



IME
2023



ELETROMAGNETISMO

AULA 01
ELETROSTÁTICA I

Prof. João Maldonado





Sumário

| | |
|--|-----------|
| Apresentação do Professor | 4 |
| Dúvidas | 4 |
| Turma Especial | 5 |
| Metodologia Do Curso | 5 |
| Erros e Pontos de Melhoria | 6 |
| Cronograma do Curso | 6 |
| Análise dos Concursos Anteriores | 7 |
| Introdução | 9 |
| 1.0. Introdução à Física de Partículas | 10 |
| 2.0. Eletrização | 14 |
| 2.1. Corpo eletrizado | 16 |
| 2.2. Princípio da quantização da carga elétrica | 17 |
| 2.3. Princípios da eletrostática | 17 |
| 2.3.1. Princípio da atração e repulsão | 17 |
| 2.3.2. Princípio da conservação das cargas elétricas | 18 |
| 2.4. Isolantes e condutores | 19 |
| 2.5. Métodos de eletrização | 20 |
| 2.5.1. Atrito | 20 |
| 2.5.2. Contato | 21 |
| 2.5.3. Indução | 25 |
| 2.5.6. Indução parcial x indução total | 27 |
| 2.7. Eletroscópios | 28 |
| 2.7.1. Pêndulo eletrostático | 28 |
| 2.7.2. Eletroscópio de folhas | 29 |
| 3.0. Lei de coulomb | 33 |
| 3.1. Princípio da superposição | 34 |
| 3.2. Análise gráfica da lei de coulomb | 34 |
| 3.4. Lei de coulomb para distribuições tridimensionais de cargas | 39 |
| 4.0. Distribuições de cargas | 41 |
| 4.1. Distribuições lineares – densidade linear de cargas | 41 |
| 4.2. Distribuição superficial – densidade superficial de carga | 42 |
| 4.3. Distribuição volumétrica – densidade volumétrica de carga | 42 |
| 5.0. Lista de questões | 44 |
| 5.1. Questões Propostas | 44 |



| | |
|--|------------|
| 5.2. Questões Complementares | 51 |
| 6.0. Gabarito sem comentários | 63 |
| 7.0. Lista de questões comentadas | 64 |
| 7.1. Questões Propostas | 64 |
| 7.2. Questões Complementares | 76 |
| 8.0. Referências bibliográficas | 100 |



Apresentação do Professor

Para os que não me conhecem, meu nome é João Maldonado, sou formado em Engenharia Mecânica-Aeronáutica pelo ITA, em 2018. Fui aprovado no IME 2 vezes e tenho algumas medalhas na Olimpíada Brasileira de Física. Recentemente mudei o meu caminho e fui aprovado em Medicina em Oxford, mas o altíssimo custo me fez ficar no Brasil, e hoje estou estudando Medicina na UNB (Universidade Federal de Brasília).

Tenho experiência com a área de Educação já há alguns anos, tanto em ensino presencial quanto remoto, integrando a equipe do Estratégia desde 2018. Acredito que, durante esse curso, será possível te ajudar ao máximo a conseguir a tão famosa aprovação. Sempre conte comigo nessa jornada!

Dúvidas

Em caso de dúvidas, existem atualmente três canais:

- Sistema de Questões do Estratégia Militares e Vestibulares
- Fórum de dúvidas do Estratégia
- Mensagens privadas no Instagram **prof.maldonado**

Peço que sempre priorizem mandar as dúvidas pelo sistema de questões, caso possuírem. O sistema de questões do Estratégia é um dos produtos mais completos que o Estratégia possui, contando com mais de 100 mil questões resolvidas de todas as matérias.

Lá você encontrará todas as provas de Física resolvidas da AFA, EFOMM e EN desde o final da década de 90 e provas resolvidas do ITA e IME desde a década de 70. Cada questão conta com resolução em texto, resolução em vídeo e um local onde dúvidas podem ser deixadas a respeito das questões.

Além de ser um dos produtos mais completos do mercado e praticamente indispensável para a sua aprovação, muitas das suas dúvidas podem ser sanadas ao ver o vídeo resolvido da questão ou inclusive podem já ter sido dúvida de outro aluno, que fez um questionamento na página da questão e que foi respondido pelo professor ou sua Equipe. Portanto, antes de deixar uma dúvida, assista o vídeo de resolução e dê uma olhada no próprio local de dúvidas para aquela questão no Sistema de Questões do Estratégia.

Caso não tenha o Sistema de Questões (embora aconselho fortemente a comprarem!!!) você pode deixar dúvidas no Fórum de Dúvidas do Estratégia. Nesse caso, se atente aos seguintes passos antes de mandar sua dúvida, para que possamos te ajudar da melhor forma possível:

- Identifique o curso que possui, e o ano (ex: Escola Naval 2023)
- Identifique a aula em questão, e o nível (ex: Eletrostática I, nível 2)
- Identifique o número da questão
- Sempre que possível, anexe foto da questão/resolução
- Caso a dúvida seja teórica, tente ser bem completo no questionamento, e tente expressar exatamente o que não entendeu
- Em caso de questões de outros livros ou materiais, priorize as Salas VIP ou a Turma Especial

Algumas vezes atualizamos o livro digital, portanto sempre se certifique que a numeração da questão é a mais atual.



Além disso, sempre leiam a resolução da questão antes de mandar sua dúvida, todas as questões do seu livro digital são integralmente resolvidas passo a passo.

Em caso de dúvidas no Instagram, aplique as mesmas instruções acima, lembrando de sempre tentar mandar um print com a questão/resolução e identificá-la.

Turma Especial

Para os que não conhecem, o Estratégia tem uma Turma mais avançada e diferenciada, chamada Turma Especial.

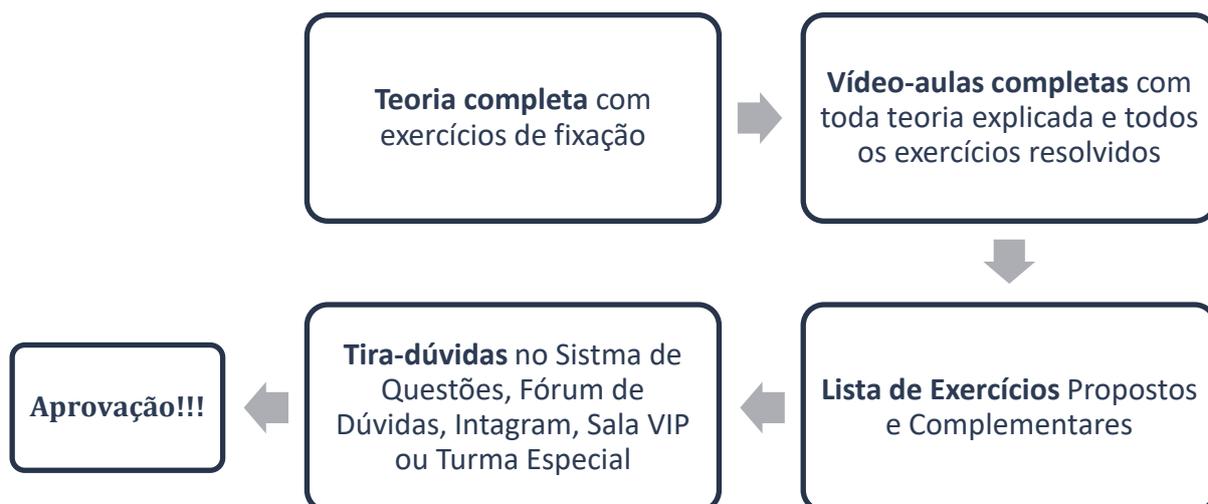
Para entrar na Turma Especial o aluno deve realizar simulados mensais e obter aprovação entre os melhores alunos. A Turma Especial conta com conteúdo próprio e aulas específicas. O aluno tem contato direto com o professor durante as aulas, inclusive por voz, e, além das aulas teóricas, resolvemos quaisquer dúvidas e questões dos alunos integrantes.

Tente ao máximo participar da Turma Especial, além de estar entre os melhores alunos e receber tratamento diferenciado, você estará bem mais próximo da sua tão sonhada aprovação!

Metodologia Do Curso

Neste curso, iremos apresentar toda base teórica para que você consiga resolver todas as questões de Física do seu vestibular dos últimos 20 anos. Ao longo da teoria, teremos questões resolvidas para consolidar a teoria, seguidos de um banco de questões básicas para o aluno se adaptar e solidificar a teoria e finalmente resolveremos uma lista mais difícil composta de todas as questões dos nossos principais vestibulares militares, incluindo ITA/IME/EN/EFOMM/AFA, além de várias questões inéditas. Aos que já estão familiarizados com determinado tópico, é facultativo pular as questões mais fáceis e partir direto ao próximo nível, embora eu recomende fortemente que se resolvam todas as questões mais básicas, pois elas sedimentam o conteúdo. Às vezes achamos que estamos muito bem em um determinado ponto, mas pode cair um pequeno conceito básico que a gente ainda não sabe.

Para isto, seguiremos o seguinte diagrama:



Durante o curso, teremos várias questões no próprio material resolvidas, a fim de consolidar a teoria. Recomendo fortemente tentar resolvê-las e ler a resolução, mesmo tendo acertado. Às vezes o método utilizado é diferente e mais efetivo do que o que você utilizou.

Além das questões do próprio material, ao final do material teremos uma série de questões propostas e resolvidas. Tente resolver todas elas!

Além das questões propostas, para os que ainda quiserem um grau extra de dificuldade, liberaremos listas complementares, compostas de dois níveis:

- **Nível 2:** Todas as questões da AFA, EFOMM, EN desde o final da década de 90
- **Nível 3:** Questões ITA, IME e de Olimpíadas

Além das questões da própria prova, várias outras questões de outros materiais, simulados e Sprints serão incluídas.

Erros e Pontos de Melhoria

Em caso de erros e pontos de melhorias encontrados no material, favor mandar um email para melhorias.joamaldonado@gmail.com indicando o erro em questão, tentarei corrigir o mais rápido possível.

Cronograma do Curso

O Cronograma Inicial do Curso (que poderá ser ajustado, sempre respeitando a data de prova) é:

| | | | |
|---------------|--|------------|------------|
| Aula 1 | Eletrostática I. Condutores e isolantes. Processos de eletrização. Lei de Coulomb. | 27/06/2021 | 07/07/2021 |
| Aula 2 | Eletrostática II. Campo elétrico. | 14/07/2021 | 24/07/2021 |
| Aula 3 | Eletrostática III. Potencial Elétrico e Energia Potencial Elétrica. | 31/07/2021 | 10/08/2021 |



| | | | |
|----------------|---|------------|------------|
| Aula 4 | Eletrostática IV. Capacitância, Capacitores e Dielétricos. | 17/08/2021 | 27/08/2021 |
| Aula 5 | Eletrodinâmica I. Corrente elétrica. Bipolo elétrico. Resistência elétrica. Efeito Joule. | 03/09/2021 | 13/09/2021 |
| Aula 6 | Eletrodinâmica II. Resistores. Primeira e Segunda Lei de Ohm. Associação de resistores. Ponte de Wheatstone. | 20/09/2021 | 30/09/2021 |
| Aula 7 | Eletrodinâmica III. Geradores e Receptores. Leis de Kirchhoff. Circuitos Elétricos. Regime Transitório. | 07/10/2021 | 17/10/2021 |
| Aula 8 | Ótica I. Introdução à Ótica. Luz. Fenômenos Óticos. Reflexão. Refração. Espelhos Planos. | 24/10/2021 | 03/11/2021 |
| Aula 9 | Ótica II. Estudo aprofundado da Reflexão. Movimento relativo de espelho/objeto. Espelho esférico. | 10/11/2021 | 20/11/2021 |
| Aula 10 | Ótica III. Estudo aprofundado da Refração. Prismas. Dioptros. Lentes. Equação dos Fabricantes de Lente. | 27/11/2021 | 07/12/2021 |
| Aula 11 | Ótica IV. Instrumentos Óticos. Ótica da Visão. | 14/12/2021 | 24/12/2021 |
| Aula 12 | Magnetismo I. Magnetismo. Campo Magnético. Experiência de Oersted. Lei de Biot-Savart. Lei de Gauss. Lei de Ampere. Campo Magnético de Fio, Espira, Toróide e Solenóide. | 31/12/2021 | 10/01/2022 |
| Aula 13 | Magnetismo II. Força Magnética. Trajetórias em um campo magnético. Fios com corrente. | 17/01/2022 | 27/01/2022 |
| Aula 14 | Magnetismo III. Indução Magnética. Lei de Lenz. Lei de Faraday-Neumann. Equações de Maxwell. | 03/02/2022 | 13/02/2022 |
| Aula 15 | Física Moderna I. Teoria da Relatividade Restrita. Conceitos básicos de Teoria da Relatividade Geral. | 20/02/2022 | 02/03/2022 |
| Aula 16 | Física Moderna II. Radiação de Corpo Negro. Efeito Compton. Efeito Fotoelétrico. Átomo de Bohr. Dualidade Partícula Onda e Comprimento de Onda de De Broglie. Princípio da Incerteza de Heisenberg. | 10/03/2022 | 20/03/2022 |

Análise dos Concursos Anteriores

Ainda que seja sua primeira tentativa, pode ter certeza da possibilidade de ser aprovado já no concurso de 2021. O primeiro passo que você precisa dar é conhecer como é sua prova! Saber o que vem pela frente é o melhor ponto de partida, servindo assim como uma excelente base de planejamento de estudos! Assim, destaco alguns pontos da sua prova:

- **Composição:**
- ✓ 22 questões (COM PESO 2,5), totalizando 55 pontos (24% da nota final, se contarmos redação)

- **Física**

1.1 CINEMÁTICA ESCALAR



1.1.1 Movimento Uniforme. Movimento com velocidade escalar variável e Movimento Uniformemente Variado. Movimento Vertical no Vácuo. Gráficos do Movimento Uniforme e do Movimento Uniformemente Variado.

1.2 VETORES E GRANDEZAS VETORIAIS: CINEMÁTICA VETORIAL

1.2.1 Vetores. Velocidade e aceleração vetoriais. Movimentos circulares. Lançamento horizontal e lançamento oblíquo no vácuo.

1.3 DINÂMICA

1.3.1 Princípios fundamentais. Leis de Newton. Forças de atrito. Forças em trajetória curvilíneas. Trabalho e energia. Impulso e Quantidade de Movimento. Gravitação Universal.

1.4 ESTÁTICA

1.4.1 Equilíbrio do ponto material. Equilíbrio dos corpos extensos. Hidrostática.

1.5 TERMOLOGIA

1.5.1 Introdução à termologia. Termometria. Dilatação térmica de sólidos e líquidos.

1.6 CALOR

1.6.1 Calorimetria. Mudanças de fase. Diagramas de fase. Propagação do calor.

1.7 TERMODINÂMICA

1.7.1 Estudo dos gases. As leis da Termodinâmica.

1.8 ÓPTICA

1.8.1 Óptica geométrica. Reflexão da luz e Espelhos planos. Espelhos esféricos. Refração luminosa. Lentes esféricas delgadas. Instrumentos ópticos

1.9 ONDAS

1.9.1 Movimento harmônico simples (MHS). Ondas. Interferência de ondas. Ondas sonoras.

1.10 ELETROSTÁTICA

1.10.1 Eletrização e Força elétrica. Campo elétrico. Trabalho e potencial elétrico. Condutores em equilíbrio eletrostático e Capacitância eletrostática.

1.11 ELETRODINÂMICA

1.11.1 Corrente elétrica. Resistores. Medidas elétricas. Geradores e Receptores elétricos. Capacitores.

1.12 ELETROMAGNETISMO

1.12.1 Campo magnético. Força magnética. Indução eletromagnética.

1.13 FÍSICA MODERNA

1.13.1 Noções de física quântica: Teoria dos Quanta; Efeito Fotoelétrico; célula fotoelétrica; O Átomo de Bohr; a Natureza "Dual" da Luz; Dualidade Onda-partícula: a Hipótese de Broglie; Princípio da Incerteza de Heisenberg.

1.13.2 Relatividade Especial: Relatividade na Física Clássica; Relatividade Galileana; Experiência de Michelson-Morley; Relatividade de Einstein: postulados da Teoria da Relatividade Especial; Modificações na Relatividade Galileana; Contração do comprimento; dilatação do tempo; composição relativística de velocidades; Massa e Energia; Energia e Quantidade de Movimento.



Introdução

Nesta aula iniciaremos o estudo da Eletricidade. Vamos estudar a natureza elétrica da matéria, conceito de corpo carregado, princípios de eletrização, princípios fundamentais da eletrostática, processos de eletrização e eletroscópios, a Lei de Coulomb para cargas puntiformes e distribuições de cargas.

É fundamental para o aluno entender todos os conceitos iniciais. Tais princípios são fundamentais para o entendimento de teorias futuras, de elevado grau de abstração, das quais os nossos vestibulares militares adoram cobrar.

Neste início, não teremos muitas questões. Por isso, vamos buscar questões de outras provas para fundamentar bem nossos conceitos de Eletricidade.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

ESCLARECENDO!



@prof.maldonado



1.0. Introdução à Física de Partículas

A Eletrostática é a parte da Física que estuda fenômenos associados a cargas elétricas em repouso, diferentemente da Eletrodinâmica que estuda cargas em movimento. Embora isso seja verdade, em Física costumamos estudar **Eletrostática** e **Eletrodinâmica** de maneiras suavemente distintas dessa definição. Em Eletrodinâmica iremos estudar circuitos e dispositivos elétricos (resistores, capacitores, geradores...), enquanto que em Eletrostática iremos estudar todo o resto, ou seja, entender o que é uma carga, qual o campo e a força que ela gera, definir um potencial e uma energia potencial, e descrever como essa carga se comporta em movimento. É como se Eletrodinâmica fosse a parte prática, o mundo real, e Eletrostática fosse a parte mais teórica.

