Vetores

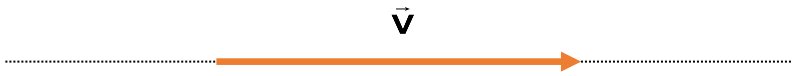
Grandezas Físicas – Classificação

- ***Grandezas físicas ESCALARES***: são aquelas que ficam perfeitamente definidas quando conhecemos apenas seu valor numérico e a correspondente unidade. Exemplos: *massa, tempo, energia, etc.*

- ***Grandezas físicas VETORIAIS***: são aquelas que <u>NÃO</u> ficam perfeitamente definidas apenas por seus valores e unidades, ou seja, por seus módulos, necessitando de um ente matemático, denominado VETOR para ser definida. Exemplos: *velocidade, força , campo elétrico , etc*.

Vetor

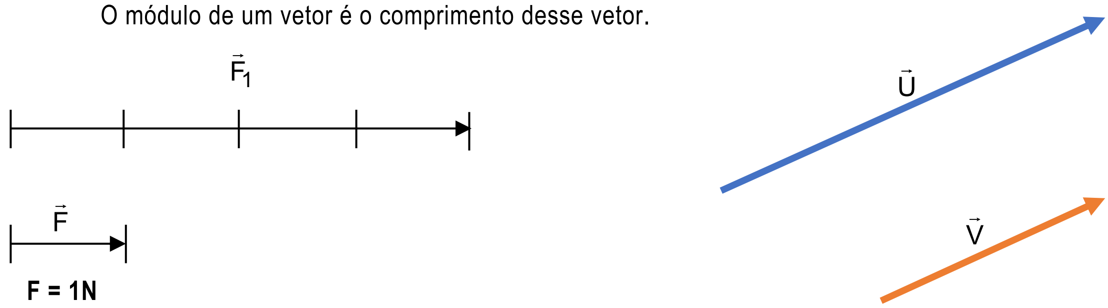
Vetor ($\vec{V}$) é um conjunto de três elementos (*MÓDULO, DIREÇÃO e SENTIDO*), representado por um segmento de reta orientado.



Elementos de um vetor

- **Módulo** (V ou | $\vec{V}$ |) : indica a intensidade da grandeza. (*NÚMERO* + *UNIDADE*).

  O módulo de um vetor é o comprimento desse vetor.

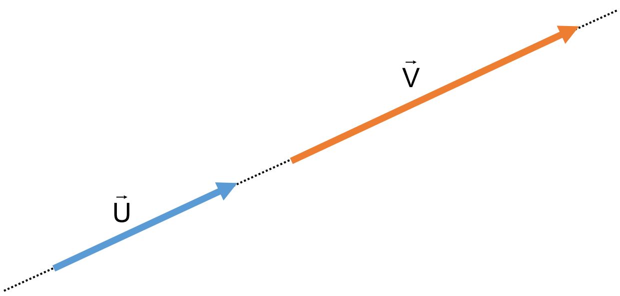


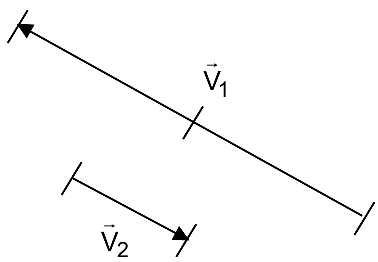
- **Direção** : é a reta suporte do vetor. (Ex.: horizontal , vertical , etc.).

  Para que dois ou mais vetores possuam *MESMA DIREÇÃO* é necessário e suficiente que sejam *PARALELOS* entre si.

- **Sentido** : é a orientação do vetor.(Ex.: p/esquerda, p/direita, etc.).

  O ***SINAL*** (+ ou -) em uma grandeza vetorial tem como <u>exclusiva</u> finalidade diferenciar as duas orientações possíveis de um vetor para determinada direção.





