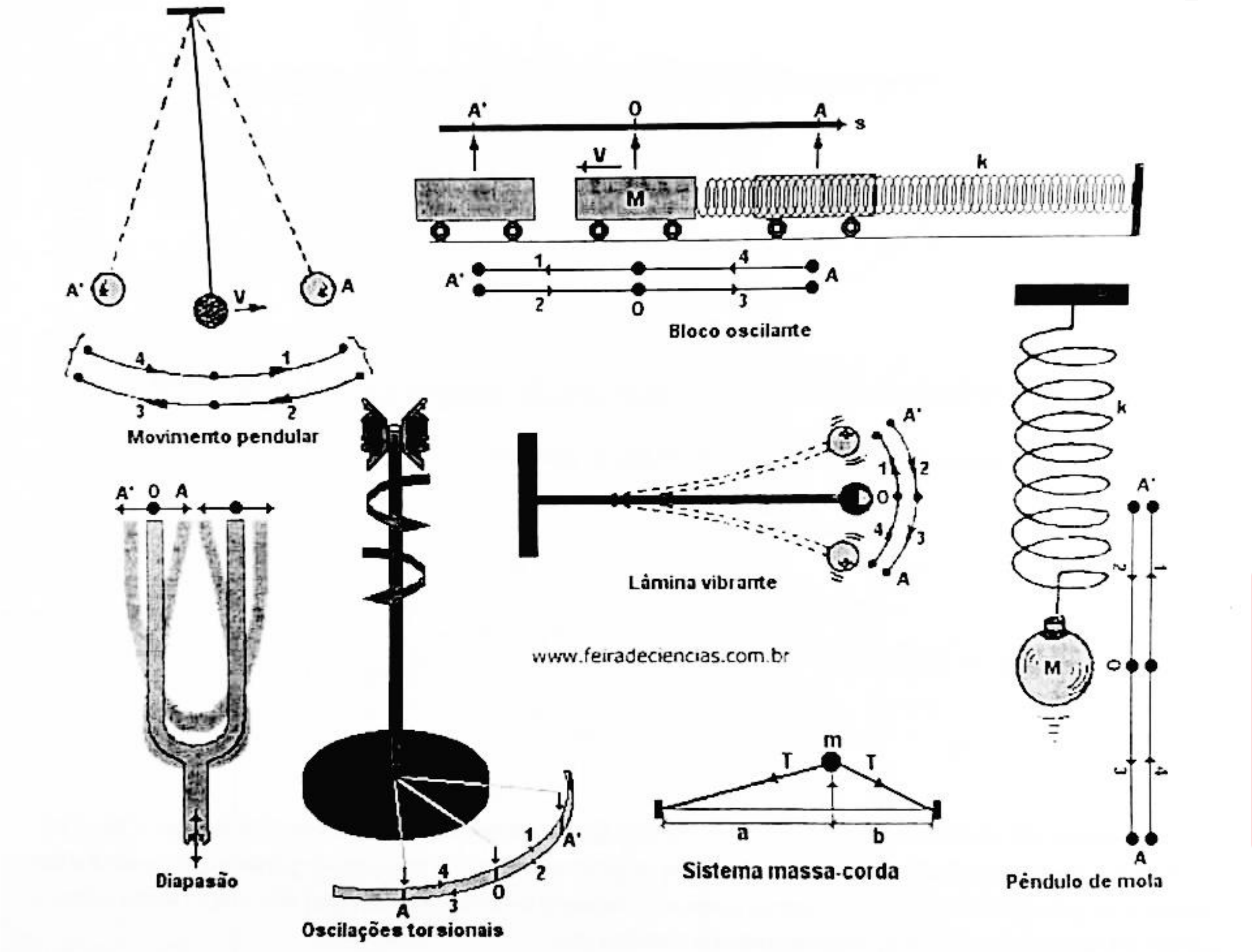
FÍSICA

APOSTILA DE APROFUNDAMENTO

MHS

Volume 1

Seja uma partícula P em movimento oscilatório em torno de um equilíbrio estável O, sejam A e A’ as elongações máximas de inversão desse movimento relativas a um eixo de referência x. Se o movimento pode ser descrito por funções do tipo seno ou cosseno ele é dito harmônico e sendo a resultante das interações que atuam sobre P, em cada ponto, de valor algébrico igual a F = - kx (x é a abscissa do ponto P) podemos afirmar que estamos diante de um movimento harmônico simples.