Antes de começarmos nosso estudo de Eletrostática, irei passar um conteúdo que julgo muito importante do estudante de Física aprender já no começo de seus estudos, e que é geralmente negligenciado pela maioria dos materiais. Estou falando da Física de Partículas.

A Física de Partículas é um dos maiores ramos da Física, embora extremamente atual, que busca estudar as partículas mais fundamentais da matéria e da radiação, e como ocorrem as interações no nível mais microscópico possível. A Física de partículas irá responder perguntas como: “Podemos dividir um próton? E um elétron? Qual o tipo de interação que existe entre próton e próton? E entre nêutron e nêutron? Quais são as forças fundamentais no universo? Quais são as partículas fundamentais do universo? E as propriedades fundamentais dessas partículas elementares? O que é o bóson de Higgs, chamado por muitos de partícula de Deus, detectado a pouquíssimo tempo?”. Entre inúmeras outras questões importantes.

Você pode estar se perguntando, “Professor, mas pra que eu preciso saber disso?”. E a resposta é simples, pois isso irá facilitar muito seu entendimento das outras frentes da Física, e te dará um conhecimento mais global de tudo. Não iremos estudar toda a Física de Partículas, até porque isso exigiria um curso de pelo menos uma década. Iremos tão simplesmente comentar, em alguns parágrafos, do que acho que é importante você saber para sua aprovação. Vamos começar.

Na Física Clássica, a massa e a carga elétrica são duas propriedades fundamentais dos objetos físicos - ou seja, são propriedades que não são explicadas em termos de propriedades mais simples ou básicas. Em contraste, a cor é uma propriedade não fundamental, uma vez que pode ser explicada em termos dos comprimentos de onda da luz que um objeto reflete. Se um objeto reflete somente comprimentos de onda de 500nm ele será verde, enquanto que se reflete 600nm será laranja.

A unidade padrão de massa é o quilograma (kg), e a unidade padrão de carga é o coulomb (C). Massa não é a mesma coisa que peso. Massa é uma medida da quantidade de matéria em um objeto e é independente da localização desse objeto ou da gravidade local. Peso é a força da gravidade exercida sobre um objeto e varia dependendo da localização do objeto (objetos pesam menos na Lua do que na Terra, por exemplo).

Cada uma dessas propriedades fundamentais está associada a uma força fundamental - uma força que não é explicada em termos de forças mais básicas, no caso a **força eletromagnética** e a **força gravitacional**. Em contraste, a **força normal** da sua caneta pressionando contra um papel não é fundamental, uma vez que pode ser explicada em termos de forças mais básicas - a saber, a repulsão



eletromagnética entre as moléculas. A força gravitacional atua entre quaisquer dois objetos que tenham massa; a força eletromagnética atua entre quaisquer dois objetos que tenham carga.

As leis fundamentais da Física Clássica descrevem as relações matemáticas entre propriedades e forças fundamentais, mas não explicam por que essas relações se mantêm. Em outras palavras, as leis fundamentais não são explicadas em termos de outras leis ou causas; eles são simplesmente tidas como postulados inexplicáveis na natureza. Depois de formular sua lei da gravitação universal, Newton disse a famosa frase: "Não fui capaz de explicar a causa dessas propriedades da gravidade a partir de outros fenômenos, também não conseguirei apresentar hipóteses para tal..."

"Professor, mas você disse força **eletromagnética**, não seria força elétrica e força magnética?". Não. Conforme iremos estudar em Teoria da Relatividade Restrita (caso você veja essa aula), Einstein prova que forças magnéticas e elétricas advêm do mesmo fenômeno. A força magnética nada mais é que a força elétrica vista em outro referencial inercial.

Vamos inicialmente discutir sobre as **forças fundamentais**. Atualmente conhecemos a existência de **4 forças fundamentais**, ou seja, quatro forças que não podem ser explicadas em termos de outras forças. Qualquer força que não é fundamental pode ser explicada em termos de forças fundamentais. Conforme dissemos, a força normal não é fundamental pois é resultado da força eletromagnética de repulsão entre os átomos da superfície de dois materiais, sendo essa última – a força eletromagnética – uma força fundamental. A seguir estão as quatro forças fundamentais:

1. Força Eletromagnética
2. Força Gravitacional
3. Força Nuclear Fraca
4. Força Nuclear Forte

É possível que você não tenha familiaridade com as últimas duas, mas iremos comentar brevemente sobre elas.

A **força eletromagnética** é a força que ocorre quando temos duas partículas com **carga**. Partículas sem carga não exibem força eletromagnética. Costumamos dividir na Física Clássica essa força em **Força Elétrica** e **Força Magnética**, embora Einstein tenha provado que se trata da mesma força (veja a aula de Relatividade para explicações). A força elétrica ocorre em um referencial onde as partículas estão paradas e a força magnética ocorre em um referencial onde as partículas estão em movimento. É fácil ver que essas forças são iguais. Pense comigo: Se eu vejo duas cargas paradas, irei dizer que entre elas está agindo uma força elétrica. Agora se uma pessoa passa andando do lado das cargas, as cargas estarão em movimento em relação à pessoa, e nesse caso também agirá uma força magnética! Quem está correto? A resposta é que os dois estão corretos, pois se trata do mesmo fenômeno. Iremos estudar mais sobre essa força na aula de hoje.

A **força gravitacional** é a força que ocorre quando temos duas partículas com **massa**. "Professor, mas é possível que uma partícula não tenha massa?". Claro que sim! Fótons, glúons e os hipotéticos grávitons são partículas sem massa! Apesar de elas não criarem gravidade, elas são afetadas pela gravidade. Segundo a Teoria da Relatividade de Einstein a massa das partículas altera a força do espaço-tempo, ou seja, da métrica que rege nosso universo. É como se tivéssemos uma cama elástica e ela fosse o nosso universo. Se nada estiver na cama elástica ela terá uma forma plana. Entretanto se colocamos um corpo bem pesado no centro a cama elástica se distorce e se torna curva. Se jogarmos um objeto nessa



cama elástica ele irá se movimentar e será puxado para o centro. É como se a cama elástica fosse as dimensões do nosso universo. Perto de massas grandes essas dimensões (espaço-tempo) mudam e fazem com que a gravidade seja criada.

A **força nuclear fraca**, como o nome já diz, é uma força nuclear. Isso quer dizer que ela ocorre geralmente dentro do núcleo de átomos, ou seja, em um alcance muito pequeno. Veja a força gravitacional por exemplo: Mesmo a 151,82 milhões de quilômetros do Sol ainda conseguimos sentir a sua gravidade que faz o nosso planeta girar. O mesmo ocorre para a força eletromagnética. Entretanto as forças nucleares tem um alcance muito pequeno, da ordem do diâmetro de um próton, e se aumentarmos a distância somente um pouco, a magnitude da força diminui em milhares de vezes. A força nuclear fraca é a força que muda os “sabores” os quarks, e que está envolvida com alguns fenômenos de decaimento radioativo, como a conversão de um nêutron em um próton com emissão de um elétron e um antineutrino. Ambas as forças nuclear fraca e eletromagnética foram provadas de serem originadas de uma força ainda mais fundamental, a força eletrofraca, que teve origem no começo do universo e logo se dividiu nas duas forças anteriores. Uma das maiores áreas de pesquisa da Física atual é a consolidação de todas as forças e partículas fundamentais em uma única interação, a chamada **Teoria de Tudo**.

A **força nuclear forte**, que também tem um alcance muito pequeno, é a força de interação entre quarks. Ela explica como 3 quarks distintos irão formar prótons ou nêutrons e por que existe uma atração entre prótons e nêutrons, prótons e prótons e nêutrons e nêutrons no núcleo. Você já parou para se perguntar por que o núcleo de um átomo fica estável? Se o núcleo só tem partículas positivas e neutras, os prótons deveriam interagir com forças eletromagnéticas de repulsão e logo iriam se distanciar. O que previne isso? A força nuclear forte, que é uma força de atração muito mais forte que a eletromagnética.

Além disso, vamos estudar agora quais são as partículas fundamentais do nosso universo (ou seja, partículas que não podem ser divididas). Somente por curiosidade, dê uma olhada no quadro abaixo:

Standard Model of Elementary Particles

| | three generations of matter (elementary fermions) | | | three generations of antimatter (elementary antifermions) | | | interactions / force carriers (elementary bosons) | |
|--------|--|---------------------------------------|--------------------------------------|--|--|---|--|--|
| | I | II | III | I | II | III | | |
| mass | $\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$ | $\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$ | $\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$ | $\approx 2.2 \text{ MeV}/c^2$ | $\approx 1.28 \text{ GeV}/c^2$ | $\approx 173.1 \text{ GeV}/c^2$ | 0 | $\approx 124.97 \text{ GeV}/c^2$ |
| charge | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\frac{2}{3}$ | 0 | 0 |
| spin | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| | u up | c charm | t top | ū antiup | c̄ anticharm | t̄ antitop | g gluon | H higgs |
| | d down | s strange | b bottom | d̄ antidown | s̄ antistrange | b̄ antibottom | γ photon | |
| | e electron | μ muon | τ tau | e⁺ positron | μ̄ antimuon | τ̄ antitau | Z⁰ Z ⁰ boson | |
| | ν_e electron neutrino | ν_μ muon neutrino | ν_τ tau neutrino | ν̄_e electron antineutrino | ν̄_μ muon antineutrino | ν̄_τ tau antineutrino | W⁺ W ⁺ boson | W⁻ W ⁻ boson |

Figura 1. Partículas Elementares



Acima vemos todas as partículas elementares atualmente conhecidas. Além dessas, ainda existe uma hipotética, o gráviton, que ainda não foi descoberto, mas supostamente é a partícula que gera a força gravitacional.

Você pode ver acima que elétrons estão na tabela, ou seja, são partículas fundamentais, mas os prótons e nêutrons não. Isso porque prótons e nêutrons são constituídos de partículas ainda mais elementares chamadas quarks. Além disso, cada partícula (por exemplo, elétron) tem a sua antipartícula (por exemplo, pósitron) com propriedades opostas.

Não se preocupe com decorar essa tabela! Lembre-se que esse primeiro capítulo é em grande parte curiosidade e serve somente para te auxiliar com alguns futuros entendimentos, não fique preso a ele!

Estamos quase finalizando nosso estudo introdutório de Física de Partículas mas antes quero explicar para vocês como uma força ocorre no nível mais microscópico possível.

Na Física de Partículas tudo é explicado por partículas. Uma onda eletromagnética, que na Física Clássica é pensada como uma onda, ou seja, algo abstrato, não material, na Física de Partículas é pensada como um fóton, uma partícula! Da mesma forma, as forças fundamentais nada mais são do que trocas de partículas chamadas bósons. Veja por exemplo como a força eletromagnética pode ser explicada:

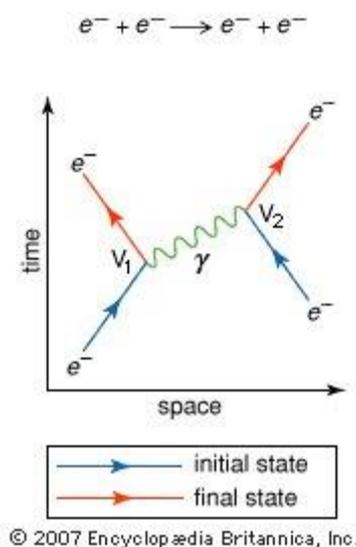


Figura 2. Força eletromagnética

O diagrama acima se chama diagrama de Feynman. Veja que um certo elétron emitiu um fóton para a direita. Como o fóton, apesar de não ter massa, tem um momento linear dado por $p = h/\lambda$, o elétron, por conservação de momento linear, é lançado para a esquerda. Outro elétron absorve esse fóton (chamado de fóton virtual) e é lançado para a direita. Veja que ambos os elétrons se repeliram, o que é esperado de uma força eletromagnética entre duas cargas de sinal negativo.

Finalmente, vamos falar sobre as propriedades fundamentais das partículas elementares, e isso é muito importante para a aula de hoje. Existem três propriedades fundamentais importantes que mostramos na tabela das partículas elementares: a massa, a carga e o spin. A massa foi dada em energia dividido por velocidade ao quadrado, um outro jeito de expressar massa relativisticamente. Além disso, veja que a carga e o spin (que pode ser pensado como um momento angular intrínseco) são quantizados. As cargas são sempre múltiplas de $\pm 1/3$ de uma carga chamada carga elementar (a carga do elétron), podendo também ser zero. Entretanto, como os quarks (partículas de carga não inteira) são



extremamente instáveis se isolados, eles sempre acabam se agrupando em grupos que formam cargas múltiplas de 1 ou zero (por exemplo, três quarks de carga $1/3$ se agrupam para formar um próton de carga 1 e dois quarks de carga $1/3$ e um quark de carga $-2/3$ se agrupam para um nêutron). O spin será sempre um múltiplo de $1/2$ de um certo spin elementar, e pode ser zero no caso do bóson de Higgs. São $1/2$ para férmions e inteiros para bósons. Existe um princípio, chamado de Princípio de Exclusão de Fermi, que diz que dois ou mais férmions idênticos não podem ocupar o mesmo estado quântico. Como elétrons são férmions isso explica porque somente dois elétrons (um com spin $+1/2$ e um com spin $-1/2$) podem ocupar o mesmo orbital, e nunca três ou mais. As únicas partículas sem massa são o fóton, o glúon e o hipotético gráviton.

Acabamos a nossa introdução, vamos começar agora o estudo de Eletrostática!

2.0. Eletrização

Como dissemos, a carga elétrica é uma propriedade física fundamental que determina interações eletromagnéticas. Essa propriedade está associada a partículas como: elétrons, prótons, mésons, antiprótons, pósitrons, etc. Todas elas possuem a mesma carga e, por isso, chamamos esse valor de carga elétrica elementar e .

Em 1897, Joseph John Thomson foi capaz de determinar a relação entre a carga e a massa do elétron:

$$\frac{e}{m} = -1,76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

Onde e é a carga elétrica elementar e m a massa de um elétron. No SI, a unidade de medida de cargas elétricas é o Coulomb, representada pela letra C, em homenagem ao físico francês Charles Augustin de Coulomb.

Somente por curiosidade, iremos explicar o experimento abaixo:

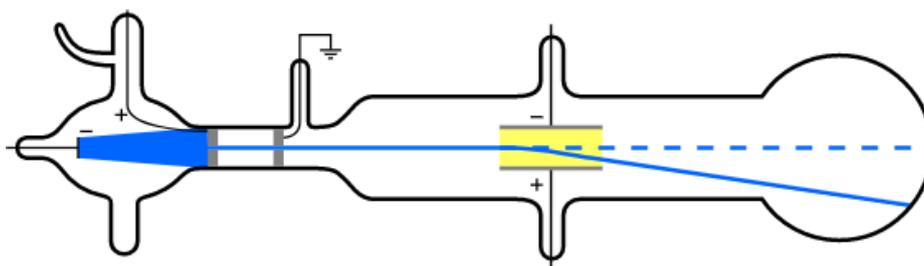


Figura 3. Experimento de Thomson

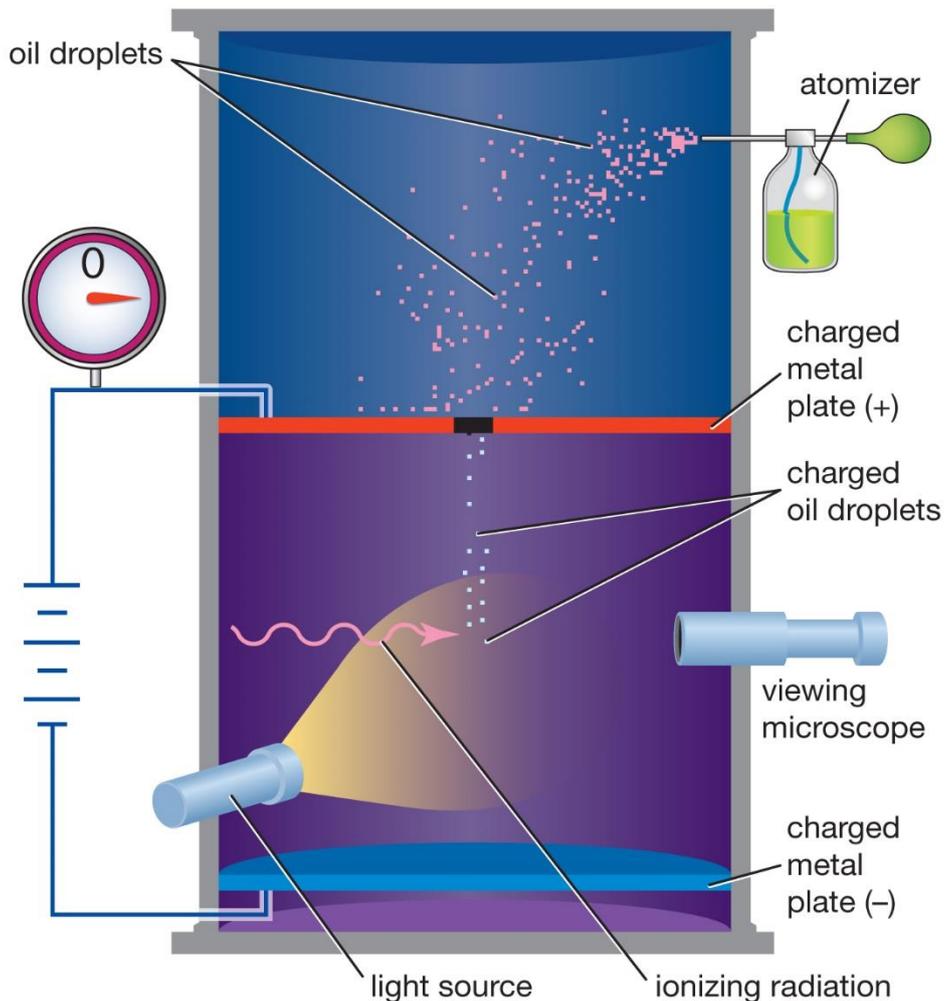
Em um tubo à vácuo elétrons foram acelerados devido a uma diferença de potencial, isolados em um feixe e então submetidos a um campo elétrico perpendicular ao seu movimento. Conforme iremos ver mais adiante, esse campo elétrico gerou uma força elétrica nos elétrons, e conseqüentemente uma aceleração, fazendo com que os mesmos se desviassem para baixo. A medida desse desvio permitia determinar a razão e/m . Portanto Thomson conseguiu calcular e/m , mas não e ou m individualmente!