Observações

I. Multiplicação de um vetor por um número real: Dado um vetor $\vec{V}$ e um número real k ≠ 0, tem-se como o produto desses o seguinte vetor

$$\vec{U} = k\,.\,\vec{V}$$

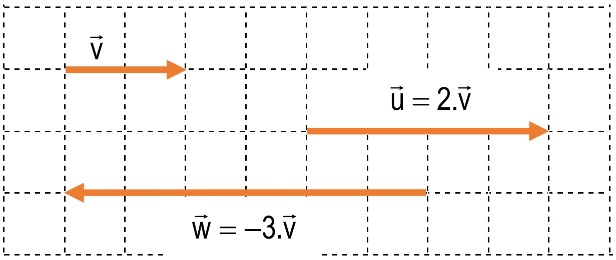
a) módulo: **U = | k | . V**

b) direção: a mesma de $\vec{V}$.

c) sentido: • se k > 0 : o sentido de $\vec{U}$ é o MESMO de $\vec{V}$.

• se k < 0 : o sentido de $\vec{U}$ é OPOSTO ao de $\vec{V}$.

EXEMPLO 1 :



EXEMPLO 2 :

$\vec{F}_R = m.\vec{a}$: Os vetores $\vec{F}_R$ e $\vec{a}$ sempre possuem mesma direção e também mesmo sentido, uma vez que m > 0.

II. Divisão de um vetor por um número real: Dado um vetor $\vec{V}$ e um número real k ≠ 0, tem-se como a razão desses o seguinte vetor

$$\vec{U} = \frac{\vec{V}}{k}$$

a) módulo: $\mathbf{U} = \dfrac{\mathbf{V}}{|\,\mathbf{k}\,|}$

b) direção: a mesma de $\vec{V}$.

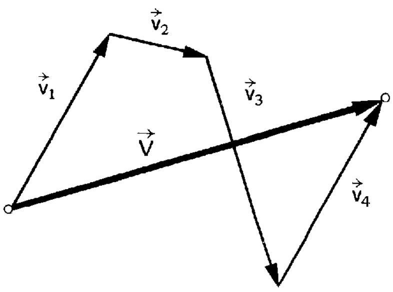
c) sentido: • se k > 0 : o sentido de $\vec{U}$ é o MESMO de $\vec{V}$.

• se k < 0 : o sentido de $\vec{U}$ é OPOSTO ao de $\vec{V}$.

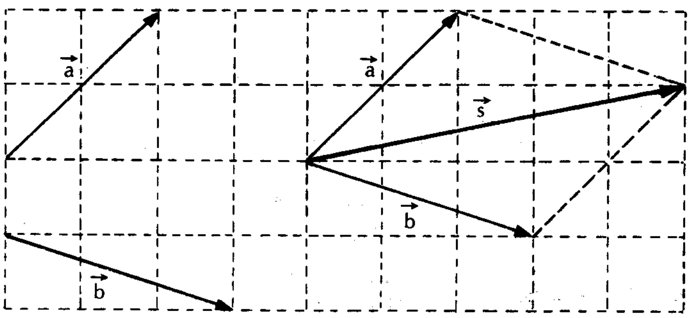
Vetor Resultante

O vetor resultante $\vec{V}_R$ é o vetor resultado de uma soma vetorial. É aquele vetor que em substituição a **n** vetores provoca o mesmo efeito desses.

$$\vec{V}_R = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \ldots + \vec{V}_n = \Sigma\,\vec{V}_n$$



(método do polígono)



(método do paralelogramo)

SITUAÇÕES PARTICULARES :

I. Vetores de mesma direção e sentido **(θ = 0°)**

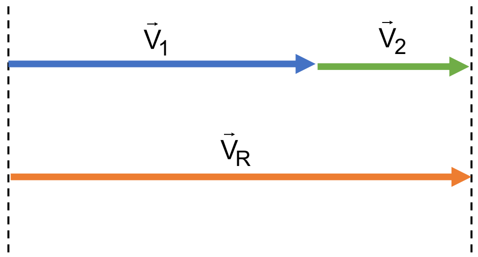
$$\boxed{\vec{V}_R = \vec{V}_1 + \vec{V}_2}$$

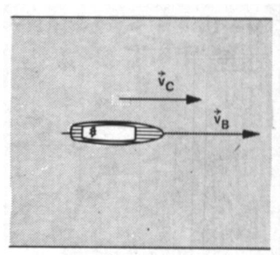
☞

MÓDULO: $V_R = V_1 + V_2$

DIREÇÃO: $\vec{V}_R$ possui mesma direção de $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$.

