

## 1. Introdução

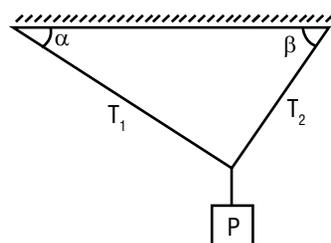
A Estática é o ramo da física que estuda corpos em equilíbrio estático, ou seja, com velocidade nula. Certamente, é uma das áreas da física que possui maior enfoque nos dias atuais, visto que tem um alcance prático enorme. Na engenharia civil, por exemplo, é fundamental para a construção e manutenção de pontes e prédios. Além disso, propiciou o desenvolvimento de diversos aparatos que reduzem a necessidade do homem de realizar forças, como alavancas e parafusos. Enfim, é impossível pensar no dia-a-dia atual sem o desenvolvimento

A Estática se divide em duas áreas: a Estática dos Sólidos e a Estática dos Fluidos, também chamada de Hidrostática.

Neste assunto, estudaremos apenas a Estática dos Sólidos. Entenderemos quando podemos considerar um corpo como um ponto material ou quando devemos tratá-lo como um corpo extenso (rígido). Falaremos também sobre as condições de equilíbrio para cada um dos dois tipos de corpos. Discutiremos, ainda, como podemos tratar de um sistema de pontos materiais discretos e de distribuições contínuas homogêneas de massa, com relação a seus centros de gravidade. Discorreremos sobre os três tipos de equilíbrio, tanto para pontos materiais como para corpos rígidos. Por fim, estudaremos as treliças, estruturas complexas de extrema importância na sustentação de diversas outras estruturas.

## 2. Condições de equilíbrio estático

Vamos considerar o sistema mostrado na figura abaixo:



Percebe-se que, quando esse sistema foi montado, não houve preocupação nenhuma com qualquer tipo de rotação do corpo  $P$  em torno de qualquer eixo, já que, para que o equilíbrio estático do corpo  $P$  seja satisfeito, é suficiente que as trações no fio sejam adequadas. Dessa forma, o corpo  $P$  pode ser considerado um **ponto material**, pois, tendo qualquer tipo de rotação desprezada, não será necessário levar em conta as suas dimensões para qualquer tipo de cálculo.

Agora, considere a situação mostrada na figura a seguir:



(Disponível em: <<http://imguol.com>>.)

Sabemos que, mesmo que haja uma parte do prato pendendo na beirada da mesa, ele continua em repouso sobre ela, ao passo que, se o empurrarmos gradativamente para fora da mesa, em algum momento ele cairá, mesmo que ainda não tenha perdido total contato com a superfície. Dessa forma, percebe-se que as dimensões do prato não podem ser desprezadas, já que, para diferentes posições em relação à

beirada da mesa, o prato pode estar em equilíbrio ou não. Além disso, é fácil perceber que, ao fecharmos uma porta, é mais eficiente que apliquemos nela uma força em um ponto mais distante da dobradiça do que mais perto dela. Logo, percebe-se que o ponto de aplicação dessa força fará diferença no efeito produzido pela força na rotação dessa porta.

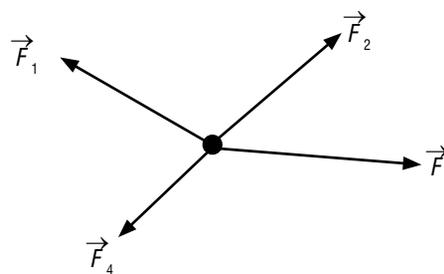
Logo, devemos considerar o prato e a porta corpos extensos ou rígidos. Vamos, a seguir, discutir as condições de equilíbrio para cada tipo de corpo.

### 2.1 Equilíbrio de um ponto material

Em Dinâmica, na apostila 2, vimos que, pela primeira Lei de Newton, um corpo está em equilíbrio estático quando está em repouso em relação a um referencial inercial e está em equilíbrio dinâmico quando está em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial. Ambas as condições são traduzidas por:

$$\sum \vec{F} = 0$$

Ou seja, para que um ponto material esteja em equilíbrio, a resultante das forças que atuam nesse corpo deve ser nula.



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

Como, então, encarar problemas que lidem com esse tipo de equilíbrio? O primeiro passo é, obviamente, se certificar de que o corpo tratado no problema seja um ponto material. Dessa forma, poderemos desconsiderar possíveis rotações. Após isso, devemos traçar o diagrama de corpo livre (DCL), do mesmo jeito que fazíamos quando estávamos estudando dinâmica. Lembre-se que desenhar um DCL claro e conciso é um passo importantíssimo na resolução de problemas que envolvem forças. A partir daí, podemos dividir os problemas em três tipos: os que envolvem apenas duas forças, os que envolvem apenas três forças e os que envolvem mais de três forças.

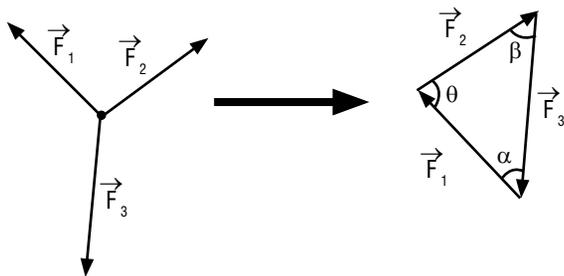
#### Tipo 1: Problemas que envolvem apenas duas forças

Esse é o tipo de problema mais elementar. Quando apenas duas forças estão agindo em um corpo e este está em equilíbrio, já que são sempre coplanares, é necessário que ambas as forças tenham a mesma direção, sentidos contrários e módulos iguais. Somente dessa forma as forças poderão se anular. Um exemplo disso é a força normal e a força peso se anulando quando temos um corpo em repouso em um plano horizontal.

**Tipo 2: Problemas que envolvem apenas três forças**

Quando começamos a tratar de três forças, elas não necessariamente são coplanares. Dessa forma, teremos abordagens diferentes para quando forem coplanares e para quando não forem.

Quando as forças são coplanares, os vetores que as representam devem formar um triângulo de forças de mesmo sentido (horário ou anti-horário), pois já vimos, no assunto Vetores de Física III, que sempre que vetores formam um polígono, a resultante deles é nula. Proceder dessa forma na maioria das vezes simplifica o problema, principalmente quando duas das forças são perpendiculares.



Outra forma de resolver problemas do tipo é decompor as forças em dois eixos perpendiculares, geralmente chamados de  $x$  e  $y$ . Lembre-se de que o melhor modo de escolher os eixos é aquele que comporta o maior número de forças já nos eixos, para facilitar o trabalho de decomposição. Daí, teremos que a força resultante em cada eixo deve ser nula.

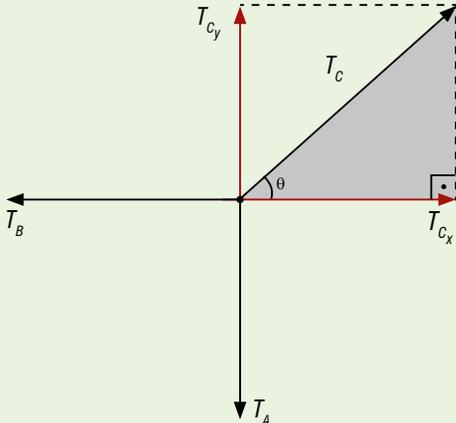
Quando as forças não são coplanares, ou seja, quando o problema passar a ter três dimensões, o melhor jeito de resolver o problema é trabalhar com vetores da mesma forma que trabalhamos no assunto Vetores de Física III. Os vetores unitários serão sempre grandes aliados na resolução desses problemas.

**Tipo 3: Problemas que envolvem mais de três forças**

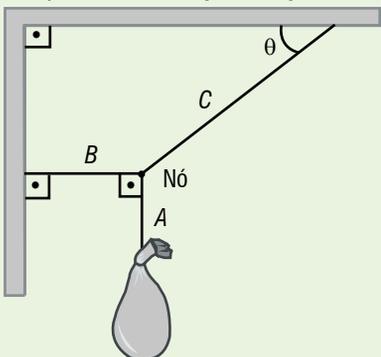
Da mesma forma que com apenas três forças, elas podem ou não ser coplanares. A única abordagem que não é aplicável para mais de três forças é a formação do triângulo de forças. A decomposição de forças nos eixos  $x$  e  $y$  para o caso em que as forças são coplanares e a utilização de vetores unitários para quando as forças não são coplanares são os melhores métodos de resolução de problemas do tipo.

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

Na figura, um corpo de peso 120N encontra-se em equilíbrio, suspenso por um conjunto de três fios ideais  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Calcule as intensidades das trações nesses fios. Considere  $\text{sen}\theta = 0,6$  e  $\text{cos}\theta = 0,8$ .



**1ª solução:** decomposição das forças em eixos  $x$  e  $y$   
Sabemos que a tração no fio  $A$  tem que ser igual ao peso do corpo, já que são as únicas duas forças que atuam no corpo.  $\rightarrow T_A = 120\text{N}$   
O diagrama de corpo livre do nó, bem como as trações já decompostas nos eixos, estão representadas na figura a seguir:



Como o nó está em equilíbrio, temos:

$$\sum \vec{F}_y = 0 \rightarrow T_{Cy} = T_A \rightarrow T_C \cdot \text{sen}\theta = 120 \rightarrow$$

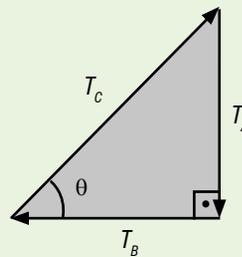
$$T_C \cdot 0,8 = 120 \rightarrow T_C = 200\text{N}$$

$$\sum \vec{F}_x = 0 \rightarrow T_{Cx} = T_B \rightarrow T_C \cdot \text{cos}\theta = T_B \rightarrow$$

$$T_B = 200 \cdot 0,8 \rightarrow T_B = 160\text{N}$$

**2ª solução:** utilização do triângulo de forças

Já sabendo que  $T_A = 120\text{N}$ , podemos determinar as outras duas trações utilizando o triângulo de forças:



Dessa forma, temos:

$$\text{sen}\theta = \frac{T_A}{T_C} = 0,6 \rightarrow T_C = \frac{T_A}{0,6} = \frac{120}{0,6} \rightarrow T_C = 200\text{N}$$

$$\text{cos}\theta = \frac{T_B}{T_C} = 0,8 \rightarrow T_B = T_C \cdot 0,8 = 200 \cdot 0,8 \rightarrow T_B = 160\text{N}$$

Vê-se que, nesse caso, a utilização do triângulo de forças torna a resolução da questão mais prática.

Agora estudaremos quais são as condições para o equilíbrio de um corpo rígido.

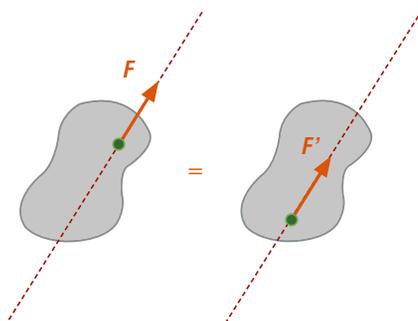
## 2.2 Equilíbrio de corpo rígido

Na seção 2.1, nosso estudo estava restrito a pontos materiais. Como não possuem dimensão, estão sujeitos apenas a movimentos de translação, já que, como vimos, toda rotação é desconsiderada.

Agora, passaremos a tratar de corpos rígidos (ou extensos). Dessa forma, não devemos considerar apenas o equilíbrio de translação. Devemos pensar também no equilíbrio de rotação. Veremos as condições para que cada um deles ocorra. Porém, antes disso, vamos pensar no princípio de transmissibilidade.

### 2.2.1 Princípio de transmissibilidade

O princípio de transmissibilidade afirma que as condições de equilíbrio para um corpo rígido continuarão sendo satisfeitas se uma força  $F$ , já atuante em algum ponto do corpo, for substituída por outra força,  $F'$ , de mesma intensidade e direção, mas atuando em um ponto que esteja contido na mesma linha de ação da força  $F$ . O princípio está esquematizado na figura a seguir:



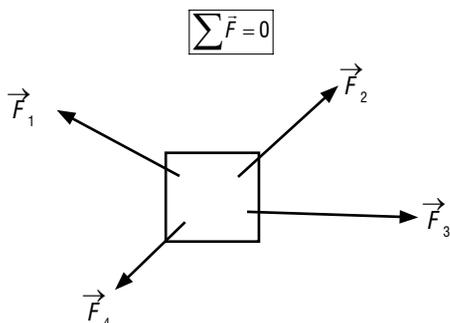
Como possuem o mesmo efeito, as forças  $F$  e  $F'$  são chamadas de forças equivalentes.

O princípio afirma, resumidamente, que uma força pode ser transmitida ao longo de sua linha de ação em um corpo rígido sem que o seu equilíbrio seja alterado. Dessa forma, as forças em corpos rígidos devem ser representadas por um tipo diferente de vetor, denominado vetor deslizante.

Com o princípio da transmissibilidade em mente, podemos avançar para o estudo das condições de equilíbrio de corpos rígidos.

### 2.2.2 Equilíbrio de translação de corpos rígidos

As condições de equilíbrio de translação de corpos rígidos são exatamente as mesmas que devem ser satisfeitas para o equilíbrio de pontos materiais, já que estes só podem sofrer translação. Dessa forma, tudo que foi dito para os pontos materiais se aplica aqui. A diferença é que podemos lançar mão dos vetores deslizantes, que, por terem direção constante, ainda satisfarão que a força resultante deve ser nula para que o corpo esteja em equilíbrio de translação, confirmando o princípio da transmissibilidade.



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$$

### 2.2.3 Equilíbrio de rotação de corpos rígidos

Sabemos que, pela segunda Lei de Newton, toda força está associada a uma aceleração. Estudamos, em dinâmica, como é feita essa relação para pontos materiais, seja em movimentos retilíneos ou curvilíneos. Porém, não chegamos a estudar a dinâmica de corpos rígidos. O escopo do nosso curso não inclui essa disciplina, porém uma analogia pode ser feita.

Sabemos que as forças que estudamos possibilitavam os corpos, que considerávamos pontos materiais, a alterarem seus equilíbrios de translação, já que estavam diretamente associadas a acelerações. Porém, para corpos rígidos, como suas dimensões não podem ser desprezadas, existirá a possibilidade de rotação desses corpos em torno de eixos, já que cada elemento de massa terá uma posição diferente a cada instante e, no caso de movimentos curvilíneos, os executarão com raios diferentes, o que, para pontos materiais, não acontece. Logo, como a alteração do equilíbrio de translação é devido às forças, deve existir um elemento que altere o equilíbrio de rotação desses corpos rígidos. O nome desse elemento é o torque, ou momento, representado pela letra grega  $\tau$ .

Quando definimos força, no assunto Dinâmica, dissemos que ela era a derivada temporal da quantidade de movimento associada ao movimento de translação, também chamada de momento linear. Dessa força, dada a analogia feita entre força e torque, a definição de torque é semelhante à da força. Torque é, no final das contas, a derivada temporal da quantidade de movimento associada, então, ao movimento de rotação, também chamada de momento angular, definido por  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , para uma partícula, onde  $\vec{r}$  é o vetor que liga a partícula ao ponto em torno do qual ela está girando e  $\vec{p}$  é a sua quantidade de movimento. Dessa forma, temos:

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

Pela regra de derivação de um produto vetorial, temos:

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Sabemos que  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ , e, como  $\vec{p} = m\vec{v}$ ,  $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = \vec{0}$ .

Dessa forma, como  $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ , temos que:

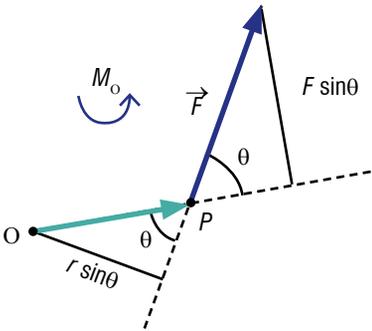
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Vê-se, então, que a existência do torque está diretamente ligada à existência de uma força, o que pressupõe que uma alteração no equilíbrio de rotação de uma partícula em torno de algum ponto deve ser acompanhada de uma alteração no equilíbrio de translação da partícula.

Podemos considerar um corpo rígido como uma distribuição contínua de partículas, ou “elementos de massa infinitesimal”. Quando uma força é aplicada em um corpo rígido, ela é aplicada em apenas um desses elementos. Logo, essa força poderá provocar, além do movimento de translação natural, um movimento de rotação em torno de algum ponto do espaço, que chamaremos de O. Logo, o momento dessa força em torno do ponto O será dado pela relação:

$$\vec{M}_{F,O} = \vec{r} \times \vec{F}$$

A representação geométrica do momento de uma força em relação a um ponto está expressa na figura a seguir:



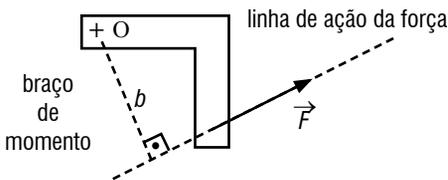
Da fórmula do módulo do produto vetorial, temos:

$$M_{F,O} = r \cdot F \cdot \text{sen}\theta$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre o vetor  $\vec{r}$  e  $\vec{F}$ .

Logo, pela figura, veja que  $r \cdot \text{sen}\theta$  é o módulo da projeção do vetor  $\vec{r}$  na direção perpendicular à linha de ação da força  $\vec{F}$ . Pela fórmula da intensidade do momento da força, vê-se, então, que ela é dada pelo produto da intensidade da força pelo módulo dessa projeção do vetor  $\vec{r}$ . Vê-se também que  $r \cdot \text{sen}\theta$  é a distância entre a linha de ação da força e uma reta paralela a essa linha que passe pelo ponto O. Por isso tudo, chamamos essa distância de braço de momento ( $b$ ) da força  $\vec{F}$  em relação ao ponto O. Logo, temos  $r \cdot \text{sen}\theta = b$ , o que nos dá, em módulo:

$$M_{F,O} = F \cdot b$$



Perceba que, no SI, a unidade do momento é  $\text{N} \cdot \text{m}$ , dimensionalmente igual ao Joule (J), unidade de energia. Então, por que as duas grandezas, tendo a mesma unidade, são completamente diferentes? Tente refletir sozinho. Dica: pense nas definições de torque e trabalho e na analogia entre força e torque.

Essa é a relação que mais usaremos na resolução de questões, já que quase todas elas tratarão o momento apenas em sua característica escalar.

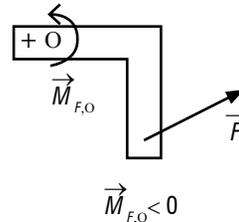
Veja que o mesmo efeito é obtido se decomposermos a força  $\vec{F}$  em uma direção perpendicular ao vetor  $\vec{r}$ . Dessa forma, a intensidade dessa componente passa a ser  $F \cdot \text{sen}\theta$ , enquanto que a outra componente,  $F \cdot \text{cos}\theta$ , teria sua direção passando pelo ponto O. Então, apenas a componente  $F \cdot \text{sen}\theta$  exerceria momento em O, com braço de momento igual a  $r$ , enquanto que o momento de  $F \cdot \text{cos}\theta$  seria nulo, já que seu braço de momento seria nulo.

Logo, podemos calcular o momento de uma força de duas formas: calculando o braço de momento  $b$  da força aplicada (geometricamente ou pela simples decomposição do vetor  $\vec{r}$  na direção perpendicular à linha de ação da força) ou decompondo a força em uma direção perpendicular à direção do vetor  $\vec{r}$ , e multiplicando sua intensidade pela intensidade do vetor  $\vec{r}$ .

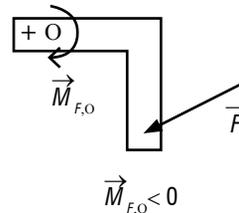
Dessa forma, vemos que forças que possuem braço de momento nulo, ou seja, forças que têm direção passando pelo ponto em relação ao qual se deseja calcular o momento, têm momento em relação a esse ponto nulo. Isso será extremamente importante na resolução de questões, já que o ponto mais conveniente em relação ao qual se calculará os momentos das forças que deverá ser escolhido será aquele que apresentar momentos nulos para as forças que não são importantes no problema. Veja também que qualquer força em cima de uma mesma linha de ação terá o mesmo braço de momento, o que significa que podemos deslizar uma mesma força sobre sua linha de ação e obter o mesmo efeito, confirmando, mais uma vez, o princípio da transmissibilidade.

O momento de uma força pode fazer com que o corpo gire no sentido horário ou no sentido anti-horário. Dessa forma, cada um desses momentos recebe um sinal diferente, dependente da convenção adotada por que está resolvendo o problema. A convenção mais usada é:

sentido anti-horário → positivo

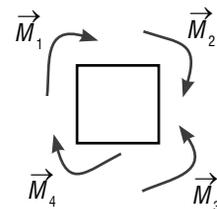


sentido horário → negativo



Logo, como o equilíbrio de translação é dado por  $\sum \vec{F} = 0$ , nada mais justo que, pela analogia que fizemos, afirmarmos que a condição necessária para que o equilíbrio de rotação seja satisfeito é:

$$\sum \vec{M} = 0$$



$$\vec{M}_1 + \vec{M}_3 + \vec{M}_3 + \vec{M}_3 = 0$$

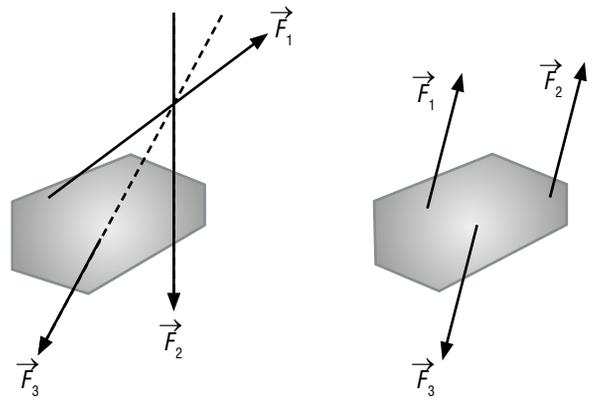
Ou seja, o somatório vetorial dos momentos das forças que atuam em um corpo rígido em relação a qualquer ponto do espaço tem que ser nulo para que o corpo esteja em equilíbrio de rotação. Se existir pelo menos um ponto em relação ao qual o somatório dos momentos das forças não seja nulo, o corpo estará em rotação pelo menos em torno daquele ponto.

Vamos supor, então, que existam três forças coplanares atuando em um corpo rígido que não sejam paralelas entre si,  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$ . Como não são paralelas, são concorrentes. Agora, vamos supor que elas não sejam

concorrentes no mesmo ponto, duas a duas. Calculando-se o momento das três forças em relação ao ponto de concorrência de  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$ , veja que o momento dessas forças será nulo, já que suas linhas de ação passam por esse ponto. Porém, o momento de  $\vec{F}_3$  em relação a esse ponto não será nulo, já que essa força não passa por ele. Logo, o corpo estará em rotação pelo menos em torno desse ponto, já que existirá, de fato, momento em relação a ele. Dessa forma, para que três forças possam coexistir em um corpo rígido sem alterar seu equilíbrio de rotação, as três forças devem concorrer no mesmo ponto. Veja que o equilíbrio de translação não exige nem que sejam concorrentes no mesmo ponto, nem que não sejam, não constituindo um empecilho para essa afirmação. Supondo, agora, as forças com linhas de ação paralelas, não podemos ter duas forças com linhas de ação coincidentes, já que o momento dessas duas forças em relação a essa linha de ação seria nulo, enquanto que o da outra força não seria nulo. Logo, para que o equilíbrio de rotação possa ser atingido para três forças paralelas, suas linhas de ação não devem ser coincidentes duas a duas. Novamente, o equilíbrio de translação poderá existir, já que bastará que uma delas tenha um sentido, as outras duas o outro sentido e a soma do módulo daquela seja a soma do módulo destas duas.

Se essas três forças não forem coplanares, o equilíbrio de rotação nunca será satisfeito (tente provar por si mesmo).

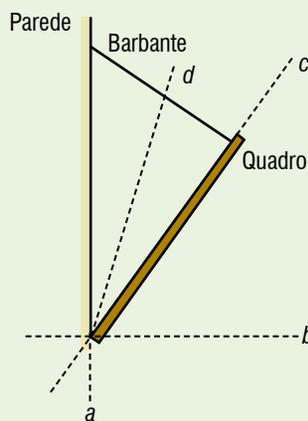
Logo, dessas afirmações, podemos enunciar o teorema das três forças: se um corpo está sob a ação de três forças e está em equilíbrio de rotação, essas forças devem ser coplanares, podendo ser concorrentes num mesmo ponto, ou todas paralelas entre si com linhas de ação não coincidentes duas a duas, sendo o equilíbrio de translação determinado pela escolha de módulos (para os dois casos) e direções adequadas (para o caso das concorrentes). Esse teorema é bastante importante para a resolução de problemas que envolvam três forças em corpos rígidos. Tendo duas das forças, consegue-se determinar a direção da terceira força rapidamente. A figura a seguir expressa o teorema:



Como, então, encarar problemas que lidem com cálculos de momentos para estabelecer equilíbrio de corpos rígidos? O primeiro passo é, obviamente, notificar-se de que o objeto em questão no problema é um corpo rígido, verificando se, por exemplo, o deslocamento do ponto de aplicação de uma força alteraria o efeito dela sobre o corpo. Depois disso, geralmente temos que escolher um ou dois pontos para cálculo dos momentos das forças relacionadas no problema. Devemos escolher esses pontos de modo a anular os momentos de forças que são desinteressantes, escrevendo equações apenas em função das variáveis que importam. Para o cálculo dos momentos, deveremos, então, escolher o método mais apropriado: cálculo do braço de momento (geometricamente ou por decomposição do vetor posição do ponto de aplicação da força) ou decomposição da força propriamente dita em componentes (uma dessas componentes realizará momento, enquanto que a outra não, pelo fato de a sua linha de ação conter o ponto em relação ao qual se está calculando o momento).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01 (HELOU)** A figura abaixo representa um quadro retangular e homogêneo dependurado em uma parede e em equilíbrio. Qual das retas *a*, *b*, *c* ou *d*, melhor representa a linha de ação da força que a parede exerce no quadro?



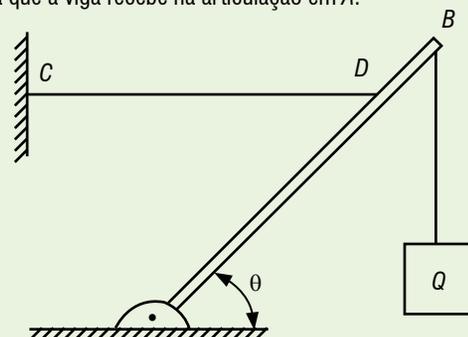
**Solução:**

A força de tração que atua no quadro tem a direção do barbante. A força peso, sendo o quadro homogêneo, está aplicada no centro de gravidade do quadro, ou seja, no seu ponto médio, e tem direção vertical (falaremos sobre isso depois). Dessa forma, como a parede, o barbante e o quadro formam um triângulo, a direção da tração é o lado correspondente ao barbante e a direção do peso do quadro é uma reta vertical que passe pelo ponto médio do lado correspondente ao quadro,

logicamente cortando o lado correspondente ao barbante. Logo, as linhas de ação da tração e do peso concorrem em um ponto pertencente ao lado correspondente ao barbante. Dessa forma, a linha de ação da força que a parede faz no quadro deve passar por esse ponto, de acordo com o teorema das três forças, já que só existem essas três forças atuando no quadro. A reta que melhor representa essa reta passando pelo lado correspondente ao do barbante é a reta *d*.

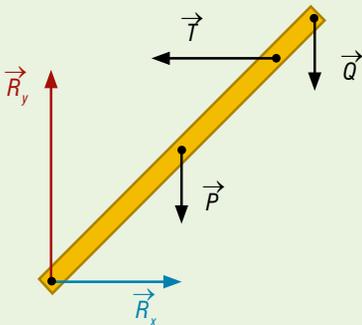
**02 (FEI-SP)** No esquema, *AB* representa uma viga prismática e homogênea de peso  $P = 30 \text{ kgf}$  e *CD* representa um cabo horizontal de peso desprezível:

São dados  $AD = 300 \text{ cm}$ ;  $DB = 100 \text{ cm}$  e  $\theta = 45^\circ$ . A viga é articulada sem atrito em *A* e suporta em *B* um corpo de peso  $Q = 120 \text{ kgf}$ . Determinar o esforço no cabo e as componentes horizontal e vertical da força que a viga recebe na articulação em *A*.



**Solução:**

Sabemos que, para a barra estar em equilíbrio de rotação, o somatório dos momentos em relação a qualquer ponto deve ser nulo. Impondo essa condição para o ponto A, a força que a articulação exerce sobre a barra pode ser ignorada, já que está sendo aplicada no ponto no qual estamos calculando o somatório dos momentos. Dessa forma, as forças a serem consideradas nesse somatório serão o peso da barra, a tração no cabo que sustenta o peso Q e a tração no cabo CD. Como conhecemos o peso da barra e a tração no cabo que sustenta o peso Q, conseguimos calcular direto a tração no cabo CD. Essa é a vantagem de se analisar em que ponto é mais conveniente aplicar o somatório dos momentos, evitando-se, assim, mais equações e contas. A figura a seguir representa a situação.



Na figura,  $a$  é o braço de momento do peso  $P$  da barra,  $b$  é o braço de momento da tração no fio  $CD$  e  $c$  é o braço de momento do peso  $Q$ . Calculando-os geometricamente, temos:

$$a = AG \cdot \cos 45^\circ = 200 \cdot \sqrt{2} / 2 = 100 \sqrt{2} \text{ cm}$$

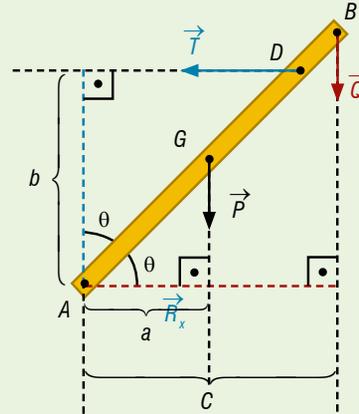
$$b = AD \cdot \cos 45^\circ = 300 \cdot \sqrt{2} / 2 = 150 \sqrt{2} \text{ cm}$$

$$c = AB \cdot \cos 45^\circ = 400 \cdot \sqrt{2} / 2 = 200 \sqrt{2} \text{ cm}$$

Assumindo que momentos horários são positivos, temos:

$$\bullet M_A = 0 \rightarrow P \cdot a + Q \cdot c - T \cdot b = 0 \rightarrow 300 \cdot 100 \sqrt{2} + 120 \cdot 200 \sqrt{2} - T \cdot 150 \sqrt{2} = 0 \rightarrow \boxed{T = 180 \text{ kgf}}$$

Percebe-se, pelo equilíbrio de translação, que a articulação deve exercer uma força vertical para cima ( $R_y$ ) na viga que sustente a soma dos pesos  $P$  e  $Q$ , e uma força horizontal para a direita ( $R_x$ ) que sustente a tração  $T$ .

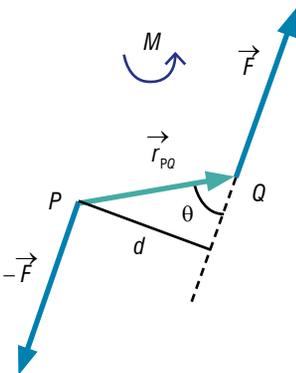


Nessa questão, usamos a decomposição dos vetores posição dos pontos de aplicação das forças, calculando, assim, os braços de momento das forças. A questão poderia ter sido resolvida de forma diferente: decompondo-se as forças em direções perpendiculares e tangencial à barra. Dessa forma, as componentes tangenciais à barra teriam momento nulo em relação ao ponto A, enquanto que as componentes perpendiculares teriam braço de momento igual à distância dos pontos de aplicação de cada uma das forças ao ponto A.

**2.2.4 Momento binário**

Para transportar-se uma força de um ponto  $P$  a um ponto  $Q$ , pertencente ao corpo, que não esteja na mesma linha de ação da força que passa por  $P$ , é conveniente a utilização do momento binário.

O momento binário é exercido quando são aplicadas duas forças em pontos distintos de um corpo, que não pertençam à mesma linha de ação e com linhas de ação paralelas, de mesma intensidade e sentidos contrários, como mostra a figura.



Veja que o momento resultante dessa associação de forças será dado por:

$$\vec{M} = \vec{r}_O \times \vec{F} + \vec{r}_P \times (-\vec{F}) \rightarrow \vec{M} = (\vec{r}_O - \vec{r}_P) \times \vec{F} \rightarrow \boxed{\vec{M} = \vec{r}_{PO} \times \vec{F}}$$

Logo, os vetores posições dos pontos  $P$  e  $Q$  não são utilizados no cálculo do momento binário, já que o vetor usado é o vetor que aponta de  $P$  para  $Q$ , não dependendo então do sistema de referências utilizado. Dessa forma, temos:

$$M = r_{PO} \cdot F \cdot \sin \theta$$

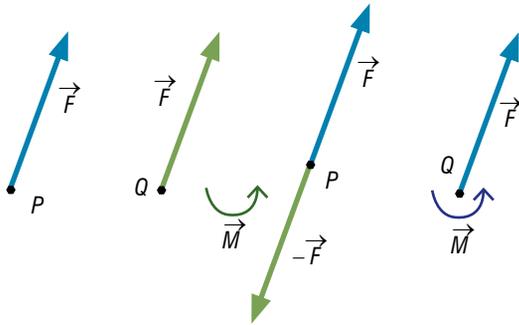
Como  $r_{PO} \cdot \sin \theta = d$ , componente do vetor posição perpendicular à força, temos:

$$\boxed{M = F \cdot d}$$

onde  $d$  é a distância entre as linhas de ação das forças  $\vec{F}$  e  $-\vec{F}$ . Então as duas forças da figura produzem um momento no corpo equivalente ao momento produzido apenas pela força  $\vec{F}$  em relação ao ponto  $P$ , ou pela força  $-\vec{F}$  no ponto  $Q$ . Dessa forma, se apenas essas duas forças agem no corpo, existirá um equilíbrio de translação, já que  $\sum \vec{F} = \vec{F} - \vec{F} = \vec{0}$ , mas o corpo estará rotacionando, já que existirá momento. Exemplo disso é quando se gira uma chave para abrir uma porta (a parte de cima da chave

é pressionada para um lado, enquanto que a parte de baixo é pressionada para o outro lado), ou quando se aplicam forças no volante do carro para realização de uma curva utilizando duas mãos (uma mão fará uma força para cima e outra mão fará uma força para baixo).

Vamos supor agora que uma força  $\vec{F}$  esteja aplicada em um ponto  $P$  de um corpo. Podemos transportá-la para um outro ponto  $Q$  da seguinte maneira: aplica-se em  $P$  uma força  $-\vec{F}$  e em  $Q$  uma força  $\vec{F}$ . Dessa forma, o sistema não é alterado em termos de translação, já que essas forças se anulam. Porém, essas duas forças constituem um binário, que pode ser substituído pelo momento de  $-\vec{F}$  em relação a  $Q$ , porém em sentido oposto, para não se alterar o equilíbrio. A seguinte figura representa a situação explanada:



### 2.2.5 Centro de gravidade

Denomina-se centro de gravidade de um corpo ou de um sistema de pontos materiais discretos um determinado ponto por onde passa a linha de ação de um peso resultante, isto é, local onde podemos supor que o peso está concentrado.

As coordenadas do centro de gravidade podem ser determinadas por uma média, ponderada pelos pesos, das coordenadas de cada peso discreto ou das coordenadas dos centros de gravidade de cada parte do corpo.

|   |   |   |
|---|---|---|
| $x_G = \frac{\sum_{i=1}^n P_i x_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$ | $y_G = \frac{\sum_{i=1}^n P_i y_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$ | $z_G = \frac{\sum_{i=1}^n P_i z_i}{\sum_{i=1}^n P_i}$ |
|---|---|---|

Veja que, nas fórmulas, se substituirmos cada peso pelo produto da massa pela gravidade, a gravidade “cortará”, caso ela seja constante. Essas novas fórmulas resultantes representam o centro de massa do sistema. Dessa forma, quando a gravidade é constante, o centro de gravidade do sistema coincide com o centro de massa do sistema.

Essas fórmulas só se aplicam para distribuições de partículas discretas. Para distribuições contínuas, só precisamos nos preocupar com formas geométricas que sejam minimamente simétricas, pois dessa forma o centro de gravidade coincidirá com o centro geométrico do corpo, e é o que nos é cobrado nos vestibulares. Para uma placa retangular homogênea, por exemplo, o centro de gravidade será o ponto de encontro das diagonais. Em um triângulo qualquer homogêneo, o centro de gravidade é o encontro das medianas (baricentro: bari = peso). Para figuras formadas por mais de uma figura que se tenham os centros de gravidades conhecidos, o centro de gravidade resultante será a média dos centros de gravidades das figuras, ponderada por suas áreas. Um exemplo é o trapézio retângulo, formado por um retângulo e um triângulo.

Pensando, agora, no exemplo do prato apoiado sobre a mesa, mostrado no início do capítulo, podemos deduzir, naturalmente, que seu centro de gravidade se localiza no centro da circunferência do prato, considerando-o homogêneo. O prato só cairá, de fato, da mesa, quando seu centro de gravidade atravessar a beirada da mesa. Enquanto o centro de gravidade ainda estava apoiado na mesa, o prato permanecia em equilíbrio de rotação. Isso acontece porque, quando o centro de gravidade não pertence mais à superfície de apoio, a linha de ação do peso resultante do prato não passará mais por essa superfície de apoio, provocando, então, momento em relação a qualquer um dos pontos dela, fazendo-o tombar da mesa. Ou seja, para corpos rígidos apoiados e submetidos exclusivamente às forças peso e às reações do apoio, as linhas de ação de suas forças peso, ou seja, as retas verticais que passem pelo centro de gravidade, devem passar pelo ponto ou superfície de apoio do corpo, para que estes permaneçam em equilíbrio de rotação.

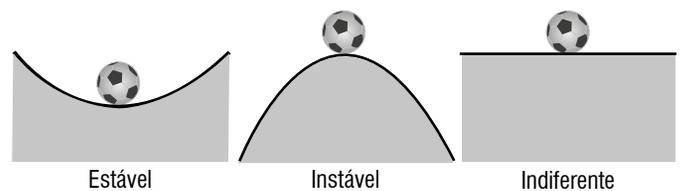
### 2.2.6 Tipos de equilíbrio

Pense em uma bola no fundo de uma depressão semicircular. Quando damos um leve toque na bola, ela, de fato, oscilará em torno dessa posição até que pare novamente nessa posição, devido à ação de forças de atrito. Caso essas forças de atrito não existam, a bola oscilará eternamente em torno dessa posição de equilíbrio. A bola, então, se encontra em equilíbrio estável, já que, para leves toques, ela sempre tenderá a retornar à sua posição de equilíbrio inicial. As forças que fazem com que a bola retornem à sua posição de equilíbrio inicial são chamadas de forças de restauração. Já tivemos bastante contato com elas no assunto Eletrização e Cargas Elétricas, na apostila 1, e aprofundaremos no assunto Movimento Harmônico Simples, nessa apostila.

Agora, pense em uma bola no alto de uma colina. Se dermos um leve toque na bola, ela tende a sempre se afastar da posição inicial de equilíbrio. A bola, nesse caso, se encontra em equilíbrio instável, já que existirão forças (componentes tangenciais do peso, no caso) que estarão sempre a afastando da sua posição inicial de equilíbrio, à procura de uma nova posição de equilíbrio, de preferência estável ou indiferente, que veremos a seguir.

Consideremos, por fim, uma bola em um plano horizontal liso. Se dermos algum toque na bola, ela sairá de sua posição de equilíbrio inicial, podendo voltar a ela ou não, continuando em equilíbrio. Dessa forma, a bola estará em equilíbrio indiferente, já que não fará diferença a posição de equilíbrio em que ela vier a parar.

A figura a seguir representa as situações explanadas acima:



Pense você mesmo agora. Uma placa retangular homogênea é fixada em uma parede por um prego em três situações:

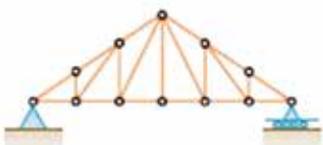
- I. Pregos fixado no centro de gravidade.
  - II. Pregos fixado na linha de ação do peso, acima do centro de gravidade.
  - III. Pregos fixado na linha de ação do peso, abaixo do centro de gravidade.
- Que tipo de equilíbrio será experimentado em cada uma das situações?

### 3. Treliças

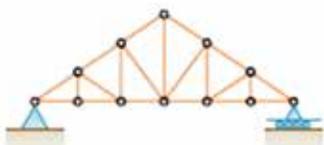
As treliças são uma das estruturas mais importantes na engenharia. Estão presentes em prédios, casas, pontes, enfim, em diversas aplicações tanto na engenharia civil quanto na mecânica.

Treliças são estruturas constituídas por barras homogêneas conectadas entre si por nós. Cada nó é a conexão de duas ou mais barras. Nenhuma barra é contínua através de um nó, sendo os nós pontos de descontinuidade da barra.

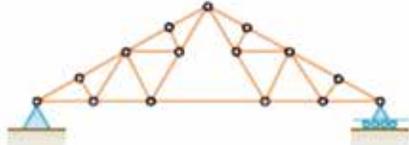
A figura a seguir mostra exemplos de treliças muito comuns:



Pratt

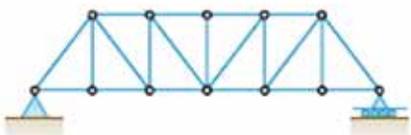


Howe

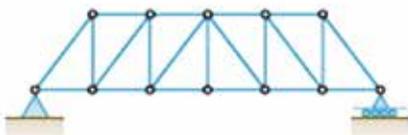


Fink

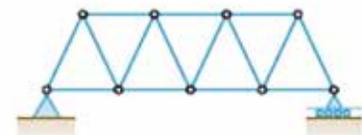
Treliças típicas de telhados



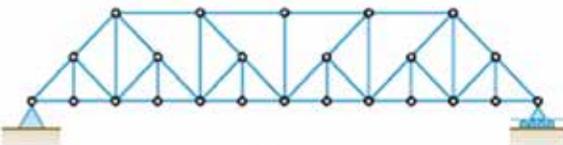
Pratt



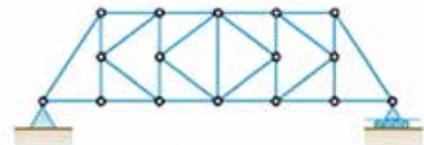
Howe



Warren

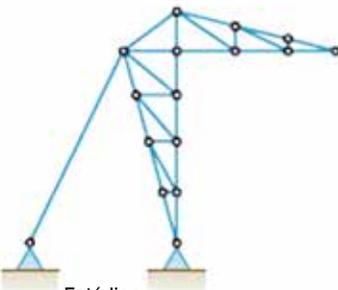


Baltimore

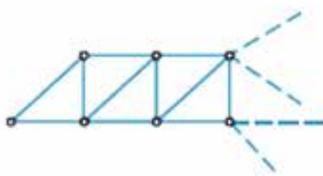


Treliça K

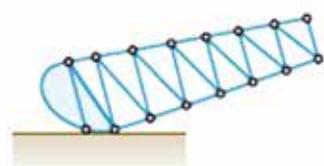
Treliças típicas de pontes



Estádios



Porção em consola de uma treliça

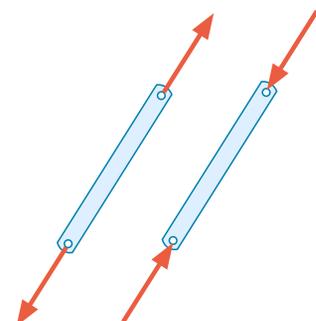


Estrutura levadiça

Outros tipos de treliças

(Adaptado de Beer e Johnston.)

Geralmente, as barras que constituem as treliças são consideradas delgadas e suportam pouco carregamento lateral. Logo, os carregamentos devem ser aplicados nos nós e não diretamente nas barras. Também se considera que os pesos das barras estão aplicados nos nós. Porém, na maioria das vezes, desconsideraremos os pesos das barras. Dessa forma, todo membro da treliça, exceto por forças externas, estará submetido apenas a duas forças, que atuarão ao longo das barras e nos nós. Essas forças podem tender a partir a barra ao meio “para fora” ou podem tender a comprimir a barra “para dentro”, conforme mostra a figura a seguir, respectivamente:

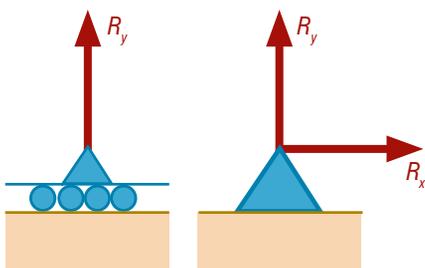


Quando as forças tenderem a partir a barra, elas serão chamadas de forças de tração. Quando elas tenderem a comprimir a barra, serão chamadas de forças de compressão. Logo, uma barra ou está tracionada ou está comprimida.

Estudaremos aqui, primordialmente, as treliças simples. Elas são formadas a partir de uma treliça rígida – treliça formada por três barras, em formato triangular, que não tem seu formato deformado a partir da aplicação de um carregamento –, adicionando-se duas novas barras a dois nós distintos, formando um novo nó. Veja que as treliças “Fink” e “Baltimore” exemplificadas anteriormente não são treliças simples, enquanto que as restantes são. Observe que, toda vez que duas barras são adicionadas, um nó é formado, como foi dito antes. Dessa forma, vemos que o número  $b$  de barras e o número  $n$  de nós se relacionam de acordo com a seguinte relação:

$$b = 2n - 3$$

As treliças têm de estar, de alguma forma, apoiadas no chão. Os dois principais tipos de apoios que veremos nos problemas que resolvermos são os seguintes:



O primeiro provoca reações de apoio tangencial e perpendicular à superfície de apoio, funcionando como uma superfície rugosa, que apresenta atrito. O segundo provoca apenas reações de apoio perpendiculares à superfície de apoio (a representação das rodinhas significa que não possuem atrito com a superfície de apoio).

Estudaremos dois métodos de análise de treliças simples. O primeiro, chamado de método dos nós, será mais útil quando quisermos calcular todas as forças aplicadas nas barras de uma treliça. O segundo, chamado de método das seções, será mais conveniente quando quisermos calcular a força em uma barra específica.

### 3.1 Método dos nós

O método dos nós é mais conveniente quando queremos determinar as forças que atuam em todas as barras de uma treliça simples. O método consiste nos seguintes passos:

- I. Traçar o diagrama de corpo livre da estrutura como um todo, ou seja, considerando apenas as forças externas (carregamentos e reações de apoio, lembrando que cada tipo de apoio nos dá reações diferentes). A partir desse diagrama, será possível determinar, sendo conhecidos os carregamentos, o valor das reações de apoio.
- II. Localizar um nó que esteja unindo apenas duas barras e trace o seu diagrama de corpo livre. A partir desse diagrama, você poderá calcular as duas forças que estejam agindo nesse nó, ou seja, agindo nas barras conectadas a esse nó. Resolva como for mais conveniente (triângulo de forças – quando três forças apenas estiverem envolvidas e você conhecer uma delas – ou decomposição das forças em eixos perpendiculares), lembrando que o nó estará em equilíbrio. Para isso, você terá que adotar sentidos arbitrários para as forças no nó. Se o valor encontrado para a força for negativo, significa que o sentido arbitrado está errado, isto é, a força deveria ter o sentido contrário.

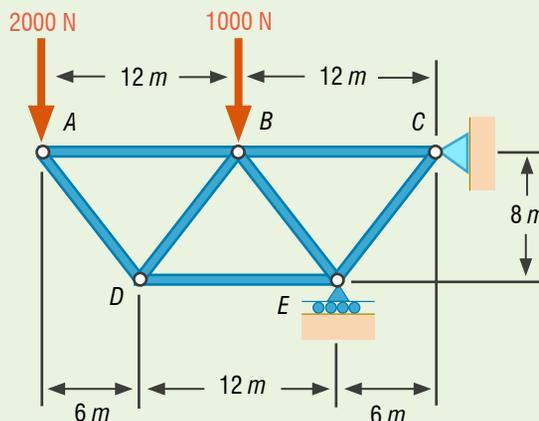
- III. Depois, localize um nó em que as forças em apenas duas barras das conectadas àquele nó ainda não são conhecidas. Desenhe o diagrama de corpo livre para esse nó e use-o como no passo 3 para determinar as forças desconhecidas. Lembre-se de que você já terá calculado forças em algumas barras, no passo 2, então uma dica é continuar escolhendo nós que carreguem alguma dessas forças.
- IV. Repita esse procedimento até que todas as forças em todas as barras da treliça sejam descobertas. Como você previamente usou três equações para determinar as reações de apoio no diagrama de corpo livre da treliça inteira, no passo 1 (momento resultante nulo, força resultante em  $x$  nula e força resultante em  $y$  nula), sobrarão três equações no final, que poderão ser usadas como prova real dos seus cálculos.

Perceba que a escolha do primeiro nó, no passo 2, não é única. Em alguns casos, a escolha de certo nó pode levar, no seguimento dos passos, a um nó que você não consiga resolver. Então, você deverá recomeçar o procedimento escolhendo outro nó. Uma dica bastante útil é escolher um nó no qual esteja aplicado algum carregamento.

Vamos ver um exercício resolvido a respeito disso.

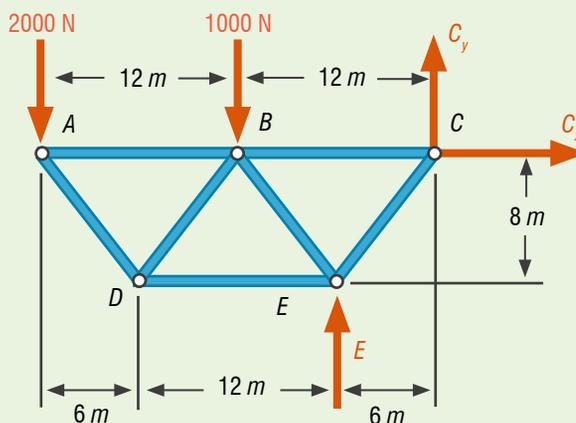
#### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

(Beer e Johnston) Usando o método dos nós, determine as forças em cada uma das barras da treliça representada na figura.



#### Solução:

Primeiro, vamos traçar o diagrama de corpo livre da estrutura como um todo, lembrando de colocar as devidas reações de apoio. Ele está representado na figura a seguir.



Impondo  $\sum M_c = 0$ , considerando o sentido anti-horário positivo:

$$2000 \cdot 24 + 1000 \cdot 12 - E \cdot 6 = 0 \rightarrow E = 10000\text{N}$$

Como achamos  $E > 0$ , significa que supusemos seu sentido corretamente.

Impondo  $\sum F_x = 0$ .

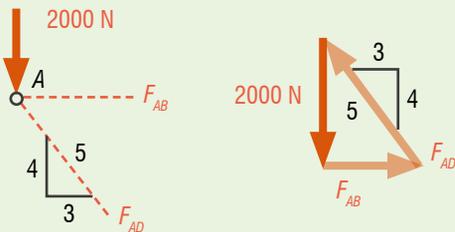
$$C_x = 0$$

Impondo  $\sum F_y = 0$

$$C_y + 10000 - 2000 - 1000 = 0 \rightarrow C_y = -7000\text{N}$$

Como achamos  $C_y < 0$ , significa que supusemos seu sentido erradamente. Deveria ter sentido 'para baixo', em vez de 'para cima', como arbitrado.

Agora que já conhecemos as reações de apoio, podemos começar a isolar os nós. Começando pelo nó A (um dos nós com carregamento e unindo apenas duas barras), vemos que esse não está submetido apenas a três forças. Dessa forma, podemos criar um triângulo de forças como indicado na figura a seguir. Perceba que o triângulo é retângulo e deve ter lados proporcionais a 3, 4 e 5 (relação facilmente tirada da geometria do problema).



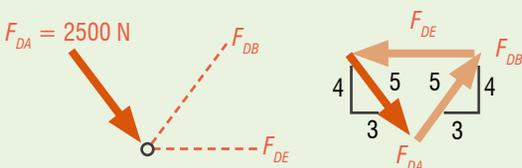
Temos, da figura:

$$\frac{F_{AB}}{3} = \frac{2000\text{N}}{4} \rightarrow F_{AB} = 1500\text{N}$$

$$\frac{F_{AD}}{5} = \frac{2000\text{N}}{4} \rightarrow F_{AD} = 2500\text{N}$$

Lembre-se que, se no nó a força aponta em um sentido, na barra a força apontará no sentido inverso (3ª lei de Newton). Logo, a força  $F_{AB}$  é de tração na barra AB, já que está apontando para fora do nó A, e a força  $F_{CD}$  é de compressão na barra CD, já que está apontando para o nó A.

Agora, vamos isolar o nó D (que possui apenas duas forças desconhecidas e carregou uma das forças do nó A). Seu diagrama de corpo livre está expresso na figura a seguir:



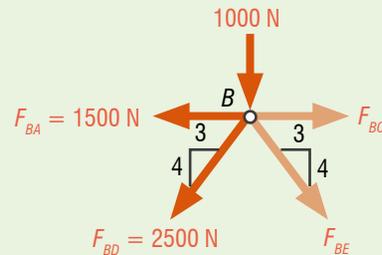
Pelos triângulos desenhados, temos que:

$$F_{DB} = F_{DA} \rightarrow F_{DB} = 2500\text{N}$$

$$F_{DE} = 2 \left( \frac{3}{5} \right) F_{DA} \rightarrow F_{DE} = 3000\text{N}$$

Veja que  $F_{DB}$  é uma força de tração na barra DB e  $F_{DE}$  é uma força de compressão na barra DE.

Agora, vamos isolar o nó B (apenas duas forças não conhecidas). Temos a figura do seu diagrama de corpo livre:



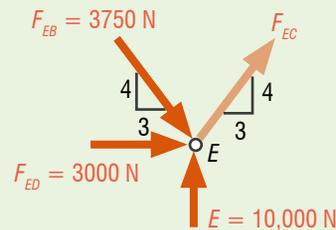
Utilizando a decomposição das forças em eixos, temos:

$$\sum F_y = 0 \rightarrow -1000 - \left( \frac{4}{5} \right) 2500 - \left( \frac{4}{5} \right) F_{BE} = 0 \rightarrow F_{BE} = -3750\text{N}$$

$$\sum F_x = 0 \rightarrow F_{BC} - 1500 - \left( \frac{3}{5} \right) 2500 - \left( \frac{3}{5} \right) F_{BE} = 0 \rightarrow F_{BC} = 5250\text{N}$$

Veja que, como  $F_{BE}$  foi encontrada negativa, significa que ele aponta para o nó B, em vez de apontar para fora, como supomos. Dessa forma,  $F_{BE}$  é força de compressão na barra BE.  $F_{BC}$  será, então, força de tração na barra BC, já que aponta para o nó B.

Agora, vamos isolar o nó E. Restou uma força não conhecida. Logo, apenas uma equação será suficiente para resolvê-lo. Dessa forma, sobrará uma equação desse nó e duas do nó C, como previsto anteriormente.



Utilizando a decomposição das forças em eixos, temos:

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \left( \frac{3}{5} \right) F_{EC} + 3000 + \left( \frac{3}{5} \right) 3750 = 0 \rightarrow F_{EC} = -8750\text{N}$$

Veja que, como  $F_{EC}$  foi encontrada negativa, significa que aponta para o nó E, em vez de apontar para fora, como supomos. Dessa forma,  $F_{EC}$  é força de compressão na barra EC.

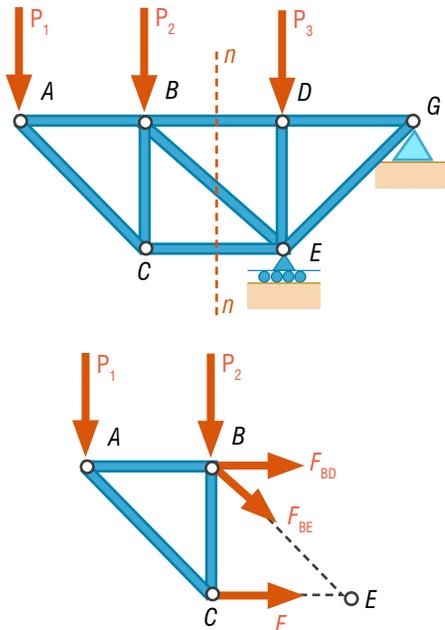
Utilize a equação das forças em y nesse nó e as equações do nó C para checar as contas.

É bem perceptível que, se quiséssemos calcular apenas a força na barra ED, por exemplo, teríamos que ter calculado a força na barra AD antes. Logo, esse método não se mostra eficiente quando queremos calcular apenas a força em uma determinada barra, ainda mais se a treliça possuir mais barras. O próximo método a ser aprendido sanará esse problema.

### 3.2 Método das seções

O método das seções é, como dito anteriormente, muito mais eficiente no cálculo de forças em apenas algumas barras do que o método dos nós, o qual, por sua vez, é mais conveniente quando se quer calcular as forças em todas as barras. Assim como o método dos nós, o método das seções consiste em alguns passos, explanados a seguir:

- I. Desenhar o diagrama de corpo livre da treliça inteira, considerando apenas suas forças externas (carregamentos e reações de apoio). Dessa forma, será possível o cálculo das reações de apoio.
- II. Passe uma seção que corte três barras da treliça, uma das quais deve ser a barra na qual se deseja calcular a força. Dessa forma, passarão a existir dois "pedaços" da treliça, como mostrado na figura abaixo.



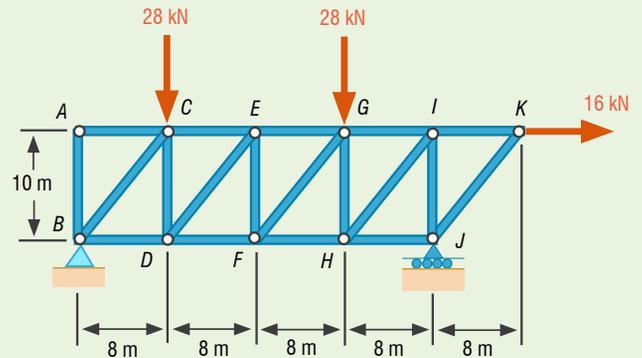
Nessas seções, as forças que atuam nas barras cortadas aparecem como forças externas das porções da treliça originadas.

- III. Escolha uma das porções da treliça, desenhe seu diagrama de corpo livre, atentando para as forças externas a essas porções, representadas pelas forças que atuam nas barras. Dessa forma, você será capaz de escrever três equações de equilíbrio para a porção escolhida. Como existem três forças a determinar, as três equações bastarão. Lembre-se de que você só poderá cortar três barras com a sua seção. Cortando quatro barras ou mais, existirão quatro ou mais forças a determinar e apenas três equações de equilíbrio, resultando em um sistema indeterminado.

Veja, então, que esse método nos permite calcular, diretamente, as forças externas ao pedaço considerado, ou seja, as forças nas barras cortadas. Se quiséssemos calcular as forças em todas as barras, teríamos que traçar seções que cortassem todas as barras, de três em três, o que não seria interessante, sendo o método dos nós mais apropriado para esse caso.

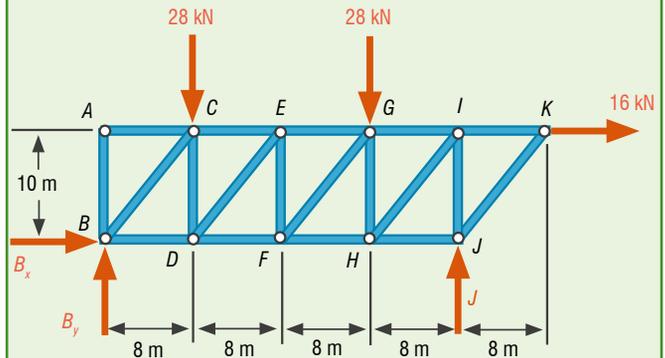
### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**(Beer e Johnston)** Determine as forças nas barras *EF* e *GI* da treliça representada na figura.



**Solução:**

A primeira coisa a se fazer, sempre, é o diagrama de corpo livre da treliça como um todo, para determinar as reações no apoio. Temos:



Impondo  $\bullet M_b = 0$ , para anular os momentos das reações do apoio *B*, considerando positivo o sentido anti-horário, temos:

$$-28 \cdot 8 - 28 \cdot 24 - 16 \cdot 10 + J \cdot 32 = 0 \rightarrow 33 \text{ kN}$$

Impondo  $\bullet F_x = 0$ , temos:

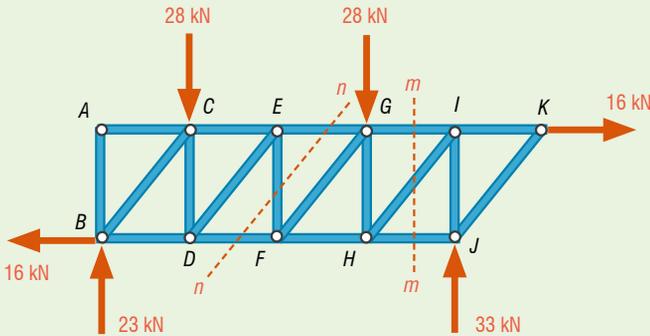
$$B_x + 16 = 0 \rightarrow B_x = -16 \text{ kN}$$

O sinal negativo significa que consideramos  $B_x$  com sentido errado, sendo seu real sentido para a esquerda.

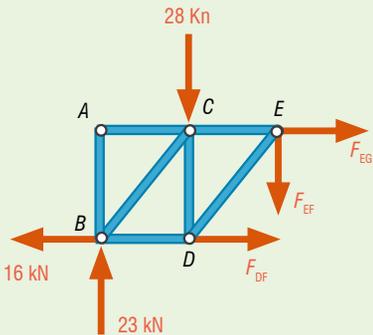
Impondo  $\bullet M_j = 0$ , considerando positivo o sentido anti-horário, temos:

$$28 \cdot 24 + 28 \cdot -16 - 16 \cdot 10 - B_y \cdot 32 = 0 \rightarrow B_y = 23 \text{ kN}$$

Determinadas as reações de apoio, temos condições de proceder às seções. Seccionaremos as barras de acordo com as retas  $nn$  e  $mm$  indicadas na figura.



A seção  $nn$  passa pelas barras  $EG$ ,  $EF$  e  $DF$ . Considerando-se a porção da esquerda gerada por essa seção ( $ABDEC$ ), temos o diagrama de corpo livre dessa porção:

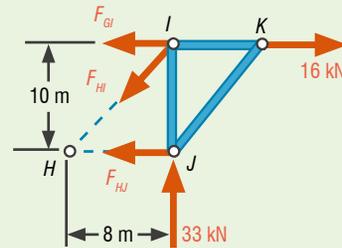


Impondo, para essa porção,  $\sum F_y = 0$ , temos:

$$23 - 28 - F_{EF} = 0 \rightarrow F_{EF} = -5 \text{ kN}$$

Assumimos, inicialmente, pelo sentido adotado para  $F_{EF}$  que a barra  $EF$  estava tracionada (a força no nó deve ter sentido contrário à força na barra, pela 3ª lei de Newton). Logo, pelo sinal negativo encontrado, descobrimos que a barra está sob compressão.

A seção  $mm$  passa pelas barras  $GI$ ,  $IH$  e  $HJ$ . Considerando-se a porção da direita gerada por essa seção ( $IKJ$ ), temos o diagrama de corpo livre dessa porção:



Impondo  $\sum M_H = 0$ , para anular os momentos das forças  $F_{HI}$  e  $F_{HJ}$ , já que elas não nos interessam, temos:

$$33 \cdot 8 - 16 \cdot 10 + F_{GI} \cdot 10 = 0 \rightarrow F_{GI} = -10,4 \text{ kN}$$

Assumimos, inicialmente, pelo sentido adotado para  $F_{GI}$  que a barra  $GI$  estava tracionada (a força no nó deve ter sentido contrário à força na barra, pela 3ª lei de Newton). Logo, pelo sinal negativo encontrado, descobrimos que a barra está sob compressão.

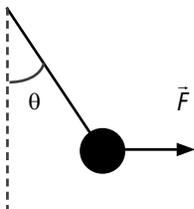
**Solução:**

A força na barra  $EF$  tem intensidade de 5 kN e é de compressão, enquanto que a força na barra  $GI$  tem intensidade de 10,4 kN, também de compressão.

Logo, é nítida a vantagem de usar o método das seções no cálculo de forças em barras específicas em relação ao método dos nós. Escolher o método ideal para resolver o problema pode poupar bastante tempo.

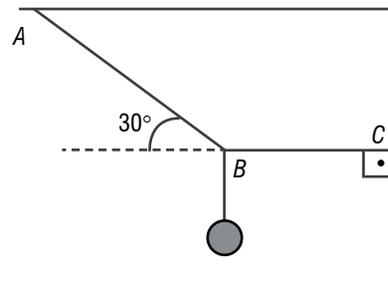
**EXERCÍCIOS NÍVEL 1**

**01 (AFA)** Uma esfera metálica de peso  $P$  está presa a uma das extremidades de um fio de massa desprezível, cuja extremidade oposta está ligada a um suporte fixo. Sabendo-se que o sistema está em equilíbrio, em uma posição na qual o fio forma com a vertical um ângulo  $\theta$ , equilíbrio este conseguido pela ação de uma força horizontal  $F$  aplicada à esfera, pode-se afirmar que o módulo de tal força é:



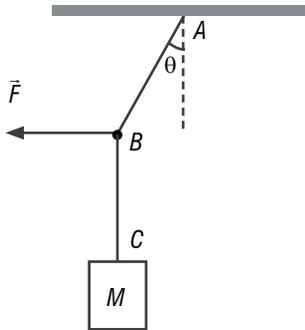
- (A)  $P \tan \theta$ .
- (B)  $P / \tan \theta$ .
- (C)  $P \cos \theta$ .
- (D)  $P / \cos \theta$ .

**02 (AFA)** Um corpo é sustentado por duas cordas inextensíveis, conforme a figura. Sabendo-se que a intensidade da tração na corda  $AB$  é de 80 N, a intensidade da tração na corda  $BC$  será:



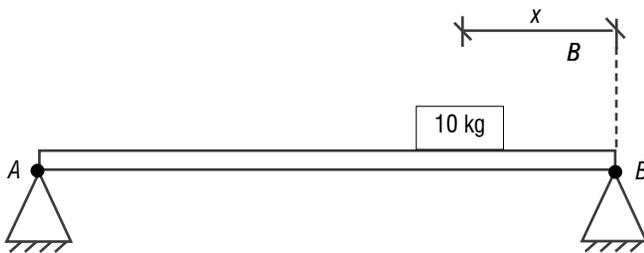
- (A) 60 N.
- (B) 40 N.
- (C)  $40 \text{ N } \sqrt{3}$ .
- (D)  $60 \text{ N } \sqrt{3}$ .

**03 (AFA)** Na figura, os fios são ideais, o corpo tem massa  $M$  e a aceleração da gravidade no local tem módulo  $g$ . A intensidade da tração no fio  $AB$  e a intensidade da força  $F$  que mantém o sistema em equilíbrio, valem, respectivamente:



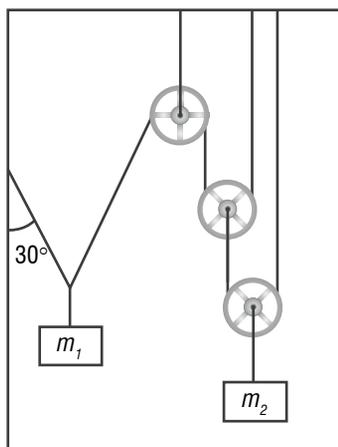
- (A)  $Mg \cdot \cos\theta$ ;  $Mg \cdot \sin\theta$ .      (C)  $Mg \cdot \sin\theta$ ;  $Mg \cdot \cos\theta$ .  
 (B)  $Mg / \cos\theta$ ;  $Mg \cdot \sin\theta$ .      (D)  $Mg / \cos\theta$ ;  $Mg \cdot \tan\theta$ .

**04 (AFA)** Uma prancha de comprimento 4 m e de massa 2 kg está apoiada nos pontos  $A$  e  $B$ , conforme a figura. Um bloco de massa igual a 10 kg é colocado sobre a prancha à distância  $x = 1$  m da extremidade da direita e o sistema permanece em repouso. Nessas condições, o módulo da força que a prancha exerce sobre o apoio no ponto  $B$  é, em newtons,



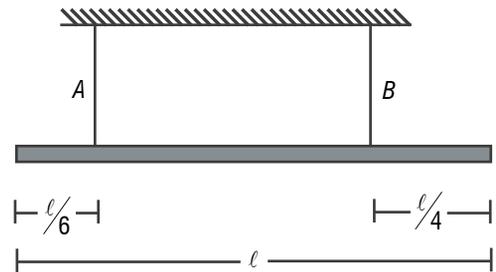
- (A) 340.      (C) 85.  
 (B) 100.      (D) 35.

**05 (AFA)** Na figura abaixo, as polias e os fios são ideais. Se o sistema está em equilíbrio, a razão  $m_1 / m_2$  é



- (A)  $\sqrt{3} / 4$ .      (D)  $1 / 2$ .  
 (B)  $1 / 4$ .      (E) nra.  
 (C)  $\sqrt{3} / 2$ .

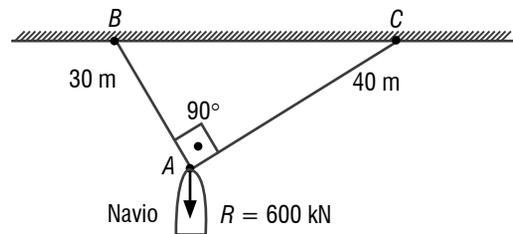
**06 (AFA)** Uma viga homogênea é suspensa horizontalmente por dois fios verticais como mostra a figura abaixo.



A razão entre as trações nos fios  $A$  e  $B$  vale:

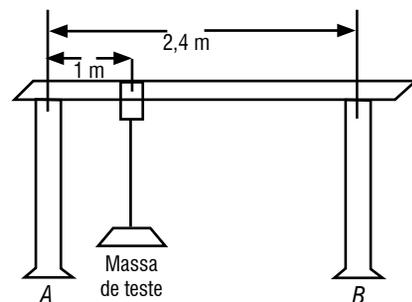
- (A)  $1 / 2$ .      (C)  $3 / 4$ .  
 (B)  $2 / 3$ .      (D)  $5 / 6$ .

**07 (EFOMM)** Um navio está amarrado ao cais pelo ponto  $A$  por meio de dois cabos:  $AB$  de 30m de comprimento e  $AC$  de 40m de comprimento. Os motores do navio estão desligados e a força  $R = 600\text{kN}$  mostrada na figura abaixo é a resultante do sistema de forças que atuam sobre o navio, no plano horizontal, pela ação do mar e do vento. O ângulo formado pelos cabos  $AB$  e  $AC$ , no ponto  $A$ , é de  $90^\circ$ , e a força " $R$ " está no mesmo plano de  $AB$  e  $AC$ . As forças de tração no cabo maior  $AC$  e no cabo menor  $AB$  que reagem à ação da força " $R$ " são, respectivamente:



- (A) 320 kN e 280 kN.      (D) 360 kN e 480 kN.  
 (B) 280 kN e 320 kN.      (E) 380 kN e 260 kN.  
 (C) 480 kN e 360 kN.

