MATAMÁTICA

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

SETOR III

ENEM 2011

Módulo 1. Radiciação

$a \in \mathbb{R}_+ ; b \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$

$$\boxed{a \in \mathbb{R}_-^* ; b \in \mathbb{R}_-^* ; n \in \mathbb{N}^* \text{ e n é ímpar}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$

Importante:

$$\boxed{\sqrt{a^2} = |a|} \qquad \boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Para $a \in \mathbb{R}_+^*$, $b \in \mathbb{R}_+^*$ e $m, n, p \in \mathbb{N}$, temos:

$$P_1 : \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$P_2 : \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$P_3 : \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$P_4 : \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

$$P_5 : \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Módulo 2. Racionalização de denominadores

$$\boxed{\frac{A}{\sqrt{a}} = \frac{A}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}}$$

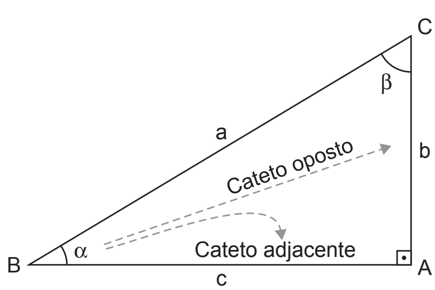
$n > m$

$$\boxed{\frac{A}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{A}{\sqrt[n]{a^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}}$$

$$\boxed{\frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{A}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}}$$

$$\boxed{\frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{A}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}$$

Módulo 3. Razões trigonométricas no triângulo retângulo (I)



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{b}{c} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

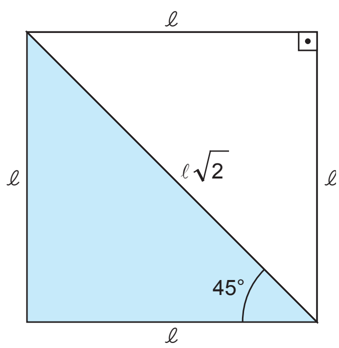
$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}} = \frac{a}{b} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$$

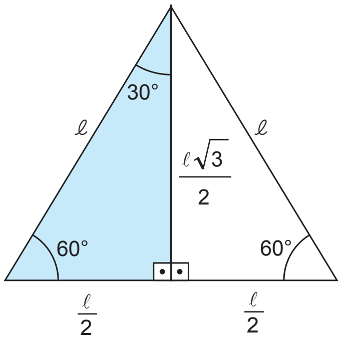
$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{c} \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{c}{b} \Rightarrow \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \\ \sec\alpha = \operatorname{cosec}\beta \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta \end{cases}$$

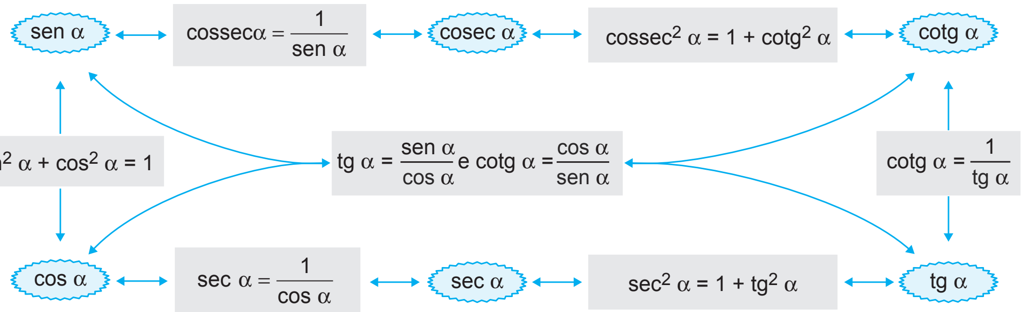
Módulo 4. Razões trigonométricas no triângulo retângulo (II)





	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Módulo 5 · Identidades trigonométricas