SENTIDO: $\vec{V}_R$ possui mesmo sentido de $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$.





II. Vetores de mesma direção e sentidos opostos **(θ = 180°)**

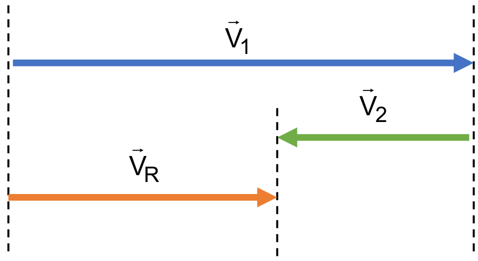
$$\boxed{\vec{V}_R = \vec{V}_1 + \vec{V}_2}$$

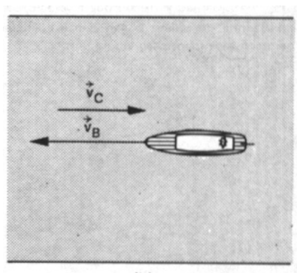
☞

MÓDULO: $V_R = V_1 - V_2$ $(V_1 > V_2)$

DIREÇÃO: $\vec{V}_R$ possui mesma direção de $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$.

SENTIDO: $\vec{V}_R$ tem o sentido do vetor de maior módulo.





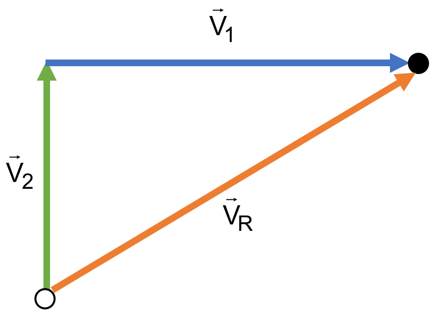
III. Vetores perpendiculares entre si **(θ = 90°)**

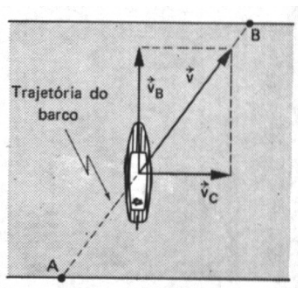
$$\boxed{\vec{V}_R = \vec{V}_1 + \vec{V}_2}$$

☞

MÓDULO: $V_R = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$

DIREÇÃO e SENTIDO: $\vec{V}_R$ tem sua direção e seu sentido dados pela diagonal do retângulo formado pelos vetores, partindo da origem desses.



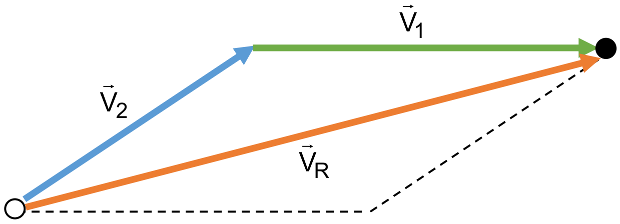


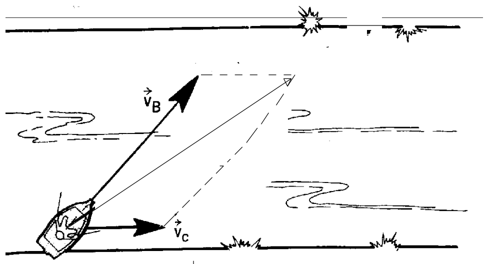
IV. Vetores oblíquos entre si (**θ ≠ 0° ≠ 90° ≠ 180°**)

$\vec{V}_R = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$ ☞

MÓDULO: $V_R = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + 2 . V_1 . V_2 . \cos\theta}$

DIREÇÃO e SENTIDO: $\vec{V}_R$ tem sua direção e seu sentido dados pela diagonal da figura formada pelos vetores, partindo da origem desses.