Em 1910, estudando o comportamento de gotas de óleo em um campo elétrico, Robert Andrews Millikan determinou a carga do elétron ($-e$) e sua massa (m_e):

$$-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \text{ e } m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$



E também por curiosidade iremos estudar o experimento de Milikan:



© 2012 Encyclopædia Britannica, Inc.

Figura 4. Experimento de Milikan

Um spray borrifador com uma cânula muito pequena borrifava óleo dentro de uma região de vácuo. O atrito entre a cânula e o óleo eletrizava as gotas com uma carga muito pequena. As gotas caíam em uma região onde existia um campo elétrico vertical. Esse campo elétrico criava uma força vertical nas gotas. Algumas gotas entretanto ficavam paradas no meio do ar, isso porque a força elétrica para cima tinha a mesma magnitude que a força peso. Medindo o tamanho dessas gotas com um microscópio Milikan conseguiu medir a carga elementar e consequentemente a massa do elétron.

Abaixo temos uma tabela indicando a carga e a massa de algumas partículas que eventualmente encontraremos em exercícios:

| PARTÍCULA | CARGA ELÉTRICA | | SÍMBOLO | MASSAS |
|-----------|--------------------------|------|---------|---|
| Próton | $+1,6 \times 10^{-19} C$ | $+e$ | p^+ | $m_p = 1,672 \times 10^{-27} kg$ |
| Elétron | $-1,6 \times 10^{-19} C$ | $-e$ | e^- | $m_e \approx \frac{m_p}{1836} = 9,109 \times 10^{-31} kg$ |



| | | | | |
|------------|----------------------------------|------|-------|--|
| Antipróton | $-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ | $-e$ | p^- | m_p |
| Pósitron | $+1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ | $+e$ | e^+ | m_e |
| Nêutron | 0 | - | n^0 | $m_n = 1,674 \times 10^{-27} \text{ kg}$ |

Tabela 1. Propriedades das principais partículas

A massa do próton (m_p) é cerca de 1836 vezes a massa do elétron (m_e) e praticamente igual à massa do nêutron. Na maioria dos casos, iremos estar trabalhando com átomos, compostos somente de elétrons, prótons e nêutrons. Dessa forma, em um corpo qualquer, a sua carga final pode ser determinada pela carga total de seus prótons (positiva) somada à carga total de seus elétrons (negativa).

2.1. Corpo eletrizado

Podemos dizer que existem três formas de classificar um corpo eletrizado:

- **Corpo eletricamente neutro ($Q = 0$):** é aquele que possui o mesmo número de prótons e de elétrons.

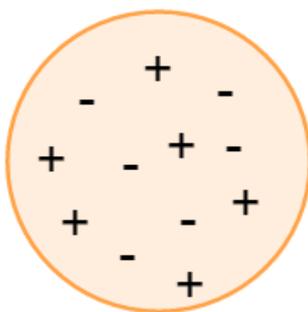


Figura 1: Corpo eletricamente neutro ($n_p = n_e$).

- **Corpo positivamente carregado ($Q > 0$):** é aquele que possui mais prótons do que elétrons.

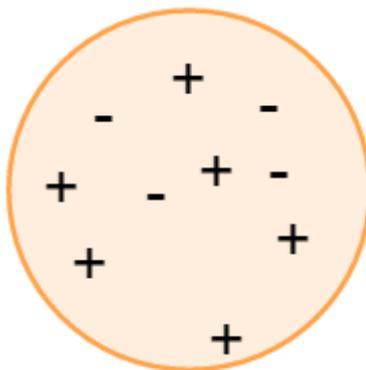


Figura 2: Corpo positivamente carregado ($n_p > n_e$).

- **Corpo negativamente carregado ($Q < 0$):** é aquele que possui mais elétrons do que prótons.

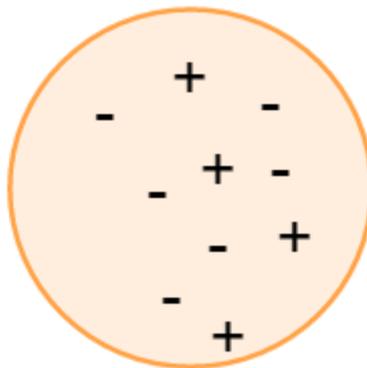


Figura 3: Corpo negativamente carregado ($n_p < n_e$).

Além disso, devemos notar que geralmente é o elétron a carga móvel. Isso quer dizer que quando eletrizamos um material estamos dando ou tirando elétrons, os prótons ficam parados no núcleo. Consequentemente é errado dizer que um corpo positivamente carregado ganhou prótons, na verdade ele perdeu elétrons.

2.2. Princípio da quantização da carga elétrica

No século XVIII, a carga elétrica era considerada como um **fluido contínuo**. No início do século XX, Millikan descobriu que o fluido elétrico não era contínuo, mas que a carga elétrica era sempre um múltiplo inteiro da carga elementar:

$$Q = \pm n \cdot e \quad n \in \mathbb{N}$$

Usamos o sinal (+) quando o corpo apresenta falta de elétrons e o sinal (-) quando o corpo apresenta excesso de elétrons.

Note que a carga elétrica não pode assumir qualquer valor, apenas valores múltiplos de e , isto é, está organizada em *pacotes discretos*. Em termos modernos, dizemos que ela é *quantizada*.

Curiosidade: atualmente, existem teorias modernas que propõem a existências de partículas fracionárias, chamados *quarks*. Eles possuem cargas iguais a $\pm \frac{e}{3}$ e $\pm \frac{2e}{3}$.

2.3. Princípios da eletrostática

Denomina-se sistema **eletricamente isolado** todo sistema que não troca cargas elétricas com o meio exterior, dessa forma, **a soma das cargas dentro desse sistema será sempre constante**, não havendo perdas e nem ganhos.

2.3.1. Princípio da atração e repulsão

Mesmo antes do advento da teoria eletromagnética moderna, verificava-se experimentalmente que:

Cargas elétricas de mesmo sinal se repelem e de sinais contrários se atraem.

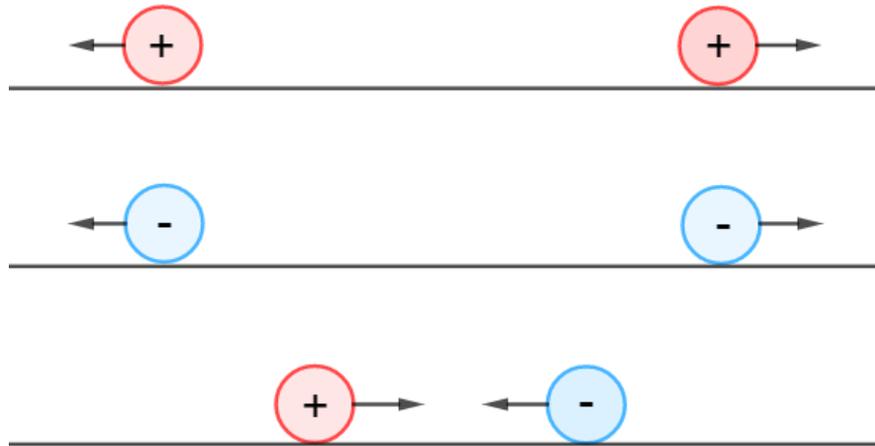


Figura 4: Representação do Princípio da Atração e Repulsão em cargas elétricas.

Esse princípio é denominado de **Princípio da Atração e Repulsão**.



2.3.2. Princípio da conservação das cargas elétricas

Em um sistema eletrostaticamente isolado, a soma algébrica das cargas elétricas é sempre constante.

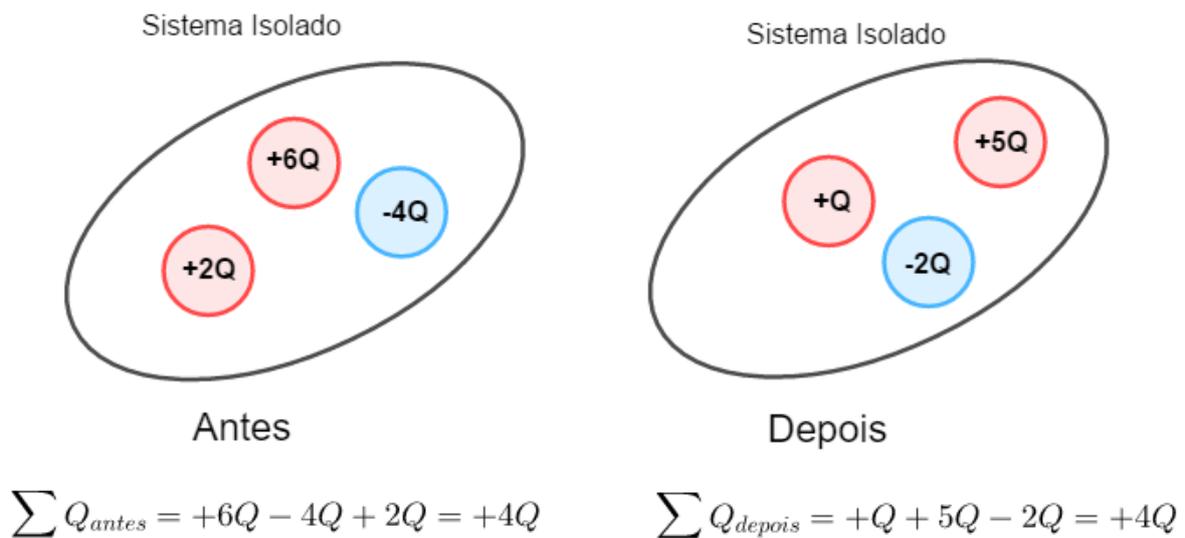


Figura 5: Aplicação da conservação de cargas para sistema isolados eletricamente.

$$\sum Q_{antes} = \sum Q_{depois}$$



ESCLARECENDO!



2.4. Isolantes e condutores

Dizemos que **isolantes** são materiais que **não apresentam portadores livres** de cargas elétricas. Exemplos: borrachas, vidros, água destilada, $NaCl_{(s)}$, etc.

Por outro lado, condutores são materiais que apresentam portadores livres de cargas elétricas.

Podemos classificar os condutores em três categorias:

- **1ª espécie:** os portadores são elétrons livres. Exemplo: metais, alguns polímeros e alguns alótropos do carbono (ex: grafite, grafeno). Os metais possuem elétrons “livres” na sua estrutura (os elétrons da camada de valência), ligados ao núcleo do átomo de forma muito fraca. Esses elétrons podem ser considerados “sem dono”, orbitando por toda a rede metálica sem pertencer a um átomo específico, e sendo então considerado portador.
- **2ª espécie:** os portadores são íons livres. Exemplo: sais dissolvidos ou fundidos, que se dissociam em cátions e ânions.
- **3ª espécie:** os portadores são elétrons e íons livres. Exemplo: Plasma, também conhecido como quarto estado da matéria, ocorre quando temos um gás ionizado. Como exemplo temos os raios e relâmpagos, que ocorrem quando a diferença de potencial entre uma nuvem e a crosta terrestre se torna grande o suficiente para arrancar elétrons de seus átomos e criar um plasma, composto de íons e elétrons livres, que agora são atraídos e repelidos pela diferença de potencial, gerando uma corrente elétrica.

Dizemos que um condutor carregado está em **equilíbrio eletrostático** quando não há movimento ordenado de cargas elétricas. Veja que a palavra chave aqui é ordenado! Os elétrons continuam se movendo a milhões de quilômetros por hora, entretanto de maneira totalmente alea

Nos condutores eletrizados em equilíbrio eletrostático, as cargas elétricas em excesso se distribuem pela superfície. Esse fato justifica pelo Princípio da Repulsão entre Cargas Elétricas de mesmo sinal. Basicamente, ele garante que as cargas tendem a ficar o mais afastadas possível umas das outras.

De outra forma, as cargas se distribuem em sua superfície, concentrando nas pontas. Tal fenômeno é conhecido como **efeito das pontas**. Ele será mais bem compreendido quando apresentarmos o conceito de campo elétrico e suas propriedades.

Por outro lado, se um corpo não for condutor, ele poderá apresentar cargas elétricas em excesso localizadas em uma região interna, dependendo da forma como for eletrizado. Uma esfera uniformemente carregada, por exemplo, é necessariamente um isolante, já que se fosse condutora as cargas iriam para a superfície e ela não seria uniformemente carregada (já que a carga interna seria nula).

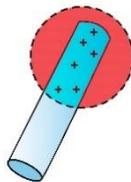


Figura 6: Bastão de material isolante eletrizado.

2.5. Métodos de eletrização

Para alterar o estado de eletrização de um corpo, podemos usar alguns processos comuns: atrito, contato e indução.

2.5.1. Atrito

Utiliza-se este processo preferencialmente em **isolantes**. Basicamente, quando se atrita dois corpos constituídos de materiais distintos, um cede elétrons para o outro, tornando os dois eletrizados. Quem recebeu elétrons fica eletrizado negativamente e quem cedeu elétrons fica eletrizado positivamente.

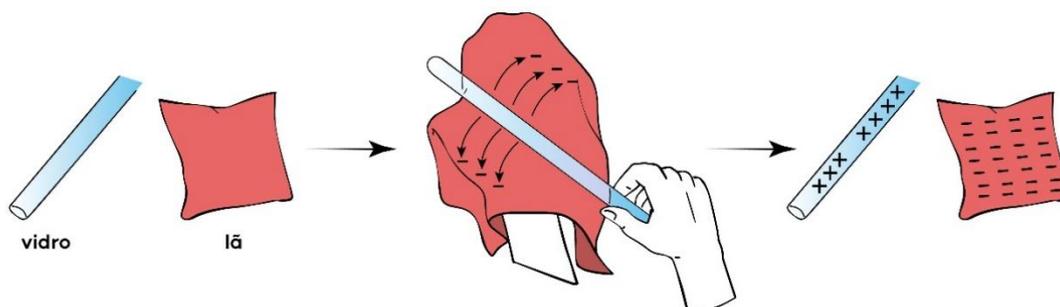


Figura 7: Processo de eletrização por atrito entre um bastão de vidro e um tecido de lã.

Na eletrização por atrito de isolantes, a carga fica confinada no local de atrito. O sinal da carga elétrica adquirida por um material depende de sua posição na série triboelétrica.



| REGRA | SUBSTÂNCIA |
|-------|--------------|
| | Vidro |
| | Mica |
| | Lã |
| | Pele de gato |
| | Seda |
| | Algodão |
| | Ebonite |
| | Cobre |
| | Enxofre |
| | Celuloide |

Figura 7: Série Triboelétrica

Por exemplo, se eletrizarmos por atrito um bastão de vidro e um pano de seda, o vidro eletriza-se positivamente e a seda eletriza-se negativamente. Se atritarmos algodão e celuloide, o algodão eletriza-se positivamente e a celuloide eletriza-se negativamente.

Note que pelo Princípio da Conservação das Cargas, quando um corpo é eletrizado negativamente com carga elétrica $-Q$, o outro deverá adquirir carga elétrica $+Q$.

2.5.2. Contato

Este método funciona muito bem entre materiais **condutores**, onde as cargas elétricas podem se mover.

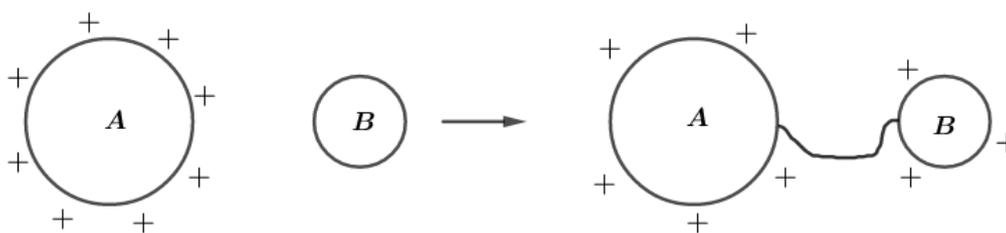


Figura 8: Eletrização por contato utilizando um fio.

Se colocamos A e B em contato, elétrons de B irão se mover para A, deixando B positivo.

Observações:

- 1) Quando colocamos 2 condutores em contato, eles podem ser considerados como um único condutor, e conseqüentemente (conforme veremos adiante) terão que ter o **mesmo potencial elétrico**.
- 2) Após a eletrização por contato, no equilíbrio eletrostático, todos os condutores têm cargas de mesmo sinal.



- 3) No caso de eletrização por contato de condutores esféricos, as cargas se distribuem proporcionalmente aos raios (pois o potencial elétrico de uma esfera é inversamente proporcional ao raio).
- 4) Para o caso de esferas metálicas de mesmos raios, temos que:

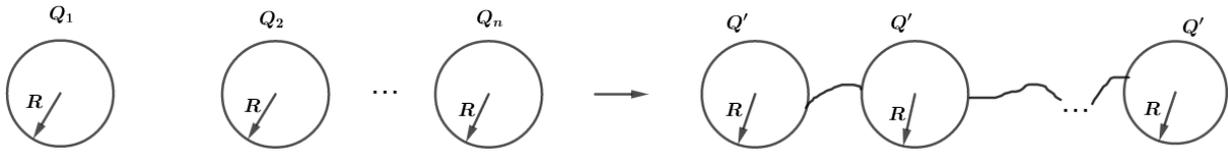


Figura 9: Eletrização por contato utilizando um fio, para n esferas de mesmo raio.

$$Q' = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{n}$$

- 5) A Terra pode ser vista como um condutor neutro e de raio infinito, conseqüentemente todos os condutores que forem ligados à Terra irão ser eletrizados com potencial nulo. Se não existir outra carga por perto (indução magnética) potencial nulo significa carga nula. Entretanto temos que ficar atentos se existir uma outra carga por perto, conforme veremos no próximo tópico!

