CÁLCULO DA MATRIZ INVERSA

Já tratamos em apostilas anteriores sobre a matriz inversa. Chegou a hora de nos aprofundarmos no determinante dessa matriz. Comecemos relembrando a definição de matriz inversa:

> Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A^{-1} é a matriz inversa de A se, e somente se, $A\,.\,A^{-1}=A^{-1}.A=I_n$.

Sendo assim, conforme a definição temos que:

$$A\cdot A^{-1}= I_n$$

E assim,

$$det(A\cdot A^{-1})= det(I_n)$$

$$det(A)\cdot det(A^{-1})=det(I_n)$$

$$det(A)\cdot det(A^{-1})=1$$

$$det(A^{-1})=\frac{1}{detA}$$

Com isso, podemos concluir que A é inversível (admite inversa) se, e somente se, $detA \neq 0$, uma vez que a fração acima precisa existir.

De acordo com o valor do determinante da matriz A, essa matriz recebe um nome especial:

> Se $detA \neq 0$, dizemos que a matriz é **regular.** Caso $detA = 0$, a matriz é chamada de **singular.**

Podemos concluir então que apenas matrizes regulares possuem inversa.

Vamos ao primeiro exemplo da apostila: Determine os valores de x para os quais a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ é inversível.

Solução: Começamos lembrando que para a matriz ser inversível, é necessário que ocorra $detM \neq 0$, assim temos:

$$detM=2\cdot 1-x\cdot(-5)=2+5x$$

$$2+5x \neq 0$$

$$x \neq -\frac{2}{5}$$

Assim, para qualquer valor de x que seja diferente de $-\frac{2}{5}$, a matriz M é inversível.

Veremos agora como calcular a matriz inversa usando determinantes.

INVERSA DE UMA MATRIZ DE ORDEM 2

Já vimos em apostilas anteriores como encontrar a matriz inversa de uma matriz de ordem 2 por resolução de sistemas. Vamos focar agora em encontrar a matriz inversa com o auxílio dos determinantes.

Dada uma matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, para encontrarmos a inversa dessa matriz seguimos os seguintes passos:

Passo 1: Verificamos se a matriz admite inversa.

$$det\, A \neq 0$$

Passo 2: Os elementos da diagonal **P**rincipal trocam de **P**osição.

$$A' = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Passo 3: Os elementos da diagonal **S**ecundária trocam de **S**inal.

$$A'' = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Passo 4: Dividimos todos os elementos da matriz do passo 3 pelo determinante de A e encontramos A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{22}/|A| & -a_{12}/|A| \\ -a_{21}/|A| & a_{11}/|A| \end{bmatrix}$$

Agora que já sabemos os passos, vamos a um exemplo:

Exemplo: Encontre, se possível, a inversa da matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução: Vamos seguir os passos anteriormente mencionados:

Passo 1: $detC$=1 e a matriz admite inversa.

Passo 2: Trocamos os elementos da diagonal principal de posição: $C' = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Passo 3: Trocamos os elementos da diagonal secundária de sinal: $C'' = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

Passo 4: Dividimos todos os elementos da matriz C'' por $detC$=1 e encontramos C^{-1}:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 3/1 & -5/1 \\ -1/1 & 2/1 \end{bmatrix}$$

Ou seja,

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Agora que já aprendemos a calcular a inversa de uma matriz de ordem 2, vamos ao cálculo da inversa de uma matriz de ordem 3.

INVERSA DE UMA MATRIZ DE ORDEM 3

Para encontrarmos a inversa de uma matriz de ordem 3, temos dois métodos possíveis: pela definição de matriz inversa ou com o auxílio do determinante.

Método 1: Definição de Matriz Inversa

Neste método, suponha que estamos interessados em encontrar, caso exista, a inversa da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Como não sabemos quem é A^{-1}, a representaremos da seguinte forma:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Impondo a definição temos: $A \cdot A^{-1} = I_3$

E, assim,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando a multiplicação chegaremos em um sistema com 9 equações e 9 incógnitas. Sistema grande, não é mesmo?

Se você gosta de fazer contas, pode ter certeza que você chegará nos valores corretos das incógnitas, mas trataremos a partir de agora do segundo método de resolução.

Método 2: Com o auxílio do Determinante

Neste método, encontrarmos a matriz inversa através da seguinte relação:

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{|A|}$$

Em que $\bar{A}$ é a **matriz adjunta da matriz A** (transposta da matriz dos cofatores) e $|A|$ é o determinante da matriz A.

Para encontrar a matriz inversa por essa relação, seguimos os seguintes passos:

Passo 1: Verificamos se a matriz de interesse admite inversa.

Passo 2: Encontramos a matriz dos cofatores.

Passo 3: Encontramos a matriz adjunta da matriz de interesse.

Passo 4: Dividimos todos os elementos da matriz adjunta pelo valor do determinante da matriz de interesse.

Vamos exemplificar o método: encontre, se possível, a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Solução: Para resolver o exemplo, vamos seguir os passos acima mencionados:

Passo 1: $detA=41$ e a matriz admite inversa.

Passo 2: Encontramos o cofator de cada elemento da matriz A e montamos uma matriz A' com esses valores.

$$\begin{aligned} C_{11} &= -7 \\ C_{21} &= 11 \\ C_{31} &= 5 \\ C_{12} &= -10 \\ C_{22} &= 4 \\ C_{32} &= 13 \\ C_{13} &= 15 \\ C_{23} &= -6 \\ C_{33} &= -9 \end{aligned} \quad \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} -7 & -10 & 15 \\ 11 & 4 & -6 \\ 5 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Encontramos a matriz adjunta de A.

$$\bar{A} = (A')^t = \begin{bmatrix} -7 & 11 & 5 \\ -10 & 4 & 13 \\ 15 & -6 & -9 \end{bmatrix}$$

Passo 4: Dividimos todos os elementos de $\bar{A}$ por $|A|$ e encontramos A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{\bar{A}}{|A|} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{41} & \frac{11}{41} & \frac{5}{41} \\ \frac{-10}{41} & \frac{4}{41} & \frac{13}{41} \\ \frac{15}{41} & \frac{-6}{41} & \frac{-9}{41} \end{bmatrix}$$

Observações:

- Esse método, apesar de parecer trabalhoso, evita que você resolva o sistema linear.
- Agora você conhece duas formas de encontrar a matriz inversa de uma matriz de ordem 3. A escolha da preferência por um dos métodos é sua.
- Os cálculos dos cofatores foram omitidos por tal assunto já ter sido abordado em apostilas anteriores.

ANOTAÇÕES