MATEMÁTICA

FRENTE: MATEMÁTICA I

PROFESSOR(A): FABRÍCIO MAIA

EAD – ITA/IME

AULAS 19 E 20

ASSUNTO: EQUAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Resumo Teórico

Equações Trigonométricas

Em Álgebra, costumamos definir as equações como toda sentença matemática aberta expressa por uma igualdade. Assim, uma equação é dita trigonométrica quando em sua composição o valor desconhecido aparece relacionado com seno, cosseno, tangente, cotangente, secante ou cossecante. Resolvê-la, consiste em encontrar os valores que verificam a sentença.

Seno, Cosseno e Tangente (Arcos Notáveis)

α	senα	cosα	tgα
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$

Exercícios

01. Com relação à equação $\frac{tg^3x - 3\cdot tgx}{1-3\cdot tg^2x}+1=0$, podemos afirmar que

A) no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é igual a 0.

B) no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é maior que 0.

C) a equação admite apenas uma solução real.

D) existe uma única solução no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

E) existem duas soluções no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$.

02. O número de soluções da equação $(1 + \sec\theta)\cdot(1 + \text{cossec}\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

03. Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2\cdot\text{sen}x - \cos x = 1$ são

A) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e π
B) $\text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e π
C) $\text{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π
D) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π
E) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e π

04. Sejam α e β números reais tais que $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in\ ]0, 2\pi[$ satisfazem as equações $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{4}{5}\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{5}$ e $\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)=\frac{4}{7}\cos^4\left(\frac{\beta}{3}\right)+\frac{3}{7}$.

Então, o menor valor de $\cos(\alpha+\beta)$ é igual a

A) -1
B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$
E) 0

05. Se $\frac{\cos x}{\cos y}+\frac{\text{sen } x}{\text{sen } y}=-1$, calcule o valor S.

$$S=\frac{3\cos y+\cos 3y}{\cos x}+\frac{3\text{sen}y-\text{sen}3y}{\text{sen}x}$$

06. Seja a equação $\frac{\text{sen}(2x)}{tgx}=\frac{1}{2}$. As soluções dessa equação para $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ formam um polígono no círculo trigonométrico de área

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
B) $\sqrt{3}$
C) $\frac{5\sqrt{3}}{8}$
D) $\frac{1}{2}$
E) 1

07. Determine o conjunto solução da equação:

$$(\text{sen } x)\left(1+\text{tg } x \text{ tg}\frac{x}{2}\right)=4-\text{cotg } x$$

08. O número de soluções da equação $\cos(8x) = \text{sen}(2x) + \text{tg}^2(x) + \text{cotg}^2(x)$ no intervalo $[0, 2\pi)$ é:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 4
E) 8

09. Determine o conjunto das soluções reais da equação $3\text{cossec}^2\left(\frac{x}{2}\right)-\text{tg}^2x=1$.

10. Sejam **a** um número real e **n** o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8x - \text{sen}^8x + 4\text{sen}^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se a = 0, então n = 0;
II. Se $a = \frac{1}{2}$, então n = 8;
III. Se a = 1, então n = 7;
IV. Se a = 3, então n = 2.

é(são) verdadeira(s)

A) apenas I
B) apenas III
C) apenas I e III
D) apenas II e IV
E) todas

11. Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\text{sen}(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de tg(x) são, respectivamente

A) 1 e 0
B) 1 e $\frac{5}{2}$
C) –1 e 0
D) 1 e 5
E) –1 e $-\frac{5}{2}$

12. Resolva a equação $\cos^4 3x - \text{sen}^4 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Sabe-se que uma das raízes da equação $y^2 - 9y + 8 = 0$ pode ser representada pela expressão $e^{(\text{sen}^2x+\text{sen}^4x+\text{sen}^6x+\ldots)\ell n2}$. Sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, o valor da razão $\frac{\cos x}{\cos x+\text{sen } x}$ é

Observação: ℓn2 representa o logaritmo neperiano de 2.

A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
B) $\sqrt{3}-1$
C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
E) $\sqrt{3}+1$

14. Resolva a equação $\left(\log_{\cos x}\text{sen}^2x\right)\cdot\left(\log_{\cos^2 x}\text{sen}\,x\right)=4$.

15. Resolva a equação $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$.

GABARITO							
01	**02**	**03**	**04**	**05**	**06**	**07**	**08**
B	A	A	B	*	A	*	C
09	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	
*	E	B	*	A	*	*	

***05:** S = 4

***07:** $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\frac{\pi}{12}+k\pi \text{ ou } x=\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

***09:** $\cos x=-\frac{1}{2}\rightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

$\cos x=\frac{1}{3}\rightarrow x=\pm\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+2k\pi;\ k\in\mathbb{Z}$

***12:** $6x=\pm\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=\pm\frac{\pi}{36}+k\cdot\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}$

$S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\pm\frac{\pi}{36}+k\cdot\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

***14:** $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

***15:** $S=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x=\frac{(2k+1)\pi}{8},\ \mathbf{k}\text{ inteiro}\right\}$

Anotações

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: FABRÍCIO MAIA
DIG.: ESTEFANIA – REV.: TEREZA