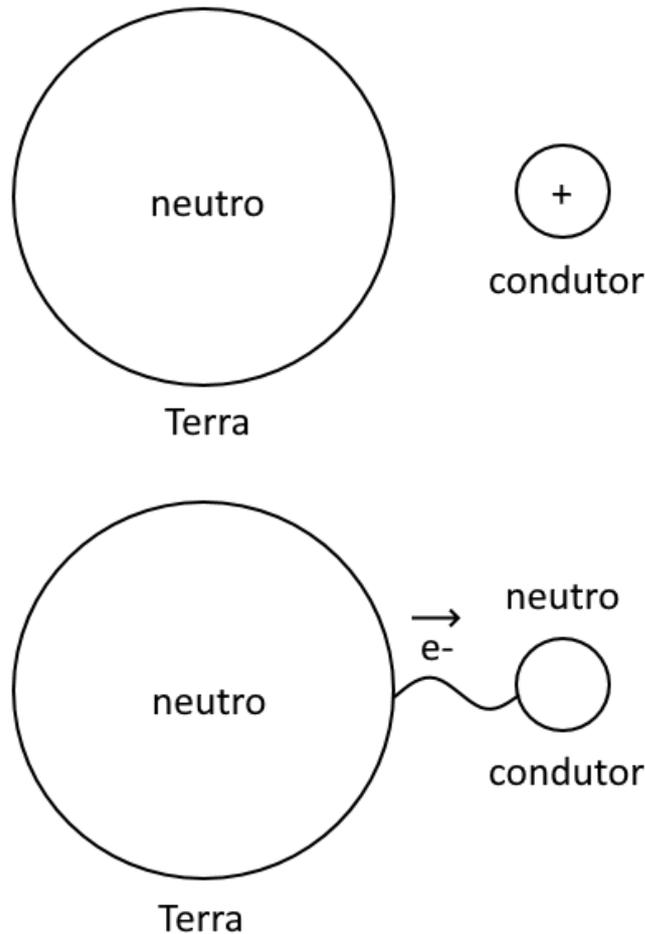


Figura 10: Corpo eletrizado ao entrar em contato com a Terra.

Todo condutor não induzido, ao ser aterrado (colocado em contato com a Terra), torna-se neutro.
Símbolo do aterramento:



Figura 11: Símbolo para aterramento.



1) (UEL – PR)

Quatro esferas condutoras iguais têm, respectivamente, cargas elétricas $\frac{Q}{2}$, Q , $2Q$ e X (desconhecida). Pondo-se todas em contato e depois separando-as, cada uma ficou com uma carga igual a $\frac{7Q}{8}$. Supondo que as esferas tenham trocado cargas elétricas somente entre si, a carga elétrica X , da quarta esfera, era igual a:

- a) zero
- b) $\frac{Q}{2}$
- c) Q
- d) $\frac{3Q}{2}$
- e) $2Q$

Comentários:

Pelo Princípio da Conservação das Cargas nesse sistema eletrostaticamente isolado, temos que:

$$\begin{aligned} \sum Q_{\text{antes}} &= \sum Q_{\text{depois}} \\ \frac{Q}{2} + Q + 2Q + X &= 4 \cdot \frac{7Q}{8} \\ \boxed{X = 0} \end{aligned}$$

Gabarito: A

2) (Fuvest – SP)

Têm-se 3 esferas condutoras idênticas A, B e C. As esferas A (positiva) e B (negativa) estão eletrizadas com cargas de mesmo módulo Q , e a esfera C está inicialmente neutra. São realizadas as seguintes operações:

- 1) toca-se C em B, com A mantida a distância, e em seguida separa-se C de B;
- 2) toca-se C em A, com B mantida a distância, e em seguida separa-se C de A;
- 3) toca-se A em B, com C mantida a distância, e em seguida separa-se A de B,



Podemos afirmar que a carga final da esfera A vale:

- a) zero
- b) $+\frac{Q}{2}$
- c) $-\frac{Q}{4}$
- d) $+\frac{Q}{6}$
- e) $-\frac{Q}{8}$

Comentários:

Vamos aplicar o Princípio da Conservação das Cargas nesse sistema eletrostaticamente isolado para cada etapa do processo:

Etapa 1:

$$\begin{aligned}\Sigma Q_{antes} &= \Sigma Q_{depois} \\ 0 + (-Q) &= Q_{B1} + Q_{C1}\end{aligned}$$

Mas como as esferas são idênticas, temos que ao final da primeira eletrização por contato a relação $Q_{B1} = Q_{C1}$. Portanto:

$$Q_{B1} = Q_{C1} = -\frac{Q}{2}$$

Etapa 2:

$$\begin{aligned}\Sigma Q_{antes} &= \Sigma Q_{depois} \\ Q_A + Q_{C1} &= Q_{A2} + Q_{C2}\end{aligned}$$

Mas como as esferas são idênticas, temos que ao final da primeira eletrização por contato a relação $Q_{A2} = Q_{C2}$. Portanto:

$$\begin{aligned}+Q + \left(-\frac{Q}{2}\right) &= Q_{A2} + Q_{A2} \\ Q_{A2} = Q_{C2} &= +\frac{Q}{4}\end{aligned}$$

Etapa 3:

$$\begin{aligned}\Sigma Q_{antes} &= \Sigma Q_{depois} \\ Q_{A2} + Q_{B1} &= Q_{A3} + Q_{B3}\end{aligned}$$

Mas como as esferas são idênticas, temos que ao final da primeira eletrização por contato a relação $Q_{A3} = Q_{B3}$. Portanto:

$$\begin{aligned}+\frac{Q}{4} - \frac{Q}{2} &= 2Q_{A3} \\ Q_{A3} = Q_{B3} &= -\frac{Q}{8}\end{aligned}$$

Cargas finais:

$$\boxed{Q_{Af} = Q_{Bf} = -\frac{Q}{8}} \text{ e } \boxed{Q_{Cf} = +\frac{Q}{4}}$$

Gabarito: E



2.5.3. Indução

Este processo ocorre preferencialmente em **condutores** (no caso, o indutor pode ser um isolante, mas o induzido precisa ser um condutor para o processo ocorrer de maneira apreciável). Trata-se da “separação” de cargas elétricas de um condutor sem que haja contato com o outro corpo eletrizado.

Vamos tomar dois corpos A e B, onde A é eletrizado e pode ser constituído de material isolante ou condutor; o corpo B está neutro e tem que ser constituído de material condutor. Chamamos A, que está eletrizado, de indutor e B de induzido. Representação:

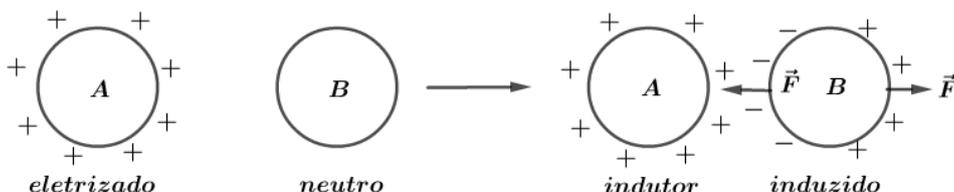


Figura 12: Representação da eletrização por indução.

Ao aproximar os dois corpos, os elétrons de B serão atraídos para a região mais próxima de A, criando uma carência de elétrons na região mais afastada de B, como mostra a figura. Assim, dizemos que o corpo B está induzido pelo indutor A.

Além disso, observamos que a força de atração entre as faces próximas de A e B (face direita de A e esquerda de B) é maior em módulo que a força de repulsão entre as partes mais afastadas (face esquerda de A e direita de B), gerando então uma força de atração resultante.

Note que o corpo B não recebeu ou perdeu elétrons. Ele está eletricamente neutro (a soma de suas cargas é zero), somente as cargas que se moveram no espaço. Então, se afastarmos o indutor, os elétrons do induzido se rearranjam para o estado inicial. Dizemos que houve apenas separação de cargas no induzido.

Se desejamos efetuar a eletrização de um induzido, devemos realizar os seguintes passos:

Passo 1)

Aproximamos do induzido um corpo carregado (o indutor), forçando uma separação de cargas no induzido:

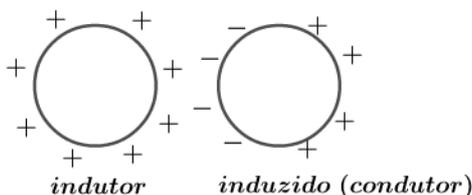


Figura 13: Separação das cargas no induzido.

Passo 2)

Na presença do indutor, aterra-se o induzido. Nesse caso, conforme ainda será visto em outras aulas, como existe um condutor positivo por perto, o potencial elétrico do induzido era positivo. Ao conectá-lo à Terra, a única maneira de deixar o potencial final nulo ocorrerá quando elétrons fluírem da Terra ao induzido, diminuindo o seu potencial.

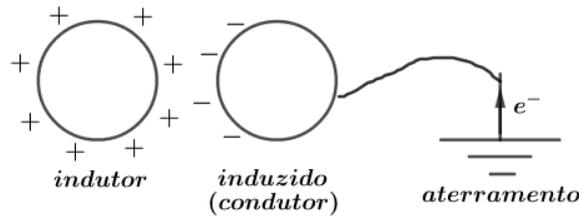


Figura 14: Aterramento do induzido para atrair elétrons da terra.

Observação: o aterramento pode ser feito em qualquer ponto do induzido.

Passo 3)

Ainda na presença do indutor, desliga-se o contato do induzido com a terra.

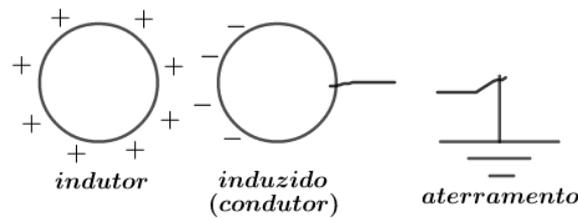


Figura 15: Retira-se a ligação do induzido à terra.

Observação: na eletrização por indução, quando se atinge o equilíbrio eletrostático, o indutor e o induzido têm sinais opostos.

Passo 4:

Afasta-se o indutor e teremos o induzido eletrizado.

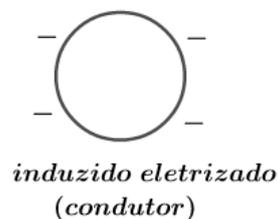


Figura 16: Induzido devidamente eletrizado.

Observações:

- 1) Independente de qual seja a carga indutora, concentram-se cargas de sinais opostos no induzido na região próxima ao indutor.
- 2) É necessário aterrar o induzido para concluir sua eletrização.
- 3) Quando se desliga o fio terra, o indutor ainda deve estar presente. Do contrário, apenas estaríamos movimentando cargas no induzido, como visto anteriormente.
- 4) Logo acima dizemos que o corpo induzido deve ser feito de material condutor para que ocorra a separação de cargas. Entretanto, em alguns casos quando o induzido for constituído de material isolante poderá haver uma polarização das moléculas, como por exemplo no isopor, ou em um dielétrico dentro de um capacitor. Dessa forma, existe uma polarização das moléculas do induzido (isopor), resultando no aparecimento de cargas superficiais excedentes negativas à esquerda e positivas à direita:

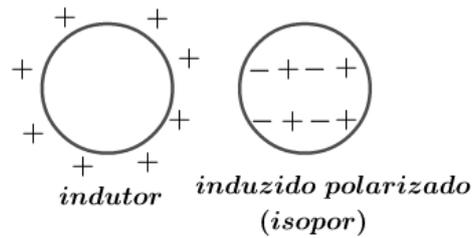


Figura 17: Polarização das moléculas no isopor na presença de um indutor eletrizado positivamente.

Trabalharemos a polarização de materiais isolantes (dielétricos) futuramente quando estudaremos os capacitores.

FIQUE ATENTO!



2.1.6. Indução parcial x indução total

A **indução parcial** é aquela na qual o módulo da carga induzida é menor do que o módulo da carga do indutor. Ela ocorre quando o induzido não envolve completamente o indutor.

Exemplo:

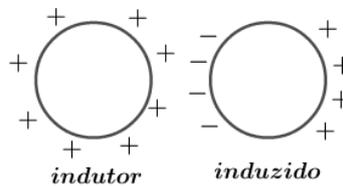


Figura 18: Indução parcial

A **indução total** é aquela na qual o módulo da carga induzida é igual ao módulo da carga do indutor. Ela ocorre quando o induzido envolve completamente o indutor.

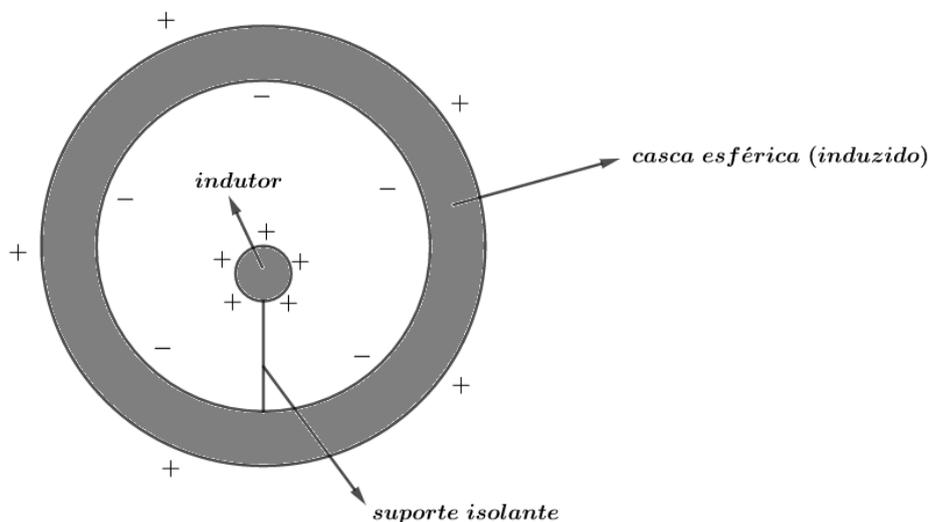


Figura 19: Indução total.



Futuramente, retornaremos a estudar a indução total após a aula de Potencial Elétrico, pois teremos mais uma ferramenta mais poderosa para abordar este método de eletrização.



2.7. Eletroscópios

Trata-se de um instrumento utilizado para se verificar o estado de eletrização de um determinado corpo (corpo de prova). A base de seu funcionamento é a indução eletrostática.

Existem dois tipos comuns de eletroscópios: de folhas e o pêndulo elétrico.

2.7.1. Pêndulo eletrostático

O pêndulo eletrostático é constituído de uma esfera condutora extremamente leve (geralmente uma casca de alumínio) e um fio isolante, também extremamente leve (geralmente fio de náilon).

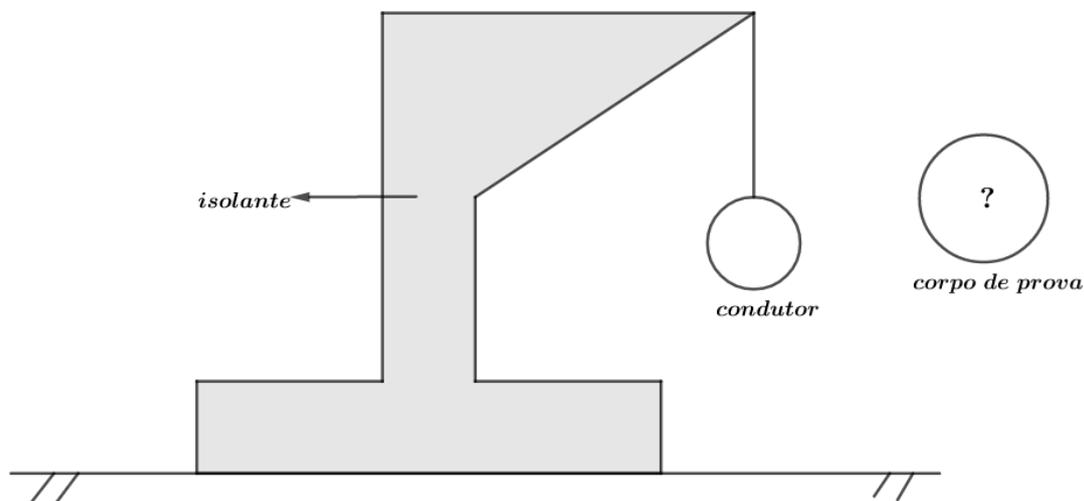


Figura 20: Construção de um pêndulo eletrostático.

Seu funcionamento é bem simples: quando aproximamos um corpo eletrizado, a esfera do pêndulo é atraída por indução eletrostática.

Inicialmente ocorrerá um rearranjo das cargas do indutor, conforme observamos, e uma força resultante de atração.