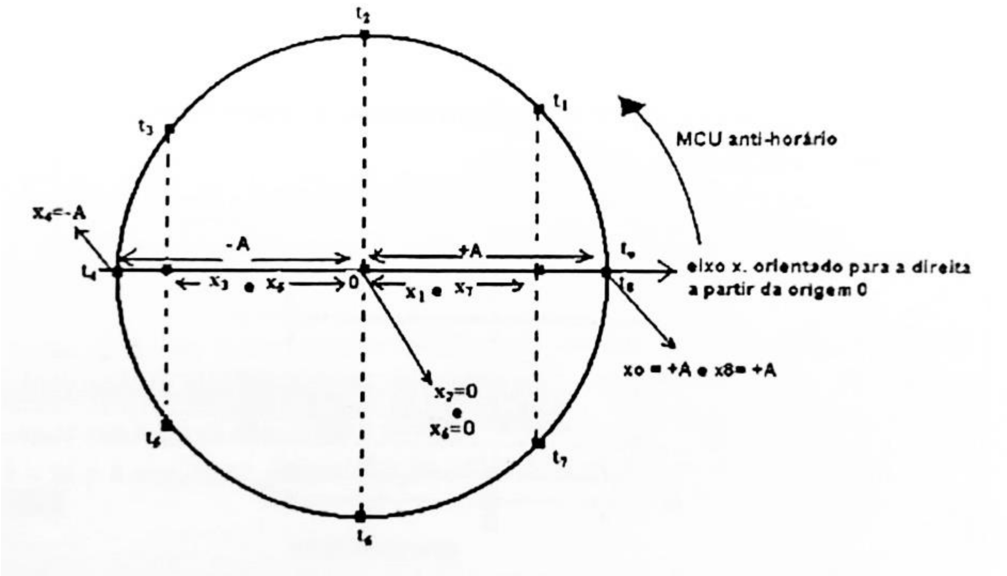
Note que em cada um dos casos propostos acima temos uma força resultante do tipo restauradora, sempre se orientando no sentido da posição de equilíbrio estável na qual o corpo foi inicialmente “molestado” e tendo seu módulo diretamente proporcional à elongação x realizada.

A análise do MHS se dá em sistemas conservativos e muitas vezes você verá que faremos alguns ajustes para que um dado sistema possa se adaptar aos moldes desse movimento, por exemplo, quando usamos os “famosos” ângulos muito pequenos em que temos $sen\theta \approx tg\theta \approx \theta$ para adaptar o modelo do MHS ao movimento de vibração periódica de um pêndulo simples.

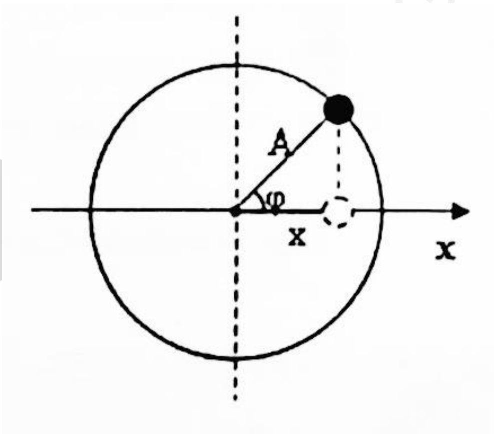
A CINEMÁTICA DO MHS

É possível reproduzir as situações do MHS analisando a projeção de um movimento circular e uniforme fictício, sobre um de deus diâmetros a cada instante. Veja que a existência do MHS não implica necessariamente a existência do MCU, esse funciona como um elemento analisador fictício de grande valia no entendimento correto das variações propostas no movimento real.

