OBJETIVO

ITA

Matemática

6

MÓDULO 21

Equações

1. **(ITA)** – Suponhamos que “p” e “q” são catetos de um triângulo retângulo e “h”, a altura relativa à hipotenusa dele. Nestas condições, podemos afirmar que a equação:

$$\frac{2}{p}x^2 - \frac{2}{h}x + \frac{1}{q} = 0$$

($\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais)

a) não admite raízes reais.

b) admite uma raiz da forma $m\sqrt{-1}$, em que $m \in \mathbb{R}$ e $m > 0$.

c) admite sempre raízes reais.

d) admite uma raiz da forma $-m\sqrt{-1}$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

e) nada se pode afirmar.

2. **(ITA)** – O conjunto de todos os valores de α, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em x) $x^4 - \sqrt[4]{48}\,x^2 + \text{tg}\,\alpha = 0$ são todas reais, é

a) $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$

b) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$

c) $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$

d) $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

e) $\left[\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$

2. Determine a soma e o produto das raízes inteiras da equação $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 6) = 210x^2$

4. Dois operários, A e B, trabalham um mesmo número de dias. Se A trabalhasse dois dias a mais e B trabalhasse três dias a menos, A teria ganho R$ 108,00 e B teria ganho R$ 72,00. Por outro lado, se A trabalhasse três dias a menos e B dois dias a mais, juntos teriam ganho R$ 210,00. Quanto ganhou cada um e quantos dias trabalharam?

MÓDULO 22

Equações

1. A soma e o produto das raízes reais da equação

$$\sqrt{x^2 - 3} + \frac{6}{x^2 - 10} = 0$$ são, respectivamente:

a) 2 e 10 b) 1 e 14 c) 0 e 28
d) – 3 e 30 e) – 4 e 36

2. **(ITA)**

a) Mostre que o número real

$\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ é raiz da equação

$x^3 + 3x - 4 = 0$

b) Conclua de (a) que α é um número racional.

3. Dois recipientes iguais de 30 litros de capacidade cada um contêm um total de 30 litros de álcool. O primeiro recipiente é completado até a borda com água e com a mistura obtida se completa o segundo recipiente. 12 litros desta mistura são então devolvidos ao primeiro recipiente. O segundo recipiente fica com 2 litros de álcool a menos que o primeiro. Quantos litros de álcool tinha inicialmente cada recipiente?

4. Em certo instante um relógio marca 2 minutos a menos do que deveria marcar, no entanto anda adiantado. Se adiantasse meio minuto a mais por dia do que adianta, e estivesse marcando 3 minutos a menos do que seria correto, marcaria a hora certa um dia antes do que marca. Quantos minutos por dia adianta esse relógio?

MÓDULO 23

Equações

1. Resolver, em R, a equação
$(x - 1)^3 + (x + 3)^3 = 42\ (x + 1)$.

2. Determine o conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da equação $(x + 2).(x + 3).(x + 8).(x + 12) = 4x^2$.

3. Encontre uma equação do segundo grau com coeficientes racionais que possui uma raiz igual a $\sqrt{15} - 7$.

MÓDULO 24

Equações

1. Um trem parte da estação **A** em direção a estação **B** às 13h, com velocidade constante. As 19h chegou a um ponto da estrada onde havia caído uma barreira e foi obrigado a ficar parado por **duas** horas. Para recuperar o tempo perdido, o maquinista percorre o trecho restante a uma velocidade 20% maior, mas, apesar disso, chegou **uma hora** atrasado. No dia seguinte outro trem que se dirigia de **A** para **B**, com a mesma velocidade inicial do primeiro, teve que parar 150 km além do que o ponto onde o primeiro parou. Também ficou parado por duas horas e também aumentou a velocidade em 20%, mas mesmo assim chegou **uma hora e meia** atrasado. Determine a distância entre **A** e **B**.