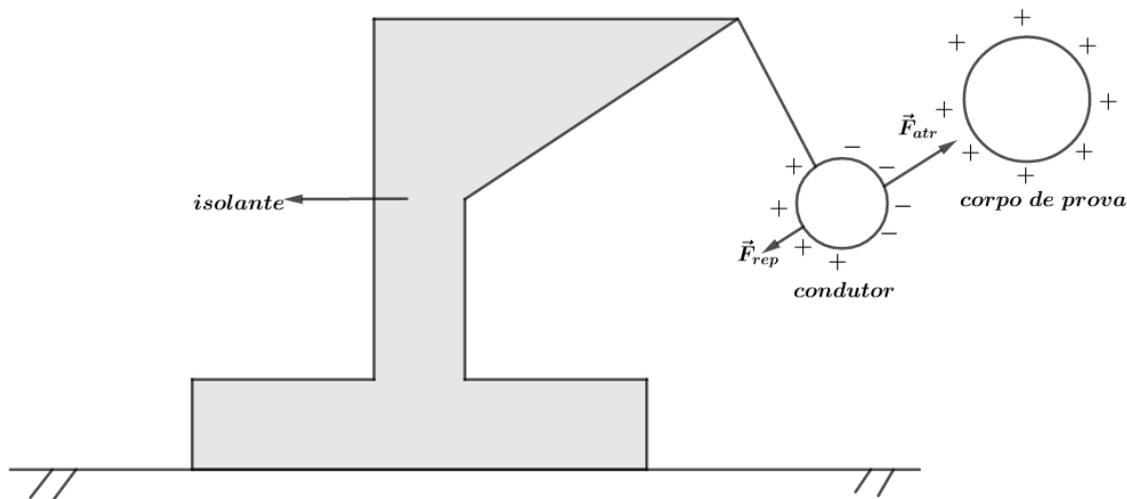


Figura 21: Funcionamento de um pêndulo eletrostático.

Entretanto, se o corpo de prova não tem carga resultante, não ocorrerá indução!

Para a utilização do pêndulo eletrostático, devemos seguir os seguintes passos:

Passo 1)

Sem a presença de qualquer corpo carregado, aterra-se o eletroscópio para garantir a neutralidade da esfera.

Passo 2)

Aproxima-se o corpo de prova do eletroscópio e verifica-se o comportamento:

- a) Nada ocorre: corpo de prova eletricamente neutro.
- b) Esfera atraída: corpo de prova eletricamente carregado.

Passo 3)

Caso o corpo de prova esteja carregado, carrega-se o eletroscópio com uma carga conhecida e caso ocorra:

- a) Atração: sinais opostos.
- b) Repulsão: mesmo sinal.

2.7.2. Eletroscópio de folhas

Eletroscópio de folhas, ou de lâminas, possui um corpo metálico preso a uma rolha de cortiça, acondicionado em um recipiente de vidro. Suas lâminas devem ser bastante finas, flexíveis e leves. Normalmente, utiliza-se folhas de vidro ou mesmo o papel-alumínio. O comportamento é similar ao do pêndulo simples, mas dessa vez devemos observar as folhas do eletroscópio. Se elas estiverem carregadas irão se repelir e abrir, se estiverem neutras pela ação da gravidade irão estar fechadas.

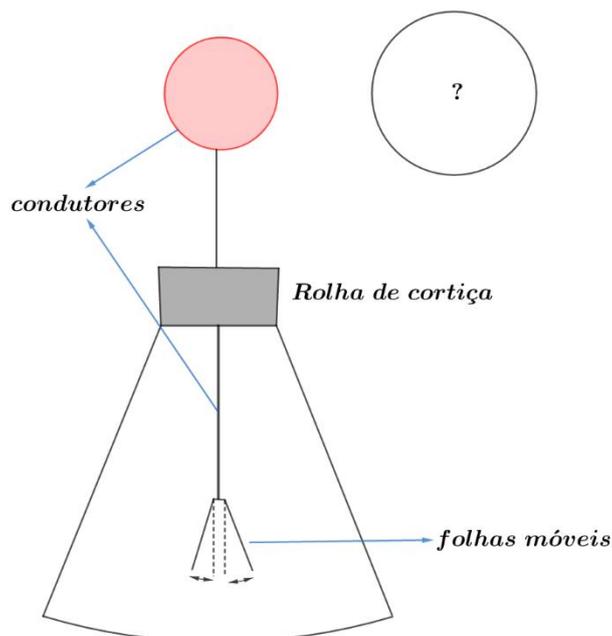


Figura 22: Eletroscópio de folhas.

Para a utilização do eletroscópio de folhas, devemos seguir os seguintes passos:

Passo 1)

Aterra-se, na ausência de qualquer corpo carregado, o eletroscópio para garantir sua **neutralidade** (folhas fechadas).

Passo 2)

Aproxima-se o corpo de prova do eletroscópio e observa-se o comportamento das folhas:

- a) Nada ocorre: corpo de prova neutro.
- b) Folhas se abrem: corpo de prova carregado.

Passo 3)

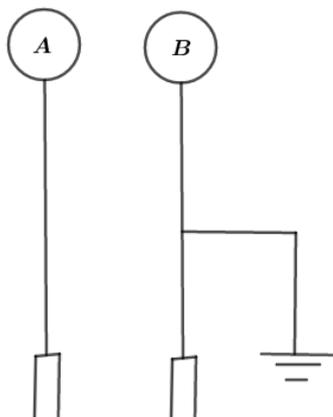
Caso o corpo de prova esteja carregado, carrega-se o eletroscópio com uma carga de sinal conhecido e repete-se o passo 2:

- a) Folhas **se fecham**: sinais opostos.
- b) Folhas **se abrem**: mesmo sinal.



3)

Dois eletroscópios de folhas A e B estão inicialmente neutros, sendo que B está ligado à terra, como mostra a figura:

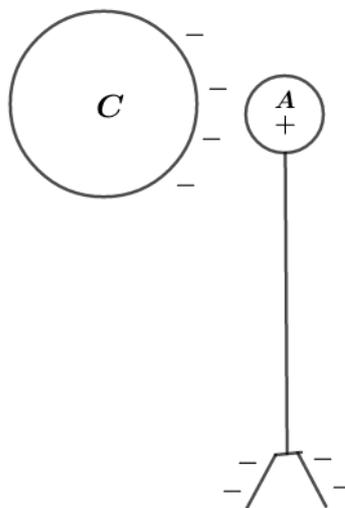


Um bastão de borracha C, carregado de cargas elétricas negativas, se aproxima de A. Um bastão de borracha D, carregado de cargas elétricas positivas, se aproxima de B. Nenhum dos bastões toca nos eletroscópios.

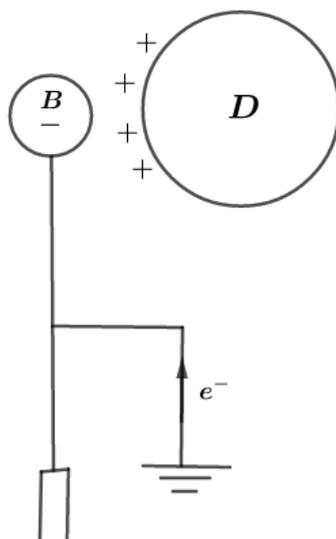
- a) O que acontece no eletroscópio A?
- b) O que acontece no eletroscópio B?

Comentários:

a) Quando o bastão C aproxima-se de A, ocorrerá indução e as lâminas se abrirão. A distribuição de cargas será:



b) Quando o bastão D aproxima-se de B, que está aterrado, ocorrerá indução, havendo subida de elétrons da terra para a esfera do eletroscópio. Assim, as lâminas de B permanecerão neutras e não se abrirão.





3.0. Lei de coulomb

Um corpo é considerado uma carga elétrica puntiforme quando a sua dimensão é desprezível quando comparada com a distância as outras medidas do problema.

Considere duas cargas puntiformes, colocadas em um certo meio, a uma distância d entre si. Queremos calcular o módulo da força elétrica entre elas.

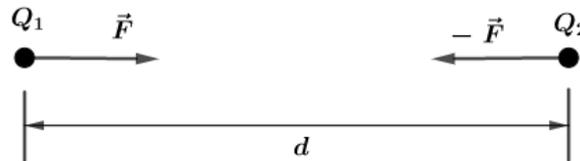


Figura 23: Força elétrica entre duas cargas puntiformes de sinais contrários.

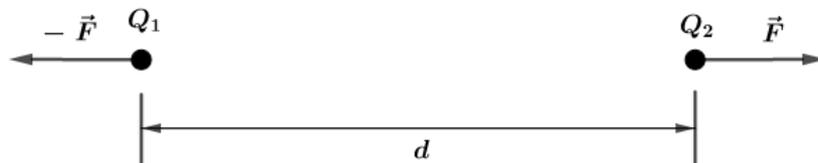


Figura 24: Força elétrica entre duas cargas puntiformes de mesmo sinal.

A direção de \vec{F} é a reta que une as duas cargas e o sentido é atrativo ou repulsivo dependendo dos sinais das cargas.

Note que \vec{F} e $-\vec{F}$ constituem um par Ação e Reação.

O módulo da força elétrica é dado pela Lei de Coulomb (lei experimental) que diz:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

A unidade das cargas é o coulomb (C) como já mencionamos e a unidade de distância é o metro (m).

Em primeira abordagem, ϵ é denominado permissividade do meio, uma constante física que depende do meio.

Para o vácuo, a permissividade elétrica é dada por:

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Define-se permissividade relativa ϵ_r ou constante dielétrica a relação entre a permissividade do meio e a do vácuo:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \text{ com } \epsilon_r \geq 1$$

Chamamos de constante eletrostática de um meio representado por k a seguinte grandeza:



$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

Para o vácuo, temos que:

$$K_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Dessa forma, a Lei de Coulomb pode ser escrita da seguinte forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

$$F = K \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

3.1. Princípio da superposição

Considere um sistema constituído de n cargas puntiformes q_1, q_2, \dots, q_n . podemos calcular a força elétrica resultante sobre uma carga Q aplicando o Princípio da Superposição. Este princípio diz que podemos calcular a contribuição de força de cada carga q_i com Q e depois somarmos vetorialmente:

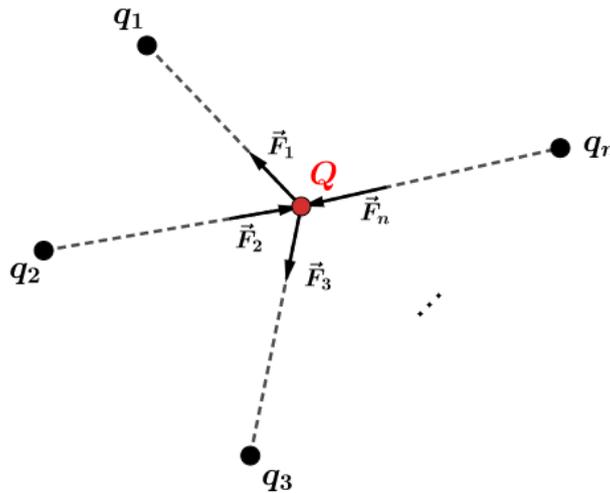


Figura 25: Princípio da Superposição aplicado à n cargas.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Ou ainda:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

3.2. Análise gráfica da lei de coulomb

Se adotarmos que k, Q_1 e Q_2 não se alteram, podemos escrever os seguintes esboços de gráficos de força e distância.

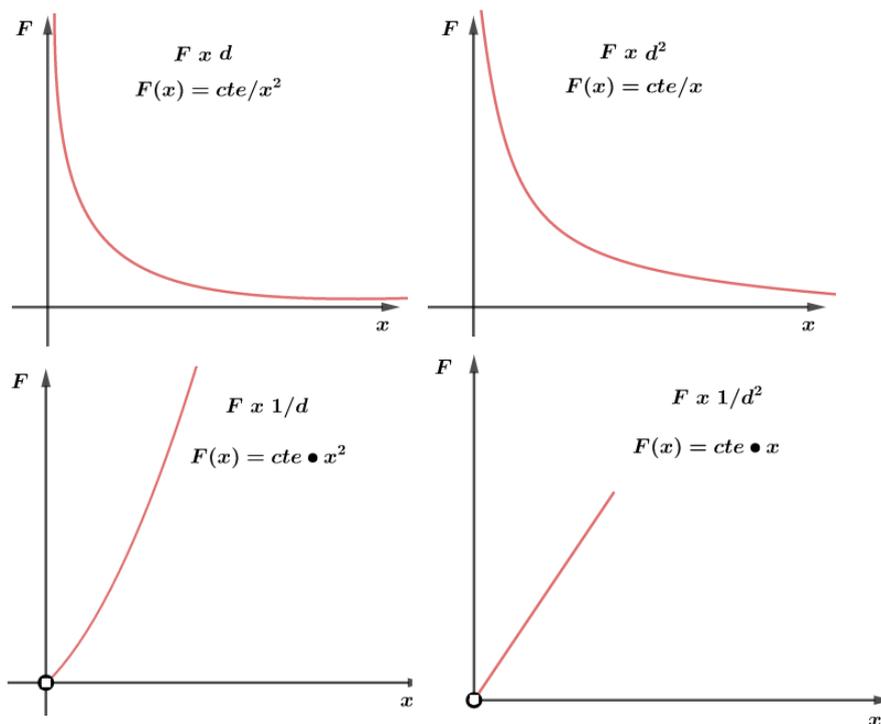


Figura 26: Possíveis gráfico da força pela distância.



4)

Considere duas cargas puntiformes q e Q , separadas por uma distância d , possuem força de atração de intensidade F . Calcule a nova força elétrica quando se duplica a primeira carga, divide a segunda por 3 e divide a distância por 3. Não se altera o meio das cargas.

Comentários:

De acordo com a mudança nas condições, temos que:

$$|Q_1|' = 2 \cdot |Q_1|$$

$$|Q_2|' = \frac{1}{3} \cdot |Q_2|$$

$$d' = \frac{1}{3} \cdot d$$

Logo, a nova força é dada por:

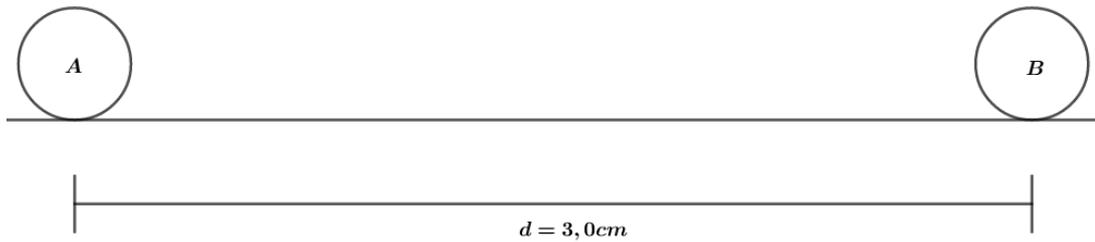
$$F' = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot F$$

$$\boxed{F' = 6 \cdot F}$$

5)

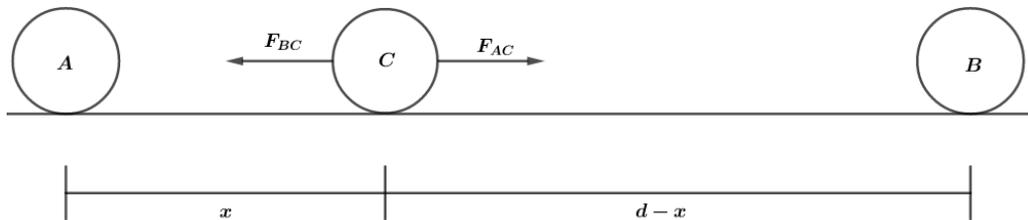


Duas cargas fixas A e B distam 3,0 cm uma da outra. As cargas valem $q_A = 1,0 \times 10^{-7} C$ e $q_B = 4,0 \times 10^{-7} C$. A que distância de A deve ser colocada uma terceira carga C (de mesma natureza elétrica que A e B) para ficar em equilíbrio entre A e B, apenas pela força elétrica em C?



Comentários:

Vamos dizer que a distância da carga C até a carga A é x , então teremos o seguinte diagrama de força na carga C na horizontal:



Para o equilíbrio da carga livre em C, temos que:

$$F_{BC} = F_{AC}$$

$$\frac{Kq_Bq_C}{(d-x)^2} = \frac{Kq_Aq_C}{x^2}$$

Dado que $q_B = 4q_A$, temos que:

$$\frac{4}{(d-x)^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$4x^2 = (d-x)^2$$

$$4x^2 - (d-x)^2 = 0$$

$$[2x - (d-x)][2x + d-x] = 0$$

$$(3x - d)(x - d) = 0$$

Dessa forma, temos que:

$$3x = d \text{ ou } x = d$$

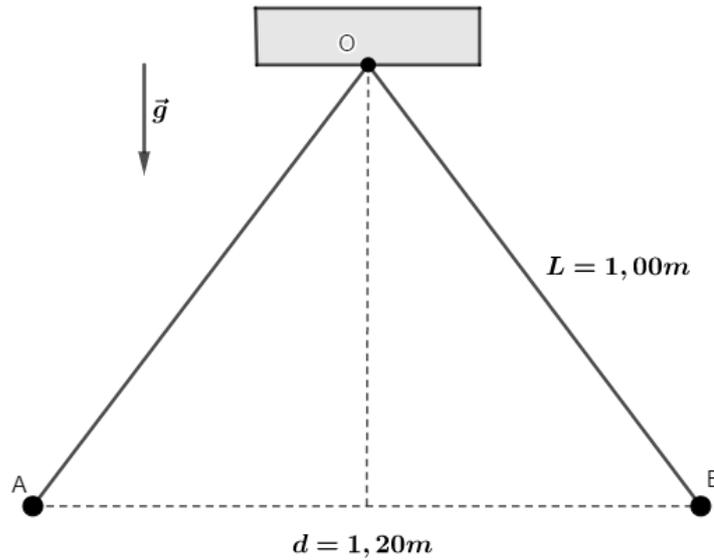
Mas, $x = d$ não convém. Logo, temos:

$$x = \frac{d}{3}$$

$$\boxed{x = 1,0 \text{ cm}}$$

6) (AFA)

Duas esferas condutoras idênticas muito pequenas, de mesma massa $m = 0,4 \text{ g}$, encontram-se no vácuo, suspensas por meio de dois fios leves, isolantes, de comprimentos iguais a $L = 1,00 \text{ m}$, presos a um mesmo ponto de suspensão O .