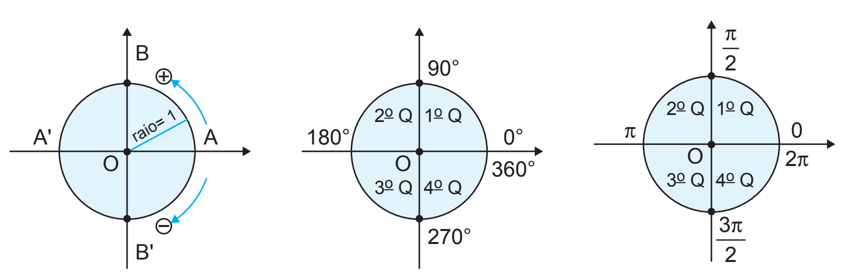


Módulo 6 · Medidas de arcos e ângulos

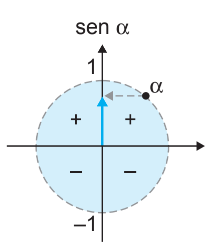
- Medida de um arco em graus
- Os submúltiplos do grau
- Adição e subtração de medidas de arcos em graus, minutos e segundos
- Medida de um arco em grados
- Medida de um arco em radianos
- Conversões de unidades de medidas de arcos
- As velocidades dos movimentos dos ponteiros de um relógio

Módulo 7 · Seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico

Ciclo trigonométrico

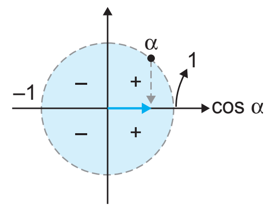


Seno



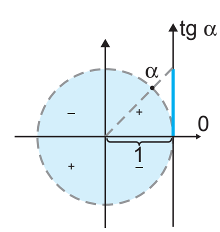
$-1 \leq \text{sen}\ \alpha \leq 1$

Cosseno



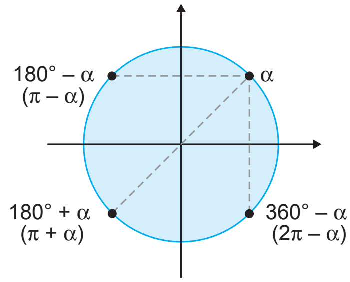
$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

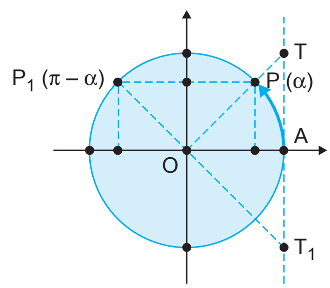
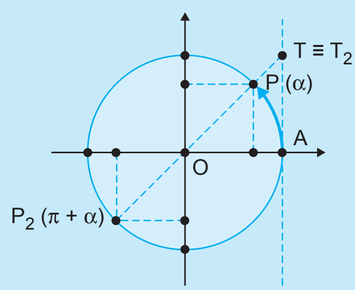
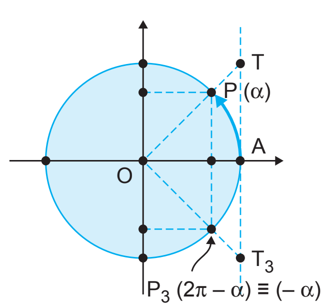
Tangente



$-\infty < \text{tg}\ \alpha < +\infty$

Módulo 8 · Redução ao primeiro quadrante

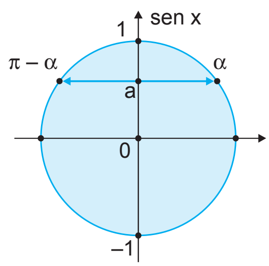


2º quadrante		sen (π – α) = sen α cos (π – α) = – cos α tg (π – α) = tg α
3º quadrante		sen (π + α) = – sen α cos (π + α) = – cos α tg (π + α) = tg α
4º quadrante		sen (2π – α) = – sen α cos (2π – α) = cos α tg (2π – α) = – tg α ou sen (–α) = – sen α cos (–α) = cos α tg (–α) = – tg α

$$\text{Lembrar: } \begin{cases} \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \\ \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cotg}\,\alpha \\ \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{cosec}\,\alpha \end{cases}$$

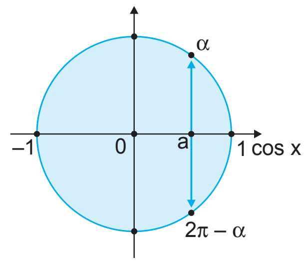
Módulo 9 · Equações trigonométricas na primeira volta

I. Equação na forma sen x = a



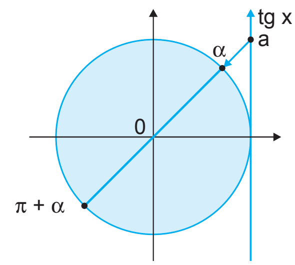
$$\text{sen } x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha \end{cases}$$

II. Equação na forma cos x = a



$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ \text{ou} \\ x = 2\pi - \alpha \end{cases}$$

