# EXTENSIVO 2021.2

# MATEMÁTICA PARA EEAR

GEOMETRIA PLANA I

**Prof. Victor So**

**AULA 02**

**06 DE OUTUBRO DE 2020**

# Sumário

# INTRODUÇÃO

Olá,

Vamos iniciar o estudo da Geometria Plana. Nessa aula, veremos alguns conceitos primitivos como o que é um ponto, reta e plano. Estudaremos os principais postulados da geometria plana, segmentos de reta, razões de secção e razão harmônicas. Também estudaremos ângulos e um pouco de triângulos.

Nesse curso, tentei deixar os comentários das questões bem detalhados, então, se você for um aluno avançado ou intermediário, apenas confira o gabarito e tente resolver todas as questões dessa aula. Lembre-se! O importante é ganhar velocidade na hora da prova, então, tente resolver a maior quantidade de exercícios possível e não perca tempo verificando questões que você já sabe! Caso você seja um aluno iniciante, você pode conferir o passo a passo das resoluções e aprender com elas. Sem mais delongas, vamos começar!


# 1. GEOMETRIA EUCLIDIANA PLANA

A geometria euclidiana, também conhecida como geometria plana, é a parte da matemática que estuda a construção e propriedades de figuras planas como triângulos, circunferência, quadriláteros etc.

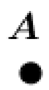
Antes de iniciar, devemos aprender as noções primitivas de ponto, reta e plano e os postulados que relacionam esses entes geométricos.

## 1.1. NOÇÕES PRIMITIVAS

As noções primitivas são apresentadas sem definição. Vejamos:

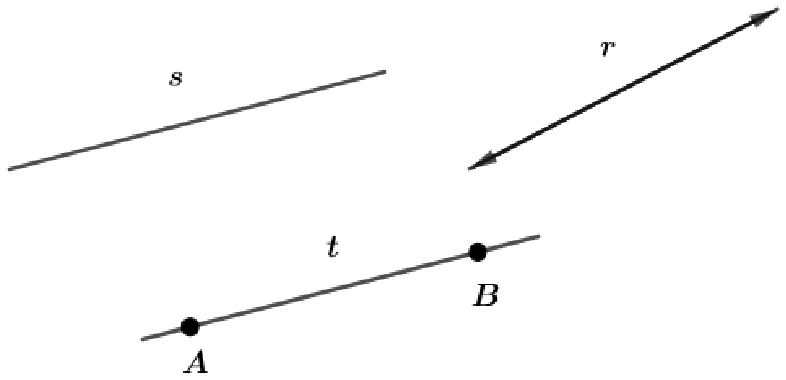
### 1.1.1. PONTO

Representamos o ponto por letras maiúsculas do alfabeto: $A, B, C, D, E, \ldots$ Devemos entender o ponto como a menor parte dos entes geométricos. Ele é adimensional.



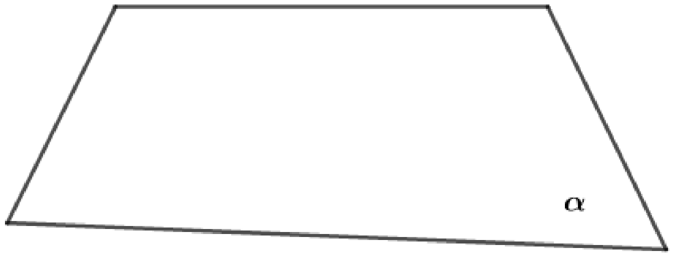

## 1.1.2. RETA

Usamos as letras minúsculas do alfabeto para representar uma reta: $a, b, c, d$, ... A reta é o ente geométrico cujas extremidades não possuem limites, ela é contínua em ambos os lados. Por esse motivo, podemos usar setas para indicar a continuidade da reta nos dois sentidos. No exemplo abaixo, temos as retas $r, s, t$. No caso da reta $t$, $\overline{AB}$ é um segmento de reta.




## 1.1.3. PLANO

Usualmente, representamos o plano com letras minúsculas gregas: $\alpha, \beta, \gamma$, ... Assim como a reta, ele deve ser entendido como um plano ilimitado sem bordas que o limite.



## 1.2. POSTULADOS

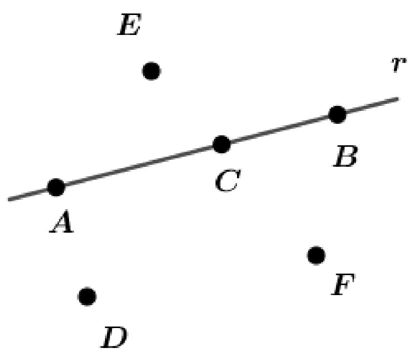
Postulados, também conhecido como axiomas, são proposições primitivas que dispensam demonstrações. Elas são aceitas como verdades incontestáveis. Vamos estudá-las.

### 1.2.1. POSTULADO DA EXISTÊNCIA

**Numa reta, existem infinitos pontos dentro e fora dela.**

**Num plano, existem infinitos pontos.**

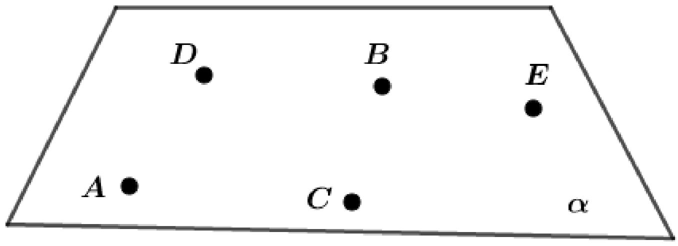
Vejamos alguns exemplos:




Nesse caso, os pontos $A, B, C$ estão localizados dentro da reta $r$ e os pontos $D, E, F$ estão fora dela. Simbolicamente, podemos dizer que:

$$A, B, C \in r$$

$$D, E, F \notin r$$




$$A, B, C, D, E \in \alpha$$

No plano $\alpha$, temos infinitos pontos.

## 1.2.2. POSTULADO DA DETERMINAÇÃO

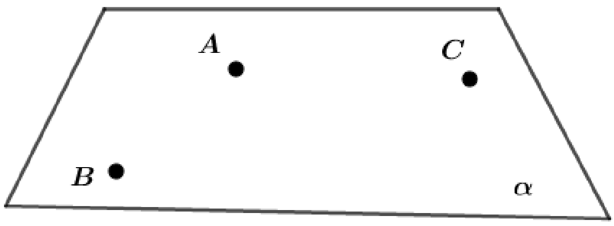
**Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.**

**Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.**

Exemplos:


Se $A \neq B$, $\exists r$ tal que $r = \overleftrightarrow{AB}$.

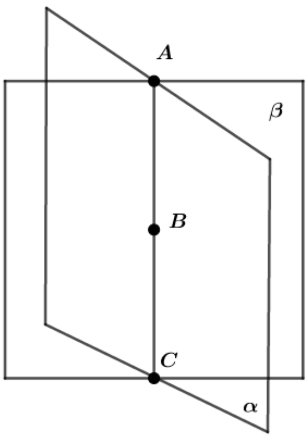
Os pontos $A, B$ determinam uma única reta $r$.




Se $A, B, C$ são não colineares, então $\exists \alpha$ tal que $\alpha = (A, B, C)$.

Nesse caso, temos 3 pontos não colineares, isto é, não pertencentes a uma mesma reta. Elas determinam um único plano $\alpha$.

Vejamos o caso de 3 pontos colineares:

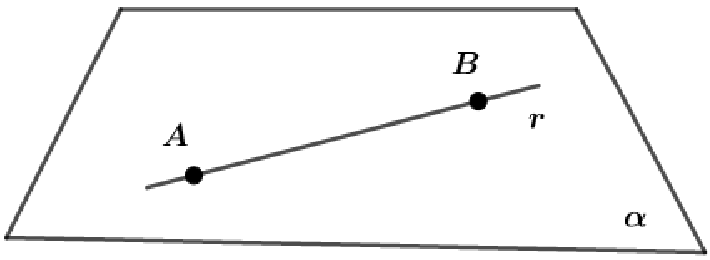



3 pontos colineares não determinam um único plano, já que podemos ter vários planos passando por eles.

## 1.2.3. POSTULADO DA INCLUSÃO

**Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.**

Exemplo:

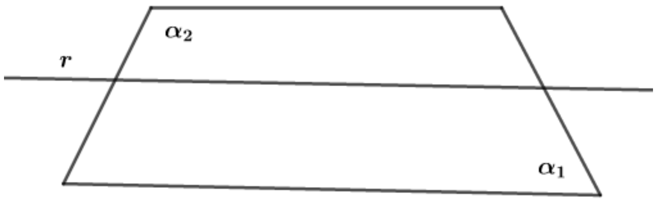


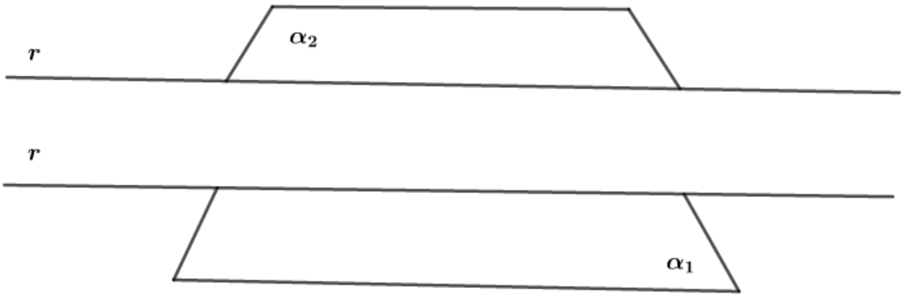

Se $A \neq B \in \alpha$, então $r = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow r \subset \alpha$.

## 1.2.4. POSTULADO DA SEPARAÇÃO

**Toda reta $r$ de um plano $\alpha$ separa-o em dois semiplanos $\alpha_1$ e $\alpha_2$ e a origem dos semiplanos é a reta dada.**

Exemplo:




Perceba que $r$ divide o plano em dois semiplanos: $\alpha_1$ e $\alpha_2$.

## 1.2.5. POSTULADOS DE EUCLIDES

Os postulados de Euclides são divididos em cinco:


**Postulado I:** Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os une.

**Postulado II:** Qualquer segmento de reta pode ser prolongado a uma reta.

**Postulado III:** Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência cujo centro é o ponto dado e o raio é a distância dada.

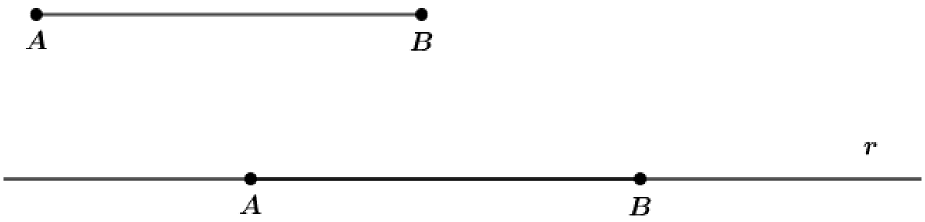
**Postulado IV:** Todos os ângulos retos são iguais.

**Postulado V:** Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

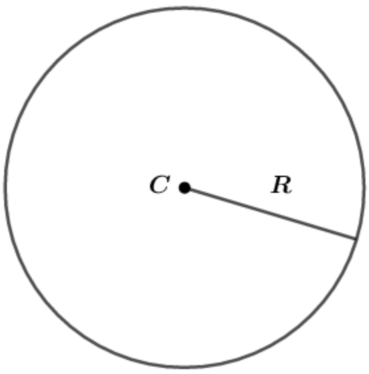
**Comentários:**

**Postulado I:** Esse postulado é semelhante ao postulado da determinação.

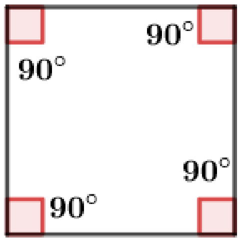
**Postulado II:** Se prolongarmos infinitamente um segmento de reta, podemos obter uma reta:




**Postulado III:**



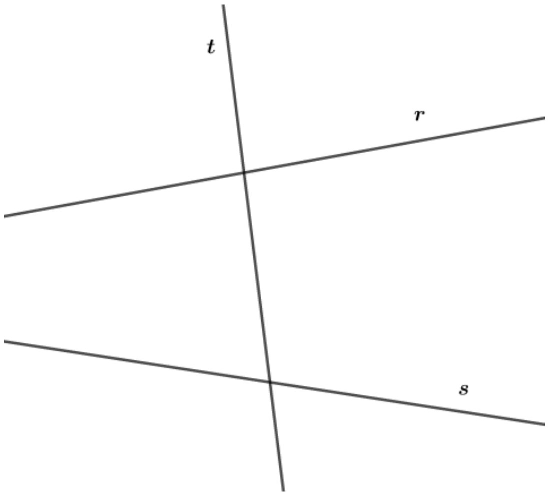
**Postulado IV:**




**Postulado V:** Vamos interpretar o texto e desenhar o que está escrito.

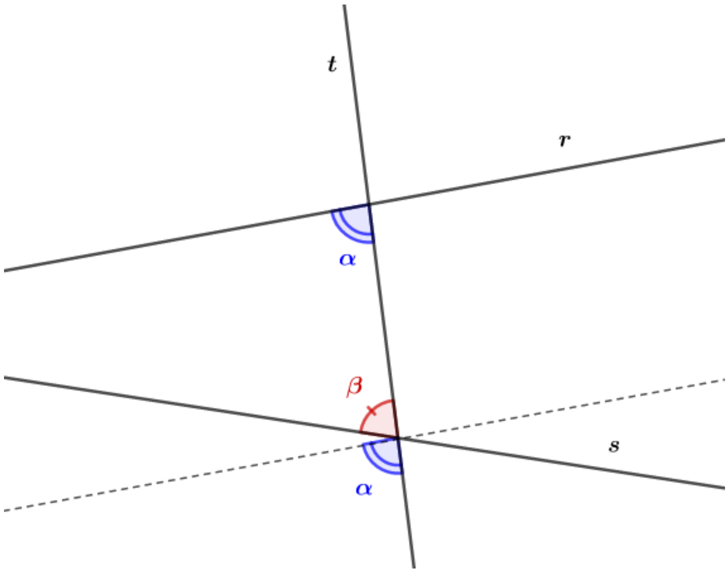
"Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos..."

De acordo com essa parte do texto, temos a seguinte figura:

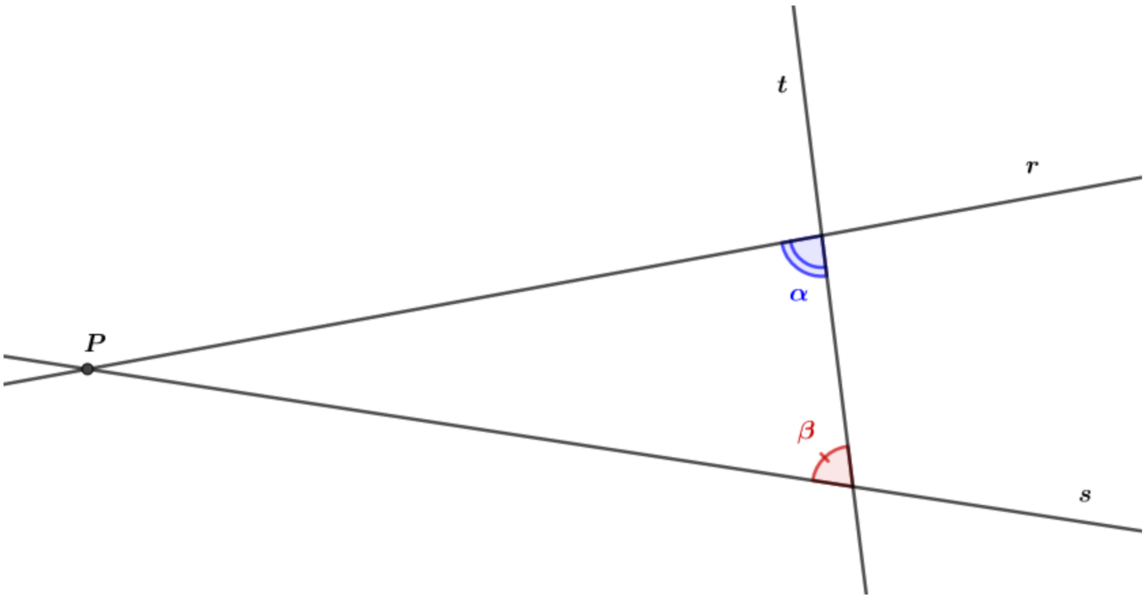



A reta $t$ intercepta as retas $r$ e $s$.

O lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos $(180°)$, no exemplo acima, é o lado esquerdo, veja:




Perceba que $\alpha + \beta < 180°$. Assim, o prolongamento das retas se encontrará no lado onde a soma desses ângulos é menor que $180°$. O prolongamento das retas $r$ e $s$ se encontram no ponto $P$:




Esse postulado é conhecido como Postulado das Paralelas. Segundo o matemático Playfair, temos um axioma equivalente ao quinto postulado de Euclides:

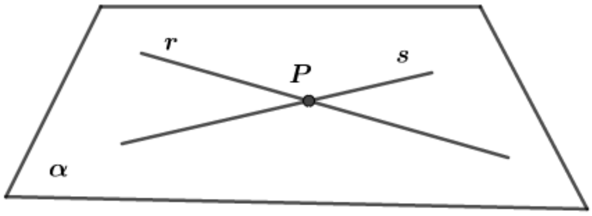
Dado um ponto $P$ que não está contido numa reta $r$, existe uma única reta $s$ no plano de $P$ e $r$ tal que $s$ contém $P$ e $s \cap r = \emptyset$.

Esse axioma diz que existe uma única reta $s$ paralela à reta $r$ que passa pelo ponto $P$ fora de $r$.

## 1.3. DEFINIÇÕES

### 1.3.1. RETAS CONCORRENTES

Duas retas distintas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

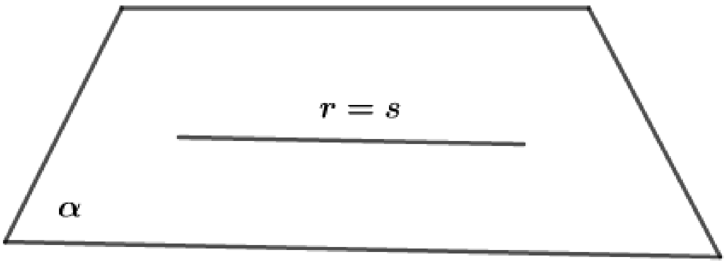



$$r \cap s = \{P\}$$

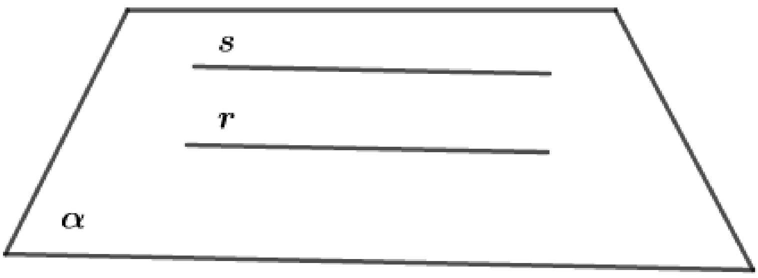
### 1.3.2. RETAS PARALELAS

Se as retas $r$ e $s$ são paralelas e distintas entre si, então $r \cap s = \emptyset$. Simbolicamente, $r//s$ representa que a reta $r$ é paralela à reta $s$. Temos duas possibilidades para $r//s$:

1) $r$ e $s$ são coincidentes:

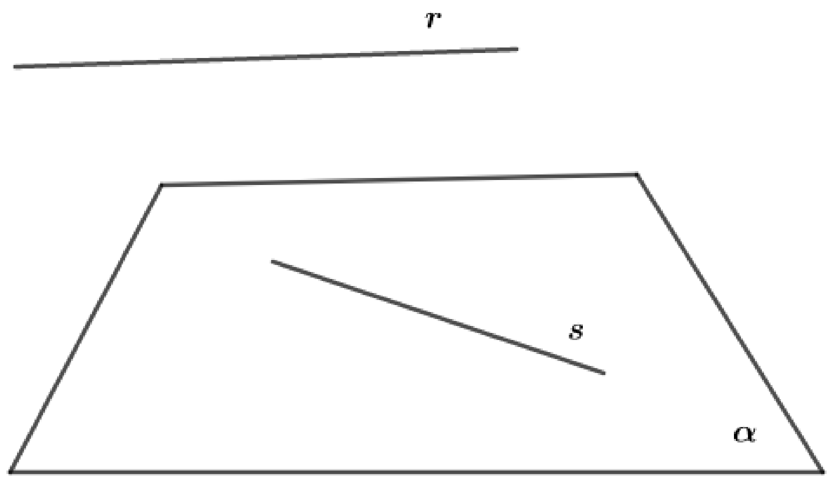



2) $r$ e $s$ são distintas:



### 1.3.3. RETAS REVERSAS

Duas retas são reversas se, e somente se, não pertencem a um mesmo plano.




($r$ e $s$ são reversas) $\Leftrightarrow$ ($\nexists \alpha$ tal que $r, s \subset \alpha$ e $r \cap s = \emptyset$)

Perceba que retas reversas não se interceptam e não podem ser paralelas entre si.

## 2. SEGMENTO DE RETA

Vimos que um segmento de reta é uma parte de uma reta e que a reta é infinita por definição. Vamos estudar as notações usuais para os diferentes tipos de retas:

Reta $\overleftrightarrow{AB}$:


Segmento de reta $\overline{AB}$:


Semirreta $\overrightarrow{AB}$:


Semirreta $\overrightarrow{BA}$:


Usualmente, representamos a medida do segmento $\overline{AB}$ por $med(\overline{AB})$ ou simplesmente $AB$.

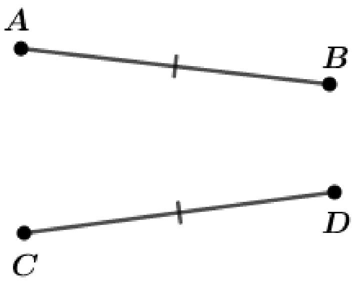
## 2.1. CLASSIFICAÇÃO DOS SEGMENTOS

### 2.1.1. CONGRUENTES

Dois segmentos de reta são congruentes quando eles possuem as mesmas medidas. Usamos o símbolo ≡ para indicar a congruência.

Exemplo:

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$$




### 2.1.2. COLINEARES

Dois segmentos de reta são colineares quando eles pertencem a uma mesma reta suporte.

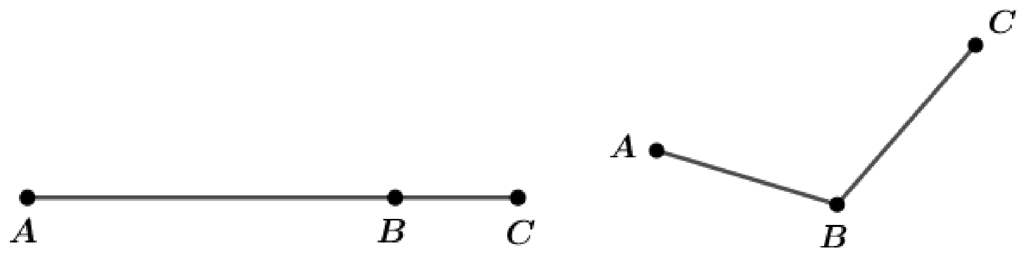
Exemplo:


### 2.1.3. CONSECUTIVOS

Dois segmentos de reta são consecutivos quando eles possuem uma extremidade comum.

Exemplo:

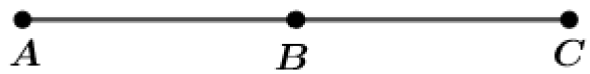
$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos




## 2.1.4. ADJACENTES

Dois segmentos de reta são adjacentes quando são colineares e consecutivos e possuem apenas uma extremidade comum.

Exemplo:




$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são adjacentes, pois possuem apenas o ponto $B$ comum:

$\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{B\}$


$MN$ e $NP$ não são adjacentes, pois possuem mais de uma extremidade em comum:

$$\overline{MN} \cap \overline{NP} = \overline{NP}$$

## 2.1.5. COMENSURÁVEIS

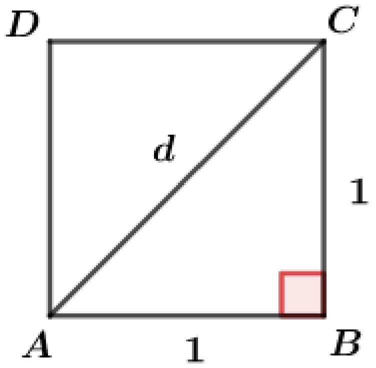
Dizemos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis se, e somente se, existe uma unidade de segmento $u \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\overline{AB} = n \cdot u$ e $\overline{CD} = m \cdot u$ com $m, n \in \mathbb{N}^*$. De modo mais simples, comensurável significa que algo pode ser medido. Assim, se $AB$ é comensurável, podemos escrevê-lo como um múltiplo natural de uma unidade de segmento.

Também podemos dizer que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis quando a razão entre eles for um número racional. Assim, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{n \cdot u}{m \cdot u} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_+^*$$

## 2.1.6. INCOMENSURÁVEIS

Quando não pudermos medir os segmentos, dizemos que eles são incomensuráveis. Podemos tomar a diagonal e o lado de um quadrado como exemplo:




Como o triângulo $ABC$ é retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor da diagonal:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

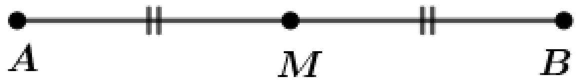
Assim, fazendo a razão entre a diagonal e o lado do quadrado, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}_+^*$$

Logo, como a razão entre a diagonal e o lado do quadrado não é um número racional, dizemos que o lado do quadrado não é comensurável com sua diagonal.

## 2.2. PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Um ponto $M$ é chamado de ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ quando $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ e $M$ está entre $A$ e $B$.




Vamos provar a unicidade do ponto médio do segmento $\overline{AB}$:

Supondo que o ponto médio não é único, podemos ter os pontos médios $M$ e $N$ distintos tal que:

$\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ e $\overline{AN} \equiv \overline{NB}$

Temos dois casos:

Caso 1)


$M$ está entre $A$ e $N$, então $\overline{AN} > \overline{AM}$

$N$ está entre $M$ e $B$, então $\overline{MB} > \overline{NB}$

$$\Rightarrow \overline{AN} > \overline{AM} \equiv \overline{MB} > \overline{NB}$$

$$\Rightarrow \overline{AN} > \overline{NB}$$

Absurdo! Pois, pela hipótese $\overline{AN} \equiv \overline{NB}$.

Caso 2)


$N$ está entre $A$ e $M$, então $\overline{AM} > \overline{AN}$

$M$ está entre $N$ e $B$, então $\overline{NB} > \overline{MB}$

$$\Rightarrow \overline{AM} > \overline{AN} \equiv \overline{NB} > \overline{MB}$$

$$\Rightarrow \overline{AM} > \overline{MB}$$

Absurdo! Pois, pela hipótese $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

Portanto, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é único.

# 2.3. RAZÃO DE SECÇÃO DE UM SEGMENTO

## 2.3.1. INTERNA

Dizemos que $M$ divide o segmento $\overline{AB}$ internamente na razão $k$ quando:

$$\frac{AM}{MB} = k$$


Perceba que $M \in \overline{AB}$ e $AM + MB = AB$. $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são chamados de segmentos aditivos.

Exemplo:


$$\frac{AM}{MB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

## 2.3.2. EXTERNA

Dizemos que $N$ divide o segmento $AB$ externamente na razão $k$ quando:

$$\frac{AN}{NB} = k$$


Nesse caso, $N \notin \overline{AB}$, $N \in \overleftrightarrow{AB}$ e $|AN - NB| = AB$. $\overline{AN}$ e $\overline{NB}$ são segmentos subtrativos.

Exemplo:

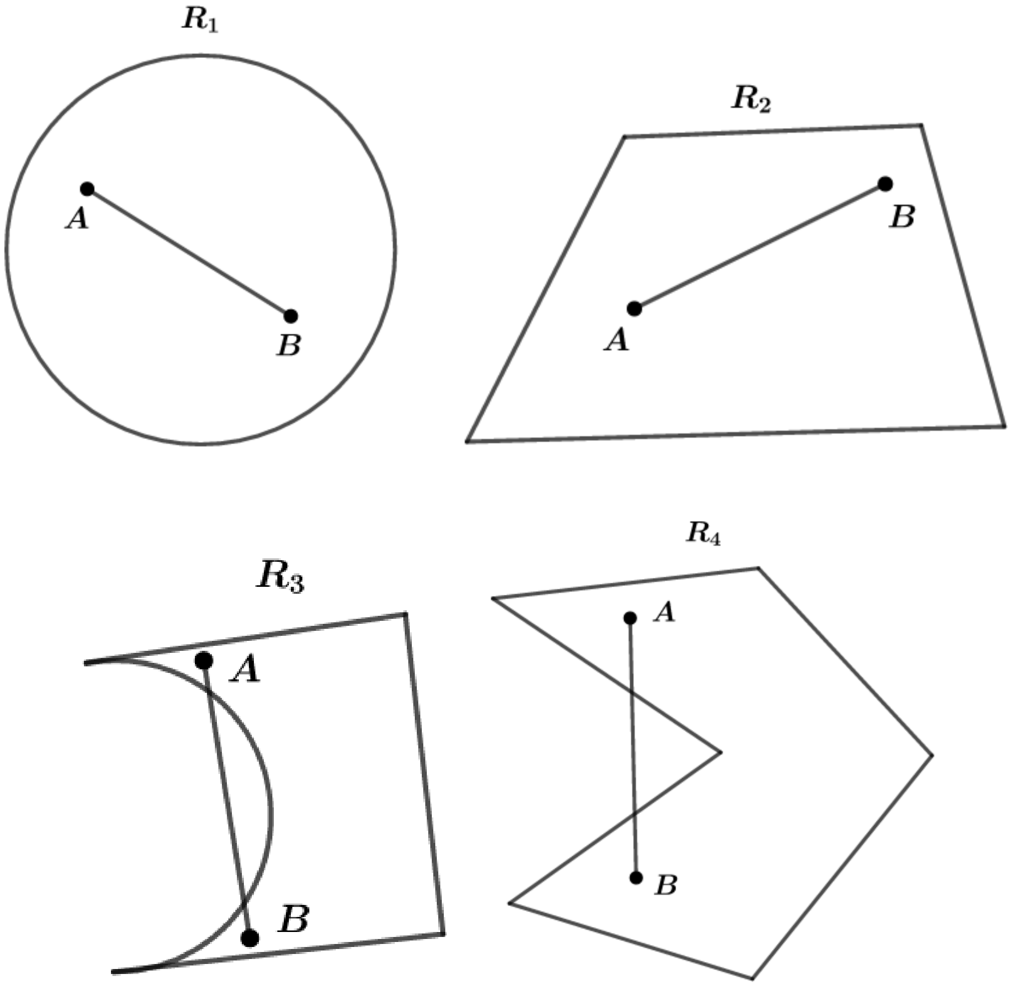
$$\frac{AN}{NB} = \frac{6}{2} = 3$$

# 3. ÂNGULOS

## 3.1. REGIÃO CONVEXA E REGIÃO CÔNCAVA

Um conjunto de pontos é convexo se, e somente se, para todo par de pontos $A$ e $B$ do conjunto, o segmento $\overline{AB}$ está inteiramente contida no conjunto. Caso contrário, esse conjunto de pontos é côncavo.

Exemplos:




Perceba que para os conjuntos $R_1$ e $R_2$, todos os pontos $A$ e $B$ dentro desses conjuntos estão inteiramente contidos no conjunto. Isso não ocorre para os conjuntos $R_3$ e $R_4$. Logo, os conjuntos $R_1$ e $R_2$ são convexos e os conjuntos $R_3$ e $R_4$ são côncavos.

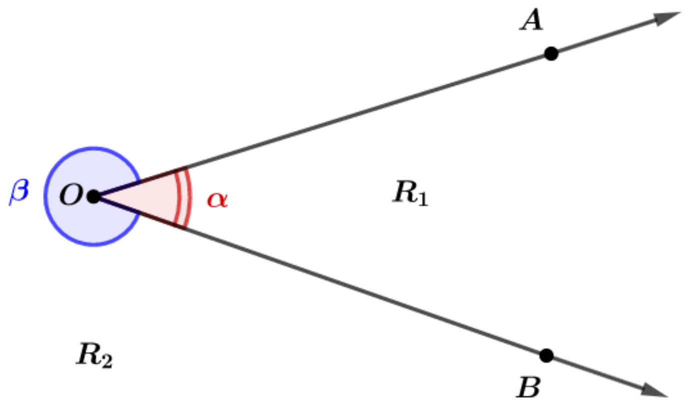
Usando símbolos matemáticos:

$$\boxed{\boldsymbol{R} \text{ é } \boldsymbol{convexa} \Leftrightarrow (\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B} \rightarrow \overline{\boldsymbol{AB}} \subset \boldsymbol{R})}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R} \text{ é } \boldsymbol{c\hat{o}ncava} \Leftrightarrow (\exists \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B} \rightarrow \overline{\boldsymbol{AB}} \not\subset \boldsymbol{R})}$$

## 3.2. DEFINIÇÃO DE ÂNGULO

Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas não colineares de mesma origem.




O ponto $O$ é o vértice do ângulo e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.

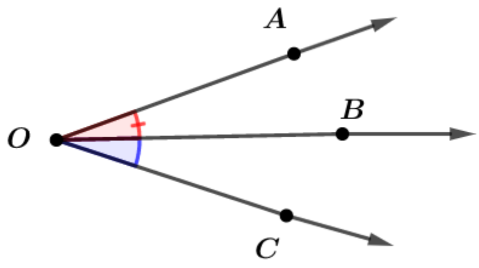
Perceba que, caso as semirretas não sejam opostas, o ângulo determina duas regiões angulares, um convexo e um côncavo. A região interna do ângulo $R_1$ é convexa e a região externa $R_2$ é côncava. $\alpha$ é a notação usada para representar o ângulo da região convexa e $\beta$ é o ângulo da região côncava. Também podemos usar a notação $\alpha = A\hat{O}B = \hat{O}$.

## 3.3. CLASSIFICAÇÃO DOS ÂNGULOS

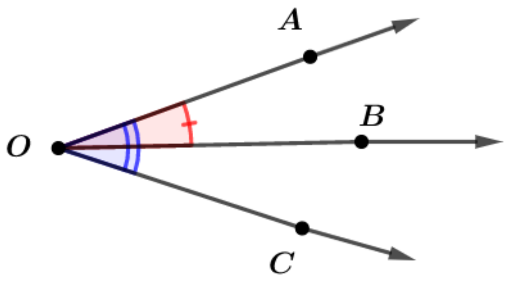
### 3.3.1. ÂNGULO ADJACENTE

Dois ângulos são adjacentes se, e somente se, não tem pontos internos comuns.

Exemplos:




$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes

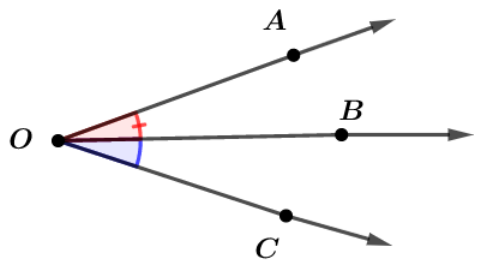



$A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ não são adjacentes, pois $A\hat{O}B$ possui pontos internos comuns com $A\hat{O}C$

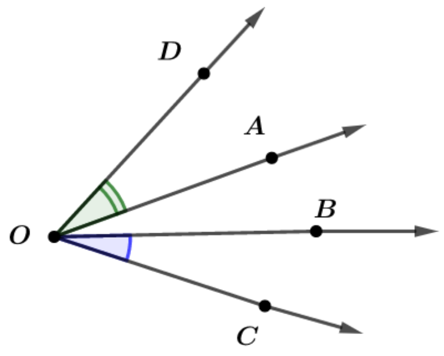
## 3.3.2. ÂNGULO CONSECUTIVO

Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles coincide com o lado do outro.

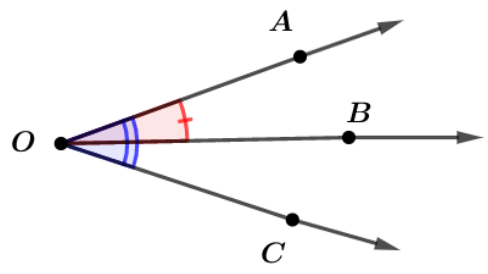
Exemplos:




$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos, pois possuem o lado $\overrightarrow{OB}$ em comum




$A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ não são consecutivos, pois não possuem lado em comum

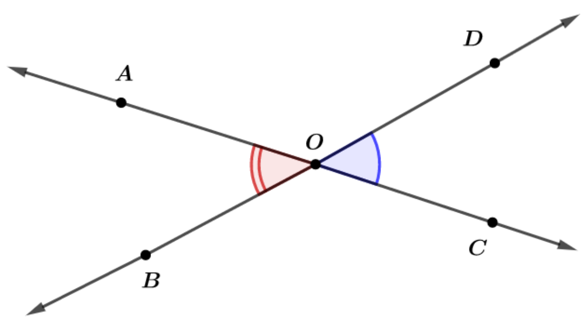



$A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ são consecutivos, pois possuem o lado $\overrightarrow{OA}$ em comum

## 3.3.3. ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE

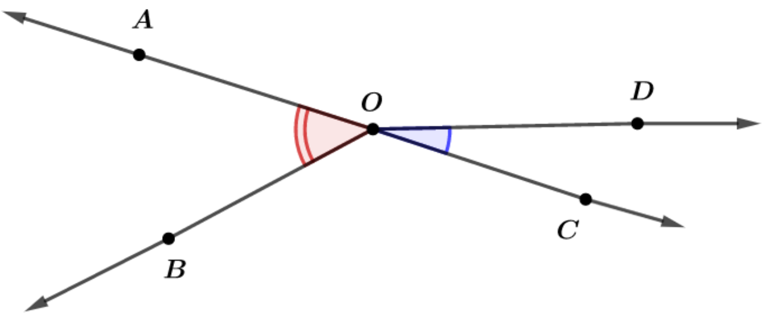
Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um deles são as semirretas opostas dos lados do outro. Consequentemente, esses ângulos são iguais.

Exemplos:



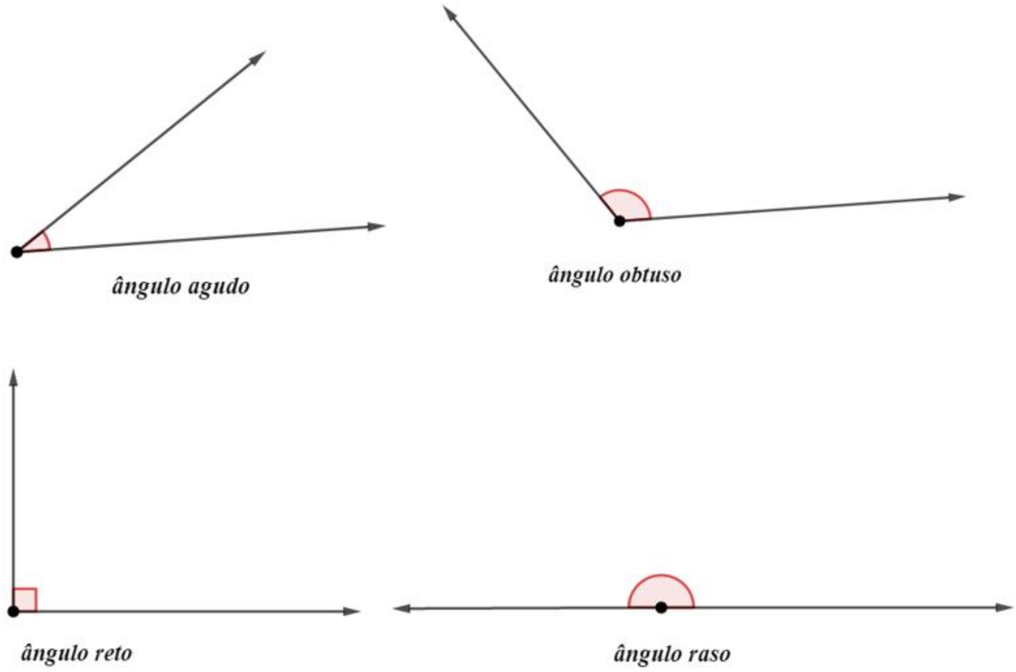

$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice

Como $\overrightarrow{OD}$ é o oposto de $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ é o oposto de $\overrightarrow{OA}$, temos $A\hat{O}B + A\hat{O}D = 180°$ e $C\hat{O}D + A\hat{O}D = 180°$, logo $A\hat{O}B = C\hat{O}D$.




$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ não são opostos pelo vértice, pois o lado $\overrightarrow{OD}$ não é a semirreta oposta de $\overrightarrow{OB}$

## 3.3.4. ÂNGULO RETO, AGUDO, OBTUSO E RASO




**Ângulo agudo** é todo ângulo menor do que $90°$.

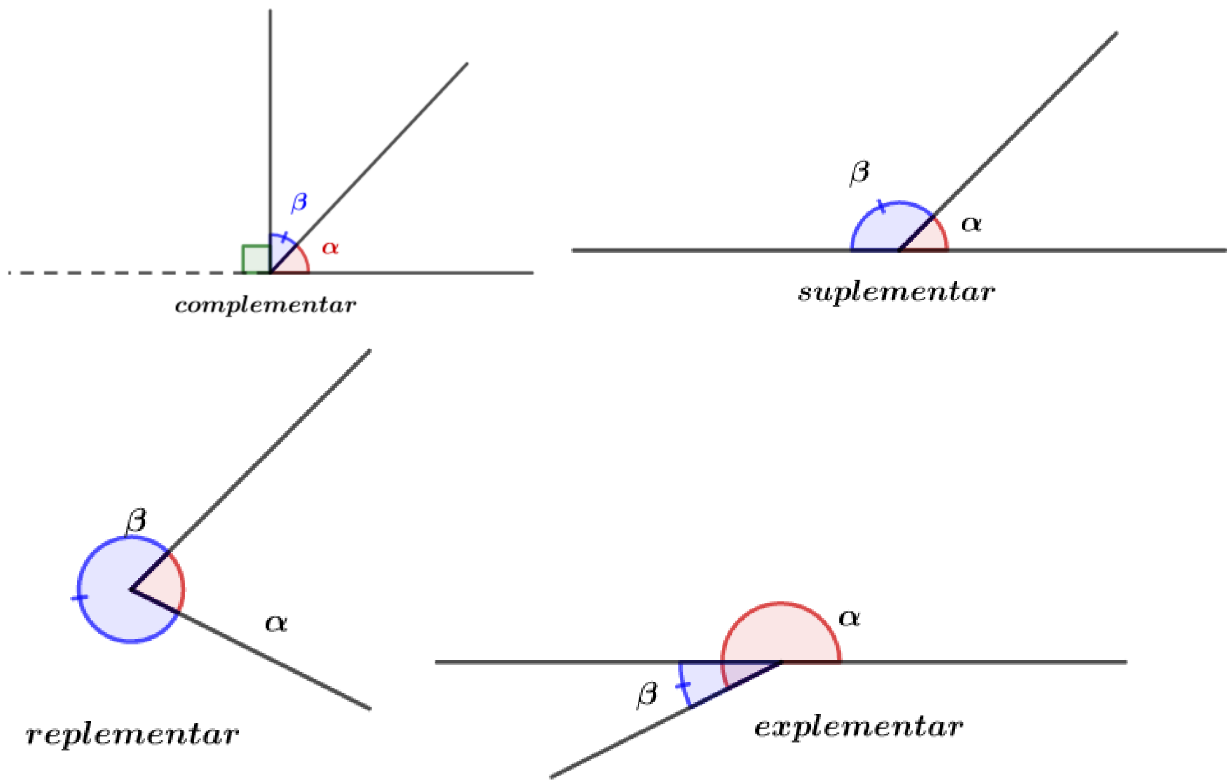
**Ângulo obtuso** é todo ângulo maior do que $90°$.

**Ângulo reto** é todo ângulo igual a $90°$.

**Ângulo raso** é todo ângulo igual a $180°$.

| Tipo de Ângulo | Condição |
|---|---|
| Agudo | $< 90°$ |
| Obtuso | $> 90°$ |
| Reto | $= 90°$ |
| Raso | $= 180°$ |

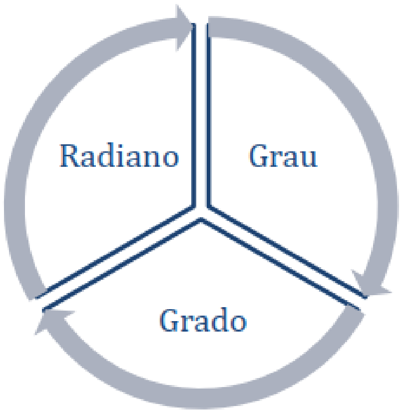
## 3.3.5. ÂNGULO COMPLEMENTAR, SUPLEMENTAR, REPLEMENTAR E EXPLEMENTAR



| Classificação para $\alpha$ e $\beta$ | Condição |
|---|---|
| Complementar | $\alpha + \beta = 90°$ |
| Suplementar | $\alpha + \beta = 180°$ |
| Replementar | $\alpha + \beta = 360°$ |
| Explementar | $\alpha - \beta = 180°$ |

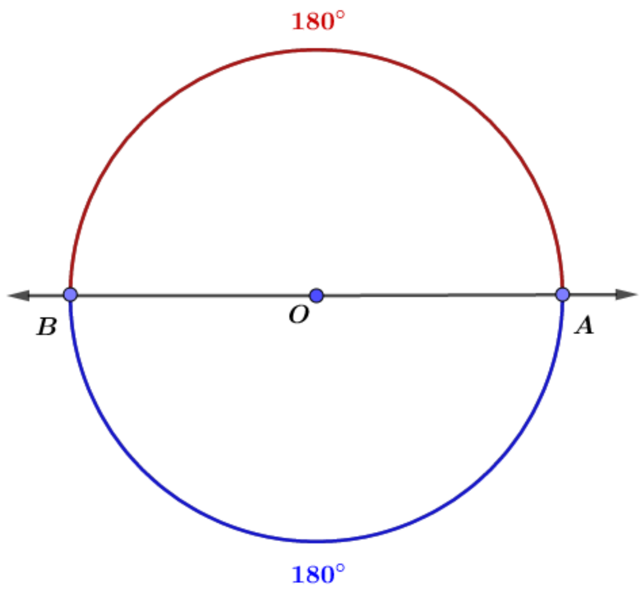
## 3.4. UNIDADES USUAIS DE MEDIDAS

Atualmente, temos três unidades de medidas mais famosos: grau, grado e radiano. Vamos estudar cada um deles:




### 3.4.1. Grau

Um grau ($1°$) é a unidade de medida determinada pela divisão de uma circunferência em 360 partes iguais. Assim, se dividimos uma circunferência no meio, cada arco que obtemos terá a medida de 180°.




O grau pode ser subdividido em duas outras:

Definimos um minuto por $1'$ e ele equivale a $1/60$ do ângulo de um grau.

Um segundo é representado por $1''$ e equivale a 1/60 do ângulo de um minuto.

Dessa forma, temos as seguintes relações:

$$1' = \frac{1°}{60} \; e \; 1'' = \frac{1'}{60}$$

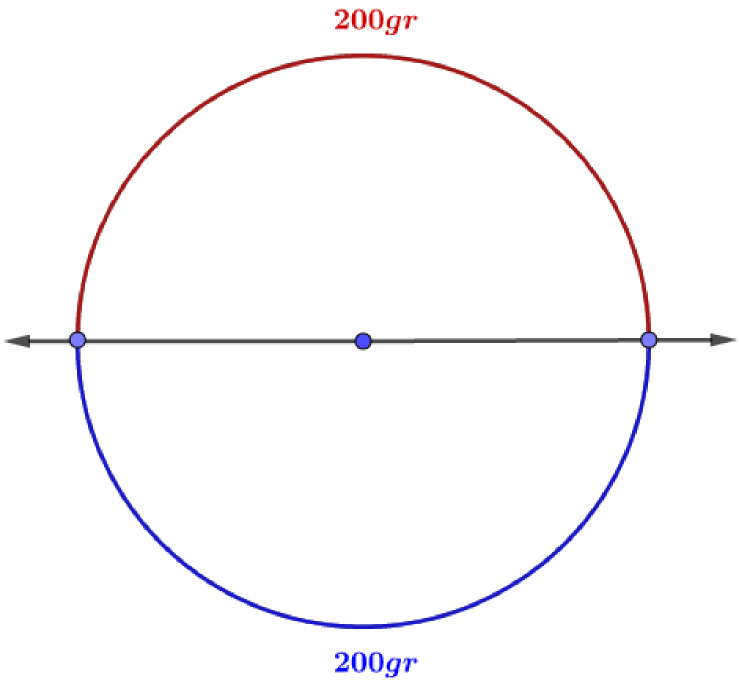
$$\boxed{1° = 60' \; (60 \; minutos)}$$

$$\boxed{1' = 60'' \; (60 \; segundos)}$$

As medidas acima são conhecidas como sistema sexagesimal.

## 3.4.2. GRADO

Um grado $(1 \; gr)$ é a unidade de medida determinada pela divisão da circunferência em 400 partes iguais. Dessa forma, se dividimos a circunferência no meio, cada arco terá a medida de $200 \; gr$.




## 3.4.3. RADIANO

Um radiano $(1\,rad)$ é a unidade de medida igual ao comprimento do raio da circunferência. O comprimento total de uma circunferência é dado por:

$$C = 2\pi r$$

Onde $r$ é o raio da circunferência e $C$ é o seu comprimento total.

$\pi$, lê-se "pi", e seu valor numérico é aproximadamente:

$$\pi \cong 3{,}14$$

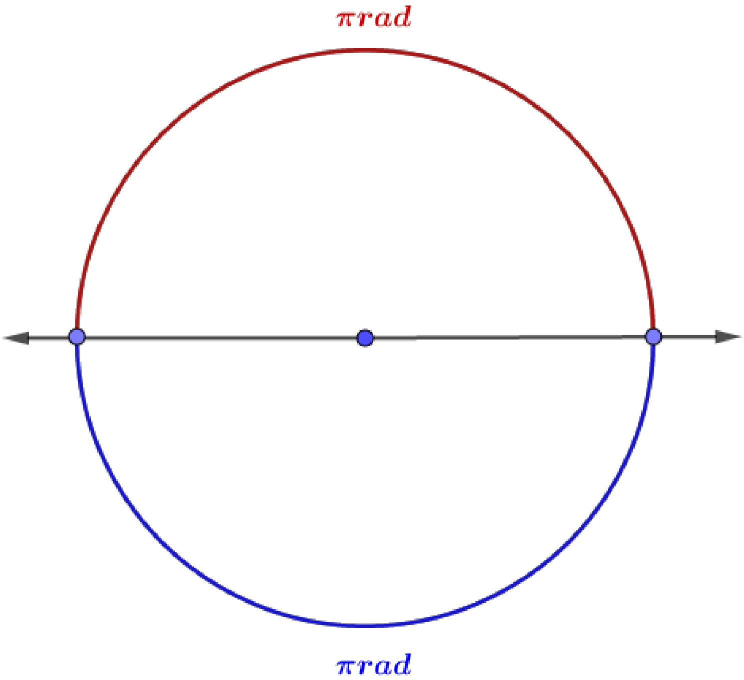
Então, usando a fórmula:

$$\widehat{AB} = \frac{\textbf{comprimento de } \widehat{AB}}{\textbf{comprimento da unidade}}$$

E tomando $\widehat{AB}$ como o arco de uma volta completa na circunferência, temos:

$$\widehat{AB} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

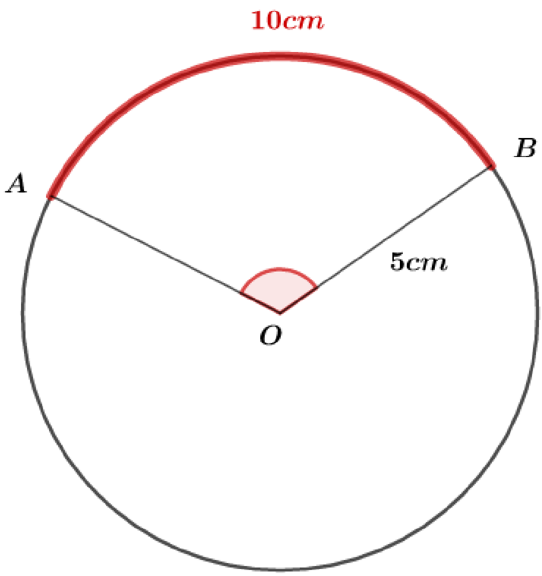
Assim, o arco de uma volta completa corresponde a $2\pi\,rad$.




Veja o exemplo:

1) Um arco de circunferência $\widehat{AB}$ mede 10 cm e o raio da circunferência mede 5 cm. Calcule a medida do arco em radianos:

Temos a seguinte figura:




Vamos usar a fórmula da medida do arco:

$$\widehat{AB} = \frac{comprimento\ \widehat{AB}}{comprimento\ raio}$$

$$A\hat{O}B = \frac{10\ cm}{5\ cm} = 2\ rad$$

Vimos os três principais tipos de medidas usadas para os ângulos. Podemos estabelecer a seguinte equivalência entre elas:

$$2\pi\ rad = 360° = 400\ gr$$

A tabela abaixo esquematiza essas relações:

| Grau | Grado | Radiano |
|---|---|---|
| $360°$ | $400gr$ | $2\pi\ rad$ |
| $180°$ | $200gr$ | $\pi\ rad$ |

## 3.5. CONVERSÃO DE UNIDADES DE MEDIDA

Para converter ângulos em sistemas de medidas diferentes, podemos aplicar a regra de três. Sendo $G$ a medida em graus e $g$ a medida em grados, a conversão de graus em radianos é dada por:

$$360° - 400\ gr$$

$$G - g$$

Aplicando a regra de três, temos:

$$360g = 400G$$

$$g = \frac{10}{9}G$$

Para converter graus em radianos, podemos usar a mesma ideia. Sendo $r$ a medida em radianos:

$$360° - 2\pi\ rad$$

$$G - r$$

$$360r = 2\pi G$$

$$r = \frac{\pi}{180}G$$

Vejamos um exemplo:

Vamos fazer a conversão de 240° em grado e em radianos:

Chamando de $x$ e $y$ os valores que queremos calcular, temos:

$$360° - 2\pi \, rad$$

$$240° - x$$

Aplicando a regra de três:

$$360x = 240 \cdot 2\pi$$

$$x = \frac{4}{3}\pi \, rad$$

Analogamente para grados:

$$360° - 400gr$$

$$240° - y$$

$$360y = 240 \cdot 400$$

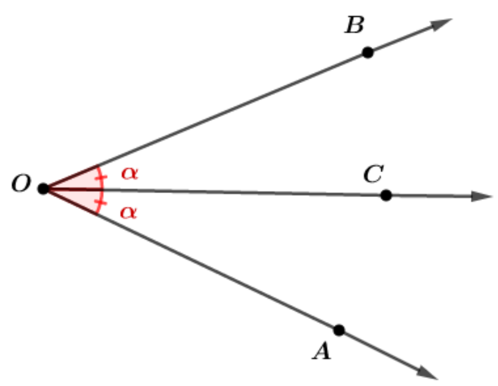
$$y = \frac{800}{3}gr$$

## 3.6. BISSETRIZ

### 3.6.1. DEFINIÇÃO

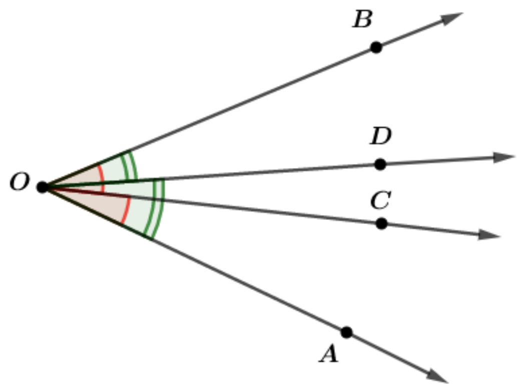
Uma semirreta $OC$ interna ao ângulo $A\hat{O}B$ é bissetriz de $A\hat{O}B$ se, e somente se, $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$. Na prática, a bissetriz é a semirreta localizada internamente na metade do ângulo.

Exemplo:



## 3.6.2. UNICIDADE DA BISSETRIZ

Vamos demonstrar a unicidade da bissetriz. Suponha que $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ sejam semirretas distintas e bissetrizes do ângulo $A\hat{O}B$. Então, temos pela definição:




$$A\hat{O}C = B\hat{O}C$$

$$A\hat{O}D = B\hat{O}D \Rightarrow A\hat{O}C + C\hat{O}D = B\hat{O}C - C\hat{O}D$$

Como $A\hat{O}C = B\hat{O}C$, temos:

$$\cancel{A\hat{O}C} + C\hat{O}D = \cancel{B\hat{O}C} - C\hat{O}D$$

$$C\hat{O}D = -C\hat{O}D$$

$$C\hat{O}D = 0$$

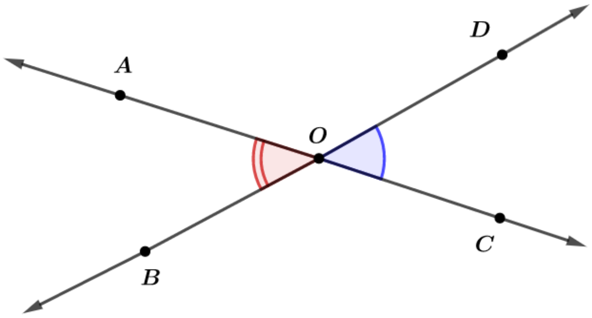
$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$$

Absurdo! Pois, por hipótese $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ são distintos!

Portanto, a bissetriz é única.


**1. Demonstre que dois ângulos opostos pelo vértice são congruentes.**

**Resolução:**




$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice

Como $\overrightarrow{OD}$ é o oposto de $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ é o oposto de $\overrightarrow{OA}$, temos $A\hat{O}B + A\hat{O}D = 180°$ e $C\hat{O}D + A\hat{O}D = 180°$, logo $A\hat{O}B = C\hat{O}D$.

**Gabarito: Demonstração**

---

**2. Determine o complemento, suplemento e replemento do ângulo de $37°32'15''$.**

**Resolução:**

Esse ângulo está no sistema sexagesimal.

Seja $\alpha$, $\beta$ e $\gamma$ o complemento, suplemento e replemento do ângulo dado, respectivamente.

Dessa forma, temos:

$$\alpha = 90° - 37°32'15''$$

Escrevendo 90° no sistema sexagesimal:

$$\alpha = 89°59'60'' - 37°32'15''$$

$$\alpha = 52°27'45''$$

Calculando o suplemento:

$$\beta = 180° - 37°32'15''$$

$$\beta = 179°59'60'' - 37°32'15''$$

$$\beta = 142°27'45''$$

Calculando o replemento:

$$\gamma = 360° - 37°32'15''$$

$$\gamma = 359°59'60'' - 37°32'15''$$

$$\gamma = 322°27'45''$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{Complemento = 52°27'45'', suplemento = 142°27'45''\ e\ replemento = 322°27'45''}$

---

**3. Determine a medida sexagesimal do suplemento do complemento do ângulo de $28,75\ gr$.**

**Resolução:**

Inicialmente, vamos converter o ângulo de grado para graus:

$$28{,}75\ gr - x$$

$$200\ gr - 180°$$

$$x = \frac{180}{200} \cdot 28{,}75°$$

$$x = 25{,}875°$$

Escrevendo $x$ no sistema sexagesimal:

$$1° - 60'$$

$$0{,}875° - y$$

$$y = 60 \cdot 0{,}875' = 52{,}5'$$

$$1' - 60''$$

$$0{,}5' - z$$

$$z = 60 \cdot 0{,}5'' = 30''$$

$$\Rightarrow x = 25°52'30''$$

Seja $\alpha$, o complemento de $x$, então:

$$\alpha = 90° - 25°52'30''$$

$$\alpha = 89°59'60'' - 25°52'30''$$

$$\alpha = 64°7'30''$$

Seja $\beta$, o suplemento de $\alpha$:

$$\beta = 180° - 64°7'30''$$

$$\beta = 179°59'60'' - 64°7'30''$$

$$\beta = 115°52'30''$$

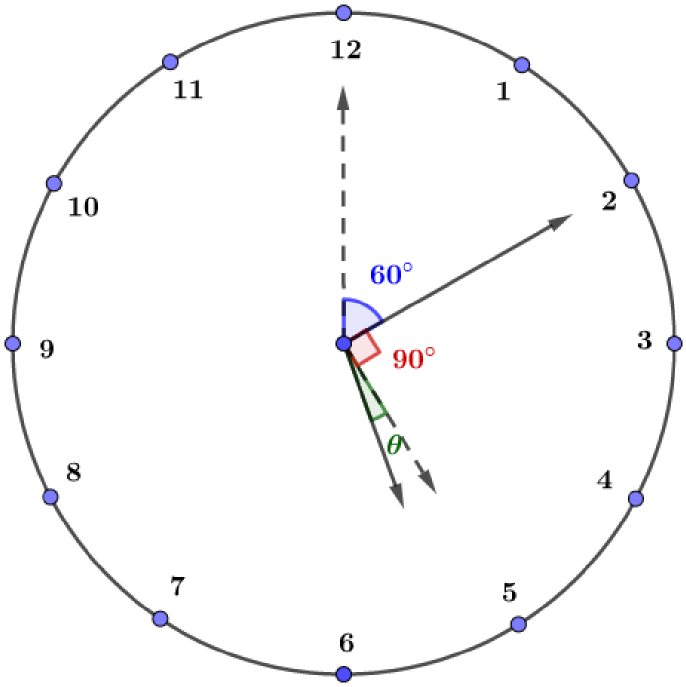
**Gabarito:** $\boldsymbol{115°52'30''}$

---

**4. Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às $5h\ 10min$.**

**Resolução:**

Temos a seguinte situação:




O ponteiro das horas percorre $30°$ quando completa 1 hora e o ponteiro dos minutos percorre $360°$ quando o ponteiro das horas completa 1 hora. Então, quando o ponteiro das horas percorre $1°$, o ponteiro dos minutos percorrerá $\left(\frac{360}{30}\right)° = 12°$.

$\theta$ é o ângulo que o ponteiro das horas percorre quando o ponteiro dos minutos percorre $60°$.

Usando uma regra de três, temos:

$horas - minutos$

$$1° - 12°$$

$$\theta - 60°$$

$$\theta = \left(\frac{60}{12}\right)° = 5°$$

O menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio é dado por:

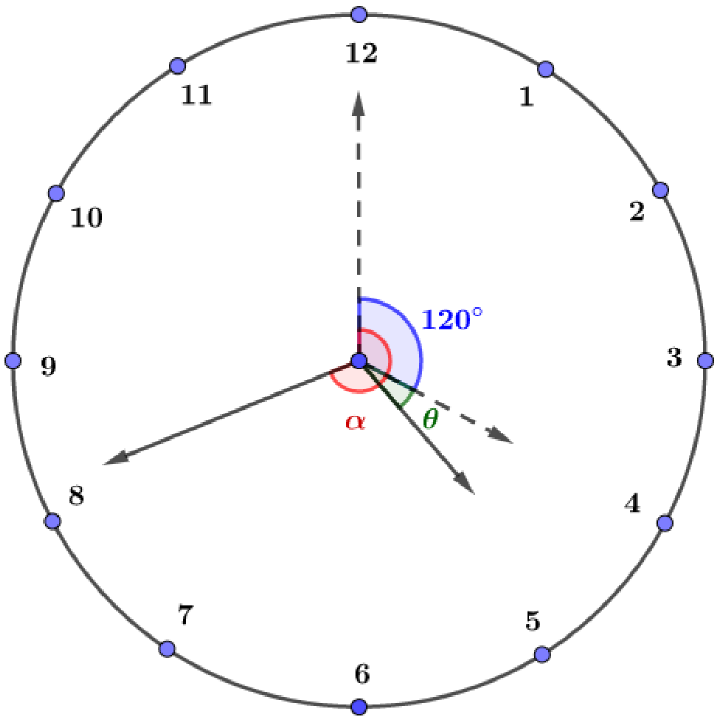
$$\theta + 90° = 95°$$

**Gabarito: $95°$**

**5. Determine o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 4h 42min.**

**Resolução:**

Temos a seguinte situação:




$\alpha$ é o ângulo do ponteiro dos minutos. Usando a regra de três para calcular $\alpha$:

$minutos - graus$

$$60 - 360°$$

$$42 - \alpha$$

$$\alpha = 360 \cdot \frac{42}{60}$$

$$\alpha = 252°$$

Para calcular $\theta$, podemos usar novamente a regra de três:

$horas - minutos$

$$30° - 360°$$

$$\theta - 252°$$

$$\theta = \frac{30}{360} \cdot 252$$

$$\theta = 21°$$

O menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio às $4h42min$ é dado por:

$$\alpha - \theta - 120° = 252° - 21° - 120° = 111°$$

**Gabarito: $111°$**

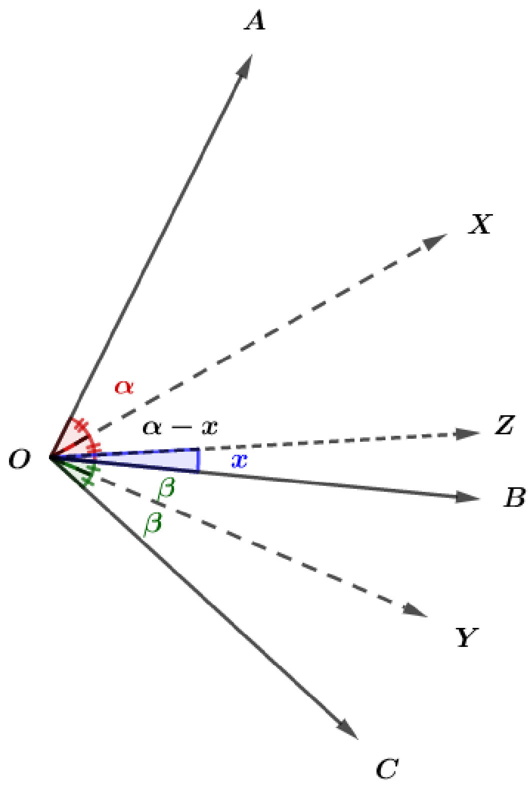
---

**6. $\overrightarrow{OX}$ e $\overrightarrow{OY}$ são as bissetrizes de dois ângulos adjacentes, $A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ ambos agudos, e tais que $A\hat{O}B - B\hat{O}C = 36°$. $\overrightarrow{OZ}$ é a bissetriz do ângulo $X\hat{O}Y$, calcular o ângulo $B\hat{O}Z$.**

**Resolução:**

Supondo que $\overrightarrow{OX}$ seja bissetriz de $A\hat{O}B$ e $\overrightarrow{OY}$, bissetriz de $B\hat{O}C$, temos:

(Poderia ser o contrário, com $\overrightarrow{OX}$, bissetriz de $B\hat{O}C$ e $\overrightarrow{OY}$, bissetriz de $A\hat{O}B$. O resultado seria o mesmo.)




Sejam $\alpha$ e $\beta$ os ângulos de $A\hat{O}X$ e $B\hat{O}Y$, respectivamente. Assim, temos:

$$A\hat{O}X = B\hat{O}X = \alpha$$

$$B\hat{O}Y = C\hat{O}Y = \beta$$

De acordo com o enunciado:

$$A\hat{O}B - B\hat{O}C = 36° \Rightarrow 2\alpha - 2\beta = 36° \Rightarrow \alpha - \beta = 18°$$

Queremos calcular $B\hat{O}Z$. Como $\overrightarrow{OZ}$ é bissetriz de $X\hat{O}Y$:

$$X\hat{O}Z = \alpha - x \ \ (I)$$

$$X\hat{O}Z = Y\hat{O}Z = \beta + x \ \ (II)$$

Fazendo $(I) - (II)$:

$$0 = \alpha - x - \beta - x$$

$$x = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$x = \frac{18°}{2}$$

$$\therefore x = 9°$$

**Gabarito: $B\hat{O}Z = 9°$**

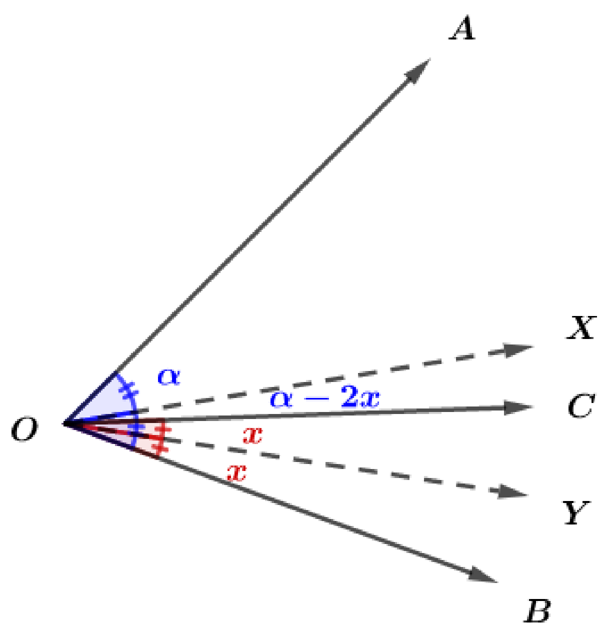
---

**7. As bissetrizes de dois ângulos consecutivos formam um ângulo de $38°$. Um dos ângulos mede $41°$. Calcular o outro ângulo.**

**Resolução:**

Como são ângulos consecutivos, temos duas possibilidades:

1) Um dos ângulos é interno ao outro:



Nesse caso, temos:

$$X\hat{O}Y = X\hat{O}C + Y\hat{O}C$$

$$38° = \alpha - 2x + x$$

$$\alpha - x = 38°$$

Se $A\hat{O}B$ for o ângulo dado:

$$2\alpha = 41° \Rightarrow \alpha = 20{,}5°$$

$$\alpha - x = 38° \Rightarrow x = \alpha - 38° \Rightarrow x = -17{,}5°$$

Como $x$ é negativo, essa situação não é possível.

Se $B\hat{O}C$ for o ângulo dado:

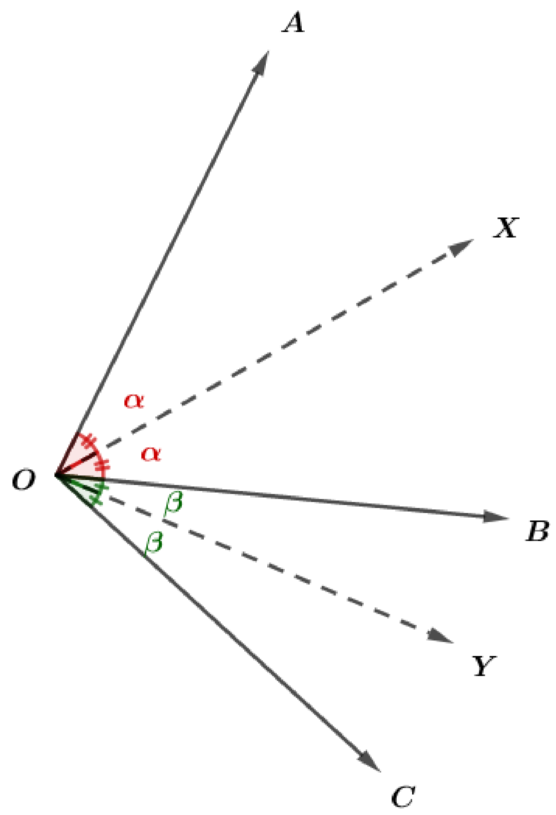
$$2x = 41° \Rightarrow x = 20{,}5°$$

$$\alpha - x = 38° \Rightarrow \alpha = x + 38° \Rightarrow \alpha = 58{,}5°$$

Dessa forma, o outro ângulo é dado por:

$$A\hat{O}B = 2\alpha = 117°$$

2) Os ângulos são adjacentes:



Supondo que um dos ângulos seja $A\hat{O}B$, temos:

$$2\alpha = 41° \Rightarrow \alpha = 20{,}5°$$

$$\alpha + \beta = 38° \Rightarrow \beta = 17{,}5°$$

Assim, o outro ângulo é dado por:

$$2\beta = 35°$$

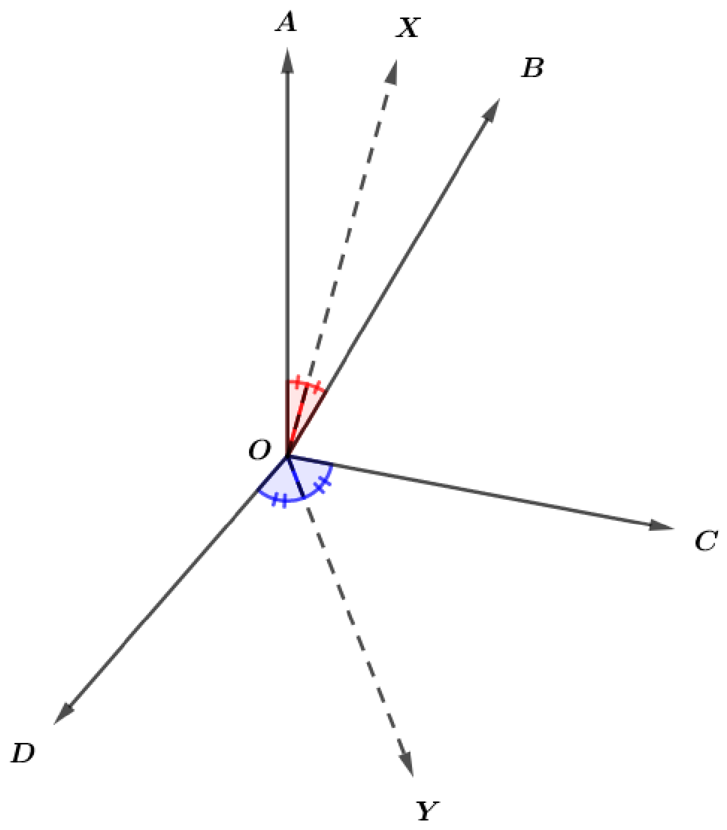
**Gabarito: $35°$ *ou* $117°$**

---

**8. Quatro semirretas $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ forma os ângulos adjacentes $A\hat{O}B, B\hat{O}C, C\hat{O}D$ e $D\hat{O}A$, respectivamente proporcionais aos números $1, 2, 4$ e $5$. Determine o ângulo formado pelas bissetrizes de $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$.**

**Resolução:**

Temos a seguinte figura:




Queremos calcular o ângulo $X\hat{O}Y$. Definindo $A\hat{O}B = \alpha$, temos:

$$A\hat{O}B = \alpha$$

$$B\hat{O}C = 2\alpha$$

$$C\hat{O}D = 4\alpha$$

$$D\hat{O}A = 5\alpha$$

A soma desses ângulos resulta no ângulo de $360°$. Então:

$$\alpha + 2\alpha + 4\alpha + 5\alpha = 360°$$

$$12\alpha = 360°$$

$$\alpha = 30°$$

$X\hat{O}Y$ é dado por:

$$X\hat{O}Y = X\hat{O}B + B\hat{O}C + C\hat{O}Y$$

$$X\hat{O}Y = \frac{\alpha}{2} + 2\alpha + \frac{4\alpha}{2}$$

$$X\hat{O}Y = \frac{9\alpha}{2}$$

$$X\hat{O}Y = \frac{9}{2} \cdot 30° = 135°$$

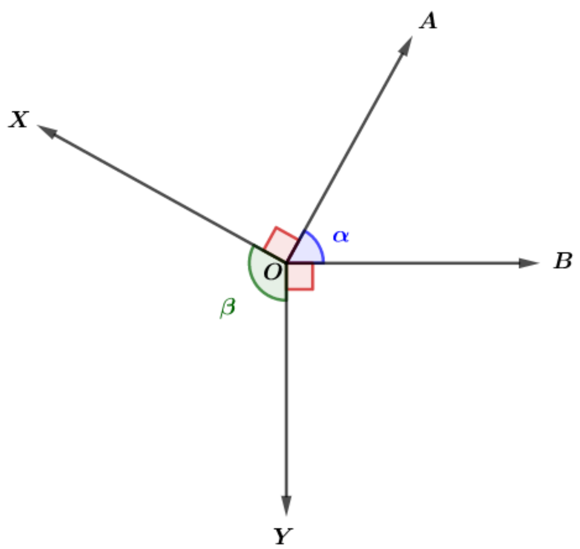
**Gabarito: $135°$**

---

**9. Do vértice de um ângulo traçam-se as semirretas perpendiculares aos seus lados. Demonstrar que o ângulo formado por essas semirretas e o ângulo dado são suplementares.**

**Resolução:**

Supondo genericamente a seguinte situação:



Podemos ver pela figura que:

$$\alpha + \beta + 90° + 90° = 360°$$

$$\alpha + \beta = 180°$$

$$\therefore \alpha \text{ e } \beta \text{ são suplementares}$$

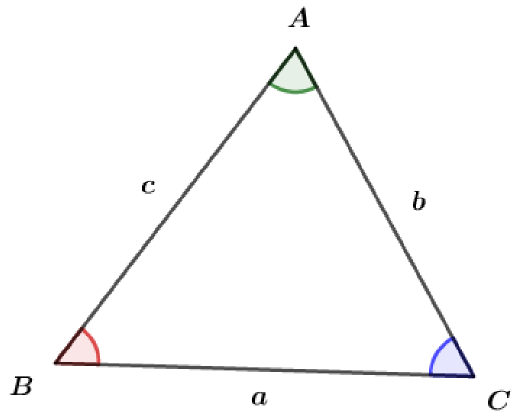
**Gabarito: Demonstração**

# 4. TRIÂNGULOS

## 4.1. DEFINIÇÃO

Dados três pontos $A, B$ e $C$ não colineares, os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$ definem o triângulo $ABC$.

Dizemos que $A, B$ e $C$ são os vértices do triângulo e os segmentos formados por esses pontos são os lados do triângulo.




$a, b$ e $c$ são os lados opostos dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente.

## 4.2. CLASSIFICAÇÃO DOS TRIÂNGULOS

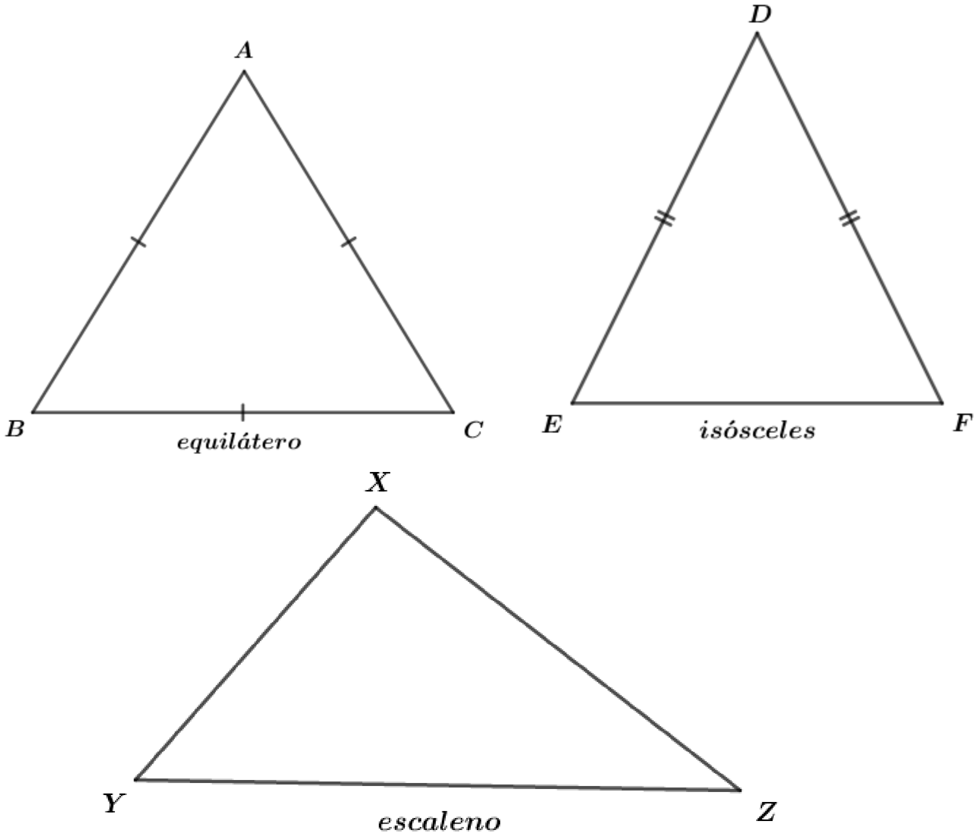
### 4.2.1. QUANTO AOS LADOS

Um triângulo é classificado em:

**Equilátero** se, e somente se, todos os seus lados são congruentes.

**Isósceles** se, e somente se, possui dois lados congruentes.

**Escaleno** se, e somente se, nenhum lado é congruente.



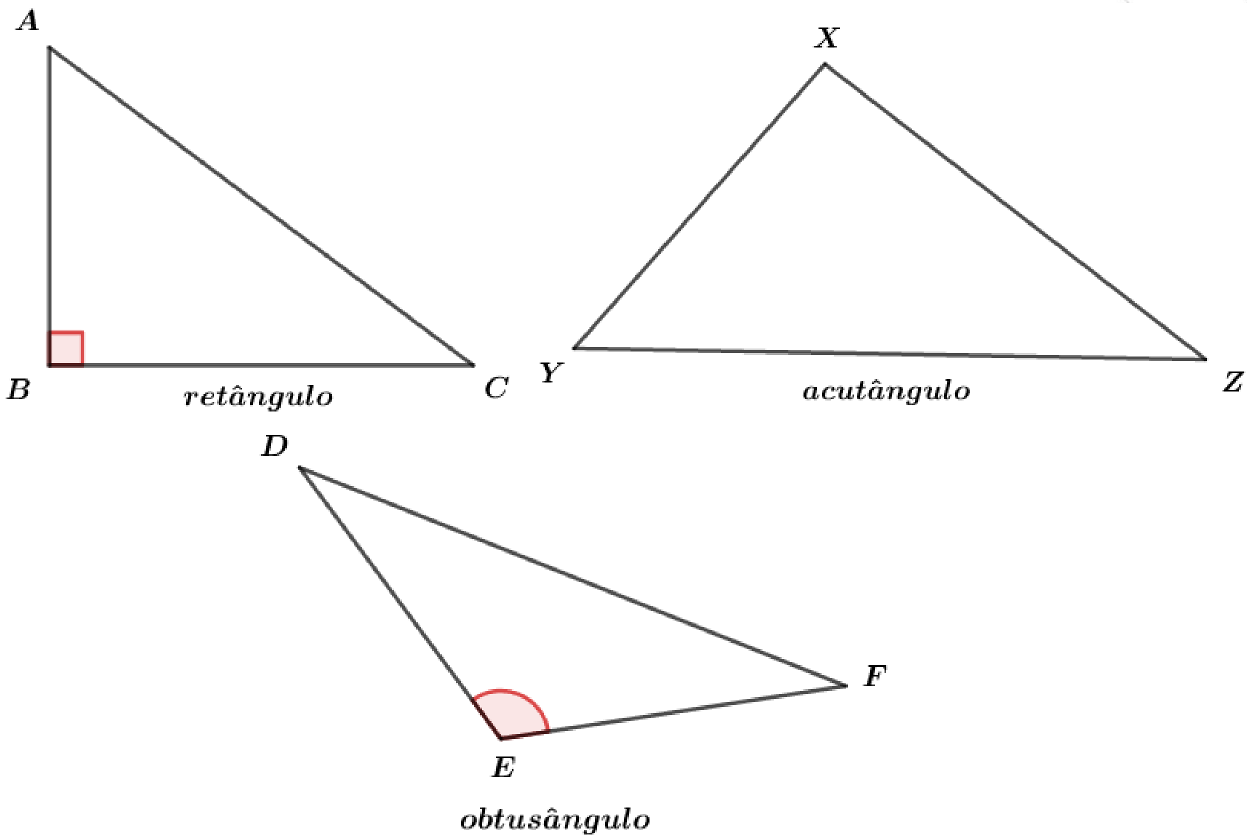

## 4.2.2. QUANTO AOS ÂNGULOS

Um triângulo é classificado em:

**Retângulo** se, e somente se, possui um ângulo reto.

**Acutângulo** se, e somente se, todos os ângulos internos são agudos.

**Obtusângulo** se, e somente se, possui um ângulo obtuso.




### 4.2.3. SÍNTESE DE CLAIRAUT

Seja um triângulo qualquer de lados $a, b$ e $c$, sendo $a$ o maior lado, podemos classificar o triângulo de acordo com as seguintes condições:

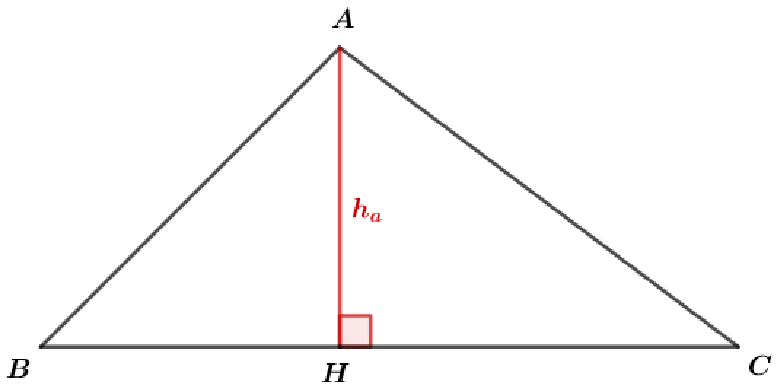
| Condição | Tipo de triângulo |
|---|---|
| $a^2 < b^2 + c^2$ | Acutângulo |
| $a^2 = b^2 + c^2$ | Retângulo |
| $a^2 > b^2 + c^2$ | Obtusângulo |

## 4.3. CEVIANAS NOTÁVEIS

Definimos como ceviana qualquer reta que passa pelo vértice do triângulo. Vamos estudar as principais:

## 4.3.1. ALTURA

Usualmente, usamos a letra $h$ para denotar a altura de um triângulo. Ela é um segmento que passa pelo vértice do triângulo e forma um ângulo reto com o lado oposto desse vértice.

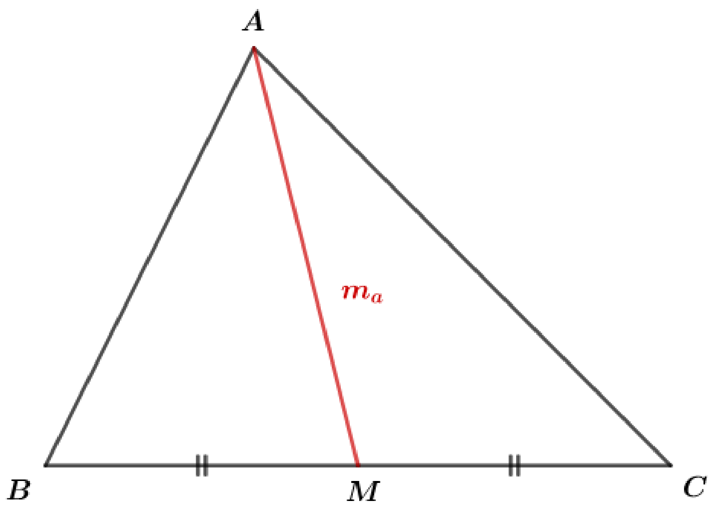



$\overline{AH}$ é a altura do vértice $A$.

## 4.3.2. MEDIANA

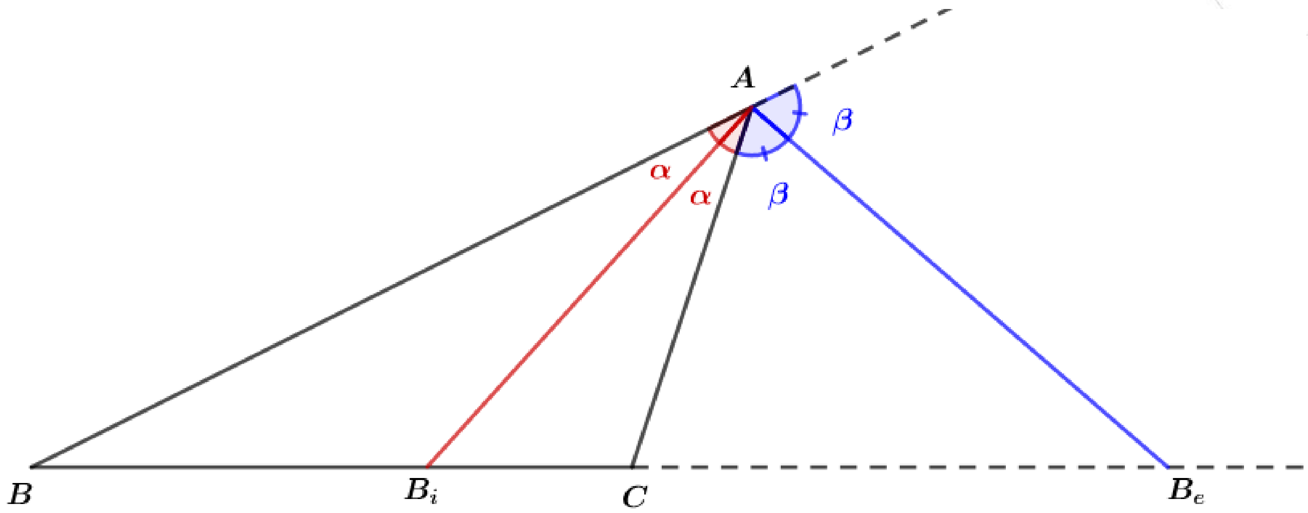
A mediana de um triângulo é o segmento que passa pelo vértice e pelo ponto médio do lado oposto ao vértice.

Na figura abaixo, $\overline{AM}$ é a mediana do vértice $A$.




## 4.3.3. BISSETRIZES INTERNA E EXTERNA

A bissetriz interna de um triângulo é o segmento que divide o ângulo interno em dois ângulos congruentes. A bissetriz externa é o segmento que divide o ângulo externo em dois ângulos congruentes.




$\overline{AB_i}$ é a bissetriz interna do $\Delta ABC$ e $\overline{AB_e}$ é sua bissetriz externa.

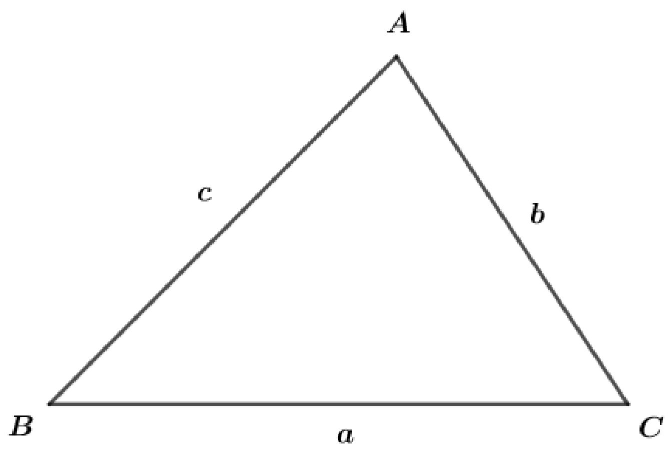
## 4.4. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DO TRIÂNGULO

Na geometria plana, temos o postulado da distância mínima que afirma:

“A menor distância entre dois pontos é uma reta”.

Por esse postulado, podemos estudar a condição de existência do triângulo.

Assim, para um triângulo $ABC$, temos:




$$a < b + c$$

$$b < a + c \Rightarrow b - c < a$$

$$c < a + b \Rightarrow c - b < a$$

$$\boxed{|b - c| < a < b + c}$$

Essa desigualdade é conhecida como desigualdade triangular.

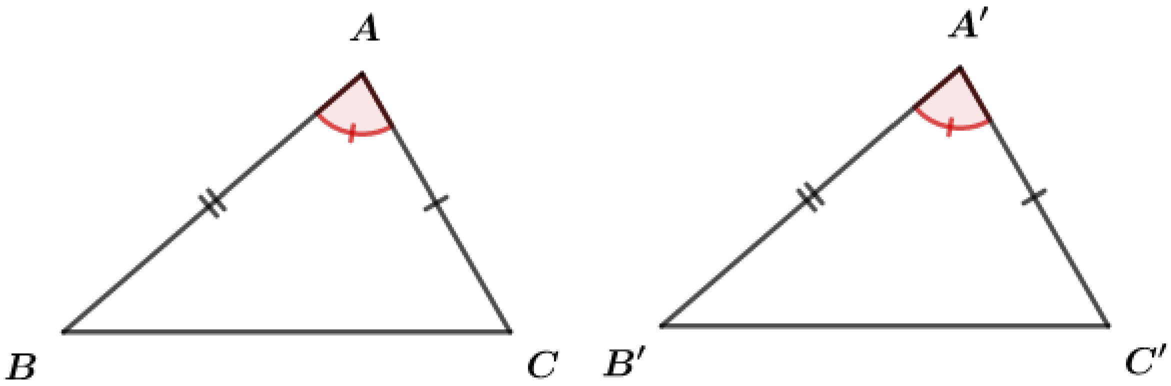
## 4.5. CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Podemos afirmar que dois ou mais triângulos são congruentes se, e somente se, todos os lados e ângulos internos deles forem congruentes na mesma ordem.

Um postulado que consegue garantir a congruência de triângulos é o LAL, esse postulado gera outros teoremas que também provam a congruência de triângulos. Não veremos a demonstração dos teoremas, pois o que nos interessa é saber como aplicá-los.

### 4.5.1. POSTULADO $LAL$ (LADO-ÂNGULO-LADO)

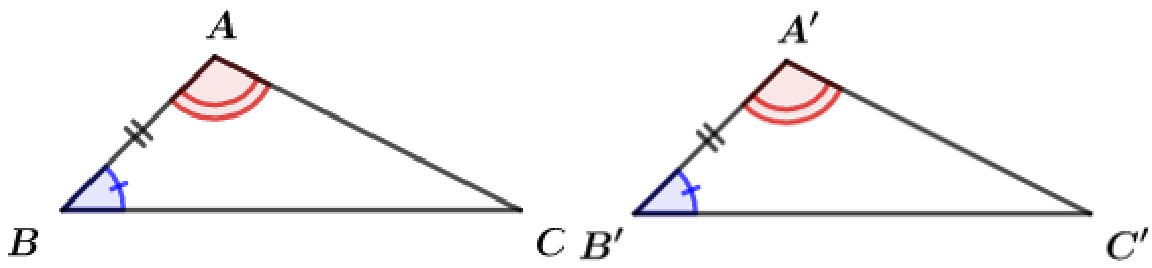
Esse postulado diz que se dois triângulos tiverem dois lados e o ângulo entre esses lados congruentes, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes.




$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

### 4.5.2. TEOREMA $ALA$ (ÂNGULO-LADO-ÂNGULO)

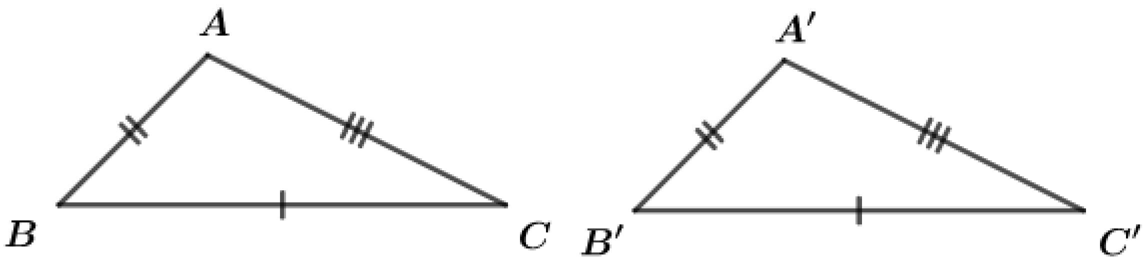
Se o lado e os ângulos adjacentes de dois triângulos forem congruentes ordenadamente, podemos afirmar que os triângulos são congruentes.




$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{B} \equiv \widehat{B'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

## 4.5.3. TEOREMA $\boldsymbol{LLL}$ (LADO-LADO-LADO)

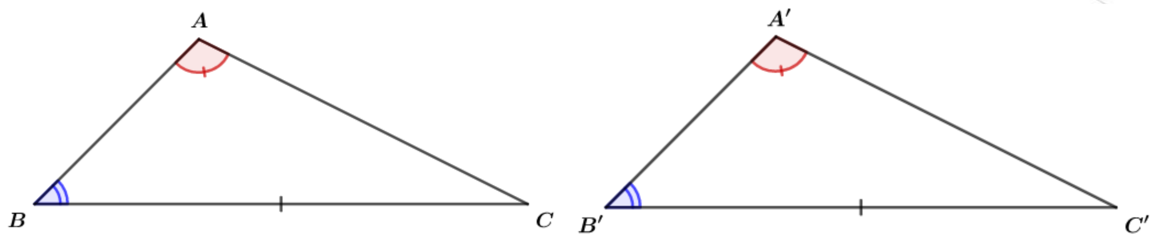
Se os três lados de dois triângulos são ordenadamente congruentes, esses triângulos são congruentes.




$$\begin{cases} \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

## 4.5.4. TEOREMA $\boldsymbol{LAA_0}$ (LADO-ÂNGULO ADJACENTE-ÂNGULO OPOSTO)

Se dois triângulos tiverem o lado, ângulo adjacente e ângulo oposto desse lado congruentes, então esses triângulos são congruentes.



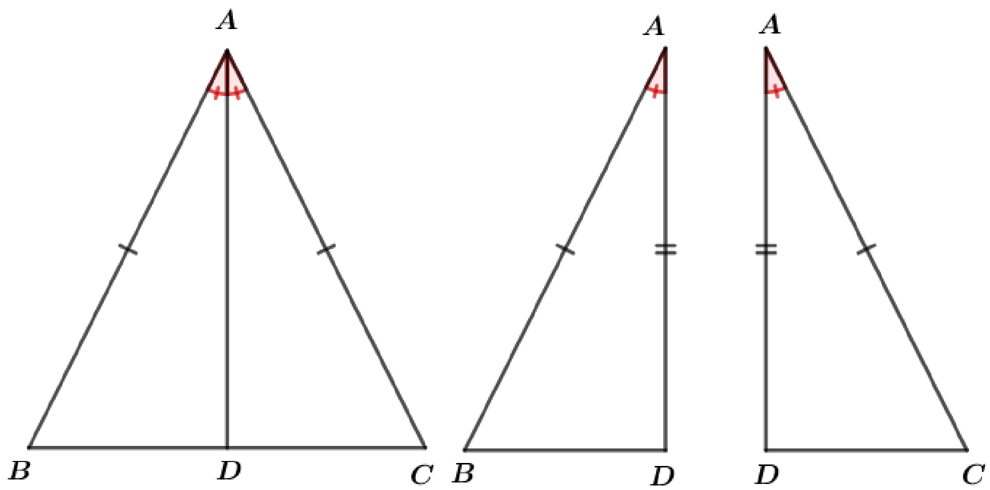

$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \widehat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

## 4.6. CONSEQUÊNCIA DO POSTULADO $LAL$

### 4.6.1. TRIÂNGULO ISÓSCELES

Sabemos que um triângulo $ABC$ é isósceles se, e somente se, possui dois lados iguais.

Seja $\Delta ABC$ isósceles com $AB = AC$. Traçando-se a bissetriz no vértice $A$, temos:




Como $AD$ é a bissetriz do vértice $A$, temos $B\hat{A}D = C\hat{A}D$.

Usando o postulado $LAL$, sabemos que $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$. Então, os elementos correspondentes são congruentes:

$$\Delta ABD \equiv \Delta ACD$$

$$AB = AC \Rightarrow BD = CD \Rightarrow \overline{AD} \text{ é mediana}$$

$$\Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

$$A\hat{D}B = A\hat{D}C = \theta \Rightarrow \theta + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 90° \Rightarrow \overline{AD} \text{ é altura}$$

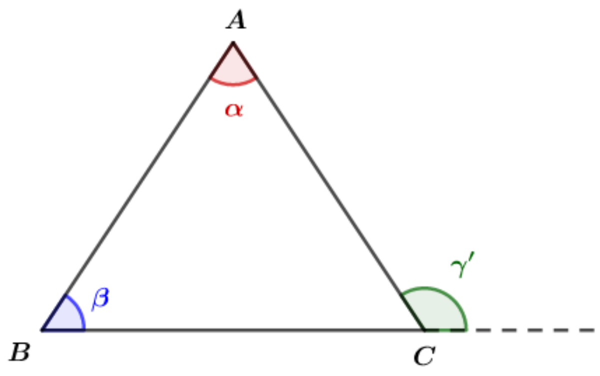
Como $\overline{AD}$ é mediana e altura ao mesmo tempo, temos por definição que $\overline{AD}$ é mediatriz do triângulo $ABC$. Perceba que todos os pontos da mediatriz do segmento $\overline{BC}$ são equidistantes das extremidades $B$ e $C$. Então, se não soubéssemos que o triângulo $ABC$ era isósceles, pelo fato do segmento $AD$ ser mediatriz, poderíamos afirmar que ele é isósceles. Isso pode ser provado pelo postulado $LAL$:

$$\begin{cases} BD \equiv DC \\ B\hat{D}A \equiv C\hat{D}A \\ DA \equiv DA \end{cases} \Rightarrow \Delta BDA \equiv \Delta CDA \Rightarrow AB = AC$$

## 4.6.2. TEOREMA DO ÂNGULO EXTERNO

O Teorema do Ângulo Externo diz que:

Um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer um dos ângulos internos não adjacente.

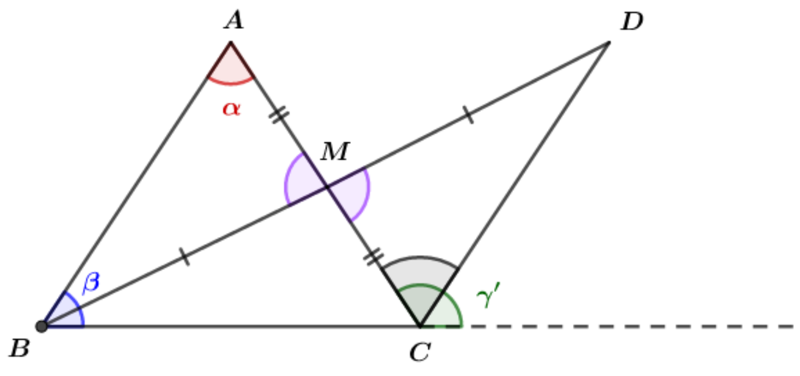



$$\gamma' > \alpha$$

$$\gamma' > \beta$$

**Demonstração:**

Seja $M$ o ponto médio do lado $AC$ e $D$ o ponto tal que $BM = MD$ e $B, M$ e $D$ são colineares.

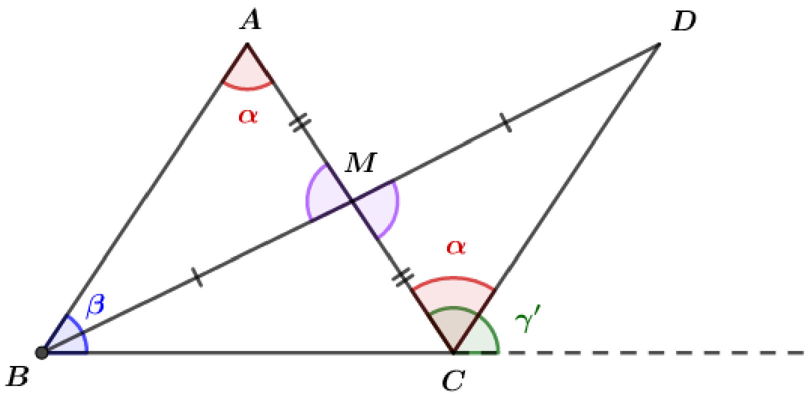


Temos:

$$AM = MC$$

$$BM = MD$$

Como $A\widehat{M}B$ e $C\widehat{M}D$ são ângulos opostos pelo vértice temos que $A\widehat{M}B = C\widehat{M}D$. Então, usando o postulado $LAL$, podemos afirmar que $\Delta BAM \equiv \Delta DCM$ e consequentemente $B\hat{A}M = D\hat{C}M$.

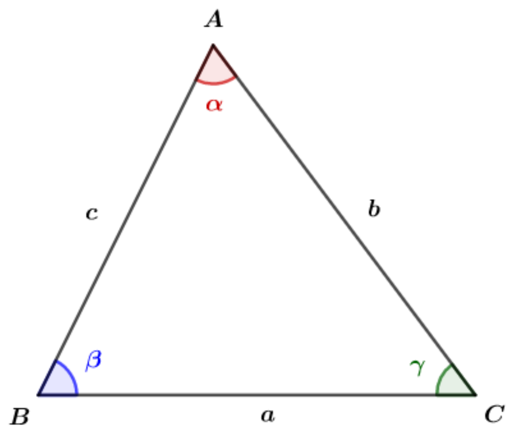



$\alpha$ é ângulo interno a $\gamma'$, logo $\gamma' > \alpha$.

Analogamente, tomando-se o ponto médio de $BC$, podemos provar que $\gamma' > \beta$.

## 4.6.3. DESIGUALDADES NO TRIÂNGULO

Dado o triângulo $ABC$ abaixo, temos:




$$\boxed{a > b > c \Leftrightarrow \alpha > \beta > \gamma}$$

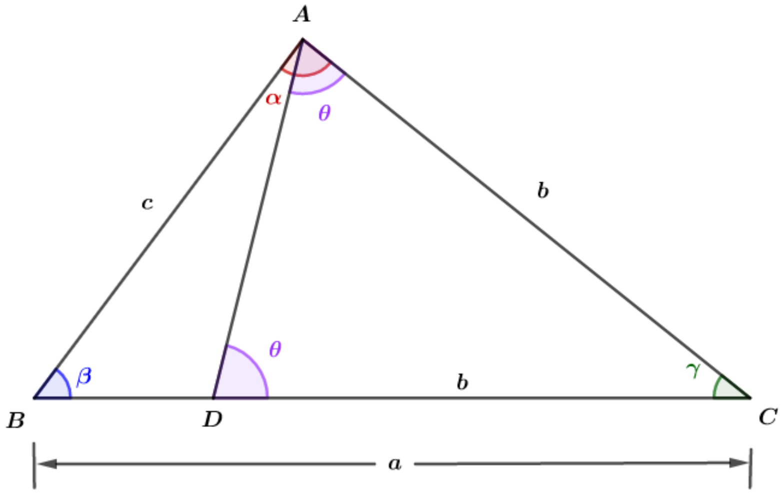
Podemos afirmar que o maior ângulo possui o maior lado oposto.

Demonstração:

Vamos provar a ida:

$$a > b > c \Rightarrow \alpha > \beta > \gamma$$

Se $a > b > c$, podemos traçar o segmento $\overline{AD}$ tal que $\Delta ADC$ seja isósceles com $AC = DC$:



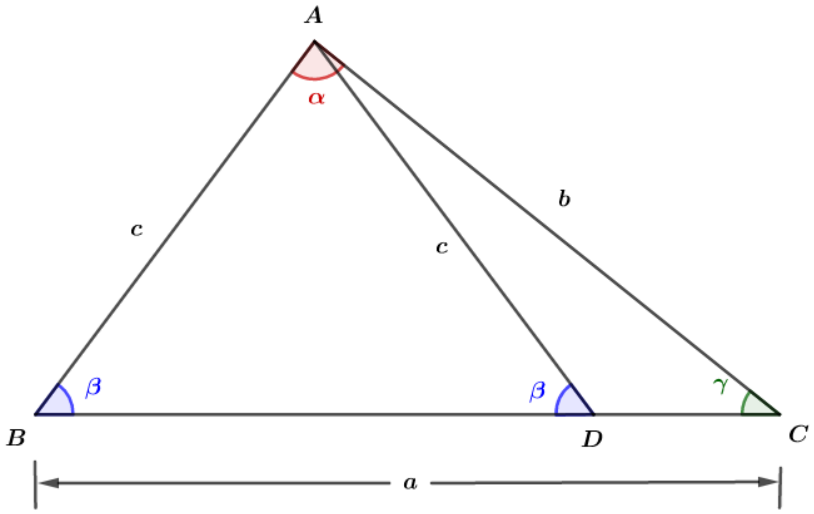

Como $D\hat{A}C$ é ângulo interno a $B\hat{A}C$, temos $\alpha > \theta$.

$A\widehat{D}C$ é ângulo externo ao triângulo $ABD$, então pelo teorema do ângulo externo temos $\theta > \beta$.

Assim, encontramos:

$$\alpha > \theta > \beta \Rightarrow \alpha > \beta$$

Agora, vamos provar que $\beta > \gamma$. Como $b > c$, podemos traçar $\overline{AD}$ tal que $AB = AD = c$:




Como $ADB$ é externo ao $\Delta ADC$, temos $\beta > \gamma$.

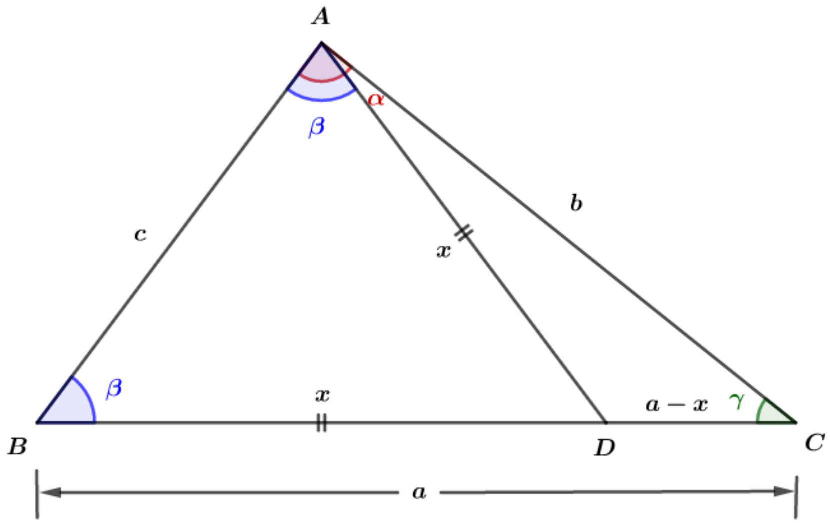
Portanto:

$$a > b > c \Rightarrow \alpha > \beta > \gamma$$

Para a volta, temos:

$$\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow a > b > c$$

Por hipótese, temos $\alpha > \beta$. Vamos traçar $\overline{AD}$ tal que:

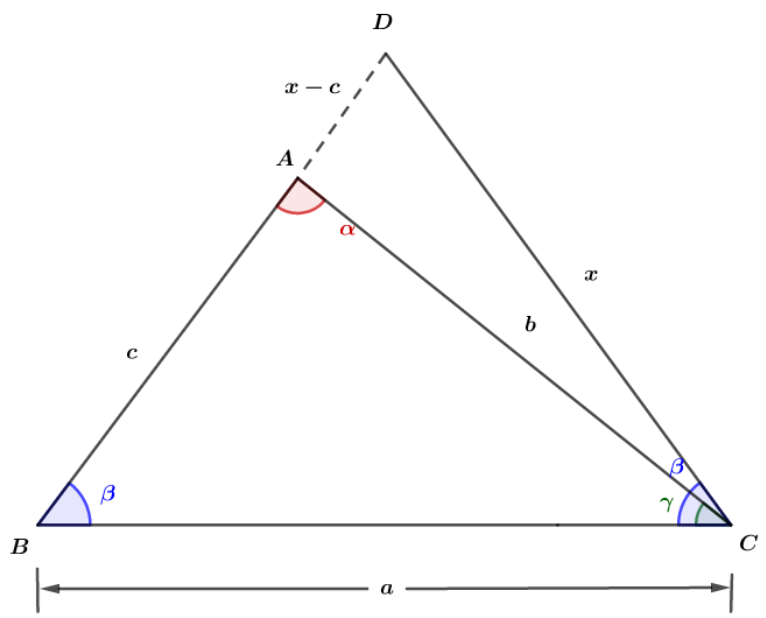



Como $\Delta ABD$ é isósceles, temos $AD = BD = x$. Usando a desigualdade triangular no $\Delta ADC$:

$$b < x + (a - x)$$

$$\Rightarrow b < a$$

Pela hipótese, também podemos afirmar que $\beta > \gamma$ e traçar $\overline{AD}$ dessa forma:



$$\Delta BDC \text{ é isósceles} \Rightarrow BD = CD = x \Rightarrow AD = x - c$$

Usando a desigualdade triangular no $\Delta ADC$:

$$|x - c - x| < b$$

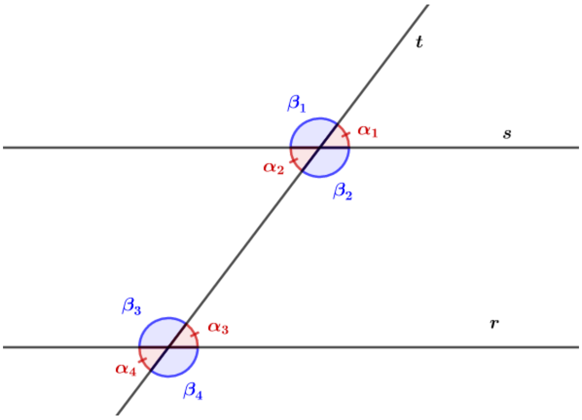
$$\Rightarrow c < b$$

Portanto:

$$\alpha > \beta > \gamma \Rightarrow a > b > c$$

## 4.7. ÂNGULOS DE RETAS PARALELAS

Sejam as retas $r, s, t$ dadas tal que $r//s$ e $t$ cruza as outras duas. Os ângulos formados pelo cruzamento de $t$ com $r$ e $s$ possuem uma relação entre eles, veja:




Os ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ são congruentes e os ângulos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ são congruentes.

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \alpha_4$$

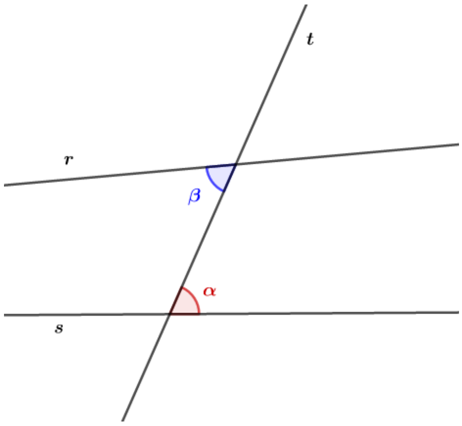
$$\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv \beta_3 \equiv \beta_4$$

Esses ângulos recebem as seguintes denominações:

| Classificações | Par de ângulos |
|---|---|
| Alternos internos | $\alpha_2$ e $\alpha_3$<br>$\beta_2$ e $\beta_3$ |
| Alternos externos | $\alpha_1$ e $\alpha_4$<br>$\beta_1$ e $\beta_4$ |

| | |
|---|---|
| Colaterais internos | $\alpha_2$ e $\beta_3$<br>$\beta_2$ e $\alpha_3$ |
| Colaterais externos | $\alpha_1$ e $\beta_4$<br>$\alpha_4$ e $\beta_1$ |

**Demonstração:**




Queremos provar:

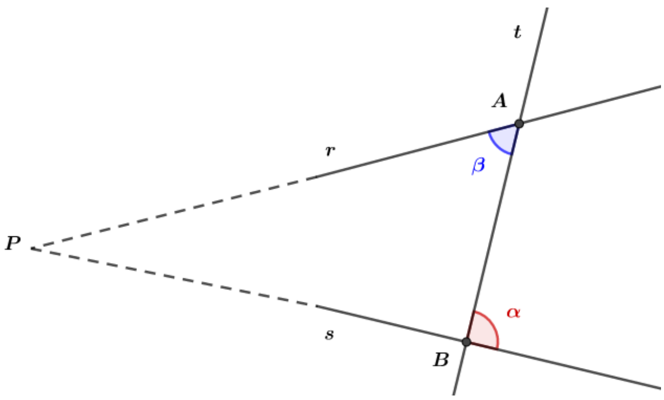
$$\alpha \equiv \beta \Leftrightarrow r//s$$

Vamos provar a ida:

$$\alpha \equiv \beta \Rightarrow r//s$$

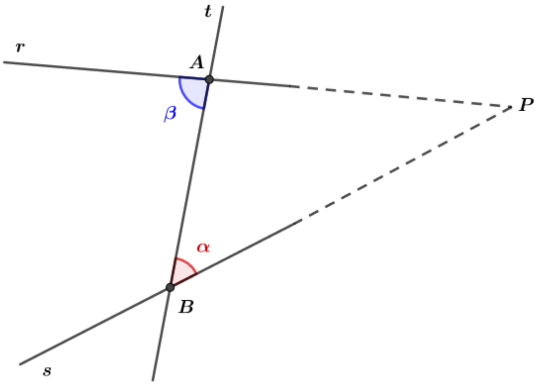
Suponha que $r$ não seja paralela a $s$, então pelo Postulado $V$ de Euclides temos que $r$ e $s$ se interceptam em um ponto $P$. Temos dois casos possíveis:

1)




O ângulo $\alpha$ é externo ao triângulo $ABP$. Pelo teorema do ângulo externo, temos $\alpha > \beta$.

2)



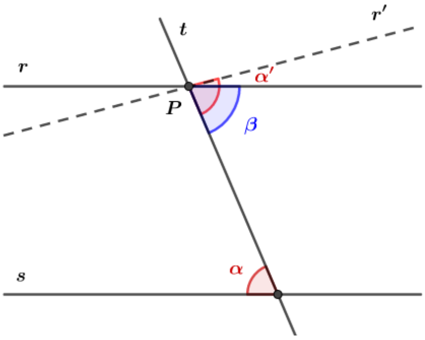

O ângulo $\beta$ é externo ao triângulo $ABP$. Pelo teorema do ângulo externo, temos $\beta > \alpha$.

Absurdo! Pois, por hipótese temos $\alpha \equiv \beta$. Logo, $\alpha \equiv \beta \Rightarrow r//s$.

Agora, vamos provar a volta:

$$r//s \Rightarrow \alpha \equiv \beta$$

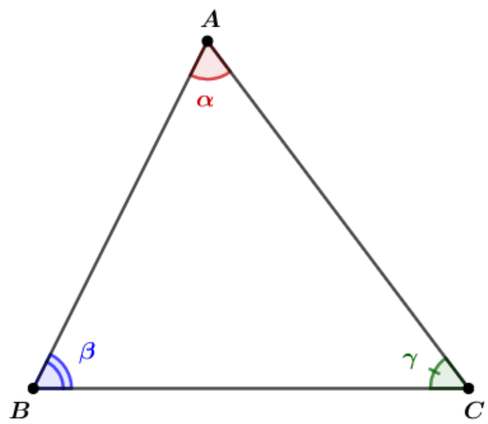
Suponha que exista uma reta $r'$ tal que $\alpha \equiv \alpha'$.




Como $\alpha \equiv \alpha'$, temos $r'//s$. Então, as retas $r$ e $r'$ são paralelas à reta $s$. Pelo quinto postulado de Euclides, temos $r \equiv r'$, logo $\alpha' \equiv \beta$. Portanto, $\alpha \equiv \beta$.

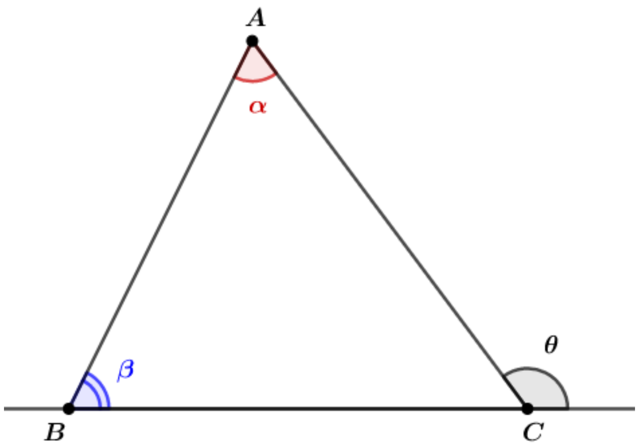
## 4.8. TEOREMA ANGULAR DE TALES

I) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.




$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

II) O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

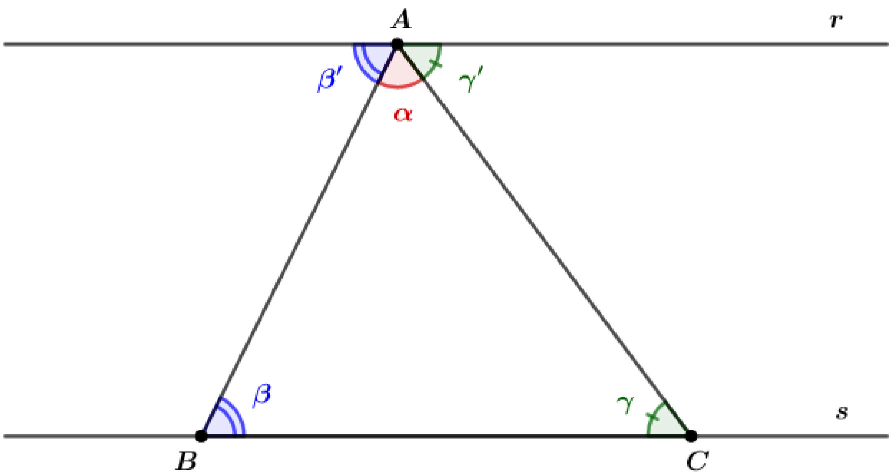



$$\boxed{\theta = \alpha + \beta}$$

**Demonstração:**

I) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a $180°$.

Traçando-se as retas $r$ e $s$ tal que $\overline{BC} \subset s, A \subset r$ e $r//s$.

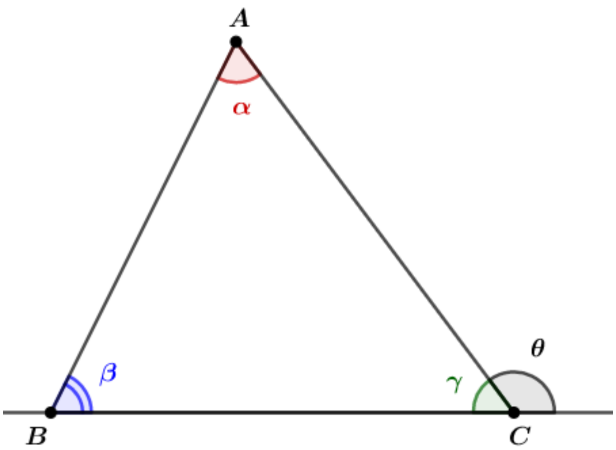



$\alpha, \beta'$ e $\gamma'$ são elementos de um ângulo raso, então $\alpha + \beta' + \gamma' = 180°$.

Como $r//s$, temos $\beta \equiv \beta'$ e $\gamma \equiv \gamma'$. Portanto:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

II) O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.




Podemos ver que $\gamma + \theta = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - \theta$.

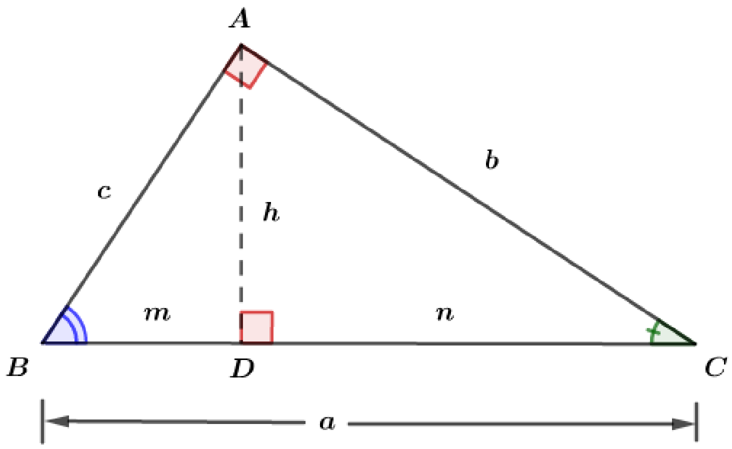
Pelo Teorema I, sabemos que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Substituindo o valor de $\gamma$ na equação acima, temos:

$$\alpha + \beta + (180° - \theta) = 180°$$

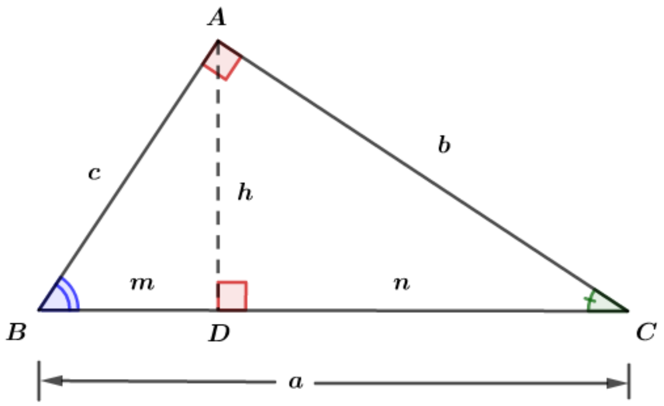
$$\therefore \theta = \alpha + \beta$$

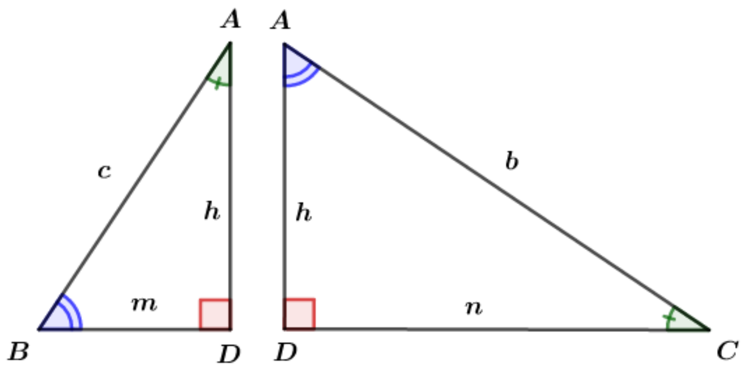
# 4.9. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO




| Relações métricas no triângulo retângulo | |
|---|---|
| $(I)$ | $b^2 = an$ |
| $(II)$ | $c^2 = am$ |
| $(III)$ | $h^2 = mn$ |
| $(IV)$ | $bc = ah$ |
| $(V)$ | $bh = cn$ |
| $(VI)$ | $ch = bm$ |
| $(VII)$ Pitágoras | $a^2 = b^2 + c^2$ |
| $(VIII)$ | $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ |

**Demonstração:**




Podemos ver que os triângulos $ABC, DBA, DAC$ são semelhantes. Assim, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta DBA \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{c}{h} \Rightarrow bc = ah \\ \frac{a}{c} = \frac{c}{m} \Rightarrow c^2 = am \\ \frac{b}{c} = \frac{h}{m} \Rightarrow ch = bm \end{cases}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{n} \Rightarrow b^2 = an \\ \frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow bc = ah \\ \frac{b}{c} = \frac{n}{h} \Rightarrow bh = cn \end{cases}$$

$$\Delta DBA \sim \Delta DAC \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{h} = \frac{b}{n} \Rightarrow bh = cn \\ \frac{c}{m} = \frac{b}{h} \Rightarrow ch = bm \\ \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = mn \end{cases}$$

*Na próxima aula, veremos com mais detalhes os critérios de semelhança. Saiba que quando os ângulos internos de dois triângulos são congruentes, podemos afirmar que ambos são semelhantes.

Já estudamos o Teorema de Pitágoras, podemos usá-la para provar $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{c^2 + b^2}{b^2 c^2}$$

Usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2}$$

Pela relação $(IV)$:

$$bc = ah$$

$$b^2 c^2 = a^2 h^2$$

Substituindo na equação:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{a^2 h^2}$$

Portanto:

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}$$


**10. Os lados de um triângulo formam uma PG de razão $q$. Para que este triângulo exista, determine as condições de $q$.**

**Resolução:**

Sejam $a, aq, aq^2$, os lados de um triângulo. Então, verificando a condição de existência do triângulo pela desigualdade triangular:

$$|aq - aq^2| < a < aq + aq^2$$

Como $a$ é um lado de um triângulo, temos $a > 0$. Dessa forma:

$$|q - q^2| < 1 < q + q^2$$

$$\begin{cases} q^2 + q - 1 > 0 \\ |q - q^2| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 + q - 1 > 0 \ \ (I) \\ -1 < q - q^2 < 1 \ \ (II) \end{cases}$$

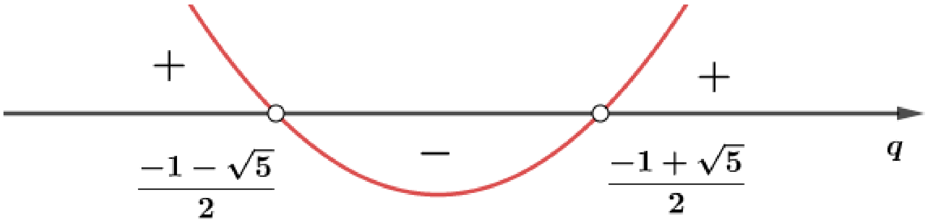
Resolvendo $(I)$:

$$q^2 + q - 1 > 0$$

Encontrando as raízes:

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Estudo do sinal:




$$q < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \ ou \ q > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Como $aq$ é um lado do triângulo e $a > 0$, temos $q > 0$. Então:

$$q > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Resolvendo $(II)$:

$$-1 < q - q^2 < 1$$

$$\begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 \ \ (III) \\ q^2 - q + 1 > 0 \ \ (IV) \end{cases}$$

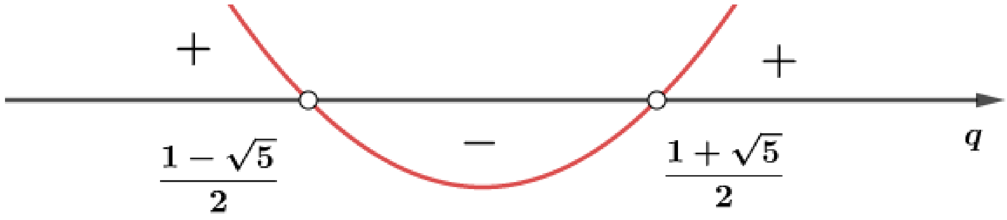
Para a inequação $(III)$, temos:

$$q^2 - q - 1 < 0$$

Raízes:

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Estudo do sinal:




$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Mas $q > 0$, logo:

$$0 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Para $(IV)$:

$$q^2 - q + 1 > 0$$

Essa inequação não possui raízes reais, pois $\Delta < 0$:

$$\Delta = -3 < 0$$

Como essa função possui concavidade para cima, temos que $\forall q \in \mathbb{R} \rightarrow q^2 - q + 1 > 0$.

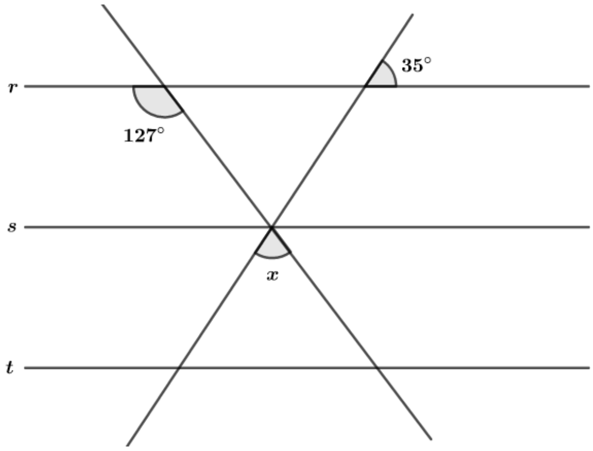
Então, as condições de $q$ são dadas pela intersecção dos resultados encontrados:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

**Gabarito:** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

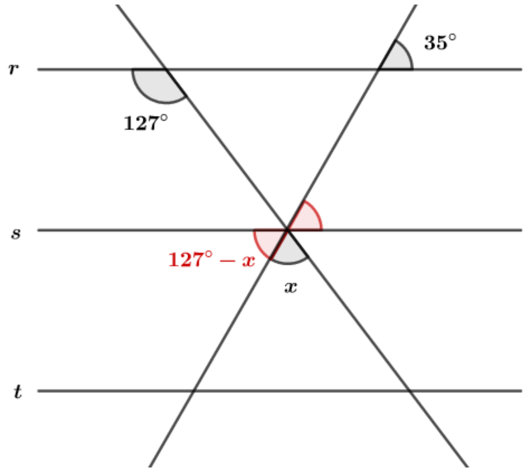
---

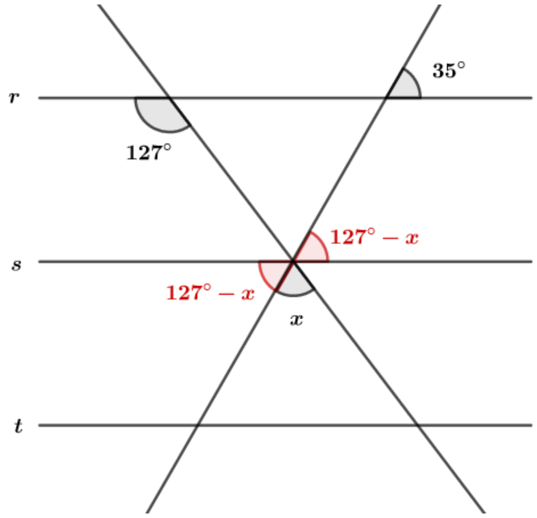
**11. Sabendo-se que $r//s//t$, calcule $x$.**




**Resolução:**

Usando a propriedades dos ângulos de retas paralelas e ângulos opostos pelo vértice, temos:



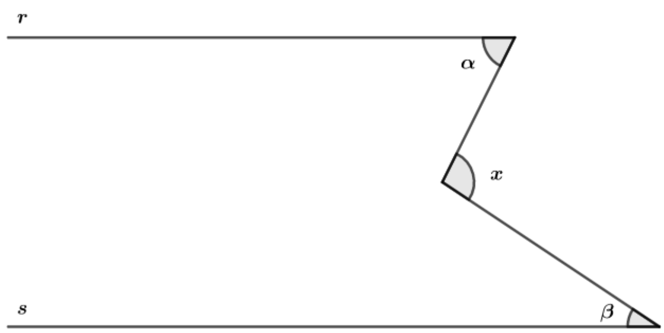

Pela figura, podemos ver que:

$$127° - x = 35°$$

$$x = 92°$$

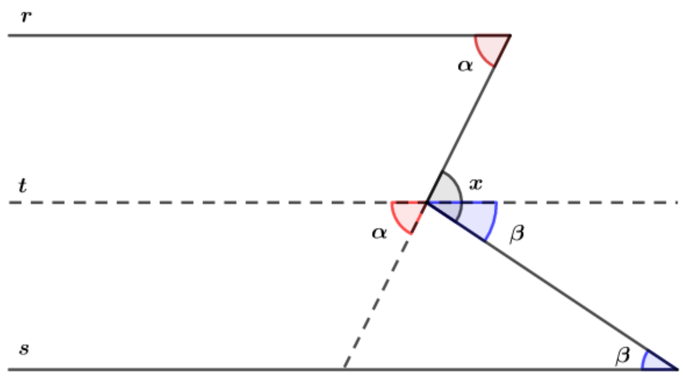
**Gabarito: 92°**

**12. Dada a figura abaixo e sabendo que $r//s$, demonstre que $x = \alpha + \beta$.**

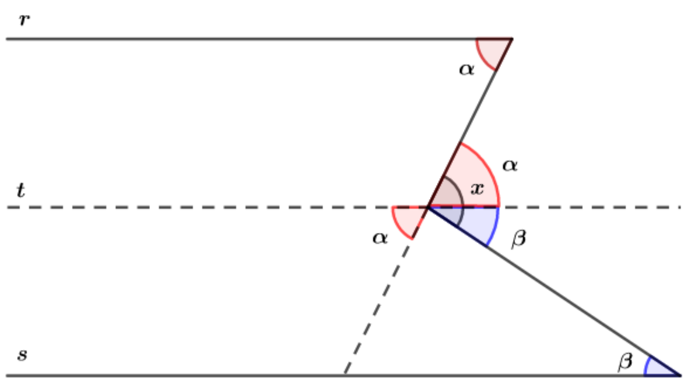



**Resolução:**

Podemos traçar a reta $t$ tal que $t//s//r$:




Usando a propriedade dos ângulos opostos pelo vértice:

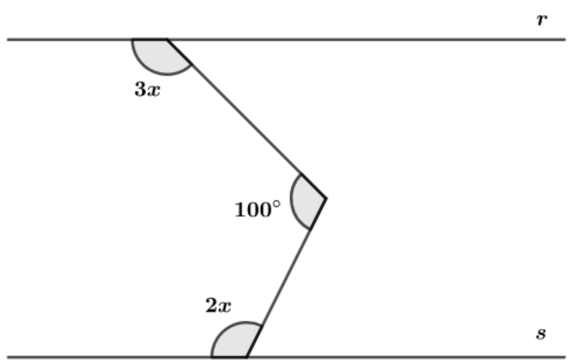



Podemos ver pela figura que:

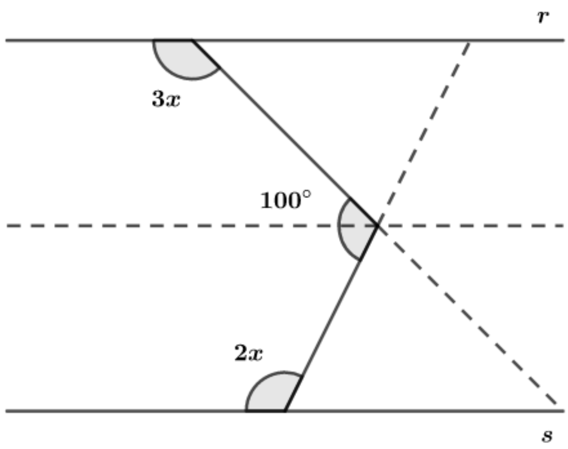
$$x = \alpha + \beta$$

**Gabarito: Demonstração**

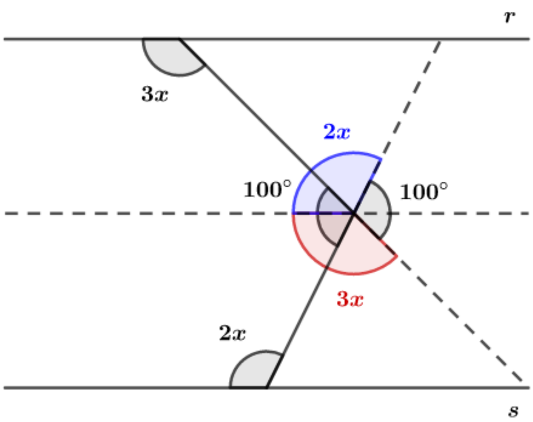
**13. Sabendo que $r//s$. Determine o valor de $x$.**




**Resolução:**




Escrevendo os ângulos correspondentes na figura, temos:




Somando os ângulos, temos:

$$2x + 3x + 100° = 360°$$

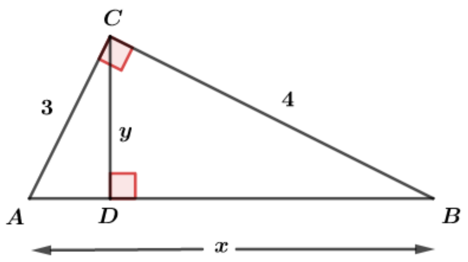
$$5x = 260°$$

$$x = 52°$$

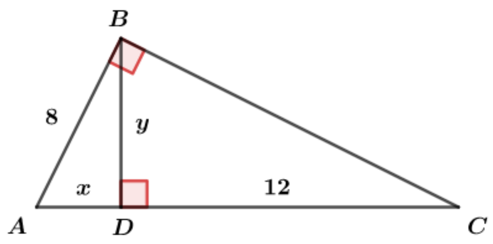
**Gabarito: 52°**

**14. Determine $x$ e $y$:**

**a)**

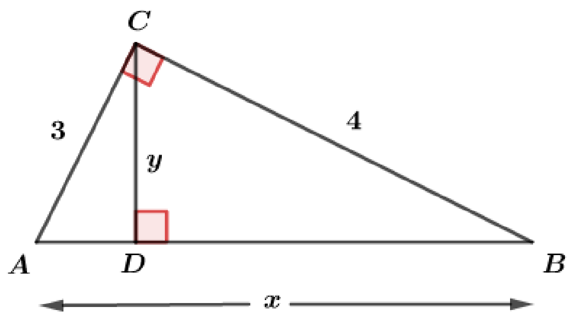


**b)**




**Resolução:**

a)




Usando as relações métricas do triângulo retângulo, temos:

$$xy = 3 \cdot 4$$

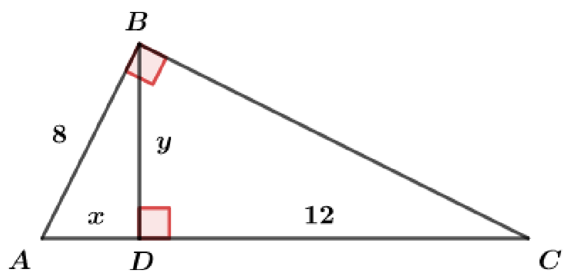
Pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$$

Substituindo $x$ na equação:

$$5y = 12 \Rightarrow y = 12/5$$

b)



$\Delta ABD$ é retângulo

Usando o Teorema de Pitágoras no $\Delta ABD$:

$$8^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 64 \ \ (I)$$

$$\Delta ABD \sim \Delta BDC$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{12} \Rightarrow y^2 = 12x \ \ (II)$$

Substituindo $(II)$ em $(I)$:

$$x^2 + 12x - 64 = 0$$

$$x = \left(-6 \pm \sqrt{100}\right) = -16 \ ou \ 4$$

Como $x > 0$, temos $x = 4$.

Substituindo $x$ em $(II)$:

$$y^2 = 12 \cdot 4$$

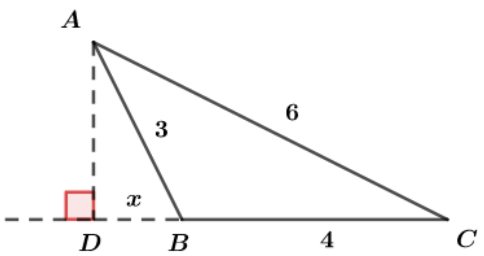
$$y = 4\sqrt{3}$$

**Gabarito: a) $x = 5 \ e \ y = 12/5$ b) $x = 4 \ e \ y = 4\sqrt{3}$**

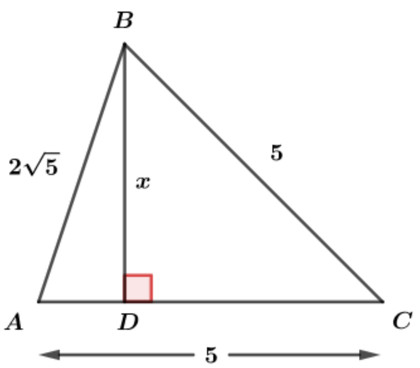
---

**15. Determine $x$:**

**a)**

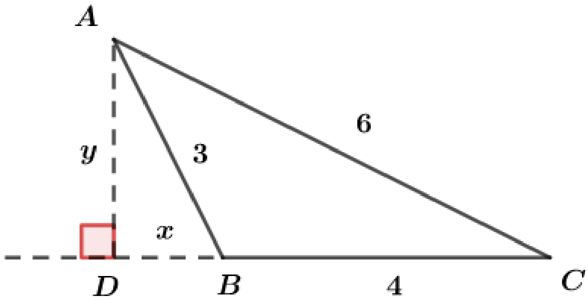



**b)**



**Resolução:**

a)




Fazendo $AD = y$ e aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos $ABD$ e $ADC$:

$$3^2 = x^2 + y^2 \quad (I)$$

$$6^2 = y^2 + (x+4)^2 \quad (II)$$

Subtraindo $(II) - (I)$:

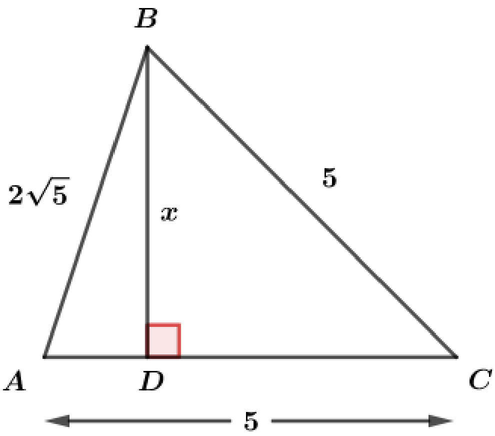
$$36 - 9 = (x+4)^2 - x^2$$

$$27 = (x + 4 - x)(x + 4 + x)$$

$$\frac{27}{4} = 2x + 4$$

$$x = \frac{27}{8} - 2 = \frac{11}{8}$$

b)




Fazendo $AD = y$ e aplicando o teorema de Pitágoras:

$\Delta ABD$:

$$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + y^2 \ \ (I)$$

$\Delta BDC$:

$$5^2 = x^2 + (5-y)^2 \ \ (II)$$

Subtraindo $(II) - (I)$:

$$25 - 20 = (5-y)^2 - y^2$$

$$5 = (5 - y - y)(5 - y + y)$$

$$1 = 5 - 2y$$

$$2y = 4$$

$y = 2$

Substituindo $y$ em $(I)$:

$$20 = x^2 + 2^2$$

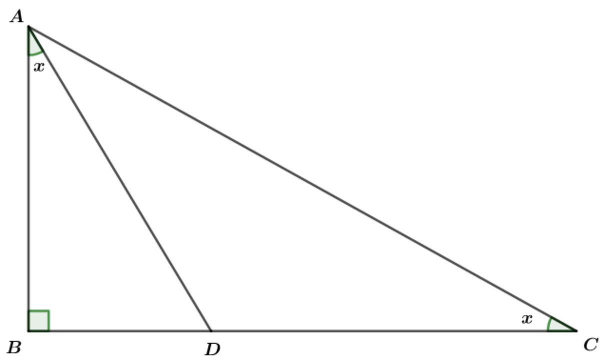
$$x^2 = 16$$

$$x = 4$$

**Gabarito: a) $x = 11/8$ b) $x = 4$**

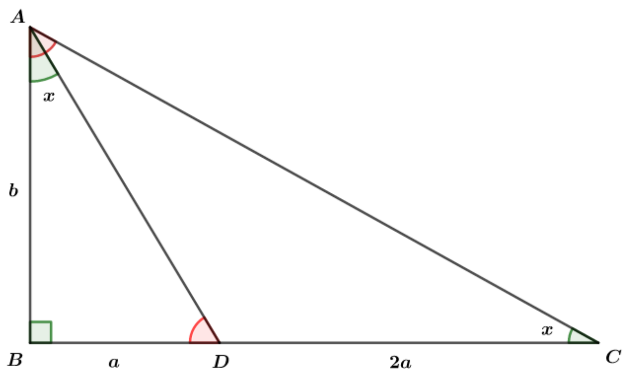
---

**16. O $\Delta ABC$ é retângulo em $B$ e $CD = 2 \cdot BD$. Calcule $x$.**




**Resolução:**

Fazendo $AB = b$ e $BD = a$, temos $CD = 2a$. Perceba que os triângulos $ABD$ e $ABC$ são semelhantes, pois possuem todos os ângulos internos congruentes:




Assim, calculando as razões entre os triângulos:

$$\Delta ABD \sim \Delta CBA$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{3a}$$

$$b^2 = 3a^2$$

$$b = \sqrt{3}a$$

O ângulo $x$ é dado por:

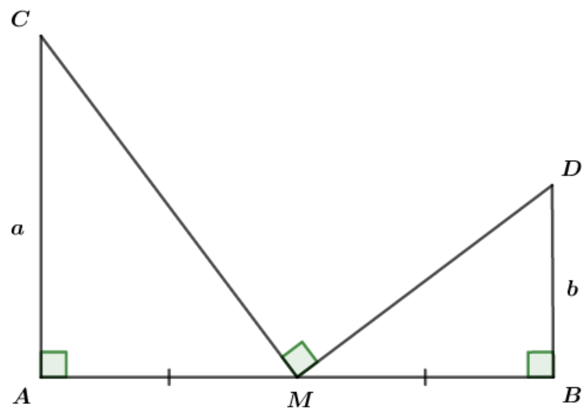
$$tgx = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 30°$$

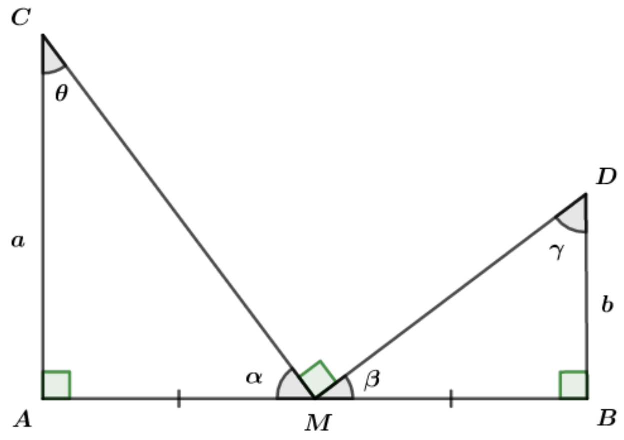
**Gabarito: $x = 30°$**

---

**17. Na figura a seguir temos $AM = MB$. Calcule a medida de $\overline{AB}$.**




**Resolução:**




Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, temos:

$$\theta + \alpha = 90° \ (I)$$

$$\beta + \gamma = 90° \ (II)$$

Sendo $\widehat{M}$ um ângulo raso:

$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$

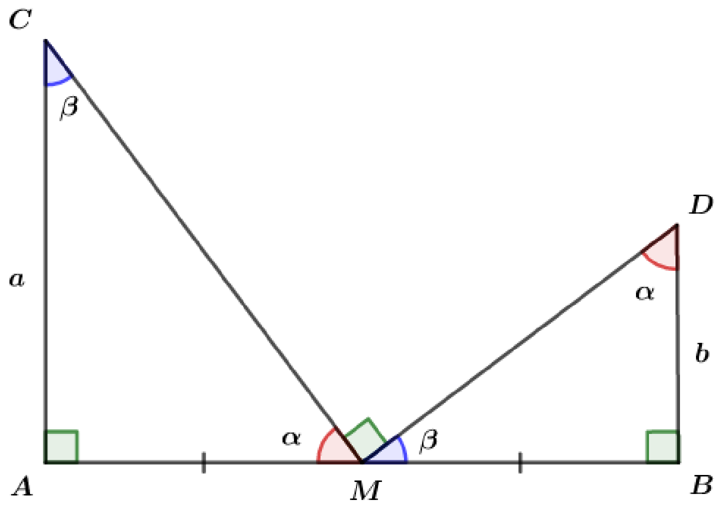
$$\alpha + \beta = 90° \ (III)$$

Fazendo $(III) - (II)$:

$$\alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma$$

Fazendo $(III) - (I)$:

$$\beta - \theta = 0 \Rightarrow \beta = \theta$$




Os triângulos $ACM$ e $BMD$ são congruentes, logo:

$$\frac{a}{AM} = \frac{MB}{b}$$

$$ab = MB \cdot AM$$

Como $AM = MB = x$, temos:

$$x^2 = ab \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

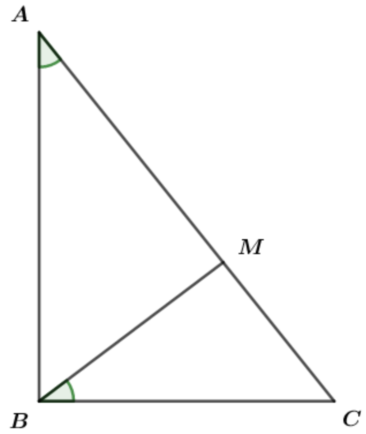
Assim, a medida de $\overline{AB}$ é dada por:

$$AB = 2x = 2\sqrt{ab}$$

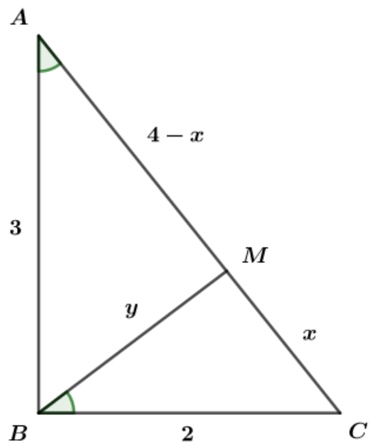
**Gabarito: $AB = 2\sqrt{ab}$**

---

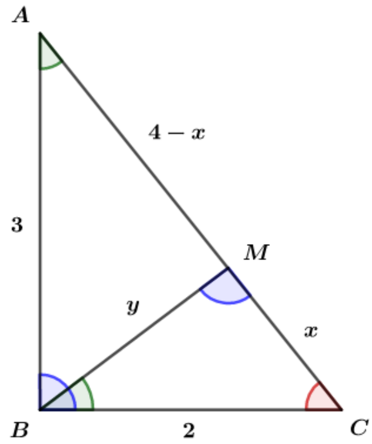
**18. Na figura abaixo temos $M\hat{B}C = B\hat{A}C$, $AB = 3$, $BC = 2$ e $AC = 4$. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{MC}$ e $\overline{MB}$.**




**Resolução:**




Os triângulos $BMC$ e $ABC$ são semelhantes, pois todos os ângulos internos são congruentes:




Fazendo a semelhança dos triângulos:

$$\Delta ABC \sim \Delta BMC$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{BC}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{y}{2}$$

$$y = \frac{3}{2}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{x}$$

$$x = 1$$

**Gabarito:** $MC = 1$ **e** $MB = 3/2$

## 5. LISTA DE QUESTÕES


**19. (ESA/2015)**

**Em um triângulo retângulo de lados $9\ m$, $12\ m$ e $15\ m$, a altura relativa ao maior lado será:**

**a) $7,2\ m$**

**b)** $7,8\ m$

**c)** $8,6\ m$

**d)** $9,2\ m$

**e)** $9,6\ m$

**20. (ESA/2015)**

**Num triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{8}$ e $\sqrt{9}$, a hipotenusa mede**

**a)** $\sqrt{10}$

**b)** $\sqrt{11}$

**c)** $\sqrt{13}$

**d)** $\sqrt{17}$

**e)** $\sqrt{19}$

**21. (ESA/2006)**

**O ângulo convexo formado pelos ponteiros de um relógio às 14h25min é igual a:**

**a)** $86°30'$

**b)** $46°30'$

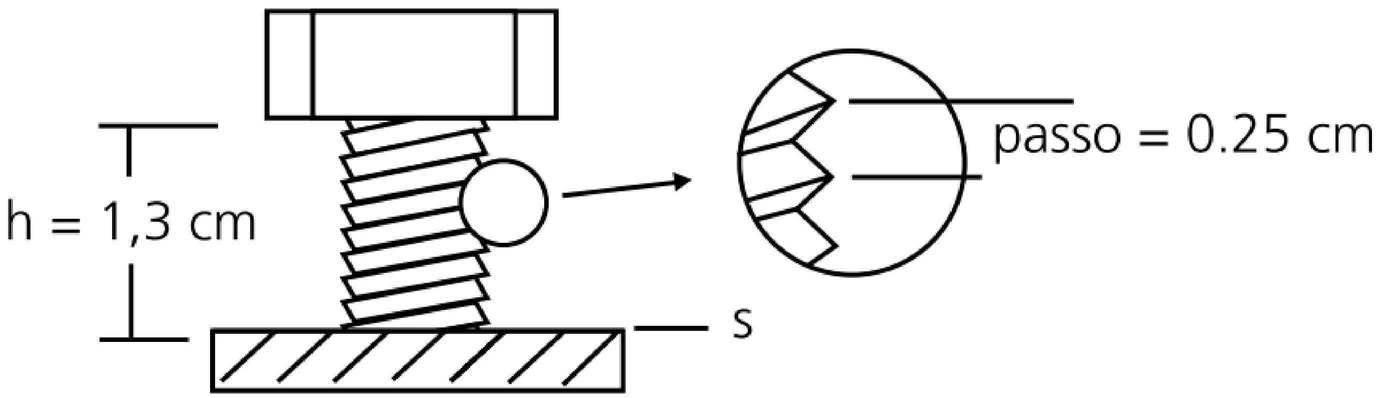
**c)** $77°30'$

**d)** $89°60'$

**e)** $12°30'$

**22. (ESA/2005)**

**Chama-se passo a distância entre dois sulcos consecutivos de um parafuso. Ao dar-se uma volta completa $(\alpha = 360°)$ em uma chave que o aperta, o parafuso penetra 1 passo no corpo onde está preso. Na situação ao lado, para apertar completamente o parafuso até que sua cabeça encoste na superfície "s" deve-se girar o parafuso, em graus**




a) 468°

b) 1872°

c) 1440°

d) 117°

e) 1989°

**23. (EEAR/2018)**

**O complemento do suplemento do ângulo de $112°$ mede**

a) $18°$

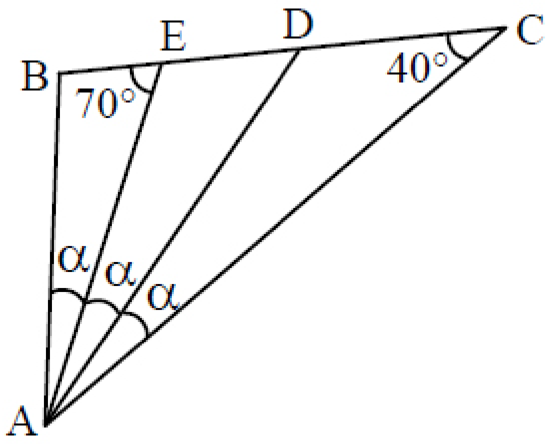
b) $28°$

c) $12°$

d) $22°$

**24. (EEAR/2017)**

**Se $ABC$ é um triângulo, o valor de $\alpha$ é**




a) $10°$

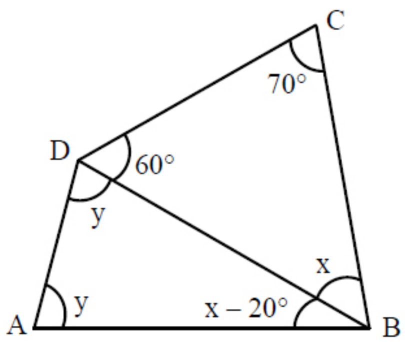
b) $15°$

c) $20°$

d) $25°$

**25. (EEAR/2017)**

**No quadrilátero $ABCD$, o valor de $y - x$ é igual a**




a) $2x$

b) $2y$

c) $\frac{x}{2}$

d) $\frac{y}{2}$

**26. (EEAR/2016)**

**Os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes. Sendo $\widehat{A} = 2x + 15°$ e $\widehat{B} = 5x - 9°$. Assinale a alternativa que representa, corretamente, o valor de $x$.**

a) $2°$

b) $8°$

c) $12°$

d) $24°$

**27. (EEAR/2016)**

**Sabe-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo tem $5\sqrt{5}$ cm de comprimento e a soma dos catetos é igual a 15 cm. As medidas, em cm, dos catetos são**

a) 6 e 9

b) 2 e 13

c) 3 e 12

d) 5 e 10

**28. (EEAR/2016)**

**Uma escada é apoiada em uma parede perpendicular ao solo, que por sua vez é plano. A base da escada, ou seja, seu contato com o chão, dista 10m da parede. O apoio dessa escada com a parede está a uma altura de $10\sqrt{3}$m do solo. Isto posto, o ângulo entre a escada e o solo é de**

a) $60°$

b) $45°$

c) $30°$

d) $15°$

**29. (EEAR/2016)**

**Um triângulo ABC de base $BC = (x + 2)$ tem seus lados AB e AC medindo, respectivamente, $(3x - 4)\ e\ (x + 8)$. Sendo este triângulo isósceles, a medida da base BC é**

a) $4$

b) $6$

c) $8$

**d)** $\mathbf{10}$

**30. (EEAR/2015)**

**Em um triângulo ABC, retângulo em C, a razão $\frac{sen\,\hat{B}}{\cos\hat{A}}$ é igual a**

**a)** $\frac{AC}{BC}$

**b)** $\frac{AB}{AC}$

**c)** $\mathbf{1}$

**d)** $\mathbf{2}$

**31. (EEAR/2015)**

**Seja $ABC$ um triângulo isósceles de base $BC = (x+3)cm$, com $AB = (x + 4)cm$ e $AC = (3x - 10)cm$. A base de $ABC$ mede cm.**

**a)** $\mathbf{4}$

**b)** $\mathbf{6}$

**c)** $\mathbf{8}$

**d)** $\mathbf{10}$

**32. (EEAR/2013)**

**Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o dobro de um cateto. O ângulo oposto a esse cateto mede**

**a)** $\mathbf{20°}$

**b)** $\mathbf{30°}$

**c)** $\mathbf{45°}$

**d)** $\mathbf{60°}$

**33. (EEAR/2012)**

**Num triângulo $\Delta RST$ a medida do ângulo interno $\widehat{R_i}$ é 68° e do ângulo externo $\widehat{S_e}$ é 105° Então o ângulo interno T mede:**

**a)** $\mathbf{52°}$

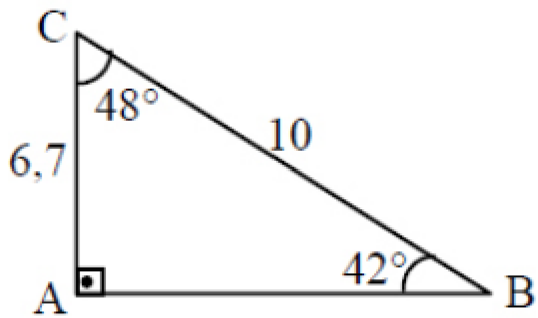
**b)** $45°$

**c)** $37°$

**d)** $30°$

**34. (EEAR/2012)**

**Considerando as medidas indicadas no triângulo, o valor de** $sen(42°) + sen(48°)$ **é**




**a) 1,41**

**b) 1,67**

**c) 1,74**

**d) 1,85**

**35. (EEAR/2011)**

**Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 4 cm, e o ângulo que lhe é adjacente mede** $60°$**. A hipotenusa desse triângulo, em cm, mede**

**a) 6**

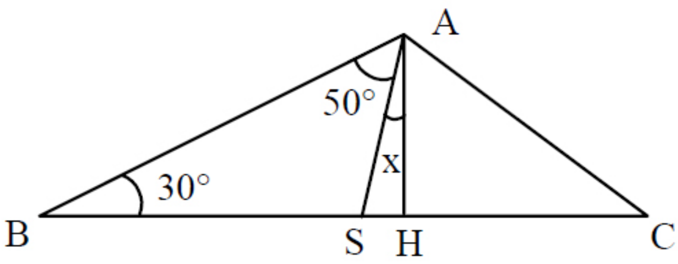
**b) 7**

**c) 8**

**d) 9**

**36. (EEAR/2010)**

**Na figura, AH é altura do triângulo ABC.**




**Assim, o valor de x é:**

**a)** $20°$

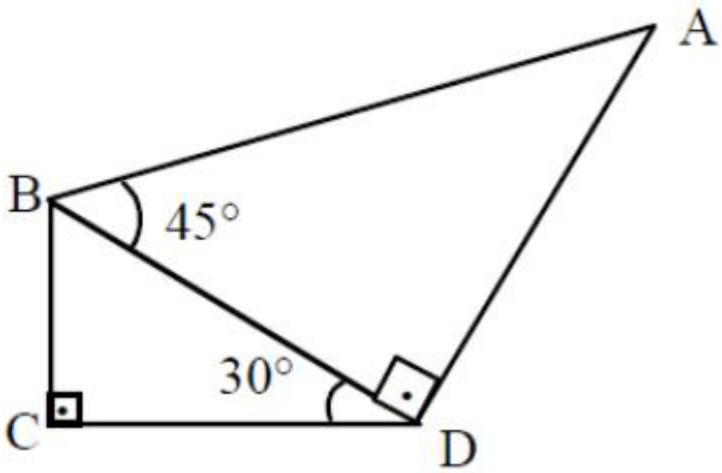
**b)** $15°$

**c)** $10°$

**d)** $5°$

**37. (EEAR/2009)**

**Na figura,** $\overline{BC} = 2\ cm$.




**Assim, a medida de** $\overline{AB}$**, em cm, é**

**a)** $2\sqrt{3}$

**b)** $4\sqrt{2}$

**c)** $5\sqrt{2}$

**d)** $3\sqrt{3}$

**38. (EEAR/2008)**

**Um triângulo** $\Delta ABC$ **tem dois lados congruentes que formam entre si um ângulo de** $42°$**. Um dos outros dois ângulos internos desse triângulo medem**

**a)** $39°$

**b)** $48°$

**c)** $58°$

**d)** $69°$

**39. (EEAR/2008)**

**O triângulo cujos lados medem $6cm, 7cm\ e\ 10cm$ é classificado como**

**a) equilátero e retângulo.**

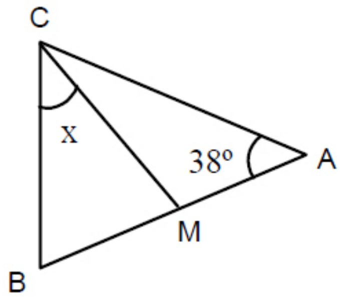
**b) escaleno e acutângulo.**

**c) isósceles e acutângulo.**

**d) escaleno e obtusângulo.**

**40. (EEAR/2008)**

**Na figura, $AB = AC$ e $BC = CM$. O valor de x é:**




**a)** $50°$

**b)** $45°$

**c)** $42°$

**d)** $38°$

**41. (EEAR/2008)**

**Em um triângulo ABC, retângulo em A, a hipotenusa mede $5\ dm$ e $sen(\widehat{B}) = \frac{1}{2} \cdot sen(\widehat{C})$. Nessas condições, o maior cateto mede, em dm,**

**a)** $3$

**b)** $4$

**c)** $\sqrt{5}$

**d)** $2\sqrt{5}$

**42. (EEAR/2006)**

**Em um triângulo $ABC$, o ângulo externo de vértice A mede $116°$. Se a diferença entre as medidas dos ângulos internos $B$ e $C$ é $30°$, então o maior ângulo interno do triângulo mede:**

**a)** $75°$.

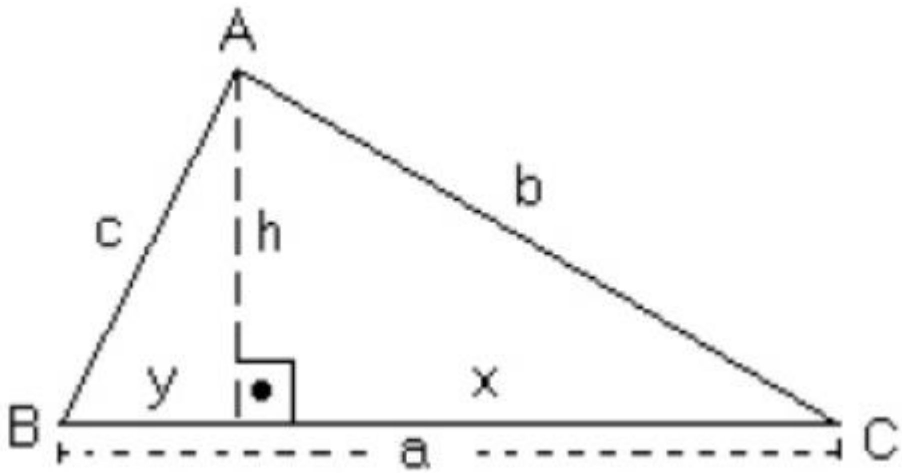
**b)** $73°$.

**c)** $70°$.

**d)** $68°$.

**43. (EEAR/2006)**

**Sejam as relações métricas no triângulo ABC:**




**I –** $b^2 = a \cdot x$

**II –** $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\,\widehat{A}$

**III –** $h = x \cdot y$

**IV –** $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

**Se o triângulo ABC é retângulo em A, então o número de relações verdadeiras acima é**

**a) 1**

**b) 2**

**c) 3**

**d) 4**

**44. (EEAR/2005)**

**Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual ao dobro do produto das medidas dos catetos. Um dos ângulos agudos desse triângulo mede**

**a)** $\mathbf{15°}$

**b)** $\mathbf{30°}$

**c)** $\mathbf{45°}$

**d)** $\mathbf{60°}$

**45. (EEAR/2005)**

**Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 20m, e um dos catetos, 10m. A medida da projeção deste cateto sobre a hipotenusa, em metros, é igual a**

**a) 5**

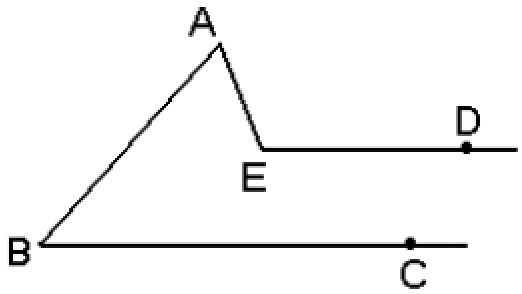
**b) 6**

**c) 7**

**d) 8**

**46. (EEAR/2004)**

**Na figura,** $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ **,** $med(E\hat{A}B) = 80°$ **e** $med(C\hat{B}A) = 35°$**. Assim, a medida de** $D\hat{E}A$ **é**




**a)** $\mathbf{100°}$.

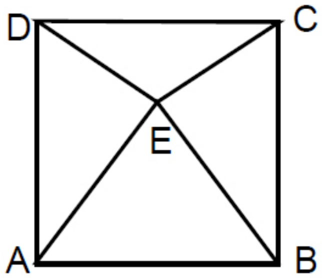
**b)** $\mathbf{110°}$.

**c)** $\mathbf{115°}$.

**d)** $\mathbf{120°}$.

**47. (EEAR/2004)**

**A figura $ABCD$ é um quadrado, e $ABE$ é um triângulo equilátero.**




**Nessas condições, a medida do ângulo $E\widehat{D}C$ é:**

**a) $5°$**

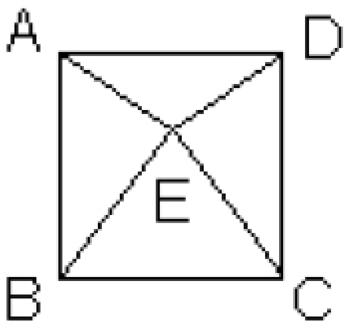
**b) $10°$**

**c) $15°$**

**d) $20°$**

**48. (EEAR/2004)**

**Se $ABCD$ é um quadrado e $BEC$ é um triângulo equilátero, então a medida do ângulo $E\widehat{A}B$ é:**




**a) $75°$**

**b) $60°$**

**c) $30°$**

**d) $85°$**

**49. (EEAR/2004)**

**O perímetro de um triângulo retângulo é 30 cm. Se a soma das medidas dos catetos é 17 cm, e a soma das medidas da hipotenusa e do cateto menor é 18 cm, então a medida, em cm, do cateto maior é**

**a) 8**

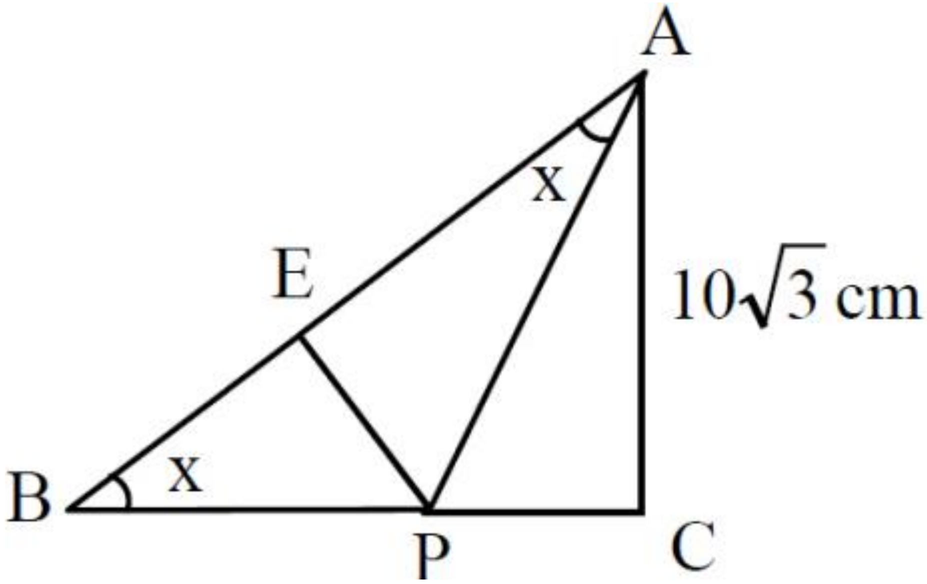
**b) 9**

**c) 12**

**d) 15**

**50. (EEAR/2004)**

**Na figura, são retângulos em E e em C, respectivamente, os triângulos AEP e ACB. Se $x = 30°$, então a medida de $\overline{PE}$, em cm, é**




**a) $10$**

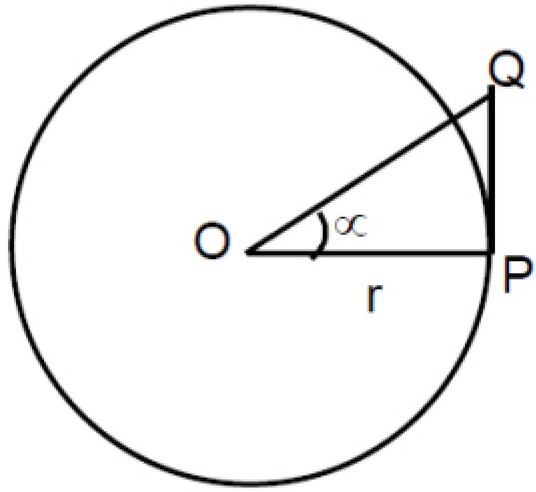
**b) $5\sqrt{3}$**

**c) $10\sqrt{3}$**

**d) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$**

**51. (EEAR/2004)**

**O círculo da figura tem centro O e raio r.**




**Sabendo-se que $\overline{PQ}$ equivale a $\frac{5r}{12}$ e é tangente ao círculo no ponto P, o valor de $sen\ \alpha$ é**

**a)** $\frac{5}{12}$

**b)** $\frac{5}{13}$

**c)** $\frac{12}{13}$

**d)** $0,48$

**52. (EEAR/2004)**

**Num triângulo retângulo, o menor cateto mede 1,5 cm, e a medida da projeção do maior cateto sobre a hipotenusa é 1,6 cm. O valor da secante do maior ângulo agudo desse triângulo é**

**a)** $\frac{4}{3}$

**b)** $\frac{5}{3}$

**c)** $\frac{4}{5}$

**d)** $\frac{7}{5}$

**53. (EEAR/2003)**

**Considere:**

**I. Um triângulo isósceles $PRQ$, de base $PQ$ e altura $RH$.**

**II. Dois pontos $T$ e $S$ sobre $RH$, de tal modo que o triângulo $PTQ$ seja eqüilátero e o triângulo $PSQ$ seja retângulo em S.**

**Considerando somente os ângulos internos dos triângulos, se somarmos as medidas de $\hat{R}$ e $\hat{S}$, obteremos o dobro da medida de $\hat{T}$. Sendo assim, a medida do ângulo $T\hat{P}R$ é:**

**a)** $5°$

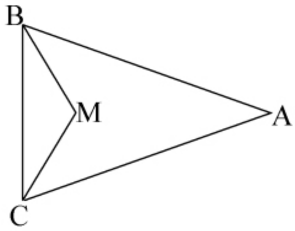
**b)** $15°$

**c)** $30°$

**d)** $45°$

**54. (EEAR/2003)**

**Na figura, $AB = AC$, M é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos do triângulo ABC e o ângulo $B\hat{M}C$ é o triplo do ângulo $\hat{A}$, então a medida de $\hat{A}$ é:**




**a)** $15°$

**b)** $18°$

**c)** $24°$

**d)** $36°$

**55. (EEAR/2003)**

**Um triângulo $\Delta DEF$ tem $D\hat{E}F = 38°$ e $E\hat{F}D = 74°$. O ângulo que a bissetriz DG forma com a altura DH mede:**

**a)** $18°$

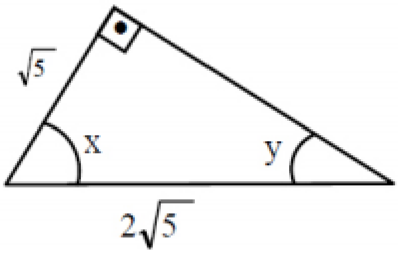
**b)** $20°$

**c)** $26°30'$

**d)** $34°$

**56. (EEAR/2003)**

**Na figura, x – y é igual a**




a) $15°$

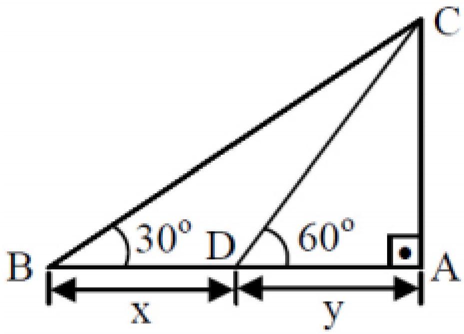
b) $20°$

c) $30°$

d) $35°$

**57. (EEAR/2003)**

**De acordo com os dados nos triângulos retângulos CAB e CAD, é correto afirmar que**




a) $x = y$

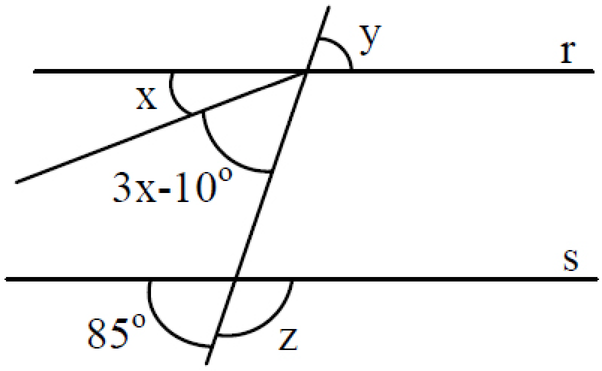
b) $x = 3y$

c) $x = 2y$

d) $x = \frac{3y}{2}$

**58. (EEAR/2003)**

**Nesta figura, as retas $r$ e $s$ são paralelas entre si.**




**Os valores de $x$, $y$ e $z$ são, respectivamente**

**a) $23°45', 85°$ e $95°$.**

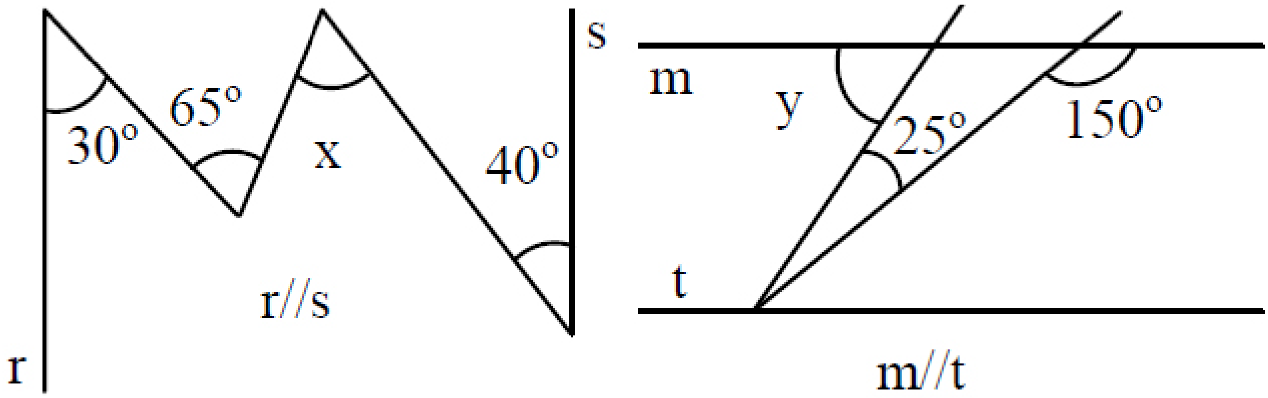
**b) $25°, 90°$ e $90°$.**

**c) $23°7'15'', 95°$ e $85°$.**

**d) $26°15', 85°$ e $95°$.**

**59. (EEAR/2003)**

**Observando as figuras abaixo, o valor, em graus, de $x - y$ é**




**a) $25$**

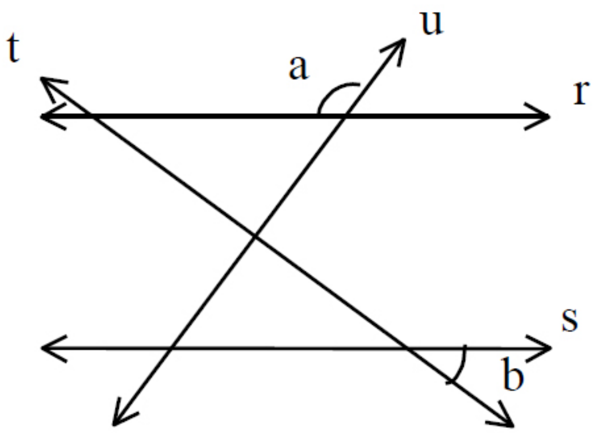
**b) $20$**

**c) $15$**

**d) $10$**

**60. (EEAR/2003)**

**Na figura, $r \parallel s$ e $t \perp u$.**




**O valor de $a - b$ é**

**a) $100°$**

**b) $90°$**

**c) $80°$**

**d) $70°$**

**61. (EEAR/2003)**

**Seja $\alpha$ um ângulo agudo. Se somarmos a medida de um ângulo reto à medida de $\alpha$ e, em seguida, subtrairmos dessa soma a medida do suplemento de $\alpha$, obteremos sempre a medida de um ângulo**

**a) nulo, qualquer que seja a medida de $\alpha$.**

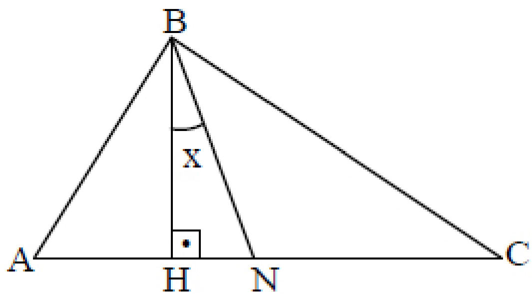
**b) reto, qualquer que seja a medida de $\alpha$.**

**c) agudo, desde que $45° < \alpha < 90°$.**

**d) raso, desde que $\alpha < 45°$.**

**62. (EEAR/2002)**

**Na figura, $BN$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{B}$ . Se $\widehat{A} = 50°$ e $\widehat{C} = 30°$, então a medida $x$ do ângulo $H\widehat{B}N$ é**



a) $5°$

b) $10°$

c) $15°$

d) $20°$

**63. (EEAR/2002)**

**Os números $2x + 10°$, $3x$, $3x - 20°$ são medidas em graus dos ângulos de um triângulo. Esse triângulo pode ser classificado em**

**a) acutângulo.**

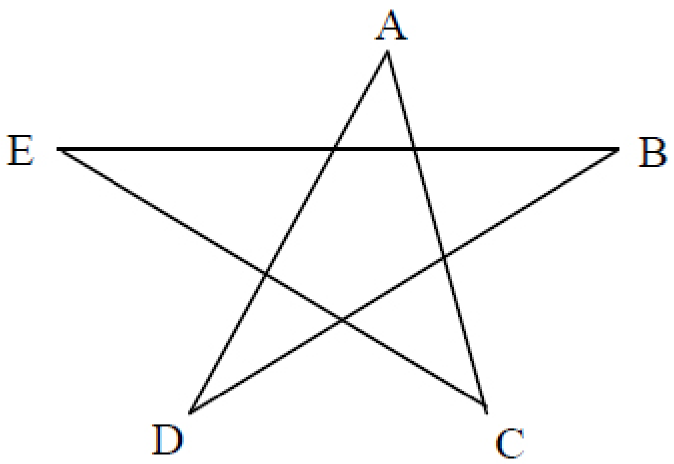
**b) equiângulo.**

**c) retângulo.**

**d) obtusângulo.**

**64. (EEAR/2002)**

**A soma das medidas dos ângulos internos $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$ da figura é**




a) $120°$

b) $180°$

c) $360°$

d) $540°$

**65. (EEAR/2002)**

**É falso afirmar:**

**a) Se $\widehat{AOB}$ é um ângulo raso, então $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.**

**b) Se $\widehat{AOB}$ é um ângulo nulo, então $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.**

**c) Dois ângulos adjacentes, cujos lados não comuns são semirretas opostas, somam $180°$.**

**d) Dois ângulos adjacentes são sempre consecutivos.**

**66. (EEAR/2002)**

**Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, de modo que a soma dos ângulos agudos formados vale $144°$. Então a diferença entre as medidas de um ângulo obtuso e de um agudo é**

**a) $85°$**

**b) $92°$**

**c) $108°$**

**d) $116°$**

**67. (EEAR/2002)**

**Duas réguas de madeira, AB e CD, com 8 cm cada uma estão ligadas em suas extremidades por dois fios, formando o retângulo ABCD (fig. 1). Mantendo-se fixa a régua AB e girando-se $180°$ a régua CD em torno do seu ponto médio, sem alterar os comprimentos dos fios, obtêm-se dois triângulos congruentes AIB e CID (fig.2).**

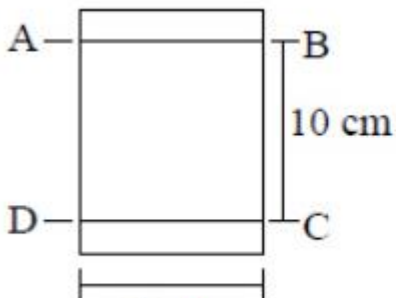


fig.1

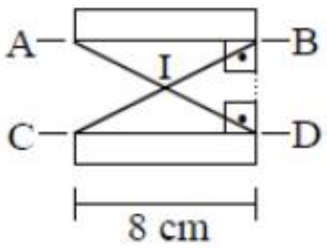


fig.2

**A distância, em cm, entre as duas réguas, nessa nova posição (fig.2) é**

**a) $5\sqrt{3}$**

**b) $5\sqrt{2}$**

**c) 5**

**d) 6**

**68. (EEAR/2002)**

**Os lados congruentes de um triângulo isósceles medem 50 cm cada. Se a medida da altura equivale a $\frac{12}{7}$ da medida da base, então a medida da base, em cm, é**

**a) 14**

**b) 25**

**c) 28**

**d) 50**

**69. (EEAR/2002)**

**Num triângulo ABC retângulo em A, o cateto $\overline{AC}$ mede 1, 5 cm e a altura traçada sobre a hipotenusa determina o segmento $\overline{HB}$ que mede 1, 6 cm. O valor da secante do ângulo interno C é**

**a)** $\frac{4}{3}$

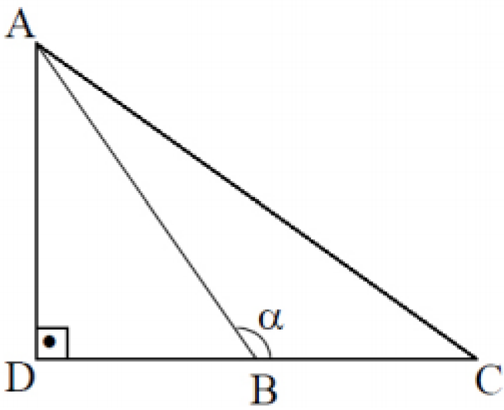
**b)** $\frac{5}{4}$

**c)** $\frac{4}{5}$

**d)** $\frac{5}{3}$

**70. (EEAR/2001)**

**Na figura, $\overline{AD} = 2\ cm$ e $\overline{AB} = 4\ cm$. O valor de $cos\ \alpha$ no triângulo ABC é**




**a)** $\frac{1}{2}$

**b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**71. (EEAR/2001)**

**Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede $5\ cm$ e o $sen(\widehat{B}\ ) = \frac{1}{2}\ sen(\widehat{C})$. O maior cateto mede, em cm:**

**a)** $\sqrt{3}$

**b)** $\sqrt{5}$

**c)** $2\sqrt{3}$

**d)** $2\sqrt{5}$

**72. (EEAR/2001)**

**Se os ângulos internos de um triângulo estão em PA (progressão aritmética) e o menor deles é a metade do maior, então o valor do maior ângulo, em graus, é:**

**a)** $80$

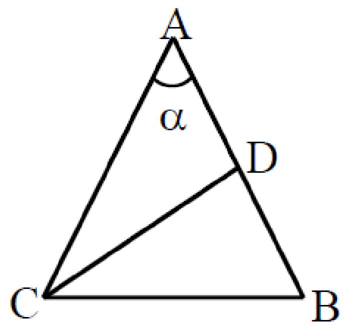
**b)** $90$

**c)** $100$

**d)** $120$

**73. (EEAR/2001)**

**Se na figura, $AB = AC$ e $BC = CD = DA$, então o valor do ângulo $\alpha$, em graus, é:**




**a)** $30$

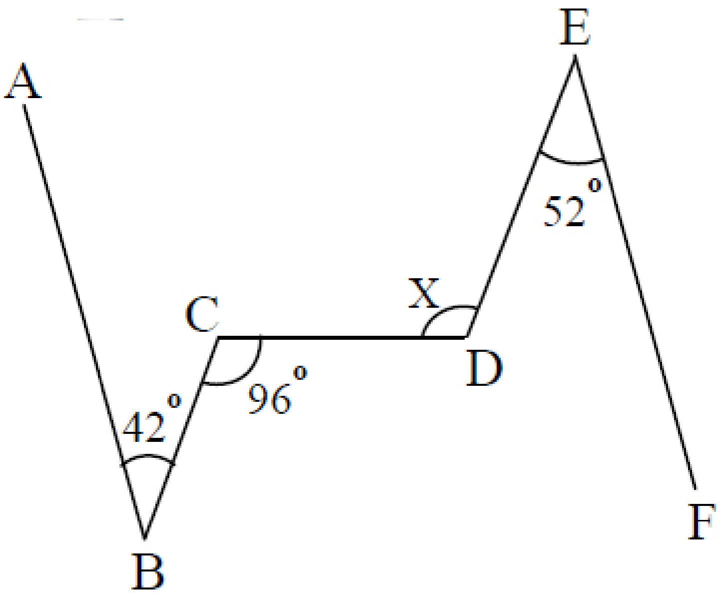
**b)** $36$

c) $45$

d) $60$

**74. (EEAR/2000)**

**Na figura $BA//EF$. A medida de $X$ é:**




a) $105°$

b) $106°$

c) $107°$

d) $108°$

## 5.1. GABARITO

**19.** a
**20.** d
**21.** c
**22.** b
**23.** d
**24.** b
**25.** c
**26.** b
**27.** d

28. a
29. c
30. c
31. d
32. b
33. c
34. a
35. c
36. c
37. b
38. d
39. d
40. d
41. d
42. b
43. c
44. c
45. a
46. c
47. c
48. a
49. c
50. a
51. b
52. b
53. b
54. d
55. a
56. c
57. c
58. a
59. b
60. b
61. c
62. b
63. a
64. b
65. b
66. c
67. d

**68.** c
**69.** d
**70.** d
**71.** d
**72.** a
**73.** b
**74.** b

# 6. LISTA DE QUESTÕES COMENTADAS

**19. (ESA/2015)**

**Em um triângulo retângulo de lados $9\ m$, $12\ m$ e $15\ m$, a altura relativa ao maior lado será:**

**a)** $7,2\ m$

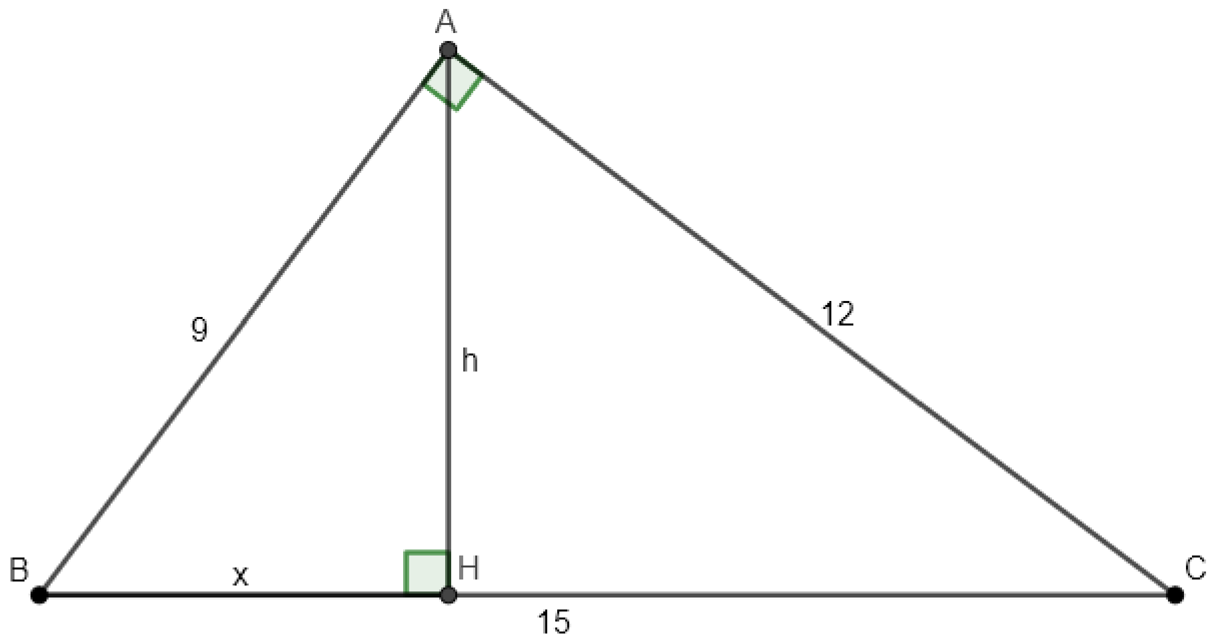
**b)** $7,8\ m$

**c)** $8,6\ m$

**d)** $9,2\ m$

**e)** $9,6\ m$

**Comentário:**




Observe que $\Delta HBA$ e $\Delta ABC$ são triângulos retângulos e que, além disso, $H\hat{B}A = A\hat{B}C$. Portanto, temos que $\Delta HBA \sim \Delta ABC$. Logo, valem as relações:

$$\frac{HB}{AB} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{9}{15} \therefore x = \frac{27}{5}.$$

Usando o teorema de Pitágoras no $\Delta HBA$, temos:

$$h^2 = 9^2 - x^2 = 9^2 - \left(\frac{27}{5}\right)^2 = 9^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right] = 9^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \Rightarrow h = 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{36}{5} \therefore h = 7{,}2\ m.$$

**Gabarito: "a".**

---

**20. (ESA/2015)**

**Num triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{8}$ e $\sqrt{9}$, a hipotenusa mede**

a) $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{11}$

c) $\sqrt{13}$

d) $\sqrt{17}$

e) $\sqrt{19}$

**Comentário:**

Teorema de Pitágoras. $a^2 = b^2 + c^2 = \sqrt{8}^2 + \sqrt{9}^2 = 8 + 9 = 17 \therefore a = \sqrt{17}$.

**Gabarito: "d".**

---

**21. (ESA/2006)**

**O ângulo convexo formado pelos ponteiros de um relógio às 14h25min é igual a:**

a) $86°30'$

b) $46°30'$

c) $77°30'$

d) $89°60'$

e) $12°30'$

**Comentários**

Vamos definir o 0° na posição 12 do relógio. Se pensamos, às 14h o ponteiro das horas estará na posição 60° e o ponteiro dos minutos estará na posição 0°. Entretanto, às 14h25, terá se passado 25/60 = 5/12 de uma hora. Assim, como em uma hora o ponteiro das horas gira:

$$\frac{360°}{12} = 30°$$

Então, passados 5/12 de uma hora, o ponteiro das horas terá girado de:

$$\frac{5}{12} \cdot 30° = \frac{25°}{2}$$

Então sua nova posição será $60° + 25°/2 = 72{,}5°$.

Agora, pensando no ponteiro dos minutos, sabemos que em uma hora ele gira $360°$. Portanto, em 5/12 de uma hora, ele terá girado:

$$\frac{5}{12} \cdot 360° = 150°$$

E essa é sua posição final (14h25).

Portanto, o ângulo convexo entre estes (menor que 180°) é:

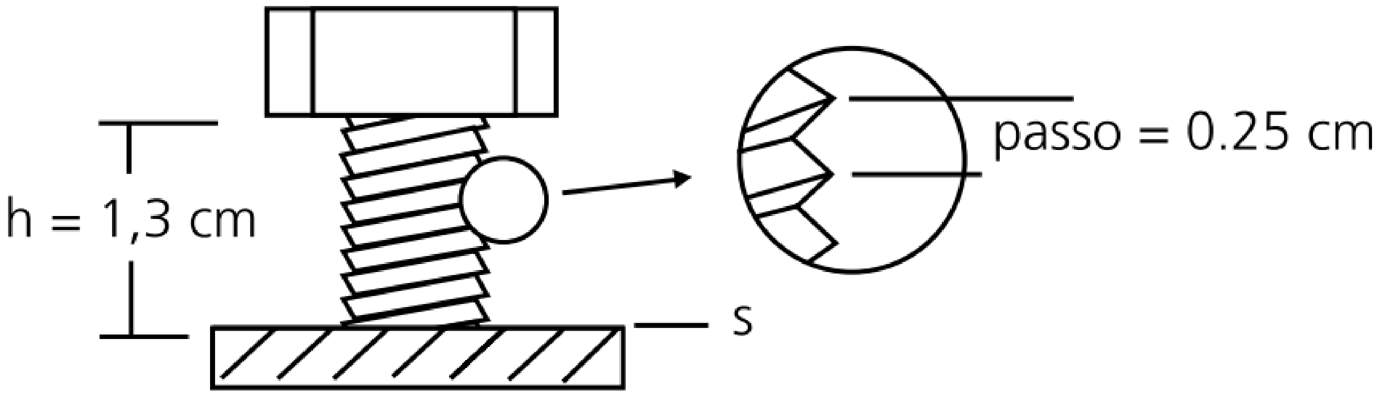
$$150° - 72{,}5° = 77{,}5° = 77°30'$$

**Gabarito: “c”.**

---

**22. (ESA/2005)**

**Chama-se passo a distância entre dois sulcos consecutivos de um parafuso. Ao dar-se uma volta completa $(\alpha = 360°)$ em uma chave que o aperta, o parafuso penetra 1 passo no corpo onde está preso. Na situação ao lado, para apertar completamente o parafuso até que sua cabeça encoste na superfície “s” deve-se girar o parafuso, em graus**




**a) 468°**

**b) 1872°**

**c) 1440°**

**d) 117°**

**e) 1989°**

**Comentários**

Se precisamos que o parafuso entre $h = 1{,}3\ cm$ então precisamos fazer a regra de 3, pois sabemos que 360° faz com que o parafuso entre 0,25 cm.

$$\frac{360°}{0{,}25} = \frac{\alpha}{1{,}3} \Rightarrow \alpha = \frac{130}{25} \cdot 360° \Rightarrow \alpha = 1872°$$

**Gabarito: “b”.**

---

**23. (EEAR/2018)**

**O complemento do suplemento do ângulo de $112°$ mede**

**a)** $18°$

**b)** $28°$

**c)** $12°$

**d)** $22°$

**Comentário:**

suplemento de $112° = 180° - 112° = 68°$.

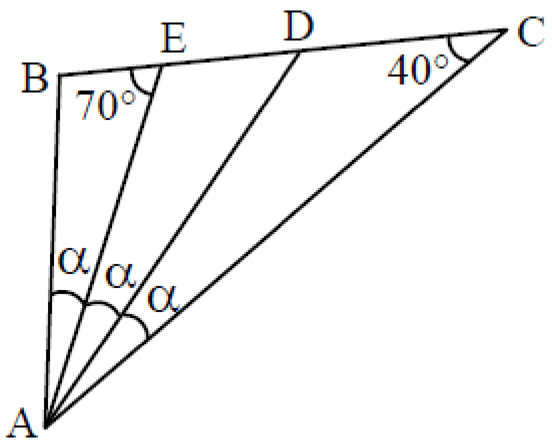
complemento de $68° = 90° - 68° = 22°$.

**Gabarito: “d”.**

---

**24. (EEAR/2017)**

**Se $ABC$ é um triângulo, o valor de $\alpha$ é**




**a)** $10°$

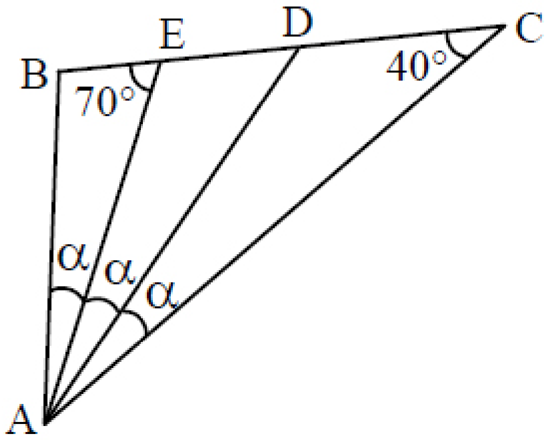
**b)** $15°$

**c)** $20°$

**d)** $25°$

**Comentários**

Com base na seguinte figura presente no enunciado, temos




Perceba no triângulo $\Delta ABC$ e a primeira relação:

$$3\alpha + \hat{B} + 40° = 180°$$

$$3\alpha + \hat{B} = 140°$$

No triângulo $\Delta ABE$ obtemos a segunda relação:

$$\alpha + \hat{B} + 70° = 180°$$
$$\alpha + \hat{B} = 110°$$

Subtraindo a segunda relação da primeira temos:

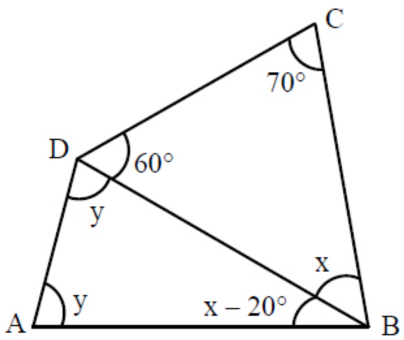
$$3\alpha + \hat{B} - (\alpha + \hat{B}) = 140° - 110°$$
$$2\alpha = 30°$$
$$\alpha = 15°$$

**Gabarito: "b".**

---

**25. (EEAR/2017)**

**No quadrilátero $ABCD$, o valor de $y - x$ é igual a**




a) $2x$

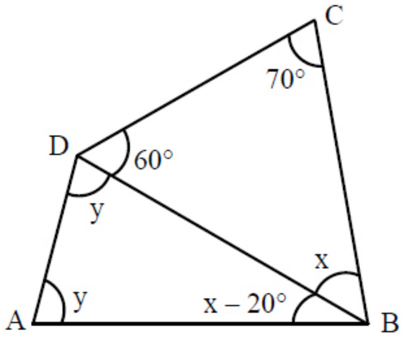
**b)** $2y$

**c)** $\frac{x}{2}$

**d)** $\frac{y}{2}$

**Comentários**

Com base na seguinte figura presente no enunciado, temos




No triângulo $\Delta BDC$:

$$60° + 70° + x = 180°$$
$$x = 50°$$

No triângulo $\Delta ABD$ temos:

$$y + y + x - 20° = 180°$$

$$2y + 50° - 20° = 180°$$
$$2y = 150°$$

$$y = 75°$$

Temos, portanto, que $y - x = 75° - 50° = 25°$

$$y - x = 25° = \frac{50°}{2} = \frac{x}{2}$$

**Gabarito: "c".**

---

**26. (EEAR/2016)**

**Os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes. Sendo $\widehat{A} = 2x + 15°$ e $\widehat{B} = 5x - 9°$. Assinale a alternativa que representa, corretamente, o valor de $x$.**

**a)** $2°$

**b)** $8°$

**c)** $12°$

d) $24°$

**Comentário:**

$$\hat{A} \text{ e } \hat{B} \text{ congruentes} \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow 2x + 15° = 5x - 9° \Rightarrow 3x = 24° \therefore x = 8°$$

**Gabarito: "b".**

---

**27. (EEAR/2016)**

**Sabe-se que a hipotenusa de um triângulo retângulo tem $5\sqrt{5}$ cm de comprimento e a soma dos catetos é igual a 15 cm. As medidas, em cm, dos catetos são**

**a) 6 e 9**

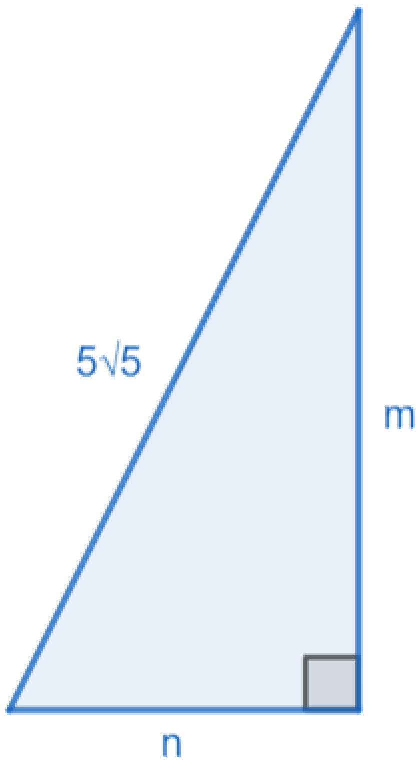
**b) 2 e 13**

**c) 3 e 12**

**d) 5 e 10**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Pelo enunciado temos:

$$m + n = 15$$

$$m = 15 - n \qquad eq.1$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$m^2 + n^2 = \left(5\sqrt{5}\right)^2 = 125 \qquad eq.2$$

Substituindo a eq. 1 em eq. 2, obtemos:

$$(15 - n)^2 + n^2 = 125$$

$$(225 - 30n + n^2) + n^2 = 125$$

$$2 \cdot n^2 - 30 \cdot n + 100 = 0$$

Simplificando:

$$n^2 - 15n + 50 = 0$$

Aplicando o método de Bhaskara para resolver a equação de segundo grau em função de n:

$$n = \frac{-(-15) \pm \sqrt{(-15)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (50)}}{2 \cdot (1)}$$

$$\Rightarrow n = 10 \; ou \; n = 5$$

Substituindo os valores de n em eq. 1, obtemos:

Se n = 10:

$m = 15 - (10) = 5$ $\qquad m = 5$

Se n = 5:

$m = 15 - (5) = 10$

$m = 10$

Conclusão, os valores dos catetos são 5 e 10

**Gabarito: "d".**

---

**28. (EEAR/2016)**

**Uma escada é apoiada em uma parede perpendicular ao solo, que por sua vez é plano. A base da escada, ou seja, seu contato com o chão, dista 10m da parede. O apoio dessa escada com a parede está a uma altura de $10\sqrt{3}$m do solo. Isto posto, o ângulo entre a escada e o solo é de**

**a)** $60°$

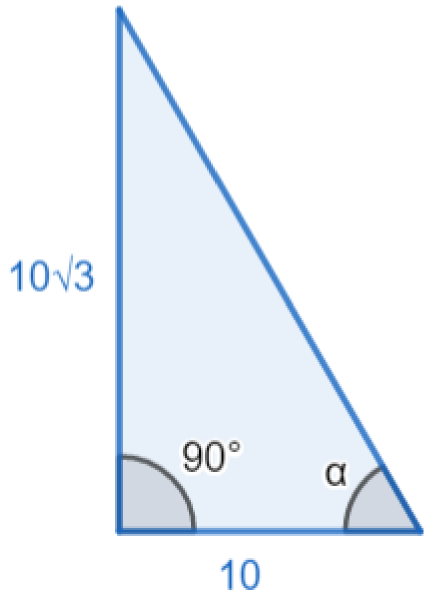
**b)** $45°$

c) $30°$

d) $15°$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Observemos o valor de $tg(\alpha)$

$$tg(\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$\Rightarrow tg(\alpha) = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$$

Temos que $tg(\alpha) = \sqrt{3}$ e, segundo a tabela de ângulos, o ângulo cuja tangente vale $\sqrt{3}$ vale $60°$

$$\Rightarrow \alpha = 60°$$

**Gabarito: "a".**

---

**29. (EEAR/2016)**

**Um triângulo ABC de base $BC = (x + 2)$ tem seus lados AB e AC medindo, respectivamente, $(3x - 4)$ $e$ $(x + 8)$. Sendo este triângulo isósceles, a medida da base BC é**

a) $4$

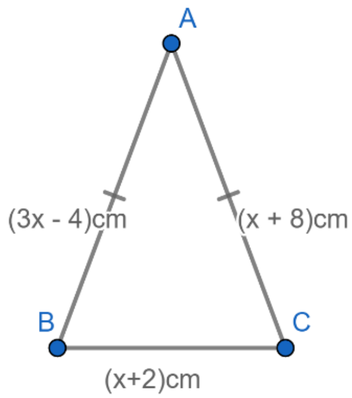
b) $6$

c) $8$

d) $10$

### Comentários

De acordo com o enunciado temos a seguinte figura:




Sabemos que $AB = AC$, logo:

$$AB = AC$$
$$3x - 4 = x + 8$$
$$2x = 12$$
$$x = 6$$

Portanto temos:

$$BC = 2 + 6 = 8$$

**Gabarito: "c".**

---

**30. (EEAR/2015)**

**Em um triângulo ABC, retângulo em C, a razão $\frac{sen\,\hat{B}}{\cos\hat{A}}$ é igual a**

**a)** $\frac{AC}{BC}$

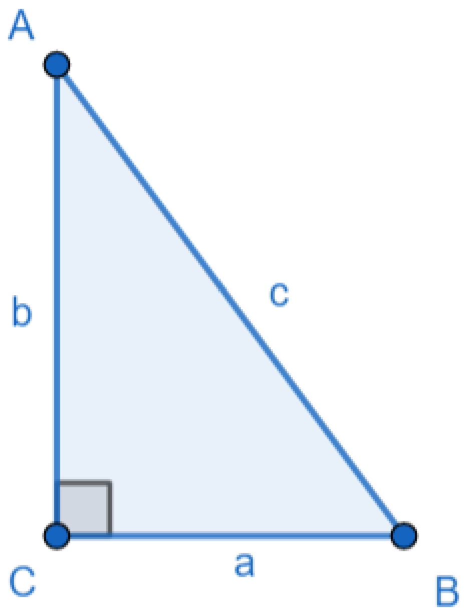
**b)** $\frac{AB}{AC}$

**c) 1**

**d) 2**

### Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Aplicando diretamente a definição de seno e cosseno em um triângulo retângulo, obtemos:

$$\frac{sen\,\hat{B}}{\cos\hat{A}}=\frac{b/c}{b/c}=\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{b}=1$$

**Gabarito: “c”.**

---

**31. (EEAR/2015)**

**Seja $ABC$ um triângulo isósceles de base $BC=(x+3)cm$, com $AB=(x+4)cm$ e $AC=(3x-10)cm$. A base de $ABC$ mede cm.**

**a) $4$**

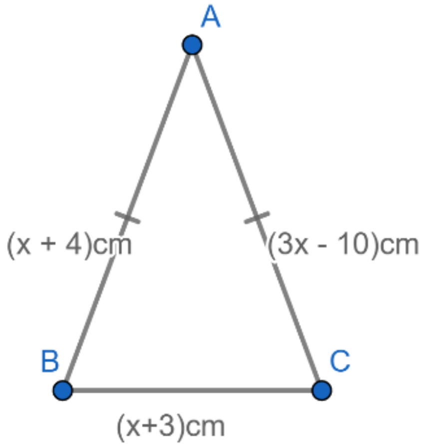
**b) $6$**

**c) $8$**

**d) $10$**

**Comentários**

De acordo com o enunciado temos a seguinte figura:




Sabemos que $AB = AC$, logo:

$$AB = AC$$
$$x + 4 = 3x - 10$$
$$14 = 2x$$
$$x = 7$$

Portanto, temos:

$$BC = 3 + 7 = 10$$

**Gabarito: "d".**

---

**32. (EEAR/2013)**

**Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o dobro de um cateto. O ângulo oposto a esse cateto mede**

**a)** $20°$

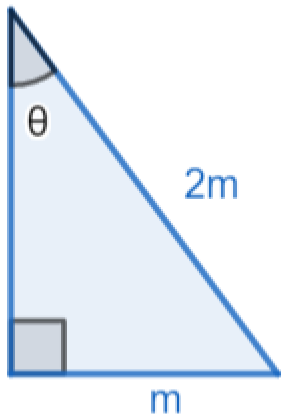
**b)** $30°$

**c)** $45°$

**d)** $60°$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Calculemos o $sen(\theta)$

$$sen(\theta) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{m}{2m} = \frac{1}{2}$$

$sen(\theta) = \frac{1}{2}$, sabemos que o ângulo cujo seno vale $\frac{1}{2}$ é o ângulo de 30°

**Gabarito: "b".**

---

**33. (EEAR/2012)**

**Num triângulo $\Delta RST$ a medida do ângulo interno $\widehat{R}_i$ é 68° e do ângulo externo $\widehat{S_e}$ é 105° Então o ângulo interno T mede:**

**a)** $52°$

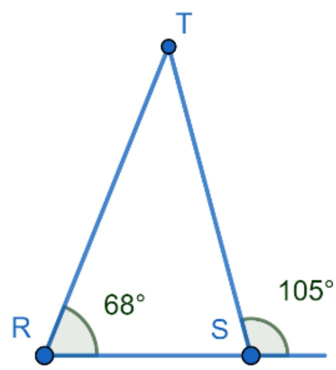
**b)** $45°$

**c)** $37°$

**d)** $30°$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Sabemos que o ângulo externo $\widehat{S_e}$ é suplementar ao ângulo interno $\widehat{S}_i$, logo:

$$\widehat{S_e} + \widehat{S}_i = 180°$$

$$105° + \widehat{S}_i = 180°$$

$$\widehat{S}_i = 75°$$

A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre $180°$, portanto:

$$\widehat{R}_i + \widehat{S}_i + \widehat{T}_i = 180°$$

$$68° + 75° + \widehat{T}_i = 180°$$

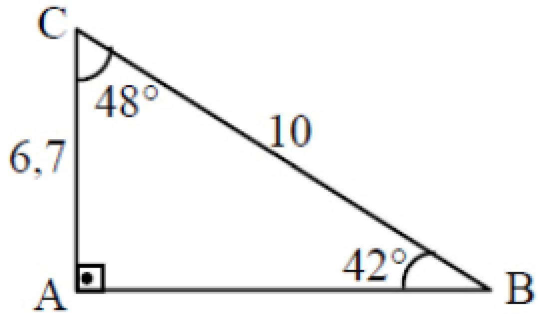
$$\widehat{T}_i = 37°$$

**Gabarito: "c".**

---

**34. (EEAR/2012)**

**Considerando as medidas indicadas no triângulo, o valor de $sen(42°) + sen(48°)$ é**




**a) 1,41**

**b) 1,67**

**c) 1,74**

**d) 1,85**

**Comentários**

Utilizando o Teorema De Pitágoras, obtemos:

$$(10)^2 = (6,7)^2 + (\overline{AB})^2$$

$$\Rightarrow\ (\overline{AB})^2 = (10)^2 - (6,7)^2 = 55,11$$

$$\Rightarrow\ \overline{AB} = \sqrt{55,11} \approx 7,4$$

Agora, calculando o valor dos senos a partir da definição, obtemos:

$$sen(42°) + sen(48°) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} + \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$= \frac{6,7}{10} + \frac{7,4}{10} = 0,67 + 0,74 = 1,41$$

$$sen(42°) + sen(48°) = 1,41$$

**Gabarito: "a".**

---

**35. (EEAR/2011)**

**Em um triângulo retângulo, um dos catetos mede 4 cm, e o ângulo que lhe é adjacente mede $60°$. A hipotenusa desse triângulo, em cm, mede**

**a) 6**

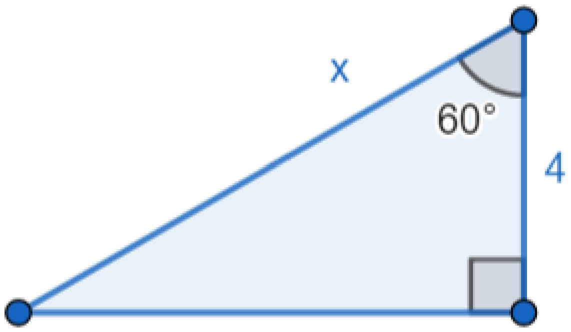
**b) 7**

**c) 8**

**d) 9**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Utilizando a definição de cosseno:

$$\cos(60°) = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$$

$$\Rightarrow \cos(60°) = \frac{4}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = 4 \cdot 2 = 8$$

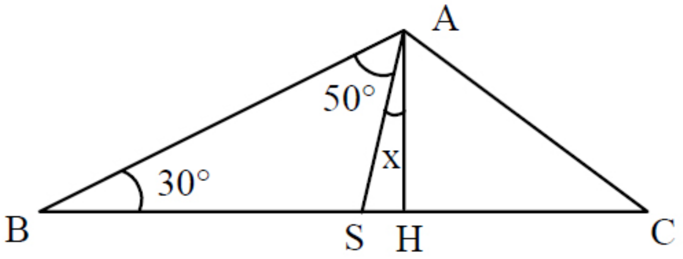
$$x = 8\ cm$$

**Gabarito: "c".**

---

**36. (EEAR/2010)**

**Na figura, AH é altura do triângulo ABC.**




**Assim, o valor de x é:**

a) $20°$

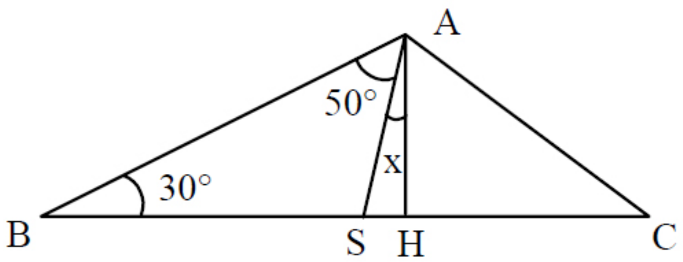
b) $15°$

c) $10°$

d) $5°$

**Comentários**

De acordo com figura do enunciado a seguir:




Sabemos que o ângulo interno $B\hat{S}A$ é suplementar a soma dos ângulos do $\Delta BSA$:

$$B\hat{S}A + 30° + 50° = 180°$$

$$B\hat{S}A = 100°$$

Sabemos que o ângulo interno $A\hat{S}H$ é suplementar ao ângulo $B\hat{S}A$:

$$B\hat{S}A + A\hat{S}H = 180°$$

$$100° + A\hat{S}H = 180°$$

$$A\hat{S}H = 80°$$

O triângulo $\Delta ASH$ é retângulo, portanto, pela soma dos ângulos internos, temos:

$$x + A\hat{S}H + 90° = 180°$$

$$\boldsymbol{x + 80° + 90° = 180°}$$

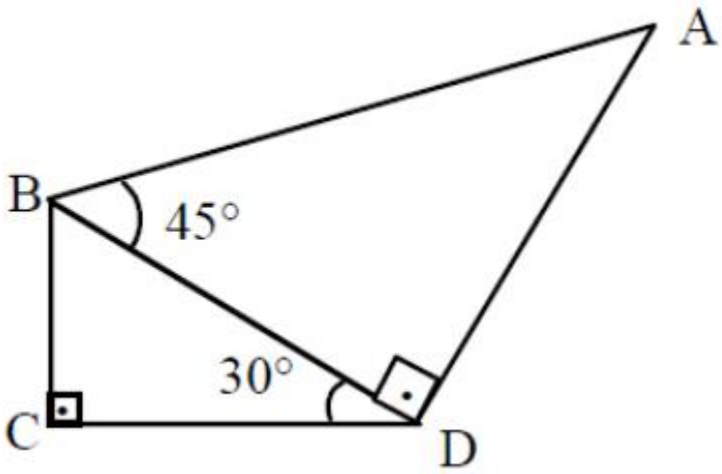
$$\boldsymbol{x = 10°}$$

**Gabarito: “c”.**

---

**37. (EEAR/2009)**

**Na figura, $\overline{BC} = 2\ cm$.**




**Assim, a medida de $\overline{AB}$, em cm, é**

**a)** $2\sqrt{3}$

**b)** $4\sqrt{2}$

**c)** $5\sqrt{2}$

**d)** $3\sqrt{3}$

**Comentários**

Considere o triângulo BCD isoladamente. Aplicando a definição de seno no triângulo retângulo relativo ao ângulo $B\widehat{D}C$, obtemos:

$$sen(30°) = \frac{1}{2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{2}{\overline{BD}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{BD} = 4\ cm$$

Agora considere o triângulo ABD isoladamente. Aplicando a definição de cosseno no triângulo retângulo relativo ao ângulo $A\widehat{B}D$, obtemos:

$$cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \frac{4}{\overline{AB}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AB} = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

**Gabarito: “b”**

---

**38. (EEAR/2008)**

**Um triângulo $\Delta ABC$ tem dois lados congruentes que formam entre si um ângulo de $42°$. Um dos outros dois ângulos internos desse triângulo medem**

**a)** $39°$

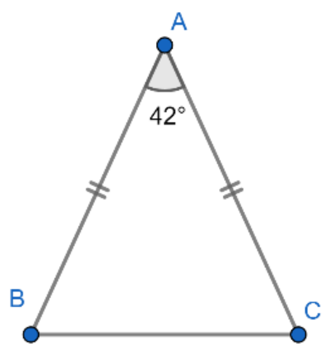
**b)** $48°$

**c)** $58°$

**d)** $69°$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Como $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são congruentes e se trata de um triângulo, então caracteriza-se um triângulo isósceles, logo os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são congruentes.

Sendo $\hat{B}$ e $\hat{C}$ congruentes, temos:

$$\hat{B} = \hat{C} \implies \hat{B} + \hat{C} + 42° = 180°$$

$$2\hat{B} = 180° - 42° = 138°$$
$$\hat{B} = \hat{C} = 69°$$

**Gabarito: “d”.**

---

**39. (EEAR/2008)**

**O triângulo cujos lados medem $6cm, 7cm\ e\ 10cm$ é classificado como**

**a) equilátero e retângulo.**

**b) escaleno e acutângulo.**

**c) isósceles e acutângulo.**

**d) escaleno e obtusângulo.**

**Comentários**

Do enunciado temos a informação da medida dos lados do triângulo.

Perceba que todos os lados têm valores diferentes entre si, logo é um triângulo escaleno.

$$\Longrightarrow \text{Todos os lados diferentes} = \text{Triângulo escaleno}$$

Analisando a situação dos ângulos, sendo $a$ e $b$ os dois menores lados e $c$ o maior lado, temos da Síntese de Clairaut:

$$\begin{cases} Se\ a^2 + b^2 < c^2 \Longrightarrow obtusângulo \\ Se\ a^2 + b^2 > c^2 \Longrightarrow acutângulo \end{cases}$$

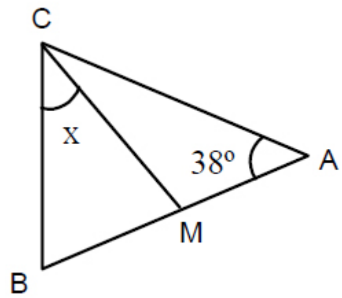
Portanto, sabendo que $6^2 + 7^2 = 85 < 10^2$, temos que o triângulo é um obtusângulo.

**Gabarito: "d".**

---

**40. (EEAR/2008)**

**Na figura, $AB = AC$ e $BC = CM$. O valor de x é:**




**a)** $50°$

**b)** $45°$

**c)** $42°$

**d)** $38°$

**Comentários**

Do enunciado tem-se que $AB = AC$ indica que o triângulo $\Delta ABC$ é isósceles de base BC, logo, os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são iguais.

$$\hat{B} = \hat{C}$$

Do triângulo $\Delta ABC$ temos a seguinte relação:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$

$$38° + \hat{C} + \hat{C} = 180°$$

$$2\hat{C} = 142°$$
$$\hat{C} = \hat{B} = 71°$$

Ainda, do enunciado, tem-se que $BC = CM$ indica que o triângulo $\Delta BMC$ também é isósceles de base BM, logo:

$$\hat{B} = B\widehat{M}C = 71°$$

Do triângulo $\Delta BMC$:

$$B\widehat{M}C + \hat{B} + x = 180°$$

$$71° + \widehat{71}° + x = 180°$$

$$x = 38°$$

**Gabarito: "d".**

---

**41. (EEAR/2008)**

**Em um triângulo ABC, retângulo em A, a hipotenusa mede $5\ dm$ e $sen(\hat{B}) = \frac{1}{2} \cdot sen(\hat{C})$. Nessas condições, o maior cateto mede, em dm,**

**a) $3$**

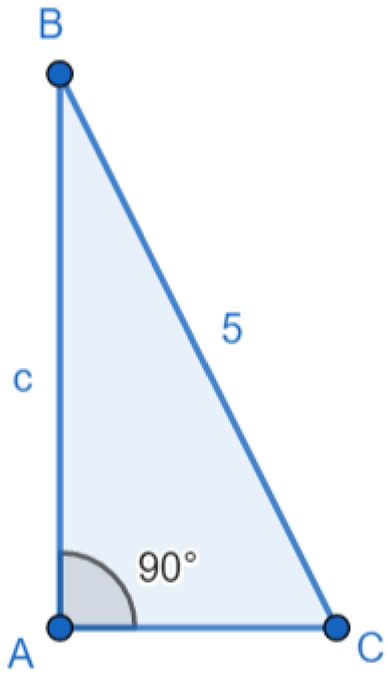
**b) $4$**

**c) $\sqrt{5}$**

**d) $2\sqrt{5}$**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




**Obs:** O maior cateto é oposto ao maior ângulo e como já existe um ângulo reto, podemos concluir que o maior ângulo entre $\hat{B}$ e $\hat{C}$ é o ângulo com o maior valor de seno. E dada a igualdade fornecida no enunciado, o maior seno é o seno de $\hat{C}$. Portanto o maior cateto é o cateto $\overline{AB}$. Também sabemos que, devido ao triângulo ser retângulo:

$$sen(\hat{B}) = cos(\hat{C})$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos^2 \hat{C} + \operatorname{sen}^2 \hat{C} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 \hat{B} + \operatorname{sen}^2 \hat{C} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} \cdot sen(\hat{C})\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \hat{C} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot \operatorname{sen}^2 \hat{C} + \operatorname{sen}^2 \hat{C} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{5}{4} \cdot \operatorname{sen}^2 \hat{C} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 \hat{C} = \frac{4}{5}$$

$$sen\, \hat{C} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Aplicando agora a definição de seno para descobrir a medida de $\overline{AB}$

$$sen\,\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$sen\,\hat{C} = \frac{\overline{AB}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AB} = 2\sqrt{5}$$

**Gabarito: "d"**

---

**42. (EEAR/2006)**

**Em um triângulo $ABC$, o ângulo externo de vértice A mede $116°$. Se a diferença entre as medidas dos ângulos internos $B$ e $C$ é $30°$, então o maior ângulo interno do triângulo mede:**

a) $75°$.

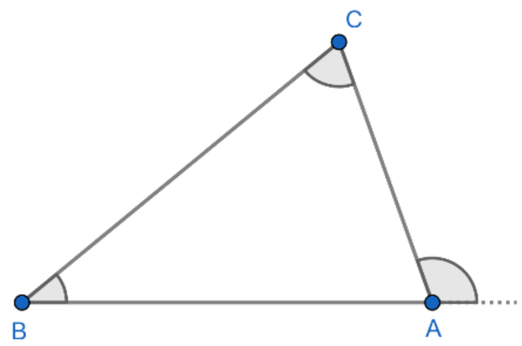
b) $73°$.

c) $70°$.

d) $68°$.

**Comentários**

De acordo com o enunciado tem-se a seguinte figura:




No triângulo $\Delta ABC$ temos a seguinte relação dos ângulos internos:

$$A_i + B_i + C_i = 180° \qquad Eq.1$$

No vértice $A$ temos:

$$A_i + A_e = 180° \qquad Eq.2$$

Subtraindo $Eq.1$ da $Eq.2$, temos:

$$B_i + C_i - A_e = 0°$$
$$B_i + C_i = A_e$$

$$B_i + C_i = 116°$$

Logo temos do enunciado que:

$$B_i - C_i = 30°$$

Portanto do sistema a seguir:

$$\begin{cases} B_i + C_i = 116° \\ B_i - C_i = 30° \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_i = 73° \\ C_i = 43° \end{cases}$$

Da $Eq. 2$ temos que $A_i = 180° - 116° = 64°$

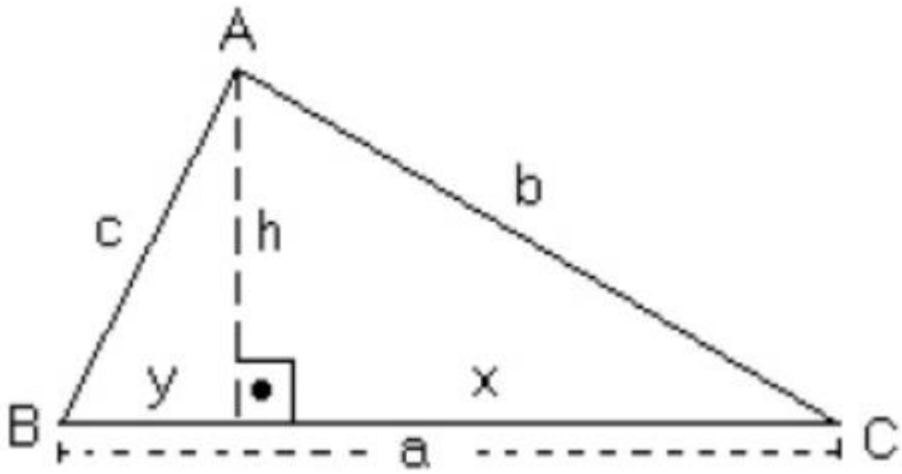
Assim o maior ângulo é o $B_i = 73°$

**Gabarito: “b”.**

---

**43. (EEAR/2006)**

**Sejam as relações métricas no triângulo ABC:**




**I –** $\boldsymbol{b^2 = a \cdot x}$

**II –** $\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \widehat{A}}$

**III –** $\boldsymbol{h = x \cdot y}$

**IV –** $\boldsymbol{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$

**Se o triângulo ABC é retângulo em A, então o número de relações verdadeiras acima é**

**a) 1**

**b) 2**

**c) 3**

**d) 4**

**Comentários**

I – VERDADEIRA

Por Pitágoras: $b^2 = a^2 - c^2$ e $c^2 = h^2 + y^2$

Então, $b^2 = a^2 - h^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = a^2 - h^2 - (a-x)^2$

$$\Rightarrow \quad b^2 = a^2 - h^2 - a^2 + 2 \cdot a \cdot x - x^2$$

$$b^2 = 2 \cdot a \cdot x - (x^2 + h^2)$$

$$b^2 = 2 \cdot a \cdot x - b^2$$

$$2b^2 = 2 \cdot a \cdot x$$

$$b^2 = a \cdot x$$

Analogamente, $c^2 = a \cdot y$

II – VERDADEIRA. Aplicação direta da Lei dos Cossenos

III – FALSO

De Pitágoras, obtemos:

$\begin{cases} h^2 = b^2 - x^2 \\ h^2 = c^2 - y^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot h^2 = b^2 + c^2 - x^2 - y^2$

$2 \cdot h^2 = a^2 - x^2 - y^2 = (x+y)^2 - x^2 - y^2$

$2 \cdot h^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2 - x^2 - y^2 = 2 \cdot x \cdot y$

$h^2 = x \cdot y$

IV – VERDADEIRO

Utilizando as relações anteriores, $b^2 = a \cdot x$, $c^2 = a \cdot y$ e $h^2 = x \cdot y$, obtemos:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{x \cdot y} = \frac{a^2}{a^2 \cdot x \cdot y} = \frac{a^2}{(a \cdot x) \cdot (a \cdot y)} = \frac{a^2}{(b^2) \cdot (c^2)} = \frac{b^2 + c^2}{(b^2) \cdot (c^2)} =$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{b^2}{(b^2) \cdot (c^2)} + \frac{c^2}{(b^2) \cdot (c^2)} = \frac{1}{(c^2)} + \frac{1}{(b^2)}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

**Gabarito: “c”**

---

**44. (EEAR/2005)**

**Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual ao dobro do produto das medidas dos catetos. Um dos ângulos agudos desse triângulo mede**

**a)** $15°$

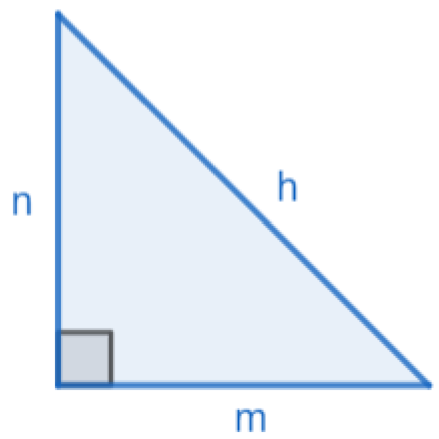
**b)** $30°$

**c)** $45°$

**d)** $60°$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




$$h^2 = 2 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{n}$$

De Pitágoras $h^2 = m^2 + n^2 = 2 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{n}$

$\Rightarrow \quad m^2 + n^2 - 2 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{n} \ = 0$

$m^2 + n^2 - 2 \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{n} = (m - n)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = n$

Logo, trata-se de um triângulo retângulo cujas medidas dos catetos são iguais. Portanto, temos um triângulo isósceles. Logo, o menor ângulo vale $45°$.

**Gabarito: "c"**

---

**45. (EEAR/2005)**

**Num triângulo retângulo, a hipotenusa mede 20m, e um dos catetos, 10m. A medida da projeção deste cateto sobre a hipotenusa, em metros, é igual a**

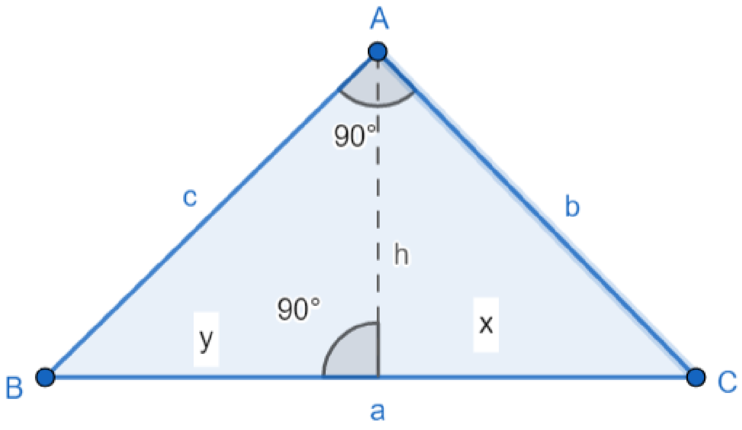
**a) 5**

**b) 6**

c) 7

d) 8

**Comentários**




Podemos usar a seguinte relação,

$$b^2 = a \cdot x \quad \text{e} \quad c^2 = a \cdot y$$

Tendo isso em vista:

$$10^2 = 20 \cdot m = 100$$

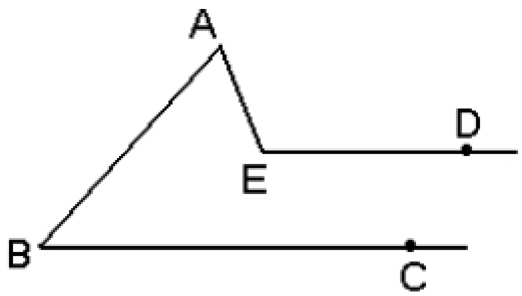
$$\Rightarrow \quad m = 5$$

**Gabarito: “a”**

---

**46. (EEAR/2004)**

Na figura, $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$, $med(E\hat{A}B) = 80°$ e $med(C\hat{B}A) = 35°$. Assim, a medida de $D\hat{E}A$ é




a) $100°$.

b) $110°$.

c) $115°$.

d) $120°$.

**Comentário:**

Prolonga-se o segmento $AE$ até o ponto $F$ sobre o segmento $BC$. Pelo teorema do ângulo externo no $\Delta ABF$, $med(A\hat{F}C) = med(F\hat{B}A) + med(F\hat{A}B) = med(C\hat{B}A) + med(E\hat{A}B) = 35° + 80° \Rightarrow$

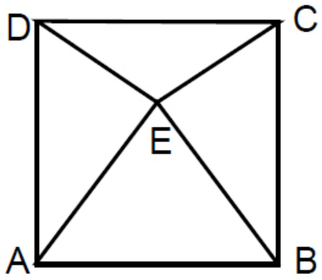
$\Rightarrow med(A\hat{F}C) = 115°$. Perceba que, como $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ e $\overleftrightarrow{AF}$ é uma transversal, temos que os ângulos $D\hat{E}A$ e $A\hat{F}C$ são correspondentes. Logo, $med(D\hat{E}A) = med(A\hat{F}C) = 115°$

**Gabarito: "c".**

---

**47. (EEAR/2004)**

**A figura $ABCD$ é um quadrado, e $ABE$ é um triângulo equilátero.**




**Nessas condições, a medida do ângulo $E\hat{D}C$ é:**

a) $5°$

b) $10°$

c) $15°$

d) $20°$

**Comentários**

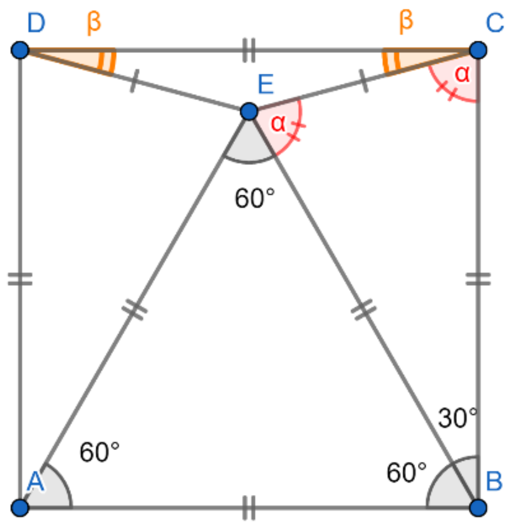
Usaremos do fato de que todos os lados do triângulo e do quadrado são iguais, logo, temos as relações:

$\gg EB = BC \Longrightarrow \Delta EBC$ é $isósceles$

$\gg AE = AD \Longrightarrow \Delta EAD$ é $isósceles$

$\gg \Delta EBC \sim \Delta EAD \Longrightarrow ED = EC \Longrightarrow \Delta EDC$ é $isósceles$

Assim, temos a seguinte figura:




Perceba pelo triângulo $\Delta BEC$:

$$30° + \alpha + \alpha = 180°$$
$$2\alpha = 150°$$
$$\alpha = 75°$$

Sabendo que o ângulo $B\hat{C}D = 90°$, temos:

$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\beta + 75° = 90°$$
$$\beta = 15°$$

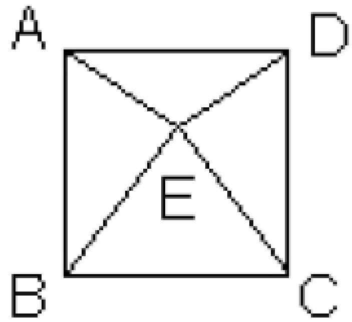
Como $\beta = E\hat{D}C = 15°$

**Gabarito: “c”.**

---

**48. (EEAR/2004)**

**Se $ABCD$ é um quadrado e $BEC$ é um triângulo equilátero, então a medida do ângulo $E\hat{A}B$ é:**




**a)** $75°$

**b)** $60°$

**c)** $30°$

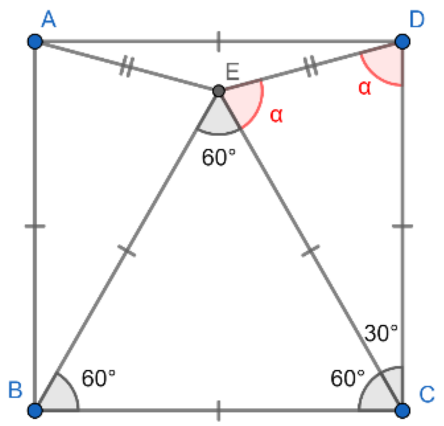
**d)** $85°$

**Comentários**

Usaremos do fato de que todos os lados do triângulo e do quadrado são iguais, logo, temos as relações:

$\gg EC = DC \Longrightarrow \Delta EDC\ \text{é}\ isósceles$

Assim, temos a seguinte figura:




Perceba pelo triângulo $\Delta DEC$:

$$30° + \alpha + \alpha = 180°$$
$$2\alpha = 150°$$
$$\alpha = 75°$$

Logo, $\alpha = C\widehat{D}E = E\hat{A}B = 75°$.

**Gabarito: "a".**

---

**49. (EEAR/2004)**

**O perímetro de um triângulo retângulo é 30 cm. Se a soma das medidas dos catetos é 17 cm, e a soma das medidas da hipotenusa e do cateto menor é 18 cm, então a medida, em cm, do cateto maior é**

**a) 8**

**b) 9**

**c) 12**

**d) 15**

**Comentários**

Seja m o cateto maior, n o cateto menor e h a hipotenusa.

Vamos representar as equações dadas no enunciado.

$$\begin{cases} m+n+h=30 & eq.1 \\ m+n=17 & eq.2 \\ h+n=18 & eq.3 \end{cases}$$

Substituindo a equação eq.2 em eq.1, obtemos:

$$17+h=30$$

$$\Rightarrow \quad h=13\ cm \quad \text{eq.4}$$

Substituindo a equação eq.4 em eq.3, obtemos:

$$13+n=18$$

$$\Rightarrow \quad n=5\ cm \quad \text{eq.5}$$

Substituindo a equação eq.4 e eq.5 em eq.1, obtemos:

$$m+5+13=30$$

$$\Rightarrow \quad m=12\ cm$$

**Obs:** fizemos um método para descobrir todas as medidas, entretanto, poderíamos ter apenas substituído a eq.3 em eq.1 e obtido o valor do maior cateto diretamente.

$$m+18=30$$

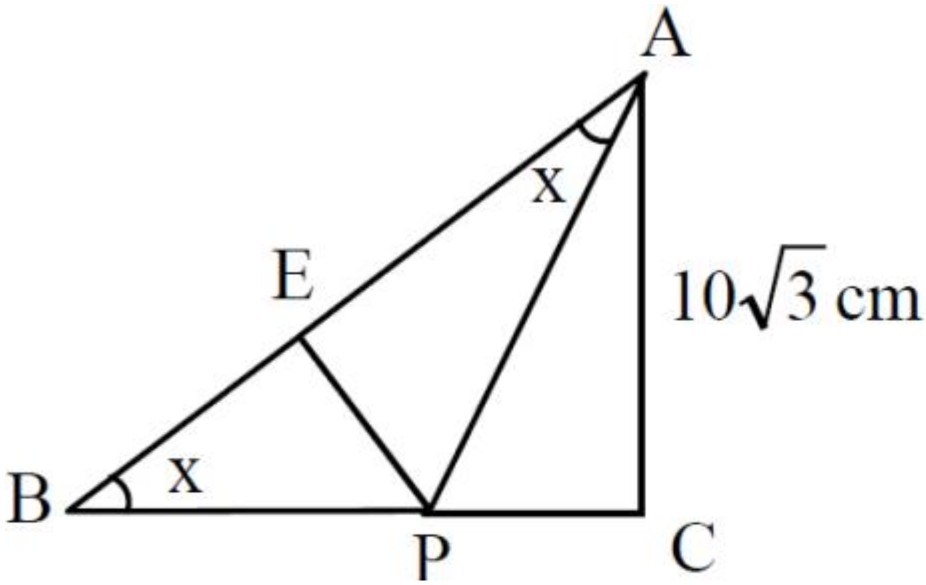
$$\Rightarrow \quad m=12\ cm$$

**Gabarito: "c"**

---

**50. (EEAR/2004)**

**Na figura, são retângulos em E e em C, respectivamente, os triângulos AEP e ACB. Se $x=30°$, então a medida de $\overline{PE}$, em cm, é**




a) $10$

b) $5\sqrt{3}$

c) $10\sqrt{3}$

d) $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

**Comentários**

Se $A\hat{B}C = x = 30°$, então $B\hat{A}C = 180° - 90° - 30° = 60°$. Mas $B\hat{A}C = E\hat{A}P + P\hat{A}C$, logo,
$$P\hat{A}C = B\hat{A}C - E\hat{A}P = 60° - 30° = 30°$$

$$cos(P\hat{A}C) = \cos(30°) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AP}} = \frac{10\sqrt{3}}{\overline{AP}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AP} = 20\ cm$$

$$sen(E\hat{A}P) = \text{sen}(30°) = \frac{\overline{EP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{EP}}{20} = \frac{1}{2}$$

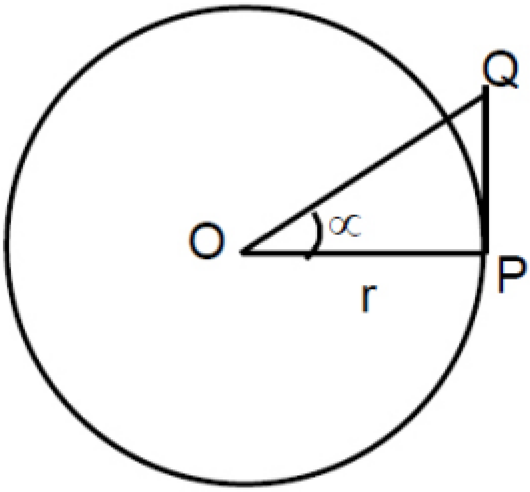
$$\Rightarrow \quad \overline{EP} = 10\ cm$$

**Gabarito: "a"**

---

**51. (EEAR/2004)**

**O círculo da figura tem centro O e raio r.**




**Sabendo-se que $\overline{PQ}$ equivale a $\frac{5r}{12}$ e é tangente ao círculo no ponto P, o valor de $sen\ \alpha$ é**

**a)** $\frac{5}{12}$

**b)** $\frac{5}{13}$

**c)** $\frac{12}{13}$

**d)** $0,48$

**Comentários**

Sabemos que como $\overline{PQ}$ é tangente à circunferência em P, então o seguimento $\overline{PQ}$ é perpendicular ao seguimento $\overline{OP}$, sendo $O$ o centro da circunferência. Então, o triângulo OPQ constitui um triângulo retângulo em P.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, obtemos que $\overline{OQ} = \frac{13r}{12}$

$$sen\ (\alpha) = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\frac{5r}{12}}{\frac{13r}{12}} = \frac{5}{13}$$

**Gabarito: "b"**

---

**52. (EEAR/2004)**

**Num triângulo retângulo, o menor cateto mede 1,5 cm, e a medida da projeção do maior cateto sobre a hipotenusa é 1,6 cm. O valor da secante do maior ângulo agudo desse triângulo é**

**a)** $\frac{4}{3}$

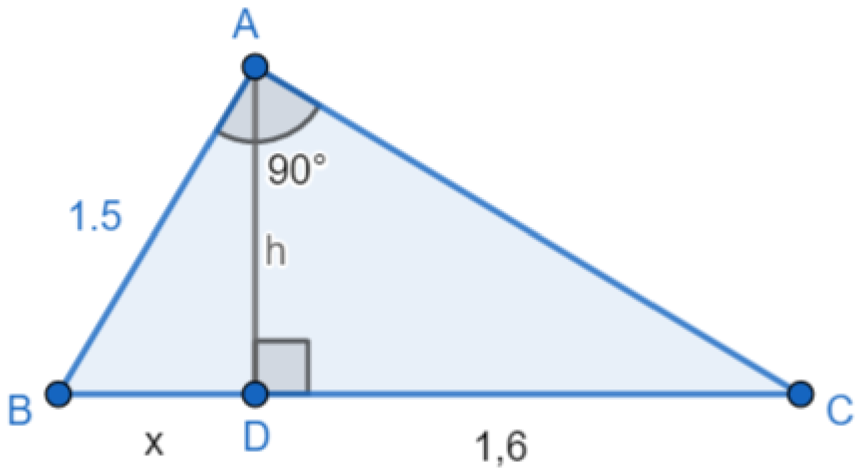
**b)** $\frac{5}{3}$

**c)** $\frac{4}{5}$

d) $\frac{7}{5}$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




$$\overline{AB}^2 = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$$

$$1,5^2 = x \cdot (1,6 + x)$$

$$2,25 = 1,6x + x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 1,6x - 2,25 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau pelo método de Bhaskara:

$$x = -2,5 \text{ (não convém)} \quad \text{ou} \quad x = 0,9$$

O maior ângulo, é oposto ao maior lado, pode-se ver isso pela Lei Dos Senos.

Calculando a secante:

$$\sec(A\hat{B}C) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\sec(A\hat{B}C) = \frac{(1,6 + 0,9)}{1,5}$$

$$\sec(A\hat{B}C) = \frac{5}{3}$$

**Gabarito: “b”**

**53. (EEAR/2003)**

**Considere:**

**I. Um triângulo isósceles $PRQ$, de base $PQ$ e altura $RH$.**

**II. Dois pontos $T$ e $S$ sobre $RH$, de tal modo que o triângulo $PTQ$ seja eqüilátero e o triângulo $PSQ$ seja retângulo em S.**

**Considerando somente os ângulos internos dos triângulos, se somarmos as medidas de $\widehat{R}$ e $\widehat{S}$, obteremos o dobro da medida de $\widehat{T}$. Sendo assim, a medida do ângulo $T\widehat{P}R$ é:**

**a) $5°$**

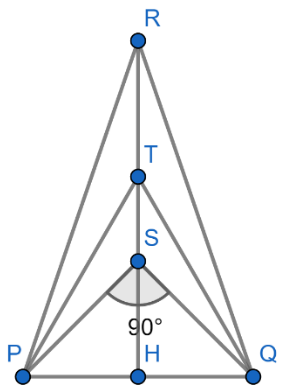
**b) $15°$**

**c) $30°$**

**d) $45°$**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




De acordo com o enunciado, temos a relação:

$$\frac{\hat{R} + \hat{S}}{2} = \hat{T}$$

Sabemos que o triângulo $\Delta PTQ$ é equilátero, logo $\hat{T} = 60°$ e também que o triângulo $\Delta PSQ$ é isósceles com o ângulo $\hat{S} = 90°$.

Portanto, temos:

$$60° = \frac{90° + \hat{R}}{2}$$
$$120° = 90° + \hat{R}$$
$$30° = \hat{R}$$

Como o ângulo $R = 30°$, temos que no triângulo isósceles $\Delta PQR$ os ângulos:

$$\hat{P} = \hat{Q} = \frac{150°}{2} = 75°$$

Para o ângulo $R\hat{P}T$, temos:

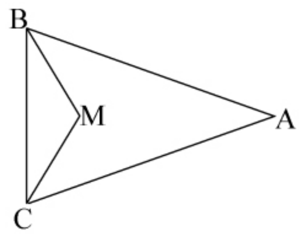
$$R\hat{P}T + T\hat{P}Q = \hat{P}$$
$$R\hat{P}T + 60° = 75°$$
$$R\hat{P}T = 15°$$

**Gabarito: "b".**

---

**54. (EEAR/2003)**

**Na figura, $AB = AC$, M é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos do triângulo ABC e o ângulo $B\widehat{M}C$ é o triplo do ângulo $\widehat{A}$, então a medida de $\widehat{A}$ é:**




**a) $15°$**

**b) $18°$**

**c) $24°$**

**d) $36°$**

**Comentários**

De acordo com o enunciado temos que:

$$B\widehat{M}C = 3\hat{A}$$

Temos, respectivamente, pelos triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta BMC$ que:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$$
$$\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} + B\widehat{M}C = 180°$$

Com essas relações, subtraindo a metade da segunda pela primeira, chegamos em:

$$B\widehat{M}C - \frac{\hat{A}}{2} = 90°$$

$$3\hat{A} - \frac{\hat{A}}{2} = \frac{5}{2}\hat{A} = 90°$$
$$\hat{A} = 36°$$

**Gabarito: "d".**

**55. (EEAR/2003)**

**Um triângulo $\Delta DEF$ tem $D\hat{E}F = 38°$ e $E\hat{F}D = 74°$. O ângulo que a bissetriz DG forma com a altura DH mede:**

**a) $18°$**

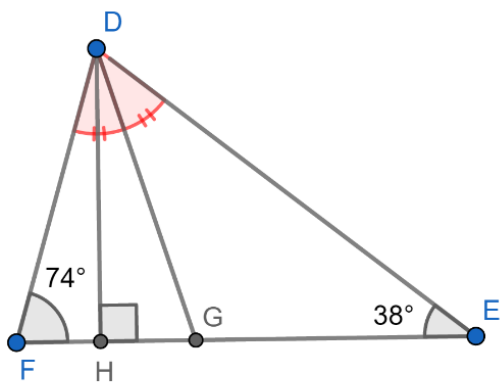
**b) $20°$**

**c) $26°30'$**

**d) $34°$**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




No triângulo $\Delta FDH$:

$$F\hat{D}H = 90° - 74°$$
$$F\hat{D}H = 16°$$

No triângulo $\Delta FDE$:

$$D = 180° - 74° - 38°$$
$$D = 68°$$

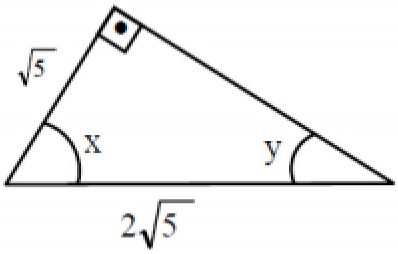
Portanto, temos a seguinte relação:

$$H\hat{D}G = F\hat{D}G - F\hat{D}H$$
$$H\hat{D}G = 34° - 16°$$
$$H\hat{D}G = 18°$$

**Gabarito: "a".**

**56. (EEAR/2003)**

**Na figura, x – y é igual a**




a) $15°$

b) $20°$

c) $30°$

d) $35°$

**Comentários**

Trata-se de um triângulo retângulo, perceba que a hipotenusa tem o dobro da medida de um cateto. Então, aplicando a definição de seno para o ângulo y, percebe-se que ele vale $\mathbf{30}°$.

$$\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{y}) = \frac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} = \boldsymbol{sen}(\mathbf{30}°)$$

E pela propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, percebe-se que o valor de $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{90}°$. Então, $\boldsymbol{x} = \mathbf{60}°$. E, por fim

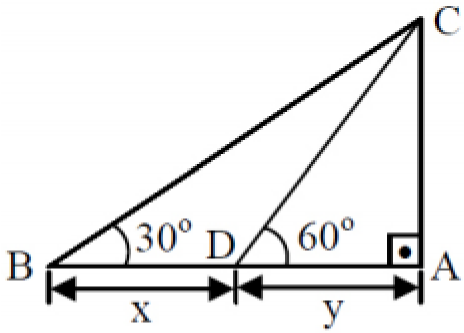
$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \mathbf{60}° - \mathbf{30}° = \mathbf{30}°$$

**Gabarito: "c"**

---

**57. (EEAR/2003)**

**De acordo com os dados nos triângulos retângulos CAB e CAD, é correto afirmar que**




a) $x = y$

b) $x = 3y$

c) $x = 2y$

d) $x = \frac{3y}{2}$

**Comentários**

Aplicando a definição de tangente de um ângulo, obtemos:

$$\begin{cases} tg(30°) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{x+y} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ tg(60°) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{y} = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x+y) \\ \overline{AC} = \sqrt{3} \cdot y \end{cases} \Rightarrow x + y = 3y$$

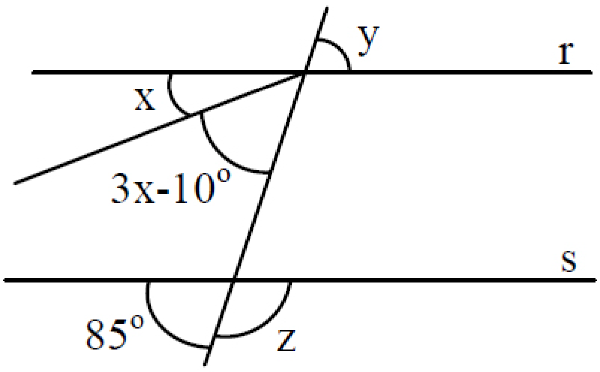
$$\Rightarrow x = 2y$$

**Gabarito: “c”**

---

**58. (EEAR/2003)**

**Nesta figura, as retas $r$ e $s$ são paralelas entre si.**




**Os valores de $x$, $y$ e $z$ são, respectivamente**

a) $23°45', 85°$ e $95°$.

b) $25°, 90°$ e $90°$.

c) $23°7'15'', 95°$ e $85°$.

d) $26°15', 85°$ e $95°$.

**Comentário:**

Temos duas paralelas cortadas por uma transversal, logo:

Como $85°$ e $z$ formam um ângulo raso, temos $85° + z = 180° \therefore z = 95°$.

Como $y$ é alterno externo com $85°$, $y = 85°$.

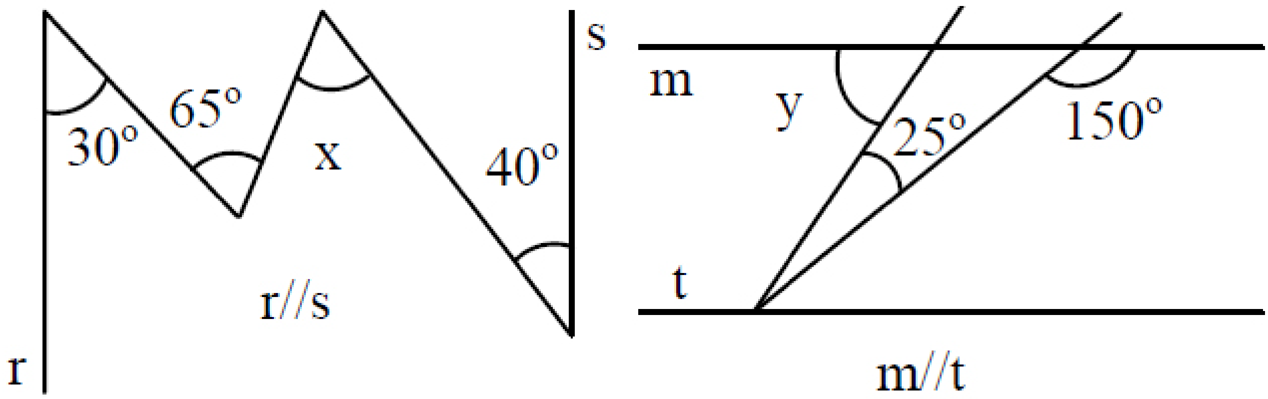
Como $(x + (3x - 10°))$ é oposto pelo vértice com $y = 85°$, temos que $4x - 10° = 85°$

$$\therefore x = \frac{95°}{4} = 23{,}75° = 23° + \frac{3}{4} \cdot 60' = 23°45'$$

**Gabarito: "a".**

**59. (EEAR/2003)**

**Observando as figuras abaixo, o valor, em graus, de $x - y$ é**




a) $25$

b) $20$

c) $15$

d) $10$

**Comentário:**

Passe pelo vértice do ângulo de $65°$ uma paralela a $r$, e chame-a de $r_1$. Da mesma forma, passe uma paralela a $r$ pelo vértice de $x$, e chame-a de $r_2$. Sejam $a_1, a_2$, as partes do ângulo de $65°$ à esquerda e à direita de $r_1$, respectivamente. Da mesma forma, sejam $x_1, x_2$ as partes do ângulo $x$ à esquerda e à direita de $r_2$. Como temos retas paralelas cortadas por transversais, deduz-se que:

$a_1$ é alterno interno com $30° \Rightarrow a_1 = 30°$

$a_2$ é alterno interno com $x_1 \Rightarrow a_2 = x_1$

$x_2$ é alterno interno com $40° \Rightarrow x_2 = 40°$

$a_1$ e $a_2$ compõem o ângulo de $65° \Rightarrow a_1 + a_2 = 65°$

$x_1$ e $x_2$ compõem o ângulo de $x \Rightarrow x_1 + x_2 = x$

Logo, temos que $x = x_1 + x_2 = a_2 + 40° = (65° - a_1) + 40° = (65° - 30° + 40°)$

$$\therefore x = 75°$$

De modo geral, aplicando o mesmo procedimento, podemos concluir que a soma dos ângulos que "olham" para cima é igual à soma dos que "olham" para baixo. Poderíamos, assim, ter calculado o valor de $x$ de maneira mais rápida: $30° + x = 65° + 40° \therefore x = 75°$.

Para calcular o valor de $y$, percebemos primeiro que o suplementar do ângulo de $150°$ é um ângulo interno do triângulo e vale $180° - 150° = 30°$. Pelo teorema do ângulo externo, temos que $y = 25° + 30° = 55°$.

Portanto,

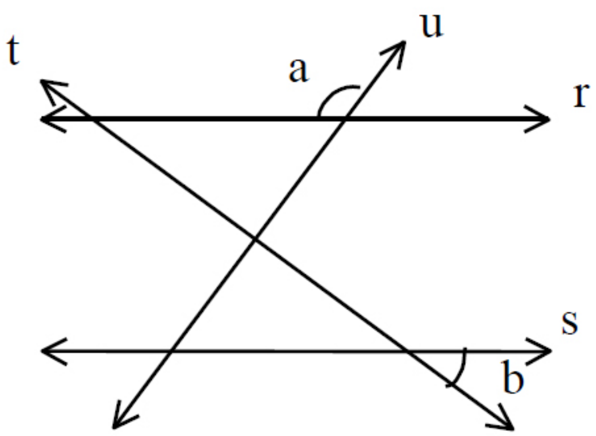
$$x - y = 75° - 55° = 20°$$

**Gabarito: "b".**

---

**60. (EEAR/2003)**

**Na figura, $r \parallel s$ e $t \perp u$.**




**O valor de $a - b$ é**

**a) $100°$**

**b) $90°$**

**c) $80°$**

**d) $70°$**

**Comentário:**

Sejam $A, B, C, D$ $e$ $E$ os pontos de interseção dos pares de retas $(r, t)$, $(r, u)$, $(t, u)$, $(s, u)$ e $(s, t)$, respectivamente. Como o maior ângulo entre $u$ e $r$ vale $a$, temos que o menor, $A\hat{B}C$, vale $180° - a$. Como $t \perp u$, temos que o ângulo $A\hat{C}B$ entre as retas $t$ e $u$ vale 90°. Portanto, para que a soma dos ângulos internos do triângulo $\Delta ABC$ seja de $180°$, devemos ter $B\hat{A}C = a - 90°$. Como, $b$, na figura, e $B\hat{A}C$ são ângulos correspondentes, temos que $b = a - 90°$, donde $a - b = 90°$.

**Gabarito: "b".**

---

**61. (EEAR/2003)**

**Seja $\alpha$ um ângulo agudo. Se somarmos a medida de um ângulo reto à medida de $\alpha$ e, em seguida, subtrairmos dessa soma a medida do suplemento de $\alpha$, obteremos sempre a medida de um ângulo**

**a) nulo, qualquer que seja a medida de $\alpha$.**

**b) reto, qualquer que seja a medida de $\alpha$.**

**c) agudo, desde que $45° < \alpha < 90°$.**

**d) raso, desde que $\alpha < 45°$.**

**Comentário:**

ângulo reto $= 90°$

ângulo reto $+ \alpha = 90° + \alpha$

suplemento de $\alpha = 180° - \alpha$

$\beta :=$ ângulo reto $+ \alpha -$ suplemento de $\alpha = (90° + \alpha) - (180° - \alpha) = 2\alpha - 90°$

Se tivermos $45° < \alpha < 90°$, então $0 < \beta = 2\alpha - 90° < 90°$, isto é, obteremos um ângulo $\beta$ agudo.

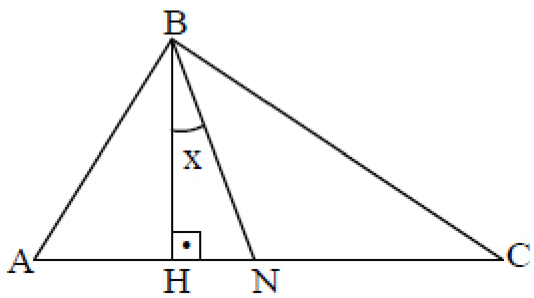
Logo, é possível obter ângulos tanto não-nulos quanto não-rasos, variando o valor de $\alpha$ no intervalo $45° < \alpha < 90°$. Além disso, se $\alpha < 45°$, então $\beta < 0$. Portanto, a alternativa “c” é a única correta.

**Gabarito: “c”.**

---

**62. (EEAR/2002)**

**Na figura, $BN$ é a bissetriz do ângulo $\widehat{B}$ . Se $\widehat{A} = 50°$ e $\widehat{C} = 30°$, então a medida $x$ do ângulo $H\widehat{B}N$ é**




**a) $5°$**

**b) $10°$**

c) $15°$

d) $20°$

**Comentário:**

Como $\Delta ABH$ é retângulo em $H$, temos $A\hat{B}H = 90° - H\hat{A}B = 90° - 50° = 40°$.

Sendo $BN$ uma bissetriz, temos $C\hat{B}N = A\hat{B}N = A\hat{B}H + H\hat{B}N = 40° + x$.

Logo $A\hat{B}C = A\hat{B}N + C\hat{B}N = 2 \cdot (40° + x) = 80° + 2x$.

Sendo a soma dos ângulos internos de $\Delta ABC$ igual a $180°$, segue que

$$180° = 50° + (80° + 2x) + 30° \therefore x = 10°.$$

**Gabarito: "b".**

---

**63. (EEAR/2002)**

**Os números $2x + 10°$, $3x$, $3x - 20°$ são medidas em graus dos ângulos de um triângulo. Esse triângulo pode ser classificado em**

**a) acutângulo.**

**b) equiângulo.**

**c) retângulo.**

**d) obtusângulo.**

**Comentário:**

A soma deve dar $180° = (2x + 10°) + 3x + (3x - 20°) = 8x - 10° \therefore x = \frac{190°}{8} = 23{,}75°$

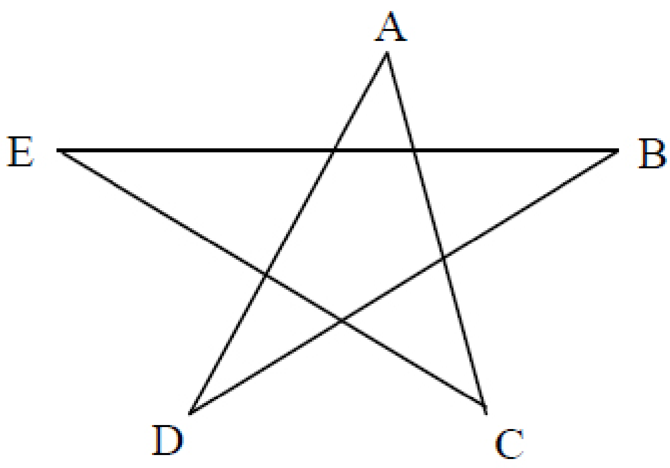
Logo, os ângulos são $2x + 10° = 57{,}5°, 3x = 71{,}25°, 3x - 20° = 51{,}25°$. Portanto, como todos os ângulos são menores que $90°$, isto é, são agudos, o triângulo é acutângulo.

**Gabarito: "a".**

---

**64. (EEAR/2002)**

**A soma das medidas dos ângulos internos $A$, $B$, $C$, $D$ e $E$ da figura é**




a) $120°$

b) $180°$

c) $360°$

d) $540°$

**Comentário:**

Sejam $A', B', C', D', E'$ os vértices do pentágono, sendo $A'$ oposto a $A$, $B'$ oposto a $B$ e assim por diante. Temos:

$180° = B'\hat{A}C + B'\hat{C}A + A\widehat{B'}C = \hat{A} + \hat{C} + A\widehat{B'}C$.

Pelo teorema do ângulo externo, $A\widehat{B'}C = B'\hat{E}C' + B'\widehat{C'}E = \hat{E} + B'\widehat{C'}E$.

Novamente pelo teorema do ângulo externo, $B'\widehat{C'}E = C'\hat{B}D + C'\hat{D}B = \hat{B} + \hat{D}$.

Portanto, $180° = \hat{A} + \hat{C} + A\widehat{B'}C = \hat{A} + \hat{C} + (\hat{E} + B'\widehat{C'}E) = \hat{A} + \hat{C} + \hat{E} + \hat{B} + \hat{D}$

**Gabarito: "b".**

---

**65. (EEAR/2002)**

**É falso afirmar:**

**a) Se $\widehat{AOB}$ é um ângulo raso, então $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.**

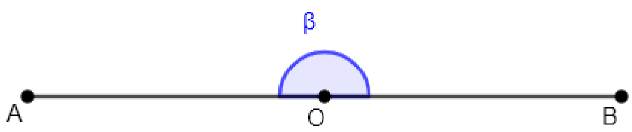
**b) Se $\widehat{AOB}$ é um ângulo nulo, então $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas.**

**c) Dois ângulos adjacentes, cujos lados não comuns são semirretas opostas, somam $180°$.**

**d) Dois ângulos adjacentes são sempre consecutivos.**

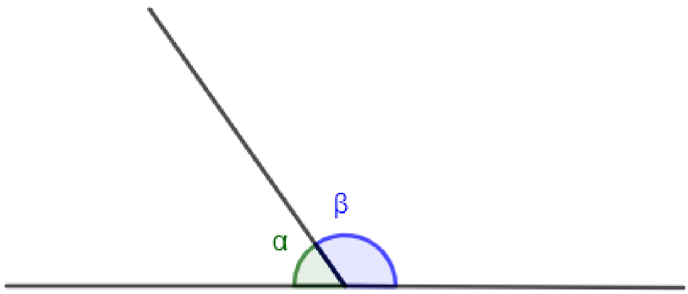
**Comentário:**

a)




O ângulo $\widehat{AOB}$ é raso, e as retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são semirretas opostas, de fato. (Verdadeiro)

c)




Os ângulos $\alpha$ e $\beta$ são adjacentes e os lados não comuns são semirretas opostas.

Então, $\alpha + \beta = 180°$, isto é, $\alpha$ e $\beta$ são ângulos suplementares. (Verdadeiro)

d) Ângulos adjacentes são ângulos que tem um lado em comum mas não compartilham a região interna ao ângulo. Ângulos consecutivos são ângulos tais que um está logo depois do outro. Logo, as definições são equivalentes. (Verdadeiro).

b) Um ângulo nulo é tal que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$, isto é, as semirretas que definem suas arestas são iguais. Portanto, elas não são opostas (Falso).

**Gabarito: "b".**

---

**66. (EEAR/2002)**

**Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, de modo que a soma dos ângulos agudos formados vale $144°$. Então a diferença entre as medidas de um ângulo obtuso e de um agudo é**

**a) $85°$**

**b) $92°$**

**c) $108°$**

**d) $116°$**

**Comentário:**

Quando a transversal não é perpendicular às paralelas, são formados oito ângulos, sendo quatro agudos congruentes e quatro obtusos congruentes. Seja $x$ o valor de um desses agudos. Então, o suplementar, $y = 180° - x$, é o valor de um dos obtusos. Temos:

$$4x = 144° \Rightarrow x = 36° \Rightarrow y = 144° \therefore y - x = 108°$$

**Gabarito: "c".**

---

**67. (EEAR/2002)**

**Duas réguas de madeira, AB e CD, com 8 cm cada uma estão ligadas em suas extremidades por dois fios, formando o retângulo ABCD (fig. 1). Mantendo-se fixa a régua AB e girando-se $180°$ a régua CD em torno do seu ponto médio, sem alterar os comprimentos dos fios, obtêm-se dois triângulos congruentes AIB e CID (fig.2).**

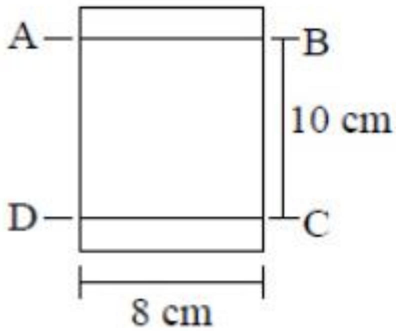


fig.1

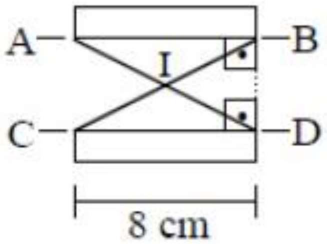


fig.2

**A distância, em cm, entre as duas réguas, nessa nova posição (fig.2) é**

**a)** $5\sqrt{3}$

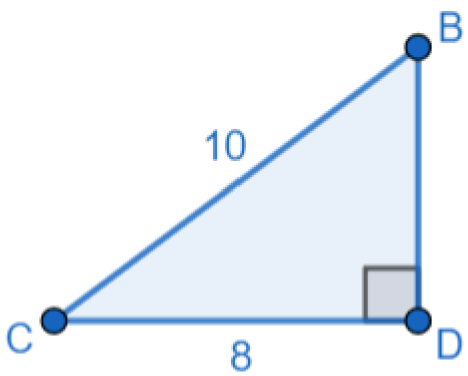
**b)** $5\sqrt{2}$

**c) 5**

**d) 6**

**Comentários**

Perceba que o lado BC agora se tornou uma hipotenusa do triângulo BDC.




Aplicando o Teorema De Pitágoras:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$$

$$\overline{BD}^2 = 10^2 - 8^2$$

$$\overline{BD}^2 = 100 - 64$$

$$\overline{BD}^2 = 36$$

$$\overline{BD} = 6$$

**Gabarito: “d”**

---

**68. (EEAR/2002)**

**Os lados congruentes de um triângulo isósceles medem 50 cm cada. Se a medida da altura equivale a $\frac{12}{7}$ da medida da base, então a medida da base, em cm, é**

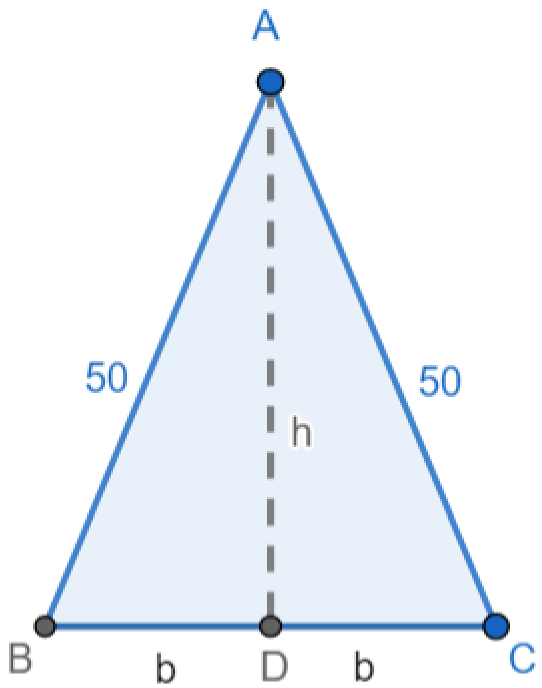
**a) 14**

**b) 25**

**c) 28**

**d) 50**

**Comentários**




De acordo com o enunciado:

$$\overline{AD} = \frac{12}{7} \cdot \overline{BC}$$

$$h = \frac{12}{7} \cdot 2b = \frac{24}{7} \cdot b$$

Aplicando o Teorema De Pitágoras no triângulo ACD, obtemos:

$$\left(\frac{24}{7} \cdot b\right)^2 + (b)^2 = 50^2$$

$$\frac{625}{49} b^2 = 2500$$

$$b = 14$$

$$\overline{BC} = 2 \cdot 14 = 28\ cm$$

**Gabarito: "c"**

---

**69. (EEAR/2002)**

**Num triângulo ABC retângulo em A, o cateto $\overline{AC}$ mede 1, 5 cm e a altura traçada sobre a hipotenusa determina o segmento $\overline{HB}$ que mede 1, 6 cm. O valor da secante do ângulo interno C é**

**a)** $\frac{4}{3}$

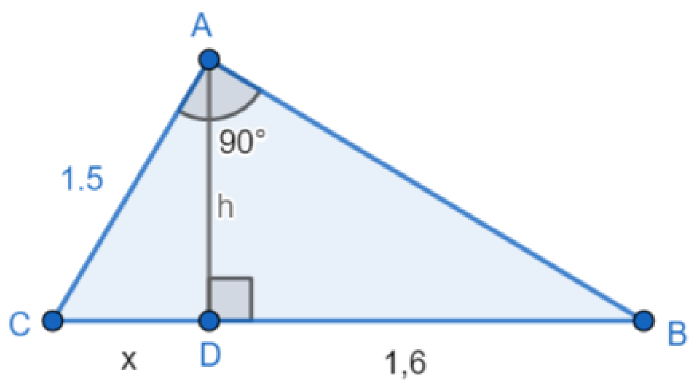
**b)** $\frac{5}{4}$

**c)** $\frac{4}{5}$

**d)** $\frac{5}{3}$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{BC}$$

$$1,5^2 = x \cdot (1,6 + x)$$

$$2,25 = 1,6x + x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 + 1,6x - 2,25 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau pelo método de Bhaskara:

$$x = -2,5\ (não\ convém) \quad \text{ou} \quad x = 0,9$$

Calculando a secante:

$$\sec(A\hat{C}B) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\sec(A\hat{C}B) = \frac{(1,6 + 0,9)}{1,5}$$

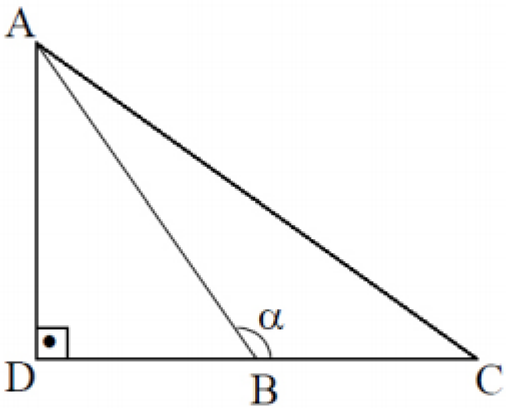
$$\sec(A\hat{C}B) = \frac{5}{3}$$

**Gabarito: "d"**

---

**70. (EEAR/2001)**

**Na figura, $\overline{AD} = 2\ cm$ e $\overline{AB} = 4\ cm$. O valor de $cos\ \alpha$ no triângulo ABC é**




**a)** $\frac{1}{2}$

**b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**c)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

**d)** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Comentários**

Aplicando o conceito de seno no ângulo $A\hat{B}D$, obtemos:

$$sen(A\hat{B}D) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A\hat{B}D = 30°$$

Mas, $\boldsymbol{\alpha + A\widehat{B}D = 180°} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = 150°}$

Aplicando os conceitos de relações entre ângulos no ciclo trigonométrico, obtemos:

$$\mathbf{cos(\alpha) = cos(150°) = cos(180° - 30°) = -cos(30°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

**Gabarito: "d"**

---

**71. (EEAR/2001)**

**Em um triângulo retângulo a hipotenusa mede 5 $cm$ e o $sen(\widehat{B}) = \frac{1}{2}\, sen(\widehat{C})$. O maior cateto mede, em cm:**

**a)** $\sqrt{3}$

**b)** $\sqrt{5}$

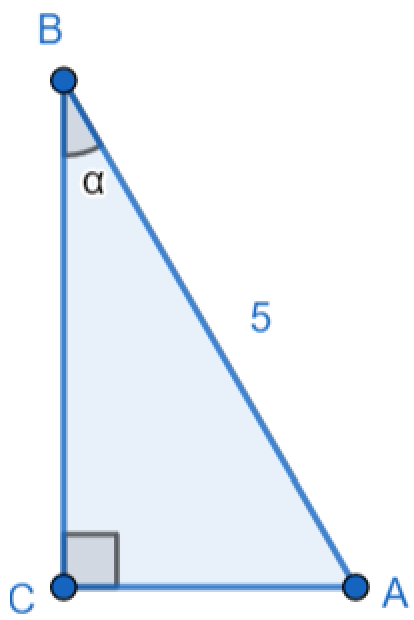
**c)** $2\sqrt{3}$

**d)** $2\sqrt{5}$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos duas situações possíveis, uma é dada por um triângulo retângulo em A e outra para um triângulo retângulo em C:

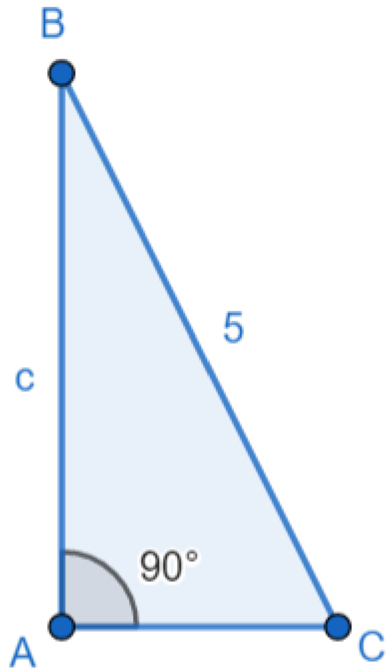
Primeira solução: triângulo retângulo em C




$$\boldsymbol{sen(\widehat{C}) = sen(90°) = 1 \quad \Rightarrow \quad sen\,(\widehat{B}) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad B = 30°}$$

Pela definição de seno e cosseno do ângulo de $\mathbf{30}°$, chegamos que $\boldsymbol{AC} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$ $\boldsymbol{e\ BC} = \frac{\mathbf{5\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$, Logo o maior cateto mede $\frac{\mathbf{5\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$. E percebemos que não há alternativa.

Segunda solução: triângulo retângulo em A




Obs: O maior cateto é oposto ao maior ângulo e como já existe um ângulo reto, podemos concluir que o maior ângulo entre $\widehat{\boldsymbol{B}}$ e $\widehat{\boldsymbol{C}}$ é o ângulo com o maior valor de seno. E dada a igualdade fornecida no enunciado, o maior seno é o seno de $\widehat{\boldsymbol{C}}$. Portanto o maior cateto é o cateto $\overline{\boldsymbol{AB}}$. Também sabemos que, devido ao triângulo ser retângulo:

$$\boldsymbol{sen(\widehat{B}) = cos(\widehat{C})}$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\mathbf{cos^2\,\widehat{C} + sen^2\,\widehat{C} \ = 1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{sen^2\,\widehat{B} \ + sen^2\,\widehat{C} = 1}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{sen(\widehat{C})}\right)^{\mathbf{2}} + \mathbf{sen^2\,\widehat{C} = 1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \mathbf{sen^2\,\widehat{C} + sen^2\,\widehat{C} = 1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}} \cdot \mathbf{sen^2\,\widehat{C} = 1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{sen}^2\,\widehat{\boldsymbol{C}} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$

$$\boldsymbol{sen}\,\widehat{\boldsymbol{C}} = \frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}}$$

Aplicando agora a definição de seno para descobrir a medida de $\overline{\boldsymbol{AB}}$

$$\boldsymbol{sen}\,\widehat{\boldsymbol{C}} = \frac{\overline{\boldsymbol{AB}}}{\overline{\boldsymbol{BC}}}$$

$$\boldsymbol{sen}\,\widehat{\boldsymbol{C}} = \frac{\overline{\boldsymbol{AB}}}{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{5}}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\boldsymbol{AB}} = \mathbf{2}\sqrt{\mathbf{5}}$$

**Gabarito: “d”**

---

**72. (EEAR/2001)**

**Se os ângulos internos de um triângulo estão em PA (progressão aritmética) e o menor deles é a metade do maior, então o valor do maior ângulo, em graus, é:**

**a)** $\mathbf{80}$

**b)** $\mathbf{90}$

**c)** $\mathbf{100}$

**d)** $\mathbf{120}$

**Comentário:**

Os ângulos são $x - r, x, x + r$. Como a soma dos ângulos deve ser $180°$, obtemos:

$$3x = 180° \therefore x = 60°.$$

Como o menor é a metade do maior, obtemos:

$$60° - r = \frac{60° + r}{2} \therefore r = 20°.$$

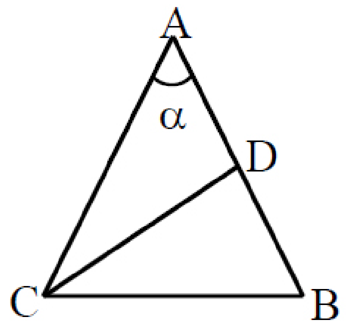
Logo os ângulos são $40°, 60°, 80°$ e o maior deles é $80°$.

**Gabarito: “a”.**

---

**73. (EEAR/2001)**

**Se na figura, $AB = AC$ e $BC = CD = DA$, então o valor do ângulo $\alpha$, em graus, é:**




a) $30$

b) $36$

c) $45$

d) $60$

**Comentário:**

De $CD = DA$ concluímos que $A\hat{C}D = \alpha$ pois $\Delta ACD$ é isósceles de base $AC$. Logo, pelo teorema do ângulo externo, $B\widehat{D}C = A\hat{C}D + D\hat{A}C = 2\alpha$. De $BC = CD$ concluímos que $D\hat{B}C = 2\alpha$, pois $\Delta DBC$ é isósceles de base $BD$. Finalmente, como $AB = AC$, temos que $A\hat{C}B = A\hat{B}C = 2\alpha$. Portanto, olhando para o triângulo $\Delta ABC$, a soma dos ângulos internos é:

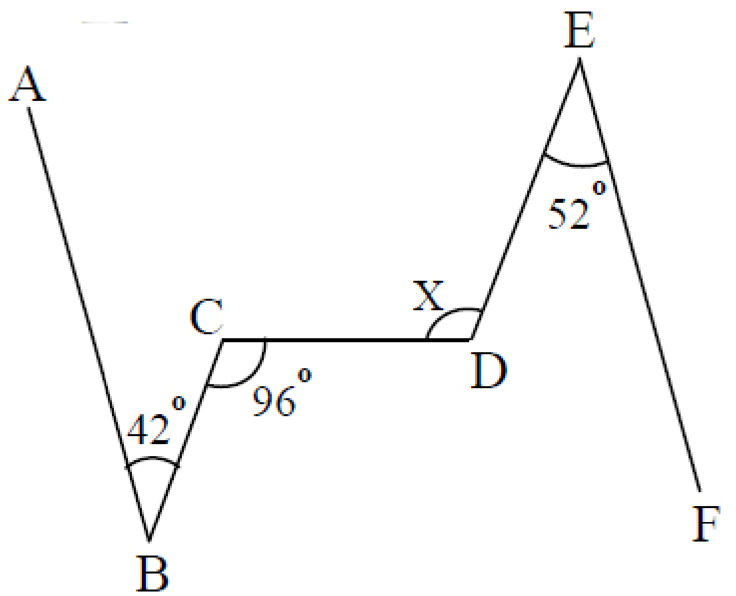
$$180° = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha \therefore \alpha = 36°.$$

**Gabarito: "b".**

---

**74. (EEAR/2000)**

**Na figura $BA//EF$. A medida de $X$ é:**



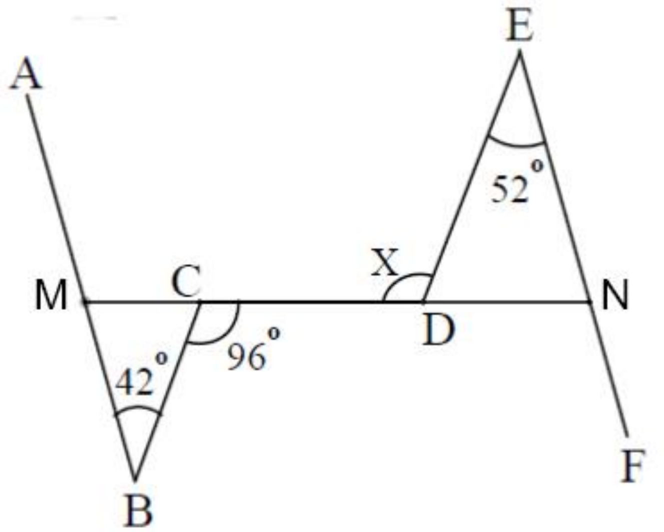
a) $105°$

b) $106°$

c) $107°$

d) $108°$

**Comentário:**




Prolongue a transversal $CX$, de modo que $M$ seja a interseção do prolongamento com $AB$, e $N$ a interseção com $EF$.

Pelo teorema do ângulo externo no $\Delta BMC$, $B\widehat{M}C = B\hat{C}D - C\hat{B}M = 96° - 42° = 54°$

Por $AB//EF$, $B\widehat{M}C$ e $E\widehat{N}D$ são alternos internos. Logo, $E\widehat{N}D = 54°$.

Novamente pelo teorema do ângulo externo no $\Delta END$, $E\widehat{D}M = D\hat{E}N + E\widehat{N}D = 52° + 54° = 106°$.

$$\therefore X = 106°.$$

**Gabarito: “b”.**

---

# 7.CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da aula inicial de Geometria Plana. O importante nessa aula é aprender bem os capítulos de ângulos e triângulos. Pois, o conteúdo desses capítulos pode potencialmente cair no seu vestibular.

Não é necessário decorar as relações métricas no triângulo retângulo, mas você deve saber deduzir aquelas fórmulas.

Na próxima aula, continuaremos o assunto de Geometria Plana e veremos tópicos mais avançados e que podem nos ajudar a resolver as questões dos concursos.

Quaisquer dúvidas, críticas e sugestões entre em contato! Será um prazer atendê-lo!

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Dolce, Osvaldo. Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. 9. ed. Atual, 2013. 456p.

[2] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria I. 5 ed. Livraria Francisco Alves Editora, 1990. 151p.

[3] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria II. 1 ed. FC & Z Livros, 2002. 296p.

[4] Barbosa, João Marques Lucas. Geometria Euclidiana Plana. 11 ed. SBM, 2012. 257p.

## 9. VERSÕES DAS AULAS

Caro aluno! Para garantir que o curso esteja atualizado, sempre que alguma mudança no conteúdo for necessária, uma nova versão da aula será disponibilizada.