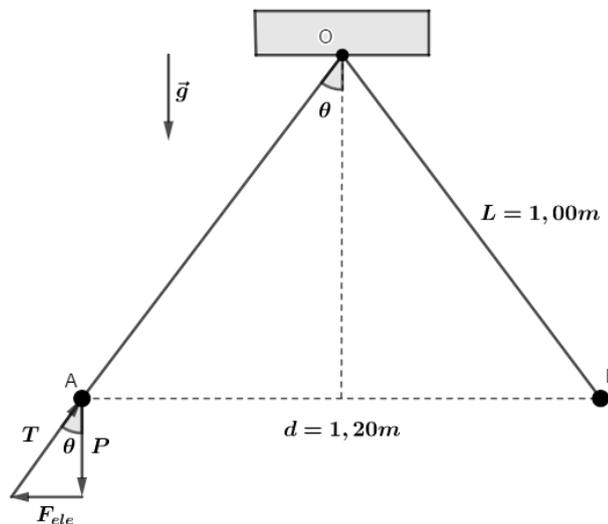
Estando as esferas separadas, eletriza-se uma delas com carga Q , mantendo-se a outra neutra. Em seguida, elas são colocadas em contato e, depois, abandonadas, verificando-se que na posição de equilíbrio a distância entre elas é $d = 1,20\text{ m}$. Considere $Q > 0$.

Nessa situação, o valor de Q é?

Dados: $g = 10\text{ m/s}^2$ e $K = 9 \times 10^9\text{ Nm}^2/\text{C}^2$

Comentários:

Para a determinação da carga Q , podemos analisar a posição de equilíbrio do corpo A. Para isso, vamos fazer o diagrama de forças de A:



Após o contato das esferas, cada esfera tem carga $Q/2$.

Pela geometria do problema, temos que:

$$\begin{aligned} \text{tg}\theta &= \frac{F_{ele}}{P} \\ \frac{0,6}{0,8} &= \frac{9 \times 10^9 \left(\frac{Q}{2}\right)\left(\frac{Q}{2}\right)}{4 \times 10^{-4} \cdot 10} \end{aligned}$$

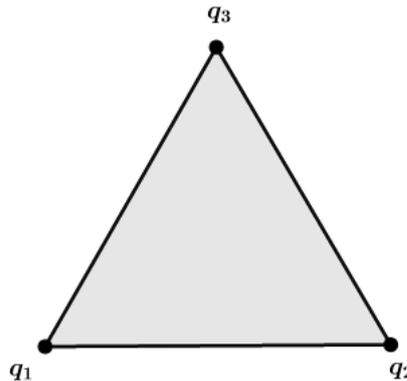


$$Q = 2 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 4 \times 10^{-4} \cdot 10 \cdot 1,2^2}{8 \cdot 9 \times 10^9}} = 2 \cdot \frac{2 \times 10^{-2} \cdot 1,2}{3 \times 10^4} \cdot \sqrt{\frac{6}{8}} = 1,38 \times 10^{-6} C$$

$$Q = 1,38 \mu C$$

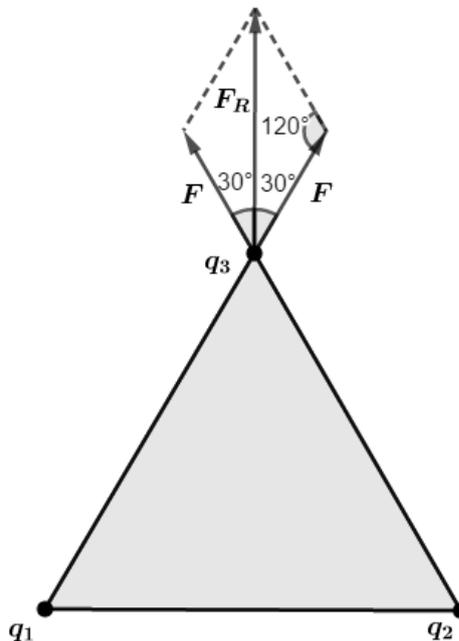
7)

Considere 3 cargas formando um triângulo equilátero. As três cargas são positivas e possuem módulos q . Qual a intensidade da força elétrica resultante em q_3 ?



Comentários:

Vamos fazer o diagrama de forças na carga q_3 :



Como o módulo das cargas é o mesmo e as distância entre elas também, a força de q_1 e q_3 é igual a força de q_2 e q_3 , sendo todas elas repulsivas.

Para determinar a força resultante, devemos calcular o vetor resultante das forças. Pela Lei dos Senos, temos que:

$$\frac{F_R}{\text{sen}(120^\circ)} = \frac{F}{\text{sen}(60^\circ)}$$

$$F_R = \sqrt{3}F$$



$$F_R = \frac{\sqrt{3}Kq^2}{d^2}$$

INDO MAIS
FUNDO!



3.4. Lei de coulomb para distribuições tridimensionais de cargas

Dada duas cargas puntiformes no espaço 3D, podemos escrever a Lei de Coulomb na forma vetorial:

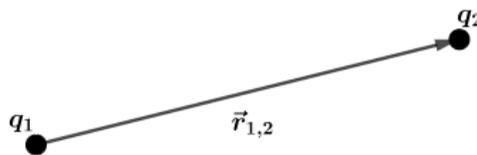


Figura 27: Cargas distribuídas no espaço.

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{kQ_1Q_2}{|\vec{r}_{1,2}|^3} \cdot \vec{r}_{1,2} \quad \text{ou} \quad \vec{F}_{1,2} = \frac{kQ_1Q_2}{|\vec{r}_{1,2}|^2} \cdot \hat{r}_{1,2}$$

Questões que envolvem a lei de Coulomb de forma vetorial são em geral bem trabalhosas e exigem bastante atenção. Somente veja o exemplo abaixo se você estiver muito bem em Vetores!

Exemplo: vamos calcular a força resultante na carga Q_1 , de acordo com a figura:

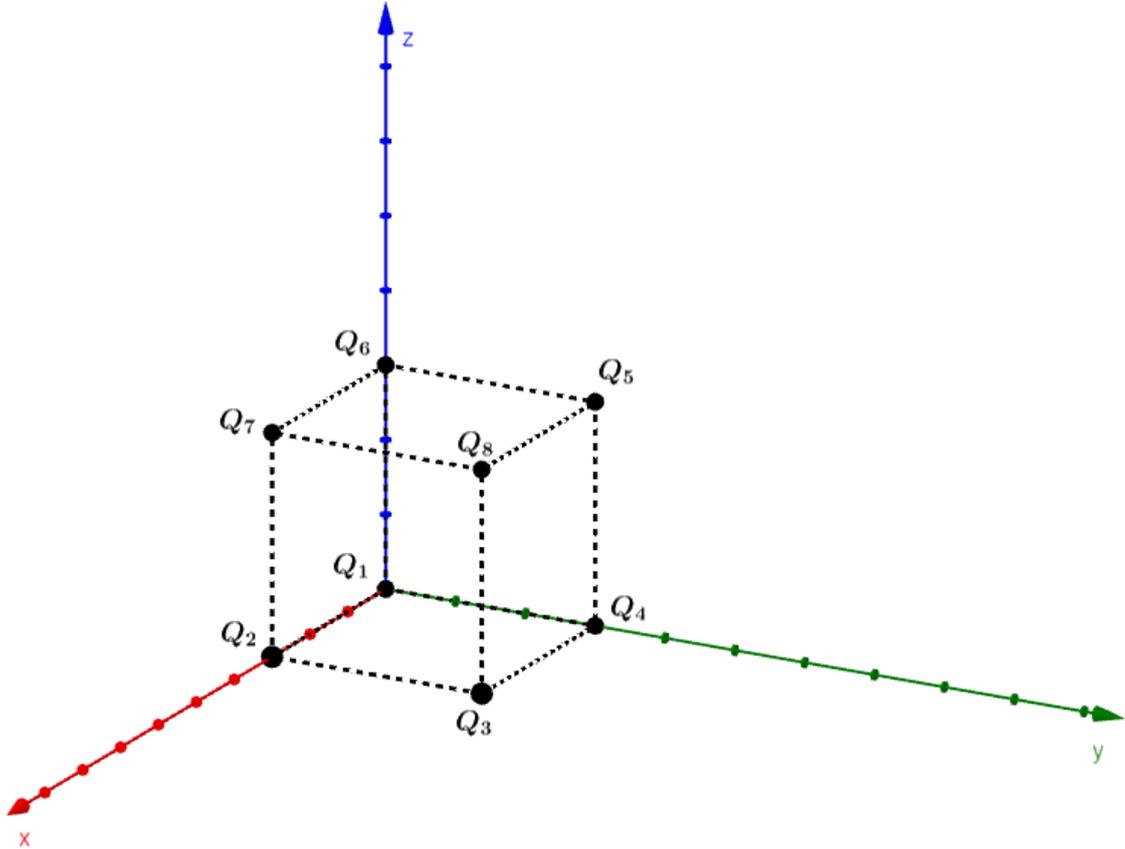


Figura 28: Cargas distribuídas nos vértices de um cubo.

$$Q_1 = Q_4 = Q_5 = Q_7 = +1\mu C \text{ e } Q_2 = Q_3 = Q_6 = Q_8 = -1\mu C$$

Posições:

$$p_1 = (0,0,0)m, \quad p_2 = (3,0,0)m, \quad p_3 = (3,3,0)m, \quad p_4 = (0,3,0)m, \quad p_5 = (0,3,3)m, \quad p_6 = (0,0,3)m, \quad p_7 = (3,0,3)m \text{ e } p_8 = (3,3,3)m.$$

Com essas informações, vamos calcular o vetor posição de cada carga em relação a Q_1 e a força elétrica:

- Para Q_1 e Q_2 :

$$\vec{r}_{1,2} = (3,0,0), \quad |\vec{r}_{1,2}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2} = 3m \quad \hat{r}_{1,2} = \frac{\vec{r}_{1,2}}{|\vec{r}_{1,2}|} = \left(\frac{3}{3}, \frac{0}{3}, \frac{0}{3}\right) = (1,0,0)$$

$$\vec{F}_{1,2} = -9 \times 10^9 \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}_{1,2}|^2} \cdot \hat{r}_{1,2} = 10^{-3}(1,0,0) N$$

Por simetria, temos que:

$$\vec{F}_{1,4} = 10^{-3}(0, -1, 0) N$$

$$\vec{F}_{1,6} = 10^{-3}(0, 0, 1) N$$

- Para Q_1 e Q_3 :

$$\vec{r}_{1,3} = (3,3,0), \quad |\vec{r}_{1,3}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = 3\sqrt{2}m$$

$$\hat{r}_{1,3} = \frac{\vec{r}_{1,3}}{|\vec{r}_{1,3}|} = \left(\frac{3}{3\sqrt{2}}, \frac{3}{3\sqrt{2}}, \frac{0}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$



$$\vec{F}_{1,3} = -9 \times 10^9 \cdot \frac{10^{-6} \cdot (-10^{-6})}{(3\sqrt{2})^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, 0 \right)$$

Por simetria, temos que:

$$\vec{F}_{1,5} = 10^{-3} \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) N$$

$$\vec{F}_{1,7} = 10^{-3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{4} \right) N$$

- Para Q_1 e Q_8 :

$$\vec{r}_{1,8} = (3,3,3), |\vec{r}_{1,8}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3} \text{ m } \hat{r}_{1,8} = \frac{\vec{r}_{1,8}}{|\vec{r}_{1,8}|} = \left(\frac{3}{3\sqrt{3}}, \frac{3}{3\sqrt{3}}, \frac{3}{3\sqrt{3}} \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$\vec{F}_{1,8} = 10^{-3} \left(\frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{9}, \frac{\sqrt{3}}{9} \right) N$$

Logo, a força resultante em Q_1 pode ser calculada pelo Princípio da Superposição:

$$\vec{F}_{R1} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{1,4} + \vec{F}_{1,5} + \vec{F}_{1,6} + \vec{F}_{1,7} + \vec{F}_{1,8}$$

$$\vec{F}_{R1} = 10^{-3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{9}, -1 + \frac{\sqrt{3}}{9}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{9} \right)$$

Repare que esse tratamento fica bem mais algébrico, não requerendo muita visão espacial, apenas aplicações de fórmulas. Essa é a grande vantagem de utilizar a Lei de Coulomb na forma vetorial.

Note que o sinal de menos na frente da constante eletrostática do meio corrige o sentido da força. Por isso, nessa forma **devemos levar em conta o sinal da carga** e não apenas o módulo da carga, como fazíamos antes quando nosso interesse era apenas o módulo da força elétrica.

4.0. Distribuições de cargas

4.1. Distribuições lineares – densidade linear de cargas

Considere um fio com distribuição linear de cargas, define-se **densidade linear de carga**, representado pela letra λ , como a carga por unidade de comprimento. Para um dado segmento de comprimento Δl , confinando uma carga Δq , podemos escrever que:

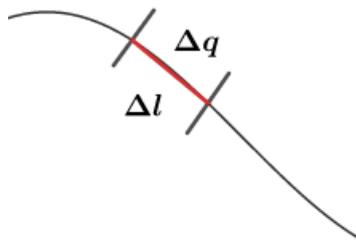


Figura 29: Distribuição de carga linear ao longo de um fio.

$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

Caso a densidade linear de cargas seja constante (distribuição uniforme):



$$\lambda = \frac{q}{l}$$

4.2. Distribuição superficial – densidade superficial de carga

Considere uma superfície com densidade superficial de cargas, define-se **densidade superficial de carga**, representado pela letra σ , como a carga por unidade de área. Para uma dada superfície ΔA , confinando uma carga Δq , podemos escrever que:

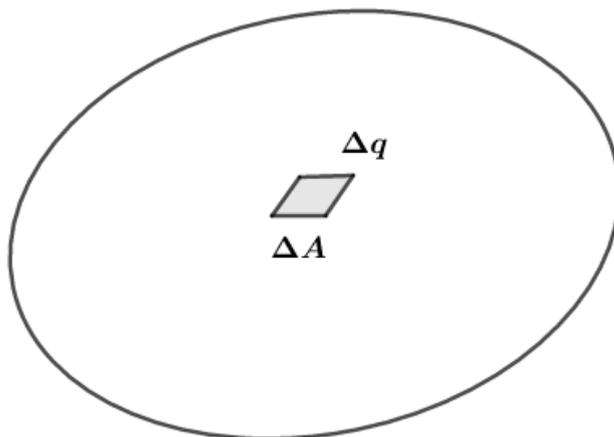


Figura 30: Distribuição de carga superficial ao longo de um plano.

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

Para distribuições uniformes, podemos escrever que:

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

4.3. Distribuição volumétrica – densidade volumétrica de carga

Analogamente aos casos anteriores, considere um volume com densidade volumétrica de cargas, define-se **densidade volumétrica de carga**, representado pela letra ρ , como a carga por unidade de volume. Para um dado volume ΔV , confinando uma carga Δq , podemos escrever que:

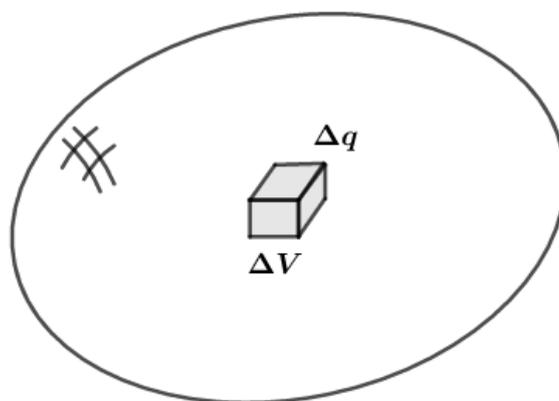


Figura 31: Distribuição de carga ao longo de um volume.



$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

Para distribuições uniformes, podemos escrever que:

$$\rho = \frac{q}{V}$$



INDO MAIS
FUNDO!



HORA DE
PRATICAR!

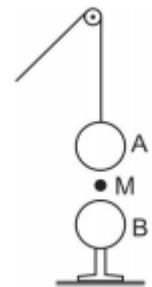


5.0. Lista de questões

5.1. Questões Propostas

1. (FUVEST – 1990)

Uma esfera condutora A, de peso P , eletrizada positivamente é presa a um fio isolante que passa por uma roldana. A esfera se aproxima de B, com velocidade constante, de uma esfera B, idêntica a interior, mas neutra isolada. A esfera A toca em B e, em seguida é puxada para cima, com velocidade também constante.

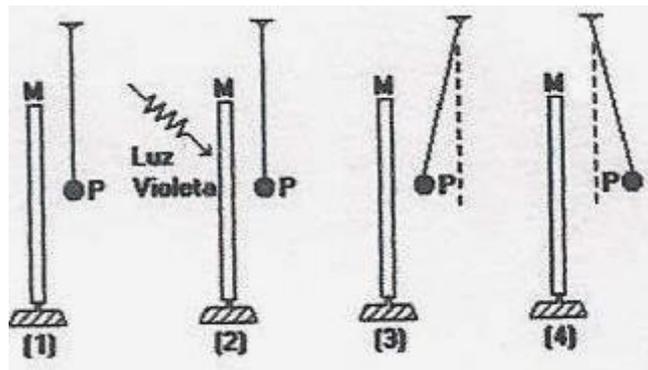


Quando A passa pelo ponto M, a tração no fio é T_1 na descida e T_2 na subida. Podemos afirmar que:

- a) $T_1 < T_2 < P$
- b) $T_1 < P < T_2$
- c) $T_2 < T_1 < P$
- d) $T_2 < P < T_1$
- e) $P < T_1 < T_2$

2. (FUVEST – 1993)

Dispõe-se de uma placa metálica M e de uma esferinha metálica P, suspensa por um fio isolante, inicialmente neutras e isoladas. Um feixe de luz violeta é lançado sobre a placa retirando partículas elementares da mesma. As figuras (1) a (4) adiante, ilustram o desenrolar dos fenômenos ocorridos.