Veja na figura que o movimento circular de uma partícula quando analisado através de sua projeção no eixo x, oscila entre A e –A, com período e frequência idênticos ao MHS da projeção. Enquanto temos a partícula em MCY deslocando-se em sua trajetória, temos também um MHS agregado oscilando entre A e –A.



Vamos agora deduzir as funções horárias (do tempo) da posição, da velocidade e da aceleração no MHS, a partir da proposta acima.
A figura mostra uma partícula em MCU no sentido horário de percurso:
Note que:
$cos\varphi = \frac{x}{A} \rightarrow x = A.cos\varphi$



Porém sabemos que no MCU a função do ângulo de fase φ com o tempo pode ser expressa por: $\varphi = \varphi_0 + \omega t$, onde φ_0 é o ângulo de fase inicial e ω é a velocidade angular constante do movimento gerador que passará a ser chamada de pulsação do MHS, funcionando como uma espécie de frequência angular em rad/s. Sendo assim a posição (x) do movimento a cada instante pode ser definida por:

$$x = A.\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Na expressão da equação horária da posição no MHS, x representa a elongação a cada instante do movimento, A representa a elongação máxima (amplitude), ω a pulsação ou frequência angular e φ_0 é a fase inicial do movimento.

Obs$_1$.:
Lembre-se de seus conhecimentos de mecânica:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Onde T é o período do movimento (tempo para uma oscilação completa) e f é a frequência de oscilação

$$\left(f = \frac{n° \; de \; vibrações}{segundo} (Hz)\right).$$

Portanto podemos escrever a função horária do MHS, também as seguintes formas:

$$x = A.\cos[(2\pi/T).t + \varphi_0)] \; ou \; x = A.\cos(2\pi f.t + \varphi_0)$$

Obs.:₂ Principais valores de φ_0 e seus significados:

- Se $\varphi_0 = 0$ (ou 2π), temos a posição inicial do movimento em x = A. Veja que:

$$x = A.\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Nesse caso teremos para t = 0, x = A cos°, portanto x = A.

- Seja $\varphi_0 = \pi$, temos a posição inicial do movimento em x = - A. Veja que para t = 0,

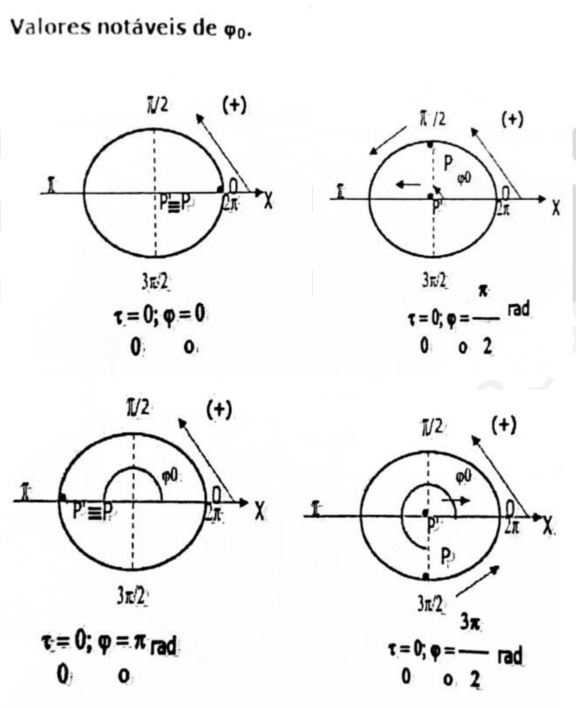
$$x = A\cos\frac{\pi}{2}, portanto\ x = 0$$