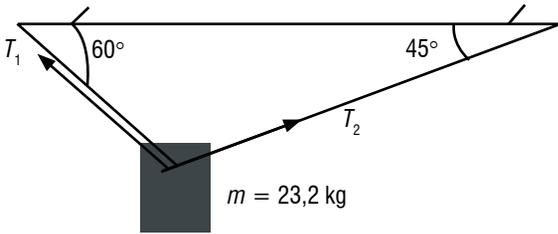
**08 (EFOMM)** Uma viga de concreto, de 2,4 m de comprimento, apoia-se em duas colunas  $A$  e  $B$ . Supondo sua distribuição de massa homogênea e que, a 1 m do apoio da coluna  $A$  é posicionada uma massa teste de 180 kg, calcule as reações nos apoios  $A$  e  $B$ .



Considere:

- $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;
- as reações devem ser calculadas em newtons; e
- massa da viga = 240 kg.

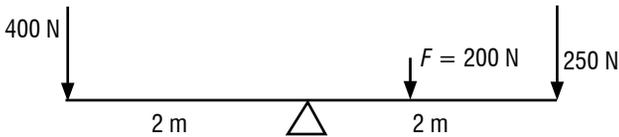
**09 (EFOMM)** Seja o sistema abaixo:



A razão entre as trações  $T_1$  e  $T_2$  é, aproximadamente:

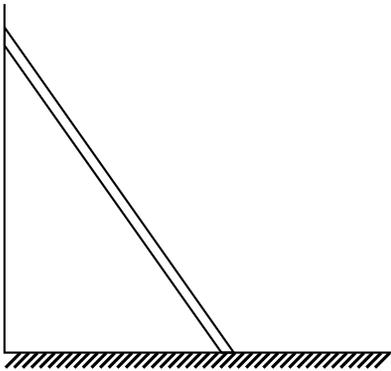
- (A) 1,2.
- (B) 1,4.
- (C) 1,6.
- (D) 1,8.
- (E) 1,9.

**10 (EFOMM)** No diagrama de forças abaixo aplicadas, a força  $F = 200$  N promove o equilíbrio de rotação. Pode-se afirmar que a força "F" está localizada a:

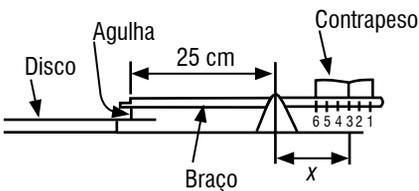


- (A) 0,5 m da extremidade direita.
- (B) 1,5 m da extremidade direita.
- (C) 0,5 m da extremidade esquerda.
- (E) 1,5 m da extremidade esquerda.

**11 (HELOU)** A figura representa uma escada homogênea, em equilíbrio, apoiada em uma parede vertical muito lisa. Trace o vetor que determina a direção e o sentido da força que a escada recebe do chão.



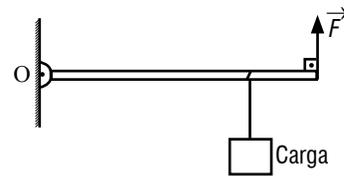
**12 (CESGRANRIO)** A figura representa esquematicamente um braço de toca-discos, cujo comprimento total é de 30 cm, apoiado a 25 cm da extremidade onde se encontra a agulha. A massa do braço é de 25 g e a do contrapeso é de 50 g, sendo ambos os sólidos homogêneos. A calibração do contrapeso (3 na escala da figura) significa que a agulha exerce sobre o disco uma força vertical equivalente ao peso de 3,0 g. A massa da agulha é desprezível. Qual o valor da distância  $x$  assinalada?



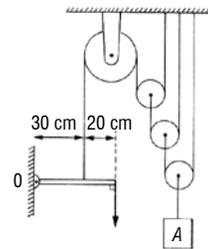
**13** A figura mostra uma barra homogênea de 2,0 m, cujo peso é de 1000 N, disposta horizontalmente e apoiada em uma das extremidades, sobre um dinamômetro (graduado em newtons) sabendo que uma pessoa de peso igual a 500 N está sobre a barra, a 40 cm do dinamômetro?



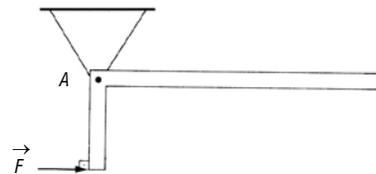
**14** Na figura, uma barra rígida e homogênea de peso igual a 100 N e comprimento igual a 10 m articula-se sem atrito em O. A 8 m de O suspende-se uma carga de peso igual a 200 N. Calcule a intensidade da força vertical  $\vec{F}$  que equilibra o sistema.



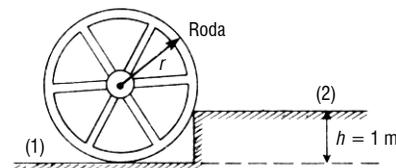
**15** Na figura a seguir, considere ideais a barra, os fios e as polias, e despreze o atrito na articulação O. Sabendo que o corpo A pesa 4000 N, calcule a intensidade da força vertical  $\vec{F}$  que equilibra o sistema.



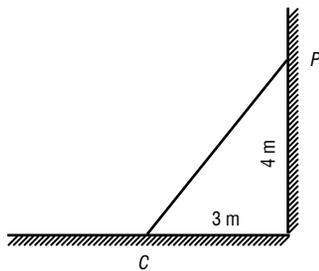
**16 (HELOU)** Na figura temos uma barra homogênea de espessura e largura uniformes, em forma de L, articulada sem atrito em A. A parte vertical da barra tem 1 m de comprimento, enquanto a parte horizontal mede 3 m. Sendo de 120 N o peso total da barra, calcule a intensidade da força horizontal  $\vec{F}$ , que mantém a barra em equilíbrio.



**17 (HELOU)** Na figura, temos uma roda de peso igual a  $100\sqrt{3}$  kgf e raio  $r$  igual a 2 m, que deve ser erguida do plano horizontal (1) para o plano horizontal (2). Calcule a intensidade da força horizontal, aplicada no centro de gravidade da roda, capaz de erguê-la, sabendo que o centro de gravidade da roda coincide com seu centro geométrico.

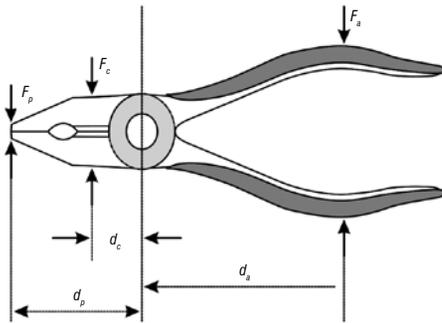


**18 (UNICAMP)** Uma escada homogênea de 40 kg apoia-se sobre uma parede, no ponto  $P$ , e sobre o chão, no ponto  $C$ . Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



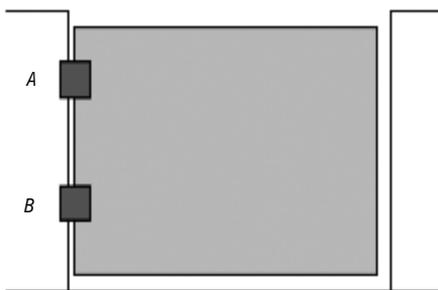
- Desenhe as setas representativas das forças peso, normal e de atrito em seus pontos de aplicação.
- É possível manter a escada estacionária não havendo atrito em  $P$ ? Nesse caso, quais os valores das forças normal e de atrito em  $C$ ?

**19 (UNICAMP)** Uma das aplicações mais comuns e bem sucedidas de alavancas são os alicates. Esse instrumento permite amplificar a força aplicada ( $F_a$ ), seja para cortar ( $F_c$ ), ou para segurar materiais pela ponta do alicate ( $F_n$ ).



- Um arame de aço tem uma resistência ao corte de  $1,3 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ , ou seja, essa é a pressão mínima que deve ser exercida por uma lâmina para cortá-lo. Se a área de contato entre o arame e a lâmina de corte do alicate for de  $0,1 \text{ mm}^2$ , qual a força  $F_c$  necessária para iniciar o corte?
- Se esse arame estivesse na região de corte do alicate a uma distância  $d_c = 2 \text{ cm}$  do eixo de rotação do alicate, que força  $F_a$  deveria ser aplicada para que o arame fosse cortado? ( $d_a = 10 \text{ cm}$ )

**20 (ENEM)** Um portão está fixo em um muro por duas dobradiças  $A$  e  $B$ , conforme mostra a figura, sendo  $P$  o peso do portão.

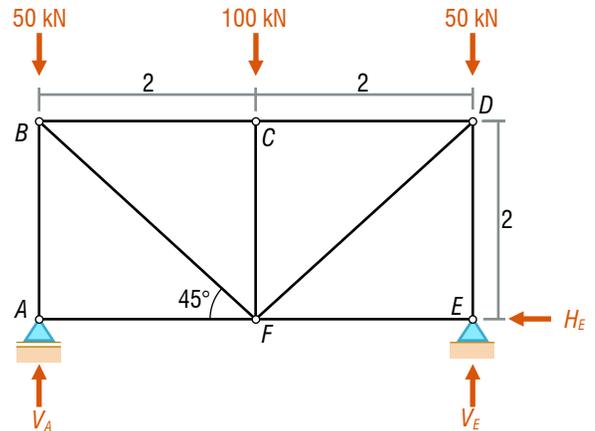


Caso um garoto se pendure no portão pela extremidade livre e supondo que as reações máximas suportadas pelas dobradiças sejam iguais:

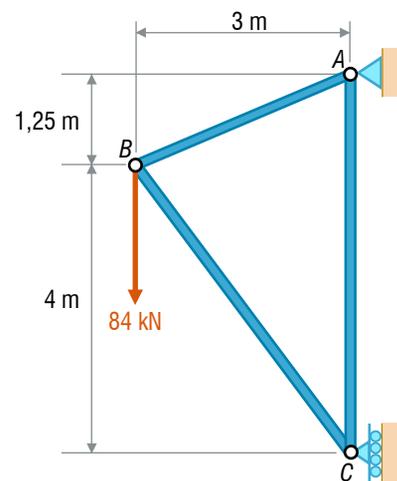
- é mais provável que a dobradiça  $A$  arrebente primeiro que a  $B$ .
- é mais provável que a dobradiça  $B$  arrebente primeiro que a  $A$ .

- seguramente as dobradiças  $A$  e  $B$  arrebentarão simultaneamente.
- nenhuma delas sofrerá qualquer esforço.
- o portão quebraria ao meio, ou nada sofreria.

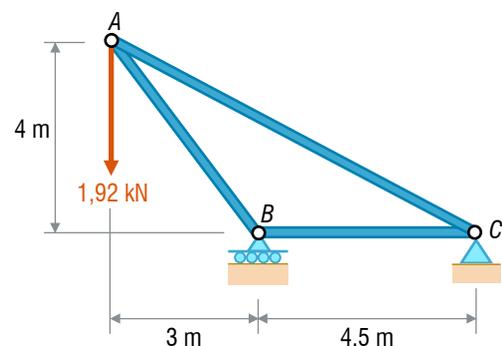
**21** Calcule as forças nas barras através do método dos nós, indicando se as barras estão comprimidas ou tracionadas.



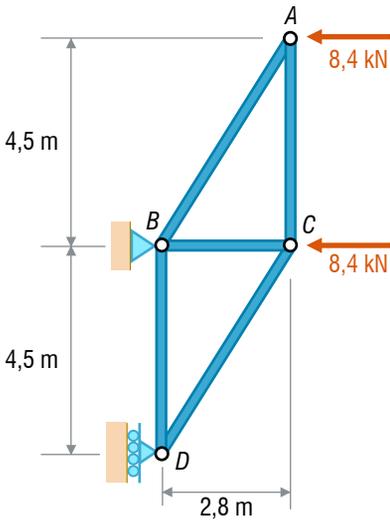
**22** Determine, pelo método dos nós, as forças nas barras a seguir, indicando se estão tracionadas ou comprimidas.



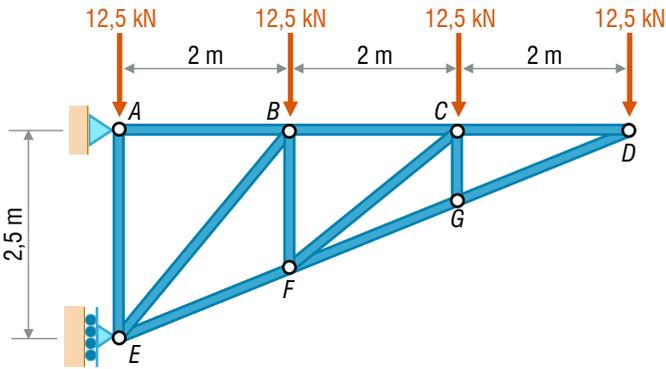
**23** Determine, pelo método dos nós, as forças nas barras a seguir, indicando se estão tracionadas ou comprimidas.



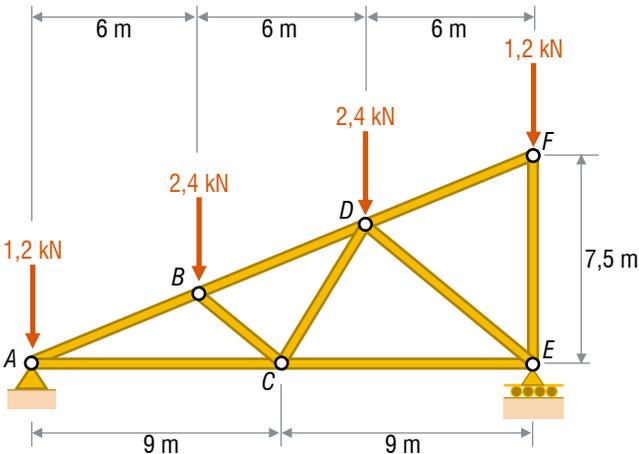
**24** Determine, pelo método dos nós, as forças nas barras a seguir, indicando se estão tracionadas ou comprimidas.



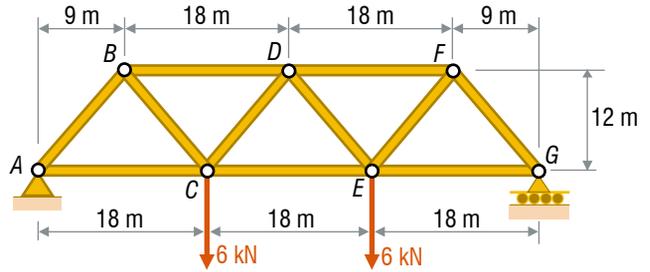
**25** Determine, pelo método dos nós, as forças nas barras a seguir, indicando se estão tracionadas ou comprimidas.



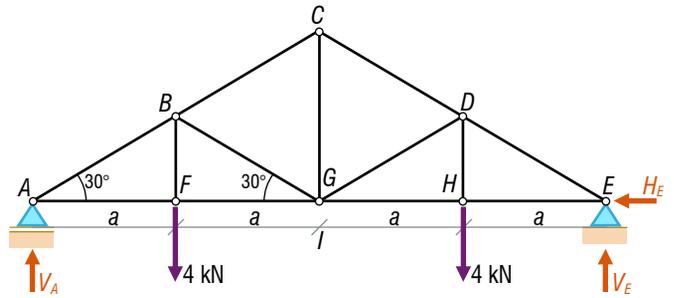
**26** Determine, pelo método dos nós, as forças nas barras a seguir, indicando se estão tracionadas ou comprimidas.



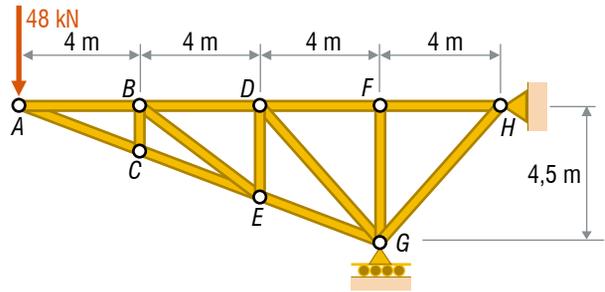
**27** Determine, pelo método dos nós, as forças nas barras a seguir, indicando se estão tracionadas ou comprimidas.



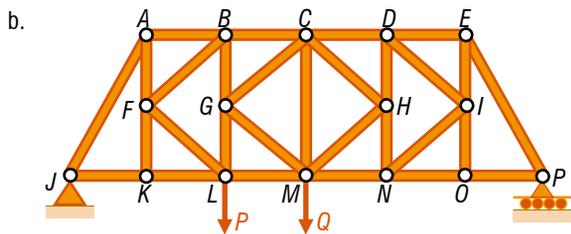
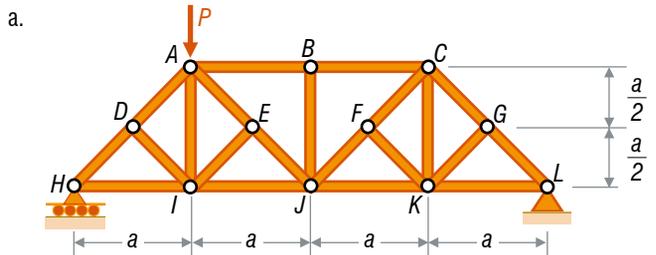
**28** Determine, pelo método dos nós, as forças nas barras a seguir, indicando se estão tracionadas ou comprimidas.



**29** Determine, pelo método dos nós, as forças nas barras a seguir, indicando se estão tracionadas ou comprimidas.

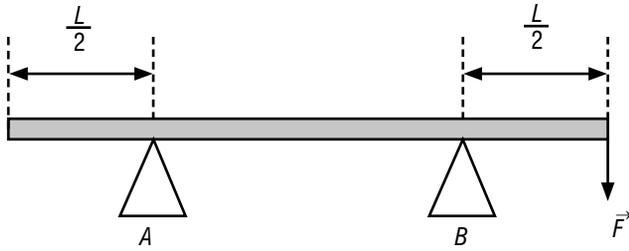


**30** Para os carregamentos abaixo, determine que barras estão isentas da ação de forças.



EXERCÍCIOS NÍVEL 2

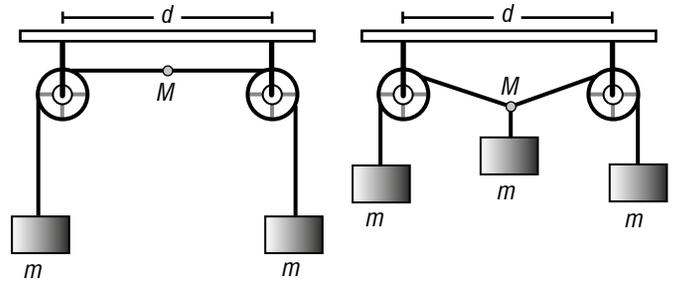
**01 (AFA)** Uma barra rígida homogênea de comprimento  $2L$  e massa  $m$  está apoiada em dois suportes  $A$  e  $B$ , como mostra a figura abaixo.



O gráfico que melhor indica a intensidade  $N_A$  da reação que o apoio  $A$  exerce sobre a barra, em função da intensidade da força  $F$  aplicada na extremidade é:

- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

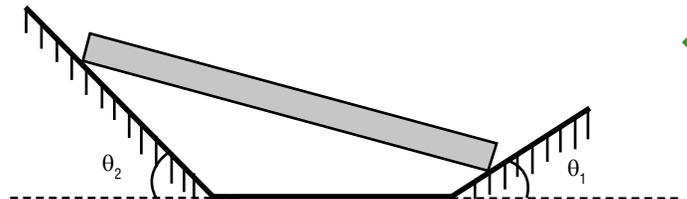
**02 (AFA)** A figura abaixo apresenta dois corpos de massa  $m$  suspensos por fios ideais que passam por roldanas também ideais. Um terceiro corpo, também de massa  $m$ , é suspenso no ponto médio  $M$  do fio e baixado até a posição de equilíbrio.



O afastamento do ponto  $M$  em relação à sua posição inicial é de:

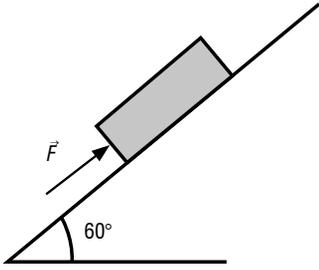
- (A)  $\frac{\sqrt{3}}{2}d$ .
- (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}d$ .
- (C)  $\frac{\sqrt{3}}{4}d$ .
- (D)  $\frac{\sqrt{3}}{6}d$ .

**03 (EFOMM)** Uma barra cilíndrica, rígida e homogênea, de massa  $m$ , está em equilíbrio estático apoiada por suas extremidades sobre dois planos inclinados que formam com a horizontal ângulos respectivamente iguais a  $\theta_1$  e  $\theta_2$  tal que  $\theta_1 < \theta_2$ , conforme mostra a figura acima. Supondo irrelevantes os possíveis atritos e sabendo que a barra está em um plano perpendicular a ambos os planos inclinados, calcula-se que a força normal que o plano mais íngreme exerce sobre a barra seja dada por:



- (A)  $\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } (\theta_1 + \theta_2)} mg$
- (B)  $\frac{\text{sen } \theta_2}{\text{sen } (\theta_1 + \theta_2)} mg$
- (C)  $\frac{\text{cos } \theta_1}{\text{cos } (\theta_1 + \theta_2)} mg$
- (D)  $\frac{\text{cos } \theta_2}{\text{cos } (\theta_1 + \theta_2)} mg$
- (E)  $\frac{\text{tg } \theta_2}{\text{tg } (\theta_1 + \theta_2)} mg$

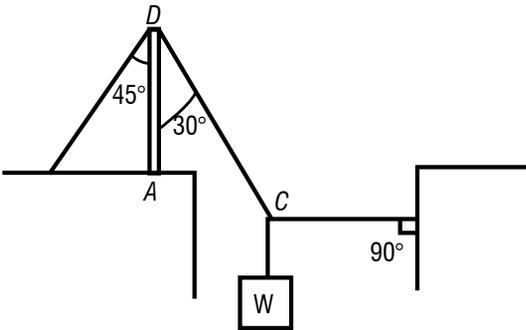
**04 (EFOMM)** No convés de um navio, um marinheiro apoia uma caixa de massa 20 kg sobre um plano inclinado de  $60^\circ$ , aplicando uma força  $F$  de módulo igual a 100 N paralela à superfície do plano, como mostra a figura. Nestas condições, ele observa que a caixa está na iminência de descer o plano inclinado. Para que a caixa fique na iminência de subir o plano inclinado, ele deve alterar o módulo da força  $F$  para:



**Dados:**  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ;  $\text{sen } 60^\circ = 0,85$

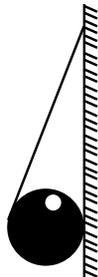
- (A) 100 N.
- (B) 140 N.
- (C) 180 N.
- (D) 200 N.
- (E) 240 N.

**05 (IME)** Considerando a figura, determine a expressão, em função do peso  $W$ , da força vertical exercida pelo solo sobre a barra  $AD$ .

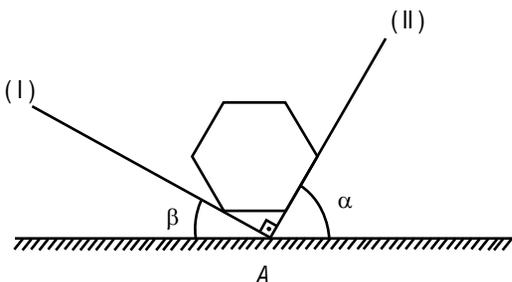


**06 (HELOU)** A figura representa uma esfera homogênea em equilíbrio, sustentada por um fio e apoiada em uma parede vertical, nas condições geométricas ilustradas.

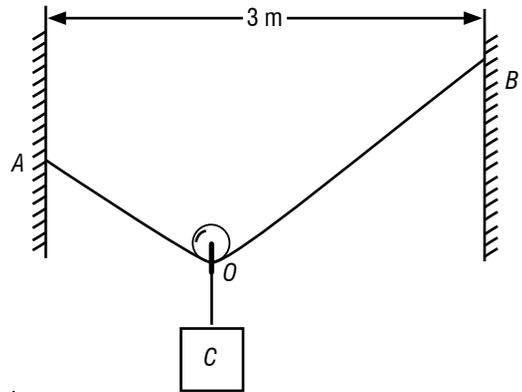
- a. Indique as forças atuantes na esfera.
- b. Desenhe a situação de equilíbrio, se a parede fosse completamente lisa.



**07** Na figura, (I) e (II) são duas rampas planas perfeitamente lisas que se interceptam em uma reta horizontal, que passa por  $A$  e é perpendicular ao plano do papel. Nas rampas, apoia-se um prisma reto, hexagonal, regular e homogêneo, de peso igual a 100 N. Sabendo que  $\text{sen } \alpha = 3/5$  e  $\text{cos } \alpha = 4/5$ , determine as intensidades das forças aplicadas pelo prisma sobre as rampas.



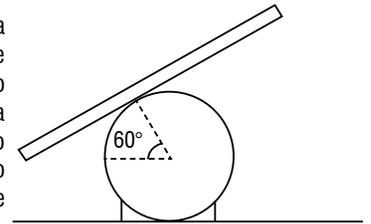
**08 (HELOU)** Na figura temos duas paredes verticais, um fio ideal de 5 m de comprimento preso aos pontos  $A$  e  $B$  das paredes, uma polia ideal e um corpo  $C$  suspenso ao eixo da polia, de 400 N de peso:



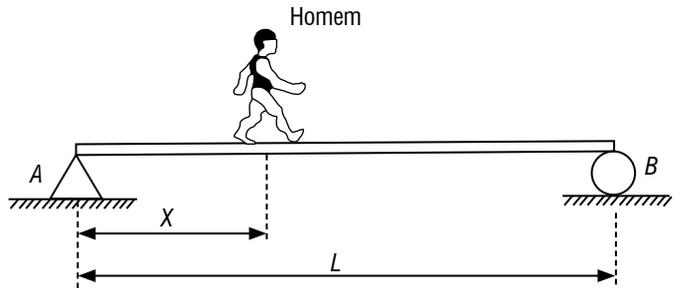
Determine:

- a. a tração no fio;
- b. se a tração no fio depende do desnível entre  $A$  e  $B$ .

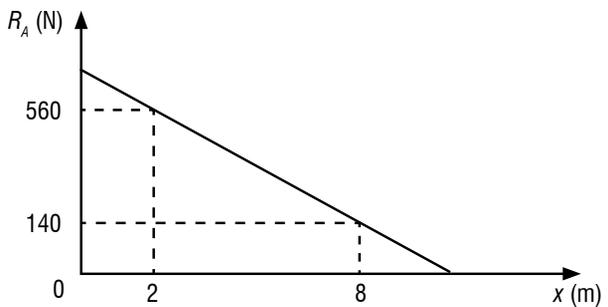
**09 (MACK-SP)** Uma tábua rígida homogênea é colocada sobre um cilindro fixo, em seu ponto médio, ficando em equilíbrio e na iminência de escorregar, como mostra a figura. Determine o coeficiente de atrito estático entre a tábua e o cilindro.



**10 (FAAP-SP)** Uma viga de peso desprezível é apoiada por suas extremidades  $A$  e  $B$ , sendo que um homem de peso  $P$  anda sobre ela.



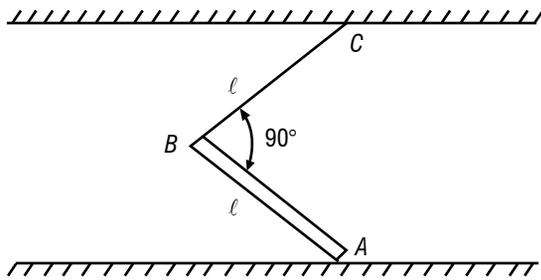
A intensidade  $R_A$  da reação do apoio  $A$  é dada pelo gráfico a seguir, em que  $x$  é a distância de  $A$  ao homem:



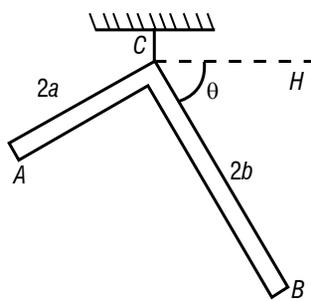
Calcule, então:

- a. o peso  $P$  do homem;
- b. o comprimento  $L$  da viga.

**11 (ITA)** Para que a haste  $AB$  homogênea, de peso  $P$ , permaneça em equilíbrio, suportada pelo fio  $BC$ , qual deve ser a intensidade da força de atrito em  $A$ ?



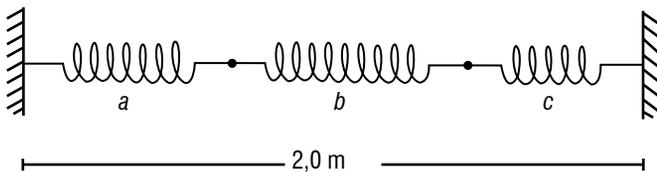
**12** Uma barra  $ACB$ , prismática, delgada, homogênea, em cotovelo a  $90^\circ$  é suspensa pelo vértice do ângulo e apresenta-se em equilíbrio, conforme o esquema anexo. ( $AC = 2a$ ;  $CB = 2b$ ;  $B \leq H = \theta$ .)



Vale a condição:

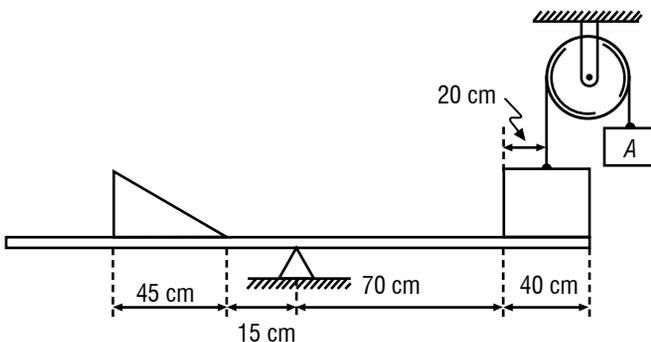
- (A)  $b = a \cdot \operatorname{tg} \theta$ .
- (B)  $b = a \cdot \operatorname{cot} \theta$ .
- (C)  $b = a \cdot \sqrt{\operatorname{tg} \theta}$ .
- (D)  $b = a \cdot \sqrt{\operatorname{cot} \theta}$ .

**13 (IME)** Três molas,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , têm comprimento natural  $l_a = 0,5$  m,  $l_b = 0,6$  m e  $l_c = 0,7$  m e constante elástica  $k_a = 10$  N/m,  $k_b = 15$  N/m e  $k_c = 18$  N/m, respectivamente. Elas são ligadas entre si e estiradas entre duas paredes distantes 2,0 metros uma da outra, onde as extremidades estão fixadas, conforme figura abaixo. Qual o comprimento de cada uma das molas estiradas, em equilíbrio?

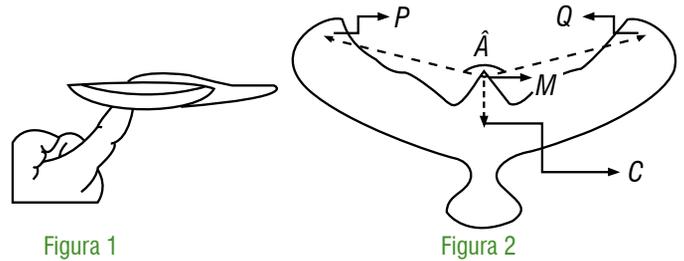


**14 (FEI-SP)** A figura indica, em corte, um prisma e um cubo homogêneos, de pesos iguais a 6,0 N e 5,5 N, respectivamente, sobre o travessão horizontal de uma balança em equilíbrio. O cubo é suspenso por um cabo de massa desprezível, que, passando por uma polia ideal, sustenta um contrapeso  $A$ .

Calcule o peso de  $A$  e a tração no cabo.



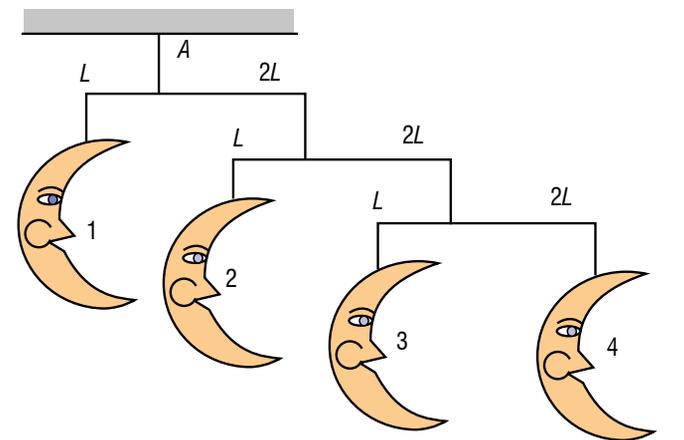
**15 (UNIRIO)** Uma pessoa tem um passarinho de brinquedo que pode ser equilibrado pela ação de uma força normal utilizando-se apenas um ponto de apoio  $M$ , localizado no bico do passarinho conforme a figura 1. Esse equilíbrio é alcançado em função da colocação de massas pontuais adequadas nos pontos  $P$  e  $Q$ . Sabe-se que a massa do passarinho antes da colocação das massas em  $P$  e  $Q$  é 30 g e seu centro de massa nesta situação é representado, na figura 2, pelo ponto  $C$ . Além disso, o passarinho é simétrico em relação ao eixo que contém os pontos  $M$  e  $C$ . Sendo assim, para o equilíbrio ser alcançado, o valor de cada uma das massas colocadas nos pontos  $P$  e  $Q$  é:



Considere  $PM = QM = 5,0$  cm;  $CM = 2,0$  cm;  $\hat{A} = 120^\circ$ ;  $\operatorname{sen} 30^\circ = 0,50$ ;  $\operatorname{cos} 30^\circ = 0,87$  e  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>.

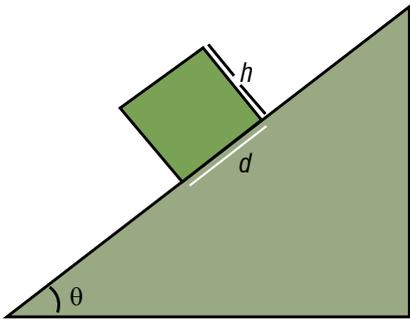
- (A) 12 g.
- (B) 30 g.
- (C) 6,0 g.
- (D) 10 g.
- (E) 24 g.

**16 (ITA)** Um brinquedo que as mães utilizam para enfeitar quartos de crianças é conhecido como “mobile”. Considere o “mobile” de luas esquematizado na figura a seguir. As luas estão presas por meio de fios de massas desprezíveis a três barras horizontais, também de massas desprezíveis. O conjunto todo está em equilíbrio e suspenso em um único ponto  $A$ . Se a massa da lua 4 é 10 g, então a massa em quilograma da lua 1 é:



- (A) 180.
- (B) 80.
- (C) 0,36.
- (D) 0,18.
- (E) 0,9.

**17 (ITA)** Considere um bloco de base  $d$  e altura  $h$  em repouso sobre um plano inclinado de ângulo  $\alpha$ . Suponha que o coeficiente de atrito estático seja suficientemente grande para que o bloco não deslize pelo plano.



O valor máximo da altura  $h$  para que a base  $d$  permaneça em contato com o plano é:

- (A)  $d/\alpha$ .
- (B)  $d/\text{sen } \alpha$ .
- (C)  $d/(\text{sen } \alpha)^2$ .
- (D)  $d \cdot \text{cotg } \alpha$ .
- (E)  $d \cdot \text{cotg } \alpha/\text{sen } \alpha$ .

**18 (ITA)** Um corpo de massa  $m$  é colocado no prato  $A$  de uma balança de braços desiguais e equilibrado por uma massa  $p$  colocada no prato  $B$ . Esvaziada a balança, o corpo de massa  $m$  é colocado no prato  $B$  e equilibrado por uma massa  $q$  colocada no prato  $A$ . O valor da massa  $m$  é:

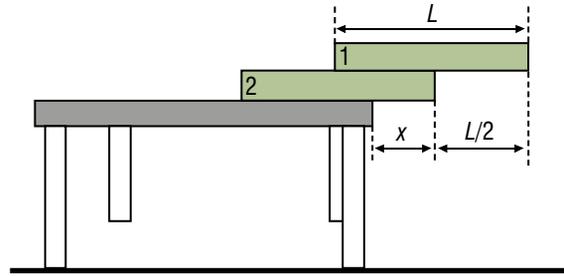
- (A)  $pq$
- (B)  $\sqrt{pq}$
- (C)  $\frac{p+q}{2}$
- (D)  $\sqrt{\frac{p+q}{2}}$
- (E)  $\frac{pq}{p+q}$

**19 (ITA)** Considere as três afirmativas abaixo sobre um aspecto de Física do cotidiano.

- I. Quando João começou a subir pela escada de pedreiro apoiada em uma parede vertical, e já estava no terceiro degrau, Maria grita para ele: – Cuidado João, você vai acabar caindo pois a escada está muito inclinada e vai acabar deslizando.
- II. João responde: – Se ela não deslizou até agora que estou no terceiro degrau, também não deslizará quando eu estiver no último.
- III. Quando João chega no meio da escada, fica com medo e dá total razão à Maria. Ele desce da escada e diz a Maria: – Como você é mais leve do que eu, tem mais chance de chegar ao fim da escada com a mesma inclinação, sem que ela deslize. Ignorando o atrito da parede:

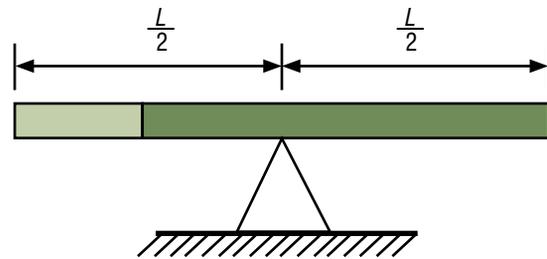
- (A) Maria está certa com relação a I, mas João errado com relação a II.
- (B) João está certo com relação a II, mas Maria errada com relação a I.
- (C) As três afirmativas estão fisicamente corretas.
- (D) Somente a afirmativa I é fisicamente correta.
- (E) Somente a afirmativa III é fisicamente correta.

**20** Dois blocos idênticos de comprimento  $L = 24$  cm são colocados sobre uma mesa, como mostra a figura a seguir. Determine o máximo valor de  $x$ , em cm, para que os blocos fiquem em equilíbrio, sem tombarem.



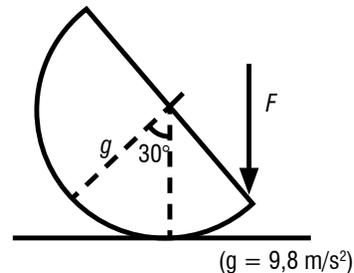
**21 (ITA-SP)** Uma barra homogênea de peso  $P$  tem uma extremidade apoiada em um assoalho horizontal e a outra em uma parede vertical. O coeficiente de atrito com relação ao assoalho e o coeficiente de atrito com relação à parede são iguais a  $\mu$ . Quando a inclinação da barra com relação à vertical é de  $45^\circ$ , a barra encontra-se na iminência de deslizar. Qual o valor de  $\mu$ ?

**22 (ITA)** Uma haste metálica de seção retangular de área  $A$  e comprimento  $L$  é composta de dois materiais de massas específicas  $\rho_1$  e  $\rho_2$ . Os dois materiais constituem hastes homogêneas de comprimentos  $L_1$  e  $L_2$ , com  $L_1 + L_2 = L$  e  $L_1 = 3L_2$ . Coloca-se a haste sobre um cutelo e verifica-se que o equilíbrio é atingido na situação indicada na figura. Calcule  $\rho_1/\rho_2$ .



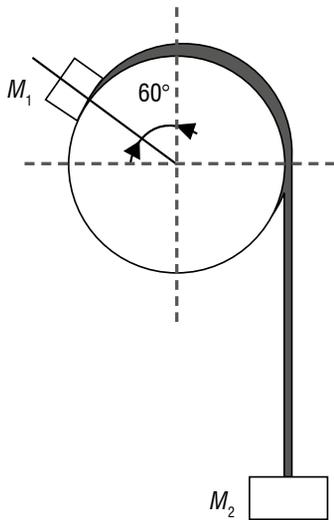
- (A) 1.
- (B) 2.
- (C) 3.
- (D) 2,5.
- (E) 0,4.

**23 (ITA)** Um semi-disco de espessura “ $e$ ” e massa = 2 kg está apoiado sobre um plano horizontal, mantendo-se na posição indicada em virtude da aplicação de uma força  $F$  no ponto  $Q$ . O centro de gravidade  $G$  é tal que  $OG = 0,1$  m, sendo  $O$  o centro do disco que originou o semi-disco; o raio do disco é  $r = 0,47$  e o ângulo  $\theta = 30^\circ$ . O valor de  $F$  nesse caso é:



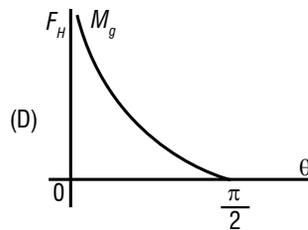
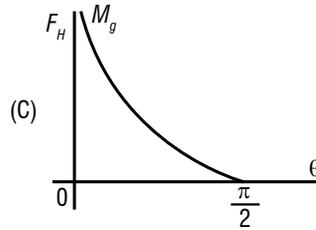
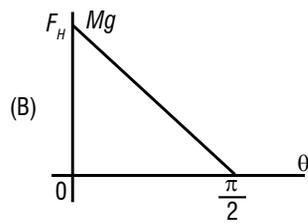
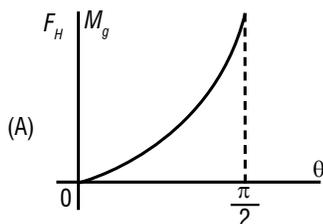
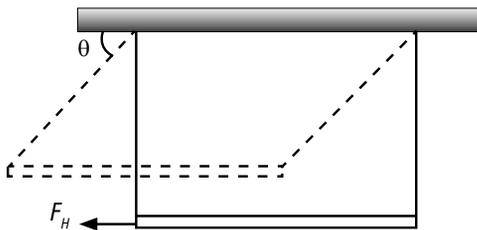
- (A) 19,6 N
- (B) 7,2 N
- (C) 1,2 N
- (D) 2,4 N
- (E) 2,9 N

**24 (ITA)** Uma das extremidades de uma corda de peso desprezível está atada a uma massa  $M_1$  que repousa sobre um cilindro fixo, liso, de eixo horizontal. A outra extremidade está atada a uma outra massa  $M_2$ , como mostra a figura. O ângulo indicado na figura vale  $60^\circ$ . Para que haja equilíbrio na situação indicada, deve-se ter:



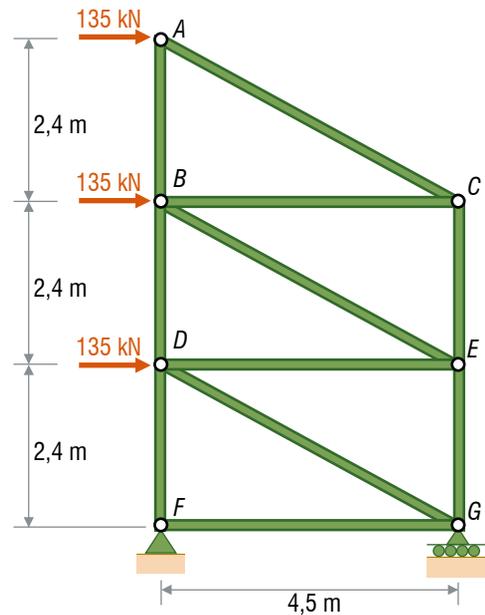
- (A)  $M_2 = \frac{\sqrt{3}M_1}{2}$ .
- (B)  $M_2 = \sqrt{3}M_1$ .
- (C)  $M_2 = \frac{M_1}{2}$ .
- (D)  $M_2 = \frac{M_1}{\sqrt{3}}$ .
- (E)  $M_2 = 2M_1$ .

**25 (ITA)** Na figura tem-se uma barra de massa  $M$  e comprimento  $L$  homogênea, suspenso por dois fios, sem massa. Uma força  $F_H$ , horizontal pode provocar um deslocamento lateral da barra. Nestas condições, indique abaixo o gráfico que melhor representa a intensidade da força  $F_H$  como função do ângulo.



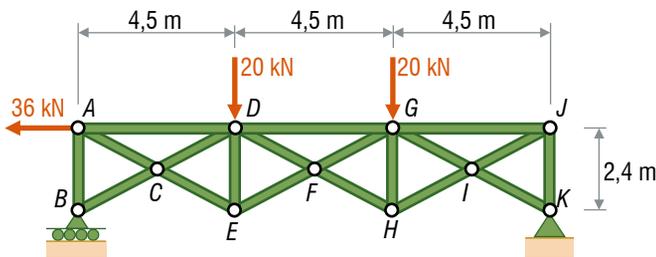
(E) Nenhum dos gráficos acima.

**26** Pelo método das seções, determine as forças nas barras  $BD$  e  $DE$  da estrutura abaixo.



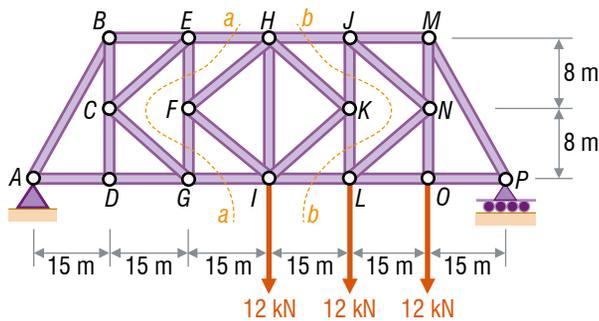
**27** Para a mesma figura da questão anterior, determine as forças nas barras  $DG$  e  $EG$ , como se não conhecesse as forças nas barras  $BD$  e  $DE$ .

**28** Determine as forças apenas nos membros  $AD$ ,  $CD$  e  $DE$  da treliça a seguir.



**29** Para a mesma treliça da questão anterior, determine a força nos membros  $DG$ ,  $FG$  e  $FH$ , como se não conhecesse as forças calculadas na questão anterior.

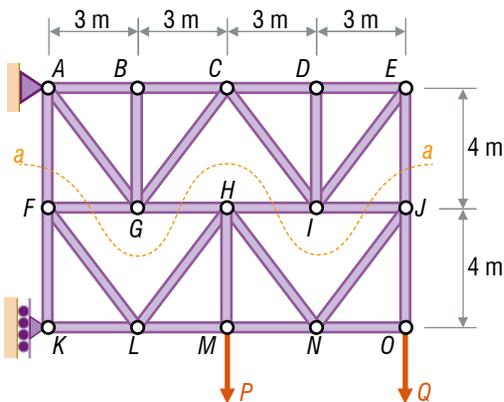
**30** Para a treliça da figura a seguir, determine as forças nas barras  $EH$  e  $GI$ . (Dica: use a seção  $aa$ ).



**31** Usando dica semelhante à do exercício anterior, para a mesma figura, determine as forças nas barras  $HJ$  e  $IL$ .

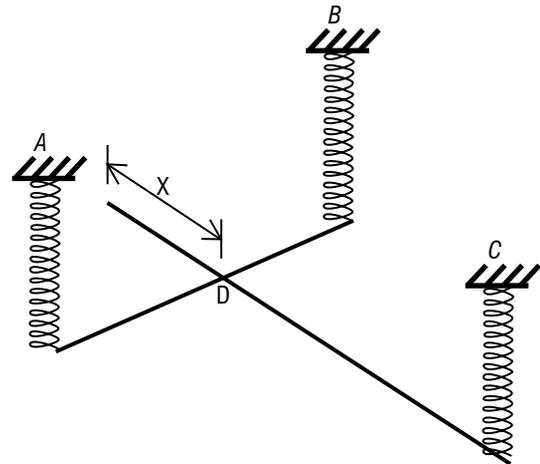
**32** Para a treliça mostrada na figura ao lado, determine as forças nas barras  $AF$  e  $EJ$ , usando dica semelhante à dos exercícios anteriores, nas seguintes situações:

- a.  $P = Q = 1,2 \text{ kN}$ .
- b.  $P = 1,2 \text{ kN}$  e  $Q = 0$ .

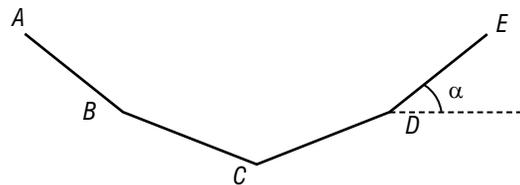


EXERCÍCIOS NÍVEL 3

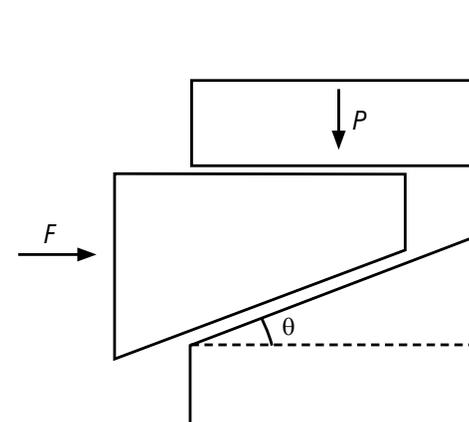
**01 (IME)** Ao teto de uma sala deseja-se prender 3 molas iguais que deverão equilibrar, na horizontal, uma haste rígida, delgada e de peso desprezível, bem como uma viga pesada, homogênea e uniforme, de tal modo que a haste suporte, em seu ponto médio, a viga. Os pontos de fixação, no teto, devem formar um triângulo isósceles de ângulo diferente  $C$ . Determine a distância  $x$  do ponto  $D$ , a partir da extremidade livre, em que a viga deve ser apoiada. O comprimento da viga é  $L$ .



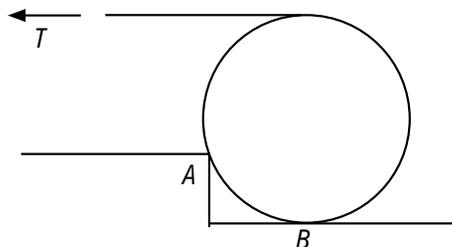
**02 (IME)** Quatro barras homogêneas  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  e  $DE$ , de peso  $P$  cada uma, estão articuladas entre si como indica a figura. Sustentam-se, com as mãos, os extremos  $A$  e  $E$  de forma que estejam sobre uma mesma reta horizontal e que, ao estabelecer-se o equilíbrio, a ação efetuada nos extremos, sobre cada um tenha um componente horizontal igual a  $2P$ . Admite-se que as barras  $AB$  e  $ED$  possam girar livremente ao redor dos extremos fixos  $A$  e  $E$  e que não haja atrito nas articulações. Calcular o ângulo  $\alpha$  que a barra  $DE$  forma com a horizontal.



**03 (IME)** Na figura abaixo, o coeficiente de atrito entre o peso  $P$  e a cunha é  $\mu_1$ , e, entre a cunha e o bloco inferior é  $\mu_2$ . Desprezando o peso da cunha, e considerando que não há atrito na parede vertical, determinar a expressão da força  $F$  necessária para levantar o peso  $P$ , forçando a cunha para a direita.

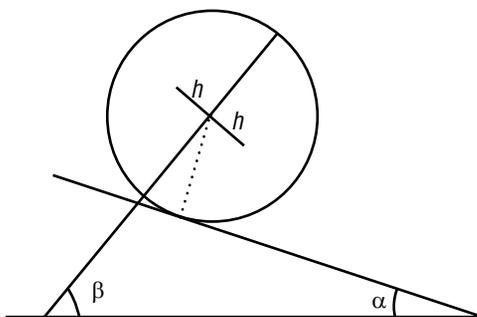


**04 (ITA)** Um toro de madeira cilíndrico de peso  $P$  e de  $1\text{ m}$  de diâmetro deve ser erguido por cima de um obstáculo de  $0,25\text{ m}$  de altura. Um cabo é enrolado ao redor do toro e puxado horizontalmente como mostra a figura. O canto do obstáculo em  $A$  é áspero, assim como a superfície do toro. Nessas condições, a tração  $T$  requerida no cabo e a reação em  $A$ , no instante em que o toro deixa de ter contato com o solo, valem quanto?

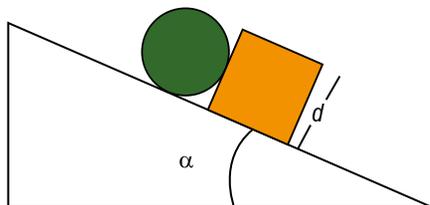


**05 (ITA)** Um cilindro de raio  $R$  está em equilíbrio, apoiado num plano inclinado, áspero, de forma que seu eixo é horizontal. O cilindro é formado de duas metades unidas pela seção longitudinal, das quais uma tem densidade  $d_1$  e a outra densidade  $d_2 < d_1$ . São dados o ângulo  $\alpha$  de inclinação do plano inclinado e a distância  $h = \frac{4R}{3}$  do centro de massa

de cada metade à seção longitudinal. Qual a relação entre o ângulo  $\beta$  de inclinação da seção longitudinal de separação sobre o horizonte e  $\alpha$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  e  $h$ ?

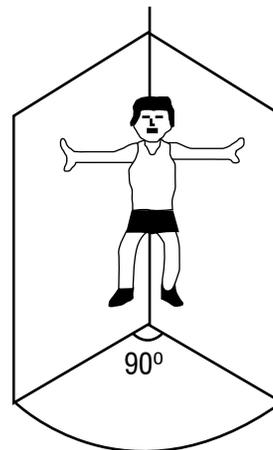


**06 (ITA)** Considere um bloco cúbico de lado  $d$  e massa  $m$  em repouso sobre um plano inclinado de ângulo  $\alpha$ , que impede o movimento de um cilindro de diâmetro  $d$  e massa  $m$  idêntica à do bloco, como mostra a figura. Suponha que o coeficiente de atrito estático entre o bloco não deslize pelo plano e que o coeficiente de atrito estático entre o cilindro e o bloco seja desprezível. O valor máximo do ângulo do plano inclinado  $\alpha$ , para que a base do bloco permaneça em contato com o plano, é tal que:



- (A)  $\sin \alpha = 1/2$ .
- (B)  $\tan \alpha = 1$ .
- (C)  $\tan \alpha = 2$ .
- (D)  $\tan \alpha = 3$ .
- (E)  $\cotg \alpha = 2$ .

**07 (ITA)** Um atleta mantém-se suspenso em equilíbrio, forçando as mãos contra duas paredes verticais, perpendiculares entre si, dispondo seu corpo simetricamente em relação ao canto e mantendo seus braços horizontalmente alinhados, como mostra a figura. Sendo  $m$  a massa do corpo do atleta e  $\mu$  o coeficiente de atrito estático interveniente, assinale a opção correta que indica o módulo mínimo da força exercida pelo atleta em cada parede.

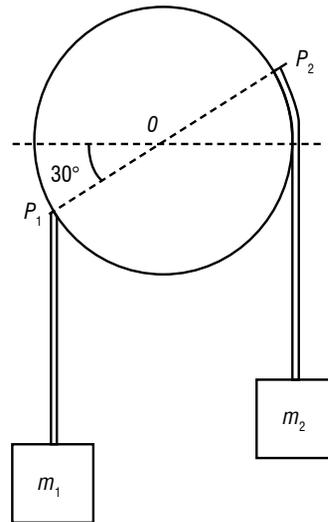
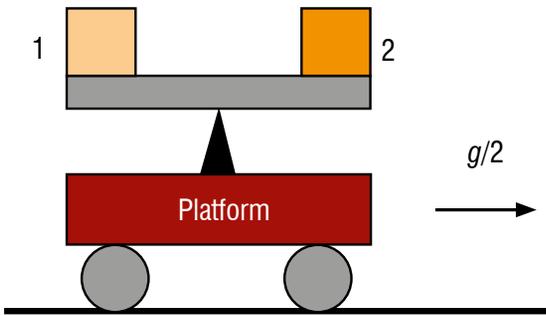


- (A)  $\frac{mg}{2} \left( \frac{\mu_2 - 1}{\mu_2 + 1} \right)^{1/2}$ .
- (B)  $\frac{mg}{2} \left( \frac{\mu_2 + 1}{\mu_2 - 1} \right)^{1/2}$ .
- (C)  $\frac{mg}{2} \left( \frac{\mu_2 - 1}{\mu_2 + 1} \right)$ .
- (D)  $\frac{mg}{2} \left( \frac{\mu_2 + 1}{\mu_2 - 1} \right)$ .
- (E) n.d.a.

**08** Uma escada de  $5\text{ m}$  de comprimento e massa  $M$  está apoiada em um solo rugoso horizontal e contra uma parede vertical lisa. A distância máxima a que seu pé pode estar da parede sem escorregar é igual a  $4\text{ m}$ . Quando seu pé está a apenas  $3\text{ m}$  da parede, qual é:

- a. a massa máxima que pode ser colocada em qualquer lugar da escada sem causar escorregamento?
- b. a máxima distância ao longo da escada que um homem de massa  $5\text{ M}$  pode caminhar sem o risco de cair?

**09 (Universidade de Toronto)** An equal-arm balance with a uniform weigh beam of mass  $M$ , thickness  $d$ , and length  $2L$  is in horizontal equilibrium position on the platform, which is moving with uniform acceleration  $g/2$ . Two equidimensional cubes with side  $b$  are motionless relative to the weigh beam. Calculate the ratio of densities  $\rho_1/\rho_2$ .



**10 (ITA)** Na figura ao lado temos um cilindro de massa desprezível de raio  $r$  que pode girar sem atrito em torno do eixo que passa pelo centro  $O$ . Nos pontos  $P_1$  e  $P_2$  estão fixadas dois fios de massa também desprezível. Para que haja equilíbrio nas condições do esquema, a relação entre as massas  $m_1$  e  $m_2$  é:

- (A)  $m_1 = m_2$ .
- (B)  $3m_1 = 2\sqrt{3}m_2$ .
- (C)  $3m_2 = 2\sqrt{3}m_1$ .
- (D)  $m_1 = \sqrt{3}m_2$ .
- (E)  $m_2 = 2\sqrt{3}m_1$ .

RASCUNHO

## Introdução

A hidrostática, também chamada de estática dos fluidos, estuda, como seu nome já diz, fluidos que estejam em equilíbrio. Fluidos são, basicamente, os líquidos e os gases. Além da diferença de estado de matéria, líquidos não têm forma própria, mas têm volume próprio, independente do recipiente que os contenha. Já os gases não possuem nem forma nem volume próprios, já que, dentro de um recipiente, consideramos que o gás ocupa todo o seu volume.

Focaremos nosso estudo no equilíbrio de líquidos, basicamente, por possuírem mais utilidade prática, já que os efeitos dos gases sobre corpos imersos neles poderão ser desprezados, além de os líquidos possuírem uma resistência à compressão muito superior à dos gases, sendo considerados, em nosso estudo, incompressíveis, diferentemente dos gases, para os quais essa consideração de incompressibilidade faria muita diferença. Estudaremos, então, basicamente líquidos que sejam *ideais*, ou seja, incompressíveis.

A hidrostática se baseia em três teoremas: o de Stevin, o de Pascal e o de Arquimedes. Eles regirão todo nosso estudo e trarão consequências importantíssimas.

## 1. Massa específica ou densidade absoluta ( $\mu$ )

Massa específica ou densidade absoluta de uma substância é a razão entre a sua massa e seu volume. Para as mesmas condições de temperatura e pressão, a massa específica de uma substância permanece constante.

$$\mu = \frac{m}{V}$$

| material | $\mu$ (g/cm <sup>3</sup> ) | $\mu$ (kg/m <sup>3</sup> ) |
|----------|----------------------------|----------------------------|
| água     | 1,00                       | 1000                       |
| alumínio | 2,7                        | 2700                       |
| ferro    | 7,8                        | 7800                       |
| chumbo   | 11,3                       | 11300                      |
| mercúrio | 13,6                       | 13600                      |
| ouro     | 19,3                       | 19300                      |

Unidade de massa específica no S.I.: [kg/m<sup>3</sup>]

**Obs.:** 1 kg/m<sup>3</sup> = 10<sup>3</sup> g/10<sup>6</sup> cm<sup>3</sup> → 1 kg/m<sup>3</sup> = 10<sup>-3</sup> g/cm<sup>3</sup>. Essa relação é bastante importante, já que em muitos casos a massa específica que nos será fornecida vai estar em g/cm<sup>3</sup>.

Percebe-se que o conceito de *densidade* propriamente dito tem a mesma expressão que o da massa específica. Porém, uma diferença sutil distingue suas definições. Veremos a seguir a definição de densidade de um corpo.

## 2. Densidade de um corpo

Como vimos acima, o chumbo possui massa específica maior que a do ferro. Porém, existe a possibilidade de um corpo de ferro ser mais denso que um corpo de chumbo?

Define-se *densidade de um corpo* como a razão entre a sua massa e o volume ocupado por ele no espaço (bem parecida com a definição de massa específica). Logo, se um corpo possui descontinuidades internas, ou seja, partes ocas, como uma bola de boliche, significa que a massa a ser considerada para o cálculo da densidade seria muito menor do que se o corpo fosse inteiramente maciço. Então, para a massa específica, consideramos apenas o volume ocupado pela massa do corpo, enquanto que, para a densidade, consideramos o volume total ocupado no espaço por um corpo fechado. Chamaremos, então, de  $V_T$  o volume que o corpo ocupa no espaço. Logo:

$$d = \frac{m}{V_T}$$

No caso de uma bola de boliche,  $V_T$  seria o volume total ocupado no espaço, ou seja, o volume do ar que está contido na bola faz parte desse volume total. Na hora de calcularmos a massa específica do material que constitui essa bola, consideraríamos apenas o volume realmente correspondente à massa do corpo (a camada de material que de fato foi usada para confecção da bola). Por isso, a massa específica é uma propriedade intrínseca ao material (ou seja, independente do corpo, a massa específica do chumbo sempre será 11,3 g/cm<sup>3</sup>), enquanto que a densidade é uma propriedade que depende do corpo (uma bola de chumbo maciça e de volume  $V_T$  terá maior densidade que uma bola de chumbo oca e de mesmo volume, já que a massa daquela é maior que a desta, mesmo que ambas sejam feitas de chumbo).

Sabemos, intuitivamente, que corpos de menor densidade que a água tendem a flutuar nela. Logo, já que o aço tem massa específica maior que a água, como podemos explicar um navio feito totalmente de aço, como um cruzeiro, conseguir flutuar? O segredo é o espaço oco que existe em suas partes inferiores, completamente cheias de ar, que fazem com que a densidade do navio se torne menor que a densidade da água.

## 3. Densidade relativa

É uma grandeza adimensional dada pela razão entre duas massas específicas de duas substâncias distintas. É, então, um critério de comparação entre duas substâncias ou uma outra forma de medir a densidade de alguma substância, tomando outra como referencial.

Ex:  $\mu_{\text{ouro}} / \mu_{\text{alumínio}} = 7,15$

$\mu_{\text{Hg}} / \mu_{\text{H}_2\text{O}} = 13,6$

## 4. Peso específico

Peso específico é a razão entre o peso de uma substância e o seu volume.

$$\rho = \frac{P}{V}$$

Unidade de peso específico no S.I.: [N/m<sup>3</sup>]

Da mesma forma que a massa específica, para que o peso específico de um corpo seja constante, temos que as condições de temperatura e pressão também sejam constantes. Porém, como o peso depende da gravidade, para que o peso específico seja constante, temos que estar analisando porções da mesma substância num mesmo local, onde a gravidade seja constante.

Sabemos que  $P = m \cdot g$ . Logo:

$$\rho = \frac{P}{V} = \frac{m \cdot g}{V}$$

Como  $\mu = \frac{m}{V}$ , temos:

$$\rho = \mu g$$

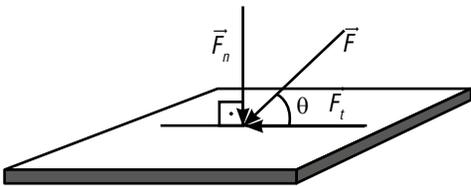
## 5. Pressão

Comprima a palma de uma das suas mãos com o polegar da outra mão, utilizando certa força. Agora, aumente esta força. Você claramente percebeu que o efeito de contato entre sua mão e seu dedo polegar aumentou. Agora, comprima novamente a palma da mão com seu polegar. Utilizando aproximadamente a mesma força, pegue o seu lápis apontado e com a sua ponta do grafite comprima a palma da sua mão com a mesma força. Novamente, você percebeu que o efeito foi realmente aumentado.

Logo, percebemos que esse efeito é diretamente proporcional à força, já que, a aumentando, você intensifica o efeito. Da mesma forma, quando você diminui a área de aplicação da força (já que a ponta do grafite tem menor área que a palma do seu polegar), o efeito também é intensificado. Logo, o efeito é diretamente proporcional à força e inversamente proporcional à área de aplicação dessa força.

Dessa forma, pressão média, sob o ponto de vista mecânico, é definida pela razão da componente normal de uma força aplicada a uma superfície, pela área da superfície.

$$\rho = \frac{F_n}{A}$$



Apenas a componente normal ( $F_n$ ) de certa força aplicada numa área pode exercer pressão, enquanto que a componente tangencial não exerce (ela exerce outro efeito, chamado de *cisalhamento*).

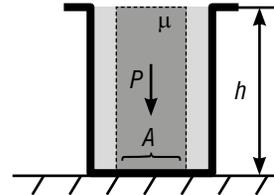
Unidade S.I. de pressão:  $[N/m^2] = [Pa]$ , também chamada de *Pascal*

**Obs.:** Outras unidades práticas de pressão (utilizando  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ):

- bária [ba] =  $[dyn/cm^2] \rightarrow 1 \text{ Pa} = 10 \text{ ba}$
- atmosfera técnica métrica [atm] =  $[kgf/cm^2] \rightarrow 1 \text{ atm} = 9,8 \cdot 10^4 \text{ Pa} \cong 10^5 \text{ Pa}$
- milímetros de coluna de mercúrio [mmHg]  $\rightarrow 760 \text{ mmHg} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
- metros de coluna d'água [mca]  $\rightarrow 10 \text{ mca} = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

Por mais que a pressão tenha uma certa relação com a força, ela *não* é uma grandeza vetorial, mas sim uma grandeza escalar. Ou seja, um gás ideal confinado num recipiente exerce exatamente a mesma pressão em todas as suas paredes, já que a pressão não possui uma orientação preferida em detrimento de outras.

## 5. Pressão exercida por uma coluna de líquido



A figura anterior representa um recipiente contendo um líquido de massa específica  $\mu$ , em equilíbrio, sob a ação da gravidade  $g$ , cuja altura em relação ao fundo do recipiente é  $h$ .

Considere, então, uma coluna de água de área de base  $A$ . Sabemos que seu volume é dado por  $V = A \cdot h$ . Como massa específica é o volume entre a massa da substância e o volume de fato ocupado por ela, temos:

$$\mu = \frac{m}{V} = \frac{m}{A \cdot h} \rightarrow m = \mu \cdot A \cdot h. \text{ Logo, o peso dessa coluna de líquido será}$$

o produto da sua massa pela gravidade:  $P = m \cdot g = \mu \cdot A \cdot h \cdot g$ . Logo,

a pressão exercida por essa coluna de líquido no fundo do recipiente será dada por:

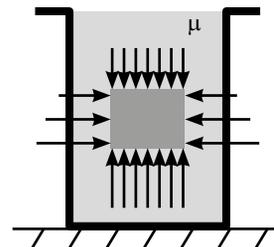
$$\rho = \frac{P}{A} = \frac{\mu \cdot A \cdot h \cdot g}{A}$$

Cortando a área, temos:

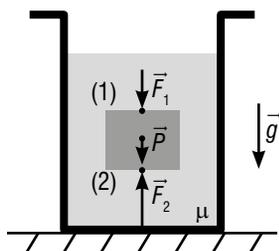
$$\rho = \mu g h$$

## 6. Teorema de Stevin

Considere um recipiente contendo um líquido homogêneo de massa específica  $\mu$ . Considere, mesmo que imaginariamente, um "cubo" de aresta  $h$ , feito do próprio líquido e totalmente imerso nele. Sabemos que, nele, surgirão forças nas direções vertical e horizontal, aplicadas em cima e em baixo, do lado direito e do lado esquerdo, como podemos ver na figura.



Pela simetria do corpo, é fácil perceber que as forças horizontais se anulam. Porém, as forças verticais não se equilibram. Isso acontece porque, além delas, ainda existe a atuação do peso do corpo na vertical. Dessa forma, temos o diagrama de corpo livre da figura a seguir:



Logo, como o corpo está em equilíbrio na vertical, temos:

$$F_2 - F_1 = P$$

Dividindo todos os termos pela área da base do cubo, já que estão aplicados na vertical, temos:

$$\frac{F_2}{A} - \frac{F_1}{A} = \frac{P}{A}$$

Só que  $\frac{F_1}{A} = p_1$  (pressão no ponto 1) e  $\frac{F_2}{A} = p_2$  (pressão no ponto 2).

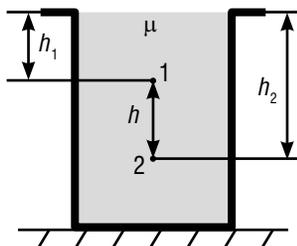
Logo:

$$p_2 - p_1 = \frac{P}{A} \rightarrow p_2 - p_1 = \frac{mg}{A}$$

em que  $m$  é a massa do "cubo" de água. Logo,  $m = \mu \cdot V_{\text{cubo}} = \mu \cdot A \cdot h$ . Logo:

$$p_2 - p_1 = \frac{\mu \cdot A \cdot h \cdot g}{A} \rightarrow p_2 - p_1 = \mu \cdot g \cdot h$$

em que  $h$  é o desnível entre o ponto 1 e o ponto 2. Observe a figura:



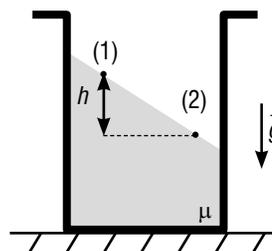
O enunciado do Princípio de Stevin, então, se resume a:

"A diferença de pressões entre dois pontos de um líquido homogêneo em equilíbrio sob a ação da gravidade é dada pelo produto da massa específica do líquido, da aceleração da gravidade e do desnível entre os pontos."

É fácil perceber, então, que essa diferença de pressões é igual à pressão de uma coluna de líquido semelhante à coluna compreendida entre os dois pontos, caso aquela estivesse tocando o fundo do recipiente.

Percebemos, então, que, se o desnível entre os dois pontos for nulo, não haverá diferença de pressões entre os dois pontos. Dessa forma, *pontos que estão à mesma altura, não importando a posição horizontal, estarão sob mesma pressão*. Então, cada linha horizontal terá pontos sob mesma pressão, ou seja, existirá uma zona isobárica. Essa é a consequência mais importante do Teorema de Stevin.

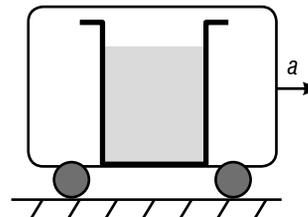
Agora, vamos supor que seja possível um líquido em repouso, confinado num recipiente, ter sua superfície inclinada, como mostra a figura a seguir.