III. Equação na forma tg x = a



$$\text{tg } x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ \text{ou} \\ x = \pi + \alpha \end{cases}$$

Módulo 10 · Adição e subtração de arcos

$$\text{sen }(a + b) = \text{sen } a \cdot \cos b + \text{sen } b \cdot \cos a$$
$$\text{sen }(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a$$

$$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$
$$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$$

$$\text{tg }(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } b} \qquad \text{tg }(a-b) = \frac{\text{tg } a - \text{tg } b}{1 + \text{tg } a \cdot \text{tg } b}$$

Módulos 11/12 · Arco duplo

$$\text{sen }(a + a) = \text{sen } a \cdot \cos a + \text{sen } a \cdot \cos a = 2 \text{ sen } a \cdot \cos a$$

$$\boxed{\text{sen }(2a) = 2 \text{ sen } a \cdot \cos a}$$

$$\cos (a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen } a \cdot \text{sen } a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$$

$$\boxed{\cos (2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a}$$

$$\text{tg }(a + a) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } a}{1 - \text{tg } a \cdot \text{tg } a} = \frac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}$$

$$\boxed{\text{tg }(2a) = \frac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a}}$$

Importante:
$\cos (2a) = \cos^2 a - \text{sen}^2 a = 1 - 2 \text{ sen}^2 a = 2 \cos^2 a - 1$

Módulo 13 · Transformação em produto

$$\left.\begin{array}{l} a + b = p \\ a - b = q \end{array}\right| \Rightarrow a = \frac{p+q}{2} \text{ e } b = \frac{p-q}{2}$$

$$+\begin{cases} \text{sen } a + \quad = \text{ en } \quad \cdot \cos \quad + \text{se} \quad \cdot \cos a \\ \text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a \end{cases}$$
$$\text{sen}(a + b) + \text{sen}(a - b) = 2 \text{ sen } a \cdot \cos b$$

$$-\begin{cases} \text{sen } a + \quad = \text{ en } \quad \cdot \cos \quad + \text{se} \quad \cdot \cos a \\ \text{sen}(a - b) = \text{sen } a \cdot \cos b - \text{sen } b \cdot \cos a \end{cases}$$
$$\text{sen}(a + b) - \text{sen}(a - b) = 2 \text{ sen } b \cdot \cos a$$

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

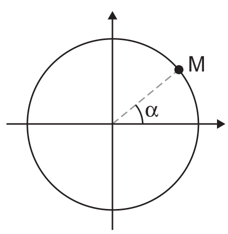
Módulo 14 • Arcos trigonométricos: determinação

1. Como achar a 1ª determinação

- Arco em graus
- Arco em radianos

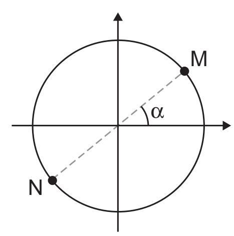
2. Expressão geral dos arcos

- Com extremidade em M



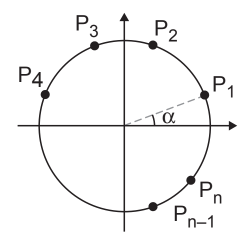
$$\boxed{x = \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

- Com extremidade em M e N (diametralmente opostos)



$$\boxed{x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

- Com extremidade em $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (vértices de um polígono regular)

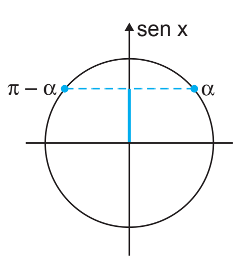


$$\boxed{x = \alpha + k \cdot \frac{2\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}}$$

Módulo 15 • Equações trigonométricas em $\mathbb{R}$

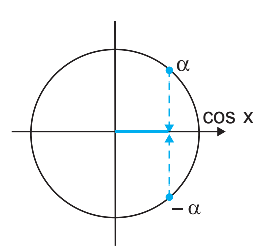
Equações da forma

I. $\boxed{\text{sen } x = \text{sen } \alpha}$



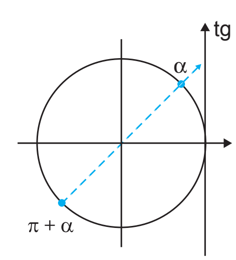
$$\boxed{\begin{array}{c} x = \alpha + k \cdot 2\pi \\ \text{ou} \\ x = (\pi - \alpha) + k \cdot 2\pi; \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