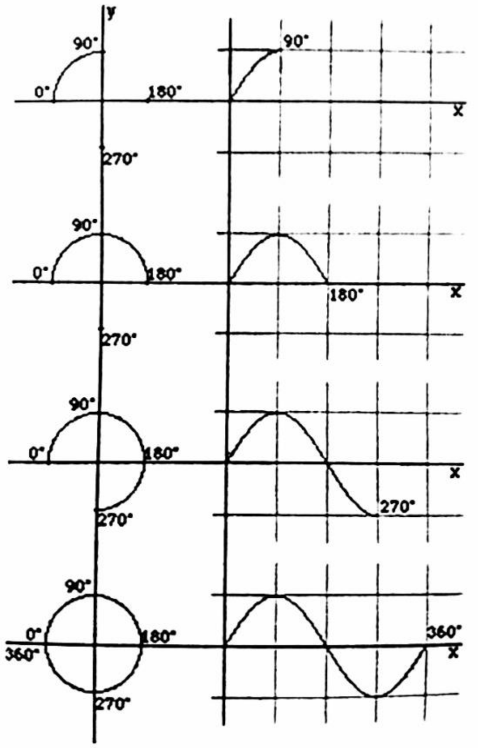
- Seja $\varphi_0 = \pi$, temos a posição inicial do movimento em x = - A. Veja que para t = 0,

$$x = A\cos\pi, portanto\ x = \ -A.$$

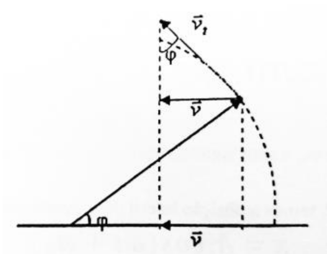
- Seja $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ temos a posição inicial do movimento em x = 0. Veja que para t = 0,

$$x = A\cos\frac{3\pi}{2}, portanto\ x = 0$$





A função horária da velocidade no MHS pode ser obtida através da projeção da velocidade instantânea (tangente à trajetória a cada ponto) do ponto P que realiza MCU, na direção do eixo x em cada instante.



Veja que a velocidade v (projeção no eixo) a cada instante no MHS é igual a $v = -v_T sen\,\varphi$, porém $v_T = \omega.A$ e $\varphi = \varphi_0 + \omega t$. Portanto temos:

$$V = -\omega A sen(\omega t + \varphi_0)$$

Veja que essa dedução poderia ser substituída por um simples cálculo matemático um pouco mais avançado, pois temos que:

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A.\cos(\omega t + \varphi_0)) = -\omega A sen\,(\omega t + \varphi_0)$$

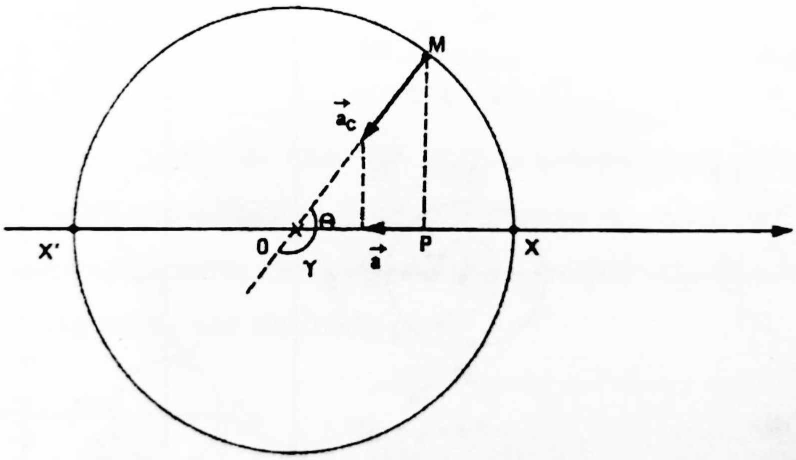
Obs:₃ Note que nos pontos de inversão (x = A ou x = - A), temos $sen(\omega t + \varphi_0) = 0$, portanto a velocidade é nula nesses pontos.