Como há um desnível entre os pontos, pelo princípio de Stevin, haveria uma diferença de pressão sobre eles. Mas como o líquido está aberto para a atmosfera, a pressão exercida sobre ambos é a pressão atmosférica. Dessa forma, ambos estão sob mesma pressão. Novamente, pelo teorema de Stevin, sabemos que, se a pressão sobre os pontos é a mesma, não há desnível entre eles. Logo, é absurdo pensar que existe um desnível entre os pontos na superfície do líquido. Assim, a superfície de um líquido em um referencial inercial sempre permanece horizontal. Isso acontece porque o teorema de Stevin só se aplica em *referenciais inerciais*, já que é uma consequência direta das Leis de Newton, que só são válidas nestes.

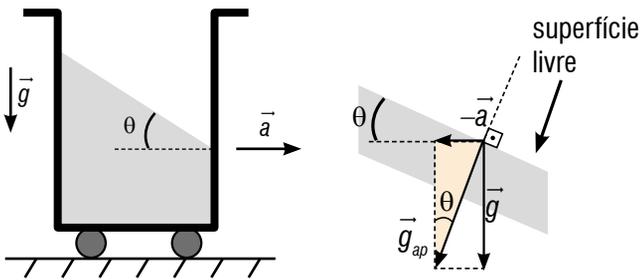
E caso o líquido estivesse acelerado, ou seja, num referencial não inercial, qual seria o comportamento de sua superfície? Como vimos em Dinâmica, sabemos que podemos transformar um referencial não inercial através do princípio da equivalência de Einstein, ou, mais precisamente, do princípio de D'Alembert. Dessa forma, o princípio de Stevin volta a ser válido.

Vamos, então, pensar em uma massa infinitesimal  $m$  de água na superfície do líquido (uma gotinha), que está confinado em um recipiente. Vamos comunicar ao recipiente uma aceleração  $a$ , conforme mostra a figura abaixo.



Mudando do referencial inercial para o referencial não inercial do carrinho, surgirá nessa gotinha uma força de inércia, orientada para a esquerda. Além dessa força de inércia, já existe a força peso dessa gotinha atuando verticalmente para baixo, como mostra a figura.

Vamos supor que a superfície permaneça horizontal, como mostrado acima. Em amarelo, é representada a resultante dessa força de inércia com a força peso da gotinha. Ainda falta a força que a superfície do líquido faz sobre a "gotinha". Sabemos que essa força tem que ser perpendicular à superfície. Logo, teríamos uma força vertical e a força resultante indicada em amarelo. Obviamente, a resultante dessas duas nunca será nula, ou seja, se a superfície permanecer horizontal, não haverá a possibilidade de essa gotinha estar em equilíbrio no referencial não inercial. A superfície deverá ficar inclinada em um ângulo tal que permita que a normal tenha a mesma direção da força representada em amarelo. Geometricamente, é fácil mostrar que esse será o mesmo entre a força representada em amarelo e o peso. Esse ângulo está representado na figura a seguir.



Da figura, temos:

$$\tan \theta = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{g}|}$$

Assim como no exemplo do elevador dado em dinâmica, na seção de mudança de referencial para a nova gravidade que seria utilizada para calcular o novo período do pêndulo em questão, aqui temos situação semelhante. A soma vetorial de  $-\vec{a}$  e  $\vec{g}$  tem como resultado a gravidade aparente ( $\vec{g}_{ap}$ ), que será relevante nas próximas seções:

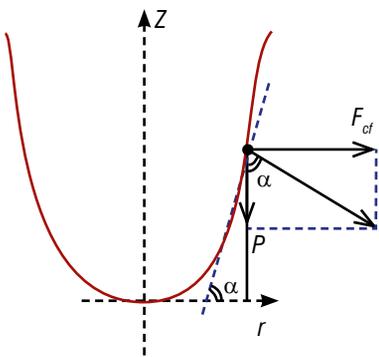
$$\vec{g}_{ap} = -\vec{a} + \vec{g}$$

Como os vetores  $-\vec{a}$  e  $\vec{g}$  são perpendiculares, temos:

$$|\vec{g}_{ap}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{g}|^2}$$

Acabamos de falar sobre líquidos acelerados em translação. E caso eles estivessem rotacionando?

Quando temos um recipiente contendo um líquido, em rotação em relação a um eixo que passe em seu centro geométrico, com velocidade angular  $\omega$  constante, o líquido se arranjará de modo a formar um espaço vazio denominado parabolóide de revolução. Considere, na figura a seguir, o eixo que passa no centro geométrico do recipiente.



A figura acima representa um corte transversal do recipiente contendo o líquido em revolução. A região em vermelho delimita a superfície do parabolóide. O ponto representado na figura faz referência à “gotinha” tratada anteriormente. A força de inércia, já que o líquido está em rotação, é a *força centrífuga* ( $F_{cf}$ ). Na situação anterior, a superfície formava, no corte transversal, uma reta inclinada. Agora, ela forma uma parábola.

A reta tangente à parábola no ponto que representa a gotinha tem coeficiente angular  $\tan \alpha$ . É fácil provar geometricamente que esse ângulo  $\alpha$  é o mesmo entre o peso e a reta normal à superfície no ponto de tangência. Sabemos, também, que o coeficiente angular da reta tangente em um ponto é a derivada da função naquele ponto. Como essa parábola pode ser expressa por  $z = f(r)$ , em que  $z$  é o eixo vertical e  $r$  é o eixo horizontal, temos que:

$$\tan \alpha = \frac{dz}{dr}$$

Além disso, da relação entre as forças, temos:

$$\tan \alpha = \frac{F_{cf}}{P}$$

Logo, temos as seguintes relações:

$$\tan \alpha = \frac{F_{cf}}{P} = \frac{dz}{dr}$$

Sabemos, então, que  $\frac{dz}{dr} = \frac{F_{cf}}{P}$ . Logo:

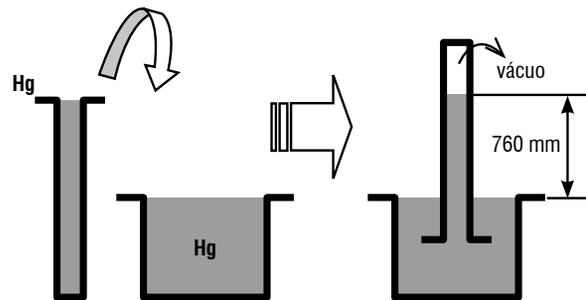
$$\frac{dz}{dr} = \frac{m \cdot \omega^2 \cdot r}{mg} \rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 \cdot r}{g} \rightarrow \int dz = \int \frac{\omega^2 \cdot r}{g} dr \rightarrow z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 \cdot r^2}{g} + c$$

Tente, sozinho, determinar a constante de integração  $c$ .

## 7. Experiência de Torricelli

Sabemos que a atmosfera provoca uma pressão de 1 atm ao nível do mar, o que equivale aproximadamente a  $1,01 \cdot 10^5$  Pa. O cientista italiano Evangelista Torricelli propôs um experimento simples para determinação da pressão atmosférica. O dispositivo consistia num tubo de aproximadamente 1 m de comprimento e uma cuba, preenchidos com mercúrio.

Inicialmente, o tubo encontra-se totalmente cheio de mercúrio. Veda-se sua extremidade aberta e, então, é introduzido, de boca para baixo, no líquido. Em seguida, retira-se a vedação da sua extremidade, mantendo-a sempre abaixo da superfície do mercúrio na cuba. Com isso, parte do mercúrio escoou para dentro da cuba, estabelecendo-se uma coluna de mercúrio.



Pensemos, agora, em um ponto no interior do tubo que esteja à mesma altura da superfície do mercúrio no exterior do tubo, na cuba. Pelo teorema de Stevin, ambos os pontos devem estar submetidos à mesma pressão. Como o ponto exterior ao tubo estava submetido à pressão atmosférica, o ponto do interior do tubo também deveria estar. Logo, a pressão exercida pela coluna de mercúrio acima desse ponto deveria ser igual à pressão atmosférica. Mediu-se, então, a coluna de mercúrio e verificou-se que ela possuía 760 mm acima da superfície do mercúrio na cuba. Dessa forma, estabeleceu-se que a pressão atmosférica era a pressão exercida por uma coluna de 760 mm de mercúrio:

$$1 \text{ atm} \Leftrightarrow 760 \text{ mmHg}$$

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

**01** Se o experimento de Torricelli fosse realizado com água, qual seria a altura da coluna água no tubo em relação à superfície livre da água na cuba? Considere a massa específica da água igual a  $1 \text{ g/cm}^3$  e a pressão atmosférica igual a  $1 \text{ atm}$ .

**Solução:**

Sabemos que a pressão da coluna de água deve ser igual à pressão atmosférica. Logo:

$$P_{atm} = \mu_{\text{agua}} \cdot g \cdot h \rightarrow 1 \cdot 10^5 \text{ Pa} = \left( 1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right) \cdot \left( 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \cdot h \rightarrow \boxed{h = 10 \text{ m}}$$

Logo, uma coluna de 760 mm de mercúrio é equivalente a uma coluna de 10 m de água. Isso acontece devido ao fato de o mercúrio ser bem mais denso que a água.

**8. Teorema de Pascal**

O teorema de Stevin dizia que  $p_2 - p_1 = \mu \cdot g \cdot h$ . Vamos, agora, considerar que as pressões em dois pontos, 1 e 2, que estão separados por um desnível  $h$ , num líquido de densidade  $\mu$ , sofrem um acréscimo, devido à aplicação de uma força externa:

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1 + \Delta p_1 \\ p_2' &= p_2 + \Delta p_2 \end{aligned}$$

Como os pontos permanecem com o mesmo desnível, o princípio de Stevin continua valendo. Logo:

$$p_2 = p_1 + \mu \cdot g \cdot h$$

Logo:

$$(p_2 + \Delta p_2) - (p_1 + \Delta p_1) = \mu \cdot g \cdot h \rightarrow (p_2 - p_1) + (\Delta p_2 - \Delta p_1) = \mu \cdot g \cdot h$$

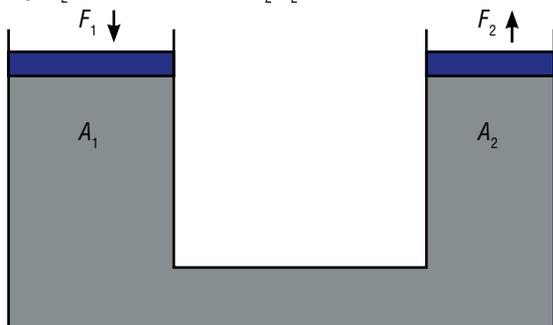
Das equações (1) e (2), temos:

$$\mu \cdot g \cdot h + (\Delta p_2 - \Delta p_1) = \mu \cdot g \cdot h = \Delta p_2 - \Delta p_1 = 0 \rightarrow \boxed{\Delta p_1 = \Delta p_2}$$

Logo, aplicada uma força externa, o aumento de pressão em todos os pontos do líquido é o mesmo. Pode-se dizer, então, que aplicada uma pressão em uma das extremidades de um fluido, essa pressão é transmitida integralmente a todos os pontos desse líquido. Esse foi o teorema demonstrando logo, teorema de Pascal; cujo enunciado é:

“Um incremento de pressão comunicado a um ponto qualquer de um líquido incompressível em equilíbrio transmite-se integralmente a todos os demais pontos do líquido, bem como às paredes do recipiente.”

Logo, se temos um grande tubo em forma de U, como mostrado na figura, aplicando uma força  $F_1$  na área  $A_1$  do êmbolo esquerdo da figura, essa pressão dada por  $F_1/A_1$  tem que ser transmitida integralmente a todos os pontos do líquido, inclusive ao próximo êmbolo, de área  $A_2$ , que sofrerá uma força  $F_2$ ; logo, uma pressão  $F_2/A_2$ .

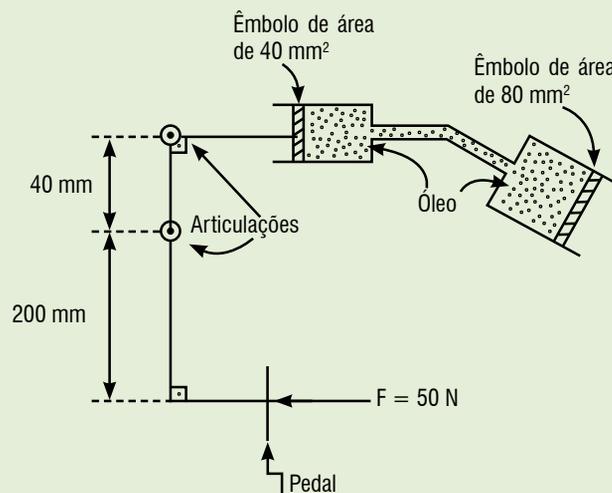


Logo, como as pressões devem ser iguais, temos:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

**02 (Mack-SP)** O diagrama abaixo mostra o princípio do sistema hidráulico do freio de um automóvel. Quando uma força de  $50 \text{ N}$  é exercida no pedal, a força aplicada pelo êmbolo de área igual a  $80 \text{ mm}^2$  é de:



- (A) 100 N.
- (B) 250 N.
- (C) 350 N.
- (D) 400 N.
- (E) 500 N.

**Solução:** Letra E.

Ao se acionar o pedal com uma força de  $50 \text{ N}$ , uma força é aplicada no êmbolo de  $40 \text{ mm}^2$  que, por sua vez, é transmitida ao êmbolo de  $80 \text{ mm}^2$ , acionando o freio.

Ao se acionar o pedal com uma força de  $50 \text{ N}$ , uma força é aplicada no êmbolo de  $40 \text{ mm}^2$  que, por sua vez, é transmitida ao êmbolo de  $80 \text{ mm}^2$ , acionando o freio.

– Cálculo da força no êmbolo de área  $40 \text{ mm}^2$ :

Em relação à articulação do meio:

$$\sum M = 0 \rightarrow 50 \cdot 200 - F_1 \cdot 40 = 0 \rightarrow F_1 = 250 \text{ N}$$

– Pelo princípio de Stevin, a pressão aplicada no êmbolo de  $40 \text{ mm}^2$  deve ser igual à pressão aplicada no êmbolo de área  $80 \text{ mm}^2$ :

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \rightarrow \frac{250}{40} = \frac{F_2}{80} \rightarrow \boxed{F_2 = 500 \text{ N}}$$

**9. Pressão absoluta e efetiva (hidrostatica)**

- **Pressão efetiva (ou hidrostatica)** → é a pressão exercida pela coluna de líquido.

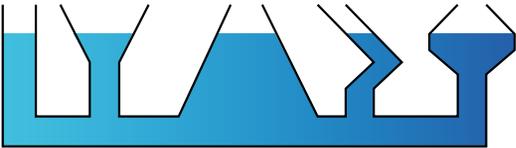
$$P_{hid} = \mu \cdot g \cdot h$$

- **Pressão absoluta** → é a pressão da superfície do líquido (normalmente é a pressão atmosférica) somada a pressão exercida pela coluna de líquido.

$$P_{\text{abs}} = p_o + \mu \cdot g \cdot h$$

### 10. Vasos comunicantes

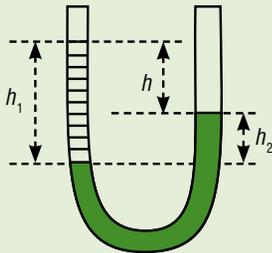
Vasos comunicantes são recipientes conectados através de um duto aberto. Caso seja colocado apenas um tipo de líquido no vaso, em todos os recipientes a superfície do fluido deve estar à mesma altura, de acordo com o princípio de Stevin, como na figura abaixo.



Quando se colocam dois líquidos num vaso comunicante em formato de 'U', o menos denso deve estar a um nível maior que o menos denso.

#### EXERCÍCIO RESOLVIDO

**03 (Mack-SP)** No tubo em U da figura, de extremidades abertas, encontram-se dois líquidos imiscíveis, de densidades iguais a 0,80 g/cm<sup>3</sup> e 1,0 g/cm<sup>3</sup>. O desnível entre as superfícies livres dos líquidos é  $h = 2,0$  cm. As alturas  $h_1$  e  $h_2$  são, respectivamente:



- (A) 4,0 cm e 2,0 cm.
- (B) 8,0 cm e 4,0 cm.
- (C) 10,0 cm e 8,0 cm.
- (D) 12,0 cm e 10,0 cm.
- (E) 8,0 cm e 10,0 cm.

**Solução:** Letra C.

O ponto do líquido representado pelas bolinhas que está em contato com o outro líquido deve ter a mesma pressão que um ponto à mesma altura, porém no próprio líquido. Logo, a pressão exercida pela coluna  $h_1$  deve ser igual à pressão exercida pela coluna  $h_2$ . Sabemos também que o líquido da coluna  $h_1$  é o menos denso, já que se encontra acima do outro líquido.

$$\mu_1 \cdot g \cdot h_1 = \mu_2 \cdot g \cdot h_2 \rightarrow 0,8 \cdot h_1 = 1 \cdot h_2 \rightarrow 0,8 \cdot h_1 = h_2$$

Porém, também sabemos que  $h_1 - h_2 = h = 2$  cm.

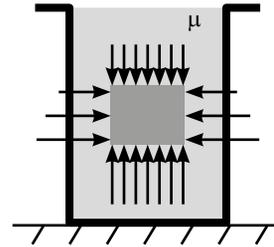
Resolvendo o sistema, temos  $h_1 = 10$  cm e  $h_2 = 8$  cm.

### 11. Teorema de Arquimedes

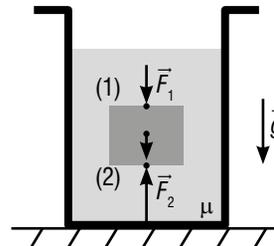
O teorema de Arquimedes enuncia o seguinte:

“Quando um corpo é imerso totalmente ou parcialmente num fluido em equilíbrio sob a ação da gravidade, ele recebe do fluido uma força denominada empuxo, vertical, para cima e com intensidade igual ao peso de fluido deslocado.”

Vamos à demonstração deste teorema. Considere a seguinte figura:



Temos um cubo imerso, de aresta  $h$  e área da base  $A$ , em um líquido de massa específica  $\mu$ . Vemos que nela é fácil de perceber que o cubo sofre forças do líquido por todos os lados. Como vimos antes, as forças laterais se equilibram por simetria, restando apenas as forças superiores e inferiores, que não se equilibram, já que existe o peso do corpo.



Também é fácil perceber que, devido ao fato de  $F_2$  estar aplicada num ponto com maior profundidade que  $F_1$ , o módulo da força  $F_2$  tem que ser maior que o módulo da força  $F_1$ , consequência do teorema de Stevin. A resultante dessas duas será a força que o líquido, de fato, faz sobre o corpo, e a chamaremos de empuxo. Dessa forma, temos, em módulo:

$$F_2 - F_1 = E$$

já que o empuxo estará orientado para cima.

Sabemos, pelo teorema de Stevin, que existe uma diferença de pressões entre os pontos 1 e 2, dada por:

$$p_2 - p_1 = \mu \cdot g \cdot h$$

Sabemos também que:

$$p_1 = \frac{F_1}{A}; p_2 = \frac{F_2}{A}$$

em que  $A$  é a área da base do cubo.

Substituindo, temos:

$$\frac{F_2}{A} - \frac{F_1}{A} = \mu \cdot g \cdot h \rightarrow F_2 - F_1 = \mu \cdot g \cdot h \cdot A$$

Sabemos que  $A \cdot h = V_{\text{cubo}}$ . Logo:

$$E = \mu \cdot V_{\text{cubo}} \cdot g$$

Nesse caso, o cubo está totalmente imerso. Logo, o volume de líquido que é deslocado para cima quando se insere esse cubo no líquido é igual ao volume total do cubo. Temos:

$$V_{\text{cubo}} = V_{fd}$$

Logo, temos:

$$E = \mu \cdot V_{fd} \cdot g$$

Com essa expressão, conseguimos calcular a força de empuxo que um líquido exerce sobre um corpo. Lembre-se de que  $V_{fd}$  é o valor do volume do fluido que foi deslocado. Logo, é também o valor do volume do corpo que esteja imerso no líquido, já que é esse volume que será responsável pelo deslocamento do fluido.

Só que, pela definição de massa específica,  $\mu \cdot V_{fd} = m_{fd}$ , ou seja, o produto da massa específica pelo volume do fluido deslocado nos dá a massa de fluido deslocado. Logo, temos:

$$E = m_{fd} \cdot g \rightarrow E = P_{fd}$$

Ou seja, acabamos de descobrir que o valor do empuxo é o mesmo valor do peso do líquido deslocado.

A linha de ação do empuxo *sempre* passará pelo centro de gravidade da porção fluida que antes ocupava o local agora ocupado pelo volume submerso do corpo. Esse centro de gravidade também é chamado de *centro de carena*.

**EXERCÍCIOS RESOLVIDOS**

**04** Um bloco flutua inicialmente em água com 1/5 do seu volume emerso. Depois, é colocado em óleo, apresentando então 1/5 do seu volume imerso. Calcule a razão entre as massas específicas da água e do óleo.

**Solução:**

Seja  $V$  o volume do corpo.

– Em água:  $E_{\text{água}} = \mu_{\text{água}} \cdot V_{fd} \cdot g \rightarrow E_{\text{água}} = \mu_{\text{água}} \cdot \frac{4V}{5} \cdot g$

$$\rightarrow E_{\text{água}} = \frac{4}{5} \mu_{\text{água}} \cdot V \cdot g$$

– Em óleo:  $E_{\text{óleo}} = \mu_{\text{óleo}} \cdot V_{fd} \cdot g \rightarrow E_{\text{óleo}} = \mu_{\text{óleo}} \cdot \frac{V}{5} \cdot g$

$$\rightarrow E_{\text{óleo}} = \frac{1}{5} \mu_{\text{óleo}} \cdot V \cdot g$$

Sabemos que, para que o corpo fique em equilíbrio estático, a resultante deve ser nula. Em ambos os casos, só existem duas forças atuando: o empuxo e o peso. Elas devem então, ter mesma intensidade, para que o bloco possa estar em equilíbrio. Então, não importando o fluido em que o corpo está imerso, o empuxo exercido por esse fluido será igual ao peso do corpo. Dessa forma, os empuxos calculados anteriormente devem ser iguais.

$$E_{\text{água}} = E_{\text{óleo}} \rightarrow \frac{4}{5} \mu_{\text{água}} \cdot V \cdot g = \frac{1}{5} \mu_{\text{óleo}} \cdot V \cdot g \rightarrow \frac{\mu_{\text{água}}}{\mu_{\text{óleo}}} = \frac{1}{4}$$

**05** Um recipiente com água está em equilíbrio sobre o prato de uma balança que, nessas condições, indica 80 N. Depois, uma esfera de  $2 \cdot 10^2 \text{ cm}^3$  é totalmente imersa na água, sendo suspensa por um fio ideal. Sabendo que a densidade da água é  $1 \text{ g/cm}^3$  e que  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , qual a indicação da balança nessa situação?

**Solução:**

Na situação inicial, as forças atuando no líquido são a força peso e a força normal que a balança faz sobre o conjunto recipiente + líquido. Dessa forma, para estar em equilíbrio, a intensidade do peso tem que ser igual à intensidade da normal. Como a balança indica a normal, a normal é de 80 N. Logo, o peso do conjunto também é de 80 N.

Na situação final, a esfera, estando imersa na água, recebe um empuxo  $\vec{E}$ , vertical e para cima, exercido pelo líquido. Logo, a esfera reagirá, pela 3ª lei de Newton, e provocará uma força  $-\vec{E}$  no líquido. Por sua vez, o líquido, que está em contato direto com a balança, estará recebendo a ação de três forças: a reação do empuxo da esfera, para baixo, o peso, para baixo e a normal, para cima. Dessa forma, como está em equilíbrio, temos:

$$N = P + E$$

No item anterior, calculamos o peso do conjunto. Logo,  $P = 80 \text{ N}$ . O empuxo pode ser calculado através do teorema de Arquimedes:

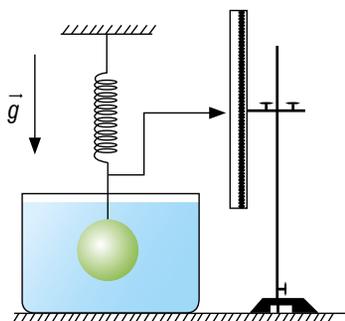
$$E = \mu \cdot V_{fd} \cdot g = \left(1 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \left(2 \cdot 10^2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3\right) \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 2 \text{ N}$$

Logo, a normal será  $N = 80 + 2 = 82 \text{ N}$ . Como a balança indica a normal, a indicação da balança será de 82 N.

Resposta: 82 N.

**EXERCÍCIOS NÍVEL 1**

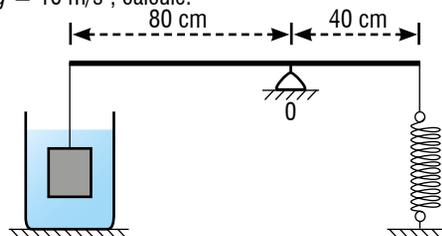
**01** Quando a esfera de aço representada na figura é imersa inteiramente na água, observa-se que o ponteiro, rigidamente fixado à mola de constante elástica  $K = 1,0 \cdot 10^1 \text{ N/m}$  sofre um deslocamento vertical de 1,0 cm. Adote  $|g| = 10 \text{ m/s}^2$  e admita que a densidade absoluta da água vale  $1,0 \text{ g/cm}^3$ .



- O deslocamento sofrido pelo ponteiro é para cima ou para baixo?
- Qual o volume da esfera?

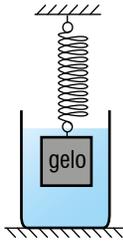
**02** Na situação da figura, uma barra rígida e de peso desprezível está em equilíbrio na posição horizontal. Na extremidade esquerda da barra está dependurado um bloco de ferro (densidade de  $8,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ), de volume igual a  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ , que está totalmente imerso em água (densidade de  $1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ). A extremidade direita da barra está presa a uma mola ideal de constante elástica  $K = 2,8 \cdot 10^3 \text{ N/m}$ .

Adotando  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , calcule:



- a intensidade do empuxo recebido pelo bloco;
- a deformação da mola.

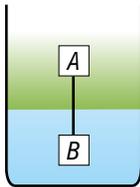
**03 (HELOU)** Um cubo de gelo a  $0^\circ\text{C}$ , preso a uma mola, é totalmente imerso num recipiente com água a  $25^\circ\text{C}$ , conforme mostra a figura. À medida que o gelo for se fundindo, podemos afirmar que:



- (A) o comprimento da mola permanecerá constante.
- (B) o comprimento da mola irá aumentando.
- (C) o comprimento da mola irá diminuindo.
- (D) o nível livre da água no recipiente permanecerá inalterado.
- (E) o nível livre de água no recipiente irá subindo.

**04 (HELOU)** Na figura, as esferas maciças  $A$  e  $B$  estão ligadas por um fio ideal e o sistema está em equilíbrio. A esfera  $A$  está no interior de um líquido homogêneo de densidade  $2d$  e a esfera  $B$  está no interior de outro líquido homogêneo de densidade  $3d$ .

Sabendo que as esferas têm raios iguais e que a esfera  $A$  tem densidade  $d$ , podemos concluir que a densidade da esfera  $B$  vale:



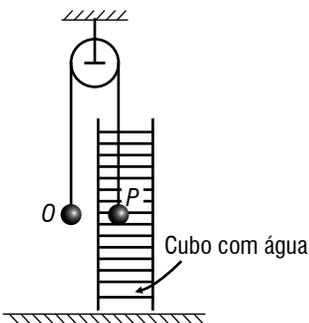
- (A)  $d$ .
- (B)  $2d$ .
- (C)  $3d$ .
- (D)  $4d$ .
- (E)  $5d$ .

**05 (CPO)** Um barco de massa igual a 200 kg está flutuando na água. Espalham-se moedas de 10 gramas no fundo do barco, até que o volume da parte submersa passe a ser  $0,25\text{ m}^3$ . Sabe-se que o barco continua flutuando. O número de moedas espalhadas é:

(Dado: massa específica da água =  $1,0 \cdot 10^3\text{ kg/m}^3$ .)

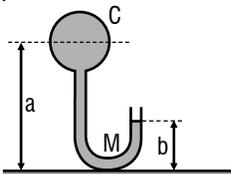
- (A) 500.
- (B) 5.000.
- (C) 50.000.
- (D) 500.000.
- (E) 5.000.000.

**06** Duas esferas idênticas, metálicas e maciças,  $O$  e  $P$ , ligadas por um fio ideal, são colocadas na condição inicial esquematizada abaixo, com velocidades nulas. Sendo  $g$  o módulo de aceleração da gravidade,  $d_L$  a densidade do líquido e  $d_S$  a densidade das esferas, calcule o módulo da aceleração da esfera  $P$  enquanto estiver totalmente imersa no líquido.

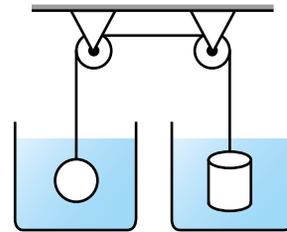


**07** A uma canalização  $C$  liga-se um medidor de pressão  $M$ . O líquido possui peso específico  $\varepsilon = 15\text{ kN/m}^3$  ( $\text{kN} = \text{quilowton} = 10^3\text{ N}$ ). São dados  $a = 4,0\text{ m}$  e  $b = 1,0\text{ m}$ .

Sabendo que a pressão atmosférica é  $p_0 = 1,0 \cdot 10^5\text{ Pa}$  (pascal =  $\text{N/m}^2$ ), calcule a pressão em  $C$ .



**08** A figura abaixo representa uma esfera de densidade  $d_e = 6,8\text{ g/cm}^3$ , imersa em um líquido de densidade  $d_l = 0,80\text{ g/cm}^3$  e um cilindro de densidade  $d_c = 2,0\text{ g/cm}^3$ , cuja altura é igual ao seu raio imerso na água ( $d_a = 1,0\text{ g/cm}^3$ ). Os dois corpos estão ligados por um fio inextensível, que passa por duas polias sem atrito. Supondo que o sistema está em equilíbrio, determine a relação entre os raios da esfera e do cilindro.



**09** Um barco de madeira de 500 kg de massa é transportado de um rio para o mar. Supondo que a densidade da água do rio vale  $1,00\text{ g/cm}^3$  e a da água do mar vale  $1,03\text{ g/cm}^3$ , calcule a massa adicional que deve ser colocada sobre o barco, para que o volume da parte imersa seja o mesmo, no rio e no mar.

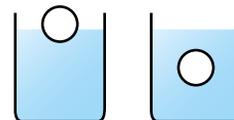
**10** Um balão cheio de hidrogênio, de volume  $V_B$ , conduz uma cesta cujo volume é de 0,5%, do volume do balão. Sabendo que o balão parte do solo e que no local as massas específicas do hidrogênio, do ar e da cesta são, respectivamente,  $0,1\text{ kg/m}^3$ ,  $1,2\text{ kg/m}^3$  e  $100\text{ kg/m}^3$ , determine:

- a. a aceleração vertical do balão no instante da partida, em função da aceleração da gravidade  $g$ ;
- b. a altura do balão em relação ao solo, 10 segundos após a partida, considerando para este item  $g = 10\text{ m/s}^2$ .

**11 (AFA)** Um barril flutua na superfície de um lago, deslocando 30 litros de água. Colocando-se esse mesmo barril para flutuar sobre um líquido 1,5 vez mais denso que a água, quantos litros desse líquido ele irá deslocar?

- (A) 45.
- (B) 30.
- (C) 20.
- (D) 15.

**12 (AFA)** A figura mostra uma mesma esfera em repouso quando colocada em dois recipientes idênticos, porém com líquidos diferentes. Se a razão entre as densidades dos líquidos é 0,8, pode-se afirmar que a fração do volume da esfera que está parcialmente imersa é:

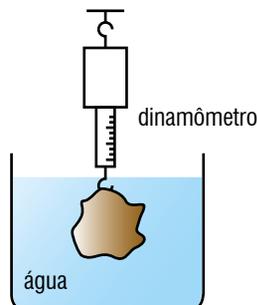


- (A) 80%.
- (B) 60%.
- (C) 40%.
- (D) 20%.

**13 (AFA)** Um balão de peso  $P$  desce com uma aceleração constante  $a$ , menor que a aceleração da gravidade  $g$ . Qual o peso  $P'$  do lastro que deve ser atirado para fora do balão para que ele comece a ser acelerado para cima com aceleração constante igual a  $a$ ? Despreze a resistência do ar.

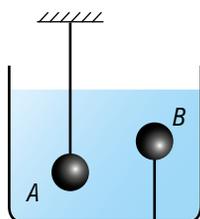
- (A)  $\frac{2Pa}{g+a}$ .
- (B)  $\frac{Pa}{g}$ .
- (C)  $\frac{2Pg}{g+a}$ .
- (D)  $\frac{Pg}{a}$ .

**14 (AFA)** Um estudante, para determinar a densidade de uma liga desconhecida pesou-a, encontrando 24 N. A seguir, com o auxílio da montagem da figura, observou que a indicação do dinamômetro era 19 N. Considerando a densidade da água igual a  $1,0 \text{ g/cm}^3$ , a densidade da liga é, em  $\text{g/cm}^3$ :



- (A) 1,2.
- (B) 2,4.
- (C) 3,6.
- (D) 4,8.

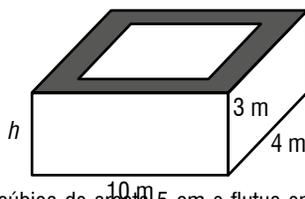
**15 (AFA)** Duas esferas A e B de mesmo volume, de materiais diferentes e presas por fios ideais, encontram-se em equilíbrio no interior de um vaso com água conforme a figura. Considerando-se as forças peso ( $P_A$  e  $P_B$ ), empuxo ( $E_A$  e  $E_B$ ) e tensão no fio ( $T_A$  e  $T_B$ ) relacionadas a cada esfera, é **incorreto** afirmar que:



- (A)  $P_A > P_B$
- (B)  $E_A = E_B$
- (C)  $T_A + T_B = P_A - P_B$
- (D)  $T_A < T_B$

**16 (EFOMM)** Um bloco vazado de concreto é projetado para servir como um cais com dimensões externas indicadas no desenho. Quantos metros ele deve afundar na água salgada, sabendo-se que o volume efetivo de concreto é apenas 10% de todo o seu volume. Dados:  $\rho_{\text{concreto}} = 2.400 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_{\text{água}} \cong 1.000 \text{ kg/m}^3$ .

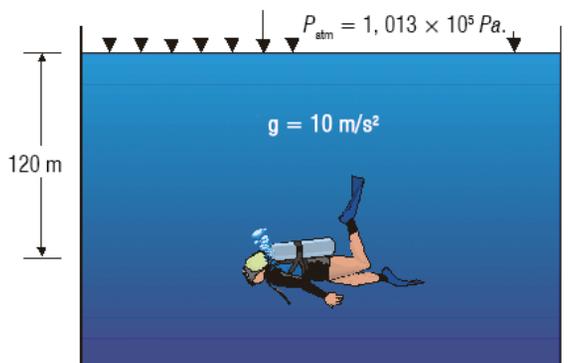
- (A)  $h = 0,72$ .
- (B)  $h = 1,40$ .
- (C)  $h = 3,00$ .
- (D)  $h = 0,30$ .
- (E)  $h = 1,20$ .



**17 (EFOMM)** Um corpo tem forma cúbica de aresta 5 cm e flutua em água de massa específica  $1000 \text{ kg/m}^3$ . A massa específica do corpo é de  $0,8 \text{ kg/l}$ . A altura submersa desse corpo é de:

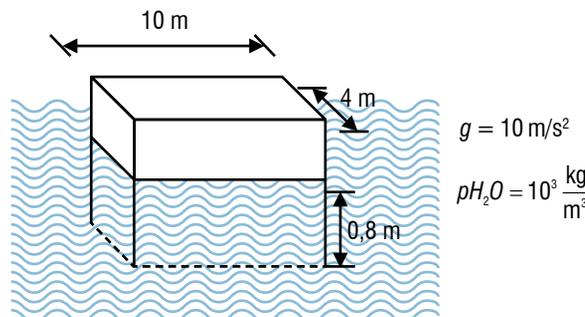
- (A) 4 cm.
- (B) 3,5 cm.
- (C) 3 cm.
- (D) 2,5 cm.
- (E) 2 cm.

**18 (EFOMM)** Um mergulhador nada em águas de densidade  $1.049 \text{ kg/m}^3$ , a 120 m de profundidade. A intensidade da força em Newtons, que age em cada  $\text{cm}^2$  do seu corpo, é de aproximadamente:



- (A) 136.
- (B) 122.
- (C) 104.
- (D) 87.
- (E) 59.

**19 (EFOMM)** A figura abaixo refere-se a uma balsa flutuando em águas tranquilas, submersa de 80 cm. Um caminhão de 4 toneladas é colocado em cima da balsa. O empuxo atuante na balsa e a altura submetida são, respectivamente:



- (A) 340.000 N e 100 cm.
- (B) 360.000 N e 90 cm.
- (C) 360.000 N e 85 cm.
- (D) 400.000 N e 84 cm.
- (E) 400.000 N e 88 cm.

**O enunciado a seguir servirá para as questões de 20 a 22.**

Um cilindro oco de ferro (densidade =  $7,6 \text{ kg/m}^3$ ) de 80 cm de diâmetro e 4 m de altura flutua, com  $1/15$  da sua altura fora da água salgada (densidade =  $1.031 \text{ kg/m}^3$ ).

**20 (EFOMM)** O empuxo (em N) sobre ele é aproximadamente:

- (A) 1.175.
- (B) 1.221.
- (C) 1.339.
- (D) 1.475.
- (E) 1.934.

**21 (EFOMM)** A espessura da chapa de ferro que forma o cilindro é, em mm, aproximadamente:

- (A) 2,3.
- (B) 3,1.
- (C) 4,4.
- (D) 5,2.
- (E) 6,1.

**22 (EFOMM)** A massa (em kg) de ferro gasta para fabricar o cilindro é: (Dado:  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ .)

- (A) 118. (D) 148.  
 (B) 122. (E) 197.  
 (C) 133.

**23 (EFOMM)** É fato conhecido que, ao mergulhar em água, a pressão aumenta em 1 atm aproximadamente a cada 10 metros de profundidade. Suponha que um mergulhador, a serviço da Petrobras na Bacia de Campos, trabalhe a 130 metros de profundidade, ou seja, a pressão total sobre ele é de cerca de 14 atmosferas (considerando a pressão atmosférica). Assim sendo, a força normal exercida sobre cada  $\text{cm}^2$  do seu corpo vale (em N), aproximadamente:

- (A) 14. (D) 14.000.  
 (B) 140. (E) 140.000.  
 (C) 1.400.

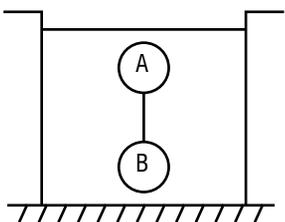
**24 (EN)** Um tubo em U contém mercúrio. Derrama-se, num dos ramos sobre o mercúrio, um líquido de  $3 \text{ g/cm}^3$  de massa específica, até que a coluna dele tenha 10 cm de altura. No outro ramo, coloca-se álcool de  $0,8 \text{ g/cm}^3$  de massa específica, até 15 cm de altura. A massa específica do mercúrio é de  $13,6 \text{ g/cm}^3$ . A diferença final de nível do mercúrio nos dois ramos será aproximadamente igual a:

- (A) 0,95 cm. (D) 1,71 cm.  
 (B) 1,32 cm. (E) 1,91 cm.  
 (C) 1,54 cm.

**25 (EN)** A partir de um material de densidade igual à da água, constrói-se um casco esférico de raios interno e externo  $r$  e  $R$ , respectivamente. A razão  $r/R$  para que a casco esférica, quando colocada em um recipiente com água, flutue com a metade de seu volume submerso será aproximadamente de:

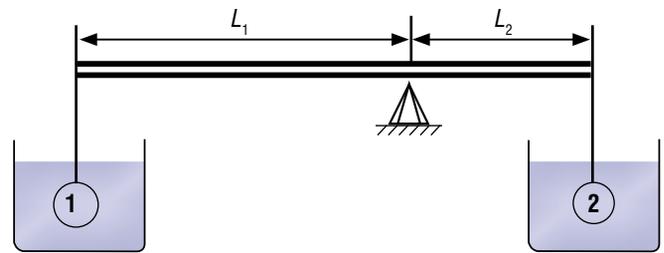
- (A) 0,8. (D) 1,6.  
 (B) 1,1. (E) 1,9.  
 (C) 1,3.

**26 (EN)** Duas esferas, A e B, de raios iguais, estão ligadas por um arame de peso e volume desprezíveis, e flutuam em água, como mostra a figura abaixo. Sabendo-se que as massas específicas da água e da esfera A são, respectivamente,  $m = 1 \text{ g/cm}^3$  e  $m = 0,8 \text{ g/cm}^3$ , qual a massa específica da esfera B, em  $\text{g/cm}^3$ ?



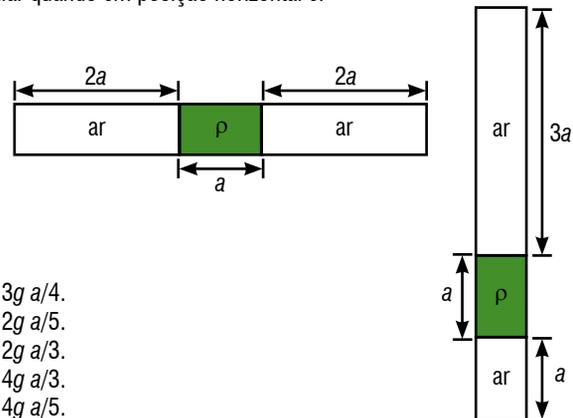
- (A) 0,2. (D) 1,2.  
 (B) 0,8. (E) 1,8.  
 (C) 1.

**27 (EN)** A figura abaixo mostra uma balança cujos braços têm comprimentos  $L_1$  e  $L_2$ . Dois corpos de pesos  $P_1$  e  $P_2$  estão suspensos nos braços da balança e imersos em fluidos que exercem empuxos  $I_1$  e  $I_2$  sobre os corpos 1 e 2, respectivamente. A balança estará em equilíbrio se:



- (A)  $P_1 = P_2$  e  $L_1 < L_2$ . (D)  $(P_1 - I_1) L_1 = (P_2 - I_2) L_2$ .  
 (B)  $P_1 L_2 = P_2 L_1$ . (E)  $(P_1 - 2I_1) L_2 = (P_2 + 2I_2) L_1$ .  
 (C)  $I_1 L_1 = I_2 L_2$ .

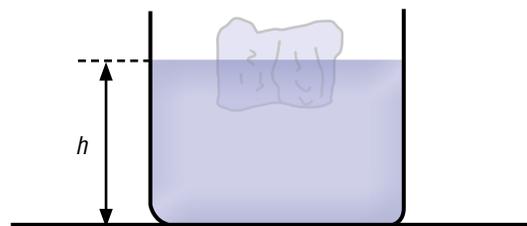
**28 (ITA)** Um tubo capilar de comprimento  $5a$  é fechado em ambas as extremidades. E contém ar seco que preenche o espaço no tubo não ocupado por uma coluna de mercúrio de massa específica  $\mu$  e comprimento  $a$ . Quando o tubo está na posição horizontal, as colunas de ar seco medem  $2a$  cada uma. Levando-se lentamente o tubo à posição vertical, as colunas de ar tem comprimentos  $a$  e  $3a$ . Nessas condições, a pressão no tubo capilar quando em posição horizontal é:



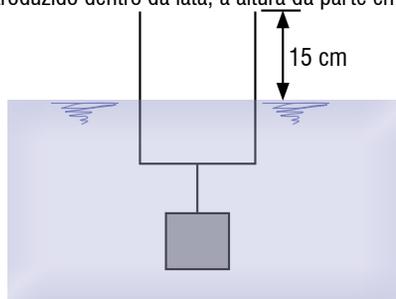
- (A)  $3g a/4$ .  
 (B)  $2g a/5$ .  
 (C)  $2g a/3$ .  
 (D)  $4g a/3$ .  
 (E)  $4g a/5$ .

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** Um bloco de gelo flutua na água, conforme se representa a seguir. O gelo e a água encontram-se em equilíbrio térmico, num local em que a pressão atmosférica é normal. Demonstrar que, se o gelo se fundir, o nível da água no recipiente na situação final não se alterará. Admitir que na situação final a temperatura do sistema é de  $0^\circ\text{C}$ .

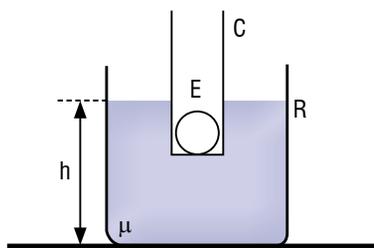


**02 (PUC)** O esquema representa uma lata que flutua em água, de densidade igual a  $1,0 \text{ g/cm}^3$ . A altura da parte emersa é de  $15 \text{ cm}$  e o corpo pendurado ao seu fundo é um bloco de forma cúbica de  $10 \text{ cm}$  de aresta. Sabendo que a base da lata é um quadrado de  $20 \text{ cm}$  de lado, se o bloco for introduzido dentro da lata, a altura da parte emersa:



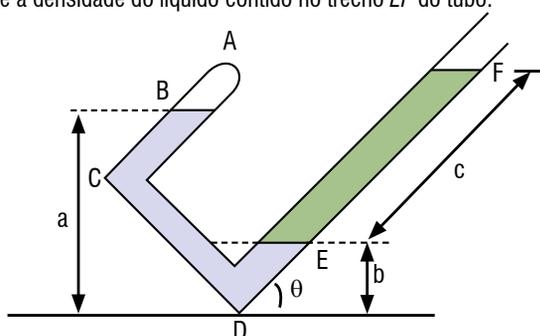
- (A) não será alterada.
- (B) passará a ser de  $17,5 \text{ cm}$ .
- (C) passará a ser de  $14,5 \text{ cm}$ .
- (D) passará a ser de  $12,5 \text{ cm}$ .
- (E) O sistema afundará.

**03** Na situação esquematizada,  $R$  é um reservatório que contém água,  $C$  é uma caixa plástica e  $E$  é uma esfera sólida impermeável. Com o sistema em equilíbrio, retira-se a esfera, colocando-a diretamente na água. Sendo  $h$  a altura do nível livre da água em  $R$ , diga, justificando, se  $h$  aumentará, diminuirá ou permanecerá constante nos seguintes casos:



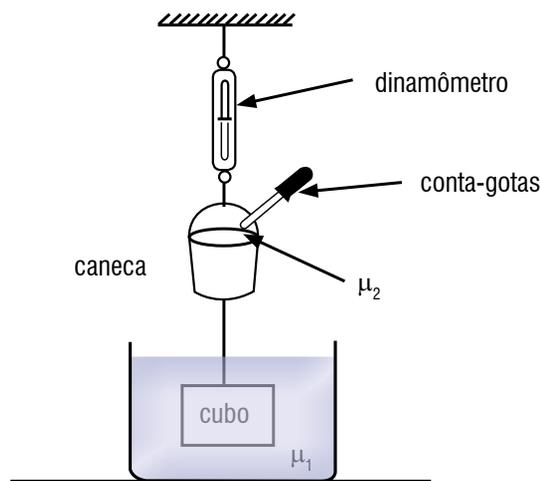
- a. quando a esfera for mais densa que a água;
- b. quando a esfera for menos densa que a água;
- c. quando a esfera tiver a mesma densidade que a água.

**04 (Helou)** Um tubo de vidro, com uma extremidade  $A$  fechada e outra aberta, conforme a figura, apoia-se em  $D$  sobre um plano horizontal. O trecho  $AB$  do tubo contém ar, o trecho  $BCDE$  contém mercúrio e o trecho  $EF$  contém um líquido que não se mistura nem se combina com o mercúrio. Verifica-se que, girando o tubo em torno do ponto  $D$  num plano vertical, a pressão do trecho  $AB$  se torna igual à pressão atmosférica reinante, quando  $\theta = 30^\circ$ . Nessa posição, tem-se  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 8 \text{ cm}$  e  $c = 45 \text{ cm}$ . Sendo a densidade absoluta do mercúrio igual a  $13,5 \text{ g/cm}^3$ , calcule a densidade do líquido contido no trecho  $EF$  do tubo.



**05** Um corpo aparenta ter massa de  $45 \text{ g}$  no ar e de  $37 \text{ g}$  quando totalmente imerso na água (massa específica de  $1,0 \text{ g/cm}^3$ ). Sabendo que a massa específica do material de que é feito o corpo vale  $9,0 \text{ g/cm}^3$ , calcule o volume da cavidade que, certamente, deve existir no corpo. Considere desprezível o empuxo do ar, bem como o ar existente na cavidade do corpo.

**06** O cubo de  $8 \text{ cm}^3$  de volume e a caneca, mostrados na figura, pesam, juntos,  $P$ . O cubo está imerso em um líquido de massa específica  $\mu_1 = 1,2 \text{ g/cm}^3$ . Calcule o número de gotas, de  $0,1 \text{ cm}^3$  cada uma, de um líquido de massa específica  $\mu_2 = 0,8 \text{ g/cm}^3$  a ser colocado na caneca, para que a leitura do dinamômetro dê  $P$ .

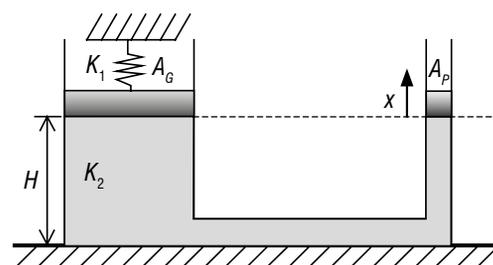


**07** Um barqueiro dispõe de uma chata que permite o transporte fluvial de cargas até  $10.000 \text{ N}$ . Ele aceitou um trabalho de transporte de um lote de  $50$  barras maciças de ferro ( $10 \text{ g/cm}^3$ ) de  $200 \text{ N}$  cada uma. Por um erro de contagem, a firma enviou  $51$  barras. Não querendo perder o freguês, mas também procurando não ter prejuízo com duas viagens, o barqueiro resolveu amarrar um certo número  $n$  de barras embaixo do barco, completamente submersas. Qual deve ser o número  $n$  mínimo, para que a travessia das  $51$  barras seja feita numa só viagem? Densidade da água:  $1,0 \text{ g/cm}^3$ .

**08** Um corpo constituído de um material de peso específico de  $2,4 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3$  tem volume externo de  $2,0 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$ . Abandonado no interior da água (densidade de  $1,0 \text{ g/cm}^3$ ), move-se verticalmente, sofrendo a ação de uma força resistente cuja intensidade é dada pela expressão  $F_r = 56V$  (SI), em que  $V$  é o módulo de sua velocidade. Sendo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , calcule a velocidade limite do corpo, isto é, a máxima velocidade atingida em todo o movimento.

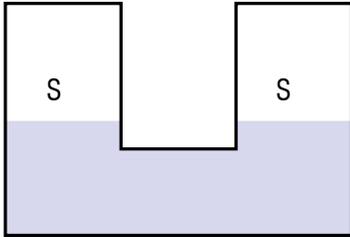
**09** Dois vasos comunicantes contêm fluido incompressível de massa específica  $\rho$ . Sobre a superfície livre do líquido em cada vaso estão duas placas, sem massa, de área  $A_g$  e  $A_p$ , conforme mostra a figura. Numa das placas estão acopladas duas molas idealmente elásticas de rigidez  $K_1$  e  $K_2$ . Num dado momento, é aplicado suavemente um carregamento de peso  $F$  sobre a placa de área  $A_g$ . Determine o deslocamento sofrido pela placa de área  $A_p$ , referenciando-se a partir da posição de equilíbrio anterior ao carregamento.

- Dados:**  
 $g = 10 \text{ m/s}^2$   
 $\rho = 100 \text{ kg/m}^3$   
 $A_g = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$   
 $A_p = 2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$   
 $F = 100 \text{ N}$   
 $K_1 = 10^3 \text{ N/m}$

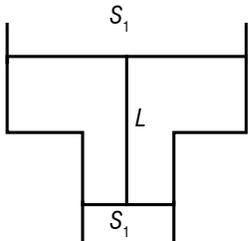


**10 (ITA)** Os dois vasos comunicantes da figura a seguir são abertos, têm seções retas iguais a  $S$  e contêm um líquido de massa específica  $\rho$ . Introduz-se no vaso esquerdo um cilindro maciço e homogêneo de massa  $M$ , seção  $S' < S$  e menos denso que o líquido. O cilindro é introduzido e abandonado de modo que no equilíbrio seu eixo permaneça na vertical. Podemos afirmar que, no equilíbrio, o nível de ambos os vasos sobe:

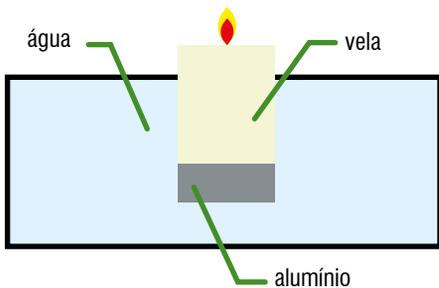
- (A)  $\frac{M}{\rho(S - S')}$
- (B)  $\frac{M}{\rho(2S - S')}$
- (C)  $\frac{M}{2\rho(2S - S')}$
- (D)  $\frac{2M}{2\rho(2S - S')}$
- (E)  $\frac{M}{2\rho S}$



**11 (ITA)** Um recipiente, cujas seções retas dos êmbolos valem  $S_1$  e  $S_2$ , está cheio de um líquido de densidade  $\rho$  como mostra a figura. Os êmbolos estão unidos entre si por um arame fino de comprimento  $L$ . Os extremos do recipiente estão abertos. Despreze o peso dos êmbolos, do arame e quaisquer atritos. Quanto vale a tensão  $T$  no arame?



**12 (ITA)** Na extremidade inferior de uma vela cilíndrica de 10 cm de comprimento (massa específica  $0,7 \text{ g/cm}^3$ ) é fixado um cilindro maciço de alumínio (massa específica  $2,7 \text{ g/cm}^3$ ) que tem o mesmo raio que a vela e comprimento de 1,5 cm. A vela é acesa e imersa na água, onde flutua de pé com estabilidade, como mostra a figura. Supondo que a vela queime a uma taxa de 3 cm por hora e que a cera fundida não escorra enquanto a vela queime, conclui-se que a vela vai apagar-se:

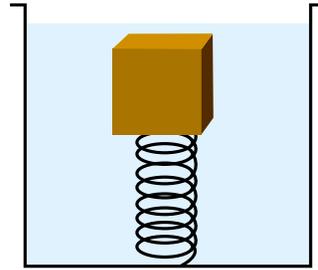


- (A) imediatamente, pois não vai flutuar.
- (B) em 30 min.
- (C) em 50 min.
- (D) em 1 h 50 min.
- (E) em 3 h 20 min.

**13 (ITA)** A massa de um objeto feito de liga ouro-prata é 354 g. Quando imerso na água, cuja massa específica é  $1,00 \text{ g/cm}^3$ , sofre uma perda aparente de peso correspondente a 20,0 g de massa. Sabendo que a massa específica do ouro é de  $20,0 \text{ g/cm}^3$  e a da prata  $10,0 \text{ g/cm}^3$ , podemos afirmar que o objeto contém a seguinte massa de ouro:

- (A) 177 g.
- (B) 118 g.
- (C) 236 g.
- (D) 308 g.
- (E) 54,0 g.

**14 (EFOMM)** Observe a figura a seguir.



A figura acima mostra um bloco de madeira preso a uma mola que tem sua outra extremidade presa ao fundo de um tanque cheio d'água. Estando o sistema em equilíbrio estático, verifica-se que a força que a mola faz sobre o fundo do tanque é de 2,0 N, vertical para cima. Considere que a massa e o volume da mola são desprezíveis. Agora, suponha que toda água seja retirada lentamente do tanque e que, ao final, o bloco permaneça em repouso sobre a mola. Com base nos dados apresentados, qual o módulo e o sentido da força vertical que a mola fará sobre o fundo do tanque?

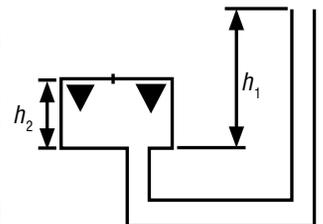
**Dados:**  $d_{\text{água}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ;  $d_{\text{madeira}} = 80 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- (A) 12 N, para cima.
- (B) 10 N, para baixo.
- (C) 10 N, para cima.
- (D) 8 N, para baixo.
- (E) 8 N, para cima.

**15 (EN)** As esferas maciças  $A$  e  $B$ , que têm o mesmo volume e foram coladas, estão em equilíbrio, imersas na água (densidade da água é igual a  $1,0 \text{ g/cm}^3$ ). Quando a cola que as une se desfaz, a esfera  $B$  sobe e passa a flutuar, com a terça parte de seu volume imerso na água. As densidades das esferas  $A$  e  $B$  valem, respectivamente:

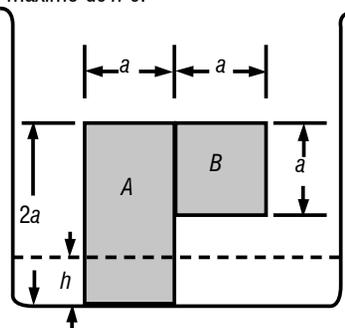
- (A)  $2/3 \text{ g/cm}^3$  e  $1/3 \text{ g/cm}^3$ .
- (B)  $1/3 \text{ g/cm}^3$  e  $5/3 \text{ g/cm}^3$ .
- (C)  $5/3 \text{ g/cm}^3$  e  $2/3 \text{ g/cm}^3$ .
- (D)  $5/3 \text{ g/cm}^3$  e  $1/3 \text{ g/cm}^3$ .
- (E)  $1/3 \text{ g/cm}^3$  e  $2/3 \text{ g/cm}^3$ .

**16 (ITA)** Um tanque fechado de altura  $h^2$  e área de seção  $S$  comunica-se com um tubo aberto na outra extremidade, conforme a figura. O tanque está inteiramente cheio de óleo, cuja altura no tubo aberto, acima da base do tanque, é  $h_1$ . São conhecidos, além de  $h_1$  e  $h_2$ : a pressão atmosférica local, a qual equivale à de uma altura  $H$  de mercúrio de massa específica  $\rho m$ ; a massa específica  $\rho_0$  do óleo; a aceleração da gravidade  $g$ . Nessas condições, qual a pressão na face inferior da tampa  $S$ ?

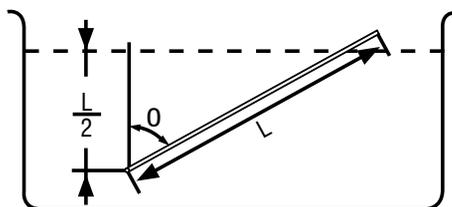


**17 (ITA)** Dois blocos, *A* e *B*, homogêneos e de massa específica  $3,5 \text{ g/cm}^3$  e  $6,5 \text{ g/cm}^3$ , respectivamente, foram colados um no outro e o conjunto resultante foi colocado no fundo (rugoso) de um recipiente, como mostra a figura. O bloco *A* tem o formato de um paralelepípedo retangular de altura  $2a$ , largura  $a$  e espessura  $a$ . O bloco *B* tem o formato de um cubo de aresta  $a$ . Coloca-se, cuidadosamente, água no recipiente até uma altura  $h$ , de modo que o sistema constituído pelos blocos *A* e *B* permaneça em equilíbrio, *i. e.*, não tombe. O valor máximo de  $h$  é:

- (A) 0.
- (B)  $0,25 a$ .
- (C)  $0,5 a$ .
- (D)  $0,75 a$ .
- (E)  $a$ .

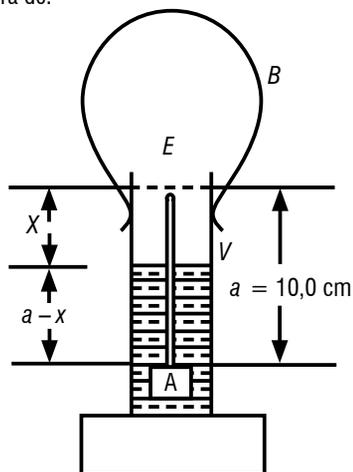


**18 (ITA)** Uma haste homogênea e uniforme de comprimento  $L$ , secção reta de área  $A$ , e massa específica é livre de girar em torno de um eixo horizontal fixo num ponto  $P$  localizado a uma distância  $d = L/2$  abaixo da superfície de um líquido de massa específica  $\rho_{12}$ . Na situação de equilíbrio estável, a haste forma com a vertical um ângulo igual  $\alpha$ :



- (A)  $45^\circ$ .
- (B)  $60^\circ$ .
- (C)  $30^\circ$ .
- (D)  $75^\circ$ .
- (E)  $15^\circ$ .

**19 (ITA)** Um aparelho comumente usado para se testar a solução de baterias de carro, acha-se esquematizado na figura abaixo. Consta de um tubo de vidro cilíndrico  $V$  do dotado de um bulbo de borracha  $B$  para a sucção do líquido. O conjunto flutuante  $E$ , de massa  $4,8 \text{ g}$ , consta de uma porção  $A$  de volume  $3,0 \text{ cm}^3$  presa numa extremidade de um estilete de  $10,0 \text{ cm}$  de comprimento e secção reta de  $0,20 \text{ cm}^2$ . Quando o conjunto flutuante apresenta a metade da haste fora do líquido, a massa específica da solução será de:

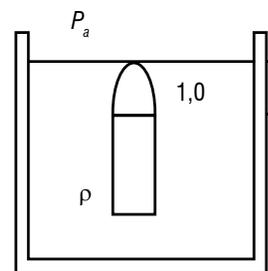


- (A)  $1,0 \text{ g/cm}^3$ .
- (B)  $1,2 \text{ g/cm}^3$ .
- (C)  $1,4 \text{ g/cm}^3$ .
- (D)  $1,6 \text{ g/cm}^3$ .
- (E)  $1,8 \text{ g/cm}^3$ .

**20 (ITA)** Para se determinar a massa específica de um material, fez-se um cilindro de  $10,0 \text{ cm}$  de altura desse material flutuar dentro do mercúrio mantendo o seu eixo perpendicular à superfície do líquido. Posto a oscilar verticalmente, verificou-se que o seu período era  $0,60 \text{ s}$ . Qual é o valor da massa específica do material? Sabe-se que a massa específica do mercúrio é de  $1,36 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$  e que a aceleração da gravidade local é de  $10,0 \text{ m/s}^2$ .

- (A) Faltam dados para calcular
- (B)  $1,24 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$ .
- (C)  $1,72 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$ .
- (D)  $7,70 \cdot 10^3$ .
- (E) outro valor

**21 (ITA)** Um tubo cilíndrico de secção transversal constante de área  $S$  fechado numa das extremidades e com uma coluna de ar no seu interior de  $1,0 \text{ m}$  encontra-se em equilíbrio mergulhado em água cuja massa específica é  $1,0 \text{ g/cm}^3$  com o topo do tubo coincidindo com a superfície (figura abaixo). Sendo  $P_a = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  a pressão atmosférica e  $g = 10 \text{ m/s}^2$  a aceleração da gravidade, a que distância  $h$  deverá ser elevado o topo do tubo com relação à superfície da água para que o nível da água dentro e fora do mesmo coincidam?



- (A)  $1,1 \text{ m}$ .
- (B)  $1,0 \text{ m}$ .
- (C)  $10 \text{ m}$ .
- (D)  $11 \text{ m}$ .
- (E)  $0,91 \text{ m}$ .

**22 (IME)** Um balão de borracha, esférico, perfeitamente elástico e de peso desprezível é cheio com  $1 \text{ kg}$  de um gás ideal que ocupa  $2 \text{ litros}$  nas condições ambientais de  $20^\circ\text{C}$  de temperatura e pressão barométrica de  $10^5 \text{ Pa}$ . Depois de cheio, o balão é mergulhado lentamente em um poço profundo que contém água pura à temperatura de  $20^\circ\text{C}$ , de tal modo que a temperatura do gás não varie. Supondo-se que o balão permaneça esférico e que esteja totalmente imerso, determine a que profundidade, medida da superfície do líquido ao centro do balão, ele permanecerá parado quando solto. Considere a gravidade local  $g = 10 \text{ m/s}^2$  e a massa específica da água  $= 1 \text{ g/cm}^3$ .

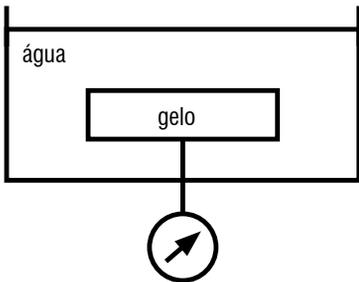
**23 (IME)** Um balão, de peso desprezível, contendo um gás de massa específica  $0,2 \text{ g/L}$ , ocupa um volume de  $1000 \text{ m}^3$ . Calcular a força ascensional do balão, em  $\text{kgf}$ , à pressão atmosférica normal e à temperatura de  $27^\circ\text{C}$ .

**Dados:**  
Constante universal dos gases perfeitos:  $0,082 \text{ atm} \cdot \text{L/mol} \cdot \text{K}$   
Massa molecular do ar:  $29 \text{ u.m.a.}$

**24 (IME)** Uma esfera oca, de ferro, pesa  $300 \text{ N}$ . Na água seu peso aparente é de  $200 \text{ N}$ . Calcule o volume da parte oca da esfera.

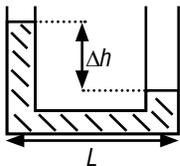
**Dados:**  
massa específica do ferro  $= 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ ;  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

**25 (IME)** Um cubo de gelo encontra-se totalmente imerso em um reservatório adiabático com 200 mL de água a 25°C. Um fino arame conecta a um dinamômetro que indica uma força de 0,32 N. Sabe-se que a densidade da água e do gelo são, respectivamente, 1 g/cm<sup>3</sup> e 0,92 g/cm<sup>3</sup>, enquanto que os calores específicos são respectivamente de 1 cal/g°C e 0,5 cal/g°C. O calor latente de fusão do gelo é 80 cal/g. Considere a aceleração da gravidade como 10 m/s<sup>2</sup>. Determine a força indicada pelo dinamômetro quando a temperatura da água for de 15°C, assim como a massa do bloco de gelo neste momento.



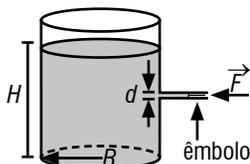
**EXERCÍCIOS NÍVEL 3**

**01** O tubo fino em forma de U mostrado na figura tem diâmetro interno uniforme em toda a sua extensão e é acelerado horizontalmente para a direita, quando um líquido ideal anteriormente em repouso no seu interior apresenta uma diferença de nível  $\Delta h$  entre os dois ramos verticais. O comprimento da parte horizontal do tubo é  $L$  e a aceleração da gravidade local é  $g$ . Determine, em função dos dados do problema, a aceleração a que o tubo está submetido.

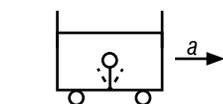


**02 (ITA)** Um recipiente cilíndrico de raio  $R$  e eixo vertical contém álcool, até uma altura  $H$ . Ele possui, à meia altura da coluna de álcool, um tubo de eixo horizontal cujo o diâmetro  $d$  é pequeno comparado à altura da coluna de álcool, como mostra a figura. O tubo é vedado por um êmbolo que impede a saída de álcool, mas que pode deslizar sem atrito através do tubo. Sendo  $\rho$  a massa específica do álcool, a magnitude da força  $\vec{F}$  necessária para manter o êmbolo em sua posição é:

- (A)  $\rho g H \pi R^2$
- (B)  $\rho g H \pi d^2$
- (C)  $\rho g H \pi R d / 2$
- (D)  $\rho g H \pi R^2 / 2$
- (E)  $\rho g H \pi d^2 / 8$



**03** Um recipiente contém um líquido de densidade  $\rho$ , em repouso numa superfície horizontal perfeitamente lisa. No fundo deste recipiente, há uma bola maciça de borracha de densidade  $\rho/2$  presa por um barbante de massa desprezível. Acelerando o recipiente com uma intensidade  $a$ , o balão inclinará. (Considere  $g$  a aceleração da gravidade local.)



- a. A inclinação será na direção da aceleração ou contrária?
- b. Qual o valor desta inclinação?

**04** Dentro de um elevador está um recipiente com um certo líquido de densidade  $\rho$ . No fundo deste recipiente, está instalado um sistema de balança eletrônica. Esta balança indica apenas a massa do bloco devido a um contato metálico eletroimpermeável, coberto de verniz isolante preso ao corpo cuja massa se deseja medir em situações de atmosferas adversas, e outro contato está fixo na balança. Um bloco de volume  $V$  e densidade  $3\rho$  foi colocado no recipiente e o elevador foi posto em movimento vertical acelerado com intensidade  $\frac{g}{5}$ .

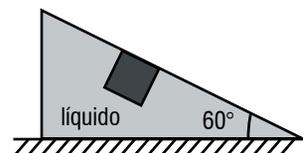
Calcule a indicação da balança, considerando  $g$  a aceleração da gravidade local.

**05** Um tubo cilíndrico de comprimento  $L$  é submerso até a metade em mercúrio, é tapado com o dedo e retirado em seguida. Ao se fazer isso, parte do mercúrio derrama. Qual o comprimento da coluna de mercúrio que permaneceu dentro do tubo? O comprimento da coluna de mercúrio correspondente à pressão atmosférica é  $H$ .

**06 (ITA-adaptada)** Sobre um líquido de densidade  $\rho_1$ , se encontra um outro de densidade  $\rho_2 < \rho_1$ , que não se mistura com o primeiro. É evidente que um corpo cuja densidade seja  $\rho_2 < \rho < \rho_1$  flutuará no limite de separação entre esses líquidos. Qual parte do volume do corpo estará submersa no líquido mais denso?

**07** Um êmbolo de peso  $P = 30$  N tem a forma de um disco redondo de raio  $R = 4$  cm com uma abertura central, na qual se coloca um tubo de paredes finas e raio  $r = 1$  cm. Esse tubo é aberto em ambas as extremidades. O êmbolo é introduzido perfeitamente a um vaso e, inicialmente, encontra-se em seu fundo. A que altura  $H$  se elevará o êmbolo se despejarmos dentro do tubo  $m = 700$  g de água?

**08** Um recipiente oco, fechado e transparente é fixado sobre uma superfície plana, como ilustra a figura a seguir. A face inclinada do recipiente faz um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal. O recipiente encontra-se completamente cheio com um certo líquido e contém em seu interior um bloco feito de material duas vezes menos denso que o líquido.



- a. Determine o valor do coeficiente de atrito estático  $\mu_e$  entre o recipiente e o bloco, sabendo que, na iminência de movimento, este tende a se deslocar ascendentemente ao longo do face inclinada.
- b. Calcule a diferença  $\mu_e - \mu_c$  entre os coeficientes de atrito estático e cinético, considerando que, ao iniciar o movimento, o bloco desloca-se ascendentemente de 10 cm ao longo da face inclinada durante o tempo de 1 s.

**09** Um longo tubo em U, disposto verticalmente, aberto em suas extremidades e com área da seção reta constante, contém um certo líquido em equilíbrio hidrostático. Uma das extremidades do tubo é então lentamente resfriada. Como consequência, uma pequena porção superior do líquido, ocupando inicialmente um comprimento vertical  $H_0$  dessa extremidade, é solidificada, passando a ocupar na nova situação de equilíbrio um comprimento vertical  $\alpha H_0$ , em que  $\alpha$  é um número positivo. Despreze o atrito entre as paredes do tubo e a substância em ambas as fases líquida e sólida.

