados para auxiliar o estudante a revisar os conteúdos abordados e verificar sua aprendizagem, trazendo quadros-resumo dos principais assuntos e centenas de questões de vestibulares e de olimpíadas. Na área de Língua Portuguesa, as questões de vestibulares são seguidas da seção "O desafio da redação".

editora ática

ISBN 978-8508167524
9 788508 167524