Primeira Lista de Problemas

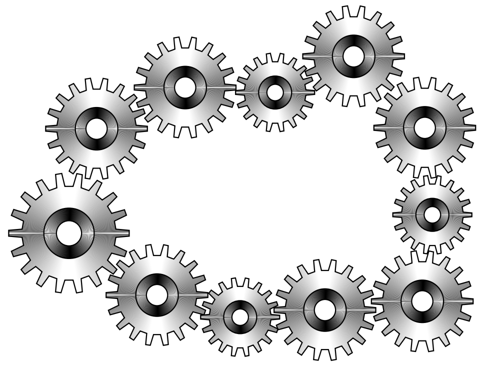
Nível 1

Atenção:

- *Todos os raciocínios devem ser justificados;*
- *Soluções parciais serão consideradas.*

Exercício Resolvido 1

Onze rodas dentadas são dispostas em um plano, conforme a figura a seguir.



É possível que todas as rodas girem simultaneamente?

Solução:

Numeramos as rodas de 1 *a* 11*, na seqüência. Suponha que a roda* 1 *gire no sentido horário. Então a roda* 2 *deve girar no sentido anti-horário, a* 3 *no sentido horário, e assim por diante. As rodas ímpares giram no sentido horário e as pares no anti-horário. Mas então as rodas* 1 *e* 11 *giram no mesmo sentido, o que é impossível. Logo as* 11 *rodas não podem girar simultaneamente.*

Tente agora resolver alguns problemas:

01. É possível cobrir um tabuleiro 7×7 usando dominós 1×2?

02. É possível uma pessoa pagar uma conta de 25 rublos (sem receber troco) usando exatamente 10 moedas de valores 1, 3 ou 5 rublos?

03. Um caminho fechado é composto por 11 segmentos de reta. Traça-se uma reta, a qual não contém nenhum vértice do caminho. É possível que esta reta intercepte cada um dos 11 segmentos?

04. Quarenta e cinco pontos são escolhidos sobre a reta AB, todos fora do segmento AB. Prove que a soma das distâncias destes pontos ao ponto A é diferente da soma das distâncias destes pontos ao ponto B.

05. Uma formiga caminha por um plano com velocidade constante, e faz curvas a ângulos retos, para qualquer lado, a cada quinze minutos. Mostre que a formiga pode retornar ao ponto de partida somente após um número inteiro de horas.

06. É possível arranjar os números de 1 a 9 em uma seqüência de forma que haja uma quantidade ímpar de números entre 1 e 2, entre 2 e 3, ..., e entre 8 e 9?

Exercício Resolvido 2

Em uma loja há 5 *tipos de xícaras,* 3 *tipos de pires e* 4 *tipos de bules. De quantas maneiras é possível comprar dois itens de nomes diferentes?*

Solução:

Temos três casos possíveis: comprar uma xícara e um pires, uma xícara e um bule ou um pires e um bule. No primeiro caso há $5 \cdot 3 = 15$ *maneiras de fazer a compra, no segundo* $5 \cdot 4 = 20$ *maneiras e no terceiro* $3 \cdot 4 = 12$ *maneiras. No total a compra pode ser feita de* $15 + 20 + 12 = 47$ *formas diferentes.*

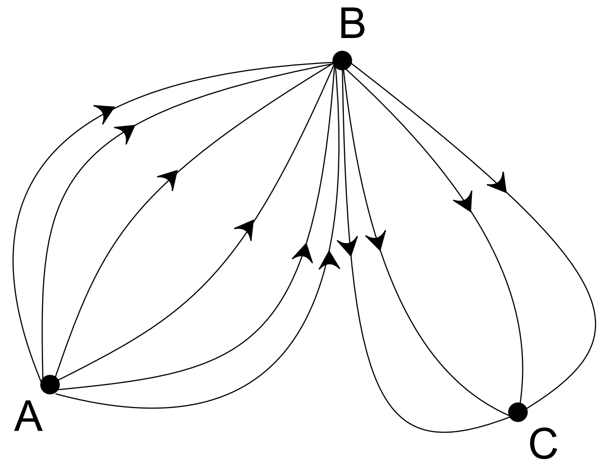
Exercício Resolvido 3

Qual é a soma dos ângulos internos de um n*-ágono?*

Solução:

Tomamos um vértice qualquer do polígono, e a partir dele traçamos todos os segmentos unindo este vértice aos demais, exceto ele mesmo e os dois vértices que lhe são adjacentes. Os $n-3$ *segmentos traçados dividem o* n*-ágono em* $n-2$ *triângulos. A soma dos ângulos internos do* n*-ágono é igual à soma dos ângulos internos dos* $n-2$ *triângulos, ou seja,* $(n-2) \cdot 180°$.

07. Na *Terra Brasilis* há três cidades A, B e C. Seis estradas vão de A para B e quatro de B para C. De quantas formas diferentes uma pessoa pode dirigir de A até C?



08. Quantos números de quatro dígitos existem formados apenas por algarismos ímpares? E somente por algarismos pares?

09. De quantas formas é possível colocar um rei branco e um rei preto em um tabuleiro de xadrez de forma que eles não se ataquem?

10. Quantas diagonais há em um n-ágono convexo?

11.

(a) Na *Terra Brasilis* as passagens de ônibus possuem um número arbitrário formado por seis dígitos. Uma passagem é considerada "sortuda" se a soma de seus três primeiros dígitos é igual à soma dos três últimos. Prove que a quantidade de passagens "sortudas" é igual à quantidade de passagens cuja soma dos dígitos é 27.

(b) O governo da *Terra Brasilis* resolveu mudar o sistema de numeração das passagens, que agora são numeradas consecutivamente. Quantas passagens você deve comprar em seqüência para ter certeza de que comprou uma "sortuda"? (A passagem 999999 é seguida pela 000000.)

Prazo de entrega: 24/03/2000