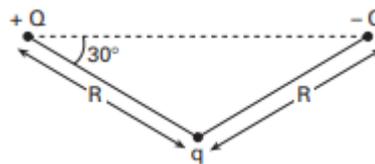
Podemos afirmar que na situação (4):

- a) M e P estão eletrizadas positivamente.
- b) M está negativa e P Neutra.
- c) M está neutra e P positivamente eletrizada
- d) M e P estão eletrizadas negativamente
- e) M e P foram eletrizadas por indução.

3. (FUVEST – 1996)

O Módulo F da força eletrostática entre duas cargas elétricas pontuais q_1 e q_2 , separadas por uma distância d , é $F = k \frac{|q_1||q_2|}{d^2}$ onde k é uma constante. Considere as três cargas pontuais representadas adiante por $+Q$, $-Q$ e q . o Módulo da força eletrostática total que age sobre a carga q será?

- a) $\frac{2kQq}{R^2}$
- b) $\frac{\sqrt{3}kQq}{R^2}$
- c) $\frac{kQ^2q}{R^2}$
- d) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQq}{R^2}$
- e) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQ^2q}{R^2}$



4. (FUVEST - 1996)

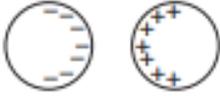
Aproximando-se uma barra eletrizada de duas esferas condutoras, inicialmente descarregadas e encostadas uma na outra, observa-se a distribuição de cargas esquematizada na figura abaixo.



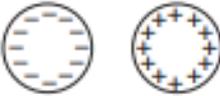


Em seguida, sem tirar do lugar a barra eletrizada, afasta-se um pouco uma esfera da outra. Finalmente, sem mexer mais nas esferas, remove-se a barra, levando-a para muito longe das esferas. Nessa situação final, a figura que melhor representa a distribuição de cargas nas duas esferas é:

a)



b)



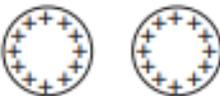
c)



d)

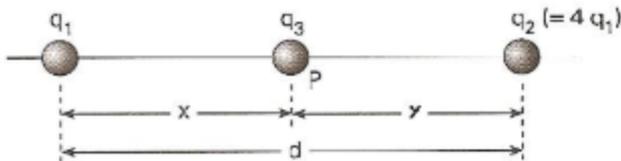


e)



5. (FUVEST – 1997)

Duas cargas pontuais positivas q_1 e $q_2 = 4q_1$ são fixadas a uma distância d uma da outra. uma terceira carga negativa q_3 é colocada no ponto P q_1 e q_2 , a uma distância x da carga q_1 , conforme mostra a figura.



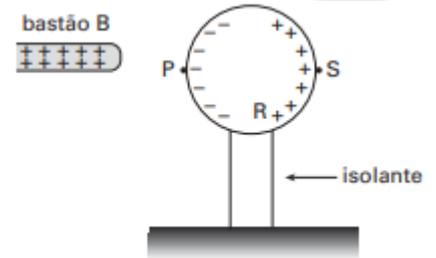
a) Calcule o valor de x para que a força eletrostática resultante sobre a carga q_3 seja nula.

b) Verifique se existe um valor de q_3 para o qual tanto a carga q_1 como a q_2 , permanecem em equilíbrio, nas posições do item a, sem a necessidade de nenhuma outra força além das eletrostáticas entre as cargas. Caso exista, calcule este valor q_3 .

6. (FUVEST – 1997)

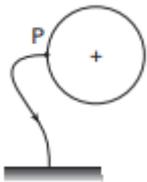


Quando se aproxima um bastão B, eletrizado positivamente, de uma esfera metálica, isolada e inicialmente descarregada, observa-se a distribuição de cargas representada na Figura 1.

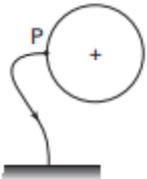


Mantendo o bastão na mesma posição, a esfera é conectada à terra por um fio condutor que pode ser ligado a um dos pontos P, R ou S da superfície da esfera. Indicando por (\rightarrow) o sentido do fluxo transitório (\emptyset) de elétrons (se houver) e por (+), (-) ou (0) o sinal da carga final (Q) da esfera, o esquema que representa \emptyset e Q é

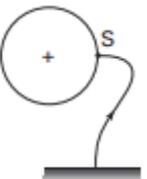
a)



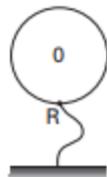
b)



c)



d)



e)

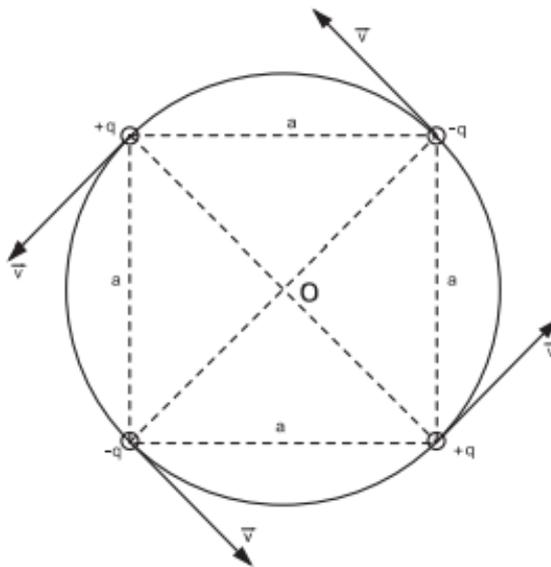


7. (FUVEST – 1998)

Quatro pequenas esferas de massa m , estão carregadas com cargas de mesmo valor absoluto q , sendo duas negativas e duas positivas, como mostra a figura. As esferas estão dispostas formando um quadrado de lado a e giram numa trajetória circular de centro O , no plano do quadrado, com velocidade de módulo constante v . Suponha que as únicas forças atuantes sobre as esferas são devidas à interação



eletrostática. A constante de permissividade elétrica é ϵ_0 . Todas as grandezas (dadas e solicitadas) estão em unidades SI.

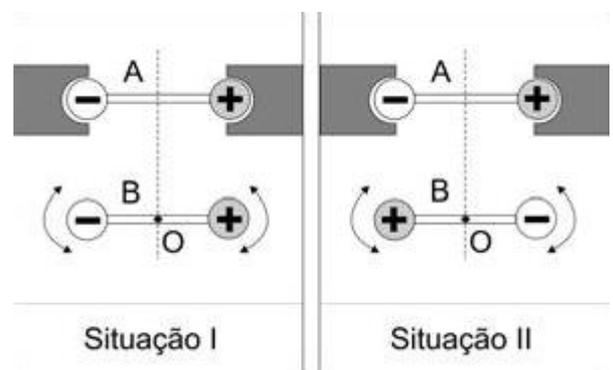


a) Determine a expressão do módulo da força eletrostática resultante \vec{F} que atua em cada esfera e indique sua direção.

b) Determine a expressão do módulo da velocidade tangencial \vec{v} das esferas.

8. (FUVEST – 2007)

Duas barras isolantes, A e B, iguais, colocadas sobre uma mesa, têm em suas extremidades, esferas com cargas elétricas de módulos iguais e sinais opostos. A barra A é fixa, mas a barra B pode girar livremente em torno de seu centro O, que permanece fixo. Nas situações I e II, a barra B foi colocada em equilíbrio, em posições opostas. Para cada uma dessas duas situações, o equilíbrio da barra B pode ser considerado como sendo, respectivamente,



SITUAÇÕES DE EQUILÍBRIO - após o sistema ser levemente deslocado de sua posição inicial.

Estável = tende a retornar ao equilíbrio inicial.

Instável = tende a afastar-se do equilíbrio inicial.

Indiferente = permanece em equilíbrio na nova posição.

a) indiferente e instável.

b) instável e instável.

c) estável e indiferente.

d) estável e estável.

e) estável e instável.

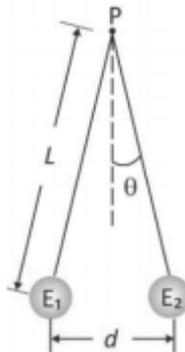


9. (FUVEST – 2018)

Um grupo de alunos, em uma aula de laboratório, eletriza um canudo de refrigerante por atrito, com um lenço de papel. Em seguida, com o canudo, eles eletrizam uma pequena esfera condutora, de massa 9 g , inicialmente neutra, pendurada em um fio de seda isolante, de comprimento L , preso em um ponto fixo P . No final do processo, a esfera e o canudo estão com cargas de sinais opostos.

a) Descreva as etapas do processo de eletrização da esfera.

Em seguida, os alunos colocam a esfera eletrizada (E_1) em contato com outra esfera (E_2), idêntica à primeira, eletricamente neutra e presa na extremidade de outro fio de seda isolante, também de comprimento L , fixo no ponto P . O sistema adquire a configuração ilustrada na figura, sendo $d = 8\text{ cm}$.



Para o sistema em equilíbrio nessa configuração final, determine:

b) o módulo da tensão \vec{T} em um dos fios isolantes;

c) o módulo da carga q_2 da esfera E_2 ;

d) a diferença N entre o número de elétrons e de prótons na esfera E_2 após a eletrização.

Note e adote:

Para a situação descrita, utilize: $\cos\theta \cong 1$ e $\text{sen}\theta \cong 0,1$.

Aceleração da gravidade: 10 m/s^2

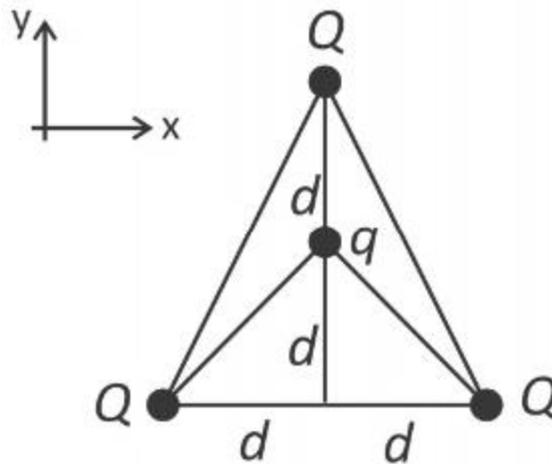
Força elétrica entre duas cargas puntiformes Q_1 e Q_2 distantes r uma da outra: $\frac{kQ_1Q_2}{r^2}$, onde $k = 9 \times 10^9\text{ Nm}^2/\text{C}^2$

Carga do elétron: $1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$.

Ignore a massa dos fios.

10. (FUVEST – 2019)

Três pequenas esferas carregadas com carga positiva Q ocupam os vértices de um triângulo, como mostra a figura. Na parte interna do triângulo, está afixada outra pequena esfera, com carga negativa q . As distâncias dessa carga às outras três podem ser obtidas a partir da figura.



Sendo $Q = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$, $q = -2 \times 10^{-5} \text{ C}$ e $d = 6 \text{ m}$, a força elétrica resultante sobre a carga q

Note e adote:

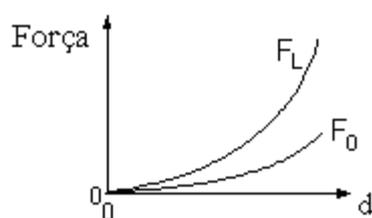
A constante k_0 da Lei de Coulomb vale $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

- a) é nula.
- b) tem direção do eixo y , sentido para baixo e módulo 1,8 N.
- c) tem direção do eixo y , sentido para cima e módulo 1,0 N.
- d) tem direção do eixo y , sentido para baixo e módulo 1,0 N.
- e) tem direção do eixo y , sentido para cima e módulo 0,3 N.

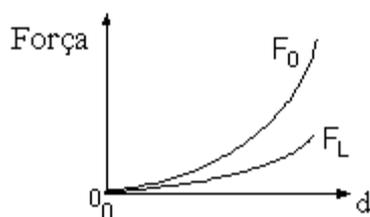
11. (UNESP – 1999)

A força elétrica entre duas pequenas partículas carregadas foi medida, em função da distância d entre elas, em dois meios diferentes, no vácuo e no interior de um líquido isolante. Assinale a alternativa que melhor representa o módulo da força medida no vácuo (F_0), comparada com o módulo da força medida no líquido (F_L), em função da distância d

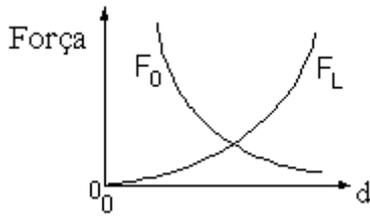
a)



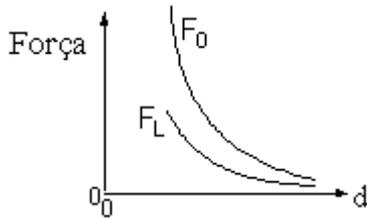
b)



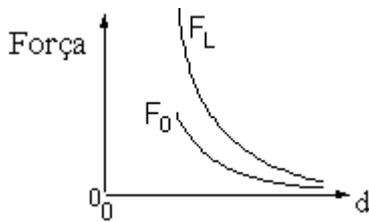
c)



d)



e)

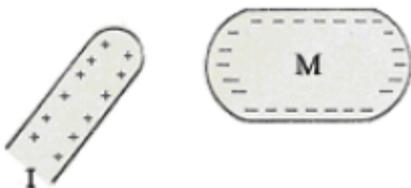


5.2. Questões Complementares

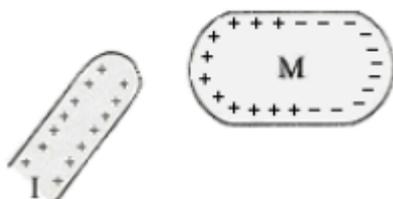
12. (ITA-1971)

Um corpo condutor (I) carregado é aproximado de um corpo metálico (M) descarregado. Qual das figuras abaixo dá uma distribuição de cargas induzidas no metal que é consistente com a posição relativa dos corpos (I) e (M)?

a)

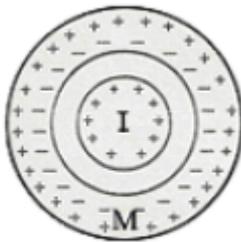


b)



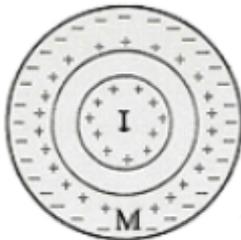


c)



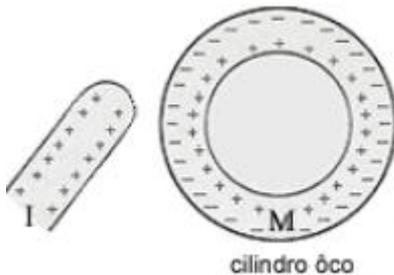
cilindro ôco

d)



cilindro ôco

e)



cilindro ôco

13.

Considere n esferas idênticas em que apenas a primeira esfera está eletrizada com uma carga Q . As outras estão eletricamente neutras. Determine o valor da carga desta esfera após o contato dela com cada uma das demais esferas.

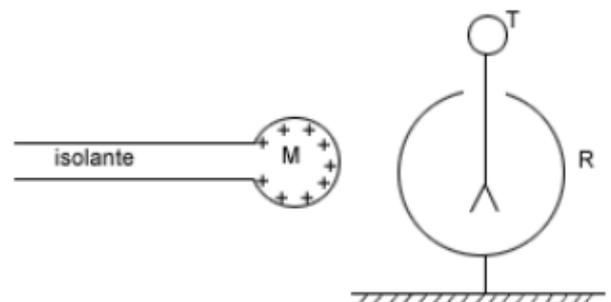
14. (ITA-1973)

Uma esfera metálica (M) é aproximada de um eletroscópio de folhas de alumínio, conforme o esquema abaixo. A carcaça metálica (R) do eletroscópio está em contato elétrico permanente com o solo.

Enquanto a esfera (M) está muito afastada do eletroscópio estabeleceu-se um contato elétrico transitório entre (T) e (R). Qual é a única afirmação correta em relação à experiência em apreço?

a) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar o terminal (T).

b) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar a carcaça (R).





- c) As folhas só abrirão se o contato elétrico entre (T) e (R) for mantido permanentemente.
- d) As folhas só abrirão se a carcaça (R) receber uma carga de mesmo valor, mas de sinal oposto ao da esfera (M).
- e) As folhas se abrirão à medida que (M) se aproxima de (T)

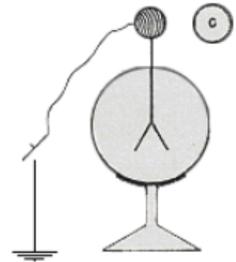
15. (ITA-1977)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices A e B de um triângulo retângulo isósceles. Sabe-se que a força elétrica resultante que atua sobre a carga localizada no vértice C do ângulo reto tem a mesma direção da reta AB. Aplicando-se a Lei de Coulomb a esta situação, conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em A e B são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
- b) As cargas localizadas nos pontos A e B têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
- c) As três cargas são de valores absolutos iguais.
- d) As cargas localizadas nos pontos A e B têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
- e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

16. (ITA-1983)

O eletroscópio da figura foi carregado positivamente. Aproxima-se então um corpo C carregado negativamente e liga-se o eletroscópio à Terra, por alguns instantes, mantendo-se o corpo C nas proximidades. Desfaz-se a ligação à Terra e a seguir afasta-se C.



No final, a carga do eletroscópio:

- a) Permanece positiva.
- b) Fica nula devido à ligação com a Terra.
- c) Torna-se negativa.
- d) Terá sinal que vai depender da maior ou menor aproximação de C.
- e) Terá sinal que vai depender do valor da carga em C.