II. $\boxed{\cos x = \cos \alpha}$



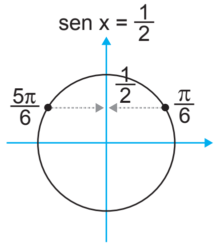
$$\boxed{\begin{array}{c} x = \pm\alpha + k \cdot 2\pi; \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

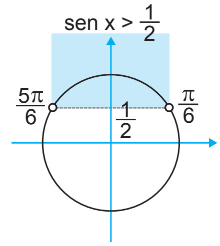
III. $\boxed{\text{tg } x = \text{tg } \alpha}$



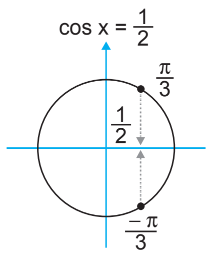
$$\boxed{\begin{array}{c} x = \alpha + k \cdot \pi; \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}}$$

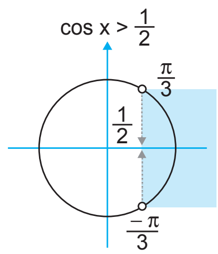
Módulo 16 · Inequações trigonométricas em $\mathbb{R}$



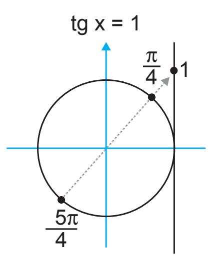


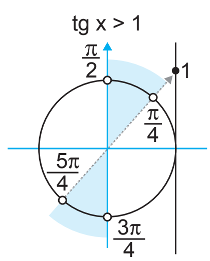
$x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi < x < \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$





$x \in \mathbb{R} / -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi < x < \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

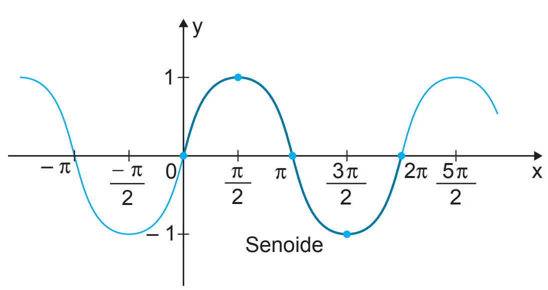




$x \in \mathbb{R} / \frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

Módulo 17 · Funções trigonométricas

1. Função seno



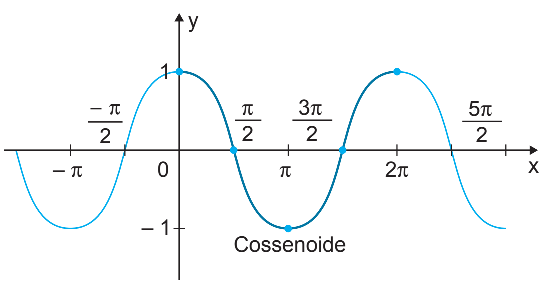
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
cos x	1	0	– 1	0	1

Domínio → $\mathbb{R}$
Imagem → [–1; 1]
Período → 2π
Função par → cos (–x) = cos x

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sen x	0	1	0	– 1	0

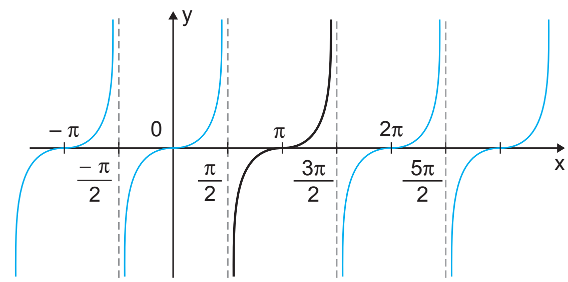
Domínio $\rightarrow \mathbb{R}$
Imagem $\rightarrow [-1; 1]$
Período $\rightarrow 2\pi$
Função ímpar $\rightarrow$ sen $(-x) = -$sen x

2. Função cosseno



Cossenoide

3. Função tangente



Tangentoide

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
tg x	0	$\nexists$	0	$\nexists$	0

Domínio $\rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} k \in \mathbb{Z}$

Imagem $\rightarrow \mathbb{R}$

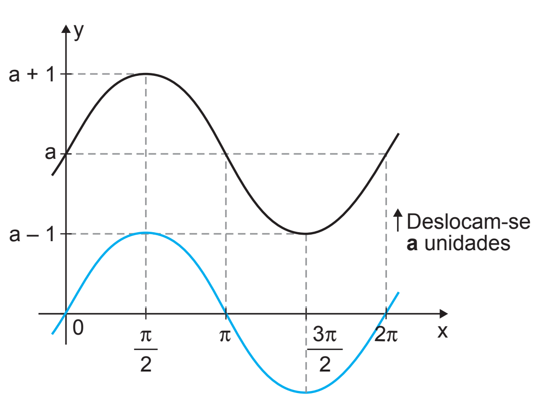
Período $\rightarrow \pi$

Função ímpar $\rightarrow$ tg $(-x) = -$ tg x

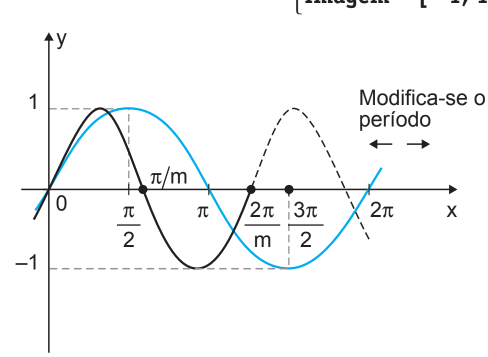
Módulo 18 · Funções trigonométricas: generalização

Gráficos de funções trigonométricas

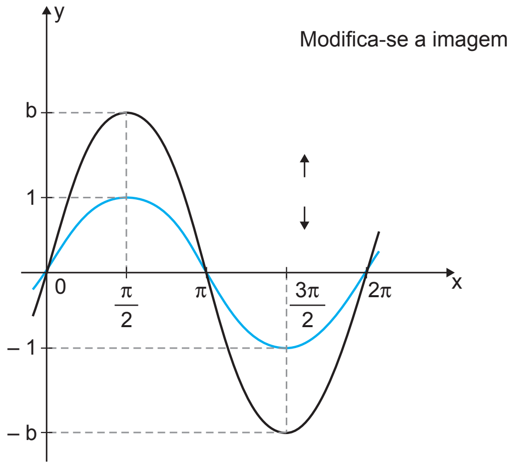
1) Função f(x) = a + sen x $\begin{cases} \textbf{Período} = 2\pi \\ \textbf{Imagem} = [a - 1, a + 1] \end{cases}$



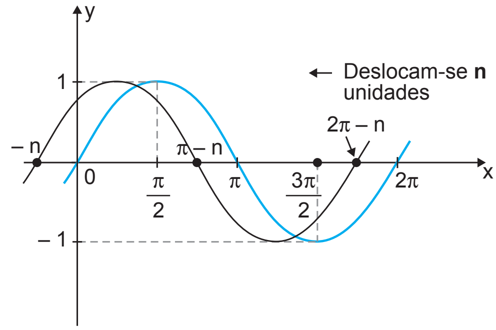
3) Função f(x) = sen (mx) $\begin{cases} \textbf{Período} = \left|\frac{2\pi}{m}\right| \\ \textbf{Imagem} = [-1, 1] \end{cases}$



2) **Função f(x) = b sen x** $\begin{cases} \textbf{Período} = 2\pi \\ \textbf{Imagem} = [-b, b] \end{cases}$



4) **Função f(x) = sen (x + n)** $\begin{cases} \textbf{Período} = 2\pi \\ \textbf{Imagem} = [-1, 1] \end{cases}$



5) **Função f(x) = a + b sen (mx + n) (b ≠ 0 e m ≠ 0)**

Período = $\left|\dfrac{2\pi}{m}\right|$

Imagem = [a – b, a + b]

6) **Função f(x) = a + b cos (mx + n) (b ≠ 0 e m ≠ 0)**

Período = $\left|\dfrac{2\pi}{m}\right|$

Imagem = [a – b, a + b]

7) **Função f(x) = a + b tg (mx + n)**

Domínio = $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, mx + n \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Período = $\left|\dfrac{\pi}{m}\right|$

Imagem = $\mathbb{R}$

Módulos 19/20 · Princípio fundamental da contagem (I)

1. Fatorial

Sendo **n** um número natural maior que 1, a função fatorial de **n**(**n**!) é o produto de todos os naturais de **n** até 1.

Assim, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

O símbolo n! também pode ser lido como n fatorial.

Em particular, definimos:

$0! = 1$ e $1! = 1$

2. Propriedade do fatorial

$n! = n \cdot (n-1)!$

$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$

3. Princípio fundamental da contagem

Se um acontecimento pode ter o número de possibilidades de ocorrência analisado em etapas sucessivas e independentes, de modo que:

n_1 = nº de possibilidades de ocorrência da 1ª etapa,

n_2 = nº de possibilidades de ocorrência da 2ª etapa,

n_3 = nº de possibilidades de ocorrência da 3ª etapa,

n_k = nº de possibilidades de ocorrência da k-ésima etapa, então o acontecimento poderá ocorrer de

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ modos diferentes.