- Na nova situação de equilíbrio, o nível da substância na extremidade que não foi resfriada é maior, menor ou permanece constante com relação ao nível inicial? Justifique com cálculos a sua resposta.
- Considere agora  $\alpha = 1,1$  (caso da água pura,  $H_2O$ ) e  $H_0 = 5$  cm. Na extremidade do tubo que foi resfriada, calcule a diferença entre os níveis da substância nas situações de equilíbrio final e inicial.

**10** A period of harmonic oscillation of a simple pendulum of a length  $l$  is given by  $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . The period of harmonic oscillation of a mass  $m$  on a spring with a spring constant  $k$  is given by  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ . Basing on a similarity of harmonic processes, find the period of harmonic oscillation of a liquid in a glass tube shown in Figure 1. The left section of the tube is vertical, the right bend makes an angle of  $30^\circ$  with the vertical and the cross-sectional area of the tube is everywhere same.

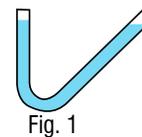


Fig. 1

RASCUNHO

RASCUNHO

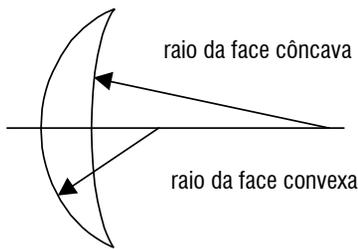
### 1. Definição

Qualquer meio homogêneo limitado por duas superfícies esféricas (ou uma esférica e outra plana).

### 2. Classificação

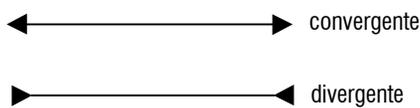
|                  | Bordo fino      | Bordo espesso   |
|------------------|-----------------|-----------------|
|                  | Biconvexa       | Bicôncava       |
|                  | Plano-convexa   | Plano-côncava   |
|                  | Côncavo-convexa | Convexo-côncava |
| $n_L > n_{meio}$ | Convergente     | Divergente      |
| $n_L < n_{meio}$ | Divergente      | Convergente     |

Obs.: A lente é chamada de côncavo-convexa quando o raio da face côncava é maior que o da face convexa.

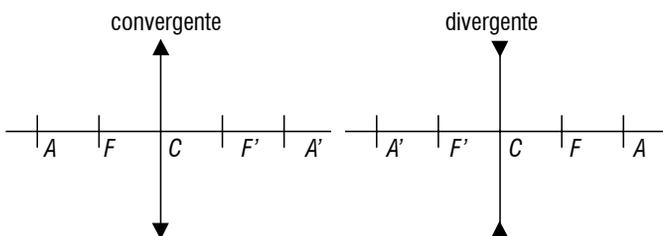


### 3. Lentes delgadas

Lentes esféricas cuja espessura é pequena comparada com os raios de curvatura:



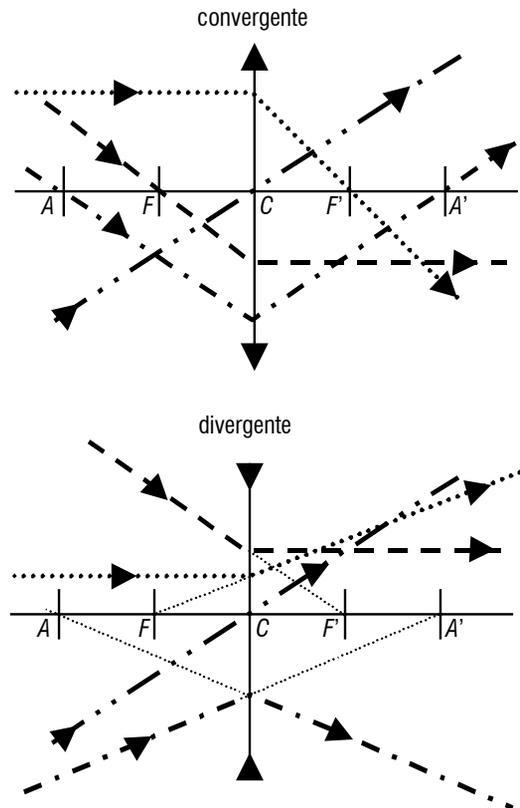
#### 3.1 Elementos



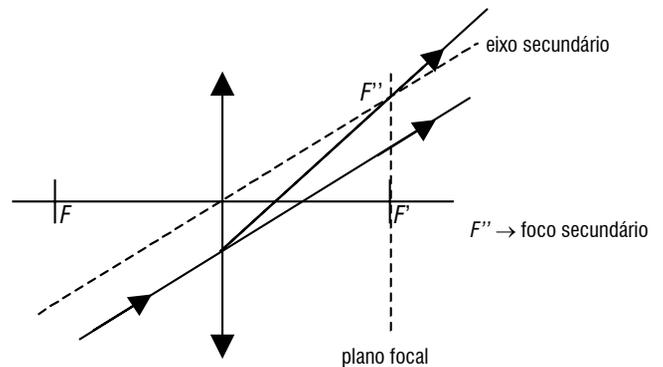
#### Nomenclatura:

- A → ponto antiprincipal objeto
- A' → ponto antiprincipal imagem
- F → foco objeto
- F' → foco imagem
- C → centro óptico
- $\overline{FC} = \overline{F'C} = f$  → distância focal

### 3.2 Raios particulares

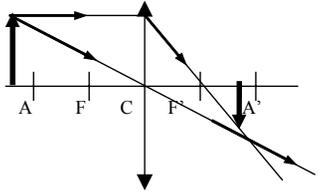


### 3.3 Eixo secundário e plano focal

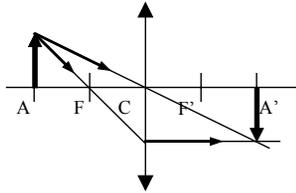


### 3.4 Construção e classificação de imagens

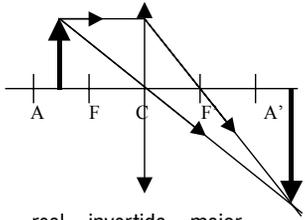
#### Lentes convergentes



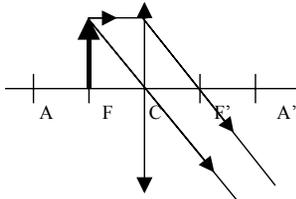
real – invertida – menor



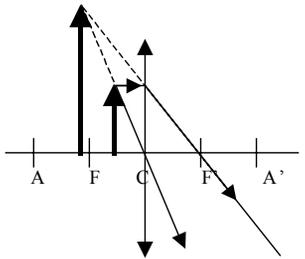
real – invertida – igual



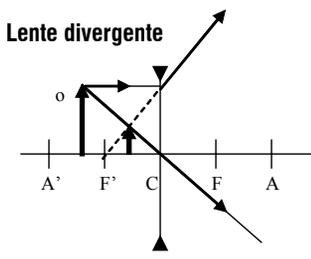
real – invertida – maior



imprópria

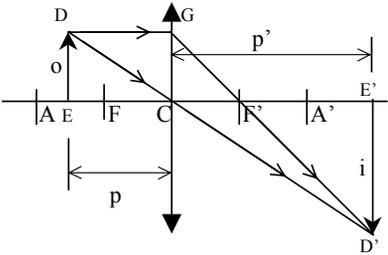


virtual – direita – maior



virtual – direita – menor

## 4. A matemática das lentes



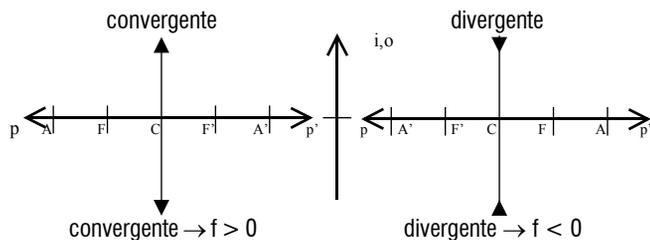
Equação dos pontos conjugados:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Aumento linear transversal:

$$A = \frac{i}{o} = \frac{-p'}{p}$$

### Referencial gaussiano

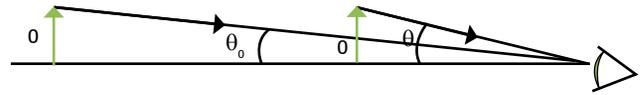


- Obs. 1:** Existe uma analogia entre lentes convergentes e espelhos côncavos e entre lentes divergentes e espelhos convexos (analise-as).
- Obs. 2:** Imagens projetadas em anteparos sempre são reais.
- Obs. 3:** Mantendo-se a distância entre o objeto e um anteparo e alterando-se a posição da lente, as abscissas do objeto e da imagem se permutam para obter uma imagem nítida (princípio da reversibilidade).

### 4.1 Aumento angular

Define-se por aumento angular (M) a razão entre as tangentes dos ângulos (pequenos)  $\theta$  e  $\theta_0$ :

$$M = \frac{tg\theta}{tg\theta_0} \cong \frac{\theta}{\theta_0}$$



### 4.2 Vergência da lente

Unidade SI de vergência: [di] = [m]<sup>-1</sup>; dioptrias

$$V = \frac{1}{f}$$

### 4.3 Equação de Halley ou dos “fabricantes de lentes”

$$\frac{1}{f} = \left( \frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Em que:

$\frac{n_2}{n_1} = n_{2,1} \rightarrow$  índice de refração da lente em relação ao meio externo.

$R_2$  e  $R_1 \rightarrow$  raios de curvatura das faces

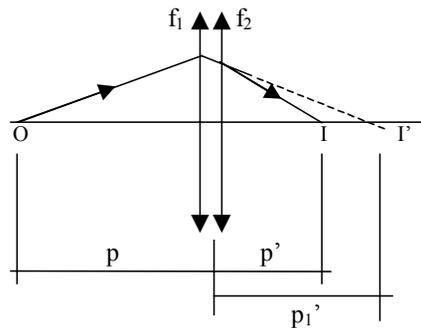
face convexa  $\rightarrow R > 0$

face côncava  $\rightarrow R < 0$

face plana  $\rightarrow R \rightarrow \infty$

### 4.4 Associação de lentes

A distância entre as lentes é curta.



$$V_{eq} = \sum_{i=1}^n V_i$$

$$(I) \quad \frac{1}{f_1} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p_1'}$$

A imagem real conjugada pela 1ª lente será um objeto virtual para a 2ª lente; isto significa que  $p_1' = -p_2$

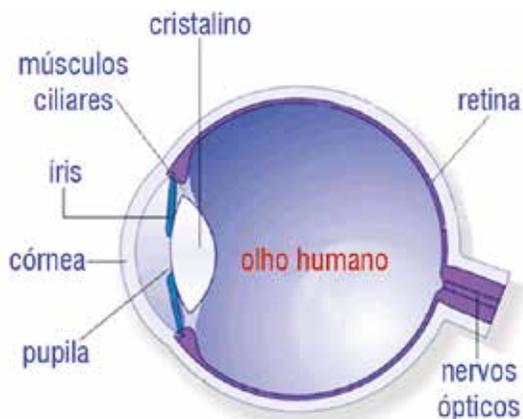
$$(II) \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{-p'_1} + \frac{1}{p'}$$

Somando as equações (I) e (II) teremos:

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'_1} + \frac{1}{-p'_1} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

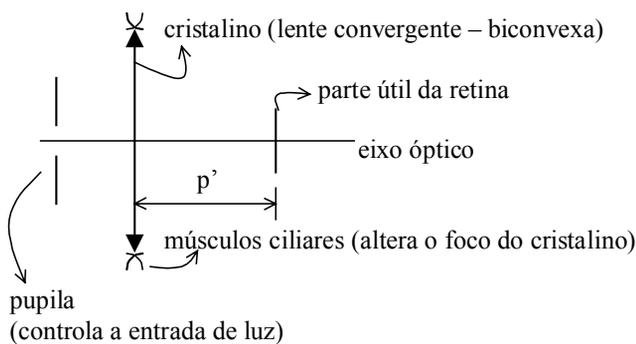
$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f_{eq}} = V_{eq}$$

## 5. Óptica da visão



(Disponível em: <<http://www.efeiotojoule.com>>.)

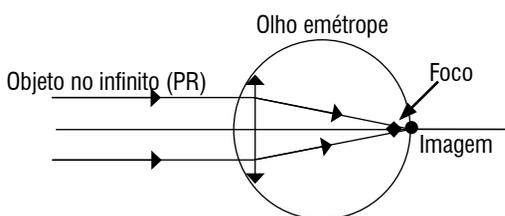
### Representação esquemática do olho



### Acomodação visual

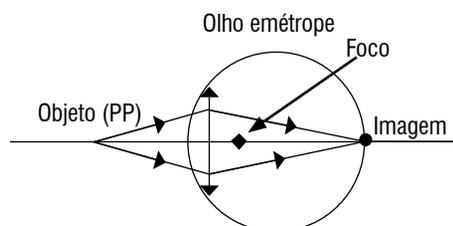
Processo de ajuste da distância do sistema óptico do globo ocular à visão nítida de objetos diferentemente afastados.

→ **Ponto remoto:** é o ponto objeto para o qual a vista conjuga imagem nítida sem nenhum esforço de acomodação. Os músculos ciliares encontram-se relaxados e o cristalino assume **máxima distância focal**.



**Obs.:** devemos interpretar que o objeto está muito longe quando dizemos que ele está no infinito. Porém para efeito de cálculo usamos  $p_{pto\ remoto} = \infty$ .

→ **Ponto próximo:** é o ponto objeto para o qual a vista conjuga imagem nítida com máximo esforço de acomodação. Os músculos ciliares encontram-se contraídos e o cristalino assume **mínima distância focal**.



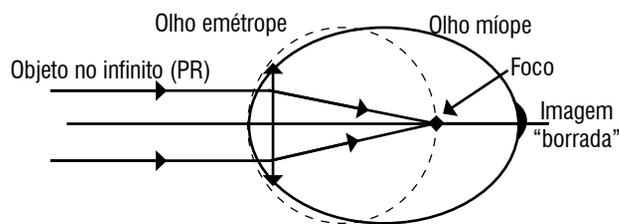
**Obs.:** Para efeito de cálculo usamos  $p_{pto\ próximo} = 25\text{ cm}$

### Correção de defeitos visuais

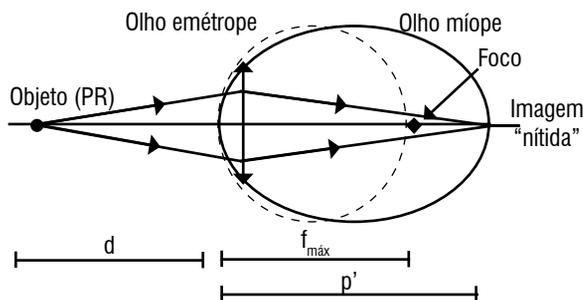


**Miopia** → Alongamento do globo ocular (dificuldade para longe).

O míope sem óculos, e portanto, não enxergando corretamente.

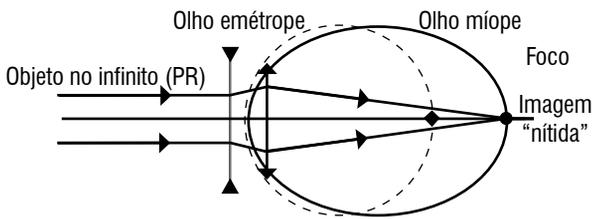


O míope sem óculos e enxergando seu ponto remoto (a maior distância que ele enxerga nitidamente)



Correção: lentes divergentes

O míope com óculos e enxergando seu ponto remoto no infinito



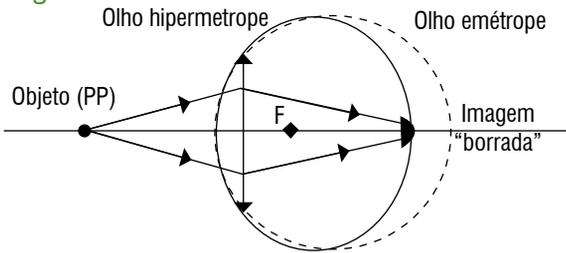
Sem óculos:  $\frac{1}{f_{\text{máx}}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{p'}$

Com óculos:  $\frac{1}{f_{\text{máx}}} + \frac{1}{f_{\text{lente}}} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{p'}$

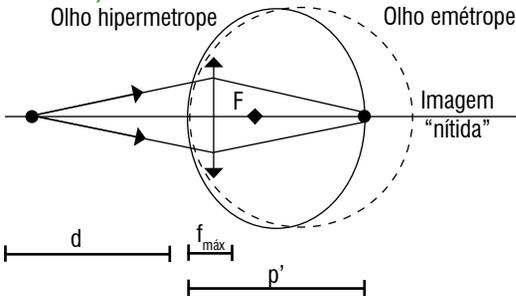
Subtraindo as duas equações:  $\frac{1}{f_{\text{lente}}} = V_{\text{lente}} = -\frac{1}{d}$

**Hipermetropia** → Encurtamento do globo ocular (dificuldade para perto).

O hipermetrope sem óculos e portanto não enxergando corretamente

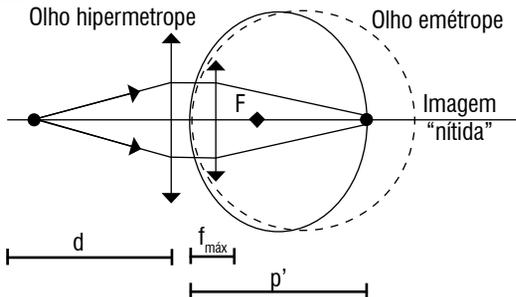


O hipermetrope sem óculos e enxergando seu ponto próximo (a menor distância que ele enxerga nitidamente)



Correção: lentes convergentes

O hipermetrope com óculos e enxergando seu ponto próximo



Sem óculos:  $\frac{1}{f_{\text{min}}} = \frac{1}{d_{\text{HIP}}} + \frac{1}{p'}$

Com óculos:  $\frac{1}{f_{\text{min}}} + \frac{1}{f_{\text{lente}}} = \frac{1}{p_{\text{pp}}} + \frac{1}{p'}$

Subtraindo as duas equações:  $\frac{1}{f_{\text{lente}}} = V_{\text{lente}} = \frac{1}{p_{\text{pp}}} - \frac{1}{d}$

**Presbiopia** → Enrijecimento do músculo ciliar (dificuldade para longe e perto).

Correção: lentes bifocais.

**Astigmatismo** → Assimetria do globo ocular.

Correção: lentes cilíndricas (plano-convexa ou plano-côncava).

**Estrabismo** → Incapacidade de dirigir simultaneamente os eixos oculares.

Correção: lentes prismáticas.

Obs.: Olho emétrepe: visão normal.

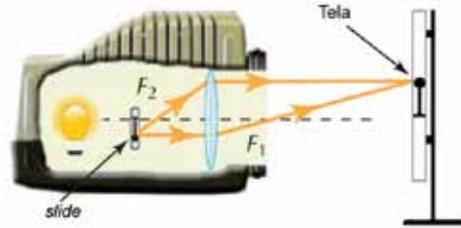
## 6. Instrumentos ópticos

Destinam-se a melhorar as condições de visão dos objetos. São de três tipos:

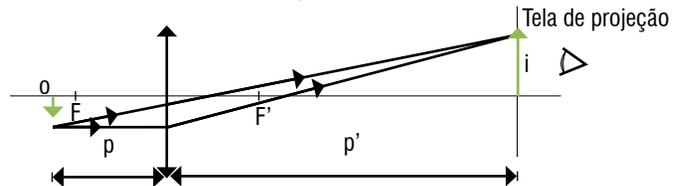
- Instrumentos de projeção: máquina fotográfica, projetor de slides;
- instrumentos de aumento: projetor, lupa, microscópio composto;
- instrumentos de aproximação: luneta, telescópio refrator e reflexor.

### 6.1 Projetor de slides

Uma lente convergente que produz uma imagem real, maior e invertida. Objeto entre o foco e ponto antiprincipal. Quanto mais próximo do foco, maior será a imagem projetada.



Esquema de funcionamento do mecanismo projetor de slides e da formação de imagens



Aumento linear transversal

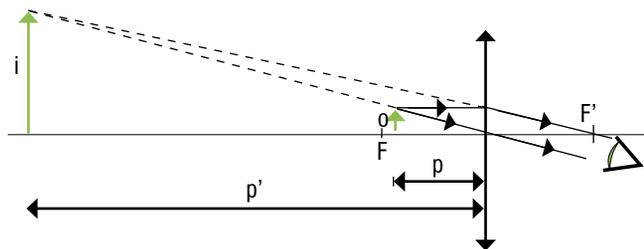
$$A = \frac{i}{o} = \frac{-p'}{p}$$

### 6.2 Lupa ou microscópio simples

Uma lente convergente que produz uma imagem virtual, maior e direita. O objeto deve estar entre o foco e o centro óptico. Quanto mais próximo do foco maior será a ampliação.

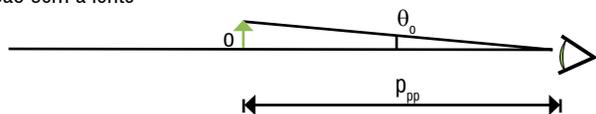


### Aumento linear transversal



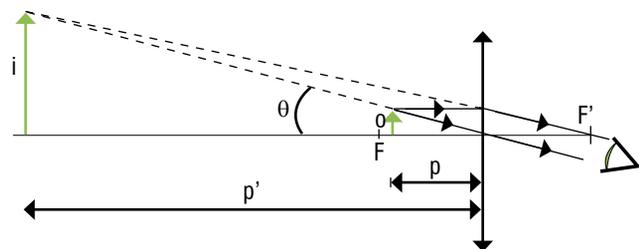
### Aumento angular

Visão sem a lente



$$tg\theta_0 = \frac{o}{p_{pp}}$$

Visão com a lente



$$tg\theta = \frac{o}{p}$$

Assim o aumento angular será:

$$M = \frac{tg\theta}{tg\theta_0} = \frac{\frac{o}{p}}{\frac{o}{p_{pp}}} = \frac{p_{pp}}{p}$$

**Obs.:** Para o cálculo do aumento angular em condição de "conforto" para o observador, normalmente utilizamos  $p_{pp} = 25$  cm (distância mínima de visão distinta) e desejamos enxergar com o olho relaxado, isto é,  $p' \cong \infty$  e  $p \cong f_{lupa}$ . Assim temos uma nova expressão para o aumento angular:

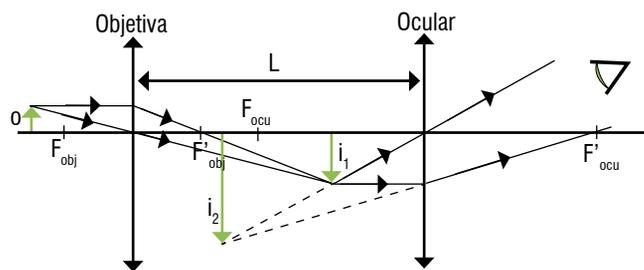
$$M = \frac{25}{f_{lupa}}$$

### 6.3 Microscópio composto

Duas lentes convergentes dispostas coaxialmente sendo a objetiva com distância focal da ordem de milímetros. O objeto deve ser posicionado depois do foco como mostra o esquema a seguir. A imagem final conjugada será invertida, virtual e maior.



Disponível em: <quimicacatecnica.blogspot.com>.



### Aumento linear transversal

$$\left. \begin{aligned} A_{obj} &= \frac{i_1}{o} \\ A_{ocu} &= \frac{i_2}{i_1} \end{aligned} \right\} A_{micro} = \frac{i_2}{o} \rightarrow A_{micro} = A_{obj} \times A_{ocu}$$

### Aumento angular

$$A_{obj} = \frac{i_1}{o} \text{ (podendo-se usar a aproximação } A_{obj} = \frac{L}{f_{obj}} \text{)}$$

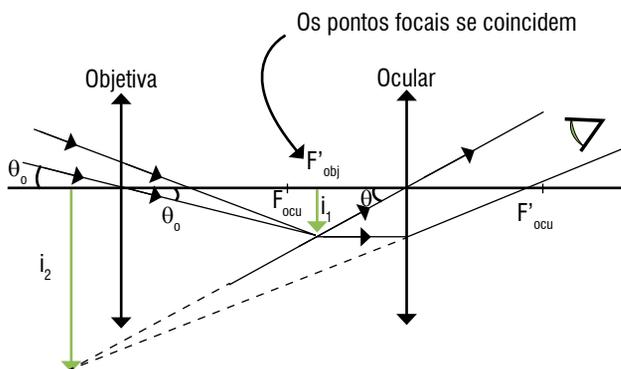
A lente ocular, como vemos, funciona como uma lupa, assim, nas condições de conforto podemos chegar a :

$$A_{ocu} = \frac{25}{f_{lupa}}$$

$$A_{micro} = \frac{L}{f_{obj}} \times \frac{25}{f_{lupa}}$$

### 6.4 Luneta astronômica ou telescópio de refração

Agora duas lentes convergentes dispostas coaxialmente sendo a objetiva, diferentemente do microscópio, com distância focal maior que a ocular. A imagem final conjugada será invertida, virtual e maior.



### Aumento angular

$$A_{tele} = \frac{tg\theta}{tg\theta_0} = \frac{\frac{i_1}{f_{ocu}}}{\frac{i_1}{f_{obj}}} = \frac{f_{obj}}{f_{ocu}}$$

### 6.5 Telescópio refletor



#### Galileu Galilei (1564-1642)

Físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano

Galileu Galilei desenvolveu os primeiros estudos sistemáticos do movimento uniformemente acelerado e do movimento do pêndulo. Descobriu a lei dos corpos e enunciou o princípio da inércia e o conceito de referencial inercial, ideias precursoras da mecânica newtoniana. Galileu melhorou significativamente o telescópio refrator e com ele descobriu as manchas solares, as montanhas da Lua, as fases de Vênus, quatro dos satélites de Júpiter, os anéis de Saturno, as estrelas da Via Láctea. Essas descobertas contribuíram decisivamente na defesa do heliocentrismo. Contudo, a principal contribuição de Galileu foi para o método científico, pois a ciência assentava numa metodologia aristotélica.

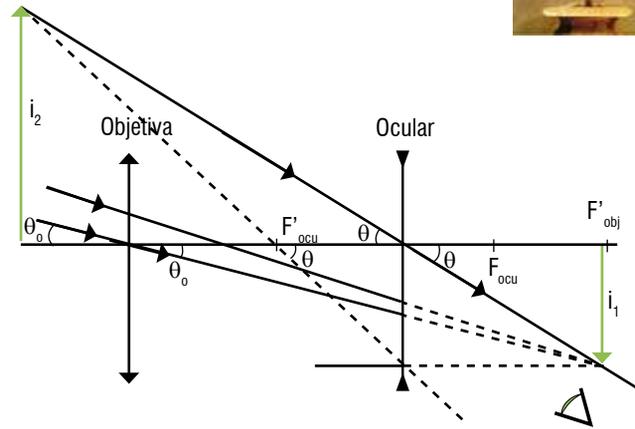


O físico desenvolveu ainda vários instrumentos como a balança hidrostática, um tipo de compasso geométrico que permitia medir ângulos e áreas, o termômetro de Galileu e o precursor do relógio de pêndulo. O método empírico, defendido por Galileu, constitui um corte com o método aristotélico, mais abstrato, utilizado nessa época. Devido a isso Galileu é considerado como o “pai da ciência moderna”

### 6.6 Luneta terrestre

A luneta terrestre é semelhante à astronômica, só que a imagem final obtida é direita. É constituída por uma objetiva convergente e uma ocular divergente.

A figura ao lado mostra a luneta terrestre construída por Galileu em 1609.



#### Aumento angular

$$A_{luneta} = \frac{tg\theta}{tg\theta_o} = \frac{i_1/f_{ocu}}{i_2/f_{obj}} = \frac{f_{obj}}{f_{ocu}}$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** O fato de uma lente ser convergente ou divergente depende:

- (A) apenas da forma da lente.
- (B) apenas do meio no qual ela se encontra.
- (C) do material de que é feita a lente e da forma da lente.
- (D) da forma da lente, do material de que é feita a lente e do meio no qual ela se encontra.
- (E) n.d.a.

**Solução:** Letra D.

As lentes, para serem classificadas como convergentes ou divergentes, devem atender às características ilustradas na tabela abaixo:

|               | $n_{lente} > n_{meio}$ | $n_{lente} < n_{meio}$ |
|---------------|------------------------|------------------------|
| Bordo fino    | convergente            | divergente             |
| Bordo espesso | divergente             | convergente            |

**02 (MACKENZIE)** Considerando uma lente biconvexa cujas faces possuem o mesmo raio de curvatura, podemos afirmar que:

- (A) o raio de curvatura das faces é sempre igual ao dobro da distância focal.

- (B) o raio de curvatura é sempre igual à metade do recíproco de sua vergência.
- (C) ela é sempre convergente, qualquer que seja o meio envolvente.
- (D) ela só é convergente se o índice de refração do meio envolvente for maior que o do material da lente.
- (E) ela só é convergente se o índice de refração do material da lente for maior que o do meio envolvente.

**Solução:** Letra E.

Use a tabela anterior e saiba que a lente biconvexa é de bordo fino.

**03 (ITA)** Um objeto tem altura  $h_o = 20$  cm e está localizado a uma distância  $d_o = 30$  cm de uma lente. Esse objeto produz uma imagem virtual de altura  $h_i = 4,0$  cm. A distância da imagem à lente, a distância focal e o tipo da lente são, respectivamente:

- (A) 6,0 cm; 7,5 cm; convergente.
- (B) 1,7 cm; 30 cm; divergente.
- (C) 6,0 cm; -7,5 cm; divergente.
- (D) 6,0 cm; 5,0 cm; divergente.
- (E) 1,7 cm; -5,0 cm; convergente.

**Solução:** Letra C.

Muito cuidado com este tipo de problema! Deve-se investigar o sinal dos dados do enunciado. Neste caso, quando o enunciado diz que a imagem tem 4 cm de altura, isto significa que  $i = \pm 4$ .

Como é dito que a imagem é virtual sabemos, então, que é também direita. Logo  $i = +4$ .

Aplicando a equação de ampliação, temos:

$$\frac{i}{o} = \frac{-p'}{p} \rightarrow \frac{4}{20} = \frac{-p'}{30} \rightarrow p' = -6\text{cm} \text{ (o sinal negativo para } p' \text{ confirma}$$

que a imagem é virtual).

Aplicando, agora, a equação dos pontos conjugados, temos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{30} + \frac{1}{-6} = \frac{-4}{30} \rightarrow f = -7,5\text{cm}$$

O foco negativo indica que a lente é divergente.

**04 (U.F. OURO PRETO)** Uma lente esférica de vidro, delgada, convexo-côncava, tem o raio da superfície côncava igual a 5,0 cm e o da convexa igual a 20 cm. Sendo o índice de refração do vidro, em relação ao ar,  $n = 1,5$ , para uma dada luz monocromática, a convergência dessa lente é igual a:

- (A) -15 di. (D) 7,5 di.  
 (B) -7,5 di. (E) 15 di.  
 (C) -0,075 di.

**Solução:** Letra B.

Utilizaremos para este problema a equação dos fabricantes de lentes:

$$V = \frac{1}{f} = \left( \frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{meio}}} - 1 \right) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Lembre-se que para efeito de cálculo de vergência a unidade do foco e dos raios deve ser expressa em metros!

Em que:

$$R_{\text{convexo}} = +20 \text{ cm} = +0,2 \text{ m}$$

$$R_{\text{côncavo}} = -5 \text{ cm} = -0,05 \text{ m}$$

$$\frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{meio}}} = 1,5$$

$$\text{Substituindo: } V = (1,5 - 1) \left( \frac{1}{+0,20} + \frac{1}{-0,05} \right) = 0,5 \cdot (5 - 20) = -7,5 \text{ di}$$

**05 (UFPA)** Dispõe-se de duas lentes delgadas convergentes de distância focal  $f_1$  e  $f_2$ . Justapondo-se as duas lentes, é possível obter um sistema de distância focal:

- (A) maior que  $f_1$  e  $f_2$ . (D) igual a  $f_1$ .  
 (B) menor que  $f_1$  e  $f_2$ . (E) igual a  $f_2$ .  
 (C) entre  $f_1$  e  $f_2$ .

**Solução:** Letra B.

Em uma associação de lentes, temos:

$$\frac{1}{f_{\text{eq}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{f_1 + f_2}{f_1 f_2} \rightarrow f_{\text{eq}} = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2}$$

$$\text{Se fizermos } \frac{f_{\text{eq}}}{f_1} = \frac{f_2}{f_1 + f_2} < 1 \rightarrow f_{\text{eq}} < f_1 \text{ ou } f_{\text{eq}} < f_2$$

**06 (PUC-SP)** O olho humano pode ser entendido como um sistema óptico composto basicamente por duas lentes – córnea (A) e cristalino (B).

Ambas devem ser transparentes e possuir superfícies lisas e regulares para permitirem a formação de imagens nítidas. Podemos classificar as lentes naturais de nossos olhos, A e B, respectivamente, como sendo:

- (A) convergente e convergente.  
 (B) convergente e divergente.  
 (C) divergente e divergente.  
 (D) divergente e convergente.  
 (E) divergente e plana.

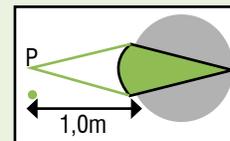


**Solução:** Letra A.

Tanto a córnea (foco fixo) como o cristalino (foco variável) são lentes do tipo biconvexas (bordo fino). Como elas são mais refringentes que o meio que as envolve, são classificadas como convergentes.

**07 (UNITAU)** A figura mostra a formação de imagem, em um olho, de um ponto P distante 1,0 m dele. (A figura não está em escala). O cristalino, nessa situação, está abaulado ao máximo. Considerando que na visão normal enxerga-se com nitidez desde 20 cm de distância até o infinito, que lente deve ser usada para corrigir a visão desse olho, se for o caso?

- (A) Uma lente divergente de -1,0 di (dioptria).  
 (B) Uma lente divergente de -2,0 di.  
 (C) Uma lente convergente de 1,0 di.  
 (D) Uma lente convergente de 4,0 di.  
 (E) Não é preciso lente; o olho é emétrope.



**Solução:** Letra D.

Quando o cristalino está abaulado ao máximo, isto significa que o músculo ciliar está também com seu máximo esforço. O ponto P trata-se de um ponto próximo (dificuldade de visão para perto).

$$\text{A equação de visão sem lente corretiva é: } \frac{1}{f_{\text{olho}}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{p'}$$

$$\text{Com a lente corretiva, temos: } \frac{1}{f_{\text{olho}}} + V_{\text{lente}} = \frac{1}{0,2} + \frac{1}{p'}$$

$$\text{Subtraindo as duas equações, temos: } V_{\text{lente}} = \frac{1}{0,2} - \frac{1}{1} = 4 \text{ di}$$

**08** Um míope enxerga, perfeitamente, objetos compreendidos entre 15 cm e 50 cm. Para enxergar objetos mais afastados, deverá usar lentes com distância focal (em módulo) de:

- (A) 5,0 cm.  
 (B) 25 cm.  
 (C) 50 cm.  
 (D) 1,0 m.  
 (E) 2,0 m.

**Solução:** Letra C.

O problema do míope é para longe. O ponto remoto deve ser corrigido de  $p = 50 \text{ cm}$  para  $p = \infty$

$$\text{A equação de visão sem lente corretiva é: } \frac{1}{f_{\text{olho}}} = \frac{1}{50} + \frac{1}{p'}$$

$$\text{Com a lente corretiva, temos: } \frac{1}{f_{\text{olho}}} + \frac{1}{f_{\text{lente}}} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{p'}$$

$$\text{Subtraindo as duas equações, temos: } \frac{1}{f_{\text{lente}}} = 0 - \frac{1}{50} \rightarrow f_{\text{lente}} = -50 \text{ cm}$$

**09 (UFF)** Uma lente convergente de pequena distância focal pode ser usada como lupa, ou lente de aumento, auxiliando, por exemplo, pessoas com deficiências visuais a lerem textos impressos em caracteres pequenos. Supondo que o objeto esteja à esquerda da lente, é correto afirmar que, para produzir uma imagem maior que o objeto, este deve ser:

- colocado sobre o foco e a imagem será real;
- posicionado entre a lente e o foco e a imagem será real;
- posicionado num ponto à esquerda muito afastado da lente e a imagem será virtual;
- posicionado num ponto à esquerda do foco, mas próximo deste, e a imagem será virtual;
- posicionado entre a lente e o foco e a imagem será virtual

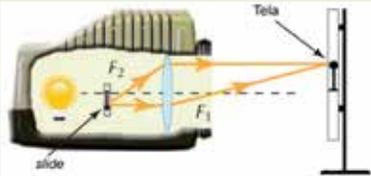
**Solução:** Letra E.

Trata-se de um instrumento óptico simples, a lupa. O objeto é sempre posicionado entre o foco e o centro óptico da lente. A imagem conjugada é virtual, direita e maior.

**10** Em um projetor de *slides* no qual a posição de um diapositivo é de 100 mm deseja-se obter uma imagem 20 vezes maior. Para isso dispomos de quatro lentes –  $L_1, L_2, L_3$  e  $L_4$  – que podem ser utilizadas individualmente ou em conjunto. As suas distâncias focais são respectivamente 10 m, 20 m, 50 m e 200 m. Escolha a forma correta de uso das lentes no projetor.

**Solução:**

Sabemos que a imagem de um projetor de *slides* é invertida como mostra a figura abaixo:



Aplicando a equação de ampliação temos:

$$\frac{i}{o} = \frac{-p'}{p} \rightarrow \frac{-20o}{o} = \frac{-p'}{100} \rightarrow p' = +2000mm \text{ (o sinal positivo para } p' \text{ confirma que a imagem é real)}$$

Aplicando agora a equação dos pontos conjugados para calcular a vergência necessária, temos:

$$V = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \rightarrow V = \frac{1}{10} + \frac{1}{200} = \frac{21}{200} \rightarrow V = 0,105di$$

Verificando as vergências das lentes disponíveis, poderemos tomar a decisão de escolha:

$$L_1 : V_1 = \frac{1}{f_1} \rightarrow V_1 = \frac{1}{10} = 0,1di$$

$$L_2 : V_2 = \frac{1}{f_2} \rightarrow V_2 = \frac{1}{20} = 0,05di$$

$$L_3 : V_3 = \frac{1}{f_3} \rightarrow V_3 = \frac{1}{50} = 0,02di$$

$$L_4 : V_4 = \frac{1}{f_4} \rightarrow V_4 = \frac{1}{200} = 0,005di$$

Vemos claramente que devemos utilizar as lentes  $L_1$  e  $L_2$  em associação (justapostas) para atingir a vergência necessária.

**11** Um pesquisador emétrepe utilizará um microscópio composto para suas experiências. Determine as possíveis ampliações de um microscópio cujo canhão mede 240 mm e possui as seguintes opções de objetivas e oculares:

| Objetiva | Ocular |
|----------|--------|
| 20 mm    | 100 mm |
| 10 mm    | 50 mm  |
| 5 mm     |        |

Dado: Ponto próximo de olho emétrepe: 25 cm.

**Solução:**

Utilizaremos a fórmula da ampliação de microscópio composto (demonstrada anteriormente) assumindo que:

$$A_{micro} = \frac{L}{f_{obj}} \times \frac{25}{f_{lupa}} = \frac{240mm}{f_{obj}} \times \frac{25cm}{f_{lupa}}$$

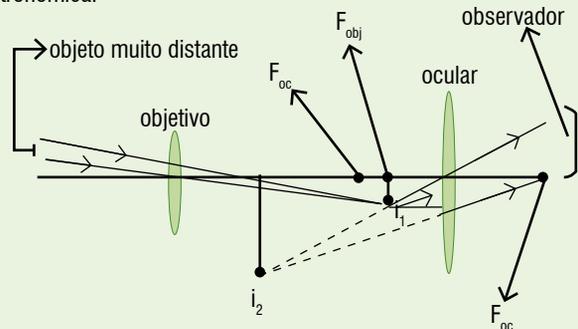
Atenção para as unidades!!! O resultado deve ser adimensional. Assim, as unidades dos numeradores devem ser iguais às dos denominadores.

Da forma como está acima, a distância focal da objetiva deve ser utilizada em mm e a da ocular, em cm.

A tabela abaixo dará todas as possibilidades de aumento para este microscópio.

| Objetiva | Ocular | Ampliação  |
|----------|--------|--|
| 20 mm    | 12 cm  | $A_{micro} = \frac{240 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} \times \frac{25 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 25$ |
| 10 mm    |        | $A_{micro} = \frac{240 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} \times \frac{25 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 50$ |
| 5 mm     |        | $A_{micro} = \frac{240 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} \times \frac{25 \text{ cm}}{12 \text{ cm}} = 100$ |
| 20 mm    | 4 cm   | $A_{micro} = \frac{240 \text{ mm}}{20 \text{ mm}} \times \frac{25 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 75$  |
| 10 mm    |        | $A_{micro} = \frac{240 \text{ mm}}{10 \text{ mm}} \times \frac{25 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 150$ |
| 5 mm     |        | $A_{micro} = \frac{240 \text{ mm}}{5 \text{ mm}} \times \frac{25 \text{ cm}}{4 \text{ cm}} = 300$  |

**12** O esquema a seguir mostra a formação da imagem em uma luneta astronômica.



Em uma certa luneta, as distâncias focais da objetiva e da ocular são de 60 cm e 30 cm, respectivamente, e a distância entre elas é de 80 cm. Determine, nessa luneta, a distância entre a imagem final formada de um astro distante e a ocular.

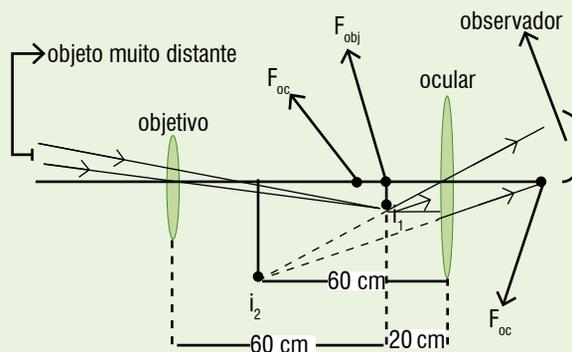
**Solução:**

Como o objeto está distante, sua imagem converge para o foco da objetiva e assim  $p' = 60$  cm (distância da objetiva até  $i_1$ )

Para a ocular  $p = 80 - 60 = 20$  cm

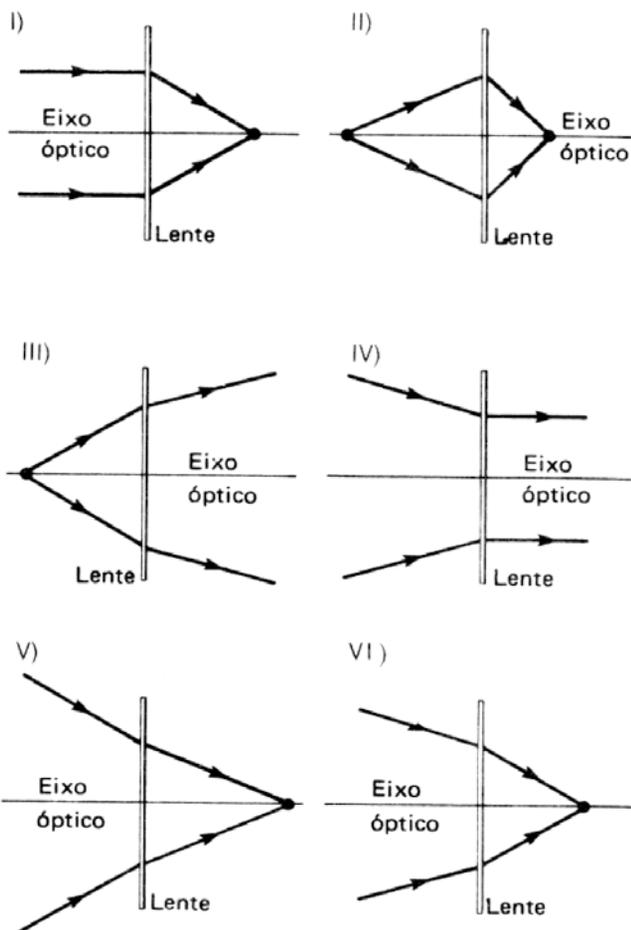
$$\text{Dai temos: } \frac{1}{f_{ocu}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \rightarrow \frac{1}{30} = \frac{1}{20} + \frac{1}{p'}$$

$p' = -60$  cm (a nova imagem  $i_2$  é virtual e está a 60 cm da ocular)



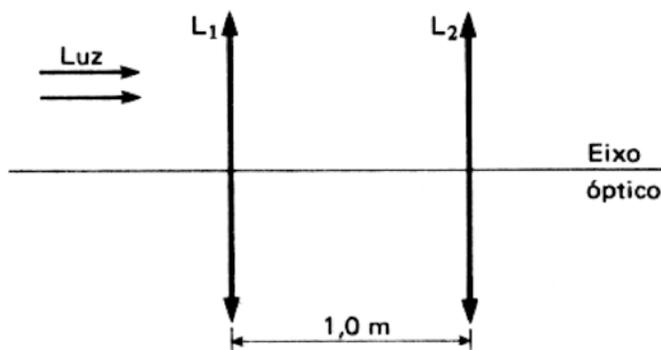
**EXERCÍCIOS NÍVEL 1**

**01 (UFRGS)** As figuras seguintes representam a refração da luz através de seis lentes esféricas delgadas:



Que lentes apresentam comportamento convergente?

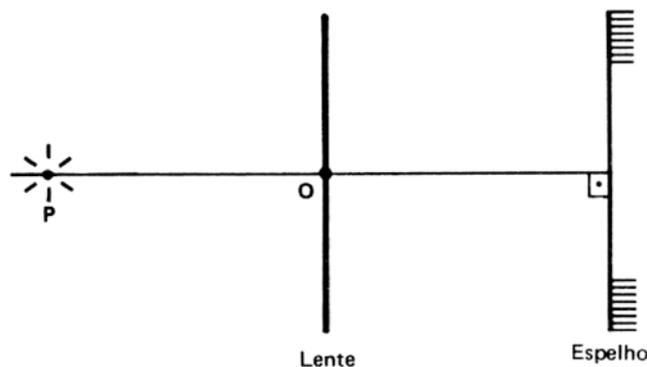
**02 (UFRGS)** Duas lentes convergentes  $L_1$  e  $L_2$  são associadas coaxialmente, conforme mostra o esquema a seguir:



Fazendo-se incidir sobre  $L_1$  um pincel cilíndrico de luz monocromática de 5 cm de diâmetro e de eixo coincidente com o eixo óptico do sistema, observa-se que de  $L_2$  emerge um pincel luminoso também cilíndrico e de eixo coincidente com o eixo óptico do sistema, porém de 20 cm de diâmetro. Determine:

- o trajeto dos raios luminosos, ao atravessarem o sistema.
- as distâncias focais de  $L_1$  e de  $L_2$ .

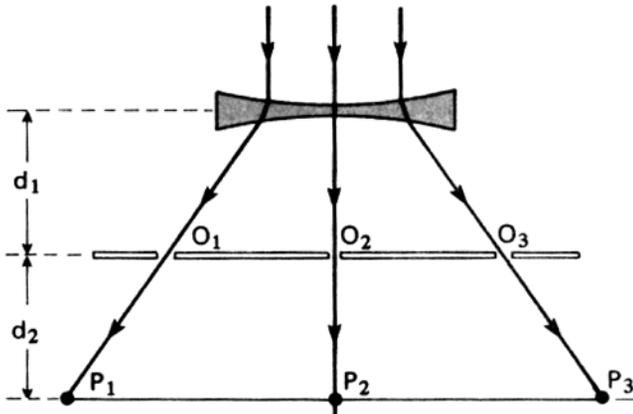
**03 (UFRGS)** O arranjo experimental da figura é composto por uma lente biconvexa de vidro e um espelho plano. A montagem é feita no interior de uma sala de aula pelo professor de óptica, que dispõe o espelho perpendicularmente ao eixo principal da lente.



De um ponto  $P$ , situado sobre o eixo principal e distante 30 cm do centro óptico da lente, provém luz que se refrata através da lente, incide no espelho, reflete-se e volta a atravessar a lente, convergindo novamente para o ponto  $P$ , independentemente da distância entre a lente e o espelho.

- Classifique a lente como convergente ou divergente.
- Obtenha o valor absoluto de sua distância focal.

**04 (UFRGS)** A figura abaixo ilustra uma experiência realizada com o fim de determinar a distância focal de uma lente divergente. Um feixe de raios paralelos incide sobre a lente. Três deles, após atravessarem essa lente, passam pelos orifícios  $O_1$ ,  $O_2$  e  $O_3$  existentes em um anteparo fosco à sua frente, indo encontrar um segundo anteparo nos pontos  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$ .

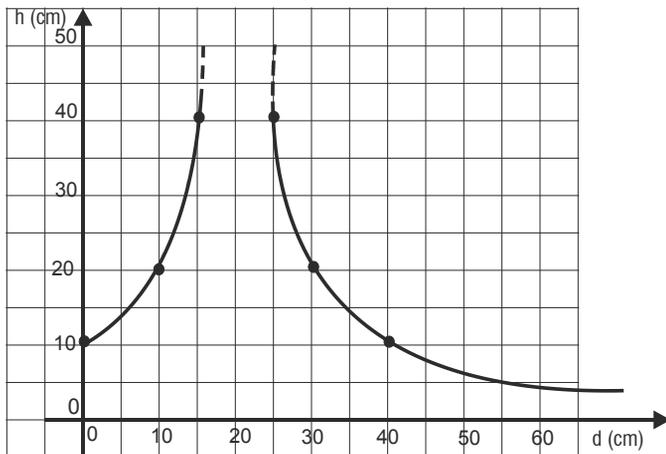


Dados:  $\overline{O_1O_3} = 4,0 \text{ cm}$ ;  $\overline{P_1P_3} = 6,0 \text{ cm}$ ;  $d_1 = 15,0 \text{ cm}$ ,  $d_2 = 15,0 \text{ cm}$ .

Quanto vale, em centímetros, o módulo da distância focal da lente em questão?

**05 (UNIFEI)** Uma pequena lâmpada é colocada a 1,0 m de distância de uma parede. Determine a distância a partir da parede em que deve ser colocada uma lente de distância focal de 22,0 cm para produzir na parede uma imagem nítida e ampliada da lâmpada.

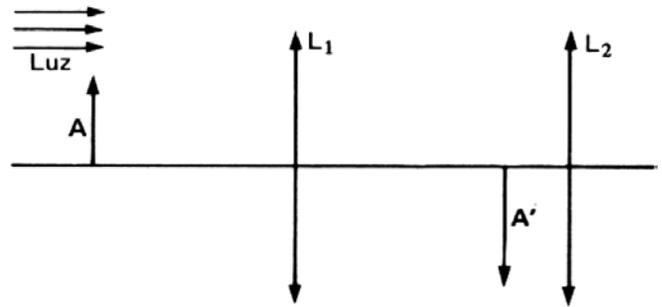
**06 (UNIFEI)** Uma lente delgada conjuga uma imagem de altura  $h$  a um objeto (segmento de reta que intercepta perpendicularmente o eixo óptico principal da lente). No gráfico abaixo, o valor absoluto de  $h$  está representado em função da distância  $d$  entre o objeto e a lente:



Qual a vergência da lente?

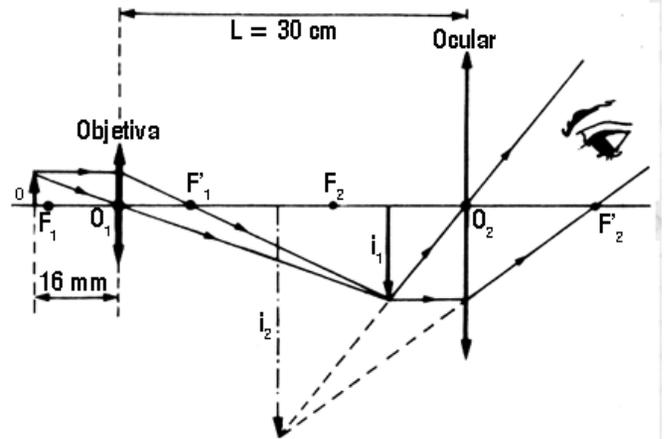
**07 (UNIFEI)** Um estudante construiu uma caixa retangular provida de uma lente biconvexa de distância focal  $f = 50,0 \text{ mm}$  e pretende usá-la como máquina fotográfica. A distância entre a lente e a parte posterior da caixa onde será registrada a imagem pelo filme é de 120 mm. A que distância à frente da lente deve se localizar um objeto para que sua foto fique perfeitamente focalizada?

**08 (UFRJ)** Um objeto  $A$  está situado a 5 cm de uma lente convergente  $L_1$ , cuja distância focal é de 4 cm. Uma segunda lente convergente, idêntica à anterior, é colocada a 2 cm de distância da imagem  $A'$ . A figura ilustra a situação descrita:



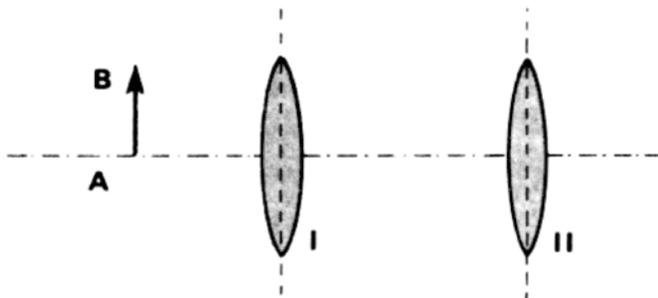
- A que distância de  $L_1$  encontra-se  $L_2$ ?
- Qual a amplificação do sistema  $L_1, L_2$ ?

**09 (UFRJ)** A figura a seguir representa esquematicamente um microscópio óptico constituído por dois sistemas convergentes de lentes, dispostos coaxialmente: um é a objetiva, com distância focal de 15 mm, e o outro é a ocular, com distância focal de 9,0 cm.



Sabendo que para o objeto  $o$  o microscópio fornece a imagem final  $i_2$ , calcule o módulo do aumento linear transversal fornecido pelo instrumento.

**10 (UFRJ)** Um sistema óptico é formado por duas lentes positivas, I e II, de distâncias focais iguais a 10 cm e 15 cm, com eixos ópticos coincidentes e separadas por 60 cm. Determine a localização da imagem final de um objeto  $AB$  colocado a 20 cm da lente I e a ampliação total do sistema.



**11 (UFRJ)** Uma pessoa lê na receita para seus óculos o seguinte: “lentes de cristal com  $-0,5$  dioptrias”. Relembrando os conceitos de óptica aplicada, ela conclui que é míope, e a distância focal de suas lentes é de:

- (A) 2,0 m.
- (B) 3,0 m.
- (C) 5,0 m.
- (D) 0,5 m.
- (E) 1,0 m.

**12 (UERJ)** Uma pessoa míope não enxerga nitidamente objetos colocados a distâncias maiores que 40 cm de seus olhos. O valor absoluto da convergência de suas lentes corretoras em dioptrias é igual a:

- (A) 1,5.
- (B) 2,5.
- (C) 3,5.
- (D) 4,5.

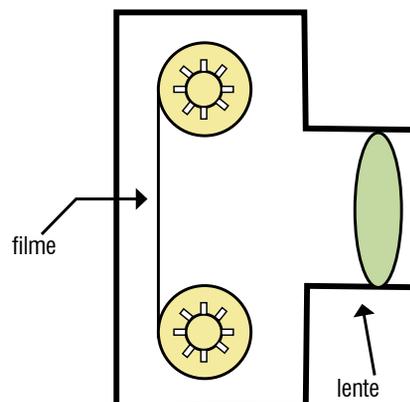
**13 (MED JUNDIAÍ-SP)** Os aparelhos que produzem imagens reais invertidas são:

- (A) luneta astronômica, lupa e câmera fotográfica.
- (B) projetor de slides, câmera fotográfica e olho humano.
- (C) câmera fotográfica, olho humano e luneta terrestre.
- (D) lupa, olho humano e microscópio composto.
- (E) câmera fotográfica, luneta terrestre e microscópio composto.

**14 (UNESP)** Assinale a alternativa correspondente ao instrumento óptico que, nas condições normais de uso, fornece imagem virtual:

- (A) Projetor de slides.
- (B) Projetor de cinema.
- (C) Cristalino do olho humano.
- (D) Câmera fotográfica.
- (E) Lente de aumento (lupa).

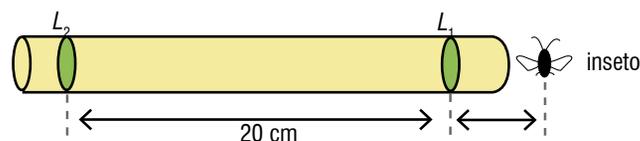
**15 (UNESP)** Uma câmera fotográfica rudimentar utiliza uma lente convergente de distância focal  $f = 50$  mm para focalizar e projetar a imagem de um objeto sobre o filme. A distância da lente ao filme é  $p' = 52$  mm. A figura mostra o esboço dessa câmera.



Para se obter uma boa foto, é necessário que a imagem do objeto seja formada exatamente sobre o filme, e o seu tamanho não deve exceder a área sensível do filme. Assim:

- a. Calcule a posição que o objeto deve ficar em relação à lente.
- b. Sabendo-se que a altura máxima da imagem não pode exceder a 36,0 mm, determine a altura máxima do objeto para que ele seja fotografado em toda a sua extensão.

**16 (UFF-RJ)** A figura mostra um microscópio artesanal construído por um tubo de plástico PVC e duas lentes convergentes.



As lentes  $L_1$  e  $L_2$  distam 20 cm uma da outra e têm distâncias focais  $f_1 = 3,0$  cm e  $f_2 = 10,0$  cm, respectivamente. Um inseto, colocado a 4,0 cm da lente  $L_1$ , é observado com esse microscópio. Nessa situação, o observador vê o inseto com tamanho  $N$  vezes maior, sendo  $N$  igual a:

- (A) 3.
- (B) 5.
- (C) 8.
- (D) 12.
- (E) 15.

**17 (PUC-MG)** Com relação à luneta astronômica, é correto afirmar que:

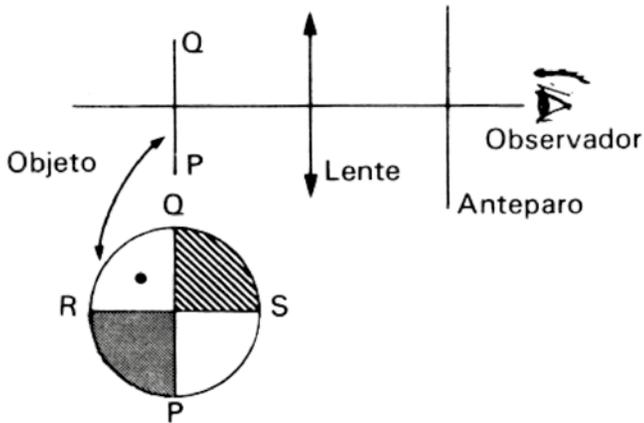
- (A) ambas as lentes são convergentes.
- (B) a ocular tem grande distância focal.
- (C) a imagem final é direita.
- (D) a objetiva é convergente e a ocular, divergente.
- (E) apenas a ocular é convergente.

**18 (UEM)** Os instrumentos ópticos podem ordinariamente ser classificados como instrumentos de observação ou de projeção. Com relação aos instrumentos ópticos e suas imagens conjugadas, assinale V (verdadeiro) ou F (falso).

- ( ) A lupa, ou microscópio simples, conjuga uma imagem real, direita e maior.
- ( ) Em um microscópio composto, a objetiva conjuga uma imagem real, invertida e maior.
- ( ) Em uma luneta astronômica refratora, a ocular conjuga uma imagem final virtual, direita e ampliada.
- ( ) Em um projetor, o conjunto de lentes projetoras conjuga uma imagem real, invertida e maior.
- ( ) Uma máquina fotográfica simplificada, como uma câmera escura, conjuga uma imagem real, invertida e maior.

**EXERCÍCIOS NÍVEL 2**

**01 (ITA)** Em uma experiência de óptica, você observa a imagem de um objeto formada por uma lente sobre um anteparo de vidro fosco. As posições relativas do objeto, da lente, do anteparo e do observador são mostradas na figura a seguir:

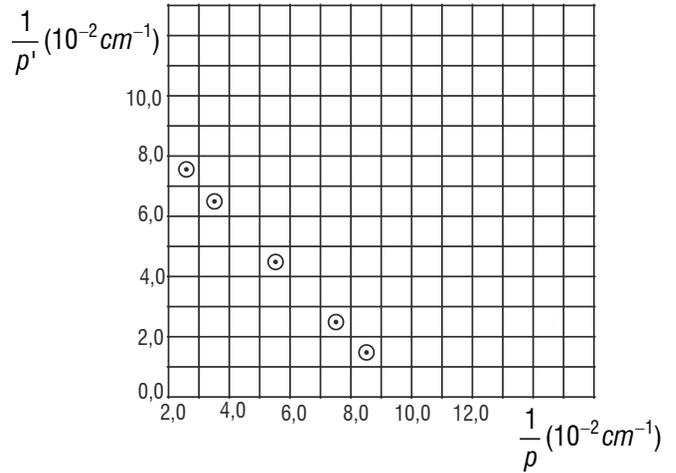


Essa figura representa também o objeto: é um disco dividido em quatro quadrantes, cada um caracterizado por um símbolo diferente. O centro do disco está sobre o eixo óptico da lente e o diâmetro  $PQ$  é vertical, com  $P$  embaixo e  $Q$  em cima. O diâmetro  $RS$  é horizontal, com  $R$  à esquerda e  $S$  à direita do observador:

A imagem observada é:

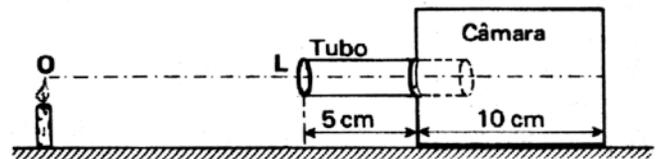
- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)

**02 (ITA)** Em uma certa experiência mediram-se a distância  $p$  entre um objeto e uma lente e a distância  $p'$  entre a lente e a sua imagem real, em vários pontos. O resultado dessas medições é apresentado no gráfico abaixo:



Examinando cuidadosamente o gráfico, determine a distância focal da lente.

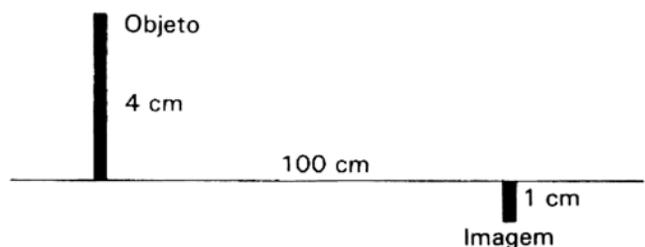
**03 (UNICAMP)** A figura ilustra um dispositivo que contém uma lente convergente ( $L$ ), de distância focal igual a 10 cm. Na extremidade do dispositivo está alojado um tubo, que pode mover-se para dentro ou para fora de uma câmara. Ao se formar uma imagem nítida no fundo da câmara, o objeto luminoso ( $O$ ) encontra-se a 60 cm da lente.



Para isso, foi necessário:

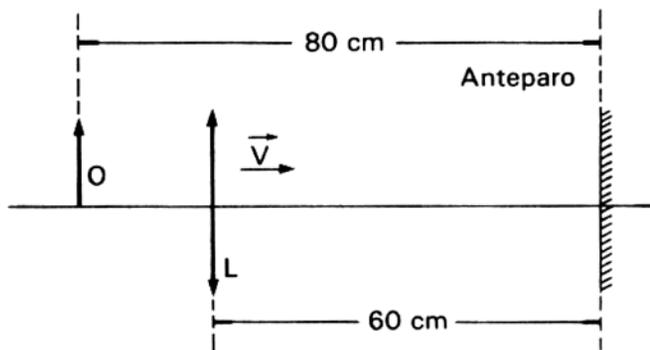
- (A) aprofundar o tubo 4 cm.
- (B) aprofundar o tubo 3 cm.
- (C) aprofundar o tubo 5 cm.
- (D) movimentar o tubo 1 cm para fora.
- (E) n.d.a.

**04 (UNICAMP)** Um sistema de lentes produz a imagem real de um objeto, conforme a figura. Calcule a distância focal e localize a posição de uma lente delgada que produza o mesmo efeito.



**05 (UNICAMP)** É feita uma montagem, conforme o esquema abaixo, que representa um objeto fixo  $O$ , um anteparo fixo e uma lente delgada  $L$  em movimento de velocidade  $V$ , cujo valor é  $2,0 \text{ cm/s}$ . A posição da lente, no esquema abaixo, corresponde ao instante  $t_0 = 0$ . A distância focal da lente  $L$  vale  $20 \text{ cm}$ .

Nessas condições, tem-se no anteparo uma imagem nítida do objeto  $O$  no instante  $t$ , em segundos, igual a:

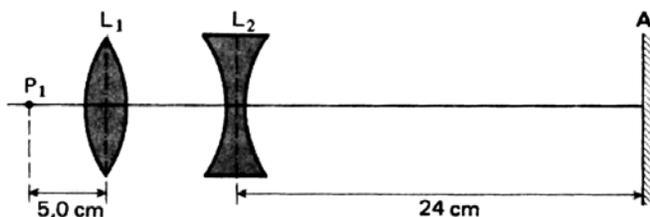


- (A) 2,0.  
 (B) 5,0.  
 (C) 10,0.  
 (D) 15,0.  
 (E) 20,0.

**06 (UNICAMP)** Um estudante possui uma lente côncavo-convexa de vidro ( $n_v = \frac{3}{2}$ ), cujas faces têm raios de curvatura  $10 \text{ cm}$  e  $5,0 \text{ cm}$ . Sabendo que a lente é utilizada no ar ( $n_{ar} = 1$ ) e posteriormente na água ( $n_A = \frac{4}{3}$ ), responda:

- a. Do ar para a água, os focos principais aproximam-se ou afastam-se do centro óptico?  
 b. Qual é a variação da distância focal da lente?

**07 (UNICAMP)** Considere um sistema composto por duas lentes circulares esféricas delgadas de  $6,0 \text{ cm}$  de diâmetro, dispostas coaxialmente, como indica a figura abaixo.  $L_1$  é uma lente convergente de distância focal  $f_1 = 5,0 \text{ cm}$  e  $L_2$  é uma lente divergente de distância focal  $f_2 = 4,0 \text{ cm}$ . No ponto  $P_1$ , à esquerda do sistema, é colocado um objeto luminoso puntiforme a  $5,0 \text{ cm}$  de  $L_1$ . À direita de  $L_2$ , a uma distância  $d = 24 \text{ cm}$ , é colocado um anteparo  $A$ , perpendicular ao eixo do sistema.

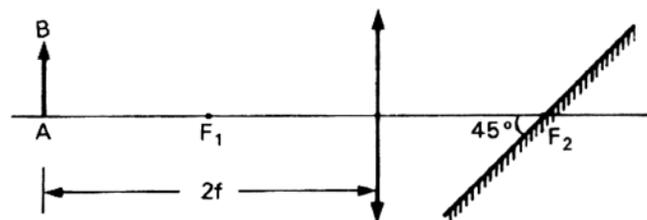


Assim, temos que:

- (A) sobre o anteparo  $A$  forma-se uma imagem real puntiforme de  $P_1$ .  
 (B) sobre o anteparo  $A$  aparece uma região iluminada circular de diâmetro igual a  $12 \text{ cm}$ .

- (C) sobre o anteparo aparece uma região iluminada circular de diâmetro igual a  $6,0 \text{ cm}$ .  
 (D) o anteparo fica iluminado uniformemente em uma região muito grande.  
 (E) sobre o anteparo aparece uma região iluminada circular de diâmetro igual a  $42 \text{ cm}$ .

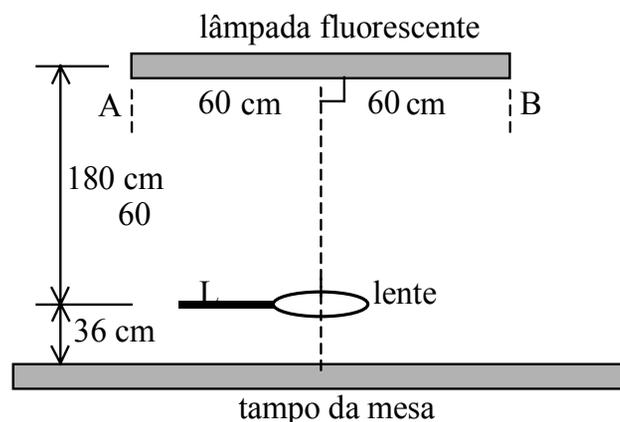
**08 (UNICAMP)** Um sistema óptico esboçado na figura abaixo consiste em uma lente convergente de distância focal  $f$  e em um espelho plano que contém o foco  $F_2$  da lente. Um pequeno objeto  $AB$  encontra-se a uma distância  $2f$  da lente, como indica a figura. Os raios luminosos provenientes de  $AB$  e refletidos pelo espelho não atingem a lente novamente. Refaça a figura e construa a imagem de  $AB$  produzida pelo sistema óptico.



**09 (UNIFOR)** Um projetor de slides encontra-se a  $4,1 \text{ m}$  da tela de projeção. Um slide de  $35 \text{ mm}$  de altura tem sua imagem projetada na tela com  $1,4 \text{ m}$  de altura. Qual a distância focal da lente do instrumento?

**10 (UNIFOR)** Um estudante de Física dispõe de uma lente biconvexa de índice de refração  $n = 1,6$  e faces de raios de curvatura iguais a  $10 \text{ cm}$ . Com essa lente o mesmo deseja construir um projetor de diapositivos de forma que a película fique a  $10 \text{ cm}$  dela. Adote  $n_{ar} = 1,0$ . A que distância da lente deve ser projetada a imagem da película?

**11 (FUVEST)** Uma lente  $L$  é colocada sob uma lâmpada fluorescente  $AB$  cujo comprimento é de  $120 \text{ cm}$ . A imagem é focalizada na superfície de uma mesa a  $36 \text{ cm}$  da lente. A lente situa-se a  $180 \text{ cm}$  da lâmpada e o seu eixo principal é perpendicular à face cilíndrica da lâmpada e à superfície plana da mesa. A figura a seguir ilustra a situação. Pede-se:



- a. a distância focal da lente.  
 b. o comprimento da imagem da lâmpada e a sua representação geométrica. Utilize os símbolos  $A'$  e  $B'$  para indicar as extremidades da imagem da lâmpada.

**12 (UNIFESP)** Uma lente delgada biconvexa tem raios de curvatura iguais. Essa lente, quando imersa no ar (índice de refração igual a 1), tem 6 di e, quando imersa na água (índice de refração igual a  $4/3$ ), tem 2 di. Nessas condições podemos afirmar que os raios das superfícies dióptricas que constituem essa lente são de:

- (A) 100 cm. (D) 10 cm.  
 (B) 50 cm. (E) 5 cm.  
 (C) 20 cm.

**13 (ITA)** Um dos telescópios utilizados por Galileu era composto de duas lentes: a objetiva, de 16 mm de diâmetro e distância focal de 960 mm, e a ocular, formada por uma lente divergente. O aumento era de 20 vezes. Podemos afirmar que a distância focal da ocular e a imagem eram, respectivamente:

- (A) 192 mm, direita.  
 (B) 8 mm, direita.  
 (C) 58 mm, invertida.  
 (D) 960 mm, direita.  
 (E) 48 mm, direita.