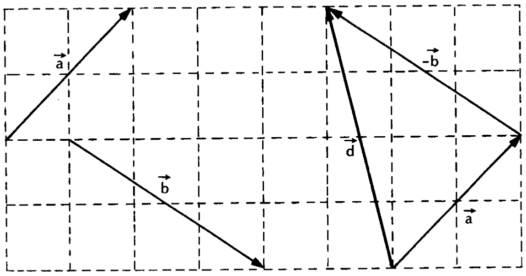


Subtração de vetores

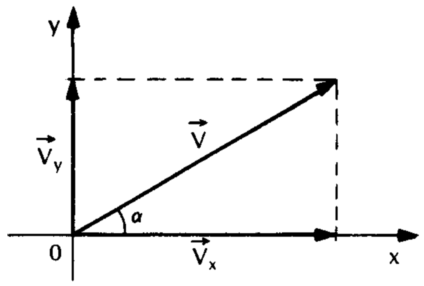
Dados os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o vetor diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ é obtido fazendo-se a adição de $\vec{a}$ com $-\vec{b}$.

$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ é o mesmo que $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$

($-\vec{b}$ = vetor oposto de $\vec{b}$)



Decomposição vetorial



$\vec{V}_X$ = projeção ortogonal de $\vec{V}$ sobre o eixo X

$$\cos\alpha = \frac{V_X}{V} \Rightarrow \mathbf{V_X = V . \cos\alpha}$$

$\vec{V}_Y$ = projeção ortogonal de $\vec{V}$ sobre o eixo Y

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{V_Y}{V} \Rightarrow \mathbf{V_Y = V . \text{sen}\,\alpha}$$

Testes

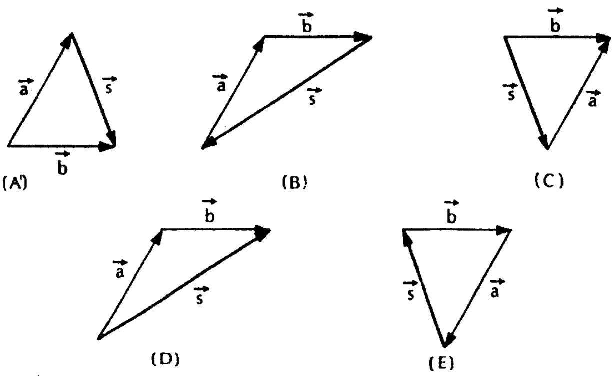
1) UFRGS. A velocidade de um barco navegando rio abaixo é 10 km/h para um observador situado na margem do rio. A velocidade do mesmo barco navegando rio acima é de 6 km/h. Supondo que a diferença de velocidades se deve exclusivamente a velocidade da correnteza do rio, qual é essa velocidade em km/h?

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 8

2) Qual dos valores abaixo não pode ser o módulo do vetor resultante de dois vetores de módulos 6 e 9 unidades:

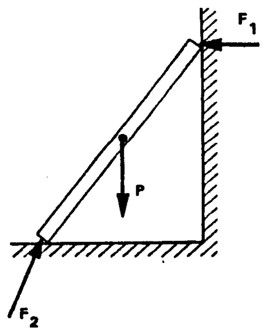
A) 3 unidades
B) 15 unidades
C) 4 unidades
D) $\sqrt{6^2 + 9^2}$ unidades
E) 18 unidades

3) Em qual das figuras o vetor soma $\vec{s}$ de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ está representado corretamente ?



---

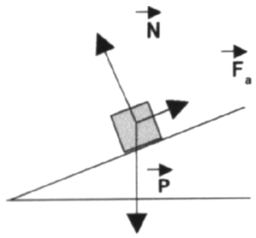
4) A figura a seguir representa uma escada apoiada em uma parede e no chão. O peso P da escada vale 12 kgf. A força que a parede sustenta a escada F_1 vale 9kgf.



Construa o polígono auxiliar lembrando que a resultante das três forças é nula e calcule a força F_2 em kgf com que o chão sustente a escada.

---

5) PUCRS. Um bloco de madeira encontra-se em repouso sobre uma rampa de concreto, conforme a figura abaixo. As únicas forças que agem sobre o bloco são o seu peso, o atrito entre o bloco e a rampa, e a reação normal da rampa.