Obs:₄ Nas passagens por x = 0 $\left(\varphi = \frac{\pi}{2} ou\ \varphi = \frac{3\pi}{2}\right)$, a velocidade é máxima em módulo e vale ωA.

No caso da aceleração instantânea do MHS, podemos proceder da mesma forma, ou seja, projetando a aceleração do MCU na direção do eixo x a cada instante. Lembre-se que nos movimentos circulares e uniformes a aceleração só tem responsabilidade pela variação na direção da velocidade em cada instante, portanto é do tipo centrípeta e calculável pela expressão:

$$a_c = \frac{v^2}{A} = \omega^2 A.$$

Portanto temos:



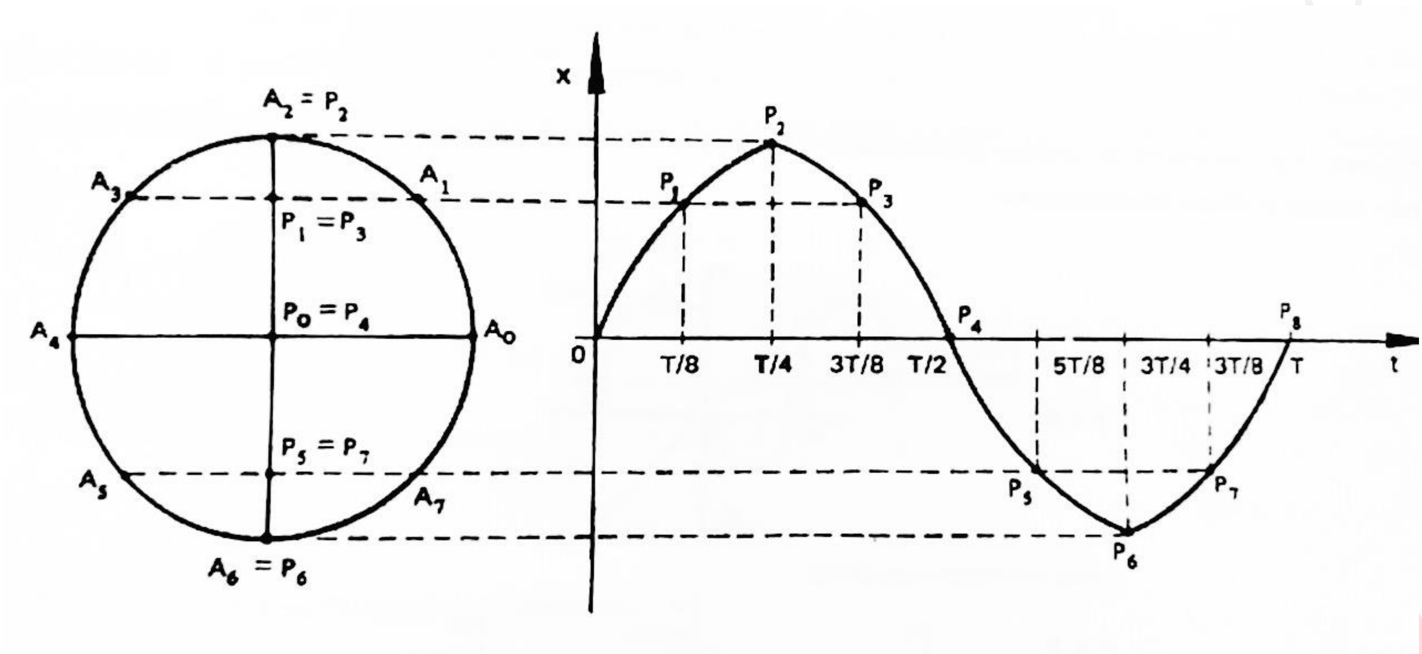
Veja que $a = -a_c cos\varphi$, portanto temos: $a = -\omega^2 Acos(\omega t + \varphi_0) ou\ a = \ -\omega^2 x$.
Note que essa dedução também poderia ser substituída por um simples cálculo matemático um pouco mais avançado, pois temos que:

$$a = \frac{d^2x}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\omega A sen(\omega t + \varphi_0)\right) = -\omega^2 Acos(\omega t + \varphi_0)$$