2. De um porto fluvial partem ao mesmo tempo e rio abaixo uma balsa e um bote. O bote navega com auxílio de remadores e com velocidade constante em relação às águas do rio. A balsa esta a deriva e segue na velocidade da correnteza, que também é constante. O bote, depois de percorrer 96 km rio abaixo, volta e chega no porto 14 horas depois da partida. Em seu caminho de volta o bote encontra a balsa a 24 km do porto. Qual a velocidade do bote e da correnteza?

3. Dois ciclistas pedalam em uma mesma direção por uma pista circular de 280 m de raio. Um deles faz uma volta completa 8s mais rápido que o segundo. Qual a velocidade, em metros por segundo, de cada um, se o tempo entre dois encontros consecutivos deles é de 70 segundos?

exercícios-tarefa

■ MÓDULO 21

1. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação
$(2x^2 - 3x + 1).(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

2. Um carteiro que se dirige sem parar do ponto **A** ao ponto **C** passando pelo ponto **B**, caminha de **A** à **B** com velocidade de 3,5 km/h e de **B** para **C** com velocidade de 4 km/h. Para conseguir retornar de **C** para **A** no mesmo tempo, pelo mesmo caminho, deve desenvolver 3,75 km/h em todo o trajeto. Se, no entanto, ao retornar com a velocidade indicada ao ponto **B**, se detêm nesse ponto por 14 minutos, para regressar ao ponto **A** no tempo previsto deverá percorrer o trecho de **B** à **A** com velocidade de 4 km/h. Calcule as distâncias entre os pontos **A**, **B** e **C**.

■ MÓDULO 22

1. **(ITA-adaptado)** – A respeito da equação
$3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$, podemos dizer que

a) $\dfrac{2 \pm \sqrt{70}}{3}$ são raízes.

b) a única raiz é x = 3.

c) a única raiz é $x = 2 + \sqrt{10}$.

d) tem duas raízes reais distintas.

e) tem raízes reais iguais.

2. Duas torneiras são utilizadas para encher uma piscina. Estando totalmente vazia, abre-se a primeira torneira por um terço do tempo que a segunda torneira seria capaz de encher a piscina sozinha. Fecha-se a primeira torneira e abre-se a segunda torneira por um terço do tempo necessário para a primeira torneira encher a piscina sozinha. Dessa forma, foram preenchidos $\dfrac{13}{18}$ da piscina. Calcular o tempo necessário para cada torneira encher a piscina sozinha, sabendo-se que, juntas, enchem-na em 3 horas e 36 minutos.

■ MÓDULO 23

1. **(ITA)** – Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor “flex” (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor “flex” sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

a) 246. b) 252. c) 260. d) 268. e) 284.

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação
$(x + 1)^3 + (x - 3)^3 = 32(x - 1)$

3. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $(6 - x)^4 + (8 - x)^4 = 16$.

■ MÓDULO 24

1. Segundo o previsto um trem deve passar o trecho AB de 20 km a uma velocidade constante. A primeira vez que faz este trajeto, o trem percorre a metade do trecho nessa velocidade, para por 3 minutos e, para chegar no horário previsto, percorre a outra metade a uma velocidade 10 km/h superior. Na segunda vez, o trem para na metade do caminho por 5 minutos. A que velocidade deve percorrer a segunda metade para chegar no horário previsto?

2. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $x.(x + 1).(x - 1).(x + 2) = 24$.

resolução dos exercícios-tarefa

■ MÓDULO 21

1) Dividindo cada fator por x e fazendo $2x + \dfrac{1}{x} = y$ temos:

$$(2x^2 - 3x + 1).(2x^2 + 5x - 1) = 9x^2$$

$$\left(2x + 3 + \frac{1}{x}\right).\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (y - 3).(y + 5) = 9 \Leftrightarrow y = -6 \text{ ou } y = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{1}{x} = -6 \text{ ou } 2x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 6x + 1 = 0 \text{ ou } 2x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 - \sqrt{7}}{2},\ x = \frac{-3 + \sqrt{7}}{2},$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