Uma relação correta entre essas três forças é representada por

A) $|\vec{P}| = |\vec{N} + \vec{F}_a|$

B) $|\vec{P}| = |\vec{N}| - |\vec{F}_a|$

C) $|\vec{P}| = |\vec{N}| + |\vec{F}_a|$

D) $\vec{N} = \vec{P} + \vec{F}_a$

E) $\vec{F}_a = \vec{P} + \vec{N}$

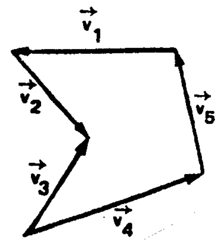
6) Duas forças de intensidades 10 kgf e 14 kgf dão como resultante máxima e resultante mínima os respectivos valores :

A) 24 kgf e 4 kgf
B) 24 kgf e nula
C) 140 kgf e 1,4 kgf
D) 10 kgf e 13 kgf
E) 12 kgf e 6 kgf

---

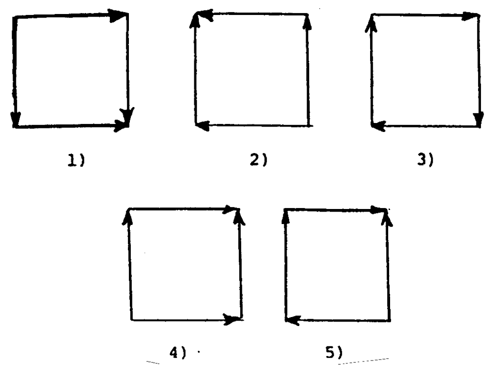
7) Quatro vetores atuam sobre um corpo dando como polígono vetorial a figura abaixo. Qual deles é o vetor resultante ?

A) $\vec{v}_1$
B) $\vec{v}_2$
C) $\vec{v}_3$
D) $\vec{v}_4$
E) $\vec{v}_5$



---

8) PUCRS. As figuras abaixo representam quadrados nos quais todos os lados são vetores de módulos iguais.

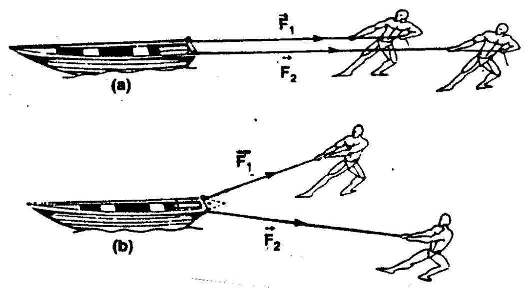


A resultante do sistema de vetores é nula na figura de número

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5

---

9) Os esquemas abaixo mostram um barco retirado de um rio por dois homens. Em (a) são usadas cordas que transmitem ao barco forças paralelas de intensidades F_1 e F_2. Em (b) são usadas cordas inclinadas de 90º que transmitem ao barco forças de intensidades iguais às anteriores.

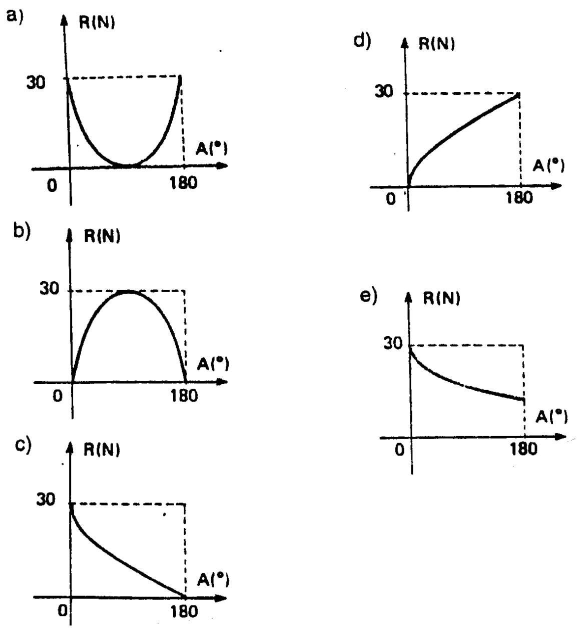


Sabe-se que no caso (a) a força resultante transmitida ao barco tem valor 700 kgf e no caso (b), 500kgf. Nestas condições podemos afirmar que os esforços desenvolvidos pelos dois homens têm valor :

A) 250 kgf e 250 kgf.
B) 200 kgf e 500 kgf.
C) 300 kgf e 400 kgf.
D) 350 kgf e 350 kgf.
E) 100 kgf e 600 kgf.