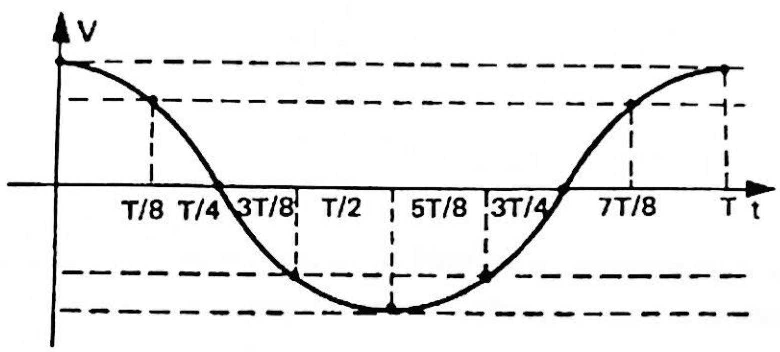
Obs:₅ Verifique que a aceleração é nula nos pontos em que $(x = 0 \left(\varphi = \frac{\pi}{2}\ ou\ \varphi = \frac{3\pi}{2}\right)$ e que nas posições de inversão a aceleração tem módulo máximo, ou seja, $\omega^2 A$.

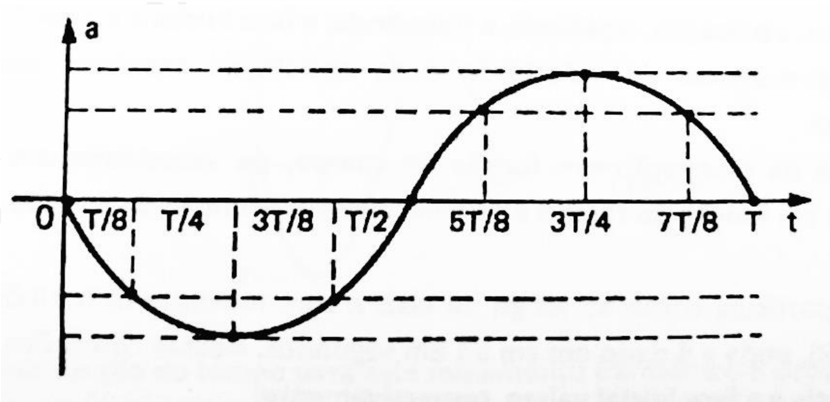
ANÁLISE GRÁFICA

Consideremos para esse estudo, o movimento circular e uniforme fictício de um ponto material A, lembrando que a projeção P do ponto A, sobre o diâmetro vertical ou horizontal, realiza MHS. O período será T e assumiremos que, no instante t = 0, elongação nula e o movimento se faz no sentido positivo do percurso.



A seguir temos a representação da velocidade e da aceleração em função do tempo, feita de forma análoga.





Considerando nossa análise gráfica vamos agora falar da velocidade em função da elongação e obter uma relação que é conhecida como fórmula de Torriccelli do MHS através das funções horárias da posição e da velocidade.

Portanto temos que:

$$x = A.\cos(\omega t + \varphi_0) \rightarrow \cos(\omega t + \varphi_0) = \frac{x}{A}$$
$$V = -\omega A sen(\omega t + \varphi_0) \rightarrow sen(\omega t + \varphi_0) = \frac{-V}{\omega A}$$

Então de acordo com o princípio fundamental da trigonometria, temos:

$$\frac{V^2}{\omega^2 A^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1$$

Portanto com mais um pouco da análise gráfica, fazendo <u>y</u> igual a aceleração MHS, <u>x</u> igual a s e <u>a</u> igual a amplitude veja mais alguns gráficos interessantes: