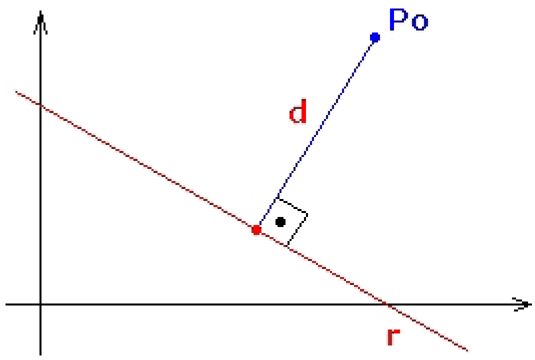
CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

ÍNDICE

Geometria analítica

Distância entre um ponto e uma reta

Como fizemos antes, quando definimos pontos, calculamos a distância entre dois pontos. Agora que sabemos o que são pontos e retas, podemos também calcular a distância entre um ponto e uma reta. A distância entre um ponto e uma reta é dada pelo comprimento do segmento que liga o ponto com a reta, mas é perpendicular à reta. Observe a figura abaixo, temos que d é a distância entre o ponto e a reta r:



Seja então o ponto P_0 de coordenadas (x_1, y_1), e r com equação $ax + by + c$. Então, a distância d entre o ponto P_0 e a reta r é dada por, $d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Seja a reta r de equação $y + 6x - 8 = 0$, e o ponto $P_0(6,7)$. Qual a distância entre a reta r e o ponto P_0?

Res.: usando a fórmula de distância entre ponto e reta, temos que a distância d entre a reta r e o ponto P_0 é, $d = \frac{6.6+1.7-8}{\sqrt{6^2+1^2}} = \frac{36-1}{\sqrt{37}} = \frac{35\sqrt{37}}{37}$, logo a distância entre a reta r e o ponto P_0 é $\frac{35\sqrt{37}}{37}$.

2. Um triângulo tem os vértices A(2, 0), B(3, 1) e C(0, 2). Calcule a medida da altura do triângulo relativa ao lado $\overline{BC}$.

Res.: a altura procurada é referente ao lado BC, ou seja, parte do vértice A e toca o lado BC formando 90°. Assim, precisamos calcular a distância do ponto A até a reta BC. Então, inicialmente é necessário calcular a equação da reta que passa por BC. Daí:

$m = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{2-1}{0-3} = -\frac{1}{3}$, substituindo o coeficiente angular na equação da reta, temos:

$y - y_0 = m(x - x_0), tomando\ (x_B, y_B) como\ sendo\ o\ ponto\ B, segue\ que:$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x-3) \Rightarrow y - 1 = -\frac{x}{3} + 1 \ \Rightarrow 3y - 3 = -x + 3$$

$x + 3y - 6 = 0, onde\ a = 1, b = 3\ e\ c = -6. Aplicando\ a\ fórmula\ da\ distância$

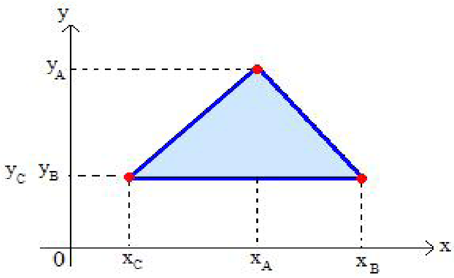
$de\ um\ ponto\ à\ reta\ temos: d = \frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|1.2+3.0-6|}{\sqrt{1^2+3^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}} . \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$.

- **Cálculo de área com GA**

Área de triângulo com GA

Um triângulo, como já vimos antes, é formado por três lados, três ângulos e três vértices. Cada vértice de um triângulo é um ponto; se tivermos esses pontos no plano cartesiano, conseguimos calcular sua área facilmente.

Então, tomemos três pontos no plano:

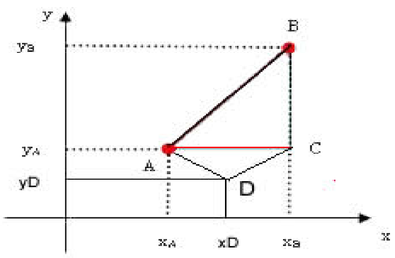


o ponto A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) e C(x_C, y_C), então a área do triângulo é dada por, $A = \frac{|D|}{2}$, em que D é o determinante da matriz

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

- **Área de quadrilátero com GA**

Da mesma forma do triângulo, podemos ter um quadrilátero em um plano cartesiano, determinado pelos seus quatro pontos ou vértices.



E, desta forma, temos que a área do quadrilátero ABCD é dada por

$A = \frac{1}{2}|D_1| + \frac{1}{2}|D_2|$, em que D_1 é o determinante da matriz $\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{pmatrix}$, e D_2 é o determinante da matriz $\begin{pmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_D & y_D & 1 \end{pmatrix}$.

- **EXERCÍCIO RESOLVIDO**

1. Calcule a coordenada x do ponto A(x,1) e do ponto B(x,2) sabendo que as coordenadas do ponto C são(4,1), que eles não são colineares e que a área do triângulo formado por eles é igual a 3.

Res.: utilizando a fórmula para cálculo de área dada anteriormente, vamos primeiro então calcular o determinante de $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Calculando o determinante temos que D = -4 + x, dessa forma temos que $A = \frac{|D|}{2}$, ou seja, 3 = $\frac{|-4+x|}{2} \Longrightarrow 6 = |-4+x|$, isto é, x = 10 ou x = -2.

EXERCÍCIO

01. Clarence desenhou o triângulo determinado pelas coordenadas dos pontos cartesianos A(7;5), B(3;2) e C(7;2). Ao calcular a área e o perímetro desse triângulo, os valores obtidos foram, respectivamente:

a) 3 e 3

b) 3 e 6

c) 6 e 6

d) 6 e 12

e) 12 e 12

GABARITO

1. D