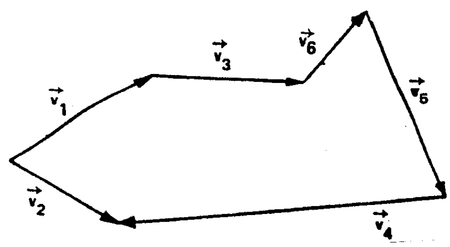
---

10) Duas forças ($\vec{P}$ e $\vec{Q}$) têm o mesmo ponto de aplicação. Suas intensidades são, respectivamente, P = 20N e Q = 10N. Qual dos seguintes gráficos melhor representa a intensidade R da resultante destas duas forças em função do ângulo θ entre elas, medido em graus ?

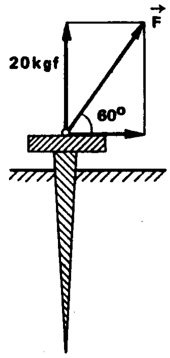


---

11) Analisando-se o polígono apresentado a seguir, determine qual dos vetores é o resultante e a expressão matemática que representa essa soma vetorial.



12) Sabe-se que uma força de 20 kgf aplicada na direção coincidente com a do prego consegue arrancá-lo da tábua.



Qual a força de módulo F que necessita aplicar a fim de que o prego possa ser arrancado ?

A) $40\sqrt{3}$ / 3 kgf.
B) 20 $\sqrt{3}$ kgf.
C) 40 kgf.
D) 20 kgf.
E) 10 kgf.

RESPOSTAS :	1) A	2) E	3) D	4) 15 kgf
	5) A	6) A	7) C	8) C
	9) C	10) E	11) $\vec{v}_2$	12) A

VETORES
Respostas comentadas

1) A

Fique atento ao enunciado. Não queremos a simples diferença de velocidade entre subida e descida (por isso a resposta não é 4 km/h), mas sim a velocidade da correnteza, responsável pela diferença.

Dessa forma temos:

barco desce o rio $v_B + v_C = 10 \rightarrow v_B = 10 - v_C$

barco sobe o rio $v_B - v_C = 6$

Estamos em busca da velocidade da correnteza v_C:

$$v_B - v_C = 6$$
$$10 - v_C - v_C = 6$$
$$2v_C = 4$$
$$v_C = 2 \text{ km/h}$$

2) E

Essa questão fica fácil, se abordada a partir do principio que o módulo da resultante de dois vetores não assume valores quaisquer, mas sim possuí um mínimo e um máximo valor. Porém, se o aluno tentar encontrar os valores das alternativas ficará em dúvida entre as alternativas D e E.

Máximo valor da resultante de dois vetores – MESMO SENTIDO:

$V_R = V_1 + V_2 = 9 + 6 = 15$ unidades

Mínimo valor da resultante de dois vetores – SENTIDOS OPOSTOS:

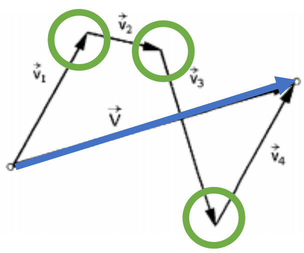
$V_R = V_1 - V_2 = 9 - 6 = 3$ unidades

Portanto: $\mathbf{3 \leq V_R \leq 15}$ (nas alternativas o valor que se encontra fora desse intervalo é 18 unidades)

---

3) D

A operação de soma vetorial para um número "n" qualquer de vetores pode ser efetuada a partir do método dos polígonos (página 2 desse material). Lembrando que consiste em redesenhar os vetores, mantendo seus módulos (tamanhos), direções e sentidos, de tal forma que a origem de um vetor coincida com a extremidade do anterior. O desenho pode ser feito colocando-se os vetores em qualquer ordem. O resultado será sempre o mesmo. Esse resultado é um vetor cuja origem está na origem do primeiro vetor desenhado e a extremidade na extremidade do último vetor desenhado. Veja o desenho a seguir:

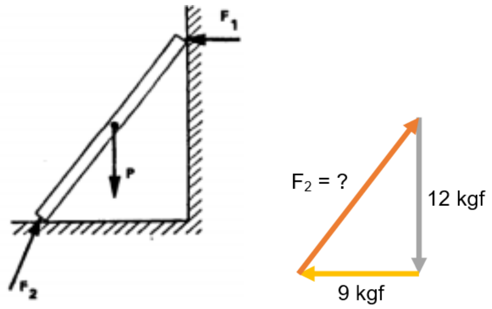


(método do polígono)

Na questão, essa configuração está apresentada na alternativa D.