Resposta:

$$\left\{\frac{-3 - \sqrt{7}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{7}}{2}, \frac{2 - \sqrt{2}}{2}, \frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right\}$$

2) Se x e y são as distâncias entre A e B e entre B e C, respectivamente. Os tempos gastos de ida, em horas, foram $\dfrac{x}{3{,}5}$ e $\dfrac{y}{4}$, respectivamente e o tempo previsto de retorno, também em horas, é de $\dfrac{x+y}{3{,}75}$. Desta forma, como os tempos são iguais, $\dfrac{x+y}{3{,}75} = \dfrac{x}{3{,}5} + \dfrac{y}{4}$

O tempo real gasto na volta, também em horas foi $\dfrac{x+y}{3{,}75} = \dfrac{y}{3{,}75} + \dfrac{14}{60} + \dfrac{x}{4}$.

Assim,

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{3{,}75} = \dfrac{x}{3{,}5} + \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{x+y}{3{,}75} = \dfrac{y}{3{,}75} + \dfrac{14}{60} + \dfrac{x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x+4y}{15} = \dfrac{2x}{7} + \dfrac{y}{4} \\ \dfrac{4x+4y}{15} = \dfrac{4y}{15} + \dfrac{14}{60} + \dfrac{x}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 112x + 112y = 120x + 105y \\ 16x + 16y = 16y + 14 + 15x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x = 7y \\ x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow x = 14 \text{ e } y = 16$$

Resposta: De A para B temos 14 km e de B para C temos 16 km.

■ MÓDULO 22

1) Fazendo $3x^2 - 4x = y$, tem-se

(I) $y + \sqrt{y-6} = 18 \Leftrightarrow \sqrt{y-6} = 18 - y \Rightarrow$

$\Rightarrow y - 6 = 324 - 36y + y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 - 37y + 330 = 0 \Leftrightarrow y = 15$ ou $y = 22$

Somente $y = 15$ satisfaz a equação (I).

Assim, $3x^2 - 4x = 15 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 15 = 0$, cujas raízes são reais distintas, pois

$\Delta = (-4)^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, (-15) = 196 > 0$ e

$x = \dfrac{4 \pm 14}{6} \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -\dfrac{5}{3}$

Resposta: D

2) Seja v o volume da piscina, p o tempo necessário para a 1ª encher sozinha a piscina e s o tempo necessário para a 2ª encher sozinha a piscina.

1) A primeira enche $\dfrac{v}{p}$ por hora, a segunda enche $\dfrac{v}{s}$ por hora e lembrando que

$3h$ e 36 min $= \left(3 + \dfrac{3}{5}\right)$ hora $= \dfrac{18}{5}$ hora, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{s}{3} \cdot \dfrac{v}{p} + \dfrac{p}{3} \cdot \dfrac{v}{s} = \dfrac{13}{18} \,.\, v \\ \dfrac{v}{p} + \dfrac{v}{s} = \dfrac{v}{\frac{18}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{s}{p} + \dfrac{p}{s} = \dfrac{13}{6} \\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{s} = \dfrac{5}{18} \end{cases}$$

2) Fazendo $\dfrac{s}{p} = x$, temos

$x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{13}{6} \Leftrightarrow 6x^2 - 13x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$ ou $x = \dfrac{3}{2}$

3) Para $x = \dfrac{2}{3}$, tem-se $\dfrac{s}{p} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow s = \dfrac{2p}{3}$

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\frac{2p}{3}} = \dfrac{5}{18} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2p} = \dfrac{5}{18} \Leftrightarrow p = 9$ e $s = 6$

4) Para $x = \dfrac{3}{2}$, tem-se $\dfrac{s}{p} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow s = \dfrac{3p}{2}$

$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{\frac{3p}{2}} = \dfrac{5}{18} \Leftrightarrow \dfrac{5}{3p} = \dfrac{5}{18} \Leftrightarrow p = 6$ e $s = 9$

Resposta: Sozinhas, as torneiras levam 6 horas e 9 horas para encher a piscina.

■ MÓDULO 23

1) Se, entre os 1000 carros da empresa, x têm motor a gasolina e $1000 - x$ possuem motor "flex", temos:

$(100 - 36)\% \,.\, (1000 - x) + 36\%\, x = 556 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 640 - 0{,}64x + 0{,}36x = 556 \Leftrightarrow 0{,}28x = 84 \Leftrightarrow x = 300$

Portanto, o número de carros tricombustíveis é

$36\% \,.\, (1000 - 300) = \dfrac{36}{100} \,.\, 700 = 252$

Resposta: B

2) Como $(x+1)^3 + (x-3)^3 =$

$= [(x+1) + (x-3)].[(x+1)^2 - (x+1)(x-3) + (x-3)^2] =$

$= (2x-2)(x^2 + 2x + 1 - x^2 + 3x - x + 3 + x^2 - 6x + 9) =$

$= 2(x - 1)(x^2 - 2x + 13)$, temos que:

$(x + 1)^3 + (x - 3)^3 = 32(x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x - 1)(x^2 - 2x + 13) = 32(x - 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x^2 - 2x + 13 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1, x = -1$ ou $x = 3$

Outra solução

Fazendo $x - 1 = y \Leftrightarrow x = y + 1$

da equação, resulta $(y + 2)^3 + (y - 2)^3 = 32y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^3 + 6y^2 + 12y + 8 + y^3 - 6y^2 + 12y - 8 - 32y = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2y^3 - 8y = 0 \Leftrightarrow 2y(y + 2)(y - 2) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = 2 \Rightarrow x = 3 \\ y = -2 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

Resposta: $V = \{-1; 1; 3\}$

3) Fazendo $y = \dfrac{(6 - x) + (8 - x)}{2} = 7 - x$ temos:

$(6 - x)^4 + (8 - x)^4 = 16 \Leftrightarrow (y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y^2 - 2y + 1)^2 + (y^2 + 2y + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^4 + 4y^2 + 1 - 4y^3 + 2y^2 - 4y + y^4 + 4y^2 +$

$+ 1 - 4y^3 + 2y^2 - 4y = 16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^4 + 6y^2 - 7 = 0 \Leftrightarrow y^2 = -7$ ou $y^2 = 1$

Como $x \in \mathbb{R}$, temos $(7 - x)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 14x + 48 = 0 \Leftrightarrow x = 6$ ou $x = 8$.

Respostas: $\{6; 8\}$

■ MÓDULO 24

1) Seja v_1 a velocidade que o trem deveria desenvolver em todo o percurso e v a velocidade desenvolvida na segunda metade do percurso, na segunda passagem. O tempo previsto para essa segunda metade, em horas, é $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{20}{v_1} = \dfrac{10}{v_1}$.

Desta forma,

$$\begin{cases} \left(\dfrac{10}{v_1} - \dfrac{3}{60}\right) \cdot (v_1 + 10) = 10 \\ \left(\dfrac{10}{v_1} - \dfrac{5}{60}\right) \cdot v = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (600 - 3v_1) \cdot (v_1 + 10) = 600v_1 \\ (600 - 5v_1) \cdot v = 600v_1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_1^2 + 10v_1 - 2000 = 0 \\ (120 - v_1) \cdot v = 120 \cdot v_1 \end{cases} \Leftrightarrow v_1 = 40 \text{ e } v = 60$$

Resposta: 60 km/h

2) $x \cdot (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2 + x) \cdot (x^2 + x + 2) = 24$

Fazendo $y = x^2 + x$ temos:

$(x^2 + x) \cdot (x^2 + x - 2) = 24 \Leftrightarrow y \cdot (y - 2) = 24 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 24 = 0 \Leftrightarrow y = -4$ ou $y = 6$.

Assim, $x^2 + x = -4$ ou $x^2 + x = 6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + x + 4$ ou $x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ ou $x = 2$, pois x é real.

Respostas: $\{-3; 2\}$