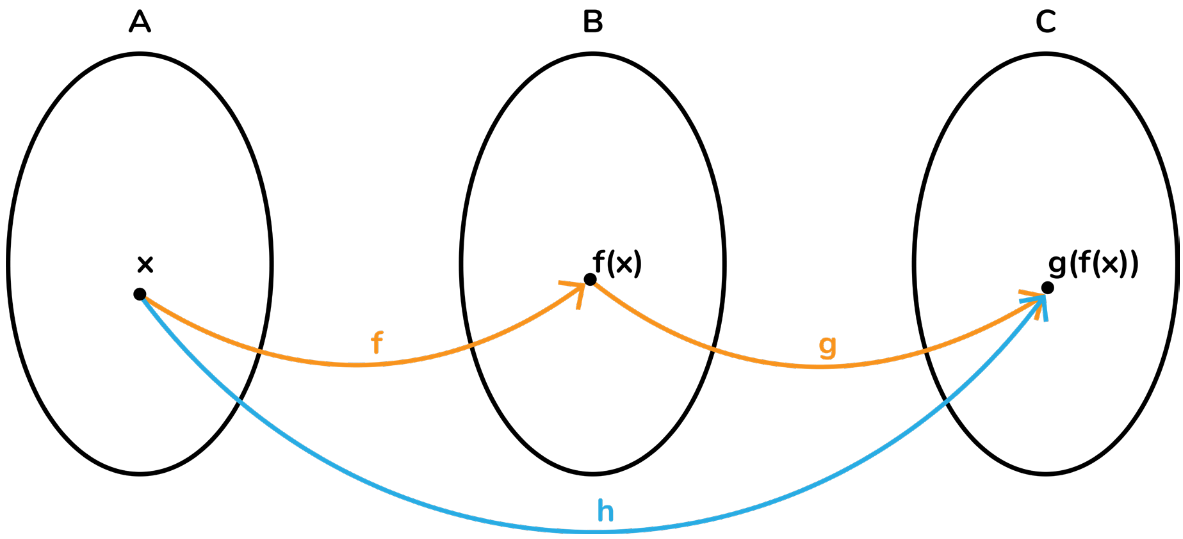
COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

Agora que já sabemos trabalhar com funções de primeiro e segundo grau, vamos aprender sobre a operação de **composição de funções**, definida abaixo:

Sejam A, B e C conjuntos não vazios e funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$. A função $h: A \to C$ dada por $h(x) = g(f(x))$ é chamada de função composta de g com f e é indicada por $g \circ f$.

A composição de funções pode ser ilustrada pelo seguinte diagrama:



Nem sempre podemos fazer a composição de duas funções. Se existir algum ponto da imagem de f que não pertence ao domínio de g, a composição não existe. A seguinte propriedade ilustra essa análise:

Dadas duas funções f e g, existe a composição entre f e g se, e somente se, $Im(f) \subset Dm(g)$.

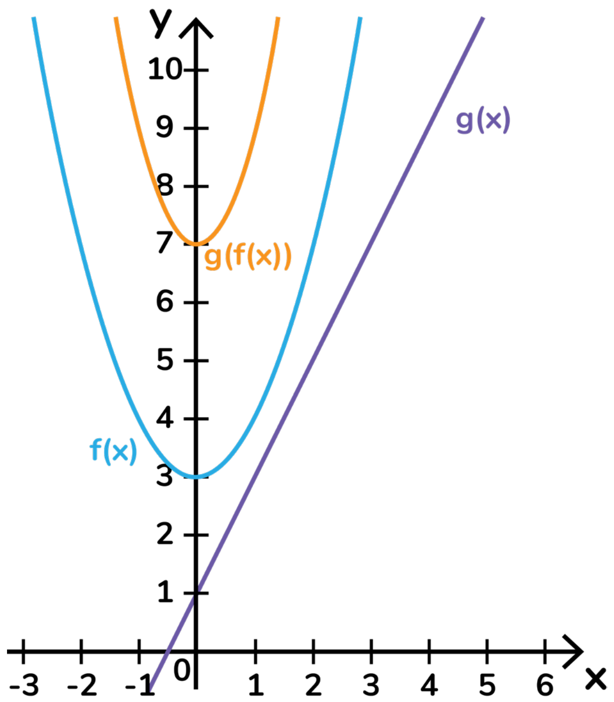
Exemplo: Considere $f(x) = x^2 + 3$ e $g(x) = 2x + 1$. Encontre a composta $h = g \circ f$.

Para encontrarmos a lei de formação da composta, temos que colocar a lei de formação de f no lugar de x na lei de formação de g:

$$h(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2(x^2 + 3) + 1 = 2x^2 + 6 + 1 = 2x^2 + 7$$

Logo, $h(x) = 2x^2 + 7$.

Nem sempre o gráfico da composta de duas funções terá relações evidentes com os gráficos das funções que a geraram. Observe o gráfico das funções do exemplo anterior:



Agora já sabemos encontrar a lei de formação da composta a partir de duas funções. Mas também podemos fazer o caminho inverso! Isso significa que, se tivermos a lei de formação da composta e a de uma das funções que a gera, podemos encontrar a lei de formação da outra função que gera a composta. Os exemplos a seguir ilustram o passo a passo para atingirmos esse objetivo:

Exemplos:

1. Dada a função $f(x) = 2x + 4$, encontre a lei de formação de $g(x)$, sabendo que $f(g(x)) = 6x + 10$.

Neste caso, basta substituir $g(x)$ no lugar de x em $f(x)$ e isolar o termo de $g(x)$ para descobrir sua lei de formação:

$$f(g(x)) = 2g(x) + 4 \Rightarrow 6x + 10 = 2g(x) + 4 \Rightarrow 2g(x) = 6x + 6 \Rightarrow g(x) = 3x + 3$$

Logo, $g(x) = 3x + 3$.

2. Dada a função $f(x) = x + 2$, encontre a lei de formação de $g(x)$, sabendo que $g(f(x)) = x^2 + 2x + 4$.

Neste caso, precisaremos fazer uma substituição de variáveis para encontrar a lei de formação de $g(x)$. A mudança que faremos será $f(x) = t$, isto é, $x + 2 = t \Rightarrow x = t - 2$. Agora, substituimos x por $t - 2$ na lei de formação de $g(f(x))$:

$$g(f(x)) = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow g(t) = (t-2)^2 + 2(t-2) + 4 \Rightarrow$$
$$g(t) = t^2 - 4t + 4 + 2t - 4 + 4 \Rightarrow g(t) = t^2 - 2t + 4.$$

Assim, temos $g(t) = t^2 - 2t + 4$.Como t é uma variável qualquer, podemos reescrever g como $g(x) = x^2 - 2x + 4$.

Uma observação muito importante a respeito da composição de funções é que ela não é **comutativa**, isto é, $f \circ g$ não é necessariamente igual a $g \circ f$. Observe o exemplo a seguir:

Considere as funções $f(x) = x + 2$ e $g(x) = x^2 + 3$. Então:

- $f(g(x)) = g(x) + 2 = x^2 + 5$;
- $g(f(x)) = (f(x))^2 + 3 = x^2 + 4x + 4 + 3 = x^2 + 4x + 7$.

Logo, $f(g(x)) \neq g(f(x))$.

ANOTAÇÕES