4. Princípio da preferência

Para evitar impasses no cálculo do número de possibilidades, devemos sempre priorizar o estudo das etapas com maiores restrições, isto é, com menores números de possibilidades.

5. Exercícios característicos de contagem

1º tipo – Formação de números

- O número com n algarismos que começa por zero, na verdade, tem (n – 1) algarismos.
- Quando as condições impostas geram impasses na contagem, devemos dividir o problema em dois ou mais casos.
- Números múltiplos de 5 têm unidade 0 ou 5.
- Números múltiplos de 3 têm algarismos com soma múltipla de 3.
- Quando estamos contando os números com pelo menos dois algarismos repetidos, é mais fácil contar todos os números com ou sem repetição e subtrair a quantidade de números com algarismos distintos.

2º tipo – Comissões com cargos definidos

Módulo 21 · Princípio fundamental da contagem (II)

1. Princípio fundamental da contagem

Se um acontecimento pode ter o número de possibilidades de ocorrência analisado em etapas sucessivas e independentes, de modo que:

n_1 = nº de possibilidades de ocorrência da 1ª etapa,
n_2 = nº de possibilidades de ocorrência da 2ª etapa,
n_3 = nº de possibilidades de ocorrência da 3ª etapa,

n_k = nº de possibilidades de ocorrência da k-ésima etapa, então o acontecimento poderá ocorrer de

$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$ modos diferentes.

2. Princípio da preferência

Para evitar impasses no cálculo do número de possibilidades, devemos sempre priorizar o estudo das etapas com maiores restrições, isto é, com menores números de possibilidades.

3. Exercícios característicos de contagem

3º tipo – Anagramas sem repetição de letras

• Para calcular o número de anagramas de uma palavra de n letras, sendo que x dessas letras **permanecem juntas numa determinada ordem**, devemos considerar as x letras como uma única letra e, assim, permutar (n – x + 1) letras.

• Para calcular o número de anagramas de uma palavra de n letras, sendo que x dessas letras **permanecem juntas**, devemos considerar as x letras como uma única letra e, em seguida, considerar a permutação das x letras. Assim, o total será $(n - x + 1)! \cdot x!$.

Módulo 22 · Princípio do desprezo da ordem (I)

1) n elementos podem trocar de ordem de n! modos.

2) O princípio fundamental da contagem (PFC) prevê a troca de ordem de todos os elementos.

3) Para desprezar a troca de ordem de n elementos, considerada no PFC, devemos dividir por n! o número obtido com o PFC.

Exercícios característicos de contagem

4º tipo – Anagramas com repetição de letras

• Quando a palavra da qual desejamos contar os anagramas apresenta letras repetidas, consideramos inicialmente como se a ela não tivesse repetição; em seguida, desprezamos a troca de ordem das letras que se repetem, usando o PDO.

5º tipo – Ocupação de lugares definidos

• Para efetuar a contagem, podemos utilizar dois raciocínios: escolher elementos para os lugares ou escolher lugares para os elementos.

• Quando houver mais lugares do que elementos para ocupar os lugares, complementamos os elementos com **fantasmas** e, depois de utilizarmos o princípio fundamental da contagem, desfazemos as trocas de lugares dos **fantasmas**, usando o princípio do desprezo da ordem.

Módulo 23 · Princípio do desprezo da ordem (II)

– n elementos podem trocar de ordem de n! modos.

– O princípio fundamental da contagem (PFC) prevê a troca de ordem de todos os elementos.

– Para desprezar a troca de ordem de n elementos, considerada no PFC, devemos dividir por n! o número obtido com o PFC.

Exercícios característicos de contagem

6º tipo – Comissões sem cargos definidos

• Na contagem das comissões em que os integrantes não têm cargos definidos, inicialmente consideramos como se a ordem no agrupamento ficasse associada a algum cargo e, posteriormente, desprezamos a troca de ordem (PDO), pelo fato de os cargos não existirem.

7º tipo – Distribuição em grupos

• Para estudar o número de modos pelos quais n elementos podem ser distribuídos em grupos, imaginamos os n elementos em fila e os associamos à ordem na fila dos grupos que queremos formar. Não podemos nos esquecer de utilizar o princípio do desprezo da ordem em duas situações: nos grupos em que os elementos não ocupam cargos e nos grupos iguais que não se diferenciam por cargos.