**14 (ITA)** Dois estudantes se propõem a construir cada um deles uma câmera fotográfica simples, usando uma lente convergente como objetiva e colocando-a em uma caixa fechada de modo que o filme esteja no plano focal da lente. O estudante A utilizou uma lente de distância focal igual a 4,0 cm e o estudante B, uma lente de distância focal igual a 10,0 cm. Ambos foram testar suas câmeras fotografando um objeto situado a 1,0 m de distância das respectivas objetivas. Desprezando-se todos os outros efeitos (tais como aberrações das lentes), o resultado da experiência foi:

- I. que a foto do estudante A estava mais “em foco” que a do estudante B;  
 II. que ambas estavam igualmente “em foco”;  
 III. que as imagens sempre estavam entre o filme e a lente.

Nesse caso, você concorda que:

- (A) apenas a afirmativa II é verdadeira.  
 (B) somente I e III são verdadeiras.  
 (C) somente III é verdadeira.  
 (D) somente a afirmativa I é verdadeira.  
 (E) não é possível obter uma fotografia em tais condições.

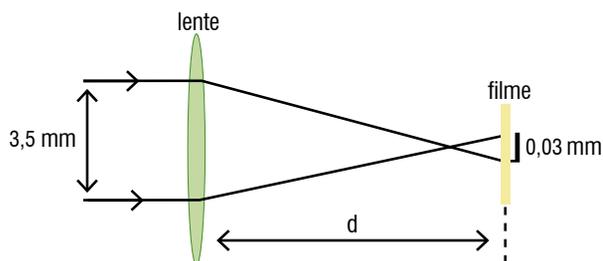
**15 (ITA)** Um telescópio astronômico tipo refrator é provido de uma objetiva de 1.000 mm de distância focal. Para que o seu aumento angular seja de aproximadamente 50 vezes, a distância focal da ocular deverá ser de:

- (A) 10 mm. (D) 50 mm.  
 (B) 20 mm. (E) 150 mm.  
 (C) 25 mm.

**16 (UFU-MG)** A objetiva de uma máquina fotográfica tem distância focal 100 mm e possui um dispositivo que permite seu avanço ou retrocesso. A máquina é utilizada para tirar duas fotos: uma de um objeto no infinito e outra de um objeto distante 30 cm da objetiva. O deslocamento da objetiva de uma foto para outra, em mm, foi de:

- (A) 50. (E) 250.  
 (B) 100. (D) 200.  
 (C) 150.

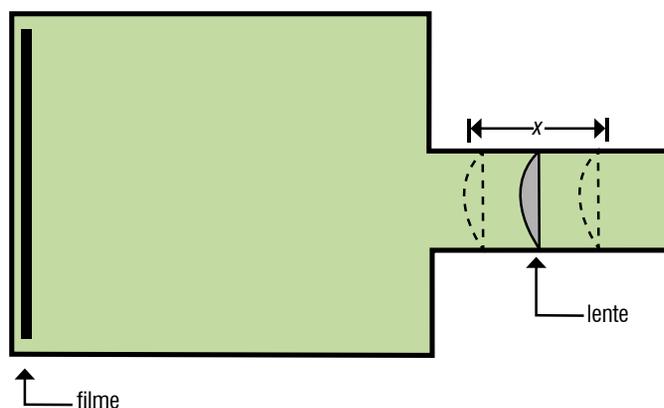
**17 (UNICAMP-SP)** Em uma máquina fotográfica de foco fixo, a imagem de um ponto no infinito é formada antes do filme, conforme figura:



No filme, este ponto está ligeiramente deslocado e sua imagem tem 0,03 mm de diâmetro. Mesmo assim, as cópias ampliadas ainda são nítidas para o olho humano. A abertura para a entrada da luz é de 3,5 mm de diâmetro e a distância focal da lente é de 35 mm.

- a. Calcule a distância  $d$  do filme à lente.  
 b. A que distância da lente um objeto precisa estar para que sua imagem fique exatamente focalizada no filme?

**18 (UFMG)** Usando uma lente convergente, José Geraldo construiu uma câmera fotográfica simplificada, cuja parte óptica está esboçada na figura:

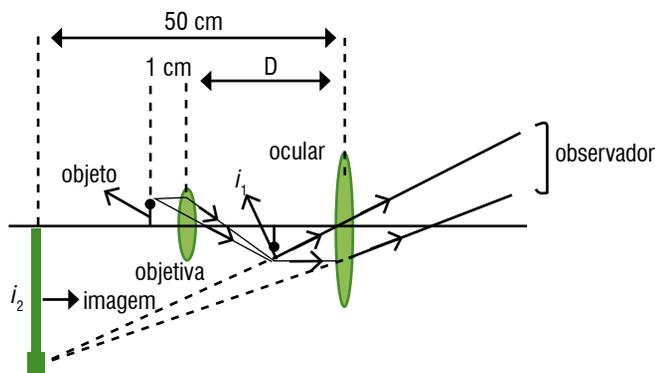


Ele deseja instalar um mecanismo para mover a lente ao longo de um intervalo de comprimento  $x$ , de modo que possa aproximá-la ou afastá-la do filme e, assim, conseguir formar sobre este imagens nítidas.

- a. Sabe-se que a distância focal da lente usada é de 4,0 cm e que essa câmera é capaz de fotografar objetos à frente dela, situados a qualquer distância igual ou superior a 20 cm da lente. Considerando essas informações, determine o valor de  $x$ .  
 b. Pretendendo fotografar a Lua, José Geraldo posiciona a lente dessa câmera a uma distância  $D$  do filme. Em seguida, ele substitui a lente da câmera por outra, de mesmo formato e tamanho, porém feita com outro material, cujo índice de refração é maior. Considerando essas informações, responda:  
 Para José Geraldo fotografar a Lua com essa nova montagem, a distância da lente ao filme deve ser menor, igual ou maior que  $D$ ? Justifique sua resposta.

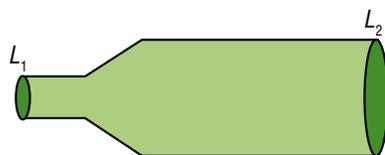
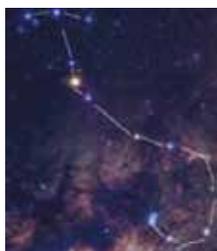
## EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**19 (UFPE)** Um microscópio composto é formado por duas lentes convergentes. A lente que fica mais próxima do objeto é a objetiva e aquela através da qual se observa a imagem é a ocular. A imagem  $i_1$ , formada pela objetiva, funciona como um objeto para a ocular (figura).



Quando o objeto é colocado a 1 cm da objetiva a imagem final que se observa é 100 vezes maior que o objeto, e se encontra a 50 cm da lente ocular. Se a ampliação devido à lente objetiva é 20 vezes, determine a distância  $D$ , em centímetros.

**20 (CESGRANRIO)** Durante o mês de junho de 1996, foi possível observar Júpiter com seus satélites, próximo da constelação de Escorpião, com o auxílio de uma pequena luneta. Sabendo disso, um estudante resolveu fazer suas próprias observações, montando o seguinte dispositivo:



$L_1$  e  $L_2$  são lentes, sendo que  $L_1$  é a ocular e  $L_2$  é a objetiva. Sejam  $f_1$  e  $f_2$  as distâncias focais dessas lentes. Assinale a opção que indica o caso no qual foi possível o estudante fazer suas observações:

- (A)  $f_1 < 0, f_2 < 0$  e módulo de  $f_1 <$  módulo de  $f_2$ .  
 (B)  $f_1 < 0, f_2 < 0$  e módulo de  $f_1 >$  módulo de  $f_2$ .  
 (C)  $f_1 > 0, f_2 < 0$  e módulo de  $f_1 <$  módulo de  $f_2$ .  
 (D)  $f_1 > 0, f_2 < 0$  e módulo de  $f_1 >$  módulo de  $f_2$ .  
 (E)  $f_1 > 0, f_2 > 0$  e módulo de  $f_1 <$  módulo de  $f_2$ .

**21 (UFF)** Uma pessoa dispõe de lentes divergentes e convergentes, com distâncias focais ( $f$ ) de  $-40$  cm,  $-10$  cm,  $10$  cm e  $40$  cm. A correta associação de lentes para que ela obtenha uma luneta que forneça uma imagem não invertida é:

- (A) Objetiva  $f = 40$  cm; ocular  $f = 10$  cm.  
 (B) Objetiva  $f = 40$  cm; ocular  $f = -10$  cm.  
 (C) Objetiva  $f = 10$  cm; ocular  $f = 40$  cm.  
 (D) Objetiva  $f = 10$  cm; ocular  $f = -40$  cm.  
 (E) Objetiva  $f = 40$  cm; ocular  $f = 40$  cm.

**01 (IME)** A imagem nítida de um objeto é obtida em uma tela devido a uma lente convergente de distância focal  $f$ . A altura da imagem é  $A_1$ . Mantendo constante a distância  $D$  entre o objeto e a tela, quando deslocamos a lente encontramos uma outra imagem nítida de altura  $A_2$ . Determine:

- a. as distâncias entre o objeto e a lente nas duas posições mencionadas.  
 b. a altura do objeto.

**02 (ITA)** Um objeto em forma de um segmento de reta de comprimento  $\ell$  está situado ao longo do eixo óptico de uma lente convergente de distância focal  $f$ . O centro do segmento se encontra a uma distância  $a$  da lente e esta produz uma imagem real de todos os pontos do objeto. Quanto vale o aumento linear  $\beta$  do objeto?

(A)  $\beta = \frac{f^2}{a^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$

(B)  $\beta = \frac{f^2}{f^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$

(C)  $\beta = \frac{f^2}{(a-f)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$

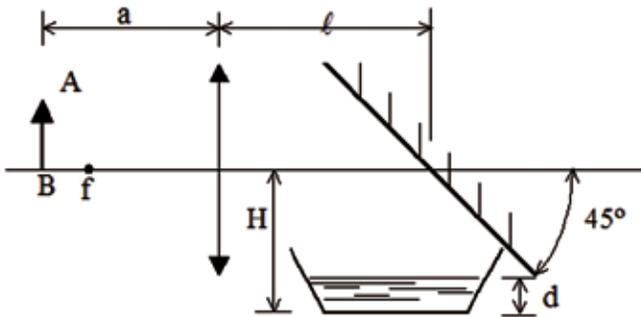
(D)  $\beta = \frac{f^2}{(a+f)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$

(E)  $\beta = \frac{f^2}{(a+f)^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2}$

**03 (IME)** Quando uma fonte brilhante de luz é colocada a 30 cm de uma lente, há uma imagem a 7,5 cm da mesma. Há também uma imagem invertida fraca a 6 cm da frente da lente, devido à reflexão em sua superfície frontal. Quando a lente é invertida, a imagem invertida fraca está a 10 cm da frente da lente. Determine:

- a. a distância focal da lente.  
 b. os raios de curvatura da lente.  
 c. o índice de refração do material da lente.

**04 (IME)** Um objeto  $AB$  encontra-se a uma distância  $a = 36$  cm de uma lente com distância focal  $f = 30$  cm. A uma distância  $\ell = 1,0$  m, após a lente, foi colocado um espelho plano, inclinado de  $45^\circ$  em relação ao eixo óptico da lente. Determine a distância  $H$ , entre o eixo óptico e o fundo de uma bacia com água, necessária para que se forme neste uma imagem nítida do objeto. A profundidade da água na bacia é  $d = 20$  cm. Sabe-se que a camada da água, que é de espessura  $d$ , desloca a imagem de uma distância igual a  $d\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ , em que  $n$  é o índice de refração da água.



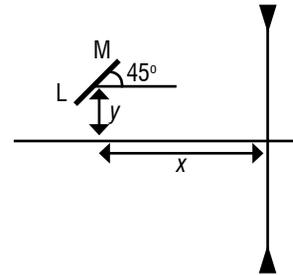
Considere o índice de refração da água  $n = 1,25$ .

**05 (UNESP)** Uma semiesfera de vidro, com índice de refração 1,5 e raio de 10 cm, é colocada com sua face apoiada em uma mesa horizontal. Um feixe de luz paralelo, de seção circular de 1 mm de diâmetro, incide verticalmente de forma que o raio central atinge o centro da semiesfera. Calcule o diâmetro do círculo luminoso formado sobre a mesa.

**06 (UNESP)** Duas lentes delgadas, uma convergente e outra divergente, com distâncias focais respectivamente iguais a 1 m e 2 m, encontram-se justapostas. Um objeto é colocado a 3 m das lentes. Desprezando a espessura do sistema de lentes, determine a distância entre a imagem e esse sistema.

**07** Qual a posição do ponto remoto de um olho emetropo ao colocar uma lente de vergência + 2 di?

**08 (ITA)** A figura mostra uma barra  $LM$  de  $10\sqrt{2}$  cm de comprimento, formando um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal, tendo o seu centro situado a  $x = 30,0$  cm de uma lente divergente, com distância focal igual a 20,0 cm, e a  $y = 10,0$  cm acima do seu eixo ótico. Determine o comprimento  $x$  da imagem da barra e faça um desenho esquemático para mostrar a orientação da imagem.



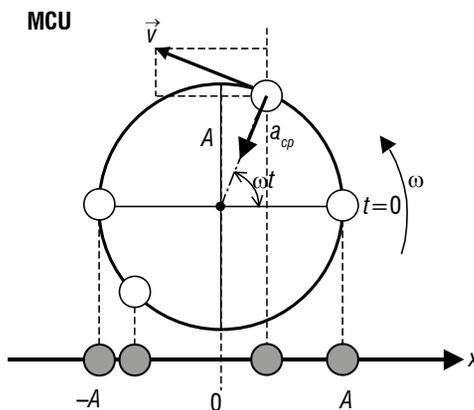
RASCUNHO

## 1. Definição

São movimentos oscilatórios (retilíneos ou curvilíneos) descritos matematicamente por função harmônica (seno ou cosseno). Nestes movimentos, a força resultante é linearmente dependente da posição.

## 2. MHS e o Movimento Circular Uniforme

Podemos determinar as funções horárias dos movimentos harmônicos simples através das projeções de um movimento circular uniforme sobre os eixos cartesianos. Abaixo, representaremos as projeções apenas sobre o eixo horizontal  $x$ .



### 2.1 Funções horárias

posição:

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = A \cdot \cos(2\pi f t + \varphi_0)$$

velocidade:

$$v(t) = -\omega \cdot A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega \cdot A \cdot \sin(2\pi f t + \varphi_0)$$

aceleração:

$$a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(2\pi f t + \varphi_0)$$

em que:

$\omega \rightarrow$  frequência angular

$\varphi_0 \rightarrow$  fase inicial

$A \rightarrow$  amplitude

$T \rightarrow$  período

$f \rightarrow$  frequência

### 2.2 Relações elementares

$$v(x): \longrightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = 1$$

$$a(x): \longrightarrow a = -\omega^2 x$$

## 3. Força nos movimentos harmônicos

No item anterior chegamos a uma relação elementar entre aceleração e deslocamento:

$$a = -\omega^2 x$$

Multiplicando esta expressão por  $m$ , temos

$$Ma = -m\omega^2 x = F_{\text{restauração}}$$

que denominamos **força de restauração** de equilíbrio dos movimentos harmônicos simples. Assim generalizamos os movimentos harmônicos, como aqueles que possuem uma força de restauração de equilíbrio proporcional ao deslocamento:

$$F_R = -Kx$$

em que

$K \rightarrow$  constante física que dependerá do tipo de oscilador

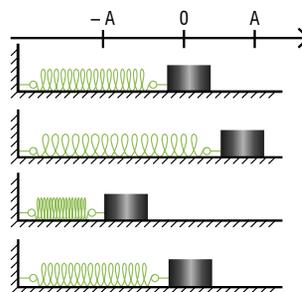
$\omega \rightarrow$  frequência natural de oscilação do oscilador

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

**Obs.:** Vale lembrar que  $\omega$  também é a velocidade angular do movimento circular uniforme cuja componente determina as equações do movimento harmônico simples.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

## 4. Oscilador massa-mola horizontal

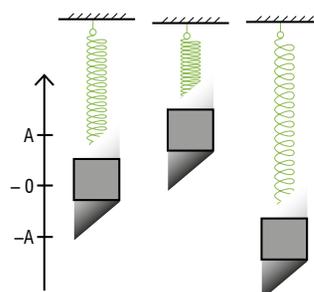


Força de restauração  $\rightarrow F_R = -Kx$

Frequência natural  $\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Período  $\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K}}$

## 5. Oscilador massa-mola vertical

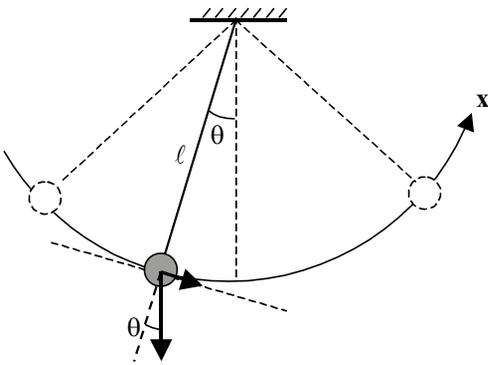


Força de restauração  $\rightarrow F_R = -Kx$

Frequência natural  $\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$

Período  $\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{K}}$

## 6. Pêndulo simples



Força de restauração  $\rightarrow F_R = -mg \text{ sen } \theta$

Para  $\theta$  pequeno  $\rightarrow \theta \cong \text{sen } \theta$   
 Como  $x = l\theta$

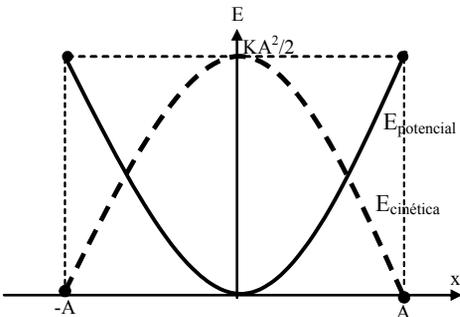
$$F_R = -mg \text{ sen } \theta = \frac{mg}{l} x$$

Frequência natural  $\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mg}{l}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Período  $\rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$

## 7. Energia no MHS

Em todo movimento harmônico simples, o sistema é conservativo (não há forças dissipativas). Neste caso, a energia mecânica se conserva. Para um sistema massa-mola, teremos:



$$E_{\text{mecânica}} = E_{\text{cinética}} + E_{\text{potencial}} = \text{constante}$$

$$E_{\text{mecânica}} = E_{\text{cinética}} + \frac{1}{2}Kx^2$$

para  $x = A \Rightarrow E_{\text{cinética}} = 0 \Rightarrow E_{\text{mecânica}} = \frac{1}{2}KA^2$

$$\frac{1}{2}KA^2 = E_{\text{cinética}} + \frac{1}{2}Kx^2 \Rightarrow E_{\text{cinética}} = \frac{1}{2}KA^2 - \frac{1}{2}Kx^2$$

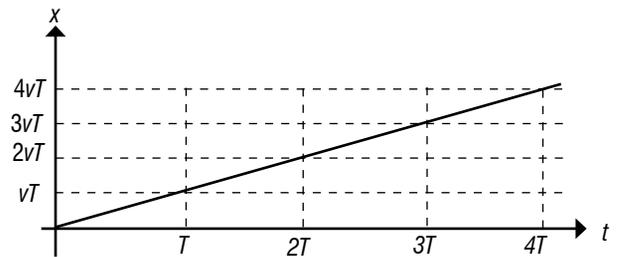
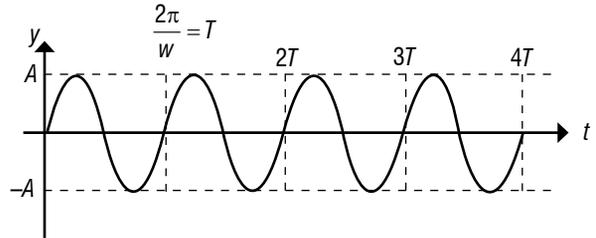
## 8. Composição de movimentos

Imagine agora uma partícula que se move num plano  $xy$ , tendo uma componente harmônica e a outra, uma função qualquer. Podemos obter trajetórias (planas) de várias formas.

Seja, por exemplo, a seguinte composição abaixo (na matemática chamamos de funções paramétricas):

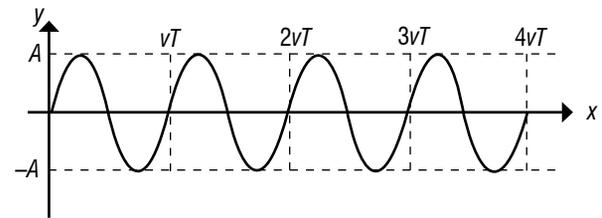
$$y(t) = A \cos \omega t \text{ e } x(t) = vt$$

Sabemos que o gráfico de cada componente será representado da seguinte forma:



A forma da trajetória pode ser determinada eliminando a variável tempo ( $t$ ). Neste caso, basta explicitar  $t$  na função  $y(t)$  e substituir na função  $x(t)$ . Ficando assim:

$$t = \frac{x}{v} \rightarrow y(t) = A \cos \frac{\omega x}{v}$$



Obs.: Note que a forma do gráfico de  $y(t)$  e a da trajetória  $y(x)$  são iguais, porém representam coisas diferentes.

## 9. Figuras de Lissajous

Quando as duas componentes são harmônicas, podemos obter trajetórias muito interessantes. Estas formas são denominadas figuras ou curvas de Lissajous (ou ainda curva de Bowditch) e têm uma ampla aplicação nas engenharias eletrônica e elétrica, computação gráfica, edição de imagens e interpretação gráfica.

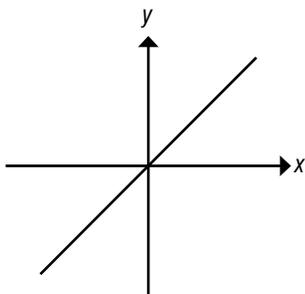
Seja, por exemplo, a seguinte composição abaixo:

$$y(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \text{ e } x(t) = A_2 (\cos \omega_2 t + \varphi_2)$$

Existe um grande número de combinações e formas possíveis, vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 1**

$$A_1 = A_2, w_1 = w_2 \text{ e } \varphi_1 = \varphi_2 \rightarrow y = x \text{ (reta)}$$



**Exemplo 2**

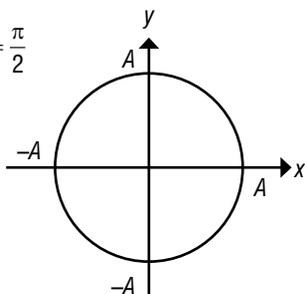
$$A_1 = A_2, w_1 = w_2, \varphi_1 = 0 \text{ e } \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Elevamos ao quadrado cada componente:

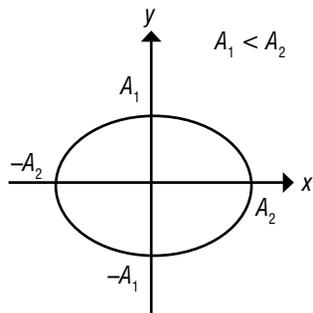
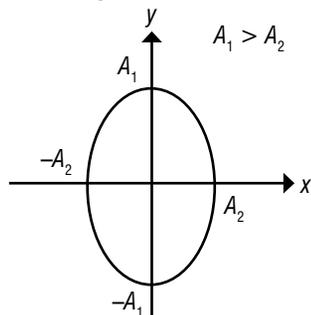
$$y^2 = A^2 \cos^2 wt$$

$$x^2 = A^2 \cos^2 \left( wt + \frac{\pi}{2} \right) = A^2 \sin^2 wt$$

Somando as duas componentes, temos:  $y^2 + x^2 = A^2$  (circunferência).



**Exemplo 3**



$$A_1 \neq A_2, w_1 = w_2, \varphi_1 = 0 \text{ e } \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

Elevamos ao quadrado cada componente e dividimos pela amplitude:

$$y^2 = A_1^2 \cos^2 wt \rightarrow \frac{y^2}{A_1^2} = \cos^2 wt$$

$$x^2 = A_2^2 \cos^2 \left( wt + \frac{\pi}{2} \right) = A_2^2 \sin^2 wt \rightarrow \frac{x^2}{A_2^2} = \sin^2 wt$$

Somando as duas componentes, temos:  $\frac{y^2}{A_1^2} + \frac{x^2}{A_2^2} = 1$  (elipse)

**Exemplo 4**

$$A_1 \neq A_2, w_1 = 2w_2, \varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

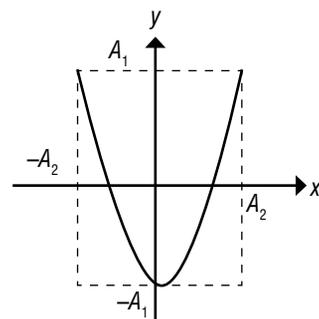
Elevamos ao quadrado cada componente e dividimos pela amplitude:

$$y = A_1 \cos 2wt = A_1 (2\cos^2 wt - 1)$$

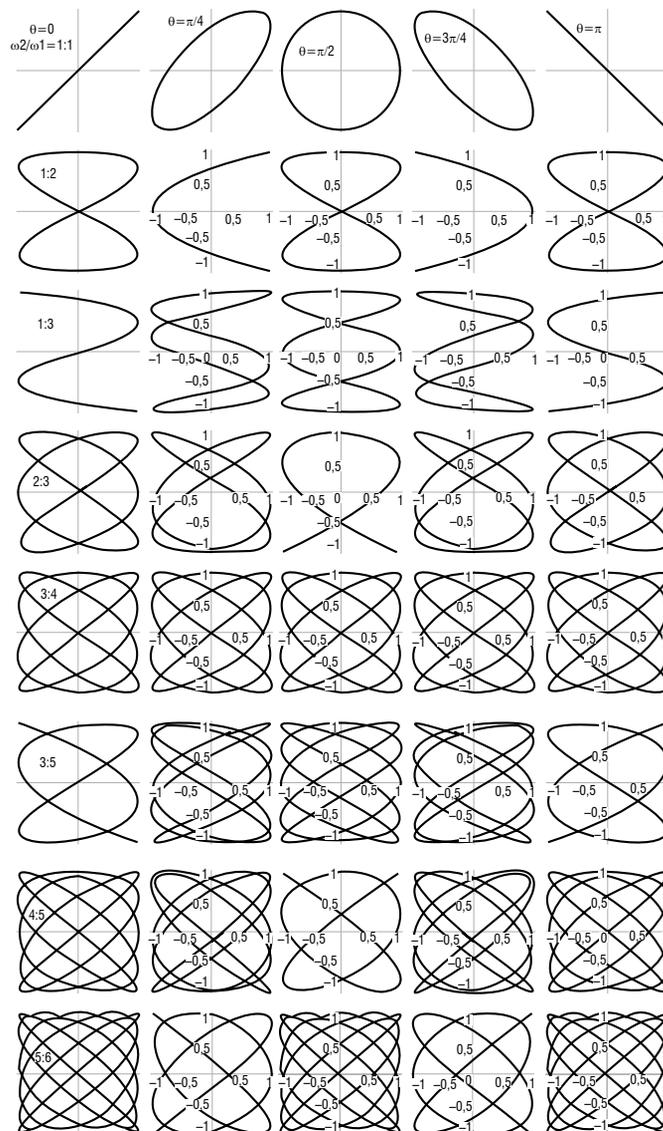
$$x^2 = A_2^2 \cos^2 wt \rightarrow \frac{x^2}{A_2^2} = \cos^2 wt$$

Substituindo  $\frac{x^2}{A_2^2}$ , temos:

$$y = A_1 \left( 2 \frac{x^2}{A_2^2} - 1 \right) \text{ (parábola)}$$



Um resumo das formas pode ser visto na tabela abaixo para diferentes frequências e defasagens:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Um movimento harmônico simples é descrito pela função  $x = 7 \cos(4\pi t + \pi)$ , em unidades de Sistema Internacional. Nesse movimento, a amplitude e o período, em unidades do Sistema Internacional, valem, respectivamente:

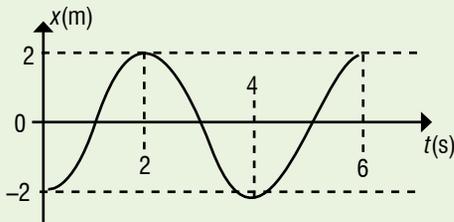
- (A) 7 e 1. (D)  $2\pi$  e  $\pi$ .  
 (B) 7 e 0,50. (E) 2 e 1.  
 (C)  $\pi$  e  $4\pi$ .

**Solução:** Letra B.

Baseada na equação de movimento do MHS, temos  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ . Comparando as duas, vemos que  $A = 7\text{m}$  e que  $\omega = 4\pi \text{ rad/s}$

Pela fórmula  $\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \text{ s}$ .

**02** O gráfico apresentado mostra a elongação em função do tempo para um movimento harmônico simples.



Qual a equação horária correspondente, no SI?

- (A)  $x = 4 \cdot \cos\left[\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot t + \pi\right]$  (D)  $x = 2 \cdot \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot t + \pi\right]$   
 (B)  $x = 4 \cdot \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot t + 3\frac{\pi}{2}\right]$  (E)  $x = 2 \cdot \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$   
 (C)  $x = 2 \cdot \cos \pi t$

**Solução:** Letra D.

Sabemos que as funções horárias podem ser escritas como funções seno ou cosseno. Neste caso, como todas as opções são cosseno, já temos nossa escolha!

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Primeiramente identificamos facilmente a amplitude  $A = 2 \text{ m}$ , assim como o período  $T = 4 \text{ s}$  (1 ciclo completo).

$$\text{Assim, } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ rad/s}$$

Para determinar a fase  $\varphi$ , escolheremos um instante qualquer (de preferência para agilizar as contas escolher  $t = 0$ , se possível).

Assim:

$$x(0) = -2 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0 + \varphi\right) = 2 \cos \varphi$$

$$2 \cos \varphi = -2 \rightarrow \cos \varphi = -1 \rightarrow \varphi = \pi \text{ rad}$$

$$\text{Resumindo, temos: } x(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} t + \pi\right)$$

**03** Um ponto material executa uma Movimento Harmônico Simples e tem, num determinado instante, velocidade de  $8 \text{ cm/s}$ . Sabendo-se que nesse instante a diferença entre os quadrados de sua amplitude e de sua elongação é de  $36 \text{ cm}$ , determine sua pulsação.

Dados do problema:

- velocidade do ponto num instante  $t$ :  $v = 8 \text{ cm/s}$
- diferença entre os quadrados da amplitude e da elongação  $A^2 - x^2 = 36$

**Solução:**

A energia de um MHS se conserva da seguinte forma:  $E_{\text{MEC}} = E_{\text{CIN}} + E_{\text{POT}}$

Sendo que  $E_{\text{MEC}} = \frac{k \cdot A^2}{2}$ , Logo:

$$\frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2} \rightarrow \frac{k \cdot A^2}{2} - \frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{m \cdot 8^2}{2} \rightarrow k(A^2 - x^2) = 64m$$

$$\rightarrow 36k = 64m \rightarrow k = \frac{16m}{9} \text{ (i)} : \text{Substituindo (i) na segunda equação}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ temos: } \omega = \sqrt{\frac{16}{9}} \rightarrow \omega = \frac{4}{3} \text{ rad/s}$$

**04** Um pequeno objeto executa MHS com período de  $8 \text{ s}$  entre os pontos  $R$  e  $-R$  de uma reta. No instante inicial  $t_0$ , o referido objeto encontra-se no ponto  $R/2$ , deslocando-se em direção a valores inferiores e chega ao ponto  $-R$  no instante  $t$ . Pede-se:

- o deslocamento angular efetuado;
- o tempo gasto neste deslocamento.

**Solução:**

A equação de posição em um MHS é dada por:  $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$$\text{Sabemos que: } A = R \rightarrow x = R \cdot \cos(\omega t + \varphi) \text{ (I)}$$

No instante  $t_0$  sabemos que  $x = \frac{R}{2}$ .

$$\text{Logo: } \frac{R}{2} = R \cdot \cos(\omega t_0 + \varphi) \rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ (II)}$$

Utilizando a informação que  $T = 8 \text{ s}$

$$\text{Temos: } \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \rightarrow \omega = \frac{\pi}{4} \text{ (III)}$$

$$\text{Substituindo (II) e (III) em (I) temos: } x = R \cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Para } x = R \rightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \rightarrow \frac{\pi t}{4} + \frac{\pi}{3} = \pi \rightarrow t = \frac{8}{3} \text{ s}$$

$$\text{e } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

**05** No instante  $t = 0,25 \text{ s}$  uma partícula encontra-se na abscissa  $x = 4 \text{ cm}$  e em movimento progressivo. No instante que sua aceleração é máxima e vale  $128\pi^2 \text{ cm}^2/\text{s}$ , a sua abscissa é  $x = -8 \text{ cm}$ . Determine as funções horárias do movimento desta partícula.

**Solução:**

A partir da relação fundamental

$$a = -x \omega^2 \rightarrow 128\pi^2 = -\omega^2 (-8) \rightarrow \omega^2 = 16\pi^2 \rightarrow \omega = 4\pi \text{ rad/s}$$

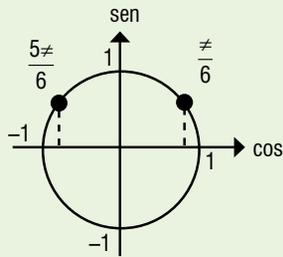
Note que quando a aceleração é máxima, a posição é  $x = \pm A$ ; assim,  $A = 8 \text{ cm}$ . Para determinar a fase, faremos a substituição da posição no instante  $t = 0,25 \text{ s}$ . Optaremos aqui pelas seguintes funções horárias:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad v(t) = \omega A \cos(\omega t + \varphi) \quad a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$x(0,25) = 4 = 8 \sin(4\pi \cdot 0,25 + \varphi)$$

$$8 \sin(\pi + \varphi) = 4 \rightarrow \sin(\pi + \varphi) = \frac{1}{2} \rightarrow \pi + \varphi = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \pi + \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

Para escolher a fase correta, devemos notar no texto que no instante citado o movimento é progressivo, isto é, a velocidade é positiva. Substituindo na função das velocidades no instante  $t = 0,25\text{s}$ , temos:  $v(t) = 4\pi \cdot 8 \cos(4\pi \cdot 0,25 + \varphi) = 32\pi \cos(\pi + \varphi) > 0$ . Observando o ciclo trigonométrico, identificamos a fase correta:



$$\pi + \varphi = \frac{\pi}{6} \rightarrow \varphi = -\frac{5\pi}{6}$$

Resumindo:

$$x(t) = 8\text{sen}\left(4\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$v(t) = 32\pi \cos\left(4\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$a(t) = -128\pi^2 \text{sen}\left(4\pi t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

**06** Na extremidade inferior de uma mola vertical pendurada no teto, de constante elástica igual a 300 N/m é fixado um bloco de 3 kg e abandonado a partir do repouso neste ponto. Determine:

- a frequência angular;
- o período do movimento;
- a frequência do movimento;
- a amplitude do movimento;
- as funções horárias do movimento para um referencial com origem no ponto de abandono e apontado para baixo.

**Solução:**

a.  $w = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{300}{3}} = 10 \text{ rad/s}$

b.  $T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ s}$

c.  $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{\pi}{5}} = \frac{5}{\pi} \text{ Hz}$

d. Quando o bloco atingir a posição de equilíbrio, terá se deslocado  $A$ . Assim, assumindo  $g = 10 \text{ m/s}^2$ :

$$P = KA \rightarrow A = \frac{mg}{K} = \frac{30}{300} = 0,1 \text{ m}$$

e. Optaremos aqui pelas seguintes funções horárias:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad v(t) = wA \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad a(t) = -w^2 A \cos(\omega t + \varphi)$$

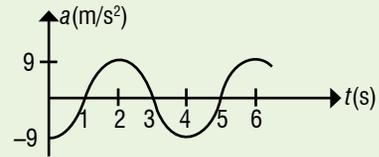
Sabemos que, em  $t = 0$ , a posição é  $A$ . Sendo assim:

$$x(0) = 0,1 \cos(10 \cdot 0 + \varphi) = 0,1 \rightarrow \cos \varphi = 1 \rightarrow \varphi = 0 \text{ rad}$$

Resumindo:

$$x(t) = 0,1 \cos(10t) \quad v(t) = -1 \text{sen}(10t) \quad a(t) = -10 \cos(10t)$$

**07** Um pêndulo simples de massa igual a 500 g oscila em MHS e possui o seguinte gráfico de aceleração escalar:



Sendo a aceleração da gravidade local  $10 \text{ m/s}^2$ , determine:

- o comprimento do pêndulo;
- a energia mecânica do sistema.

**Solução:**

Do gráfico identificamos o período  $T = 4\text{s}$ . Aplicando a fórmula do período do pêndulo simples:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \rightarrow 4 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{10}} \rightarrow l = \frac{40}{\pi^2} \text{ m}$$

Da fórmula de energia do sistema massa-mola ( $E = \frac{1}{2}KA^2$ ) podemos

determinar as fórmulas de outros MHS. Basta fazer a equivalência mecânica das frequências naturais  $w$  para determinar o que chamamos de "rigidez" do MHS.

$$w_{\text{massa-mola}} = w_{\text{pêndulo}} \rightarrow \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$K = \frac{mg}{l} = \frac{0,5 \cdot 10}{\frac{40}{\pi^2}} = \frac{\pi^2}{8} \text{ N/m}$$

$$\text{Assim: } E = \frac{1}{2}KA^2$$

Como não temos a amplitude, faremos uso da relação fundamental para determiná-la:

$$a = -w^2 x \rightarrow a_{\text{máx}} = w^2 A \rightarrow A = \frac{9}{(2\pi/4)^2} = \frac{36}{\pi^2}$$

$$\text{Substituindo: } E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{36}{\pi^2}\right)^2 = \frac{81}{\pi^2} \text{ J}$$

Outra solução (literal)

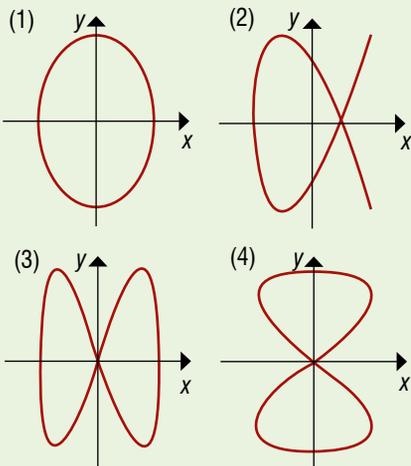
A partir da fórmula de energia do massa-mola vamos substituindo até que cheguemos aos parâmetros identificados:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}(w^2 m)A^2 = \frac{1}{2}(w^2 m) \left(\frac{a_{\text{máx}}}{w^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m \left(\frac{a_{\text{máx}}}{w}\right)^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{a_{\text{máx}}}{2\pi/T}\right)^2 =$$

$$= \frac{mT^2 a_{\text{máx}}^2}{8\pi^2} = \frac{0,5 \cdot 4^2 \cdot 9^2}{8\pi^2} = \frac{81}{\pi^2} \text{ J}$$

**08** As figuras abaixo representam a composição de dois MHS de frequências  $f_1$  e  $f_2$  segundo dois eixos ortogonais  $O_x$  e  $O_y$ . Sendo a frequência do movimento, segundo  $O_x$ , 300 cps para todas as figuras, qual a frequência segundo  $O_y$  em cada caso?



Dado do problema:

- frequência do movimento na direção  $x$ :  $f_x = f_1 = f_2 = 300$  cps (ciclos por segundo).

**Solução:**

Para calcularmos a frequência na direção  $y$ , em cada um dos gráficos traçamos duas retas secantes às curvas, uma paralela ao eixo  $O_x$  e outra ao eixo  $O_y$  (as retas não devem coincidir com os eixos coordenados). Usando a seguinte expressão:

$$\frac{f_y}{f_x} = \frac{n_x}{n_y} \quad (I)$$

em que:

- $f_x$  e  $f_y$  são as frequências segundo o  $O_x$  e  $O_y$  respectivamente;
- $n_x$  e  $n_y$  são os números de interseções das retas secantes com as curvas de Lissajours (leia-se Liçaju).

Pela figura 1 ao lado temos  $n_x=2$  e  $n_y=2$ . Substituindo esses valores e a frequência  $f_x$  dada na expressão (I), calculamos  $f_y$

$$\frac{f_y}{300} = \frac{2}{2}$$

$$f_y = 300 \text{cps}$$

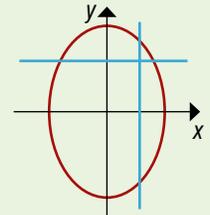


Figura 1

Da figura 2 obtemos  $n_x=3$  e  $n_y=2$

Para o cálculo  $f_y$ :

$$\frac{f_y}{300} = \frac{3}{2}$$

$$f_y = \frac{3}{2} \cdot 300$$

$$f_y = \frac{900}{2}$$

$$f_y = 450 \text{cps}$$

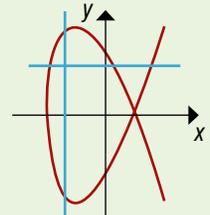


Figura 2

Pela figura 3 calculamos  $n_x=4$  e  $n_y=3$

O cálculo de  $f_y$  será:

$$\frac{f_y}{300} = \frac{4}{3}$$

$$f_y = 2 \cdot 300$$

$$f_y = 600 \text{cps}$$

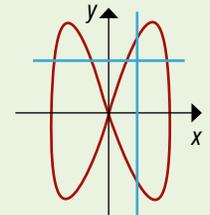


Figura 3

E finalmente  $f_y$  para a figura 4 em que  $n_x=2$  e  $n_y=4$

O cálculo de  $f_y$  nos dá:

$$\frac{f_y}{300} = \frac{2}{4}$$

$$f_y = \frac{2}{4} \cdot 300$$

$$f_y = \frac{600}{4}$$

$$f_y = 150 \text{cps}$$

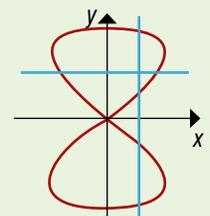
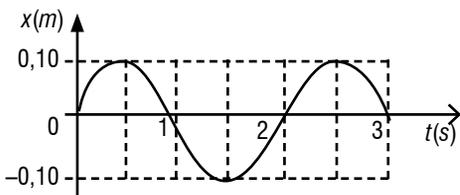


Figura 4

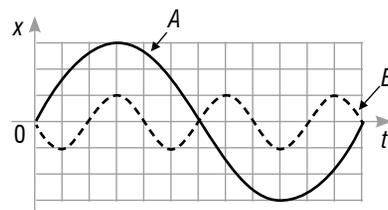
**EXERCÍCIOS NÍVEL 1**

**01 (PUC-SP)** A partir do gráfico, que representa as posições ocupadas por um móvel em função do tempo quando oscila em movimento harmônico simples, determine:



- a frequência e a amplitude do movimento;
- os instantes, durante os três primeiros segundos, em que a velocidade se anulou.

**02 (PUC-SP)** As elongações ( $x$ ) de duas partículas  $A$  e  $B$  que oscilam em movimento harmônico simples são dadas em função do tempo ( $t$ ) pelos gráficos a seguir:



Compare:

- as frequências de *A* e *B*;
- as amplitudes de *A* e de *B*.

**03 (PUC-SP)** Uma partícula move-se obedecendo à função horária  $x = 2 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ , com *x* em metros e *t* em segundos. Determine:

- o período do movimento;
- a velocidade escalar da partícula em  $t = 1$  s;
- a aceleração escalar da partícula em  $t = 5$  s.

**04 (PUC-SP)** Calcule a pulsação de um movimento harmônico simples, sabendo que os valores máximos de velocidade e de aceleração são, respectivamente,  $V_{\text{máx}} = 4$  m/s e  $a_{\text{máx}} = 5$  m/s<sup>2</sup>.

**05 (PUC-SP)** Uma partícula executa MHS de frequência igual a 2 Hz e amplitude igual a 5 m. Calcule:

- a velocidade escalar da partícula, quando ela se encontra a 4 m do ponto de equilíbrio;
- a aceleração escalar da partícula nos extremos da trajetória.

**06 (PUC-SP)** Um bloco com massa de 4 kg encontra-se em repouso, apoiado em um plano horizontal sem atrito, preso a uma mola ideal de constante elástica 400 N/m (figura **A**). Afastando o bloco 0,5 m de sua posição inicial e abandonando-o, ele oscila em movimento harmônico simples (figura **B**).

figura A

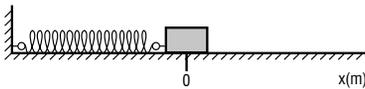
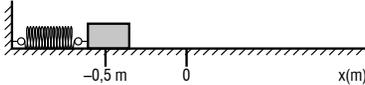


figura B



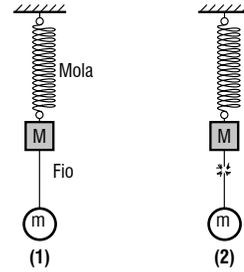
Determine:

- o período do movimento do bloco;
- a energia mecânica do sistema massa-mola;
- a representação gráfica do valor algébrico da força resultante, em função da elongação;
- a representação gráfica da energia potencial e da energia cinética, em função da elongação.

**07 (PUC-SP)** Em um local em que a aceleração da gravidade é de 10 m/s<sup>2</sup> tem-se uma mola vertical e leve, com um extremo fixo. No extremo livre é colocada uma massa de 100 gramas, que, no equilíbrio, alonga a mola em 5 cm. Da posição de equilíbrio, a massa é puxada para baixo 2 cm e abandonada a oscilar livremente.

- Qual a amplitude das oscilações do sistema?
- Se a massa for deslocada 4 cm (em vez de 2 cm) da posição de equilíbrio, o que ocorrerá com o período de oscilação?

**08 (FUVEST)** O sistema representado na figura (1) oscila com frequência  $f_1$ , verticalmente:



Se o fio for cortado como mostra a figura (2), o corpo de massa *M* passará a oscilar verticalmente com frequência  $f_2$ , igual, maior ou menor que  $f_1$ ?

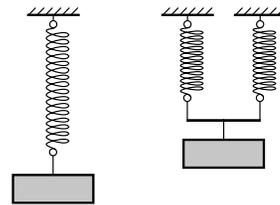
**09 (FUVEST)** Um bloco é preso a uma mola de massa desprezível, executando um MHS. Sabendo que a energia mecânica mantém-se constante no valor 3,6 J e que, no ponto de elongação igual a 30 cm, a energia cinética do bloco vale 2,7 J, determine para esse MHS:

- a constante de força;
- a amplitude.

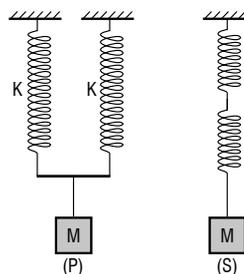
**10 (FUVEST)** Na Terra, certo pêndulo simples executa oscilações com período de 1 s.

- Qual o período desse pêndulo se posto a oscilar na Lua, onde a aceleração da gravidade é 6 vezes menor?
- Que aconteceria com o período desse pêndulo, à medida que fosse removido para uma região livre de ações gravitacionais?

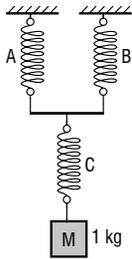
**11 (UFCE)** Um corpo suspenso a uma mola helicoidal alonga-a 12 cm. Corta-se a mola no meio e suspende-se o corpo ao conjunto das duas metades. De quanto se acha alongada cada uma dessas duas metades?



**12 (UFCE)** O período de oscilação de *M* na situação (P) é  $T_p$  e na situação (S) é  $T_s$ . Determine  $\frac{T_s}{T_p}$ .



**13 (ITA)** Na figura, o corpo de 1 kg de massa oscila na vertical, em movimento harmônico simples. Calcule o período de oscilação desse corpo.



$$K_A = K_B = \pi^2 \text{ N/m}$$

$$K_C = 2\pi^2 \text{ N/m}$$

**14 (ITA)** Uma partícula move-se no plano  $(x, y)$  de acordo com as equações:  $x = v_0 t$  e  $y = A \cos \omega t$ , em que  $v_0 = 3,0 \text{ m/s}$ ,  $A = 1,00 \text{ m}$  e  $\omega = 8,0 \text{ rad/s}$ . Calcule o módulo da velocidade da partícula no instante em que  $\omega t = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ .

**15** Em um osciloscópio, elétrons executam movimentos que são composições de dois movimentos harmônicos simples em direções perpendiculares. Considerando que esses movimentos são descritos pelas equações  $x = A \cos \omega t$  e  $y = B \sin \omega t$ , determine a forma das trajetórias, supondo:

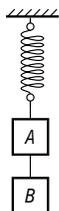
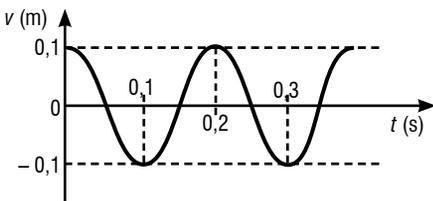
- a.  $A = B$ ;
- b.  $A \neq B$ .

**EXERCÍCIOS NÍVEL 2**

**01 (ITA)** Uma partícula de massa  $m$  realiza um movimento harmônico simples de amplitude  $A$ , em torno da posição de equilíbrio  $O$ . Considerando nula a energia potencial para a partícula em  $O$ , calcule a elongação para a qual a energia cinética é igual ao dobro da energia potencial.

**02 (FUVEST)** A equação  $x = 1,0 \sin (2,0t)$  expressa a posição de uma partícula em unidades do Sistema Internacional. Qual seria a forma do gráfico  $v(\text{velocidade}) \times x(\text{posição})$  desta partícula?

**03 (FUVEST)** Dois corpos,  $A$  e  $B$ , ligados por um fio, encontram-se presos à extremidade de uma mola e em repouso. Parte-se o fio que liga os corpos e o corpo  $A$  passa a executar um movimento oscilatório, descrito pelo gráfico ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ ):



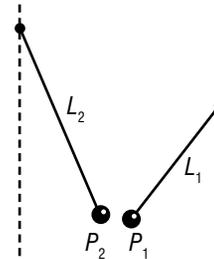
Sendo de 200 g a massa do corpo  $B$ , determine:

- a. a constante elástica da mola;
- b. a frequência de oscilação do corpo  $A$ .

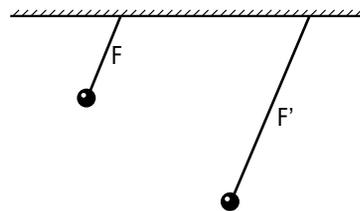
**04 (ITA)** Dois pêndulos simples, respectivamente de massas  $m_1$  e  $m_2$  e comprimentos  $\ell_1$  e  $\ell_2$ , são simultaneamente abandonados para pôr-se em oscilação. Constatou-se que a cada quatro ciclos do primeiro a situação inicial é restabelecida idênticamente. Nessas condições, pode-se afirmar que necessariamente:

- (A) o pêndulo 2 deve oscilar mais rapidamente que o pêndulo 1.
- (B) o pêndulo 2 deve oscilar mais lentamente que o pêndulo 1.
- (C)  $8\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$  é um número inteiro.
- (D)  $6\sqrt{\frac{\ell_1}{\ell_2}}$  é um número inteiro.
- (E)  $m_1 \ell_1 = 2m_2 \ell_2$ .

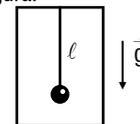
**05 (ITA)** Dois pêndulos simples,  $P_1$  e  $P_2$ , de comprimentos  $L_1$  e  $L_2$ , estão indicados na figura. Determine  $L_2$  em função de  $L_1$  para que a situação indicada se repita a cada 5 oscilações completas de  $P_1$  e 3 oscilações completas de  $P_2$ .



**06 (ITA)** Na figura abaixo estão representados dois pêndulos ideais nas posições de máxima elongação, quando seus fios  $F$  e  $F'$  estão paralelos. O comprimento do fio  $F'$  é quatro vezes o comprimento do fio  $F$ . O período do pêndulo menor é igual a  $T$ . Depois de quanto tempo a situação representada na figura se repete pela primeira vez?



**07 (ITA)** Um pêndulo simples de comprimento  $\ell$  é preso ao teto de um elevador, como mostra a figura:



Sendo  $g$  o módulo do campo gravitacional no local, analise as afirmações a seguir:

- I. Se o elevador permanecer em repouso ou mover-se em movimento retilíneo e uniforme, o período de oscilação do pêndulo será  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ .
- II. Se o elevador mover-se com aceleração de módulo  $a$  dirigida para cima, o período de oscilação do pêndulo será  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}$ .

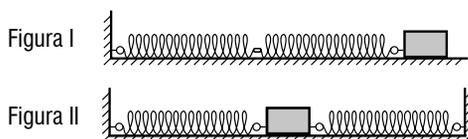
- III. Se o elevador mover-se com aceleração de módulo  $a$  dirigida para baixo ( $a < g$ ), o período de oscilação será  $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g-a}}$ .
- IV. Se o elevador estiver em queda livre, o pêndulo não oscilará.

É(são) correta(s):

- (A) todas. (D) apenas I.  
 (B) apenas II e III. (E) apenas I, II e III.  
 (C) apenas IV.

**08 (ITA)** Duas molas iguais e um mesmo bloco participam das duas montagens ilustradas nas figuras I e II.

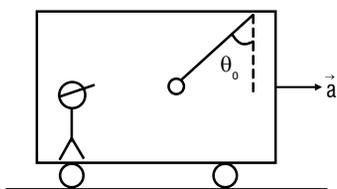
Afastando o bloco da posição de equilíbrio e abandonando-o, ele oscila na figura I com período  $T_I$  e na figura II com período  $T_{II}$ . Determine  $T_I / T_{II}$ .



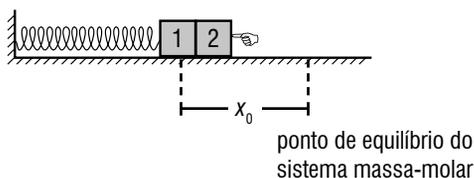
**09 (ITA)** Suponha que as duas molas da figura tenham constantes diferentes  $k_1$  e  $k_2$ . Mostre que a frequência  $f$  da oscilação do bloco é então dada por  $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$  em que  $f_1$  e  $f_2$  são as frequências nas quais o bloco oscilaria se estivesse conectado apenas à mola 1 ou à 2.



**10 (ITA)** No início do século, Albert Einstein propôs que forças inerciais, como aquelas que aparecem em referenciais acelerados, sejam equivalentes às forças gravitacionais. Considere um pêndulo de comprimento  $L$  suspenso no teto de um vagão de trem em movimento retilíneo com aceleração constante de módulo  $a$ , como mostra a figura. Em relação a um observador no trem, determine o período de pequenas oscilações do pêndulo ao redor da sua posição de equilíbrio  $\theta_0$ .



**11** Dois blocos, 1 e 2, de massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente, comprimem uma mola, de constante elástica  $k$ , de uma distância  $x_0$  em relação à sua posição de equilíbrio. O bloco 1 está preso à mola, enquanto o bloco 2 é mantido em contato com o bloco 1, porém sem estar preso a ele, por um agente externo, conforme mostra a figura. O conjunto, inicialmente em repouso, em um dado momento, é deixado livre por esse agente externo. Despreze todas as formas de dissipação de energia.

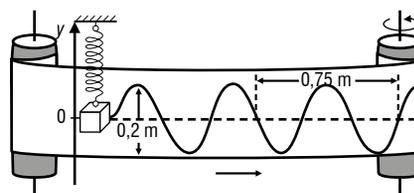


- a. Que velocidade terá o bloco 2 quando perder contato com o bloco 1?  
 b. Depois que o bloco 2 perde o contato com o sistema massa-mola, esse sistema realiza um movimento harmônico simples (MHS). Determine a frequência angular e a amplitude desse MHS.

**12 (UFMG)** Numa região onde a aceleração da gravidade é  $g$ , o período  $t$  de um pêndulo simples de comprimento  $L$  é dado por  $T = 2\pi(L/g)^{1/2}$ . Um pêndulo simples, cuja massa é igual a 200 g, gasta 1,5s para se deslocar de um extremo ao outro de sua trajetória. Mantendo-se inalteradas as demais condições, aumenta-se a massa do pêndulo para 400 g. Qual o tempo que esse pêndulo gastará para ir de um extremo ao outro de sua trajetória?

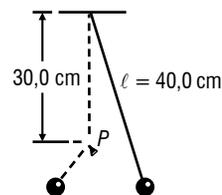
EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01 (ITA)** Um corpo de massa  $m = 2$  kg oscila verticalmente em movimento harmônico simples, suspenso por uma mola helicoidal ideal. As posições ocupadas pelo corpo são registradas em uma fita vertical de papel, por meio de um estilete preso ao corpo. A fita desloca-se horizontalmente com velocidade constante de 0,2 m/s.

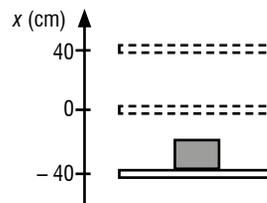


Determine:

- a. a frequência e a amplitude do movimento do corpo;  
 b. a constante elástica da mola, adotando  $\pi^2 = 10$ ;  
 c. a equação horária do movimento do corpo, sabendo que, no instante  $t = 0$ , a elongação é nula e o corpo está subindo.
- 02 (ITA)** Na figura está representado um pêndulo simples, de período igual a  $T$ . Colocando-se um prego ( $P$ ) na posição indicada, o pêndulo, na máxima elongação para a esquerda, fica com a configuração indicada pela linha pontilhada, voltando, depois, à sua configuração inicial. Qual é o período de oscilação desse sistema?



**03 (ITA)** Um bloco está apoiado em uma plataforma horizontal inicialmente em repouso na posição indicada na figura:

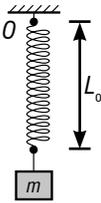


A plataforma passa, então, a oscilar verticalmente em MHS de amplitude 40 cm e período 1 s. Determine a elongação em que o bloco perde contato com a plataforma, adotando  $g = 10$  m/s<sup>2</sup> e  $\pi^2 = 10$ .

**04 (ITA)** Para se determinar a massa específica de um material, fez-se um cilindro de 10,0 cm de altura desse material flutuar dentro do mercúrio, mantendo o seu eixo perpendicular à superfície do líquido. Posto a oscilar verticalmente, verificou-se que o seu período era de 0,60 s. Determine o valor da massa específica do material.

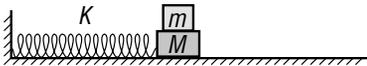
(Dados: Sabe-se que é o valor da massa específica do mercúrio é de  $1,36 \cdot 10^4 \text{ kg/m}^3$  e que a aceleração da gravidade local é de  $10,0 \text{ m/s}^2$ .)

**05 (ITA)** Uma mola de massa desprezível tem constante elástica  $K$  e comprimento  $L_0$  quando não esticada. A mola é suspensa verticalmente por uma das extremidades e na outra extremidade é preso um corpo de massa  $m$ . Inicialmente o corpo é mantido em repouso numa posição tal que a força exercida pela mola seja nula. Em seguida, a massa  $m$  é abandonada com velocidade inicial nula. Desprezando as forças dissipativas, determine:



- o comprimento máximo da mola;
- as equações horárias das posições e das velocidades do movimento da massa  $m$ , relativamente a um sistema de coordenadas com a origem em  $O$ , o eixo  $Ox$  na vertical e orientada para baixo e começando a contar o tempo a partir do instante em que a massa  $m$  é abandonada.

**06** Dois blocos ( $m = 1,0 \text{ kg}$  e  $M = 10 \text{ kg}$ ) e uma única mola ( $k = 200 \text{ N/m}$ ) estão colocados em uma superfície horizontal sem atrito, como ilustra a figura. O coeficiente de atrito estático entre os blocos é de 0,40. Qual a máxima amplitude possível do movimento harmônico simples, se não houver deslizamento entre os blocos?

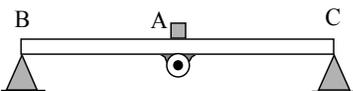


**07** Um bloco  $B$  de 25 kg é suportado verticalmente por uma mola cuja constante elástica vale  $1.600 \text{ N/m}$ . A velocidade de  $B$  é de  $0,72 \text{ m/s}$  para cima, quando  $B$  está  $0,12 \text{ m}$  abaixo de sua posição de equilíbrio, no instante  $t = 2 \text{ s}$ . Determine:

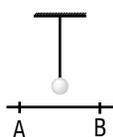
- A amplitude da vibração livre de  $B$ ;
- A máxima aceleração

**08** Um motor de velocidade variável está rigidamente preso à viga  $BC$ . O motor está ligeiramente desbalanceado e faz a viga vibrar com frequência angular igual a velocidade do motor. Quando a velocidade do motor é menor que 600 rpm ou maior que 1.200 rpm, observa-se que um pequeno objeto colocado em  $A$  permanece em contato com a viga. Para velocidades entre 600 e 1.200 rpm, o objeto “dança” e verdadeiramente perde o contato com a viga. Determine a amplitude do movimento de  $A$  quando a velocidade do motor é:

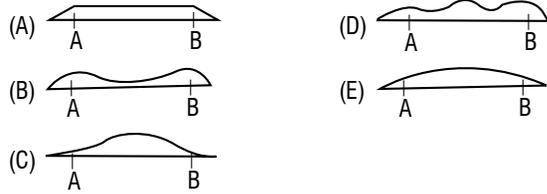
- 600 rpm;
- 1.200 rpm.



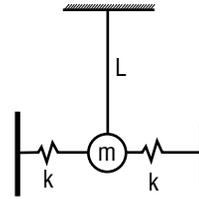
**09 (FUVEST-SP)** A figura ilustra um pêndulo formado por um fio e uma esfera oca, cheia de areia, com um orifício em sua extremidade inferior. O pêndulo oscila com amplitude



constante e a areia escoava regularmente pelo orifício. Qual das figuras a seguir melhor representa o perfil da areia depositada?

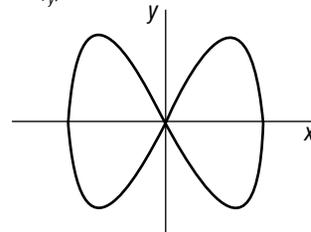


**10** O pêndulo mostrado abaixo tem seu movimento controlado por duas molas. Determine o seu período de vibração.



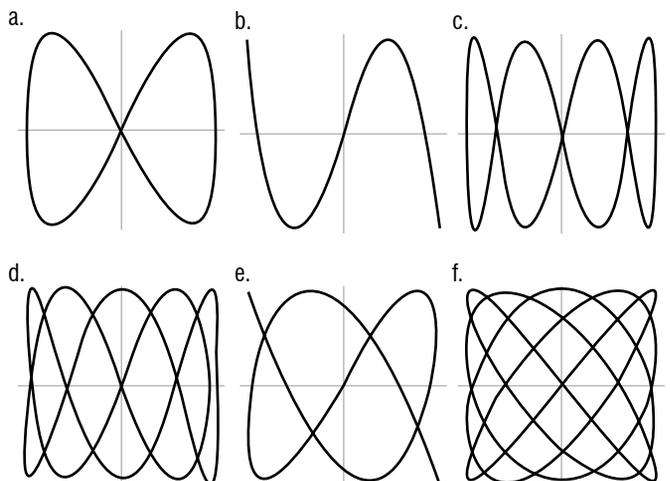
**11** Esquematize a trajetória de uma partícula que se move no plano  $xy$  de acordo com as equações:  $x = x_m \cos(\omega t - \pi/2)$  e  $y = 2x_m \cos(\omega t)$ .

**12** O diagrama mostrado na figura a seguir é o resultado da combinação de dois movimentos harmônicos simples  $x = x_m \cos(\omega_x t)$  e  $y = y_m \cos(\omega_y t + \phi_y)$ .



- Qual é o valor de  $x_m / y_m$ ?
- Qual é o valor de  $\omega_x / \omega_y$ ?
- Qual é o valor de  $\phi_y$ ?

**13** Um elétron move-se num plano  $xy$  ( $x$  horizontal e  $y$  vertical) de acordo com as trajetórias abaixo. Em cada caso, determine a relação entre os períodos de cada componente de movimento do elétron  $\frac{T_x}{T_y}$ .



RASCUNHO

## 1. Definição

É uma forma de transporte de energia por um meio que não é transportado.  
Ex.: Luz, som, ondas do mar, raio X, corda de um violão, etc.

## 2. Classificação

**Ondas mecânicas:** são deformações causadas em meios elásticos propagando a energia mecânica através de suas partículas sem que estas sejam transportadas. Uma onda mecânica nunca se propaga no vácuo.

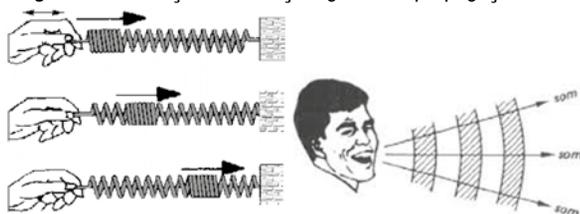
Ex.: som, ondas do mar, corda do violão, etc.

**Onda eletromagnética:** são perturbações elétricas e magnéticas que se propagam no vácuo com velocidade de  $3 \cdot 10^8$  m/s.

Ex.: luz visível, ondas de celular, rádio e TV, raios X , etc.

### 2.1 Ondas mecânicas

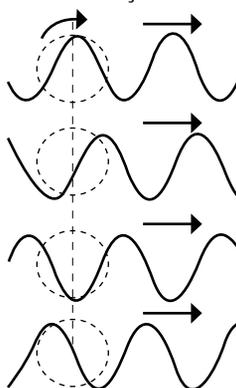
**Longitudinais:** direção da vibração igual à da propagação.



**Transversais:** direção da vibração perpendicular à da propagação.



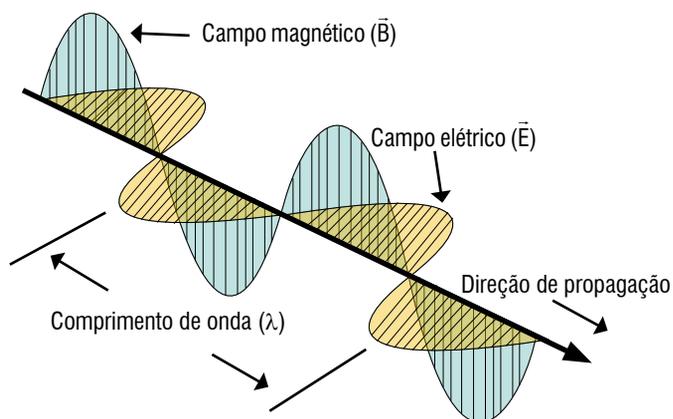
**Mistas:** vibrações transversais e longitudinais.



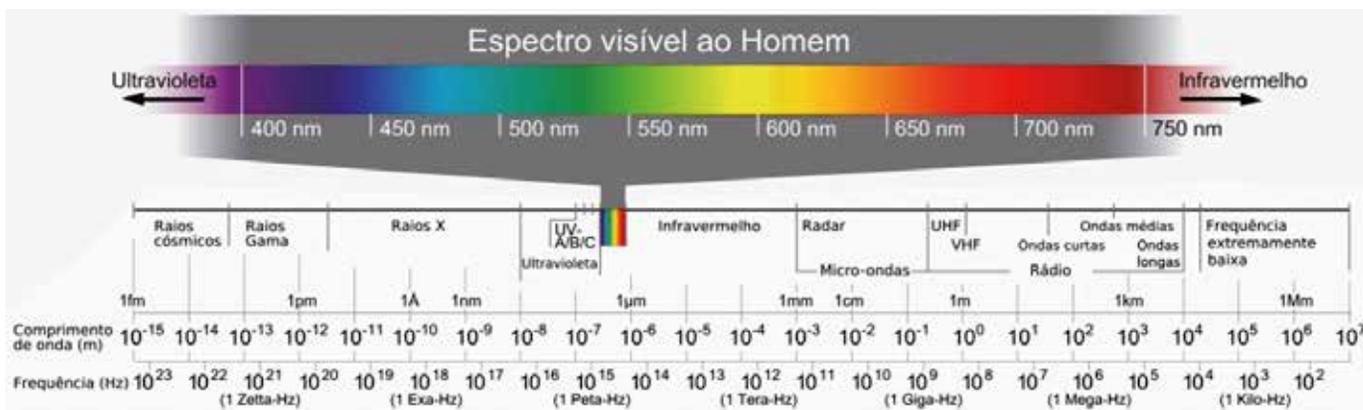
### 2.2 Ondas eletromagnéticas

São ondas geradas por cargas elétricas oscilantes e não necessitam de um meio material para se propagar, podendo se propagar no vácuo. Constituem-se de um campo elétrico e outro magnético que oscilam perpendicularmente entre si, conforme figura a seguir.

**Onda eletromagnética**



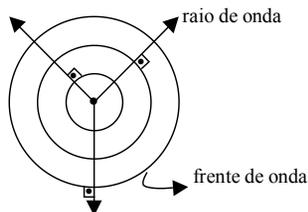
Abaixo estão representadas as aplicações das OEM:



### Frente de onda, raio de onda, pulso e trem de ondas

**Frente de onda** é a fronteira entre a região já atingida pela onda e a região ainda não atingida.

**Raio de onda** é uma linha orientada que tem origem na fonte de ondas e é perpendicular às frentes de ondas. Os raios de onda indicam a direção e o sentido de propagação das ondas em um meio.



**Pulso** é uma onda que consiste em uma única frente de onda, como por exemplo, a perturbação produzida em uma corda movendo-se sua extremidade uma única vez para cima e para baixo.

**Trem de ondas** é um conjunto de pulsos.

### 2.3 Ondas periódicas unidimensionais

$v$  → velocidade de propagação da onda

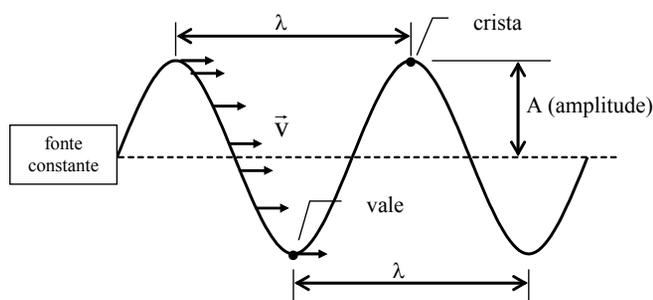
$\lambda$  → comprimento de onda

$f$  → frequência

$T$  → período

$$v = \lambda \cdot f$$

$$\lambda = v \cdot T$$

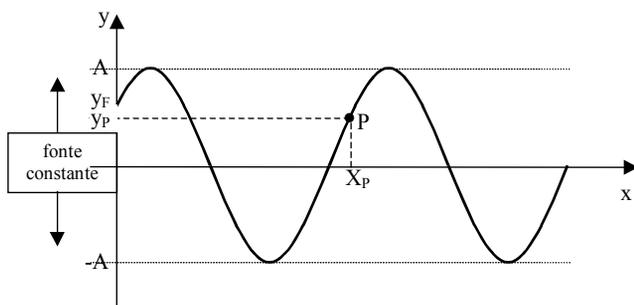


### 3. Equação de onda unidimensional

Para facilitar a compreensão será utilizado como exemplo a propagação de uma onda em uma corda esticada. A fonte vibra em MHS com frequência  $f$  e amplitude  $A$  em:

$$y_f = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

Cada ponto  $P$  da corda executa um MHS de mesma amplitude, porém estão defasados de um intervalo de tempo  $\Delta t = \frac{x_p}{v}$



$$y_p = A \cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi_0] = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x_p}{v}\right) + \varphi_0\right] \text{ substituindo } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$y_p = A \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x_p}{v}\right) + \varphi_0\right] = A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_p}{vT}\right) + \varphi_0\right]$$

$$y = A \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right] \quad y = A \cos[\omega t - kx + \varphi_0]$$

onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  é chamado de número de onda.