4) 15 kgf

Na situação da questão, como a escada está em EQUILÍBRIO, a resultante das forças sobre a mesma é NULA. Quando isso ocorre, o método dos polígonos resulta numa figura em que a extremidade do último vetor, coincide com a origem do primeiro. Alunos, isso é muito importante: a figura fecha, pois de o resultado da soma é zero, nenhum vetor pode "entrar" entre a origem do primeiro e a extremidade do último. Vamos à soma vetorial:

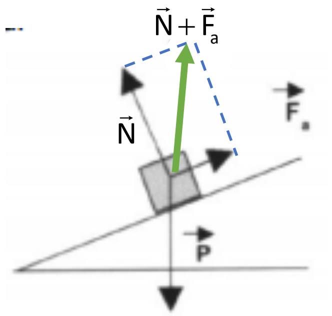


---

5) A

Mais uma vez a situação é de equilíbrio e a resultante dos 3 vetores (some vetorial) deve ser NULA.

Nesse caso, a PUCRS optou por comparar o resultado de dois vetores com o terceiro para demonstrar essa resultante nula.



Como a resultante dos três vetores é nula, o peso é anulado pela resultante da normal e da força de atrito, que possuí sentido oposto e mesmo módulo, necessariamente.

---

6) A

Idem a questão de número **2**.

Máximo valor da resultante de dois vetores – MESMO SENTIDO: $V_R = V_1 + V_2 = 14 + 10 = 24$ unidades

Mínimo valor da resultante de dois vetores – SENTIDOS OPOSTOS: $V_R = V_1 + V_2 = 14 - 10 = 4$ unidades

7) C

Com base na soma vetorial pelo método dos polígonos, explicada na questão 3, vamos buscar como resultado da soma o vetor cuja origem esteja na origem de um primeiro vetor desenhado e a extremidade na extremidade do último vetor desenhado. Esse vetor é o $\vec{v}_3$.

---

8) C

Lembre-se: no método dos polígonos para obtermos uma soma vetorial NULA a origem do primeiro vetor deve ser a extremidade do último.

9) C

Muito cuidado para não cair em um sistema nessa questão. Ela é bem mais simples.

Na figura (a) os vetores tem mesmo sentido, portanto $F_1 + F_2 = 700$ kgf.

Na figura (b) os vetores são perpendiculares (*leia o enunciado!!!!*), portanto $F_1^2 + F_2^2 = 500$ kgf

A solução matemática mais fácil é a substituição dos valores nas equações acima.

---

10) E

Idem a questão de número **2**.

Máximo valor da resultante de dois vetores – MESMO SENTIDO (0º): $V_R = P + Q = 20 + 10 = 30$ unidades

Mínimo valor da resultante de dois vetores – SENTIDOS OPOSTOS (180º): $V_R = P - Q = 20 - 10 = 10$ unidades

---

11) $\vec{v}_2$

Idem as questões 3 e 7. Com base na soma vetorial pelo método dos polígonos, explicada na questão 3, vamos buscar como resultado da soma o vetor cuja origem esteja na origem de um primeiro vetor desenhado e a extremidade na extremidade do último vetor desenhado. Esse vetor é o $\vec{v}_2$.

12) A

Para encontrarmos F a partir da componente vertical, vamos trabalhar com o triângulo retângulo formado por 20 e F, com ângulo entre eles de 30º.

Em relação a 30º: C.A. = HI . cos 30º

$$20 = F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$40 = F \cdot \sqrt{3}$$

$$F = \frac{40\sqrt{3}}{3} \text{ kgf}$$