8º tipo – Figuras geométricas

• Quando agrupamos pontos para formar figuras geométricas, devemos ficar atentos à necessidade ou não da utilização do princípio do desprezo da ordem.

Assim: $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ são semirretas diferentes.
$\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BA}$ são as mesmas retas.
ΔABC e ΔBCA são os mesmos triângulos.

Módulo 24 · Fórmulas de contagem

1. Arranjos

São agrupamentos que diferem pela natureza e pela ordem de seus elementos: $A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!}$

$A_{n,0} = 1$

2. Combinações

São agrupamentos que diferem apenas pela natureza de seus elementos: $C_{n,p} = \dfrac{A_{n,p}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$

$C_{n,0} = 1$

3. Permutações

São agrupamentos que diferem apenas pela ordem de seus elementos: $P_n = n!$

Módulo 25 · Números binomiais

1. Definição

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!} \quad (n \geq p)$$

Note que: $\binom{n}{p} = C_{n,p}$

2. Números binomiais complementares

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

3. Relação de Stifel

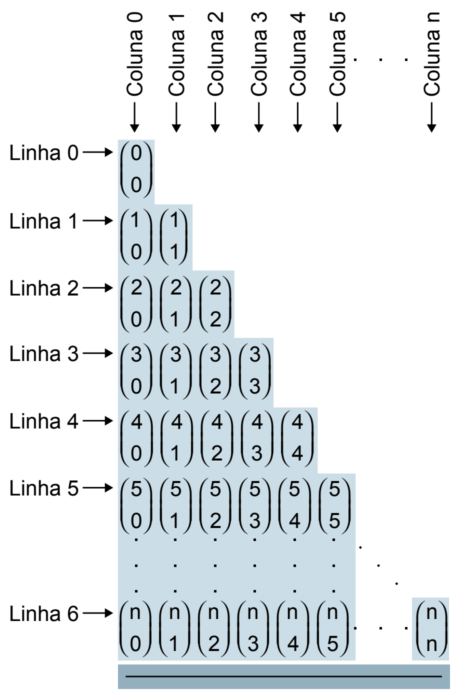
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

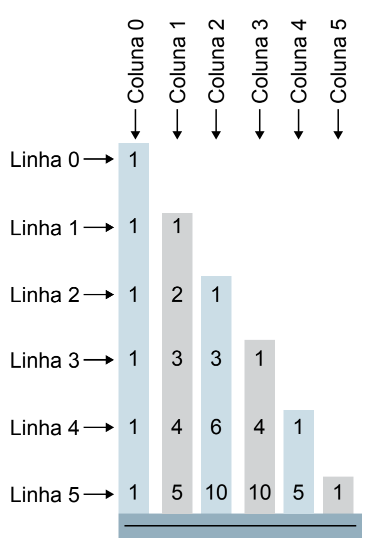
4. Igualdade

Se $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$, então:

$p = q$ ou $p + q = n$

5. Triângulo de Pascal

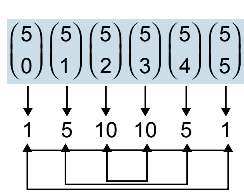




6. Propriedades

P$_1$) Em qualquer linha, dois binomiais equidistantes dos extremos são **complementares** e, portanto, **iguais**.

Consideremos, como exemplo, a linha 5.



P$_2$) A soma de dois binomiais consecutivos de uma mesma linha é igual ao binomial situado imediatamente abaixo do binomial da direita.

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} + & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} \\
 & & \| & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} + & \binom{4}{4} \\
 & & & & \| \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3\ + & 3 & 1 \\
 & & \| & \\
1 & 4 & 6 & 4\ + & 1 \\
 & & & & \| \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

P$_3$) A **soma** de todos os binomiais da linha n do triângulo de Pascal é 2n.

$\binom{0}{0}$	$\rightarrow 1=2^0$
$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$	$\rightarrow 1+1=2^1$
$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$	$\rightarrow 1+2+1=2^2$
$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$	$\rightarrow 1+3+3+1=2^3$
$\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4}$	$\rightarrow 1+4+6+4+1=2^4$
$\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5}$	$\rightarrow 1+5+10+10+5+1=2^5$

P$_4$) A soma dos elementos de uma coluna do triângulo de **Pascal** (começando no primeiro elemento da coluna) é igual ao elemento que está avançado uma linha e uma coluna sobre a última parcela.