### 3.1 Velocidade de ondas transversais em cordas

onde:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

em que:

$\mu$  é a densidade linear de massa da corda →  $\mu = \frac{m}{L}$

$L$  é o comprimento do fio

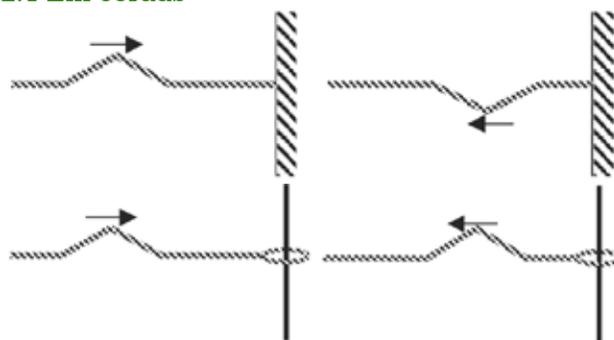
$T$  é a tensão à qual a corda está submetida

### 3.2 Reflexão

“Uma onda, propagando-se em um certo meio, voltará a se propagar neste meio ao incidir em uma superfície que separa este meio de outro meio com características diferentes (velocidade, comprimento de onda).”

**Atenção:** A onda refletida **mantém** a velocidade, o comprimento de onda e a frequência. Apenas a fase pode sofrer inversão.

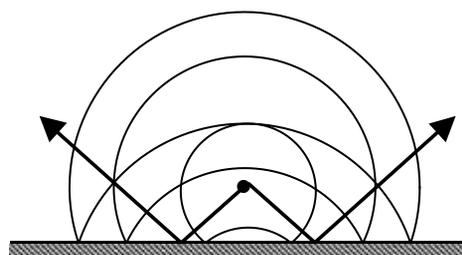
#### 3.2.1 Em cordas



**extremidade fixa:** há inversão de fase.

**extremidade livre:** não há inversão de fase.

#### 3.2.2 Em superfícies líquidas



### 3.3 Refração

“É a passagem de uma onda de um meio para outro com características diferentes. Essas características são: a velocidade, o comprimento de onda e possivelmente a direção de propagação.”

**ATENÇÃO:** A onda refratada mantém a frequência. A fase pode sofrer inversão.

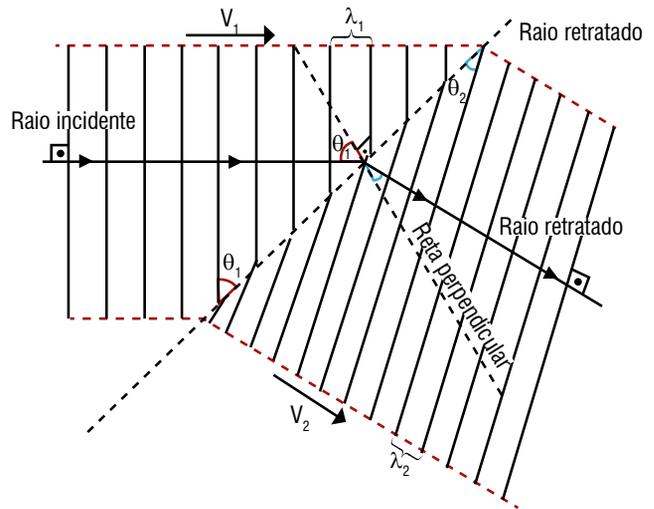
A partir do Teorema de Fermat temos a relação entre os ângulos de incidência e refração e as velocidades de propagação em cada meio:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{v_1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{v_2}$$

Como a frequência não se altera, podemos também relacionar os ângulos com os comprimentos de onda:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\lambda_1 f} = \frac{\text{sen}\theta_2}{\lambda_2 f} \rightarrow \frac{\text{sen}\theta_1}{\lambda_1} = \frac{\text{sen}\theta_2}{\lambda_2}$$

A figura abaixo ilustra a refração de uma onda mostrando a frente de onda, o raio de onda e os ângulos envolvidos:



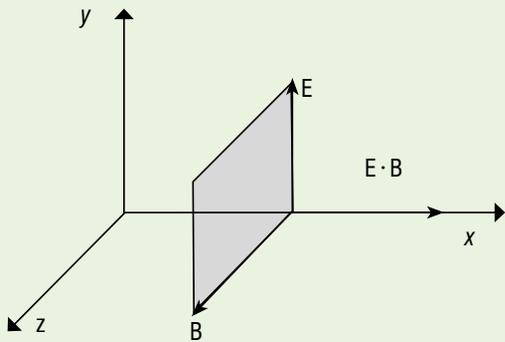
**Nota:** Repare que os ângulos que utilizamos na fórmula de refração podem ser vistos pelo raio incidente e a normal (assim como na óptica) ou entre a frente de onda e o diopetro.

#### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Uma onda eletromagnética propaga-se no vácuo ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ ). Em um certo instante da componente do campo elétrico é dado por:  $\vec{E} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$  e o campo magnético dado por:  $\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ . Determine o vetor velocidade de propagação da onda.

**Solução:**

Segundo o vetor de Poynting  $\left( \vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right)$  que determina o fluxo de energia obtida pelo produto vetorial dos vetores  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ :



Assim:

$$\vec{E} \times \vec{B} = (2\vec{i} + 3\vec{j}) \times (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 2\vec{k} + 2\vec{j} - 3\vec{k} - 3\vec{i} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

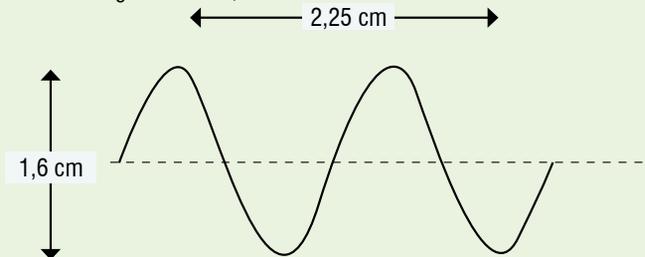
Para que este vetor tenha módulo igual à velocidade da luz no vácuo, devemos transformá-lo em um vetor unitário:

$$\vec{u} = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{-3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{14}}$$

Agora basta multiplicarmos este vetor de tamanho 1 por  $c$  ( $3 \cdot 10^8$ ). Assim

$$\text{o vetor velocidade da OEM será dado por: } \vec{v} = 3 \cdot 10^8 \frac{-3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{14}}$$

**02** O gráfico abaixo representa uma onda que se propaga com velocidade igual a 300 m/s.



Determine:

- a. a amplitude da onda;
- b. o comprimento de onda;
- c. a frequência;
- d. o período.

**Solução:**

a. A amplitude da onda é dada pela distância da origem até a crista da onda, ou seja:  $A = \frac{1,6}{2} = 0,8 \text{ cm}$

b. O comprimento de onda é dado pela distância entre duas cristas ou entre 3 nodos, ou seja: Como a figura mostra, a medida de três "meios-comprimento de onda", podemos calculá-lo:

$$\frac{3\lambda}{2} = 2,25 \text{ cm} \rightarrow \lambda = \frac{2,25 \text{ cm} \cdot 2}{3} \rightarrow \lambda = 1,5 \text{ cm}$$

c. Sabendo a velocidade de propagação e o comprimento de onda, podemos calcular a frequência através da equação:

$$v = \lambda f \rightarrow f = \frac{v}{\lambda}$$

Substituindo os valores na equação:

$$f = \frac{300 \text{ m/s}}{0,015 \text{ m}} \rightarrow f = 20000 \text{ Hz}$$

d. Como o período é igual ao inverso da frequência:

$$T = \frac{1}{f} \rightarrow T = \frac{1}{20000} \rightarrow T = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

**03** Uma agulha vibratória produz ondas com velocidade de propagação igual a 160 m/s e comprimento de onda de 1 mm, chegando em uma diferença de profundidade com um ângulo formado de 45° e sendo refratado. Após a mudança de profundidade o ângulo refratado passa a ser de 30°. Qual é a nova velocidade de propagação da onda? E o comprimento das ondas refratadas?

**Solução:**

Utilizando a fórmula de refração:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Utilizando a relação com velocidades de propagação, chegamos a equação:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

$$v_2 = \frac{\text{sen}\theta_2}{\text{sen}\theta_1} \cdot v_1$$

$$v_2 = \frac{\text{sen}30^\circ}{\text{sen}45^\circ} \cdot 160$$

$$v_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 160$$

$$v_2 = \frac{160}{\sqrt{2}}$$

$$v_2 = 113,1 \text{ m/s}$$

A velocidade da onda refratada será 113,1 m/s. Para calcular o comprimento de onda refratado, utilizamos a Lei de Snell, utilizando a relação com comprimentos de onda:

$$\frac{\text{sen}\theta_1}{\text{sen}\theta_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\lambda_2 = \frac{\text{sen}\theta_2}{\text{sen}\theta_1} \cdot \lambda_1$$

$$\lambda_2 = \frac{\text{sen}30^\circ}{\text{sen}45^\circ} \cdot 1 \text{ mm}$$

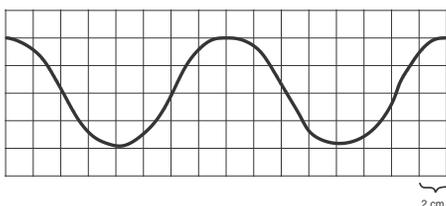
$$\lambda_2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot 1 \text{ mm}$$

$$\lambda_2 = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{2}}$$

$$\lambda_2 = 0,7 \text{ mm}$$

**EXERCÍCIOS NÍVEL 1**

**01 (FUVEST)** A figura mostra o perfil de uma onda harmônica com frequência de 200 Hz, que se propaga numa corda:



Determine, para essa onda:

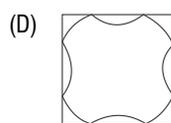
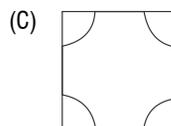
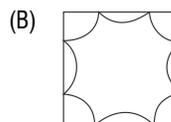
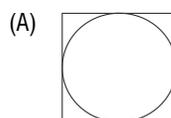
- a. a amplitude;
- b. o comprimento de onda;
- c. a velocidade de propagação.

**02 (FUVEST)** Um turista, observando o mar de um navio ancorado, avaliou em 12 metros a distância entre as cristas das ondas que se sucediam. Além disso, constatou que decorreram 45 segundos até que passassem por ele 19 cristas, incluindo nessa contagem tanto a que passava no instante em que começou a marcar o tempo como a que passava por ele quando terminou. Calcule a velocidade de propagação das ondas.

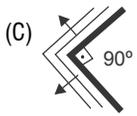
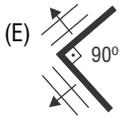
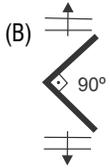
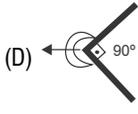
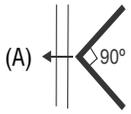
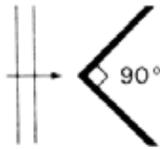
**03 (FUVEST)** Considere as proposições seguintes e classifique-as em verdadeiras (V) ou falsas (F):

- I. Refração é o fenômeno que consiste em uma onda passar de um meio para o outro. ( )
- II. Na refração, a frequência da onda não se altera. ( )
- III. Na refração, a velocidade da onda pode variar ou não. ( )
- IV. Na refração, a direção de propagação da onda pode variar ou não. ( )

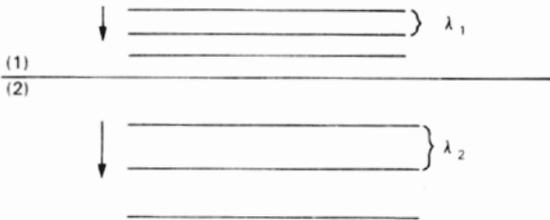
**04 (FUVEST)** Provoca-se uma perturbação no centro de um recipiente quadrado contendo líquido, produzindo-se uma frente de onda circular. O recipiente tem 2 m de lado e a velocidade da onda é de 1 m/s. Qual das figuras abaixo melhor representa a configuração da frente de onda, 1,2 segundos após a perturbação?



**05** Observe a figura. Ela representa uma onda plana que se propaga na superfície da água de uma piscina e incide sobre uma barreira. A alternativa que melhor representa a propagação da onda, após ser refletida pela barreira, é:

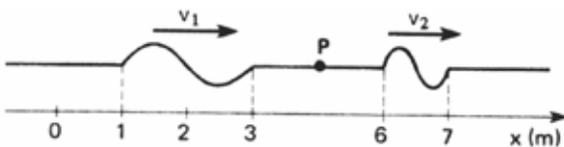


**06** No diagrama abaixo, representamos uma onda propagando-se do meio (1) para o meio (2). São dados  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .



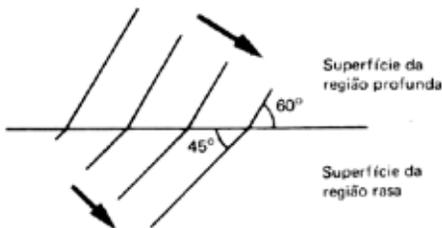
- O que se pode dizer sobre a frequência da onda nos dois meios?
- Em qual dos dois meios a onda se propaga com maior velocidade?

**07** O pulso proveniente da esquerda é transmitido através da junção  $P$  a uma outra corda, como se vê na figura:



Qual a razão entre a velocidade do pulso  $v_1$ , antes da junção e  $v_2$  depois?

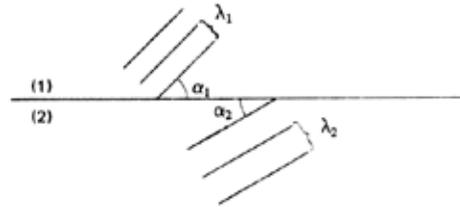
**08** Tem-se uma cuba de ondas com água em que há uma região rasa e outra profunda. São geradas ondas retas com uma régua, na região profunda, tal que na separação das regiões encontramos os ângulos de  $60^\circ$  e  $45^\circ$ , conforme a figura:



Sabendo que na região rasa a velocidade da onda é de  $\sqrt{6}$  cm/s e que a distância entre duas frentes consecutivas na região profunda é de  $\sqrt{3}$  cm, determine:

- a velocidade da onda, na região profunda;
- o comprimento de onda, na região rasa;
- a frequência das ondas na região rasa e na região profunda.

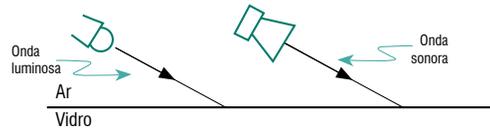
**09** Na figura abaixo representa-se um trem de ondas retas que passa de um meio 1 para um meio 2. A separação entre os traços indica o comprimento de onda  $\lambda$ :



Aponte a alternativa que condiz com a verdade:

- A figura não está correta, porque, se  $\lambda_2 > \lambda_1$ , deveríamos ter  $\alpha_1 < \alpha_2$ .
- A figura está correta e a velocidade de propagação da onda em 2 é maior que em 1.
- A figura representa corretamente uma onda passando de um meio para outro mais refringente que o primeiro.
- A figura não está correta, porque o comprimento de onda não varia quando uma onda passa de um meio para o outro.
- Todas as afirmações anteriores estão erradas.

**10**



- Uma onda sonora e uma onda luminosa monocromática, após se propagarem no ar, sofrem refração ao passarem do ar para o vidro. Esquematize suas trajetórias no vidro, justificando.
- Se a onda sonora tiver frequência de 1 kHz, qual será seu comprimento de onda no vidro? Ela continuará, nesse meio, a ser uma onda sonora? Justifique.

(Dados:  $V_{\text{som, vidro}} = 5.000$  m/s;  $V_{\text{som, ar(15°C)}} = 340$  m/s.)

**11** Considerando o fenômeno de ressonância, o ouvido humano deveria ser mais sensível a ondas sonoras com comprimentos de onda cerca de quatro vezes o comprimento do canal auditivo externo, que mede, em média, 2,5 cm. Segundo esse modelo, no ar, onde a velocidade de propagação do som é 340 m/s, o ouvido humano seria mais sensível a sons com frequências em torno de:

- 34 Hz.
- 1.320 Hz.
- 1.700 Hz.
- 3.400 Hz.
- 6.800 Hz.

**12** Radiações, como raios X, luz verde, luz ultravioleta, micro-ondas ou ondas de rádio, são caracterizadas por seu comprimento de onda ( $\lambda$ ) e por sua frequência ( $f$ ). Quando essas radiações propagam-se no vácuo, todas apresentam o mesmo valor para:

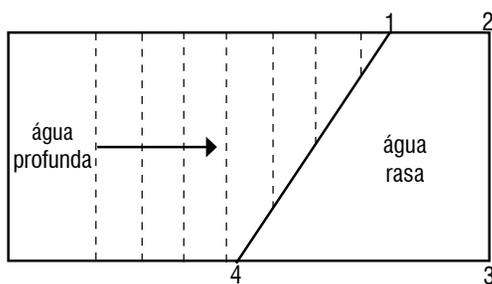
- $\lambda$ .
- $f$ .
- $\lambda \cdot f$ .
- $\lambda/f$ .
- $\lambda^2/f$ .

**13** Por um banhista passam 11 (onze) cristas de onda em 20 segundos. Determine a frequência e o período da onda correspondente.

**14 (Unifor)** Para se perceber dois sons distintamente, é necessário que eles sejam separados por um intervalo de tempo de, no mínimo, 0,10 s. A velocidade do som no ar é de  $3,4 \cdot 10^2$  m/s. Uma pessoa produz um som a certa distância de uma parede. Para que a pessoa ouça nitidamente o eco, é necessário que a parede esteja à distância mínima de:

- (A) 10 m.
- (B) 17 m.
- (C) 30 m.
- (D) 42 m.
- (E) 70 m.

**15** Em uma extremidade de um tanque de ondas, mergulhou-se uma chapa grossa de vidro, de forma trapezoidal, representada na figura por 1, 2, 3 e 4. A finalidade da chapa é criar, na respectiva extremidade, uma região em que a profundidade da água é menor que na outra. Ondas planas produzidas na região de água profunda incidem sobre a linha divisória 1-4, como indicado na figura. A velocidade dessas ondas é maior na água mais profunda do que na rasa. Quais dos desenhos propostos a seguir mostra corretamente o que acontece às ondas, à direita da linha 1-4?



- (A)
- (B)
- (C)
- (D)
- (E)

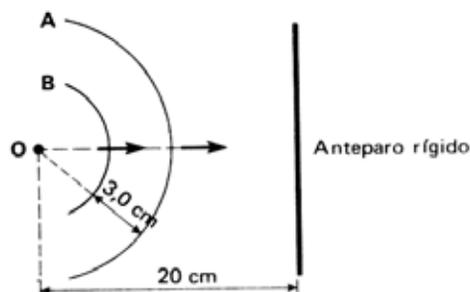
**EXERCÍCIOS NÍVEL 2**

**01 (ITA)** Um barco A navega contra as ondas a uma velocidade de 4 m/s. Uma embarcação B, ancorada, oscila com uma frequência de  $0,03 \text{ s}^{-1}$ . Sabendo que não há correnteza, mas que as ondas se propagam com a velocidade de 2,4 m/s, determine a frequência de oscilação do barco A.

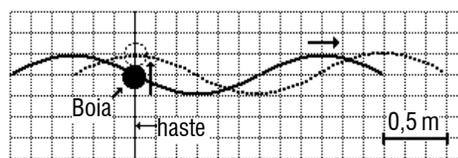
**02 (ITA)** Uma corda homogênea de densidade linear igual a  $0,50 \text{ kg/m}$  está tracionada com uma força de intensidade  $F$ . Uma perturbação aplicada na corda produz uma onda que se propaga por ela com velocidade de  $6,0 \text{ m/s}$ . Qual a intensidade  $F$  da força?

**03 (ITA)** Uma corda de comprimento  $\ell = 50,0 \text{ cm}$  e massa  $m = 1,00 \text{ g}$  está presa em ambas as extremidades sob tensão  $F = 80,0 \text{ N}$ . Nestas condições, qual a frequência fundamental de vibração desta corda?

**04** Dois pulsos circulares A e B são produzidos no ponto O da superfície tranquila da água de uma cuba de ondas. Os pulsos incidem em um anteparo plano colocado dentro da cuba, sofrendo reflexão. Sabendo que os pulsos propagam-se na água com velocidade de  $43 \text{ cm/s}$  e que A foi produzido no instante  $t = 0$ , determine a configuração do sistema no instante  $t = 1,0 \text{ s}$ .



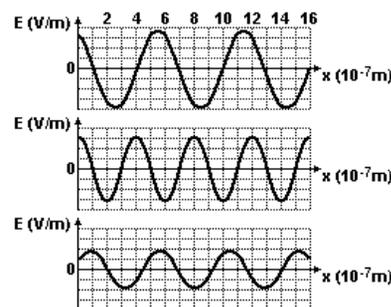
**05** Uma boia pode se deslocar livremente ao longo de uma haste vertical, fixada no fundo do mar. Na figura abaixo, a curva cheia representa uma onda no instante  $t = 0 \text{ s}$  e a curva tracejada, a mesma onda no instante  $t = 0,2 \text{ s}$ . Com a passagem dessa onda, a boia oscila.



Nesta situação, o menor valor possível da velocidade da onda e o correspondente período de oscilação da boia valem:

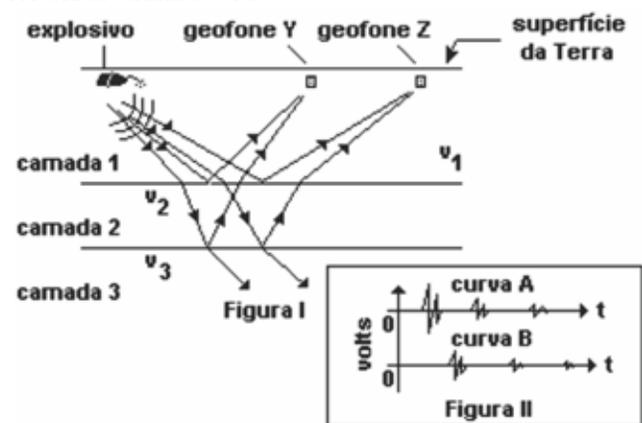
- (A)  $2,5 \text{ m/s}$  e  $0,2 \text{ s}$ .
- (B)  $5,0 \text{ m/s}$  e  $0,4 \text{ s}$ .
- (C)  $0,5 \text{ m/s}$  e  $0,2 \text{ s}$ .
- (D)  $5,0 \text{ m/s}$  e  $0,8 \text{ s}$ .
- (E)  $2,5 \text{ m/s}$  e  $0,8 \text{ s}$ .

**06** Cada figura a seguir representa, em um dado instante, o valor (em escala arbitrária) do campo elétrico  $E$  associado a uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo ao longo do eixo  $x$ , correspondente a uma determinada cor. As cores representadas são violeta, verde e laranja, não necessariamente nesta ordem. Sabe-se que a frequência da luz violeta é a mais alta dentre as três cores, enquanto a da luz laranja é a mais baixa. Identifique a alternativa que associa corretamente, na ordem de cima para baixo, cada cor com sua respectiva representação gráfica:



- (A) Laranja, violeta, verde. (D) Violeta, laranja, verde.  
 (B) Violeta, verde, laranja. (E) Verde, laranja, violeta.  
 (C) Laranja, verde, violeta.

**07** Na prospecção de petróleo, o método mais utilizado para sondar o subsolo baseia-se na reflexão de ondas sísmicas. Tais ondas são normalmente geradas por explosões subterrâneas próximas à superfície. As figuras adiante ilustram o método no qual uma onda de compressão se propaga em uma frente de onda esférica a partir do ponto de detonação de uma carga explosiva. Nesse exemplo, o subsolo é formado por três camadas de rochas, caracterizadas por três diferentes velocidades de propagação das ondas  $v_1$ ,  $v_2$  e  $v_3$ , respectivamente, conforme ilustra a figura I. As informações relativas ao subsolo são inferidas por meio de uma análise das ondas refletidas, cujas intensidades são medidas com um conjunto de microfones especiais, denominados geofones. A figura II mostra os sinais elétricos, em função do tempo, gerados em dois geofones pela passagem das ondas sísmicas produzidas por uma única explosão ocorrida no instante  $t = 0$  s.



Com o auxílio das figuras I e II, julgue os itens abaixo:

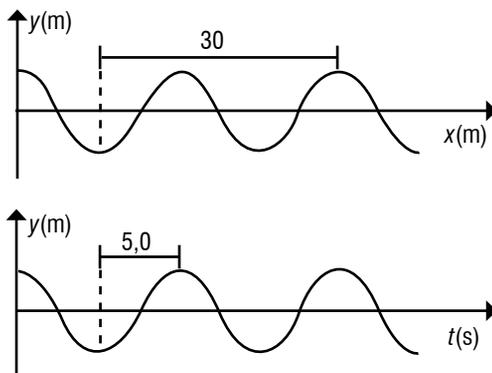
- Considerando a figura I, é correto deduzir que  $v_1 < v_2 < v_3$ .
- A curva A (figura II) refere-se ao sinal produzido pelo geofone Z (figura I).
- É correto supor que o terceiro sinal detectado em cada uma das curvas A e B da figura II possa ter sido originado de uma reflexão em uma terceira interface mais profunda não mostrada na figura I ou de uma reflexão múltipla dentro de uma das camadas.
- As figuras permitem concluir que a amplitude da onda sísmica decresce com a distância de propagação da onda e que, portanto, a onda sísmica perde intensidade ao se propagar.
- Admitindo que a distância entre o explosivo e o geofone Y seja de 600 m, que a velocidade de propagação da onda sísmica na camada 1 seja  $v_1 = 5$  km/s e que o tempo transcorrido desde a explosão até a chegada do sinal ao geofone Y seja de 0,2 s, então, em relação à situação mostrada na figura I, é correto concluir que a interface entre as camadas 1 e 2 está localizada a 400 m de profundidade.

**08** A densidade linear de uma corda vibrante é  $1,6 \cdot 10^{-4}$  kg/m. Uma onda transversal se propaga na corda e é descrita pela seguinte equação:

$$y = (0,021 \text{ m}) \sin[(2,0 \text{ m}^{-1})x + (30 \text{ s}^{-1})t]$$

- Qual é a velocidade da onda?
- Qual é a tensão na corda?

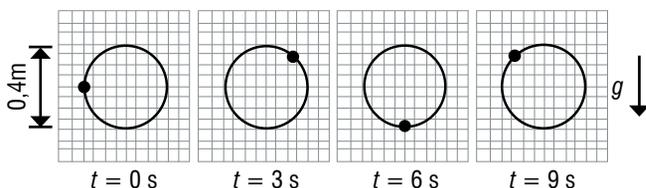
**09** Uma onda transversal propagando-se pelo espaço é representada a seguir pelos gráficos  $x - y$  e  $y - t$ , nos quais  $y$  representa a amplitude,  $x$  a posição e  $t$  o tempo.



Após a análise dos gráficos, pode-se afirmar que o comprimento de onda, o período, a frequência e a velocidade de propagação dessa onda são, respectivamente:

- 20 m, 10 s, 0,1 Hz e 2,0 m/s.
- 30 m, 5,0 s, 0,2 Hz e 6,0 m/s.
- 30 m, 5,0 s, 0,5 Hz e 10 m/s.
- 20 m, 10 s, 0,5 Hz e 10 m/s.
- 20 m, 5,0 s, 0,1 Hz e 2,0 m/s.

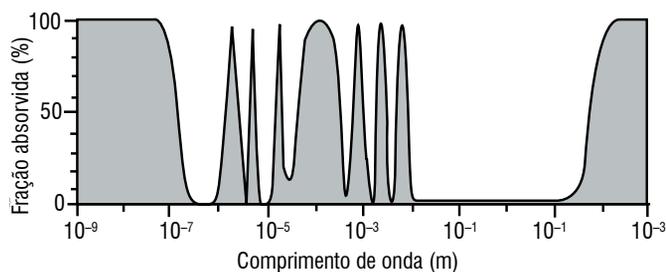
**10 (Fuvest)** Um sensor, montado em uma plataforma da Petrobras, com posição fixa em relação ao fundo do mar, registra as sucessivas posições de uma pequena bola que flutua sobre a superfície da água, à medida que uma onda do mar passa por essa bola continuamente. A bola descreve um movimento aproximadamente circular, no plano vertical, mantendo-se em torno da mesma posição média, tal como reproduzido na sequência de registros a seguir, nos tempos indicados. O intervalo entre registros é menor do que o período da onda. A velocidade de propagação dessa onda senoidal é de 1,5 m/s.



Para essas condições:

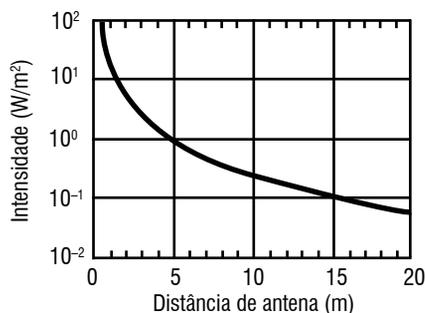
- determine o período  $T$ , em segundos, dessa onda do mar;
- determine o comprimento de onda, em m, dessa onda do mar;
- represente um esquema do perfil dessa onda, para o instante  $t = 14$  s, tal como visto da plataforma fixa. Indique os valores apropriados nos eixos horizontal e vertical.

**11 (Unicamp)** O sistema GPS (*Global Positioning System*) consiste em um conjunto de satélites em órbita em torno da Terra que transmitem sinais eletromagnéticos para receptores na superfície terrestre. A velocidade de propagação dos sinais é de 300.000 km/s. Para que o sistema funcione bem, a absorção atmosférica desse sinal eletromagnético deve ser pequena. A figura abaixo mostra a porcentagem de radiação eletromagnética absorvida pela atmosfera em função do comprimento de onda:



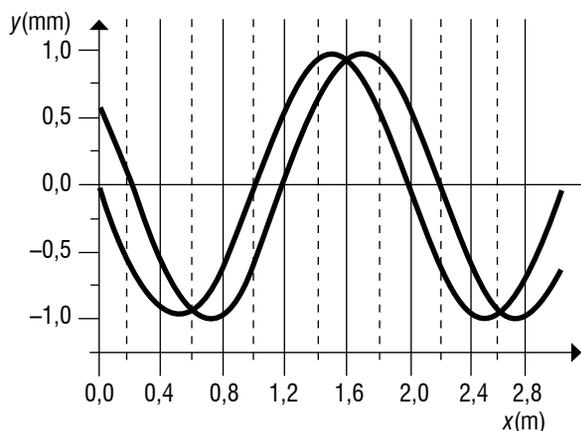
- a. A frequência do sinal GPS é igual a 1.500 MHz. Qual o comprimento de onda correspondente? Qual a porcentagem de absorção do sinal pela atmosfera?
- b. Uma das aplicações mais importantes do sistema GPS é a determinação da posição de um certo receptor na Terra. Essa determinação é feita através da medida do tempo que o sinal leva para ir do satélite até o receptor. Qual é a variação  $\Delta t$  na medida do tempo feita pelo receptor que corresponde a uma variação na distância satélite-receptor de  $\Delta x = 100 \text{ m}$ ? Considere que a trajetória do sinal seja retilínea.

**12 (Unicamp)** Uma antena de transmissão de telefonia celular situa-se no topo de uma torre de 15 m de altura. A frequência de transmissão é igual a 900 MHz e a intensidade da radiação emitida varia com a distância em relação à antena, conforme o gráfico:



- a. Qual a intensidade da radiação em um aparelho de telefone celular que está posicionado na base da torre da antena?
- b. O limite de segurança para a radiação eletromagnética nessa faixa de frequências é de aproximadamente  $1 \text{ mW/cm}^2$ . Qual a distância mínima que uma pessoa pode ficar dessa antena sem ultrapassar o limite de segurança?

**13 (UFPE)** As curvas A e B representam duas fotografias sucessivas de uma onda transversal que se propaga numa corda. O intervalo entre as fotografias é de 0,008 s e é menor do que o período da onda. Calcule a velocidade de propagação da onda na corda, em m/s.



**14 (AFA)** Considere um sistema formado por duas cordas diferentes, com densidades  $\mu_1$  e  $\mu_2$  tal que  $\mu_1 > \mu_2$ , em que se propagam dois pulsos idênticos, conforme mostra a figura abaixo.

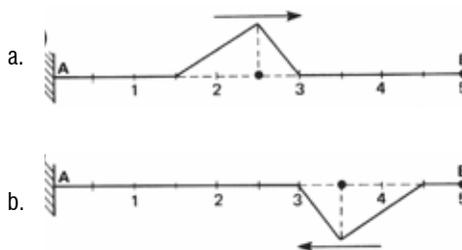


A opção que melhor representa a configuração resultante no sistema após os pulsos passarem pela junção das cordas é:

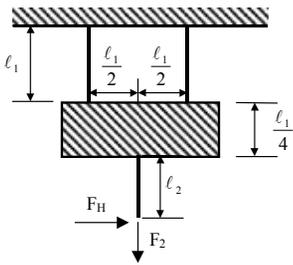
- (A)
- (B)
- (C)
- (D)

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01 (IME)** Um pulso triangular é produzido na extremidade A de uma corda AB, de comprimento  $L = 5,0 \text{ m}$ , cuja outra extremidade B é livre. Inicialmente, o pulso se propaga de A para B com velocidade constante  $v$ . A figura a representa o perfil da corda no instante  $t$  segundos e a figura b representa o perfil da corda no instante  $(t + 7)$  segundos. Determine a velocidade ( $v$ ) de propagação da onda, admitindo que a configuração da figura b esteja ocorrendo pela primeira vez, após o instante  $t$ .



**02** Uma placa infinitamente rígida encontra-se suspensa do teto por duas cordas elásticas de comprimento  $\ell_1$ . Uma terceira corda, igualmente elástica e de comprimento  $\ell_2$ , tem uma extremidade fixada à placa e outra submetida a uma força vertical  $F_2$ . Em um dado instante, um pulso horizontal  $F_H$  é aplicado nesta última extremidade. Determine o tempo transcorrido entre a aplicação do pulso e a chegada das ondas transversais no teto, considerando a massa das cordas desprezível na presença da massa da placa e uma tração constante ao longo das cordas.

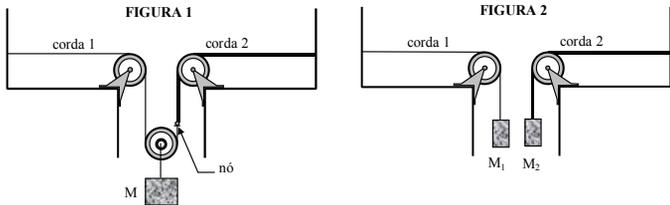


**Dados:**

- massa da placa:  $M = 210 \text{ kg}$
- comprimento  $l_1 = 0,5 \text{ m}$
- comprimento  $l_2 = 1,0 \text{ m}$
- força  $F_2 = 300 \text{ N}$
- aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$
- massa por unidade de comprimento das cordas:  $\mu = 0,030 \text{ kg/m}$

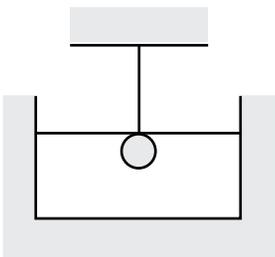
**03** Prove que, se uma onda transversal está se propagando ao longo de uma corda, então a inclinação de qualquer ponto da corda é numericamente igual à razão entre a velocidade escalar da partícula e a velocidade escalar da onda naquele ponto.

**04** Na figura 1, abaixo, a corda 1 tem uma densidade linear de  $3,00 \text{ g/m}$  e a 2, uma densidade linear de  $5,00 \text{ g/m}$ . Elas estão sob tensão devido a um bloco suspenso de massa  $M = 500 \text{ g}$ .



- Calcule a velocidade de onda em cada corda.
- O bloco é agora dividido em dois (com massas  $M_1 + M_2 = M$ ), de acordo com a configuração da figura 2. Determine as massas  $M_1$  e  $M_2$  para que as velocidades de onda, nas duas cordas, sejam iguais.

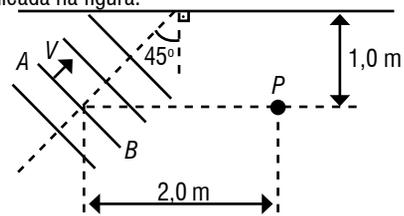
**05 (IME)** Uma corda é fixada a um suporte e tensionada por uma esfera totalmente imersa em um recipiente com água, como mostra a figura. Desprezando o volume e a massa da corda em comparação com o volume e a massa da esfera, determine a velocidade com que se propaga uma onda na corda.



**Dados:**

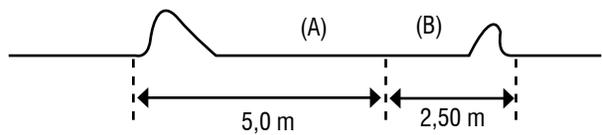
- aceleração da gravidade:  $g = 10 \text{ m/s}^2$
- densidade linear da corda:  $d = 1,6 \text{ g/m}$
- massa da esfera:  $m = 500 \text{ g}$
- volume da esfera:  $V = 0,1 \text{ dm}^3$
- massa específica da água:  $d = 1000 \text{ kg/m}^3$

**06 (FUVEST)** Ondas planas propagam-se na superfície da água com velocidade igual a  $1,4 \text{ m/s}$  e são refletidas por uma parede plana vertical, onde incidem sob ângulo de  $45^\circ$ . No instante  $t = 0$ , uma crista  $AB$  ocupa a posição indicada na figura.



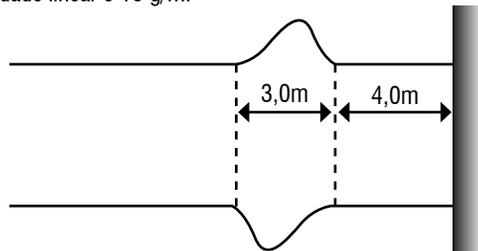
- Depois de quanto tempo essa crista atingirá o ponto  $P$ ?
- Esboce a configuração da crista quando passa por  $P$ .

**07 (UFRRJ)** Após atingir a junção de dois fios de densidades lineares diferentes, um pulso gera outros dois, um refratado e um refletido. A figura ilustra o perfil das cordas unidas  $0,01 \text{ s}$  depois de o pulso atingir a junção.



- Em qual das duas cordas estava o pulso incidente?
- Qual é a razão entre as densidades lineares das duas cordas  $\left(\frac{\mu_A}{\mu_B}\right)$ ?

**08 (PUC)** A figura a seguir representa dois instantâneos de uma corda pela qual se propaga um pulso transversal. A tração na corda é de  $784 \text{ N}$  e a densidade linear é  $10 \text{ g/m}$ .



Podemos afirmar corretamente que a velocidade de propagação do pulso e o intervalo de tempo entre as duas fotografias (instantâneos), valem respectivamente:

- $280 \text{ m/s}$  e  $0,0393 \text{ s}$
- $280 \text{ m/s}$  e  $0,0525 \text{ s}$
- $140 \text{ m/s}$  e  $0,0393 \text{ s}$
- $140 \text{ m/s}$  e  $0,0525 \text{ s}$
- $140 \text{ m/s}$  e  $0,0745 \text{ s}$

## 1. Introdução

Neste capítulo, estudaremos dois elementos importantes integrantes dos circuitos elétricos: os geradores e os receptores. Veremos basicamente como se comportam, quais são suas características, tensões, potências e seus rendimentos.

No final, iremos apresentar a Lei de Pouillet, que será a ferramenta para resolvermos circuitos simples que possam conter geradores e receptores.

## 2. Geradores elétricos

A função do gerador elétrico é transformar qualquer tipo de energia (mecânica, química, etc.) em energia elétrica. Ex.: pilhas, baterias.

Desta forma, o gerador elétrico é essencial em qualquer circuito elétrico. Simbologia



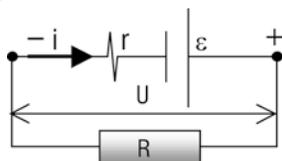
onde:

$r$  → resistência interna do gerador

$\varepsilon$  → força eletromotriz (f.e.m.)

### 2.1 Equação do gerador

Considere um gerador real, com f.e.m.  $\varepsilon$  e resistência interna  $r$ , ligado a uma resistência  $R$ .



A equação do gerador é definida como:

$$U = \varepsilon - ri$$

Onde:

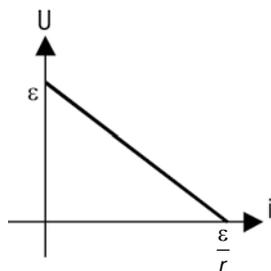
$U$  → d.d.p. útil ou tensão fornecida ao circuito.

$\varepsilon$  → força eletromotriz (fem) ou tensão total do gerador.

$r \cdot i$  → d.d.p. da resistência interna do gerador.

Repare que, no gerador, parte da tensão total ( $\varepsilon$ ) é transferida ao circuito ( $U$ ) e parte é consumida internamente pela resistência ( $r \cdot i$ ).

O gráfico  $U \times i$  de um gerador real tem o formato abaixo:

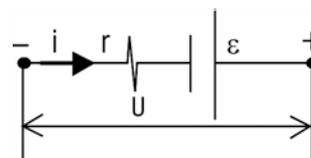


**Obs.:** poderemos também em alguns casos trabalhar com os chamados geradores ideais. São aqueles que possuem resistência interna nula (não há perdas de energia em seu interior) e, com isso, toda a tensão do gerador é transferida ao circuito.

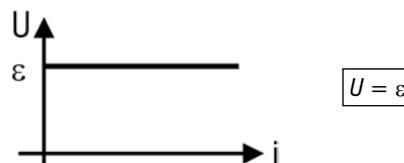


### 2.2 Gerador em circuito aberto

Considere um gerador que não está ligado à nenhuma resistência. Pelo fato do circuito estar aberto, não haverá passagem de corrente elétrica pelo gerador.

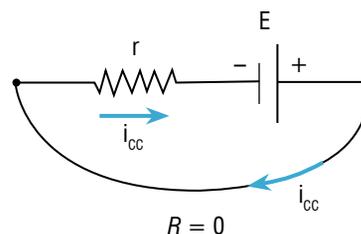


Logo, analisando a equação do gerador, teremos que a tensão nos terminais do gerador ( $U$ ) será igual à f.e.m. ( $\varepsilon$ ).



### 2.3 Gerador em curto circuito

Considere agora um gerador ligado pelos seus terminais a um fio de resistência desprezível. Nesse caso, a d.d.p. entre seus terminais é nula. ( $U = 0$ ).



Usando a equação do gerador, temos:

$$U = \varepsilon - ri$$

$$0 = \varepsilon - ri$$

$$i_{cc} = \frac{\varepsilon}{r}$$

Onde  $i_{cc}$  é chamada de corrente de curto circuito.

### 2.4 Potências no gerador

Multiplicando-se a equação do gerador por  $i$ , temos:  $U \cdot i = \varepsilon \cdot i - r \cdot i^2$

Onde:

$Ui \rightarrow$  potência útil ( $P_u$ )

$\varepsilon i \rightarrow$  potência total ( $P_t$ )

$r i^2 \rightarrow$  potência dissipada na resistência interna ( $P_d$ )

$$P_{\text{UTIL}} = P_{\text{TOTAL}} - P_{\text{DISSIPADA}}$$

**Obs.:** no caso do gerador ideal, a potência dissipada internamente na resistência será nula e toda a potência total será útil ao circuito.

### 2.5 Rendimento do gerador ( $\eta$ )

O rendimento de um gerador é dado pela razão entre a potência útil e a potência total.

$$\eta = \frac{P_{\text{UTIL}}}{P_{\text{TOTAL}}} = \frac{Ui}{\varepsilon i} = \frac{U}{\varepsilon}$$

### 2.6 Potência máxima transmitida pelo gerador

A potência útil é máxima quando a resistência equivalente do circuito externo (onde estão ligados os terminais do gerador) for igual à resistência interna do gerador  $r$ .

$$P_u = \varepsilon i - r \cdot i^2$$

$$P_{u \text{ máximo}} = \frac{dP_u}{di} = \varepsilon - 2ri = 0 \Rightarrow i = \frac{\varepsilon}{2r} = \frac{i_{cc}}{2}$$

Aplicando equação do gerador

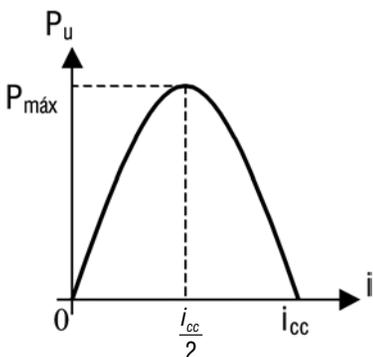
$$U = \varepsilon - r \frac{\varepsilon}{2r} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (I)$$

A d.d.p. da resistência equivalente do circuito externo é

$$U = R \frac{\varepsilon}{2r} \quad (II)$$

Igualando as duas equações teremos

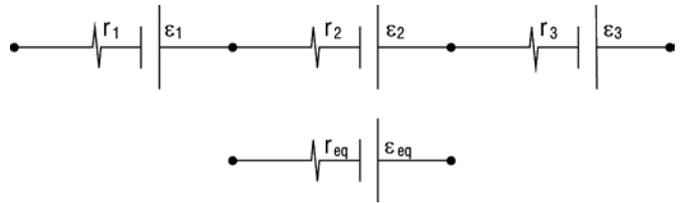
$$R \frac{\varepsilon}{2r} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow R = r$$



### 2.7 Associação de geradores

Podemos associar geradores da mesma forma que associamos resistores: em série, paralelo ou mista.

a. Geradores em série

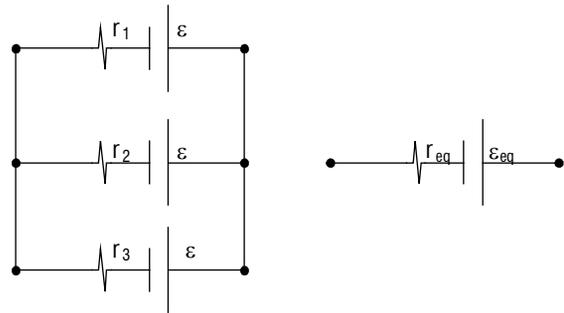


A resistência equivalente dos geradores em série é a soma das resistências internas de cada gerador e a f.e.m. equivalente é o somatório das f.e.m.'s.

$$r_{eq} = r_1 + r_2 + r_3$$

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

b. Geradores iguais (mesma f.e.m.) em paralelo



A resistência equivalente dos geradores em paralelo e a fem equivalente são dadas por:

$$\frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

$$\varepsilon_{eq} = \varepsilon$$

## 3. Receptores elétricos ou motores

A função dos receptores elétricos é receber a energia elétrica e converter em outra forma de energia (mecânica → motores em geral; Química → baterias, acumuladores de carga).

Simbologia:



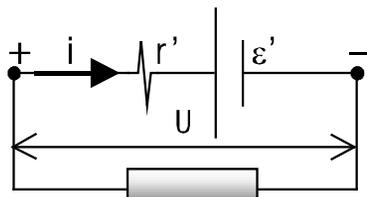
Onde:

$r' \rightarrow$  resistência interna do receptor

$\varepsilon' \rightarrow$  força contraeletromotriz (f.c.e.m.)

### 3.1 Equação do receptor

Considere um receptor real, com f.c.e.m.  $\varepsilon'$  e resistência interna  $r'$ , ligado a uma resistência  $R$ .



A equação do receptor é definida como:

$$U = \varepsilon' + r' \cdot i$$

Onde:

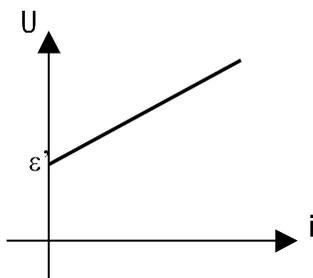
$U \rightarrow$  d.d.p. total recebida pelo receptor ou tensão fornecida pelo circuito.

$\varepsilon' \rightarrow$  força contraeletromotriz (fcem) ou tensão útil do receptor.

$r' \cdot i \rightarrow$  d.d.p. da resistência interna do receptor.

Observe que, no receptor, parte da tensão total ( $U$ ) recebida é utilizada pelo receptor ( $\varepsilon'$ ) e parte é consumida internamente pela resistência ( $r' \cdot i$ ).

O gráfico  $U \times i$  de um gerador real tem o formato abaixo:



**Obs.:** assim como os geradores, poderemos em alguns casos trabalhar com os chamados receptores ideais. São aqueles que possuem resistência interna nula (não há perdas de energia em seu interior) e, com isso, toda a tensão recebida pelo receptor será utilizada pelo mesmo.



### 3.2 Potências no receptor

Multiplicando-se a equação do receptor por  $i$ , temos:

$$Ui = \varepsilon' i + r' \cdot i^2$$

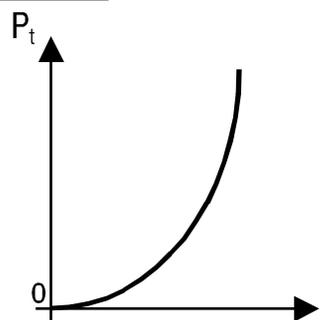
Onde:

$Ui \rightarrow$  potência total ( $P_t$ )

$\varepsilon' i \rightarrow$  potência útil ( $P_u$ )

$r' i^2 \rightarrow$  potência dissipada na resistência interna ( $P_d$ )

$$P_{TOTAL} = P_{\text{ÚTIL}} + P_{\text{DISSIPADA}}$$



### 3.3 Rendimento dos receptores ( $\eta$ )

O rendimento de um receptor é dado pela razão entre a potência útil e a potência total.

$$\eta = \frac{P_{\text{ÚTIL}}}{P_{\text{TOTAL}}} = \frac{\varepsilon' i}{U i} = \frac{\varepsilon'}{U}$$

## 4. Circuitos elétricos simples

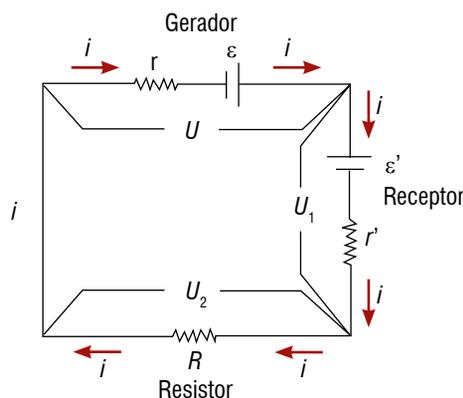
Os circuitos elétricos denominados simples são todos aqueles que podem ser reduzidos à uma única malha.

### Lei de Pouillet

$$i = \frac{\sum \varepsilon - \sum \varepsilon'}{\sum R}$$

**Obs.:**

1. O sentido da corrente no circuito é aquele em que  $\sum \varepsilon > \sum \varepsilon'$
2. A lei de Pouillet só pode ser aplicada a circuitos simples (uma única malha)
3. Não confundir o sentido da corrente nos geradores e receptores: a corrente entra pelo pólo negativo e sai pelo pólo positivo em um gerador e entra pelo pólo positivo e sai pelo pólo negativo em um receptor, como mostra a figura abaixo.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Responda aos itens que se seguem.

- Determine a força eletromotriz de um gerador de resistência interna igual a  $0,2 \Omega$ , sabendo que a sua corrente de curto-circuito vale  $30 \text{ A}$ .
- Qual é a diferença de potencial entre os terminais desse mesmo gerador, em circuito aberto?

**Solução:**

a. A expressão para o cálculo da corrente de curto-circuito é:

$$i_{cc} = \frac{\varepsilon}{r}$$

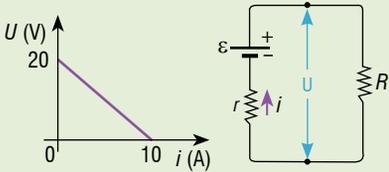
$$30 = \frac{\varepsilon}{0,2}$$

$$\varepsilon = 6 \text{ V}$$

b. No circuito aberto, a diferença de potencial é a própria força eletromotriz.

$$U = \varepsilon = 6 \text{ V}$$

**02** Temos, a seguir, a curva característica de um gerador e um circuito simples, em que esse gerador alimenta um resistor de resistência  $R$ .



Determine:

- a equação do gerador;
- a intensidade de corrente no circuito, se  $R$  for igual a  $3 \Omega$ ;

**Solução:**

a. A equação do gerador é:

$$U = \varepsilon - ri$$

Pelo gráfico, a d.d.p. máxima (que ocorre quando a corrente é nula) vale  $20 \text{ V}$ , ou seja, a f.e.m. é  $\varepsilon = 20 \text{ V}$ .

Quando a ddp é nula, a corrente é  $10 \text{ A}$  (corrente de curto circuito):

$$i_{cc} = \frac{\varepsilon}{r}$$

$$10 = \frac{20}{r}$$

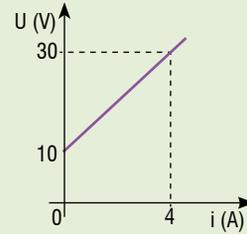
$$r = 2 \Omega$$

A equação do gerador é:

$$U = 20 - 2i$$

- $\varepsilon = R_{eq} \cdot i$   
 $20 = (3 + 2) \cdot i$   
 $i = 4 \text{ A}$

**03** O diagrama mostra como varia a tensão nos terminais de um receptor em função da corrente elétrica que por ele circula:



Determine, para esse receptor:

- a força contraeletromotriz ( $\varepsilon'$ ) e a resistência interna ( $r'$ );
- a potência útil e o rendimento, quando a corrente elétrica que o percorre é de  $4 \text{ A}$ .

**Solução:**

a. pelo gráfico, quando  $i = 0$ ,  $U = \varepsilon' = 10 \text{ V}$  e para  $i = 4 \text{ A}$ , a d.d.p.  $U$  vale  $30 \text{ V}$ .

A equação do receptor é:

$$U' = \varepsilon' + r' \cdot i'$$

$$30 = 10 + r' \cdot 4$$

$$r' = 5 \Omega$$

b. a potência útil é dada por:

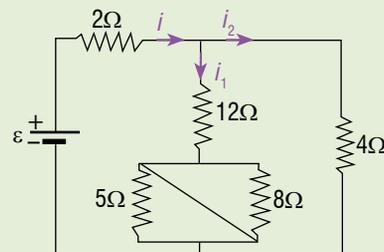
$$P_{\text{UTIL}} = \varepsilon' \cdot i = 10 \cdot 4 = 40 \text{ W}$$

$$\eta = \frac{P_{\text{UTIL}}}{P_{\text{TOTAL}}} = \frac{\varepsilon'}{U}$$

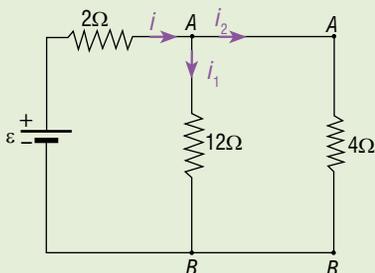
$$\eta = \frac{10}{30} \cong 0,33 = 33\%$$

**04** No circuito representado abaixo, a bateria é ideal e a intensidade de corrente  $i_1$  é igual a  $1,5 \text{ A}$ . O valor da força eletromotriz  $\varepsilon$  da bateria é:

- $10 \text{ V}$ .
- $20 \text{ V}$ .
- $30 \text{ V}$ .
- $40 \text{ V}$ .
- $50 \text{ V}$ .



**Solução:** Como os resistores de  $5\ \Omega$  e  $8\ \Omega$  estão curto-circuitados, temos:



$$U_{AB} = 12i_1 = 12 \cdot 1,5 \Rightarrow U_{AB} = 18\text{ V}$$

$$U_{AB} = 4i_2 \Rightarrow 18 = 4i_2 \Rightarrow i_2 = 4,5\text{ A}$$

$$i = i_1 + i_2 \Rightarrow i = 6,0\text{ A}$$

$$U_{AB} = \varepsilon - 2i$$

$$18 = \varepsilon - 2 \cdot 6,0 \Rightarrow \varepsilon = 30\text{ V}$$

Resposta: Letra C.

**05** Qual é o mínimo intervalo de tempo necessário para que um gerador de força eletromotriz  $\varepsilon = 50\text{ V}$  e resistência interna de  $3\ \Omega$  possa fornecer, a um resistor conveniente,  $2 \cdot 10^5\text{ J}$  de energia?

**Solução:** O intervalo de tempo é mínimo quando o gerador transfere máxima potência ao resistor. Para isso, a resistência desse resistor deve ser igual à resistência interna  $r$  do gerador, ou seja,  $3\ \Omega$ .

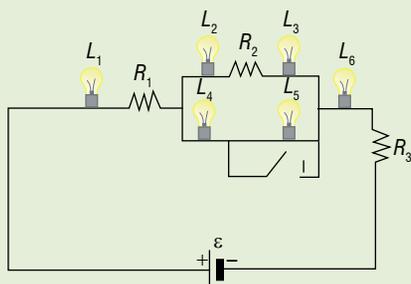
$$Pot_{\text{máx}} = \frac{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}{r} = \frac{E}{\Delta t_{\text{min}}} \Rightarrow \Delta t_{\text{min}} = \frac{4Er}{\varepsilon^2}$$

$$\Delta t_{\text{min}} = \frac{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3}{50^2}$$

$$\Delta t_{\text{min}} = 960\text{ s} = 16\text{ min}$$

Resposta: 16 minutos.

**06** No circuito mostrado, todas as lâmpadas são iguais.  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  são três resistores. A bateria representada tem resistência elétrica desprezível. Suponha que o interruptor  $I$  esteja aberto.



Sabendo que o brilho de uma lâmpada depende da intensidade da corrente elétrica que passa por ela, assinale a(s) proposição(ões) correta(s).

01.  $L_1$  brilha mais do que  $L_2$  e esta, mais do que  $L_3$ .

02.  $L_2$  e  $L_3$  têm o mesmo brilho.

04.  $L_1$  tem o mesmo brilho de  $L_6$ .

08. Ao fechar o interruptor  $I$ , o brilho de  $L_4$  não permanece o mesmo. Dê como resposta a soma dos números associados às proposições corretas.

**Solução:**

01. Incorreta:  $L_1$  brilha mais do que  $L_2$ , mas  $L_2$  e  $L_3$  têm o mesmo brilho porque estão em série ( $i_{L_2} = i_{L_3}$ ).

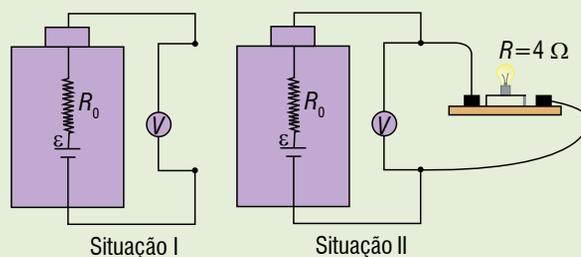
02. Correta.

04. Correta:  $L_1$  e  $L_6$  estão em série.

08. Correta: como  $L_5$  é curto-circuitado, as intensidades das correntes no circuito se alteram.

Resposta: 14.

**07** Uma bateria possui força eletromotriz e resistência interna  $R_0$ . Para determinar essa resistência, um voltímetro foi ligado aos dois polos da bateria, obtendo-se  $V_0 = \varepsilon$  (situação I). Em seguida, os terminais da bateria foram conectados a uma lâmpada. Nessas condições, a lâmpada tem resistência  $R = 4\ \Omega$  e o voltímetro indica  $V_A$  (situação II), de tal forma que  $\frac{V_0}{V_A} = 1,2$ .



Dessa experiência, conclui-se que o valor de  $R_0$  é:

(A)  $0,8\ \Omega$ .

(D)  $0,2\ \Omega$ .

(B)  $0,6\ \Omega$ .

(E)  $0,1\ \Omega$ .

(C)  $0,4\ \Omega$ .

**Solução:**

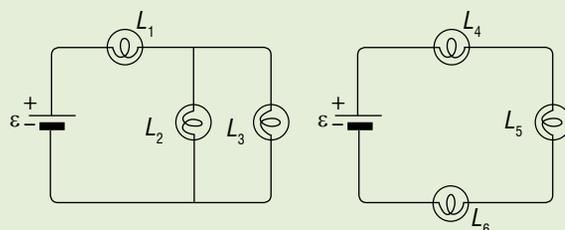
$$\frac{V_0}{V_A} = 1,2 \Rightarrow V_A = \frac{\varepsilon}{1,2}$$

$$V_A = 4i \Rightarrow i = \frac{V_A}{4} = \frac{\varepsilon}{4,8}$$

$$i = \frac{\varepsilon}{R_0 + 4} = \frac{\varepsilon}{4,8} \Rightarrow R_0 = 0,8\ \Omega$$

Resposta: Letra A.

**08** Usando seis lâmpadas iguais e duas baterias iguais, foram montados os dois circuitos a seguir:



Considerando as baterias ideais e desprezando a influência da temperatura na resistência elétrica, compare o brilho da lâmpada  $L_2$  com o da lâmpada  $L_5$ .

**Solução:**

Seja  $R$  a resistência elétrica de cada lâmpada, temos:

No circuito da esquerda:

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon}{R + \frac{R}{2}} = \frac{2\varepsilon}{3R}$$

$$i_2 = \frac{i_1}{2} \Rightarrow i_2 = \frac{\varepsilon}{3R}$$

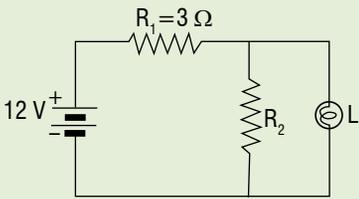
No outro circuito:

$$i_5 = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{\varepsilon}{3R}$$

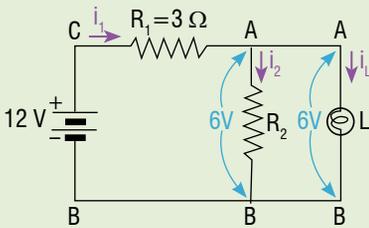
$i_2 = i_5 \Rightarrow$  Brilhos iguais

Resposta: São iguais.

**09** Considere ideal a bateria presente no circuito a seguir e calcule a resistência  $R_2$  para que a lâmpada  $L$  opere conforme suas especificações, que são:  $3W - 6V$ .



**Solução:**



Em  $L$ , temos:

$$Pot_L = U_L i_L \Rightarrow 3 = 6i_L \Rightarrow i_L = 0,5 A$$

Para calcular  $i_1$ , note que  $U_{CB} = U_{CA} + U_{AB}$ . Então:

$$12 = U_{CA} + 6 \Rightarrow U_{CA} = 6V$$

Em  $R_1$ , calculamos  $i_1$ :

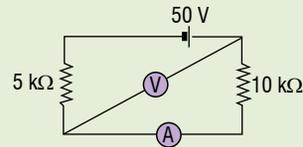
$$U_{CA} = R_1 i_1 \Rightarrow 6 = 3i_1 \Rightarrow i_1 = 2 A$$

Para calcular  $R_2$ , podemos fazer:

$$i_1 = i_2 + i_L \Rightarrow 2 = i_2 + 0,5 \Rightarrow i_2 = 1,5 A$$

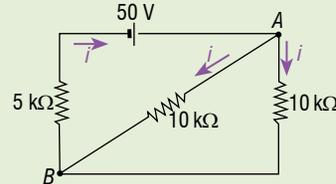
$$U_{AB} = R_2 i_2 \Rightarrow 6 = R_2 \cdot 1,5 \Rightarrow \boxed{R_2 = 4 \Omega}$$

**10** No circuito esquematizado a seguir, as resistências do gerador e do amperímetro são desprezíveis. A resistência interna do voltímetro é igual a  $10 k\Omega$ .



Determine as indicações do amperímetro e do voltímetro.

**Solução:**



$$\varepsilon = R_{eq} \cdot I \Rightarrow 50 V = 10 k\Omega \cdot I \Rightarrow I = 5 mA$$

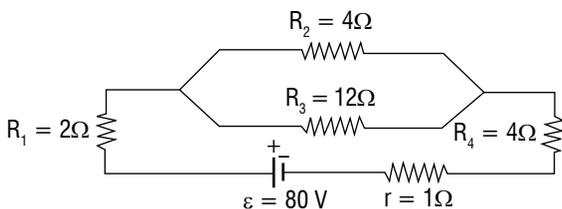
$$\boxed{i = 2,5 mA}$$

$$U_{AB} = 10 k\Omega \cdot 2,5 mA \Rightarrow \boxed{U_{AB} = 25 V}$$

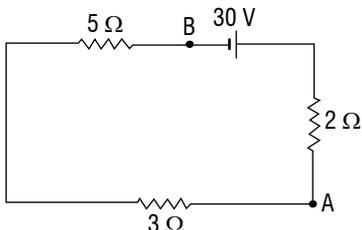
Resposta: 2,5 mA e 25 V

**EXERCÍCIOS NÍVEL 1**

**01** Determine a intensidade da corrente elétrica nos resistores  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  do circuito a seguir:

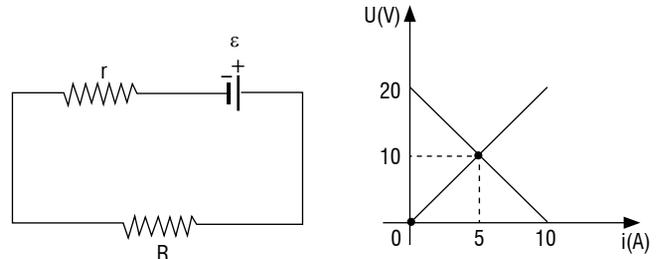


**02** No circuito representado, o gerador é ideal:



Calcule a d.d.p. entre os pontos  $A$  e  $B$ .

**03** Um gerador de força eletromotriz igual a  $\varepsilon$  e resistência interna  $r$  alimenta um resistor de resistência  $R$ . O esquema do circuito montado, bem como as curvas características do gerador e do resistor, estão mostrados a seguir:



Determine:

- $\varepsilon$ ,  $r$  e  $R$ ;
- a potência dissipada no resistor;
- o rendimento elétrico do gerador.

**04** Em uma remessa de materiais importados há uma “caixa preta” contendo um circuito elétrico desconhecido. Por meio de um conjunto de medidas da corrente  $i$ , “puxada” da caixa, e da correspondente diferença de potencial  $V_A - V_B$  entre os terminais  $A$  e  $B$  (figura 1) levantou-se a curva característica mostrada na figura 2. Proponha um circuito elétrico que seja equivalente àquele da “caixa preta” e identifique seus componentes.



Figura 1

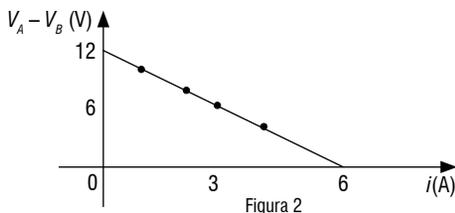
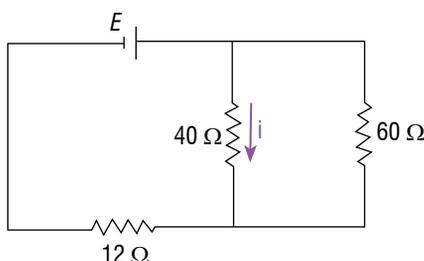
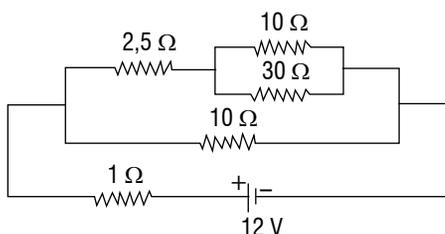


Figura 2

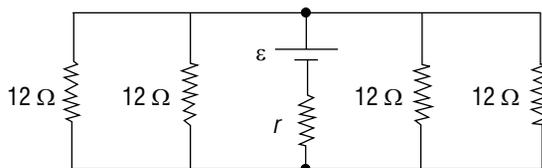
**05** No circuito esquematizado, onde  $i = 0,6$  A, determine a força eletromotriz  $E$  do gerador ideal:



**06** No circuito esquematizado a seguir, calcule a intensidade de corrente no resistor de  $30 \Omega$ :



**07** Considere o circuito esquematizado a seguir, em que o gerador tem força eletromotriz  $\varepsilon = 12$  V e resistência interna  $r = 3 \Omega$ :

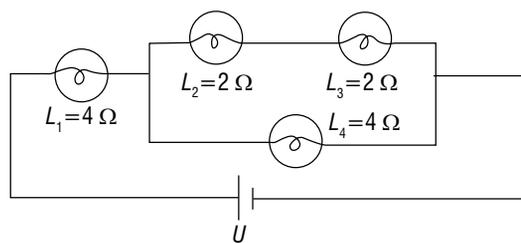


Determine:

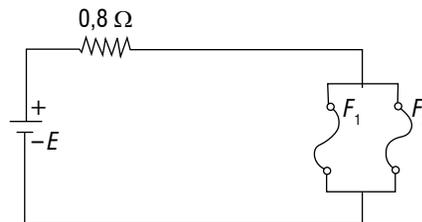
- a intensidade de corrente no gerador;
- a tensão entre os terminais do gerador.

**08** Um gerador de força eletromotriz de 12 V e resistência interna de  $3 \Omega$  deve alimentar um aquecedor para levar determinada quantidade de água à temperatura de ebulição no menor tempo possível. O aquecedor poderá ser constituído de um ou mais dos seguintes resistores:  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $R_2 = 3 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ . Esquematize o circuito apropriado.

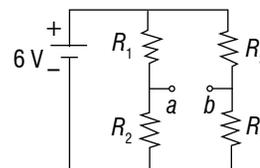
**09** As lâmpadas  $L_1, L_2, L_3$  e  $L_4$  estão ligadas à fonte de tensão  $U$ , conforme o esquema. Todas as lâmpadas estão acesas. Se  $L_2$  “queimar”, o que ocorrerá com os brilhos de  $L_1$  e  $L_4$ , respectivamente?



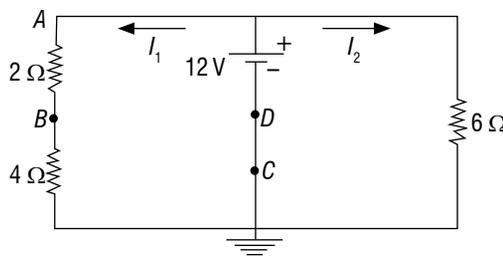
**10** No circuito abaixo,  $F_1$  é um fusível de resistência de  $0,3 \Omega$ , que suporta uma corrente máxima de 5 A, e  $F_2$  é um fusível de resistência de  $0,6 \Omega$ , que suporta uma corrente máxima de 2 A. Determine o maior valor da tensão  $E$ , de modo a não queimar nenhum fusível.



**11** A figura mostra um circuito elétrico, em que o gerador é ideal e tem tensão de 6 V. O gerador alimenta o conjunto de resistores  $R_1 = 40 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$  e  $R_4 = 15 \Omega$ . Sendo os pontos  $a$  e  $b$  mantidos em aberto, qual a tensão entre eles?



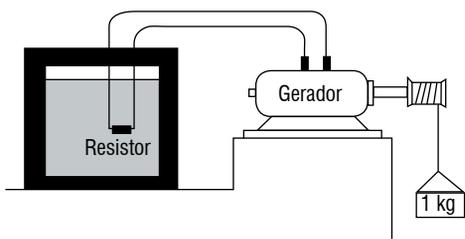
**12** Uma bateria de força eletromotriz de 12 V e resistência interna desprezível alimenta o circuito resistivo indicado na figura:



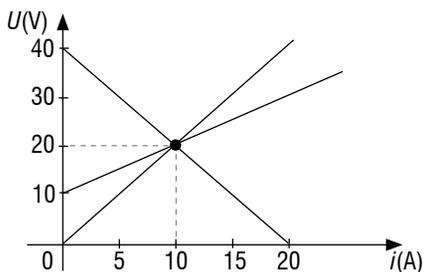
- Quais os potenciais nos pontos  $A$  e  $B$ , referidos à Terra?
- Que a resistência que deve ser adicionada ao circuito, entre os pontos  $C$  e  $D$ , para que o potencial no ponto  $A$ , referido à Terra, torne-se igual a 6 V?

**13** A figura ilustra um gerador elétrico ligado a um resistor imerso em  $1,0 \cdot 10^{-2}$  kg de um líquido isolado termicamente. O gerador tem um rendimento de 50% e é movido por um corpo de massa igual a 1,0 kg. Considerando o valor da aceleração da gravidade como  $10 \text{ m/s}^2$ , calcule:

- a energia elétrica gerada, se o corpo se desloca para baixo, percorrendo, uma distância de 10 m com uma velocidade constante;
- a variação na temperatura do líquido após o corpo percorrer esses 10 m, considerando que nenhuma mudança de fase ocorre no líquido. (Calor específico do líquido:  $5,0 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{°C}^{-1}$ .)



14 A figura a seguir representa as curvas características de um gerador, um receptor e um resistor:

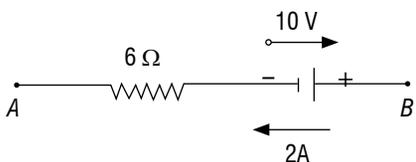


Determine:

- as resistências elétricas do resistor ( $R_1$ ), do gerador ( $R_2$ ) e do receptor ( $R_3$ );
- os rendimentos elétricos do gerador e do receptor, quando estiverem operando sob corrente de 5 A.

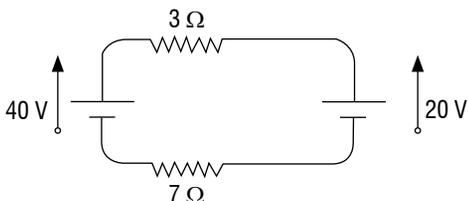
15 A diferença de potencial entre os terminais de uma bateria é de 8,5 V, quando há uma corrente que a percorre internamente do terminal negativo para o positivo, de 3 A. Por outro lado, quando a corrente que a percorre internamente é de 2 A, indo do terminal positivo para o negativo, a diferença de potencial entre seus terminais é de 11 V. Determine a resistência interna ( $r$ ) e a força eletromotriz ( $\varepsilon$ ) da bateria.

16 Determine  $V_{BA} = V_B - V_A$  no ramo abaixo:



- 2 V.
- +2 V
- +16 V.
- +22 V.

17 Determine a corrente elétrica  $i$  no circuito abaixo:

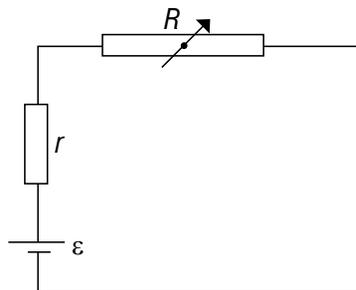


- 0,5 A.
- 1,0 A.
- 2,0 A.
- 6,0 A.

18 Ligando-se um resistor de  $0,10 \Omega$  a uma bateria com f.e.m. de 1,5 V, tem-se uma potência, dissipada no resistor, de 10 W. A diferença de potencial, em Volts, e a resistência interna da bateria, em  $\Omega$ , são, respectivamente:

- 1 e 0,05.
- 1 e 0,005.
- 10 e 0,05.
- 10 e 0,005.

19 É dado o circuito a seguir, em que  $\varepsilon$  é uma bateria de f.e.m. desconhecida e resistência interna  $r$  também desconhecida e  $R$  é uma resistência variável. Verifica-se que, para  $R = 0$  a corrente no circuito é  $i_0 = 4,0$  A e para  $R = 13,5 \Omega$ , a corrente é  $i = 0,40$  A.



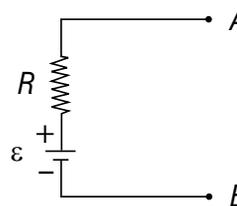
Calcule a f.e.m.  $\varepsilon$  da bateria e a sua resistência interna  $r$ .

20 A diferença de potencial obtida nos terminais de um gerador é 12 volts. Quando esses terminais são colocados em curto-circuito, a corrente elétrica fornecida pelo gerador é 5,0 ampéres. Nessas condições, a resistência interna do gerador é, em ohms, igual a:

- 2,4.
- 7,0.
- 9,6.
- 17.
- 60.

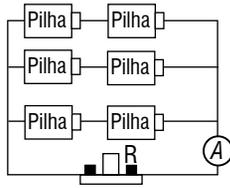
### EXERCÍCIOS NÍVEL 2

01 Uma bateria elétrica real equivale a uma fonte ideal com força eletromotriz  $\varepsilon$  em série com uma resistência  $R$ , como mostra a figura a seguir.



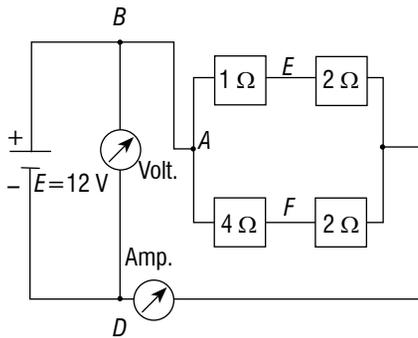
Quando os terminais A e B são ligados em curto-circuito a corrente é de 10 A. Quando se coloca entre os pontos A e B uma resistência de  $1,8 \Omega$  a corrente é de 5 A. Qual o valor de  $\varepsilon$ , em volts?

02 Seis pilhas iguais, cada uma com diferença de potencial  $V$ , estão ligadas a um aparelho, com resistência elétrica  $R$ , na forma esquematizada na figura. Nessas condições, a corrente medida pelo amperímetro A, colocado na posição indicada, é igual a:



- (A)  $\frac{V}{R}$ .
- (B)  $\frac{2V}{R}$ .
- (C)  $\frac{2V}{3R}$ .
- (D)  $\frac{3V}{R}$ .
- (E)  $\frac{6V}{R}$ .

03 Um gerador de corrente contínua alimenta o seguinte circuito elétrico:

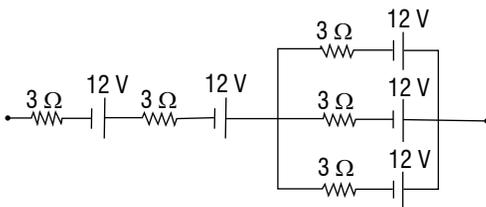


A força eletromotriz é de 12 V e a sua resistência interna é  $r$ . Na condição de potência máxima transferida para o jogo de resistências entre os pontos A e C, as leituras do voltímetro e do amperímetro serão, respectivamente:

- (A) 7 V, 4 A.
- (B) 6 V, 3 A.
- (C) 5 V, 5 A.
- (D) 4 V, 8 A.
- (E) 3 V, 7 A.

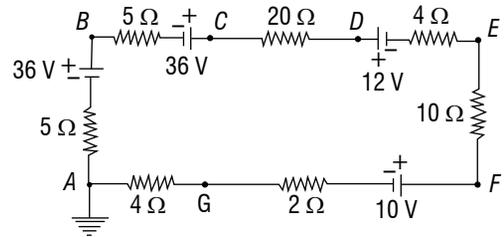
04 Um gerador de rendimento igual a 90% recebe de uma turbina hidráulica uma potência  $P = 20$  kW. Esse gerador alimenta um motor elétrico de rendimento igual a 80%. Qual a potência  $P'$  disponível no eixo desse motor?

05 Calcule a força eletromotriz e a resistência elétrica equivalente à seguinte associação de geradores:

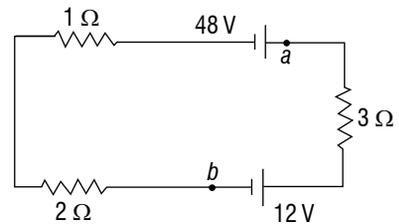


06 Com relação ao circuito dado, determine:

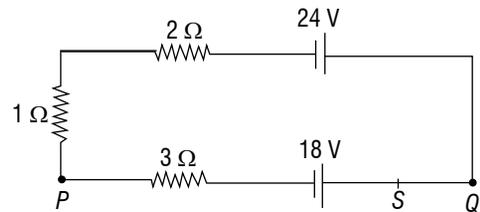
- a. a intensidade e o sentido da corrente elétrica;
- b. os potenciais nos pontos A, B, C, D, E, F e G, supondo nulo o potencial da Terra (potencial de referência);
- c. a diferença de potencial entre os pontos C e G ( $U_{CG} = V_C - V_G$ ).



07 No circuito visto na figura, determine, em volts, a diferença de potencial  $V_{ab}$ .



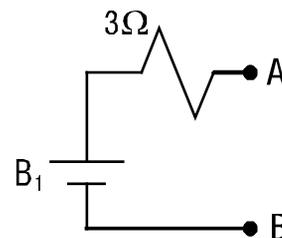
08 É dado o circuito a seguir:



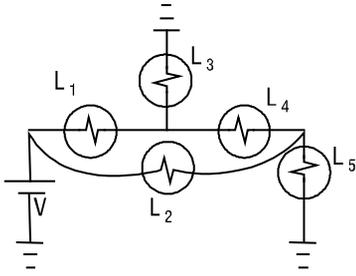
Determine:

- a. a diferença de potencial entre os pontos Q e P;
- b. a diferença de potencial entre os pontos Q e P, se o circuito for cortado no ponto S.

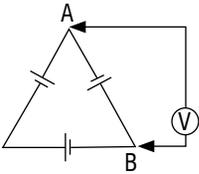
09 Três lâmpadas,  $L_1$  (6W – 6V),  $L_2$  (6W – 6V) e  $L_3$  (24W – 12 – V), devem ser ligadas entre os pontos A e B do circuito abaixo, composto de uma bateria acumuladora ideal  $B_1$ , e de um resistor de 3 Ω. Sabendo que um voltímetro ideal ligado aos terminais A e B marca 24 V, determine as associações das lâmpadas nas quais nenhuma delas se queima. Justifique a sua resposta.



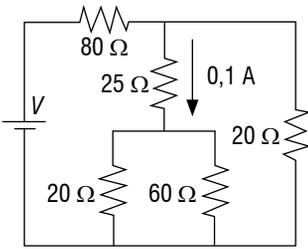
**10** No circuito mostrado na figura existem cinco lâmpadas iguais. Quatro estão acesas e uma apagada. Determine a lâmpada que está apagada e justifique sua resposta.



**11** Três baterias exatamente iguais (mesma f.e.m. e mesma resistência interna) são ligadas conforme indicado na figura. Determine a d.d.p. medida pelo voltímetro entre os pontos A e B, justificando sua resposta.

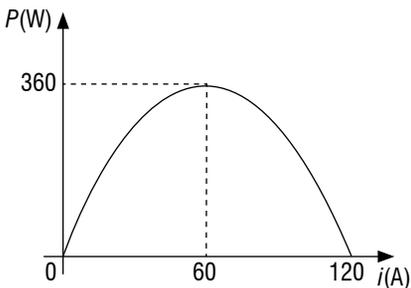


**12** Uma corrente de 0,10 A passa pelo resistor de  $25 \Omega$  conforme indicado na figura abaixo. Qual é a corrente que passa pelo resistor de  $80 \Omega$ ?



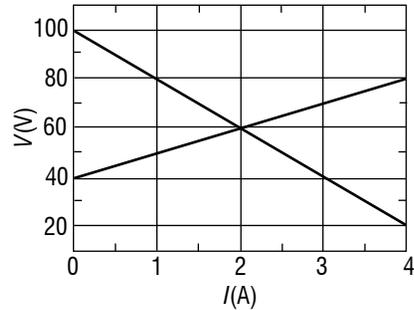
- (A) 0,1 A.
- (B) 0,2 A.
- (C) 0,3 A.
- (D) 0,4 A.
- (E) 0,5 A.

**13** Uma bateria de automóvel tem uma força eletromotriz  $\varepsilon = 12\text{ V}$  e resistência interna  $r$  desconhecida. Essa bateria é necessária para garantir o funcionamento de vários componentes elétricos embarcados no automóvel. Na figura a seguir, é mostrado o gráfico da potência útil  $P$  em função da corrente  $i$  para essa bateria, quando ligada a um circuito elétrico externo.

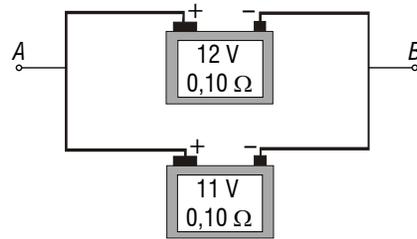


- a. Determine a corrente de curto-circuito da bateria e a corrente na condição de potência útil máxima. Justifique sua resposta.
- b. Calcule a resistência interna  $r$  da bateria.
- c. Calcule a resistência  $R$  do circuito externo nas condições de potência máxima.
- d. Sabendo que a eficiência  $\eta$  de uma bateria é a razão entre a diferença de potencial  $V$  fornecida pela bateria ao circuito e a sua força eletromotriz  $\varepsilon$ , calcule a eficiência da bateria nas condições de potência máxima.
- e. Faça um gráfico que representa a curva característica da bateria. Justifique sua resposta

**14** No gráfico a seguir estão representadas as características de um gerador, de força eletromotriz igual a  $\varepsilon$  e resistência interna  $r$ , e um receptor ativo de força contraeletromotriz  $\varepsilon'$  e resistência interna  $r'$ . Sabendo que os dois estão interligados, determine a resistência interna e o rendimento para o gerador e para o receptor.



**15** Um estudante dispunha de duas baterias comerciais de mesma resistência interna de  $0,10 \Omega$ , mas verificou, por meio de um voltímetro ideal, que uma delas tinha força eletromotriz de 12 volts e a outra, de 11 volts. A fim de avaliar se deveria conectar em paralelo as baterias para montar uma fonte de tensão, ele desenhou o circuito indicado na figura a seguir e calculou a corrente  $i$  que passaria pelas baterias desse circuito.



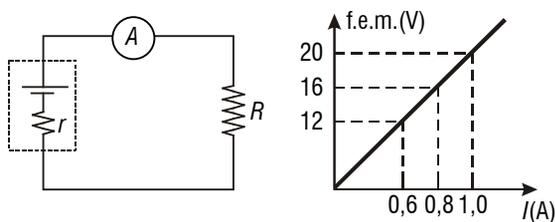
- a. Calcule o valor encontrado pelo estudante para a corrente  $i$ .
- b. Calcule a diferença de potencial  $V_A - V_B$  entre os pontos A e B indicados no circuito.

**16** Na tabela abaixo, são apresentadas as resistências e as d.d.p. relativas a dois resistores, quando conectados, separadamente, a uma dada bateria.

| resistência ( $\Omega$ ) | d.d.p. (V) |
|--------------------------|------------|
| 5,8                      | 11,6       |
| 3,8                      | 11,4       |

Considerando que os terminais da bateria estejam conectados a um resistor de resistência igual a  $11,8 \Omega$ , calcule a energia elétrica dissipada em 10 segundos por esse resistor.

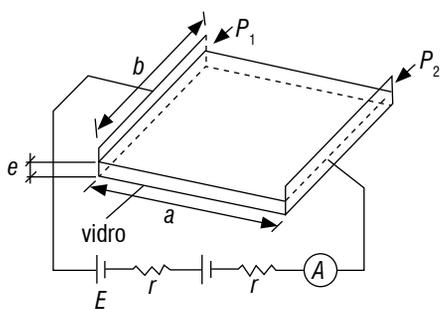
**17** Um estudante deseja medir a resistência interna de um gerador, cuja f.e.m. pode ser ajustada para diferentes valores. Para tanto, ele constrói um circuito com o próprio gerador – um amperímetro  $A$  e um resistor de resistência  $R = 18 \Omega$  – e obtém o gráfico a seguir, relacionando à f.e.m. do gerador a corrente medida pelo amperímetro.



Com base no gráfico:

- Calcule a resistência interna do gerador.
- Para uma f.e.m. igual a 12 V, calcule a potência dissipada pela resistência interna do gerador.

**18** No Laboratório de Plasmas Frios do ITA é possível obter filmes metálicos finos, vaporizando o metal e depositando-o por condensação sobre uma placa de vidro. Com o auxílio do dispositivo mostrado na figura, é possível medir a espessura e de cada filme. Na figura, os dois geradores são idênticos, de f.e.m.  $E = 1,0 \text{ V}$  e resistência  $r = 1,0 \Omega$ , estando ligados a dois eletrodos retangulares e paralelos,  $P_1$  e  $P_2$ , de largura  $b = 1,0 \text{ cm}$  e separados por uma distância  $a = 3,0 \text{ cm}$ . Um amperímetro ideal  $A$  é inserido no circuito, como indicado.



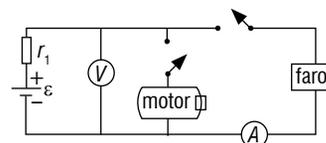
Supondo que após certo tempo de deposição é formada sobre o vidro uma camada uniforme de alumínio entre os eletrodos, e que o amperímetro acusa uma corrente  $i = 0,10 \text{ A}$ , qual deve ser a espessura  $e$  do filme? (resistividade do alumínio)  $\rho = 2,6 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ ).

- $4,1 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$ .
- $4,1 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ .
- $4,3 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ .
- $9,7 \cdot 10^{-9} \text{ m}$ .
- n.d.a.

**19** Em uma prática de laboratório, um estudante conectou uma bateria a uma resistência, obtendo uma corrente  $i_1$ . Ligando em série mais uma bateria, idêntica à primeira, a corrente passa ao valor  $i_2$ . Finalmente, ele liga as mesmas baterias em paralelo e a corrente que passa pelo dispositivo torna-se  $i_3$ . Qual das alternativas abaixo expressa uma relação existente entre as correntes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ ?

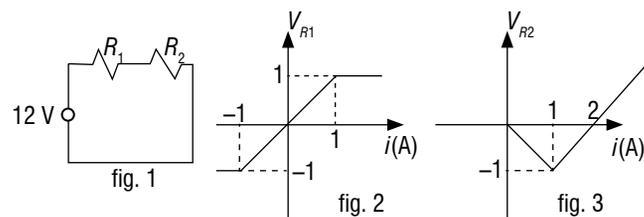
- $i_2 i_3 = 2i_1 (i_2 + i_3)$ .
- $2i_2 i_3 = i_1 (i_2 + i_3)$ .
- $i_2 i_3 = 3i_1 (i_2 + i_3)$ .
- $3i_2 i_3 = i_1 (i_2 + i_3)$ .
- $3i_2 i_3 = 2i_1 (i_2 + i_3)$ .

**20** Quando se acendem os faróis de um carro cuja bateria possui resistência interna  $r_1 = 0,050 \Omega$ , um amperímetro indica uma corrente de 10 A e um voltímetro uma voltagem de 12 V. Considere desprezível a resistência interna do amperímetro. Ao ligar o motor de arranque, observa-se que a leitura do amperímetro é de 8,0 A e que as luzes diminuem um pouco de intensidade. Calcule a corrente que passa pelo motor de arranque quando os faróis estão acesos.



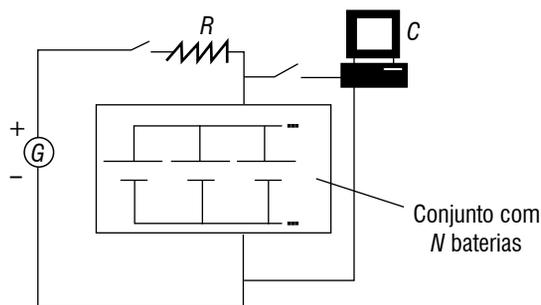
EXERCÍCIOS NÍVEL 3

**01** O circuito abaixo (fig. 1) contém dois resistores não lineares, invariantes no tempo, e uma fonte de tensão constante. Os resistores são indefinidos por suas respectivas curvas características dadas abaixo (fig. 2 e 3). Determine o valor da corrente  $i$ , do circuito.



**02** Você dispõe de um dispositivo de resistência  $R = 5r$ , e de 32 baterias idênticas, cada qual com resistência  $r$  e força eletromotriz  $V$ . Como seriam associadas as baterias, de modo a obter a máxima corrente que atravessa  $R$ ? Justifique.

**03** Em uma ilha distante, um equipamento eletrônico de monitoramento ambiental, que opera em 12 V e consome 240 W, é mantido ligado 20 h por dia. A energia é fornecida por um conjunto de  $N$  baterias ideais de 12 V. Essas baterias são carregadas por um gerador a diesel,  $G$ , através de uma resistência  $R$  de  $0,2 \Omega$ . Para evitar interferência no monitoramento, o gerador é ligado durante 4h por dia, no período em que o equipamento permanece desligado.



Determine:

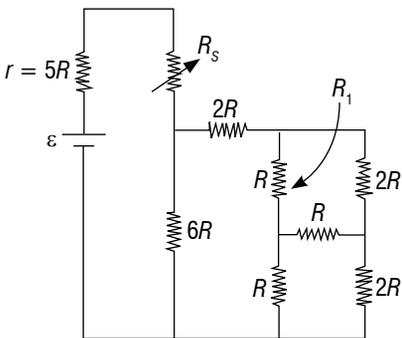
- a corrente  $I$ , em ampères, que alimenta o equipamento eletrônico  $C$ .
- o número mínimo  $N$  de baterias necessário para manter o sistema, supondo que as baterias armazenem carga de 50 A.h cada uma.
- a tensão  $V$ , em volts, que deve ser fornecida pelo gerador, para carregar as baterias em 4 h.

**Note e adote**

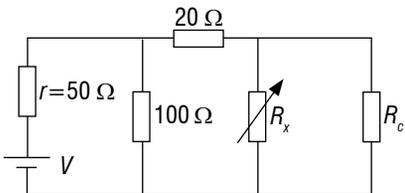
(1 ampère  $\times$  1 segundo = 1 coulomb)

O parâmetro usado para caracterizar a carga de uma bateria, produto da corrente pelo tempo, é o ampère  $\cdot$  hora (A  $\cdot$  h). Suponha que a tensão da bateria permaneça constante até o final de sua carga.

**04** Um gerador de força eletromotriz  $\varepsilon$  e resistência interna  $r = 5R$  está ligado a um circuito conforme mostra a figura. O elemento  $R_s$  é um reostato, com resistência ajustada para que o gerador transfira máxima potência. Em um dado momento o resistor  $R_1$  é rompido, devendo a resistência do reostato ser novamente ajustada para que o gerador continue transferindo máxima potência. Determine a variação da resistência do reostato, em termos de  $R$ .



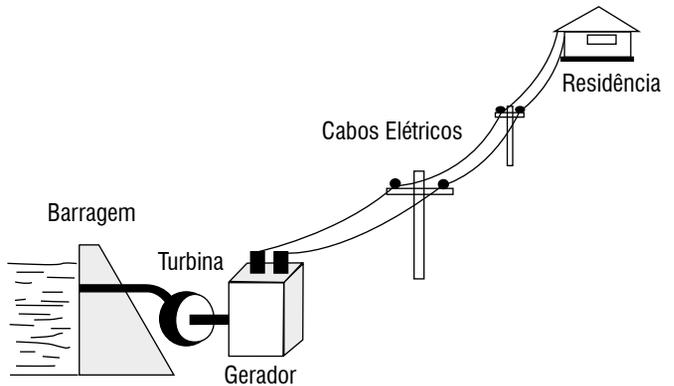
**05** Sabe-se que a máxima transferência de energia de uma bateria ocorre quando a resistência do circuito se iguala à resistência interna da bateria, isto é, quando há o casamento de resistências. No circuito da figura, a resistência de carga  $R_c$  varia na faixa  $100 \Omega \leq R_c \leq 400 \Omega$ . O circuito possui um resistor variável,  $R_x$ , que é usado para o ajuste da máxima transferência de energia. Determine a faixa de valores de  $R_x$  para que seja atingido o casamento de resistências do circuito.



**06** O desenho representa uma pequena usina hidrelétrica composta de barragem, turbina e gerador. Este sistema fornece energia elétrica através de dois cabos elétricos a uma residência, cuja potência solicitada é de 10.000 W durante 8 horas diárias. Determine:

- A economia de energia elétrica, em kWh, em 30 dias de funcionamento da usina, com a substituição dos cabos por outros cabos elétricos de resistência igual a metade do valor original, mantendo-se a mesma tensão fornecida aos equipamentos da resistência.
- O rendimento do conjunto composto pelo gerador e cabos de alimentação, antes e depois da substituição dos cabos.

Dados: comprimento de cada cabo elétrico que liga o gerador à residência: 100 m. Resistência dos cabos originais por unidade de comprimento:  $0,001 \Omega/m$ . Rendimento do gerador:  $\eta = 0,80$ . Tensão (d.d.p.) exigida pelos equipamentos da residência: 100 V.



**RASCUNHO**

## 1. Introdução

No capítulo anterior, vimos o primeiro método de resolução de circuitos: a Lei de Pouillet. Entretanto, podemos nos deparar daqui para frente com circuitos não simples, nos quais a Lei de Pouillet não seria aplicável.

Desta forma, neste módulo apresentaremos as principais ferramentas para a resolução de circuitos de mais de uma malha (não reduzíveis a um circuito simples), mostrando com detalhes o passo a passo, as vantagens e as aplicações de cada uma delas.

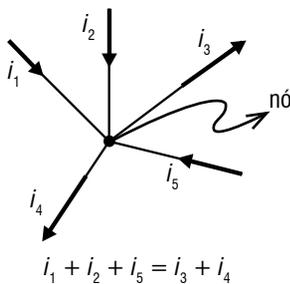
Com isto, no final deste bloco, estaremos aptos a resolver quaisquer circuitos elétricos compostos por geradores, receptores e resistores.

## 2. Circuitos elétricos

### 2.1 Leis de Kirchoff

#### 1ª Lei de Kirchoff – Lei dos Nós

Em um nó, a soma algébrica das correntes que chegam é igual a soma das correntes que saem (princípio da conservação das cargas elétricas).



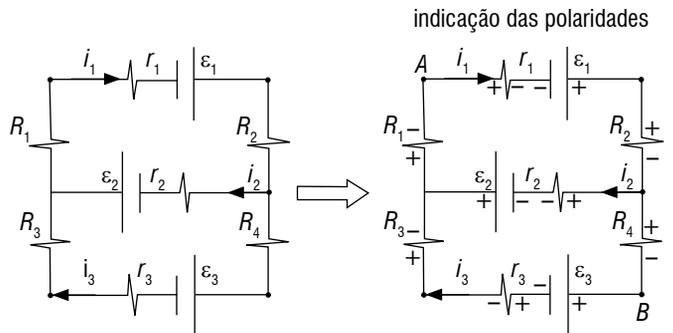
#### 2ª Lei de Kirchoff – Lei das Malhas

Correntes com sentidos arbitrários são assumidas por ramos e a soma algébrica das d.d.p. ao longo de uma malha é nula (princípio da conservação da energia).

Para tal, atribui-se sinais positivos e negativos aos polos dos elementos de circuito (geradores, receptores e resistores), conforme o quadro:

|                 |  |                                     |
|-----------------|--|-------------------------------------|
| <b>Resistor</b> |  | $V_{AB} = V_A - V_B = Ri$           |
| <b>Gerador</b>  |  | $V_{AB} = V_A - V_B = \varepsilon$  |
| <b>Receptor</b> |  | $V_{AB} = V_A - V_B = \varepsilon'$ |

Ex.:



Percorrendo ao longo do circuito e retornando ao mesmo ponto teremos (por exemplo, partindo de A e retornando a A no sentido de  $i_1$  através da malha superior, depois, partindo de B e retornando a B no sentido de  $i_3$  através da malha inferior):

$$\text{de A para A} \rightarrow 0 = +r_1 i_1 - \varepsilon_1 + R_2 j_1 + r_2 j_2 - \varepsilon_2 + R_1 i_1$$

$$\text{de B para B} \rightarrow 0 = +\varepsilon_3 + r_3 j_3 + R_3 j_3 + \varepsilon_2 - r_2 j_2 + R_4 j_3$$

pela Lei dos Nós, temos:  $i_1 = i_2 + i_3$

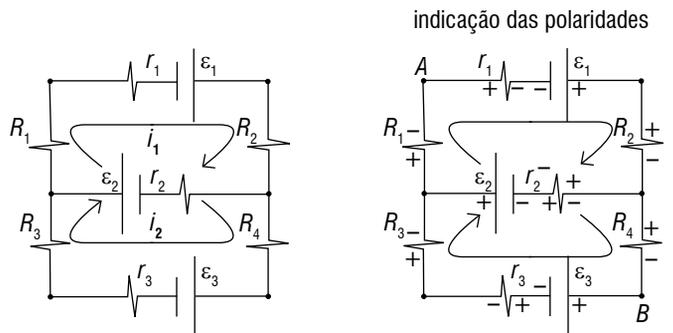
Arrumando estas três equações, obtemos um sistema de equações 3 por 3:

$$\begin{bmatrix} r_1 + R_1 + R_2 & r_2 & 0 \\ 0 & -r_2 & r_3 + R_3 + R_4 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 2.2 Regra de Maxwell

As correntes são arbitradas por malhas e não por ramos, como anteriormente. O ramo que pertencer a duas malhas possuirá uma polaridade para cada malha de acordo com o sentido arbitrado da corrente.

Exemplo:



de A para A  $\rightarrow 0 = +r_1 i_1 - \varepsilon_1 + R_2 j_1 + r_2 j_1 - r_2 j_2 - \varepsilon_2 + R_1 i_1$

de B para B  $\rightarrow 0 = +\varepsilon_3 + r_3 j_2 + R_3 j_2 + \varepsilon_2 + r_2 j_2 - r_2 j_1 + R_4 j_2$

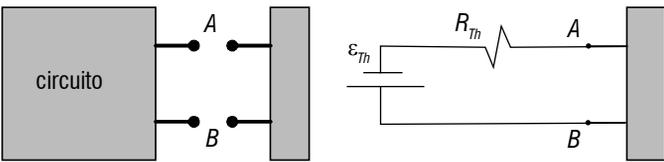
Arrumando essas duas equações, obtemos um sistema de equações 2 por 2:

$$\begin{bmatrix} r_1 + r_2 + R_1 + R_2 & -r_2 \\ -r_2 & r_2 + r_3 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_1 \\ j_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{Bmatrix}$$

Obs.: ao usar a Regra de Maxwell, devemos ter atenção redobrada com as resistências que pertencerem a duas malhas adjacentes, uma vez que serão contabilizadas as duas correntes arbitrárias. Em compensação, a grande vantagem desta regra é que se trabalha com uma equação a menos no sistema.

### 2.3 Teorema de Thèvenin

Todo circuito formado apenas por geradores e resistores é visto através de 2 de seus pontos, digamos A e B, como uma associação em série de um gerador ideal (gerador de Thèvenin- $\varepsilon_{th}$ ) com um resistor (resistor de Thèvenin- $R_{th}$ ), sendo esses elementos fixos para o circuito dado.



I. Cálculo de  $\varepsilon_{th}$

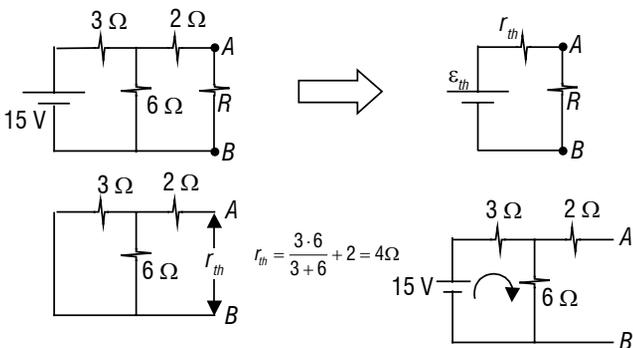
É igual a d.d.p. entre os pontos A e B, tendo-se já retirado o ramo em estudo.

II. Cálculo de  $R_{th}$

É igual a resistência entre os pontos A e B obtida retirando-se o ramo em estudo e pondo em curto-circuito as forças eletromotrizes de todos os geradores, ou seja, deixando apenas suas resistências internas.

Exemplo: Determinar R, para que sua potência dissipada seja máxima.

A potência máxima dissipada na resistência R será numericamente igual à potência máxima fornecida pelo gerador  $\varepsilon_{th}$ . Para que isso ocorra, essa resistência deverá ser igual à resistência interna do gerador  $r_{th}$  (demonstração feita no capítulo de geradores).



$$i = \frac{5}{9} A$$

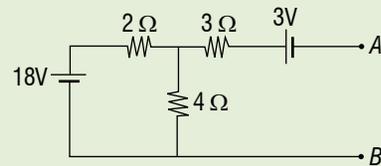
$$U_{AB} = 6 \cdot \frac{5}{9} = \frac{10}{3} V$$

$$\varepsilon_{th} = \frac{10}{3} V$$

Obs.: o Teorema de Thèvenin é muito útil quando estamos interessados em saber a informação a respeito de um elemento apenas de um circuito um pouco mais complexo (Ex.: corrente elétrica, tensão, potência máxima em um resistor).

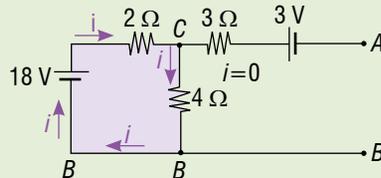
### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01 (MACK)** No trecho do circuito elétrico mostrado abaixo, os geradores de tensão são ideais. A d.d.p. entre os terminais A e B é:



- (A) 3V.
- (B) 5V.
- (C) 7V.
- (D) 8V.
- (E) 9V.

**Solução:**  
**Letra E.**



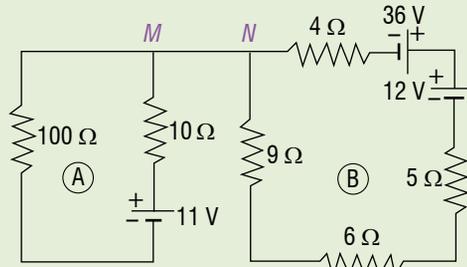
$$i = \frac{18}{2+4} \Rightarrow i = 3A$$

Percorrendo o circuito de B até A, passando, por exemplo, pelo gerador de 18 V, temos:

$$V_B + 18 - 2i - 3 = V_A$$

$$V_B + 18 - 6 - 3 = V_A \Rightarrow V_A - V_B = 9V$$

**02** O circuito A foi ligado ao circuito B pelo fio MN:



Determine a intensidade de corrente no circuito A, no circuito B e no fio MN.

**Solução:**

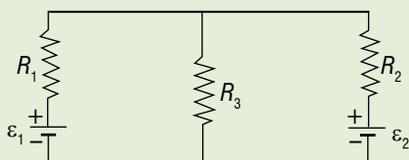
No circuito A:  $i_A = \frac{11}{100 + 10} \Rightarrow i_A = 0,1 \text{ A}$

No circuito B:  $i_B = \frac{36 - 12}{9 + 4 + 5 + 6} \Rightarrow i_B = 1 \text{ A}$

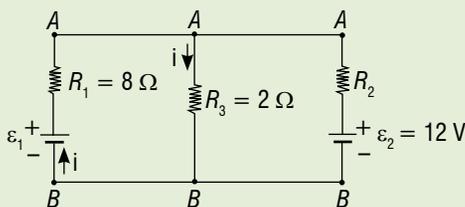
No circuito MN:  $i_{MN} = 0$

Resposta:  $i_A = 0,1 \text{ A}; i_B = 1 \text{ A}; i_{MN} = 0$

**03** No circuito abaixo,  $\varepsilon_2 = 12 \text{ V}$ ,  $R_1 = 8 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ . De quantos volts deve ser a fonte de tensão  $\varepsilon_1$ , para que a corrente através da fonte de tensão  $\varepsilon_2$  seja igual a zero?



**Solução:**



Corrente nula na fonte de tensão  $\varepsilon_2$ :

$U_{AB} = \varepsilon_2 = 12 \text{ V}$

Em  $R_3$ :  $U_{AB} = R_3 i \Rightarrow 12 = 2i \Rightarrow i = 6 \text{ A}$

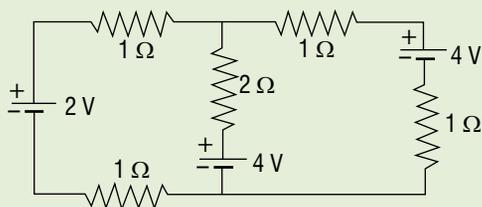
Na fonte de tensão  $\varepsilon_1$ :  $U_{AB} = \varepsilon_1 - R_1 i$

$12 = \varepsilon_1 - 8 \cdot 6$

$\varepsilon_1 = 60 \text{ V}$

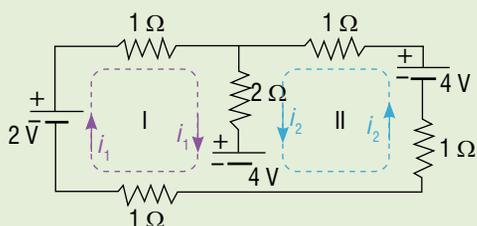
Resposta:  $60 \text{ V}$

**04** No circuito dado a seguir, determine as intensidades e os sentidos de todas as correntes elétricas.



**Solução:**

Inicialmente, devemos atribuir sentidos arbitrários às correntes nos "caminhos":



Em seguida, para cada "caminho", aplicamos:

$\sum fem = \sum fcem + R_{eq} \cdot i_{\text{do "caminho"}} \pm R_{\text{do trecho comum}} \cdot i_{\text{do "caminho" ao lado}}$

$I: 2 = 4 + 4i_1 + 2i_2 \Rightarrow 4i_1 + 2i_2 = -2$

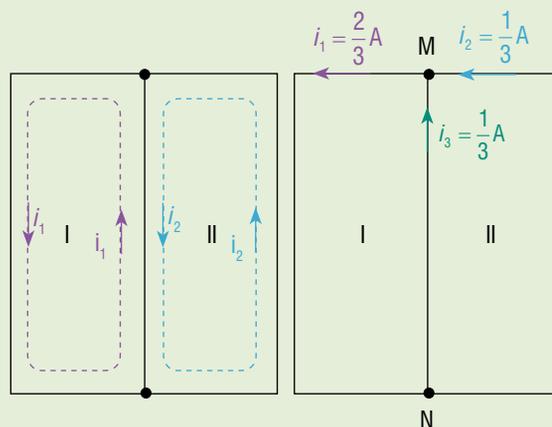
$II: 4 = 4 + 4i_2 + 2i_1 \Rightarrow 2i_1 + 4i_2 = 0$

Resolvendo esse sistema de equações, obtemos:

$i_1 = -\frac{2}{3} \text{ A}$  e  $i_2 = \frac{1}{3} \text{ A}$

Isso significa que a corrente  $i_1$  vale  $\frac{2}{3} \text{ A}$ , porém em sentido contrário ao atribuído, enquanto  $i_2$  vale  $\frac{1}{3} \text{ A}$ , no sentido atribuído.

Temos, então:



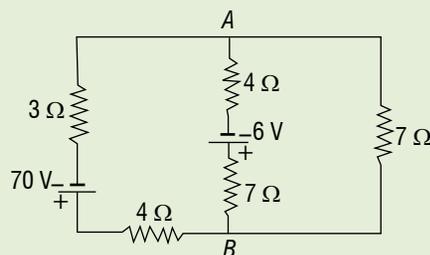
Sentidos corretos.

No trecho comum, a intensidade da corrente é a diferença entre  $i_1$  e  $i_2$ .

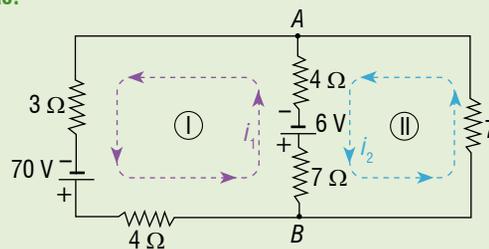
No trecho comum, temos:  $i_3 = i_1 - i_2 = \frac{1}{3} \text{ A}$  para cima.

Observe que, no nó M, a soma das correntes que entram é igual à corrente que sai.

**05** Calcule as intensidades das correntes elétricas nos ramos do circuito a seguir:



**Solução:**

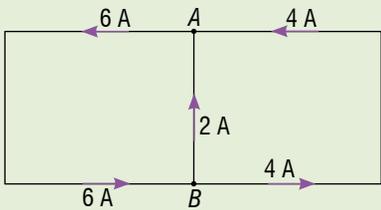


$$\sum fem = \sum fcem + R_{eq} \cdot i_{\text{do "caminho" ao lado}} \pm R_{\text{do trecho comum}} \cdot i_{\text{do "caminho" ao lado}}$$

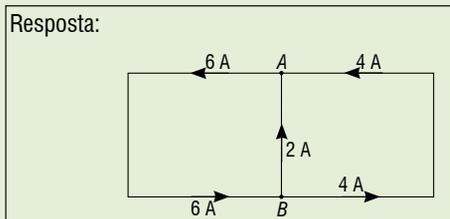
$$I: 70 = 6 + 18i_1 - 11i_2$$

$$II: 6 = 0 + 18i_2 + 11i_1 \Rightarrow i_1 = 6 \text{ A e } i_2 = 4 \text{ A}$$

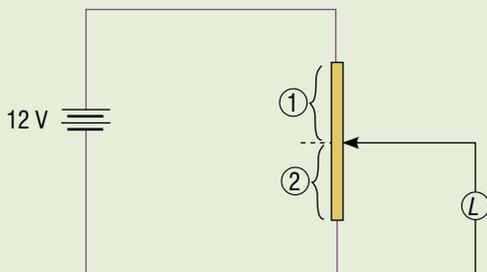
Assim:



Resposta:



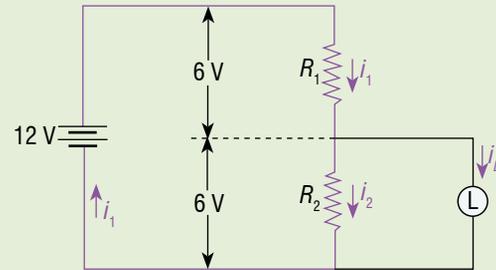
**06** O circuito a seguir contém uma bateria de 12 V e resistência interna desprezível, um reostato de resistência total igual a 15 Ω e uma lâmpada L, a qual deve operar conforme suas especificações, que são 3,0 W–6,0 V.



Calcule as intensidades  $i_1$  e  $i_2$  das correntes elétricas nos trechos 1 e 2 do reostato. A máxima intensidade de corrente em qualquer ponto do reostato não pode ultrapassar 2,0 A.

**Solução:**

$$Pot_L = U_L i_L \Rightarrow 3,0 = 6,0 i_L \Rightarrow i_L = 0,50 \text{ A}$$



$$R_1 + R_2 = 15 \Omega$$

$$R_1 i_1 = 6,0 \Rightarrow i_1 = \frac{6,0}{R_1}$$

$$R_2 i_2 = 6,0 \Rightarrow i_2 = \frac{6,0}{R_2} = \frac{6,0}{15 - R_1}$$

$$i_1 = i_2 + i_L \Rightarrow i_1 = \frac{6}{R_1} = \frac{6}{15 - R_1} + 0,50 \Rightarrow R_1 = 5,35 \Omega$$

$$R_2 = 9,65 \Omega$$

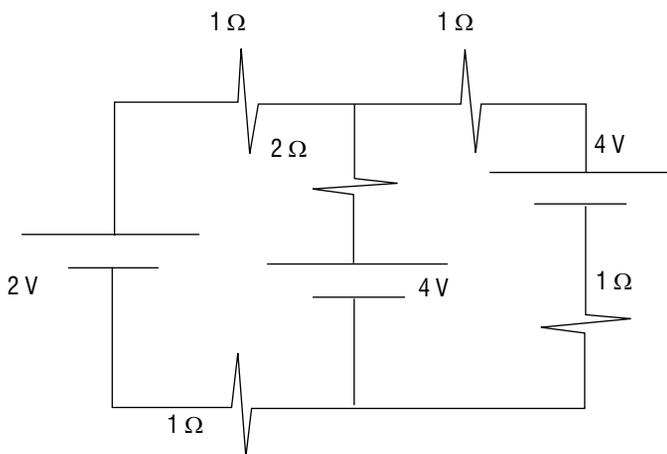
$$i_1 = \frac{6,0}{R_1} = \frac{6,0}{5,35} \Rightarrow i_1 = 1,12 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{6,0}{R_2} = \frac{6,0}{9,65} \Rightarrow i_2 = 0,62 \text{ A}$$

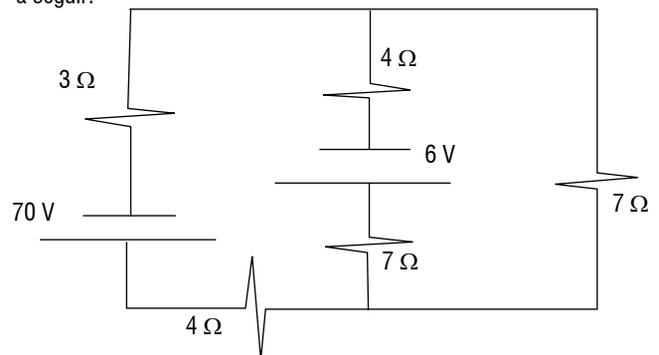
Respostas: 1,12 A e 0,62 A, respectivamente

**EXERCÍCIOS NÍVEL 1**

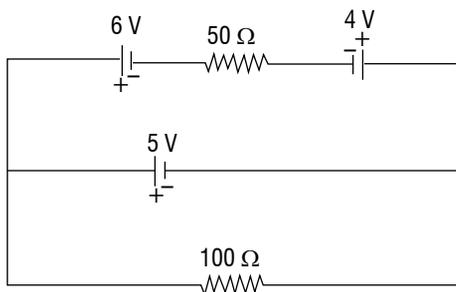
**01** No circuito a seguir, determine a intensidade das correntes nos três ramos.



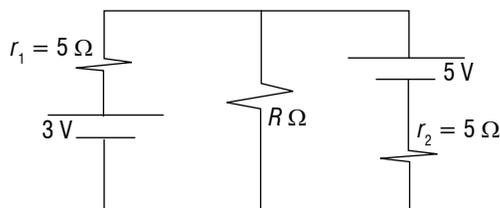
**02** Calcule as intensidades das correntes elétricas nos ramos do circuito a seguir:



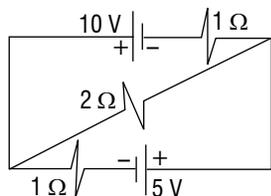
**03** Calcule as intensidades das correntes elétricas nos ramos do circuito a seguir:



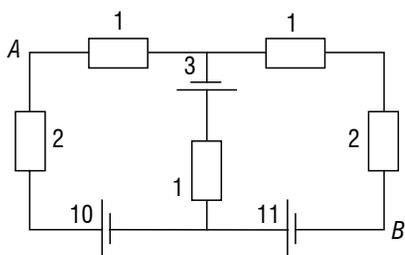
**04** No circuito esquematizado a seguir, a intensidade de corrente em  $r_1$  é de 0,2 A. Calcule as intensidades de corrente em  $r_2$  e em  $R$ .



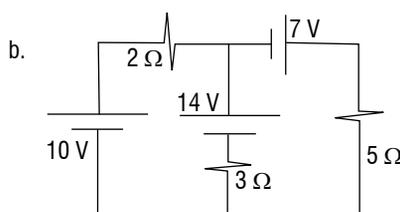
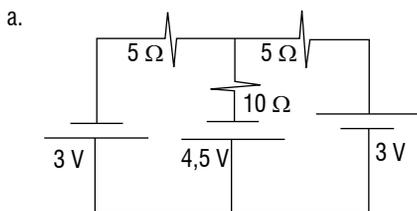
**05** Calcule as intensidades e determine os sentidos das correntes elétricas nos três ramos do circuito esquematizado a seguir:



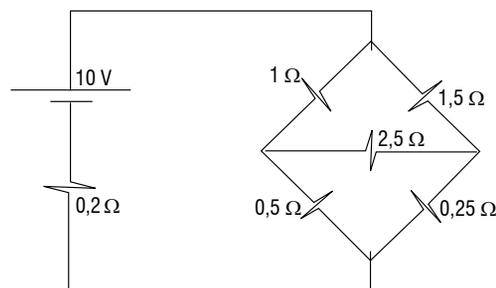
**06** No circuito visto na figura, as baterias são ideais, suas fem são dadas em volts e as resistências, em ohms. Determine em volts a d.d.p. entre  $A$  e  $B$ .



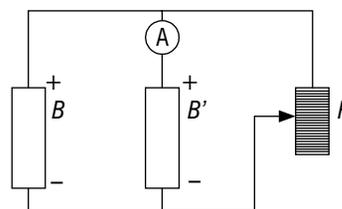
**07** Determine as intensidades e os sentidos das correntes elétricas nos ramos dos circuitos a seguir:



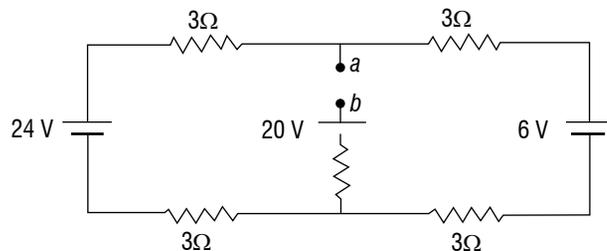
**08** Calcule a corrente em cada ramo do circuito abaixo:



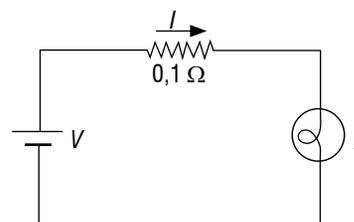
**09** Duas baterias  $B$  e  $B'$ , a primeira formada por 5 elementos e a segunda formada por 4 elementos todos iguais estão ligadas num circuito como mostra a figura abaixo. Neste circuito,  $A$  é um amperímetro ideal e  $R$  um reostato. Quando  $R$  é igual a 1 ohm, a indicação no amperímetro é zero. Calcule a resistência interna de cada elemento das baterias.



**10** No circuito visto na figura, as baterias são ideais. Determine, em volts, o módulo da diferença de potencial entre os pontos  $a$  e  $b$ .

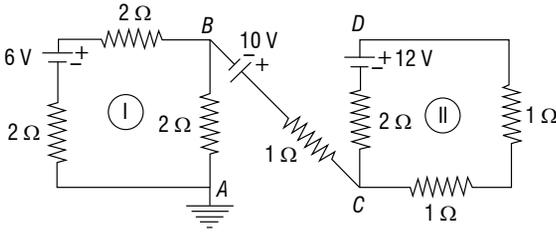


**11** No circuito elétrico a seguir,  $L$  é uma lâmpada fabricada para operar à potência de 42 W numa linha de 6 V. A lâmpada deve acender corretamente quando:

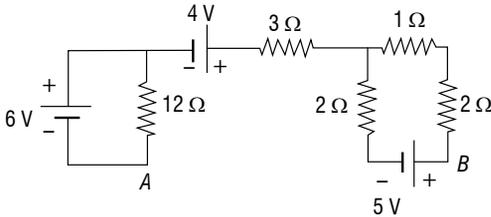


- (A)  $V = 6\text{ V}$      $I = 7\text{ A}$                       (D)  $V = 7\text{ V}$      $I = 6\text{ A}$   
 (B)  $V = 6,7\text{ V}$      $I = 6,9\text{ A}$                       (E) Nenhum dos casos acima.  
 (C)  $V = 6,1\text{ V}$      $I = 6,9\text{ A}$

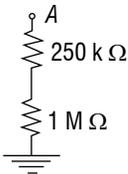
**12** No circuito esquematizado, determine o potencial no ponto D:



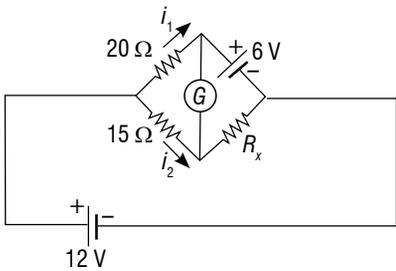
**13** Qual a diferença de potencial  $V_A - V_B$  entre os pontos A e B do circuito abaixo?



**14** Considere a figura. O potencial elétrico do ponto A é mantido 400 V acima do potencial elétrico da Terra. Qual a tensão elétrica no resistor de 1 MΩ, medida por um voltímetro de resistência interna de 3 MΩ?

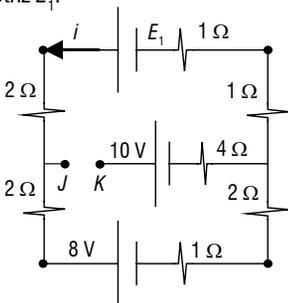


**15** No circuito indicado, não há passagem de corrente pelo galvanômetro. Determine as intensidades de corrente  $i_1$  e  $i_2$ .

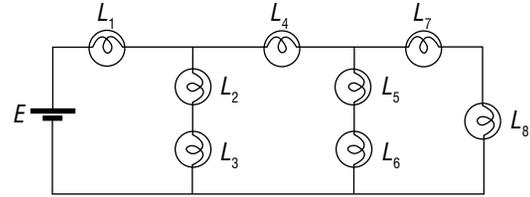


**16** Dado o circuito da figura abaixo, sabendo-se que  $V_{JK} = 3$  V, calcule:

- o valor da corrente  $i$ .
- a força eletromotriz  $E_1$ .



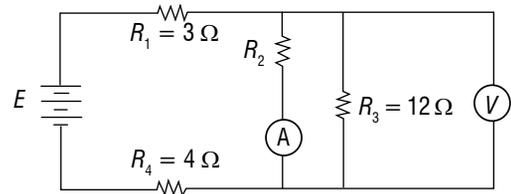
**17** Considere a seguinte situação hipotética: ao preparar o palco para a apresentação de uma peça de teatro, o iluminador deveria colocar três atores sob luzes que tinham igual brilho e os demais, sob luzes de menor brilho. O iluminador determinou, então, aos técnicos, que instalassem no palco oito lâmpadas incandescentes com a mesma especificação ( $L_1$  a  $L_8$ ), interligadas em um circuito com uma bateria, conforme mostra a figura a seguir.



Nessa situação, quais são as três lâmpadas que acendem com o mesmo brilho por apresentarem igual valor de corrente fluindo nelas, sob as quais devem se posicionar os três atores?

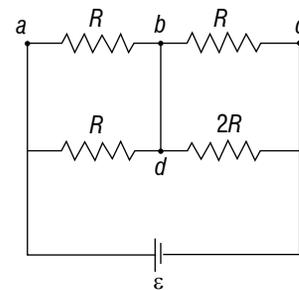
- $L_1, L_2$  e  $L_3$ .
- $L_2, L_3$  e  $L_4$ .
- $L_2, L_5$  e  $L_7$ .
- $L_4, L_5$  e  $L_6$ .
- $L_4, L_7$  e  $L_8$ .

**18** No circuito abaixo, o voltímetro V e o amperímetro A indicam, respectivamente, 18 V e 4,5 A.



Considerando como ideais os elementos do circuito, determine a força eletromotriz E da bateria.

**19** No circuito elétrico a seguir, a resistência interna do gerador de força eletromotriz  $\epsilon$ , em volts, e as resistências dos condutores de alimentação são desprezíveis.

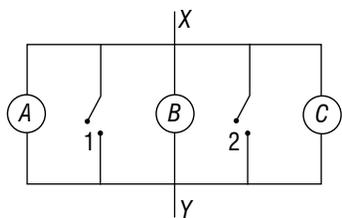


Análise as proposições a seguir e conclua:

- A resistência equivalente entre os pontos a e c vale  $\frac{7R}{6}$ .
- A corrente elétrica que circula no gerador tem intensidade igual a  $\frac{6\epsilon}{7R}$ .
- A potência dissipada pelo resistor colocado entre os pontos a e b do circuito é igual à potência dissipada pelo resistor colocado entre os pontos b e c do circuito.
- A corrente elétrica que passa pelo resistor 2R é o dobro da corrente elétrica que passa pelo resistor R que se encontra entre os pontos a e b do circuito.
- A corrente elétrica que passa pelo ramo db é igual a  $\frac{\epsilon}{7R}$ .

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

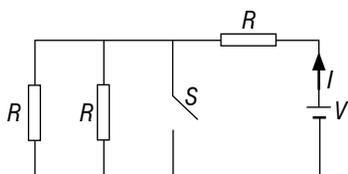
**01** No esquema, *A*, *B* e *C* são três lâmpadas idênticas e 1 e 2 são chaves interruptoras. Inicialmente, as três lâmpadas encontram-se acesas e as chaves abertas. O circuito está ligado a um gerador que fornece uma tensão *U* entre os pontos *X* e *Y*.



Supondo que os fios de ligação e as chaves interruptoras, quando fechadas, apresentam resistências elétricas desprezíveis, assinale a alternativa verdadeira.

- (A) Se a chave 1 for fechada, só as lâmpadas *B* e *C* permanecerão acesas.
- (B) Se as chaves 1 e 2 forem fechadas, só a lâmpada *B* permanecerá acesa.
- (C) Se as chaves 1 e 2 forem fechadas, a lâmpada *B* queimará.
- (D) Se a chave 2 for fechada, nenhuma lâmpada permanecerá acesa.
- (E) Se a chave 2 for fechada, as lâmpadas *A* e *B* brilharão com maior intensidade.

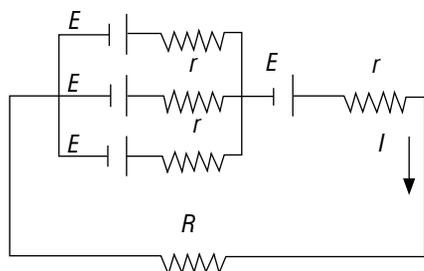
**02** No circuito elétrico a seguir esquematizado, *R* representa resistências em ohms e *V* a tensão em volts, estabelecida por um gerador ideal.



Determine, em função de *V* e *R*, a expressão que permite calcular a corrente indicada *I*, quando:

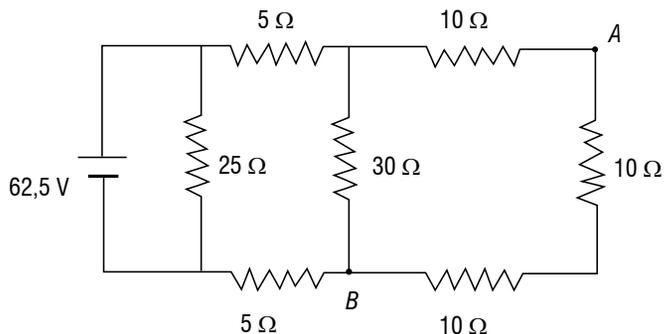
- a. a chave *S* estiver aberta;
- b. a chave *S* estiver fechada.

**03** Tomemos o circuito a seguir, no qual todos os geradores têm a mesma força eletromotriz e a mesma resistência interna. O valor da intensidade da corrente *I* que percorre o resistor *R* é dado por:



- (A)  $\frac{4E}{(4r + R)}$
- (B)  $\frac{4E}{\left(\frac{4}{3r} + R\right)}$
- (C)  $\frac{2E}{\left(\frac{4}{3r} + R\right)}$
- (D)  $\frac{E}{(4r + R)}$

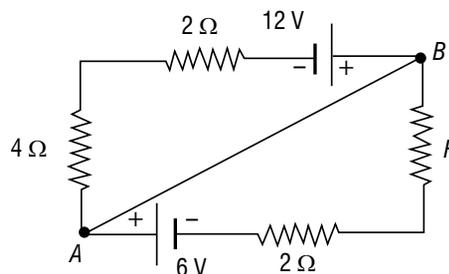
**04** Considere o circuito abaixo.



A diferença de potencial entre os pontos *A* e *B*, e a corrente que passa pelo resistor de 30 Ω valem, respectivamente, em *V* e *A*:

- (A) 37,5; 1,25.
- (B) 30,0; 2,50.
- (C) 25,0; 2,50.
- (D) 25,0; 1,25.

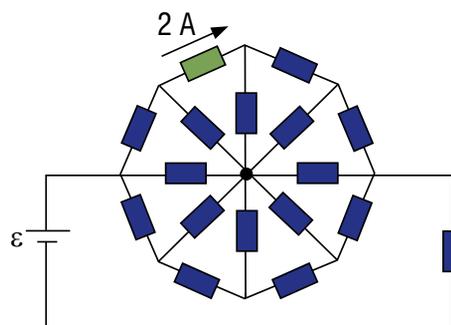
**05** O circuito a seguir é alimentado por dois geradores:



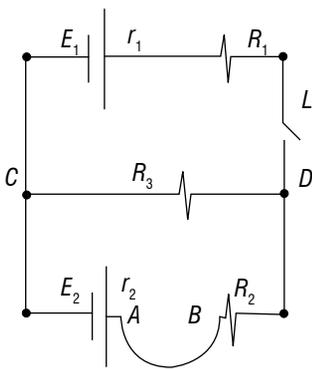
Determine:

- a. a intensidade de corrente no fio *AB*, se *R* for igual a 10 Ω;
- b. o valor de *R*, para que a intensidade de corrente no fio *AB* seja nula.

**06** No circuito abaixo, todos os resistores valem 2 Ω. Sabendo que a corrente no resistor em destaque vale 2 A, determine a tensão e da bateria ideal. Utilize argumentos de simetria.



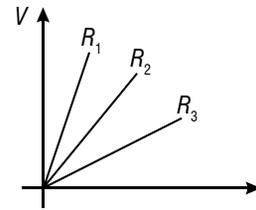
**07** No circuito da figura abaixo, o fio ligado aos pontos *A* e *B* tem a forma de uma semicircunferência de raio igual a 10 cm e seção circular uniforme de diâmetro igual a 0,2 cm. A sua resistividade, na temperatura ambiente, é de  $5 \cdot 10^{-4}$  ohm.cm. Calcule:



- Dados:  
 $E_1 = 10$  volts  
 $r_1 = 0,5$  ohm  
 $R_1 = 4,5$  ohms  
 $R_2 = 9$  ohms  
 $R_3 = 10$  ohms  
 $E_2 = 8$  volts  
 $r_2 = 0,5$  ohm

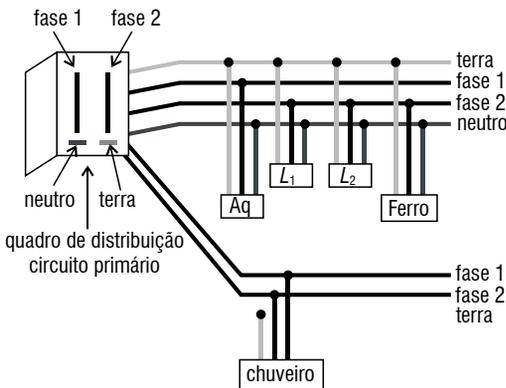
- a queda de tensão entre os pontos C e D, quando a chave L estiver aberta;
- a potência dissipada em  $R_3$ , quando a chave L estiver fechada;
- a quantidade de calor, em calorías, dissipada na resistência semi-circular, ao fim de meia hora, quando a chave L estiver ligada.

09 Três resistores, de resistências elétricas  $R_1, R_2$  e  $R_3$ , um gerador G e uma lâmpada L são interligados, podendo formar diversos circuitos elétricos. Num primeiro experimento, foi aplicada uma tensão variável V aos terminais de cada resistor e foi medida a corrente i que o percorria, em função da tensão aplicada. Os resultados das medições estão apresentados no gráfico, para os três resistores.



Considere agora os circuitos elétricos das alternativas a seguir. Em nenhum deles a lâmpada L queimou. A alternativa que representa a situação em que a lâmpada acende com maior brilho é:

08

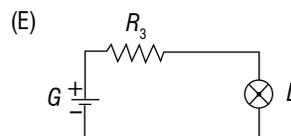
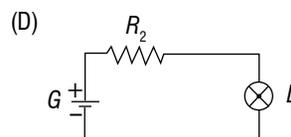
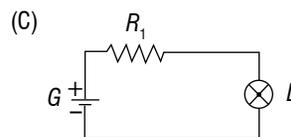
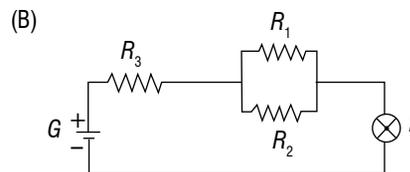
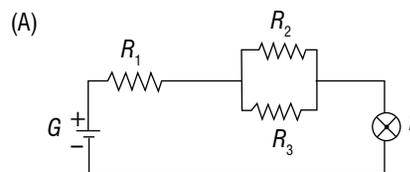


A figura acima representa, de forma esquemática, a instalação elétrica de uma residência, com circuitos de tomadas de uso geral e circuito específico para um chuveiro elétrico. Nessa residência, os seguintes equipamentos permaneceram ligados durante 3 horas a tomadas de uso geral, conforme o esquema da figura: um aquecedor elétrico (Aq) de 990 W, um ferro de passar roupas de 980 W e duas lâmpadas,  $L_1$  e  $L_2$ , de 60 W cada uma. Nesse período, além desses equipamentos, um chuveiro elétrico de 4.400 W, ligado ao circuito específico, como indicado na figura, funcionou durante 12 minutos. Para essas condições, determine:

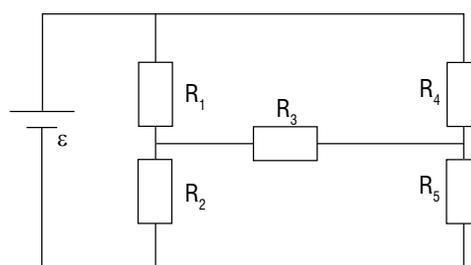
- a energia total, em kWh, consumida durante esse período de 3 horas;
- a corrente elétrica que percorre cada um dos fios fase, no circuito primário do quadro de distribuição, com todos os equipamentos, inclusive o chuveiro, ligados;
- a corrente elétrica que percorre o condutor neutro, no circuito primário do quadro de distribuição, com todos os equipamentos, inclusive o chuveiro, ligados.

**Note e adote**

- A tensão entre fase e neutro é 110 V e, entre as fases, 220 V.
- Ignorar perdas dissipativas nos fios.
- O símbolo • representa o ponto de ligação entre dois fios.



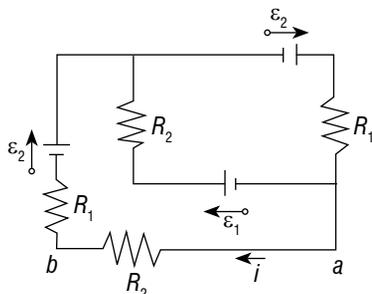
10 A figura mostra um circuito formado por uma fonte de força eletromotriz e cinco resistores. São dados:  $\varepsilon = 36$  V,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ ,  $R_4 = 4 \Omega$  e  $R_5 = 2 \Omega$ .



Com base nessas informações, determine:

- a. a corrente elétrica que passa em cada um dos resistores;
- b. a resistência equivalente do circuito formado pelos resistores  $R_1$  a  $R_5$ .

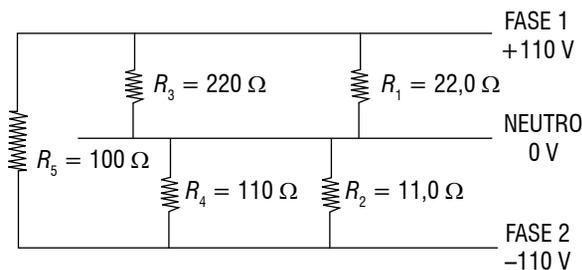
**11** Um circuito de malha dupla é apresentado na figura a seguir.



Sabendo-se que  $R_1 = 10 \Omega$ ,  $R_2 = 15 \Omega$ ,  $\varepsilon_1 = 12 \text{ V}$  e  $\varepsilon_2 = 10 \text{ V}$ , o valor da corrente  $i$  é:

- (A) 10 A.
- (B) 10 mA.
- (C) 1 A.
- (D) 0,7 A.
- (E) 0,4 A.

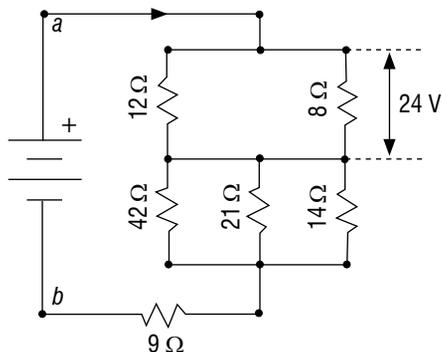
**12** O esquema abaixo mostra uma rede elétrica constituída de dois fios fase e um neutro, alimentando cinco resistores ôhmicos.



Se o fio neutro se romper no ponto A, a potência dissipada irá aumentar apenas no(s) resistor(es):

- (A)  $R_1$  e  $R_3$ .
- (B)  $R_2$  e  $R_5$ .
- (C)  $R_3$ .
- (D)  $R_4$ .

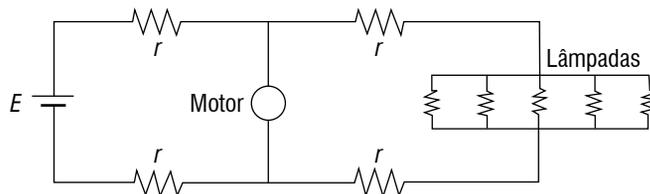
**13** Considere a figura a seguir.



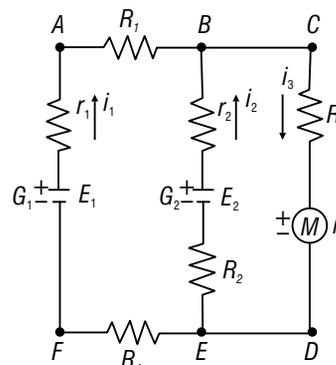
Sabendo que na figura anterior a diferença de potencial sobre o resistor de  $8 \Omega$  é de 24 V, as diferenças de potencial, em V, sobre os resistores de  $14 \Omega$ ,  $9 \Omega$  e entre os pontos a e b são, respectivamente:

- (A) 45, 9 e 78.
- (B) 45, 45 e 114.
- (C) 35, 45 e 104.
- (D) 35, 70 e 129.

**14** Considere um circuito constituído por um gerador de tensão  $E = 122,4 \text{ V}$ , pelo qual passa uma corrente  $I = 12 \text{ A}$ , ligado a uma linha de transmissão com condutores de resistência  $r = 0,1 \Omega$ . Nessa linha encontram-se um motor e uma carga de 5 lâmpadas idênticas, cada qual com resistência  $R = 99 \Omega$ , ligadas em paralelo, de acordo com a figura. Determine a potência absorvida pelo motor,  $PM$ , pelas lâmpadas,  $PL$ , e a dissipada na rede,  $PR$ .