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}$$

ou

$$\sum_{p=0}^{k}\binom{n+p}{n}=\binom{n+k+1}{n+1}$$

Módulo 26 · Binômio de Newton

1. Desenvolvimento do binômio

$$(x+a)^n = \underbrace{\binom{n}{0}x^n a^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}a}_{T_2} + \underbrace{\binom{n}{2}x^{n-2}a^2}_{T_3} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n}x^0 a^n}_{T_{n+1}}$$

$$(x+a)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}a^p x^{n-p}$$

2. Observações

No desenvolvimento do binômio $(x + a)^n$, segundo expoentes decrescentes de x, temos:

1ª) o desenvolvimento de um binômio de grau n tem n + 1 termos;

2ª) a soma dos expoentes de a e x, em qualquer termo, é o grau n do binômio;

3ª) o expoente de x, no primeiro termo, é n e vai decrescendo, de um em um, até atingir zero no último termo;

4ª) o expoente de a, no primeiro termo, é zero e vai crescendo, de um em um, até atingir n no último termo;

5ª) os coeficientes dos termos extremos são iguais a um $\left(\binom{n}{0} \text{e} \binom{n}{n}\right)$;

6ª) o coeficiente de qualquer termo é um número binomial de "numerador" n e "denominador" igual ao número de termos precedentes. Assim, o coeficiente do 6º termo é $\binom{n}{5}$;

7ª) os coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ são os elementos da linha n do triângulo de Pascal;

8ª) a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x + a)^n$ é 2^n.

3. Desenvolvimento de um binômio segundo Newton

$$(x+a)^n = \underbrace{\binom{n}{0}x^n a^0}_{T_1} + \underbrace{\binom{n}{1}x^{n-1}a^1}_{T_2} + \ldots + \underbrace{\binom{n}{n-1}x^1 a^{n-1}}_{T_n} + \underbrace{\binom{n}{n}x^0 a^n}_{T_{n+1}}$$

4. Termo geral (com expoentes decrescentes para x)

$$T_{k+1} = \binom{n}{k}x^{n-k}a^k$$

Módulo 27 · Probabilidades: conceito

1. Conceitos iniciais

- Experimento aleatório
- Espaço amostral
- Evento de experimento

2. Tipos de eventos

- Evento elementar
- Evento certo
- Evento impossível
- Evento complementar

3. Probabilidade teórica e probabilidade estatística

4. Probabilidade teórica de um evento A

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{número de casos possíveis}}$$

5. Propriedades das probabilidades

P1) Probabilidade de um evento impossível: $P(\varnothing) = 0$

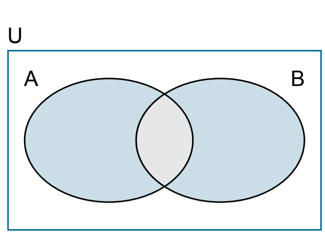
P2) Probabilidade de um evento certo: $P(U) = 1$

P3) Valores possíveis de probabilidade de um evento A: $0 \le P(A) \le 1$

P4) Probabilidade de não acontecer um evento A: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Módulo 28 · Probabilidades: adição

1. Probabilidade da união



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2. Eventos mutuamente exclusivos

Se $A \cap B = \varnothing$, dizemos que A e B são eventos mutuamente exclusivos, e então:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. Probabilidade num espaço amostral não equiprovável

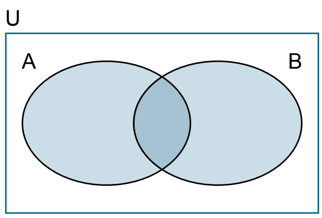
Sejam $U = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ e $P(a_1), P(a_2), \ldots, P(a_n)$ probabilidades de ocorrência dos resultados $a_1, a_2, \ldots, a_n$, respectivamente.

$P(a_1) + P(a_2) + \ldots + P(a_n) = 1$

Módulo 29 · Probabilidades: multiplicação

1. Probabilidade condicional

Notação: P(A/B) = probabilidade de ocorrer o evento A, dado que o evento B já ocorreu.



$$\boxed{P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}}$$

Consequência:

$$P(A/B) = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(\cup)}}{\dfrac{n(B)}{n(\cup)}} \Rightarrow \boxed{P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{P(B)}}$$

2. Probabilidade da intersecção

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

ou ainda

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$$

3. Eventos independentes

Dois eventos são independentes se, e somente se:

$P(A/B) = P(A)$ e $P(B/A) = P(B)$

Observação:

Se A independe de B, é imediato que B independe de A.

Assim: $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$