**15** O esquema representa uma rede de distribuição de energia elétrica que consta de:

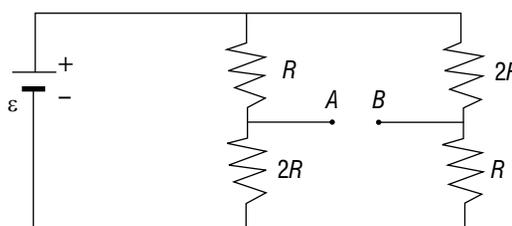


- geradores  $G_1$  e  $G_2$  de fem  $E_1 = E_2 = \varepsilon$  e resistências internas  $r_1 = r_2 = R$ ;
- motor  $M$  de fem  $E_3 = \frac{3 \cdot \varepsilon}{10}$  e resistência interna  $r_3 = 2R$ ;
- resistores de resistências internas  $R_1 = R_2 = R$ ;  $R_3 = 6R$  e  $R_4 = 2R$ .

Tendo em vista as informações, responda ao que se pede:

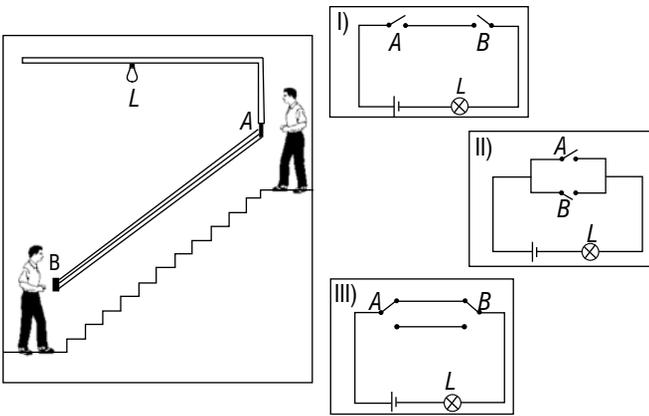
- a. Obtenha a equação matricial que permite calcular as correntes  $i_1$  e  $i_2$ ;
- b. Sendo  $R = 0,5 \Omega$  e  $\varepsilon = 20 \text{ V}$ , calcule as correntes  $i_1$ ,  $i_2$  e  $i_3$ .

**16** Uma bateria ideal de força eletromotriz  $\varepsilon$  está ligada a um circuito como ilustra a figura a seguir.



Calcule a diferença de potencial  $V_A - V_B$  entre os pontos terminais A e B em função de  $\varepsilon$ .

**17** Uma situação prática bastante comum nas residências é o chamado “interruptor paralelo”, no qual é possível ligar ou desligar uma determinada lâmpada, de forma independente, estando no ponto mais alto ou mais baixo de uma escada, como mostra a figura.

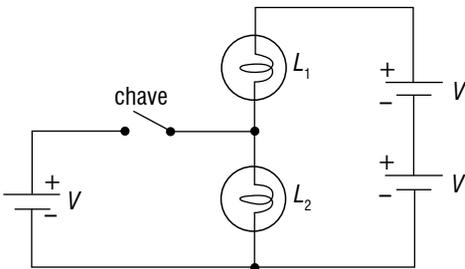


Em relação a isso, são mostrados três possíveis circuitos elétricos, em que A e B correspondem aos pontos situados nos pontos mais alto e mais baixo da escada e L é a lâmpada que queremos ligar ou desligar.

O(s) esquema(s) que permite(m) ligar ou desligar a lâmpada, de forma independente, está(ão) representado(s) corretamente somente em:

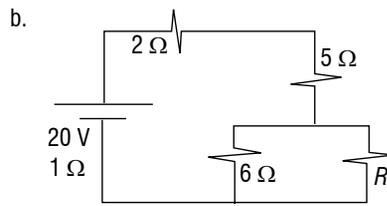
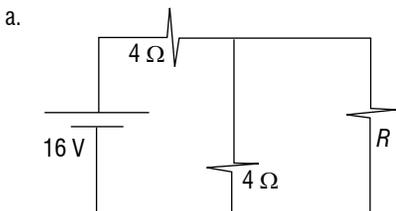
- (A) I.
- (B) II.
- (C) III.
- (D) II e III.
- (E) I e III.

**18** No circuito representado na figura, têm-se duas lâmpadas incandescentes idênticas,  $L_1$  e  $L_2$ , e três fontes idênticas, de mesma tensão  $V$ . Então, quando a chave é fechada:

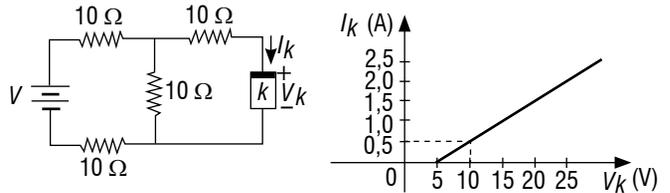


- (A) apagam-se as duas lâmpadas.
- (B) o brilho da  $L_1$  aumenta e o da  $L_2$  permanece o mesmo.
- (C) o brilho da  $L_2$  aumenta e o da  $L_1$  permanece o mesmo.
- (D) o brilho das duas lâmpadas aumenta.
- (E) o brilho das duas lâmpadas permanece o mesmo.

**19** Nos circuitos das figuras abaixo, determine o valor de  $R$  para que a potência dissipada nele seja máxima e indique o valor dessa potência:



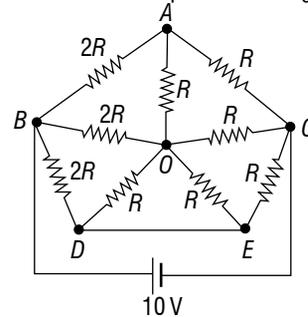
**20** O elemento passivo  $k$ , cuja potência máxima de utilização é de 30 watts, tem a característica tensão-corrente dada pelo gráfico a seguir:



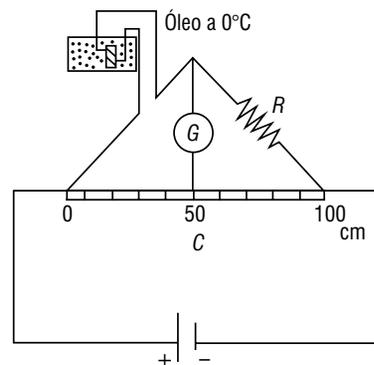
Determine o maior valor positivo que se pode permitir para a tensão  $V$  da bateria.

**EXERCÍCIOS NÍVEL 3**

**01** No circuito da figura abaixo, calcule a potência fornecida pela bateria. A resistência interna da bateria é desprezível e  $R$  é igual a  $10 \Omega$ .

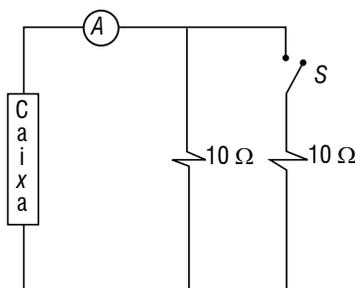


**02** Uma bobina feita de fio de ferro foi imersa em banho de óleo. Essa bobina é ligada a um dos braços de uma ponte de Wheatstone e quando o óleo está a  $0^\circ\text{C}$  a ponte entra em equilíbrio, conforme mostra a figura. Se o banho de óleo é aquecido a  $80^\circ\text{C}$ , quantos centímetros, aproximadamente, e em que sentido o contato  $C$  deverá ser deslocado para se equilibrar a ponte? Dados resistividade:  $\rho_0 = 10,0 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$  e coeficiente de temperatura para o ferro a  $0^\circ\text{C}$ :  $\alpha = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .



- (A) 2,4 cm à direita.
- (B) 8,3 cm à esquerda.
- (C) 8,3 cm à direita.
- (D) 41,6 cm à esquerda.
- (E) 41,6 cm à direita.

**03** Na caixa do circuito representado a seguir, existe uma fonte ideal de tensão de força eletromotriz igual a  $E$ , e um resistor  $r$ . Com a chave  $S$  aberta, o amperímetro  $A$  (ideal) indica uma corrente  $i_1$  e a potência em  $r$  é de  $90\text{ W}$ . Fechando a chave  $S$ , o amperímetro indica uma outra corrente  $i_2$  igual a  $\frac{4}{3}$  de  $i_1$ . Determine os valores de  $E$  e  $r$  e diga se  $E$  e  $r$  estão ligados em série ou em paralelo.



**04** A figura 1 representa o circuito equivalente ao dispositivo esquematizado na figura 2, formado por um gerador, dois resistores de  $1\text{ M}\Omega$  cada e por um invólucro de vidro  $V$ , onde é feito vácuo e são inseridos o cátodo  $C$  e o ânodo  $A$ . O cátodo e o ânodo são placas metálicas paralelas separadas por  $3 \cdot 10^{-3}\text{ m}$ .

O cátodo  $C$  emite elétrons, com velocidade inicial desprezível, que são absorvidos no ânodo  $A$ . O gerador  $E$  alimenta o sistema, e nos pontos 1 e 2 observam-se, respectivamente, os potenciais  $V_1 = 300\text{ V}$  e  $V_2 = 800\text{ V}$  em relação à Terra. Determine:

- a intensidade de corrente entre o cátodo  $C$  e o ânodo  $A$ ;
- a velocidade com que os elétrons atingem o ânodo  $A$ ;
- a intensidade da força que atuou num elétron, na trajetória entre o cátodo e o ânodo, admitindo que na região o campo elétrico seja uniforme.

Adote, nos cálculos: massa do elétron =  $10^{-30}\text{ kg}$  e carga do elétron =  $10^{-19}\text{ C}$ .

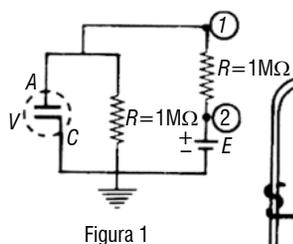


Figura 1

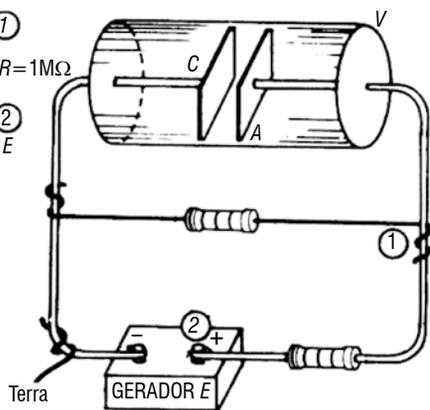
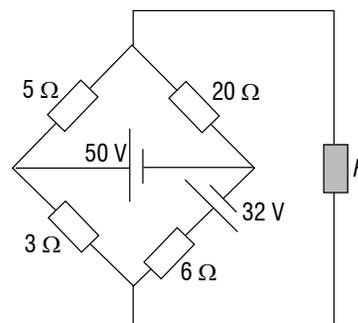


Figura 2

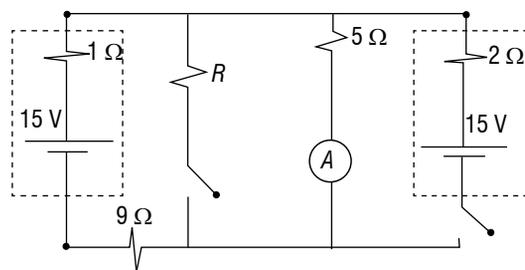
**05** Determine o valor da resistência  $R$  no circuito abaixo a fim de que a potência elétrica consumida por ela seja máxima.



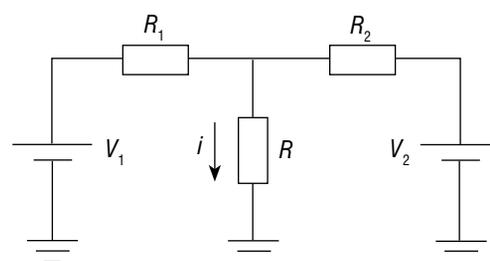
- $1\ \Omega$ .
- $2\ \Omega$ .
- $4\ \Omega$ .
- $6\ \Omega$ .
- $8\ \Omega$ .

**06** O amperímetro do circuito abaixo indica o dobro de corrente quando as duas chaves são fechadas. Determine:

- o valor de  $R$ ;
- a potência fornecida pelas fontes quando as chaves estão abertas;
- a potência fornecida pelas fontes quando as chaves estão fechadas.



**07** No circuito da figura, têm-se as resistências  $R, R_1$  e  $R_2$  e as fontes  $V_1$  e  $V_2$  aterradas. A corrente  $i$  indicada é:



- $$i = \frac{(V_1 R_2 - V_2 R_1)}{(R_1 R_2 + R R_2 + R R_1)}$$
- $$i = \frac{(V_1 R_1 + V_2 R_2)}{(R_1 R_2 + R R_2 + R R_1)}$$
- $$i = \frac{(V_1 R_1 - V_2 R_2)}{(R_1 R_2 + R R_2 + R R_1)}$$
- $$i = \frac{(V_1 R_2 + V_2 R_1)}{(R_1 R_2 + R R_2 + R R_1)}$$
- $$i = \frac{(V_2 R_1 - V_1 R_2)}{(R_1 R_2 + R R_2 + R R_1)}$$

**08** Os pontos  $A$  e  $B$  da malha de resistores da figura 2 são conectados aos pontos  $x$  e  $y$  do circuito da figura 1. Nesta situação, observa-se uma dissipação de  $P$  watts na malha. Em seguida, conecta-se o ponto  $C$  ao ponto  $F$  e o ponto  $E$  ao ponto  $H$ , o que produz um incremento de 12,5% na potência dissipada na malha. Calcule a resistência  $R$  dos resistores da malha.

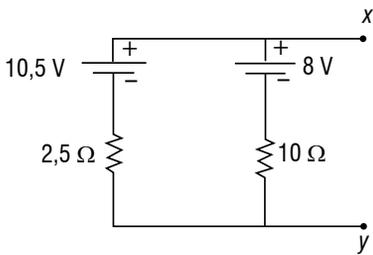


figura 1

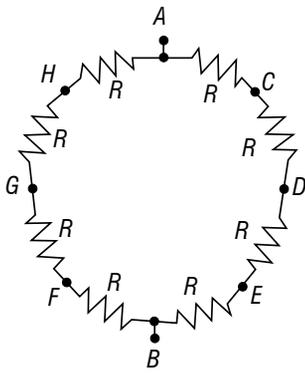
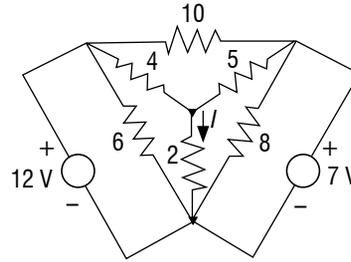


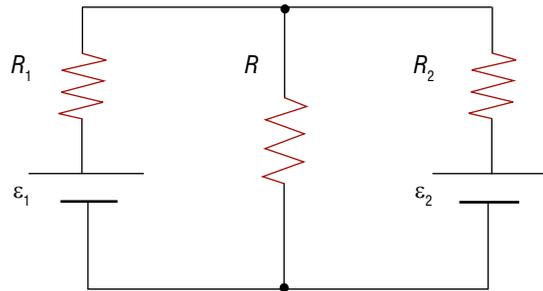
figura 2

**09** A figura a seguir ilustra um circuito resistivo conectado a duas fontes de tensão constante. Considere as resistências em ohms. O módulo da corrente  $I$  que atravessa o resistor de 2 ohms é, aproximadamente:



- (A) 0,86 A.
- (B) 1,57 A.
- (C) 2,32 A.
- (D) 2,97 A.
- (E) 3,65 A.

**10** A figura mostra um circuito com os valores indicados para as resistências  $R_1$  e  $R_2$  e forças eletromotrices das baterias  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$ . As resistências internas das baterias podem ser desprezadas.



- a. Determine a resistência  $R$  do resistor quando a potência fornecida a ele é máxima.
- b. Encontre esta potência máxima.

RASCUNHO

## 1. Introdução

No presente capítulo, estudaremos novamente os capacitores; porém, desta vez, eles estarão inseridos dentro de um circuito elétrico mais complexo.

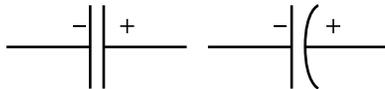
Além de relembrar as características do capacitor, tais como sua capacitância, carga e energia armazenada, veremos como associá-los em série ou em paralelo.

Por fim, analisaremos os processos de carga e descarga de um capacitor, explicando passo a passo como se determina a carga elétrica, a tensão e a corrente elétrica dele para qualquer instante de tempo.

## 2. Capacitor

Capacitor é um elemento físico do circuito, do tipo bipolo elétrico e que tem como função básica armazenar carga elétrica e, conseqüentemente, energia potencial elétrica.

Simbologia:



Alguns tipos de capacitores:



### 2.1 Capacitância

Vimos anteriormente que a capacitância de um capacitor é definida como:

$$C = \frac{Q}{U}$$

em que:

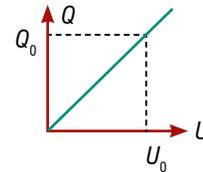
$Q$  – carga elétrica armazenada no capacitor;  
 $U$  – d.d.p. nos terminais do capacitor.

UNIDADE SI DE CAPACITÂNCIA : [F]; Farad

### 2.2 Energia armazenada num capacitor

Como visto em capítulos anteriores, podemos determinar a carga elétrica de um capacitor da seguinte maneira:  $Q = C.U$ .

A partir desta função linear, podemos obter o gráfico  $Q \cdot U$ .



em que  $Q_0 = C.U_0$ .

Logo, a energia armazenada será determinada pela área do gráfico acima:

$$E = \frac{QU}{2}$$

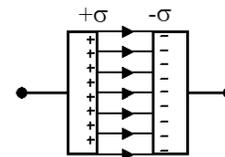
A expressão acima pode ser escrita de outras formas:

$$E = \frac{CU^2}{2}$$

$$E = \frac{Q^2}{2U}$$

### 2.3. Cálculo da capacitância através da geometria do capacitor

No módulo sobre potencial elétrico, vimos que a capacitância de um capacitor pode ser determinada a partir de sua geometria. Deduzimos uma expressão para a capacitância do capacitor esférico e para o capacitor de placas planas e paralelas. Pelo fato deste último ser mais importante, vamos relembrar como chegamos a sua capacitância.



Seja  $\vec{E}$  o campo elétrico uniforme definido entre as placas condutoras de um capacitor plano. Sabemos pelo capítulo de campo elétrico que:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \text{ e } \sigma = \frac{Q}{A} ; \text{ daí } E = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

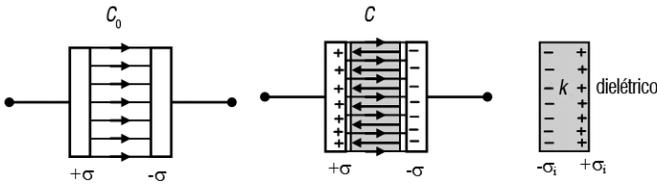
Também sabemos que, para campos uniformes,  $U = E \cdot d$ . Assim:

$$\frac{U}{d} = \frac{Q}{A\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q}{U} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

### 2.4. Capacitores com dielétricos (isolantes)

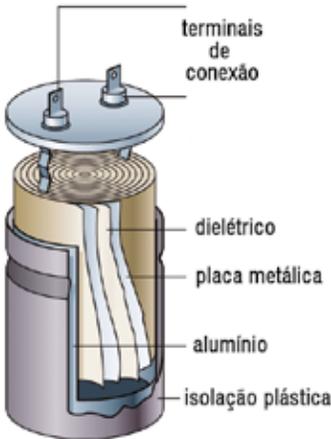
Se preenchermos o espaço entre as placas de um capacitor com um dielétrico de constante dielétrica  $k$ , a capacitância se altera para:

$$C = \frac{k\epsilon_0 A}{d}$$



$k \rightarrow$  constante dielétrica (= permissividade relativa  $\epsilon_r$ ) permissividade de um meio  $\epsilon = k \cdot \epsilon_0$

Exemplo de um capacitor com dielétrico



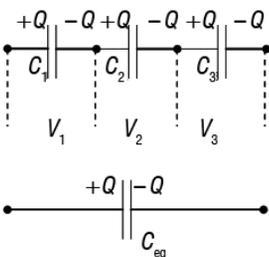
**Obs.:** Rigidez dielétrica  $\rightarrow$  É o maior campo elétrico a que o dielétrico pode ser submetido, sem que ocorra sua ionização. Caso isso aconteça, o capacitor queimará.

| meio  | constante dielétrica (k ou $\epsilon_r$ ) | rigidez dielétrica  |
|-------|---|---------------------|
| vácuo | 1,00000                                   | $\infty$            |
| ar    | 1,00054                                   | $8 \cdot 10^5$ V/m  |
| papel | 3,5                                       | $14 \cdot 10^6$ V/m |

## 2.5 Associação de capacitores

### I. Em série

Quando os capacitores encontram-se em equilíbrio, suas cargas armazenadas são iguais, e a tensão total da associação, igual à soma das tensões de cada capacitor.



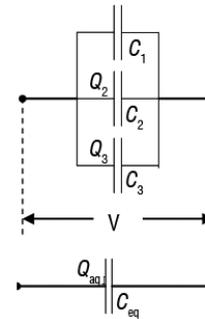
$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2} \quad V_3 = \frac{Q}{C_3} \quad V_{eq} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$V_{eq} = V_1 + V_2 + V_3 \Rightarrow \frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

### II. Em paralelo

Quando os capacitores estão em equilíbrio, as suas d.d.p. são iguais, e a carga total da associação, igual à soma das cargas armazenadas por todos os capacitores.



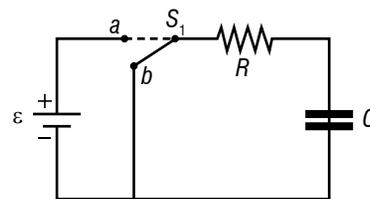
$$Q_1 = C_1V \quad Q_2 = C_2V \quad Q_3 = C_3V$$

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \Rightarrow C_{eq} = C_1V + C_2V + C_3V$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3$$

## 2.6. Carga e descarga de capacitores

Iremos abordar agora como ocorrem os processos de carga e descarga de um capacitor. Para isso, vamos considerar o circuito abaixo, composto por um gerador ideal de fem  $\epsilon$ , um resistor  $R$ , um capacitor  $C$  e uma chave  $S_1$  que pode comutar entre as posições  $a$  e  $b$ .



### Carga do capacitor

Seja um capacitor inicialmente descarregado e a chave  $S_1$  na posição  $b$ . No instante  $t = 0$ , a chave é levada para a posição  $a$ , e assim uma corrente elétrica surge na malha externa, iniciando dessa forma o processo de carga do capacitor.

Aplicando a lei das malhas para as tensões no gerador, resistor e capacitor, teremos:

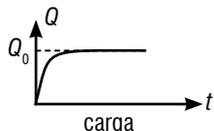
$$-\epsilon + R \cdot i + \frac{Q}{C} = 0 \xrightarrow{i = \frac{dQ}{dt}} -\epsilon + R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \rightarrow \frac{dQ}{eC - Q} = \frac{1}{R \cdot C} \cdot dt$$

Integrando ambos os lados de  $t=0$  a um tempo  $t$  qualquer.

$$\int_{Q(0)}^{Q(t)} \frac{dQ}{\epsilon C - Q} = \frac{1}{R \cdot C} \int_0^t dt \xrightarrow{Q(0)=0} \ln(\epsilon C - Q) - \ln(\epsilon C) = -\left(\frac{t}{R \cdot C} = 0\right) \rightarrow \frac{\epsilon C - Q}{\epsilon C} = e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Arrumando a equação, chegamos à equação da carga do capacitor em função do tempo:

$$Q(t) = \epsilon C(1 - e^{-t/RC})$$



Para encontrarmos a equação da d.d.p. do capacitor no tempo, basta

fazer:  $U = \frac{Q}{C}$

$$U(t) = \epsilon C(1 - e^{-t/RC})$$

Se derivarmos a equação da carga no tempo, chegaremos à expressão da corrente elétrica no capacitor:

$$i(t) = \frac{e}{R} e^{-t/RC}$$

Portanto, observa-se que, para a situação do capacitor completamente carregado ( $t \rightarrow \infty$ ), não há passagem de corrente elétrica por ele.

$$Q = \epsilon \cdot C \qquad U = \epsilon \qquad i = 0$$

**Obs.:** Dizemos que um circuito encontra-se em regime permanente quando o capacitor estiver completamente carregado (estado estacionário).

### Descarga do Capacitor

Suponha agora o capacitor inicialmente carregado (com carga  $Q_0 = \epsilon \cdot C$ ) e a chave  $S_1$  na posição  $a$ . No instante  $t = 0$ , a chave é levada para a posição  $b$ , e assim uma corrente elétrica surge na malha da direita, iniciando dessa forma o processo de descarga do capacitor.

Aplicando a lei das malhas para as tensões no resistor e no capacitor, teremos:

$$R \cdot i + \frac{Q}{C} = 0 \xrightarrow{i = \frac{dQ}{dt}} R \cdot \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot dt$$

Integrando ambos os lados de  $t=0$  a um tempo  $t$  qualquer.

$$\int_{Q(0)}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{R \cdot C} \int_0^t dt \xrightarrow{Q(0) = \epsilon \cdot C} \ln(Q) - \ln(\epsilon C) = \left(\frac{t}{R \cdot C} - 0\right) \rightarrow \frac{Q}{\epsilon C} = e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

Arrumando a equação, chegamos a equação da carga do capacitor em função do tempo:

$$Q(t) = \epsilon \cdot C \cdot e^{-t/RC}$$



Para encontrarmos a equação da ddp do capacitor no tempo, basta

fazer:  $U = \frac{Q}{C}$   
 $U(t) = \epsilon \cdot e^{-t/RC}$

Se derivarmos a equação da carga no tempo, chegaremos à expressão da corrente elétrica no capacitor:

$$i(t) = -\frac{\epsilon}{R} e^{-t/RC}$$

Portanto, observa-se que, para a situação do capacitor completamente descarregado ( $t \rightarrow \infty$ ), a carga, a tensão e a corrente do capacitor se tornam nulas.

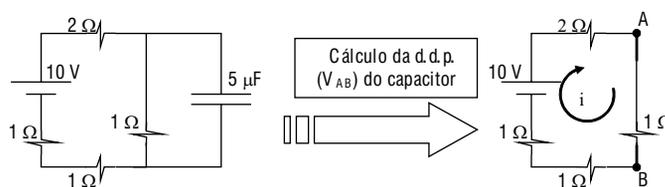
$$Q = 0 \qquad U = 0 \qquad i = 0$$

**Obs.:** Se o circuito de carga e descarga de um capacitor for diferente do mencionado acima, podemos aplicar o Teorema de Thévenin sobre os terminais do capacitor, chegando assim a um circuito equivalente composto por um gerador ideal de fem  $\epsilon_{th}$  em série com uma resistência  $r_{th}$ .

### 3. Circuitos RC

São circuitos que possuem, além dos geradores, receptores e resistores, os capacitores.

**Ex.:** Determine a carga do capacitor, supondo que ele esteja completamente carregado.



$$i = \frac{10}{2 + 1 + 1 + 1} = 2A$$

$$V_{AB} = 2 \cdot 1 = 2V$$

$$Q = C \cdot V_{AB} = 5 \cdot 10^{-6} \cdot 2$$

$$Q = 10\mu C$$

### EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

**01** Um capacitor de  $10 \mu F$  é ligado aos terminais da associação em série de duas pilhas de  $1,5 V$ . Determine:

- a carga elétrica armazenada no capacitor;
- a energia potencial elétrica armazenada no capacitor.

**Solução:**

a. As duas pilhas estão em série; portanto, a d.d.p. total será

$$U_{TOTAL} = 1,5 + 1,5 = 3,0 V$$

$$Q = C \cdot U$$

$$Q = 10\mu \cdot 3 = 30 \mu C$$

b. A energia pode ser calculada por

$$E = \frac{CU^2}{2}$$

$$E = \frac{10\mu \cdot 30^2}{2}$$

$$E = 45\mu J$$

**02** Um capacitor plano a ar é ligado a uma bateria, carregando-se plenamente. Mantendo-o ligado à citada bateria, aumenta-se um pouco a distância entre suas placas. Consequentemente:

- (A) a diferença de potencial entre as placas aumenta.
- (B) a diferença de potencial entre as placas diminui.
- (C) a capacitância do capacitor aumenta.
- (D) a carga elétrica do capacitor diminui.
- (E) a intensidade do campo elétrico entre as placas aumenta.

**Solução:** Letra D.

Como a bateria é a mesma nas duas situações, a d.d.p.  $U$  é constante.

Analisando a expressão  $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ , percebemos que, aumentando a

distância  $d$  entre as placas, a capacitância diminui (são inversamente proporcionais).

E finalmente analisando a expressão  $Q = C \cdot U$ , a carga e a capacitância são diretamente proporcionais para a mesma d.d.p.

Como a capacitância diminui, a carga elétrica do capacitor também.

**03** Calcule a capacitância do capacitor constituído por duas placas metálicas planas e paralelas, de  $1,0 \text{ m}^2$  cada uma, separadas por uma camada de ar de  $1,0 \text{ cm}$  de espessura. A permissividade do ar vale, no Sistema Internacional de Unidades, aproximadamente  $8,8 \cdot 10^{-12}$ .

**Solução:** A capacitância de um capacitor é dada por

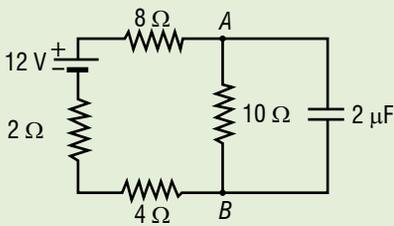
$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$A = 1,0 \text{ m}^2; d = 1 \text{ cm} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ m.}$$

$$C = \frac{8,8 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{1 \cdot 10^{-2}}$$

$$C = 8,8 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 0,88 \text{ nF}$$

**04** Considere o circuito a seguir

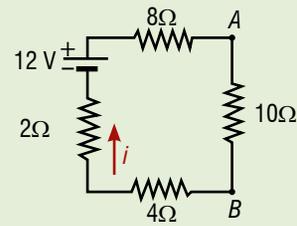


Supondo encerrado o processo de carga do capacitor, determine:

- a. a diferença de potencial entre os pontos A e B;
- b. a carga elétrica armazenada no capacitor.

**Solução:**

- a. Em um circuito de corrente contínua, só há corrente no ramo em que se encontra o capacitor durante o seu processo de carga (ou descarga). Assim, encerrado esse processo, anula-se a corrente no citado ramo, que pode ser eliminado para efeito do cálculo da intensidade de corrente no resto do circuito:



Calculamos a intensidade de corrente no circuito:

$$\epsilon = R_{eq} i \Rightarrow 12 = 24 i \Rightarrow i = 0,5 \text{ A}$$

A diferença do potencial entre A e B é dada por:

$$U_{AB} = R_{AB} i = 10 \cdot 0,5 \Rightarrow U_{AB} = 5 \text{ V}$$

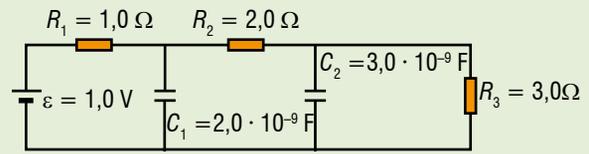
- b. A carga elétrica do capacitor é dada por:

$$Q = C U_{AB}$$

Sendo  $C = 2 \mu\text{F} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}$  e  $U_{AB} = 5 \text{ V}$ , obtemos:

$$Q = 2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \Rightarrow Q = 10 \mu\text{C}$$

**05 (PUCCAMP-SP)** O circuito esquematizado a seguir é constituído de um gerador ideal, dois capacitores e três resistores, cujos valores são indicados na figura.

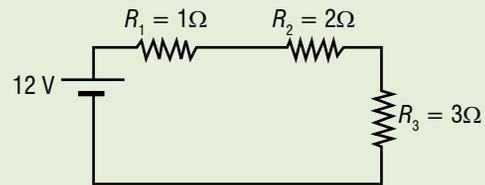


É correto afirmar que a:

- (A) carga do capacitor  $C_1$  é de  $1,2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ .
- (B) carga do capacitor  $C_2$  é de  $1,8 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ .
- (C) corrente elétrica no circuito tem intensidade de  $1,0 \text{ A}$ .
- (D) d.d.p. (tensão) em  $R_2$  vale  $3,0 \text{ V}$ .
- (E) d.d.p. (tensão) em  $R_3$  vale  $9,0 \text{ V}$ .

**Solução:** Letra B.

Logo após ligarmos o circuito, os capacitores estão descarregados e tudo funciona como se tivéssemos a seguinte configuração



$$i = \frac{12}{1+2+3}$$

$$i = 2 \text{ A}$$

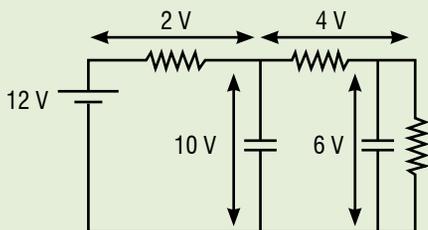
Cálculo das tensões nos resistores:

$$R_1: U_1 = 1 \cdot 2 = 2 \text{ V}$$

$$R_2: U_2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ V}$$

$$R_3: U_3 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ V}$$

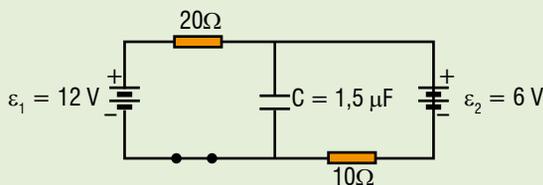
Cargas dos capacitores (depois de carregados):



$$C_1 = Q_1 = C_1 \cdot U_1 \Rightarrow Q_1 = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 10 = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$C_2 = Q_2 = C_2 \cdot U_2 \Rightarrow Q_2 = 3 \cdot 10^{-9} \cdot 6 = 1,8 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

**06** O circuito a seguir está fechado há muito tempo, o que significa que o capacitor já está plenamente carregado.



Sendo desprezíveis as resistências internas das baterias, calcule:

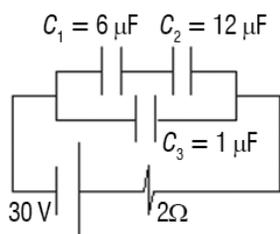
- a carga do capacitor;
  - a potência dissipada no resistor de 10Ω.
- a.  $\epsilon_1 = \epsilon_2 + R_{eq}i \Rightarrow 12 = 6 + 30i \Rightarrow i = 0,2 \text{ A}$   
 • No capacitor:  $U = \epsilon_1 - 20i = 12 - 20 \cdot 0,2 \Rightarrow U = 8 \text{ V}$   
 $Q = C \cdot U = 1,5 \mu\text{F} \cdot 8 \text{ V} \Rightarrow Q = 12 \mu\text{F}$
- b.  $Pot = R i^2 = 10 \cdot 0,2^2 \Rightarrow Pot = 0,4 \text{ W}$

**EXERCÍCIOS NÍVEL 1**

**01** Um capacitor de 10 μF com ar entre as placas é ligado a uma fonte de 50 V e depois desligado.

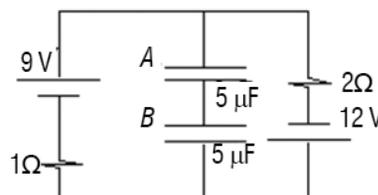
- Quais são as cargas nas placas do capacitor e a diferença de potencial entre elas?
- A região entre as placas é preenchida com teflon de constante dielétrica igual a 2,1. Quais são as cargas nas placas e a nova diferença de potencial?

**02** O conjunto de capacitores esquematizado a seguir está ligado a um gerador de corrente contínua:

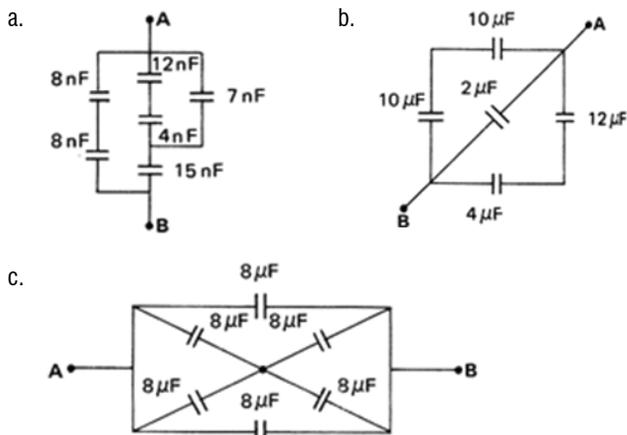


Passada a fase transitória, determine a carga elétrica e a tensão entre as armaduras de cada capacitor.

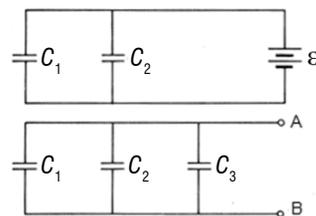
**03** No circuito esquematizado a seguir, calcule as cargas  $Q_A$  e  $Q_B$  dos capacitores  $A$  e  $B$ , supondo encerrados os processos de carga.



**04** Determine a capacitância equivalente entre  $A$  e  $B$  nas associações de capacitores esquematizadas a seguir:



**05** Dois capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , ambos de 2 μF, são ligados em paralelo a uma fonte cuja tensão é de 10 volts. Depois de serem carregados, retira-se a fonte e introduz-se em paralelo um terceiro capacitor de 1 μF, como mostram as figuras abaixo. Qual a diferença de potencial  $V_{AB}$  da nova associação?

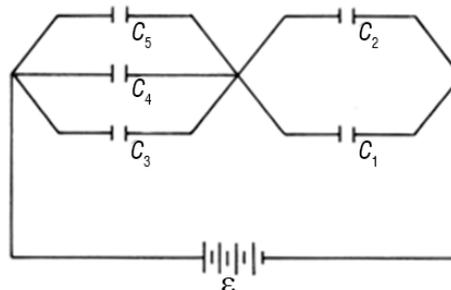


$$C_1 = 2 \mu\text{F} \quad C_2 = 2 \mu\text{F} \quad C_3 = 1 \mu\text{F} \quad \epsilon = 10 \text{ V}$$

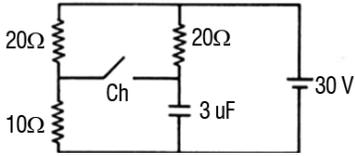
**06** Um capacitor de capacitância  $C_1 = 1.000 \mu\text{F}$ , carregado com tensão de 30 volts, é ligado através de um resistor a outro capacitor  $C_2 = 500 \mu\text{F}$ , inicialmente descarregado. Qual a tensão do capacitor  $C_1$  quando a corrente no resistor vai a zero, ou seja, quando o sistema atinge o equilíbrio?

**07** No circuito a seguir, determine a energia armazenada no capacitor  $C_1$ , em unidades  $10^{-4} \text{ J}$ .

(Dados:  $C_1 = C_2 = 15 \mu\text{F}$ ;  $C_3 = C_4 = C_5 = 10 \mu\text{F}$ ;  $\epsilon = 24,5 \text{ V}$ )

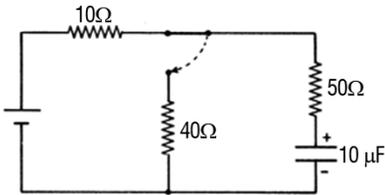


**08** Dado o circuito elétrico esquematizado na figura, obtenha:

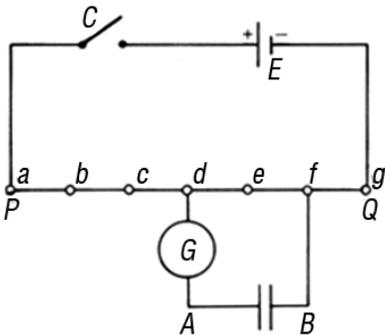


- a. a carga no capacitor, enquanto a chave Ch estiver aberta;
- b. a carga final no capacitor, após o fechamento da chave.

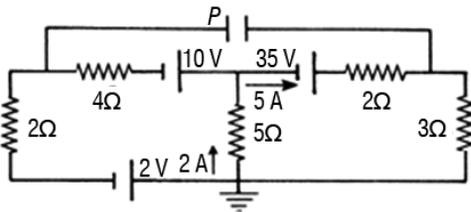
**09** No circuito esquematizado na figura, o capacitor está totalmente eletrizado e armazena energia de 0,5 J; a força eletromotriz da fonte ideal é desconhecida. Qual é a potência elétrica fornecida pela fonte, ao se mudar a posição do interruptor?



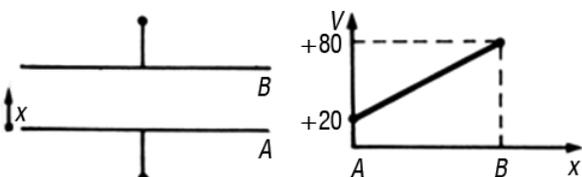
**10** O circuito representado na figura é constituído por uma pilha ideal de 1,5 V de força eletromotriz ligada a um fio condutor PQ, homogêneo, de seção reta constante. O fio é provido de terminais igualmente espaçados, sendo que entre dois deles se encontra um capacitor de 10 μF em série com um galvanômetro. Estando a chave C fechada e sendo nula a indicação do galvanômetro, determine a carga no capacitor.



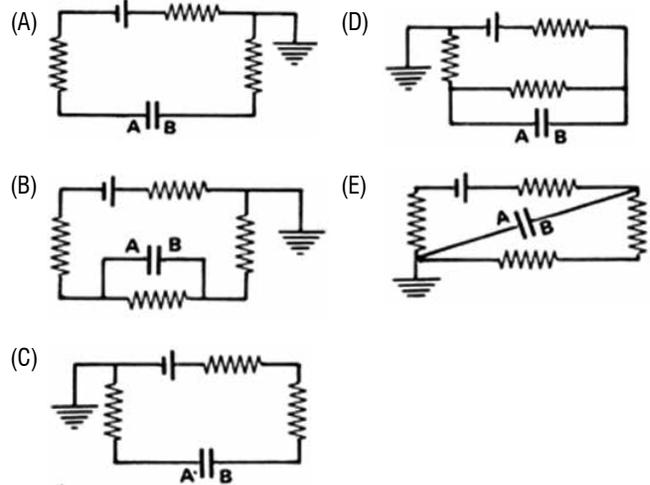
**11** No circuito esquematizado abaixo, qual o potencial da placa P do capacitor representado, se o circuito está funcionando em regime constante?



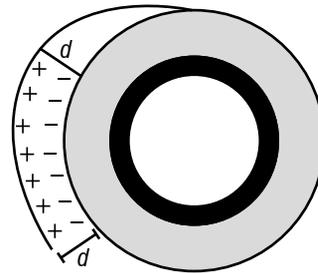
**12** Um capacitor plano está ligado a um circuito, sendo que o potencial de um ponto entre as duas placas, à distância x da placa A, é dado pelo gráfico seguinte:



Nessa situação, qual dos esquemas a seguir representa o possível circuito com esse capacitor?



**13** Quando um rolo de fita adesiva é desenrolado, ocorre uma transferência de cargas negativas da fita para o rolo, conforme ilustrado na figura a seguir.



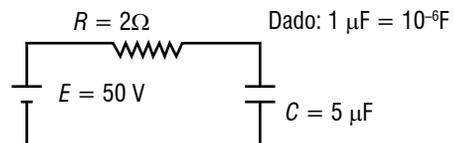
Quando o campo elétrico criado pela distribuição de cargas é maior que o campo elétrico de ruptura do meio, ocorre uma descarga elétrica. Foi demonstrado recentemente que essa descarga pode ser utilizada como uma fonte econômica de raios X.

Para um pedaço da fita de área  $A = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$  mantido a uma distância constante  $d = 2,0 \text{ mm}$  do rolo, a quantidade de cargas acumuladas é igual a  $Q = CV$ , sendo  $V$  a diferença de potencial entre a fita desenrolada e o rolo e  $C = \epsilon_0 \frac{A}{d}$  em que  $\epsilon_0 \approx 9,0 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}}$ . Nesse caso, a diferença de

potencial entre a fita e o rolo para  $Q = 4,5 \cdot 10^{-9} \text{ C}$  é de:

- (A)  $1,2 \cdot 10^2 \text{ V}$ .
- (B)  $5,0 \cdot 10^{-4} \text{ V}$ .
- (C)  $2,0 \cdot 10^3 \text{ V}$ .
- (D)  $1,0 \cdot 10^{-20} \text{ V}$ .

**14** Na figura abaixo, C é um capacitor de placas planas e paralelas. Mantém-se o circuito fechado e aguarda-se o tempo suficiente para que tal capacitor se carregue completamente. A carga do capacitor, em Coulomb, vale:



- (A)  $1,25 \cdot 10^{-5}$ .
- (B)  $1,75 \cdot 10^{-5}$ .
- (C)  $2,5 \cdot 10^{-4}$ .
- (D)  $5,0 \cdot 10^{-4}$ .

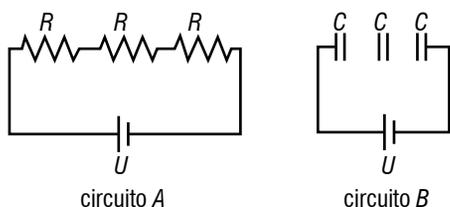
**15** Tem-se uma associação de três capacitores em paralelo, cada um com  $100 \mu\text{F}$ . Pretende-se substituí-los por um capacitor plano de placas paralelas. Qual deve ser a área, em  $\text{m}^2$ , desse novo capacitor, sabendo-se que a separação entre suas placas é de  $0,3 \text{ cm}$ .  
 Dado:  $\epsilon_0 = 9 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$ .

- (A)  $1 \cdot 10^2$ .
- (B)  $1 \cdot 10^5$ .
- (C)  $1 \cdot 10^{-5}$ .
- (D)  $1 \cdot 10^{-6}$ .

**16** Um capacitor  $C_1$  de  $1 \mu\text{F}$  é ligado a uma bateria de  $12 \text{ V}$  para ser carregado. Após a carga, a bateria é desligada, e outro capacitor  $C_2$  de  $3 \mu\text{F}$ , inicialmente descarregado, é ligado em paralelo com  $C_1$ . A soma das novas cargas dos capacitores, em  $C$ , será?

- (A)  $3 \cdot 10^{-6}$ .
- (B)  $6 \cdot 10^{-6}$ .
- (C)  $9 \cdot 10^{-6}$ .
- (D)  $12 \cdot 10^{-6}$ .

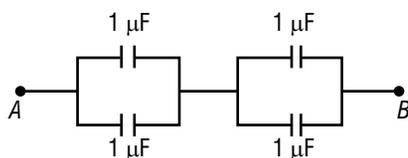
**17** No circuito A, considere os três resistores com resistências iguais e, no circuito B, considere os três capacitores com capacitâncias iguais.



É correto afirmar que a resistência equivalente é igual a:

- (A)  $3R$ , e a capacitância equivalente é igual a  $3C$ .
- (B)  $R/3$ , e a capacitância equivalente é igual a  $3C$ .
- (C)  $3R$ , e a capacitância equivalente é igual a  $C/3$ .
- (D)  $R/3$ , e a capacitância equivalente é igual a  $C/3$ .
- (E)  $R$ , e a capacitância equivalente é igual a  $C$ .

**18** Considere a figura abaixo. A capacitância entre os pontos A e B, em  $\mu\text{F}$ , vale:



- (A) 0,5.
- (B) 1,0.
- (C) 2,0.
- (D) 3,0.

**19** Três capacitores, de placas paralelas, estão ligados em paralelo. Cada um deles tem armaduras de área A, com espaçamento d entre elas.

Assinale a alternativa que contém o valor da distância entre as armaduras, também de área A, de um único capacitor, de placas paralelas, equivalente à associação dos três:

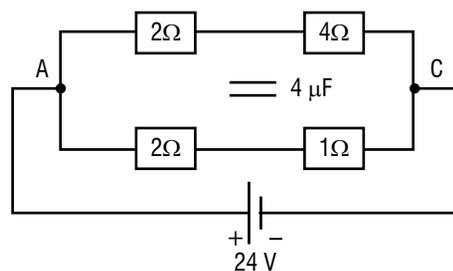
- (A)  $d/3$ .
- (B)  $3d$ .
- (C)  $(3d)/2$ .
- (D)  $(2/3)$ .

**20** No circuito do radar de bordo, tem-se um capacitor de  $22 \text{ microfarads}$  em paralelo com outro de  $8 \text{ microfarads}$  e seu equivalente em série com um de  $10 \text{ microfarads}$ . A capacitância equivalente (em microfarads), considerando a ligação com esse terceiro capacitor, é de:

- (A) 5,5.
- (B) 6,5.
- (C) 7,5.
- (D) 8,5.
- (E) 10,5.

EXERCÍCIOS NÍVEL 2

**01** No circuito abaixo, os valores da capacitância e da d.d.p. no capacitor valem, respectivamente:

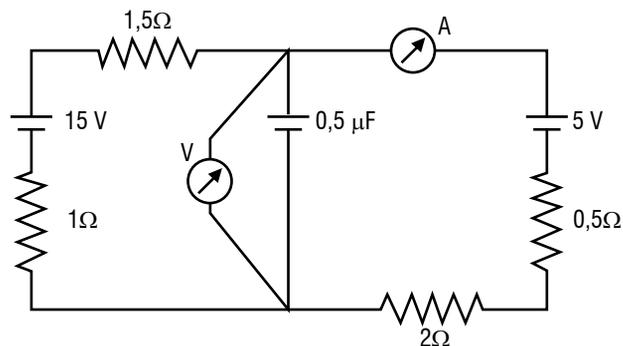


- (A)  $12 \text{ mC}$ ,  $3 \text{ V}$ .
- (B)  $32 \text{ mC}$ ,  $8 \text{ V}$ .
- (C)  $24 \text{ mC}$ ,  $6 \text{ V}$ .
- (D)  $20 \text{ mC}$ ,  $3 \text{ V}$ .
- (E)  $9 \text{ mC}$ ,  $6 \text{ V}$ .

**02** Liga-se um capacitor de  $5 \mu\text{F}$  a uma bateria de  $12 \text{ V}$ . Quando o capacitor se carrega completamente, este é desligado da bateria e conectado a outro capacitor de  $7 \mu\text{F}$ , inicialmente descarregado, com a mesma polaridade entre as placas. A voltagem do sistema de capacitores, após atingido o equilíbrio elétrico, é:

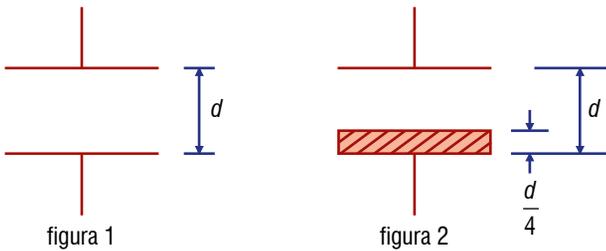
- (A)  $5 \text{ V}$ .
- (B)  $4 \text{ V}$ .
- (C)  $3 \text{ V}$ .
- (D)  $2 \text{ V}$ .
- (E)  $1 \text{ V}$ .

**03** O circuito elétrico ilustrado na figura abaixo representa uma montagem para a leitura de diferença de potencial do capacitor e da amperagem do circuito. As leituras no voltímetro e amperímetro, bem como a carga no capacitor, após a estabilização do circuito, são, respectivamente:



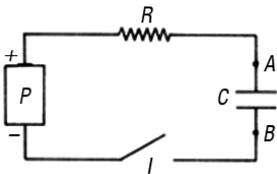
- (A) 1 V, 4 A, 6  $\mu\text{C}$ .
- (B) 8 V, 4 A, 6  $\mu\text{C}$ .
- (C) 10 V, 1 A, 9  $\mu\text{C}$ .
- (D) 10 V, 2 A, 5  $\mu\text{C}$ .
- (E) 10 V, 2 A, 8  $\mu\text{C}$ .

**04** A figura 1 mostra um capacitor de placas paralelas com vácuo entre as placas, cuja capacitância é  $C_0$ . Num determinado instante, uma placa dielétrica de espessura  $d/4$  e constante dielétrica  $K$  é colocada entre as placas do capacitor, conforme a figura 2. Tal modificação altera a capacitância do capacitor para um valor  $C_1$ . Determine a razão  $C_0/C_1$ .



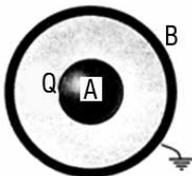
- (A)  $(3K + 1)/4K$
- (B)  $4K/(3K + 1)$
- (C)  $(4 + 12K)/3$
- (D)  $3/(4 + 12K)$
- (E)  $1/(4 + 12K)$

**05** Na figura abaixo, está representado um circuito formado por uma pilha  $P$ , um capacitor  $C$ , um resistor  $R$  e um interruptor  $I$ . Inicialmente, o capacitor está descarregado. Esboce o gráfico da diferença do potencial  $U$  entre os pontos  $A$  e  $B$  do circuito, em função do tempo  $t$ , após o fechamento de  $I$ .



**06** Calcule a energia elétrica armazenada em um capacitor de placas planas e paralelas, que apresentam densidade superficial de carga uniforme e de valor  $\sigma$ , sabendo que o volume limitado pelas armaduras é  $V$ . Admita que entre as placas existe ar (ou vácuo) cuja permissividade é  $\epsilon_0$ .

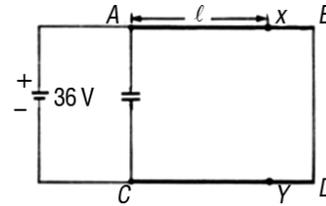
**07** Na figura a seguir, temos um capacitor esférico. A armadura interna  $A$  foi eletrizada com uma carga positiva  $Q$ . A armadura externa  $B$ , por sua vez, foi ligada à terra.



Na região entre as armaduras, existe um dielétrico de permissividade absoluta  $\epsilon$ . Sendo  $R_A$  e  $R_B$  os raios de curvatura das armaduras  $A$  e  $B$ , prove que a capacitância desse capacitor é dada por:

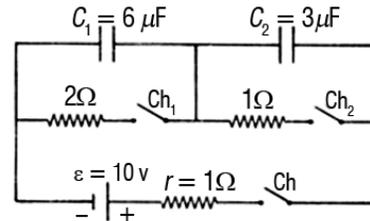
$$C = \frac{4\pi\epsilon R_A R_B}{R_B - R_A}$$

**08** O gerador representado no circuito é ideal e sua força eletromotriz vale 36 V. Os condutores  $AB$  e  $CD$  de 100 m cada um, são homogêneos e apresentam resistência de  $1,5 \Omega$  por metro de comprimento. O fio  $BD$  têm resistência desprezível. O capacitor, de capacitância igual a  $5 \mu\text{F}$ , está ligado aos pontos  $A$  e  $B$ :



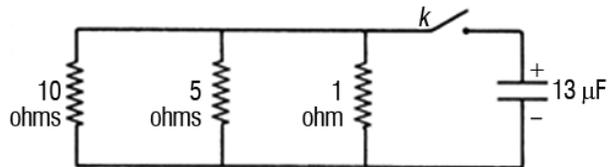
- a. Calcule a carga elétrica armazenada no capacitor.
- b. Os pontos  $X$  e  $Y$  distam  $\ell$  de  $A$  e  $C$ , respectivamente. Calcule, em função de  $\ell$ , a carga que o capacitor é capaz de armazenar, quando ligado aos pontos  $X$  e  $Y$ .

**09** No circuito da figura, as chaves estão abertas e os capacitores, descarregados. Calcule as cargas nos capacitores quando:

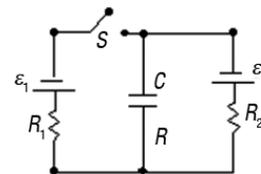


- a. se fecha a chave  $Ch$ ;
- b. se fecham também as chaves  $Ch_1$  e  $Ch_2$ .

**10** O capacitor do circuito indicado na figura está eletrizado sob tensão de 100 V. Fecha-se chave  $k$  e aguarda-se o capacitor descarregar totalmente. Qual a energia dissipada no resistor de resistência igual a 1 ohm?

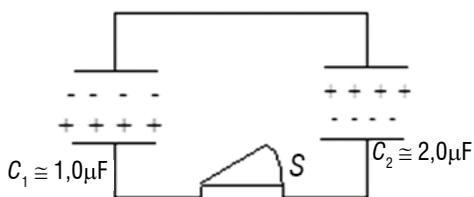


**11** O circuito da figura mostra um capacitor  $C$ , duas baterias ideais, dois resistores e uma chave  $S$ . Inicialmente,  $S$  ficou aberta por um longo período de tempo. Se ela for, então, fechada, permanecendo assim outro longo período de tempo, de quanto variará a carga do capacitor?



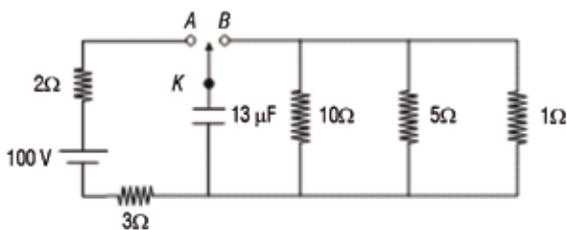
(Dados:  $C = 10 \mu\text{F}$ ;  $\epsilon_1 = 1,0 \text{ V}$ ;  $\epsilon_2 = 3,0 \text{ V}$ ,  $R_1 = 0,20 \Omega$ ;  $R_2 = 0,40 \Omega$ .)

**12** Dois capacitores, um  $C_1 \cong 1,0 \mu\text{F}$  e outro  $C_2 \cong 2,0 \mu\text{F}$ , foram carregados a uma tensão de 50 V. Logo em seguida, estes capacitores assim carregados foram ligados conforme mostra a figura. O sistema atingirá o equilíbrio a uma nova diferença de potencial  $\Delta V$  entre as armaduras dos capacitores,  $Q_1$  cargas no capacitor  $C_1$  e  $Q_2$  cargas no capacitor  $C_2$ , dados respectivamente por:



| $\Delta V$ | $Q_1 (\mu C)$ | $Q_2 (\mu C)$ |
|------------|---------------|---------------|
| (A) zero   | 50/3          | 100/3         |
| (B) zero   | 50            | 100           |
| (C) 50     | 50            | 100           |
| (D) 50     | 50/3          | 100/3         |
| (E) 50/3   | 50/3          | 100/3         |

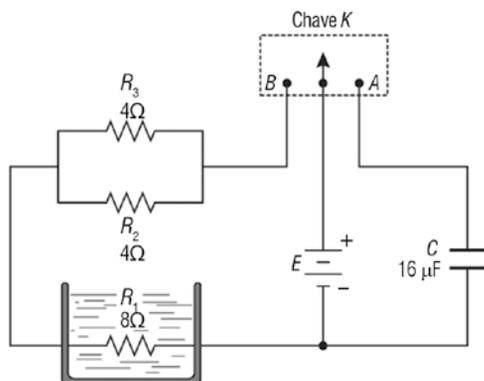
13 No circuito representado pela figura abaixo, estando o capacitor completamente carregado, leva-se a chave K da posição A para a posição B.



A quantidade de energia, em mJ, dissipada pelo resistor de 1 Ω, após essa operação, é igual a:

- (A) 5.
- (B) 10.
- (C) 25.
- (D) 50.

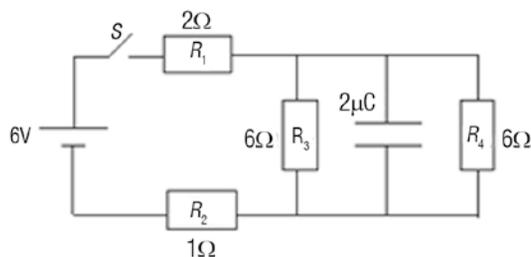
14



Na figura, o frasco de vidro não condutor térmico e elétrico contém 0,20 kg de um líquido isolante elétrico que está inicialmente a 20°C. Nesse líquido está mergulhado um resistor  $R_1$  de 8 Ω. A chave K está inicialmente na vertical e o capacitor C, de 16 μF, está descarregado. Ao colocar a chave no ponto A, verifica-se que a energia do capacitor é de 0,08 J. Em seguida, comutando a chave para o ponto B e ali permanecendo durante 5 s, a temperatura do líquido subirá para 26°C. Admita que todo o calor gerado pelo resistor  $R_1$  seja absorvido pelo líquido e que o calor gerado nos resistores  $R_2$  e  $R_3$  não atinja o frasco. Nessas condições, é correto afirmar que o calor específico do líquido, em cal . g<sup>-1</sup>.°C<sup>-1</sup>, é: (Dado: 1 cal = 4,2 J.)

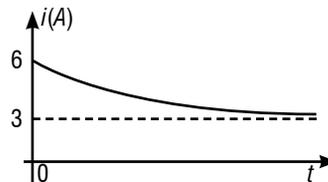
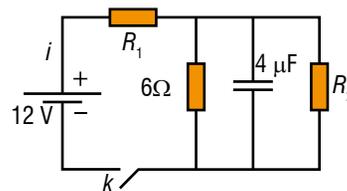
- (A) 0,4.
- (B) 0,6.
- (C) 0,8.
- (D) 0,9.
- (E) 1,0.

15 Considere o circuito elétrico da figura a seguir. A chave S encontra-se inicialmente aberta e o capacitor encontra-se completamente descarregado. A soma das correntes no resistor de 2 Ω no instante em que a chave S é fechada e em um instante de tempo posterior, suficientemente longo para que o capacitor esteja completamente carregado, é:



- (A) 1 A.
- (B) 2 A.
- (C) 3 A.
- (D) 4 A.
- (E) 5 A.

16 No circuito abaixo, o capacitor encontra-se inicialmente descarregado.

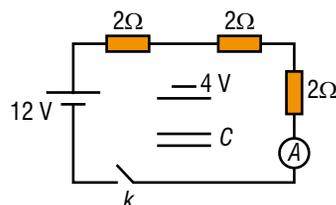


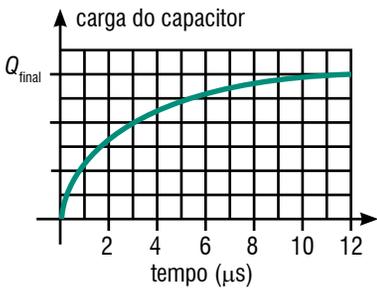
Ao fechar a chave k, a corrente elétrica fornecida pela bateria varia em função do tempo de acordo com o gráfico. Assim, conclui-se que a soma  $R_1 + R_2$  das resistências desconhecidas vale:

- (A) 5Ω.
- (B) 6Ω.
- (C) 8Ω.
- (D) 12Ω.
- (E) 20Ω.

EXERCÍCIOS NÍVEL 3

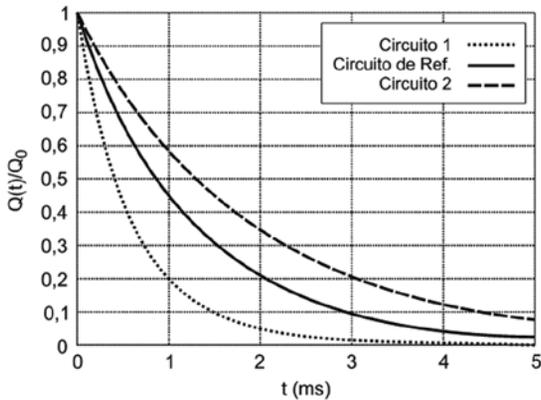
01 No circuito a seguir, as baterias e medidores são ideais e o capacitor encontra-se inicialmente descarregado. Fechando-se a chave k, a carga elétrica Q armazenada pelo capacitor C aumenta gradativamente, conforme o gráfico abaixo, até atingir o seu valor final  $Q_{final}$ . A corrente indicada pelo amperímetro, no instante  $t = 3 \mu s$ , vale:





- (A) 1A.
- (B) 2A.
- (C) 3A.
- (D) 4A.
- (E) 5A.

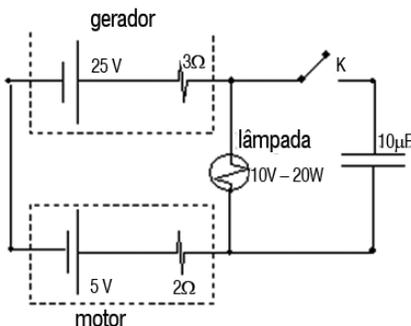
**02** O desfibrilador é um equipamento com fim terapêutico que visa à reversão das arritmias cardíacas pela aplicação de um pulso de corrente elétrica de grande amplitude em um pequeno intervalo de tempo, a qual é liberada pela descarga de um capacitor. O desfibrilador pode ser modelado por um circuito  $RC$ , no qual um capacitor de capacitância  $C$  é conectado a um resistor de resistência  $R$ . O gráfico mostra a descarga de três circuitos  $RC$ , um deles o de referência. Os capacitores têm capacitâncias  $C = 200 \mu\text{F}$  e estão carregados inicialmente com uma carga  $Q_0$ . O processo de descarga do capacitor é descrito pela equação  $Q(t) = Q_0 \exp(-t/T)$ , em que  $T = RC$  é um tempo característico de cada circuito.



Considerando os dados apresentados, calcule:

- a. o valor, em ohm, das resistências  $R_{\text{ref}}$ ,  $R_1$  e  $R_2$ , sabendo que o tempo característico do circuito de referência é 1,24 ms;
- b. o percentual de energia dissipada no resistor do circuito de referência,  $(|\Delta E|/E_0) \times 100$ , entre os instantes  $t = 0$  e  $t = 2$  ms.

**03** No circuito abaixo determine:



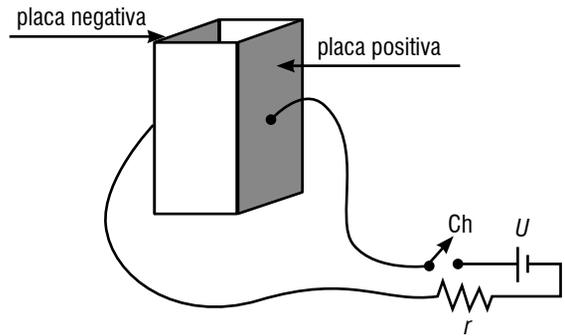
**Com a chave K aberta**

- a. o rendimento do motor e do gerador;
- b. a corrente do circuito com o motor travado.

**Com a chave K fechada:**

- c. a equação horária da carga no capacitor;
- d. a equação horária da tensão no capacitor;
- e. o instante a partir do qual a lâmpada atinge metade da potência nominal.

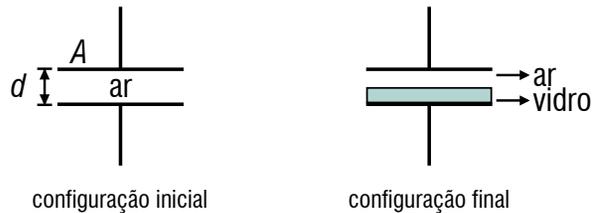
**04 (IME)**



Um reservatório possui duas faces metálicas que se comportam como placas de um capacitor paralelo. Ao ligar a chave Ch, com o reservatório vazio, o capacitor fica com uma carga  $Q_1$  e com uma capacitância  $C_1$ . Ao repetir a experiência com o reservatório totalmente cheio com um determinado líquido, a carga passa a ser  $Q_2$  e a capacitância  $C_2$ . Se a relação  $Q_1/Q_2$  é 0,5, a capacitância no momento em que o líquido preenche metade do reservatório é:

- (A)  $C_1$ .
- (B)  $3/4 C_2$ .
- (C)  $C_2$ .
- (D)  $3/2 C_2$ .
- (E)  $3/4 C_1$ .

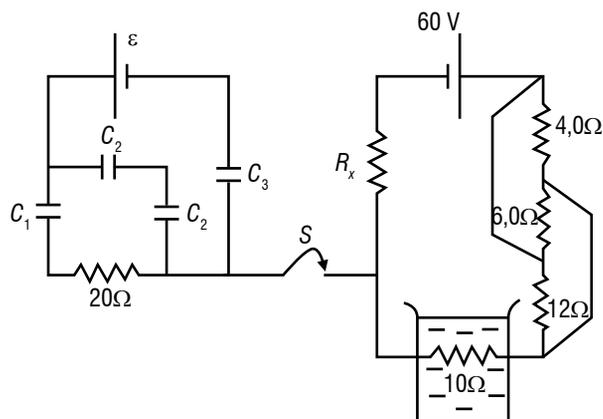
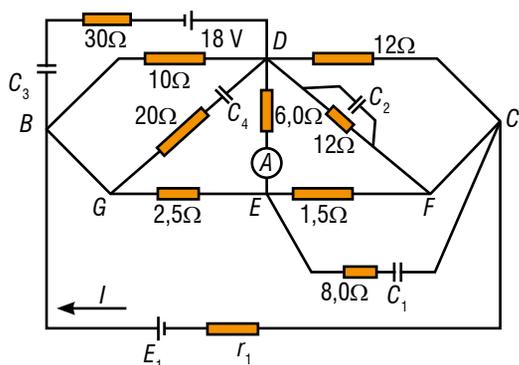
**05 (ITA-SP 2006)** A figura mostra um capacitor de placas paralelas de área  $A$  separadas pela distância  $d$ . Inicialmente o dielétrico entre as placas é o ar e a carga máxima suportada é  $Q_i$ . Para que esse capacitor suporte uma carga máxima  $Q_f$  foi introduzida uma placa de vidro de constante dielétrica  $k$  e espessura  $d/2$ . Sendo mantida a diferença de potencial entre as placas, calcule a razão entre as cargas  $Q_i$  e  $Q_f$ .



**06** No circuito abaixo, considere o amperímetro ideal e os capacitores, a vácuo, completamente carregados.

O gerador de fem  $E_1$  e resistência interna  $r$  fornece potência máxima igual a 80W. Sabe-se que a corrente elétrica fornecida pelo gerador é  $I = 5,0\text{A}$  e as circunstâncias dos capacitores valem:

$C_1 = 4,0 \mu\text{F}$ ;  $C_2 = 6,0 \mu\text{F}$ ;  $C_3 = 8,0 \mu\text{F}$ ;  $C_4 = 12 \mu\text{F}$ . Calcule:



- a fem ( $E_1$ ) e a resistência interna ( $r$ ) do gerador;
- a potência elétrica dissipada, por efeito Joule, no resistor de  $12\Omega$ , entre os pontos  $D$  e  $F$ ;
- a carga elétrica armazenada no capacitor  $C_1$  e a energia eletrostática do capacitor  $C_3$ .

**07** Nos circuitos abaixo, as capacitâncias dos capacitores valem:  $C_1 = 1,0\mu\text{F}$ ;  $C_2 = 4,0\mu\text{F}$ ;  $C_3 = 8,0\mu\text{F}$  e o gerador de  $60\text{V}$  possui resistência interna desprezível. Sabe-se que os capacitores estão completamente carregados, que a carga elétrica no capacitor  $C_1$  vale  $80\mu\text{C}$  e que o resistor de  $10\Omega$  está imerso em  $3,0 \cdot 10^2$  gramas de água, no recipiente adiabático. No instante  $t = 0$ , a chave  $S$  é fechada. Calcule:

- f.e.m.  $\varepsilon$  do gerador;
- a corrente elétrica que passa no resistor de  $6,0\Omega$ , sabendo-se que a temperatura da água varia de  $4,0^\circ\text{C}$  no intervalo de tempo de  $30\text{ s}$ .  
Dados:  $c(\text{água}) = 1,0\text{ cal/g}^\circ\text{C}$ ;  $1\text{ cal} = 4,0\text{J}$ .

RASCUNHO

RASCUNHO