17. (ITA-1984)

Uma partícula de massa $m = 10,0 \text{ g}$ e carga $q = -2,0 \times 10^{-6} \text{ C}$ é acoplada a uma mola de massa desprezível. Este conjunto é posto em oscilação e seu período medido é $T = 0,40\pi \text{ s}$. É fixada, a seguir, outra partícula de carga $q' = 0,20 \times 10^{-6} \text{ C}$ a uma distância d da posição de equilíbrio O do sistema massa-mola, conforme indica a figura.

É dado: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

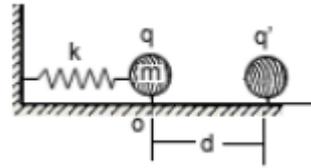
Obs.: considerar as duas cargas puntiformes.



O conjunto é levado lentamente até a nova posição de equilíbrio distante $x = 4,0 \text{ cm}$ da posição de equilíbrio inicial O .

O valor de d é:

- a) 56 cm.
- b) 64 cm.
- c) 60 cm.
- d) 36 cm.
- e) nenhuma das alternativas.



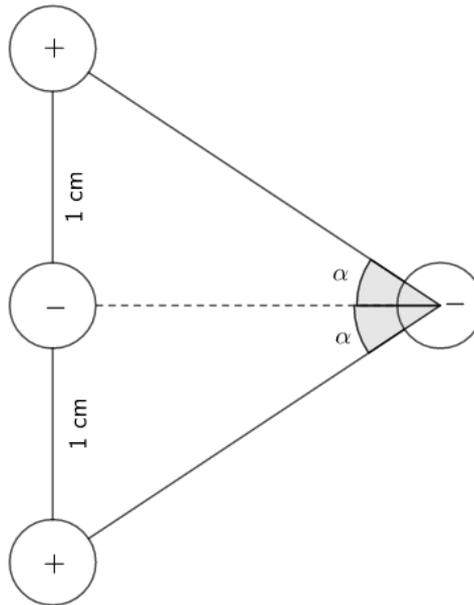
18. (IME – 84)

Um sistema de cargas elétricas puntiformes é constituído de quatro pequenas esferas de peso desprezível, dispostas na forma mostra na figura, dotadas das seguintes cargas elétricas:

$$Q_1 = Q_3 = 4 \times 10^{-11} \text{ C}$$

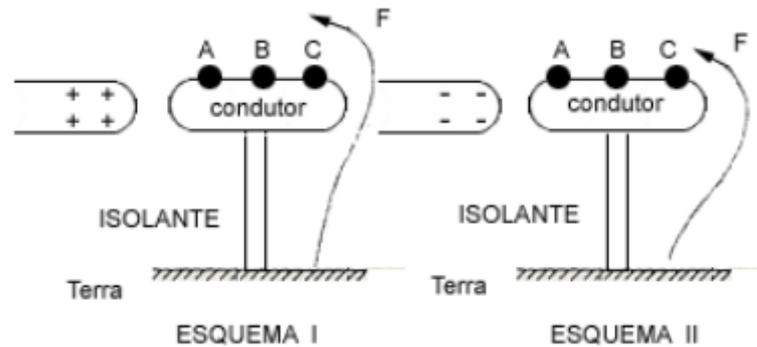
$$Q_2 = Q_4 = -10^{-11} \text{ C}$$

Determine o valor do ângulo α , diferente de zero, de posicionamento da esfera de carga Q_4 , de modo que a força atuante nessa carga seja nula.



19. (ITA-1988)

Deseja-se carregar negativamente um condutor metálico pelo processo de indução eletrostática. Nos esquemas I e II, o condutor foi fixado na haste isolante. F é um fio condutor que nos permite fazer o contato com a Terra nos pontos A, B e C do condutor.



Devemos utilizar:

a) O esquema I e ligar necessariamente F em C, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em A os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região C.

b) O esquema II e ligar necessariamente F em A, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em C os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região A.

c) Qualquer dos esquemas I ou II, desde que liguemos respectivamente em C e em A.

d) O esquema I, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.

e) O esquema II, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.

20. (ITA-1992)

Uma carga puntiforme $-Q_1$ de massa m percorre uma órbita circular de raio R em torno de outra carga puntiforme Q_2 , fixa no centro do círculo. A velocidade angular de $-Q_1$ é:

a) $\omega = \frac{4\pi\epsilon_0 Q_1 Q_2}{mR}$

b) $\omega = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$

c) $\omega = \left[\frac{Q_1 Q_2 R^3}{4\epsilon_0} \right]^2$

d) $\omega = \frac{mRQ_1}{4\pi\epsilon_0 Q_2}$

e) $\omega = \frac{mRQ_2}{4\pi\epsilon_0 Q_1}$

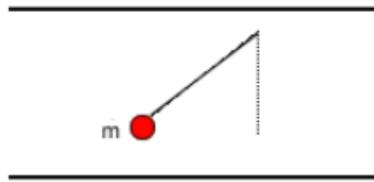
21. (ITA-1993)

Uma pequena esfera metálica de massa m , está suspensa por um fio de massa desprezível, entre as placas de um grande capacitor plano, como mostra a figura. Na ausência de qualquer carga, tanto no capacitor quanto na esfera, o período de oscilação da esfera é $T = 0,628$ s. Logo em seguida, eletriza-se a esfera com uma carga $+e$ e a placa superior do capacitor é carregada positivamente. Nessas novas



condições o período de oscilação da esfera torna-se $T = 0,314$ s. Qual é a intensidade da força que o campo elétrico do capacitor exerce sobre a esfera?

- a) $F = 3mg$
- b) $F = 2mg$
- c) $F = mg$
- d) $F = 6mg$
- e) $F = \frac{3mg}{2}$



22.

Duas cargas positivas $+q$ separadas por uma distância $2D$. No ponto médio do segmento que une as cargas coloca-se uma carga $-q$. Desloca-se $-q$ levemente da sua posição de equilíbrio, de tal forma que ela passa a oscilar em torno da posição de equilíbrio mantendo-se sobre a mediatriz do segmento que une as cargas $+q$. Determine o período da oscilação, considerando que a perturbação em $-q$ seja muito pequena. Todas as cargas têm massa m .

Adote: para ângulos pequenos vale a aproximação: $\text{sen} \alpha \cong \text{tg} \alpha \cong \alpha(\text{rad})$

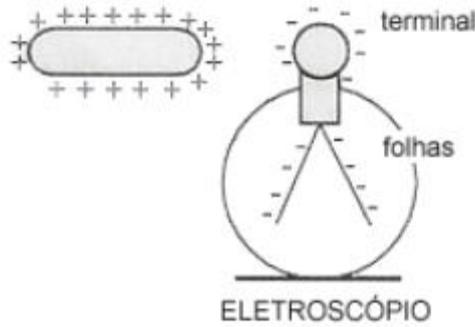
23. (ITA-1993)

Duas esferas condutoras, de massa m , bem pequenas, estão igualmente carregadas. Elas estão suspensas num mesmo ponto por dois fios de seda, de massas desprezíveis e de comprimentos iguais a L . As cargas das esferas são tais que elas estarão em equilíbrio quando a distância entre elas é igual a a ($a \ll L$). Num instante posterior, uma das esferas é descarregada. Qual será a nova distância b ($b < L$) entre as esferas, quando após se tocarem o equilíbrio entre elas for novamente restabelecido?

- a) $b = \frac{a}{2}$
- b) $b = a\sqrt{2}/2$
- c) $b = a\sqrt{3}/2$
- d) $b = a/\sqrt{2}$
- e) $b = a/\sqrt[3]{4}$

24. (ITA-1996)

Um objeto metálico carregado positivamente, com carga $+Q$, é aproximado de um eletroscópio de folhas, que foi previamente carregado negativamente com carga igual a $-Q$.



I) À medida que o objeto for se aproximando do eletroscópio, as folhas vão se abrindo além do que já estavam.

II) À medida que o objeto for se aproximando, as folhas permanecem como estavam.

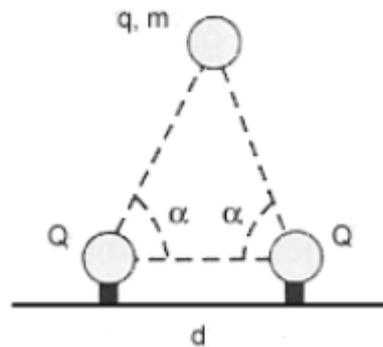
III) Se o objeto tocar no terminal externo do eletroscópio, as folhas devem necessariamente fechar-se.

- a) Somente a afirmativa I é correta.
- b) As afirmativas II e III são corretas.
- c) As afirmativas I e III são corretas.
- d) Somente a afirmativa III é correta.
- e) Nenhuma das afirmativas é correta.

25. (ITA-1997)

Uma pequena esfera de massa m e carga q , sob influência da gravidade e da interação eletrostática, encontra-se suspensa por duas cargas Q fixas, colocadas a uma distância d no plano horizontal, como mostrado na figura. Considere que a esfera e as cargas fixas estejam no mesmo plano vertical e que sejam iguais a os respectivos ângulos entre a horizontal e cada reta passando pelos centros das cargas fixas e da esfera. A massa da esfera é então:

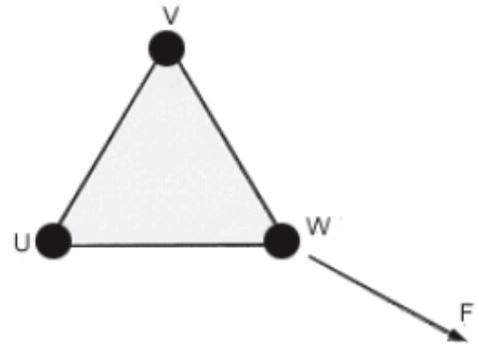
- a) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$
- b) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{g}$
- c) $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$
- d) $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \text{sen} \alpha}{g}$
- e) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha}{g}$



26. (ITA-1998)



Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices U, V e W de um triângulo equilátero. Suponha-se que a soma das cargas é nula e que a força sobre a carga localizada no vértice W é perpendicular à reta UV e aponta para fora do triângulo, como mostra a figura.



Conclui-se que:

- As cargas localizadas em U e V são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
- As cargas localizadas nos pontos U e V têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
- As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto, com uma delas de sinal diferente das demais.
- As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
- A configuração descrita é fisicamente impossível.

27. (ITA-1998)

Suponha que o elétron em um átomo de hidrogênio se movimenta em torno de um próton em uma órbita circular de raio R. Sendo m a massa do elétron e q o módulo da carga de ambos, elétron e próton, conclui-se que o módulo da velocidade do elétron é proporcional a:

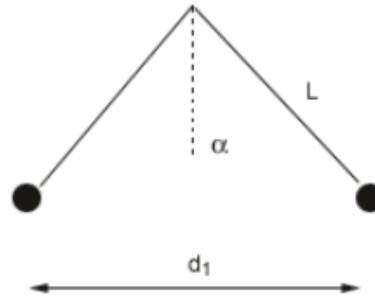
- $q \cdot \sqrt{\frac{R}{m}}$
- $\frac{q}{\sqrt{mR}}$
- $\frac{q}{m} \cdot \sqrt{R}$
- $\frac{qR}{\sqrt{m}}$
- $\frac{q^2 R}{\sqrt{m}}$

28. (ITA-2001)

Duas partículas têm massas iguais a m e cargas iguais a Q . Devido a sua interação eletrostática, elas sofrem uma força F quando separadas de uma distância d . Em seguida, estas partículas são penduradas de um mesmo ponto, por fios de comprimento L e ficam equilibradas quando a distância entre elas é d_1 . A cotangente do ângulo que cada fio forma com a vertical, em função de m, g, d, d_1, F e L , é:



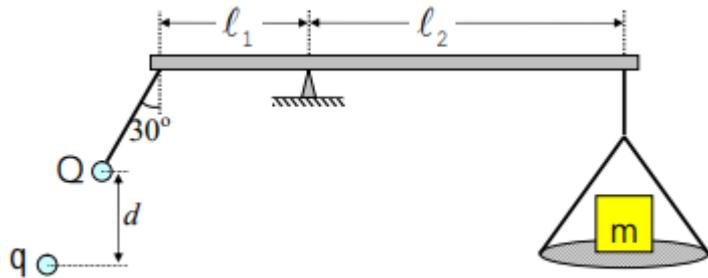
- a) $\frac{mgd_1}{Fd}$
- b) $\frac{mgLd_1}{Fd^2}$
- c) $\frac{mgd_1^2}{Fd^2}$
- d) $\frac{mgd^2}{Fd_1^2}$
- e) $\frac{Fd^2}{mgd_1^2}$



29. (ITA – 2010)

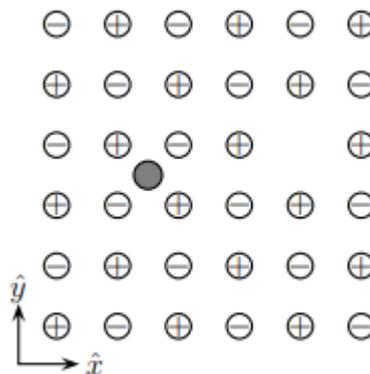
Considere uma balança de braços desiguais, de comprimentos l_1 e l_2 , conforme mostra a figura. No lado esquerdo encontra-se pendurada uma carga de magnitude Q e massa desprezível, situada a uma certa distância de outra carga, q . No lado direito encontra-se uma massa m sobre um prato de massa desprezível. Considerando as cargas como pontuais e desprezível a massa do prato da direita, o valor de q para equilibrar a massa m é dado por:

- A) $-mgl_2d^2/(k_0Ql_1)$
- B) $-8mgl_2d^2/(k_0Ql_1)$
- C) $-4mgl_2d^2/(3k_0Ql_1)$
- D) $-2mgl_2d^2/(\sqrt{3}k_0Ql_1)$
- E) $-8mgl_2d^2/(3\sqrt{3}k_0Ql_1)$



30. (ITA – 2014)

A figura mostra parte de uma camada de um cristal tridimensional infinito de sal de cozinha, em que a distância do átomo de Na ao de seu vizinho Cl é igual a a . Considere a existência dos seguintes defeitos neste cristal: ausência de um átomo de Cl e a presença de uma impureza de lítio (esfera cinza), cuja carga é igual à fundamental $+e$, situada no centro do quadrado formado pelos átomos de Na e Cl . Obtenha as componentes F_x e F_y da força eletrostática resultante $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y}$ que atua no átomo de lítio. Dê sua resposta em função de e , a e da constante de Coulomb K_0 .



31. (ITA – 2015)



Uma carga q ocupa o centro de um hexágono regular de lado d tendo em cada vértice uma carga idêntica q . Estando todas as sete cargas interligadas por fios inextensíveis, determine as tensões em cada um deles.

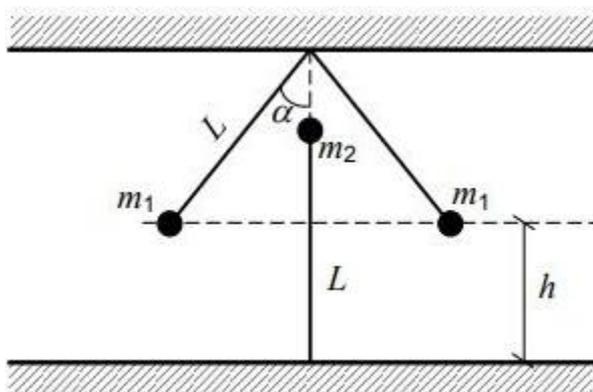
32. (ITA – 2015)

Considere um tubo horizontal cilíndrico de comprimento ℓ , no interior do qual encontram-se respectivamente fixadas em cada extremidade de sua geratriz inferior as cargas q_1 e q_2 , positivamente carregadas. Nessa mesma geratriz, numa posição entre as cargas, encontra-se uma pequena esfera em condição de equilíbrio, também positivamente carregada. Assinale a opção com as respostas corretas na ordem das seguintes perguntas:

- I. Essa posição de equilíbrio é estável?
 - II. Essa posição de equilíbrio seria estável se não houvesse o tubo?
 - III. Se a esfera fosse negativamente carregada e não houvesse o tubo, ela estaria em equilíbrio estável?
- A) Não. Sim. Não.
 B) Não. Sim. Sim.
 C) Sim. Não. Não.
 D) Sim. Não. Sim.
 E) Sim. Sim. Não.

33. (IME 2019 – 2ª fase)

A figura acima mostra um sistema em equilíbrio composto por três corpos presos por tirantes de comprimento L cada, carregados com cargas iguais a Q . Os corpos possuem massas m_1 e m_2 , conforme indicados na figura. Sabendo que o tirante conectado à massa m_2 não está tensionado, determine os valores de m_1 e m_2 em função de k e Q .



Dados:

constante dielétrica do meio: $k[Nm^2/C^2]$;

carga elétrica dos corpos: $Q [C]$;

comprimento dos tirantes: $L = 2 m$;



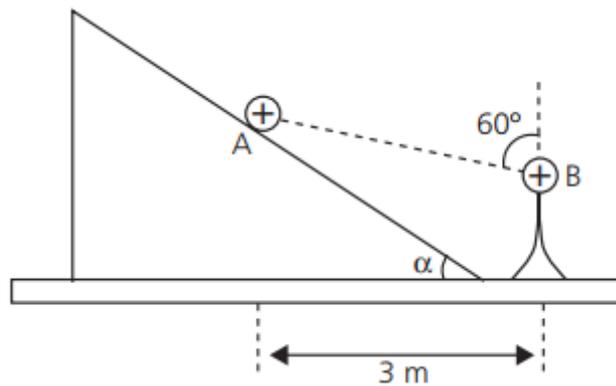
$$\text{altura: } h = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) m$$

$$\text{aceleração da gravidade: } g = 10 \text{ m/s}^2; \text{ e } \alpha = 30^\circ.$$



34.

Uma pequena esfera A1 de carga $+Q$ e massa m , encontra-se em repouso nas proximidades de um plano inclinado, quando dela é aproximada lentamente uma segunda esfera B, de carga $+Q$, fixa sobre um suporte isolante.



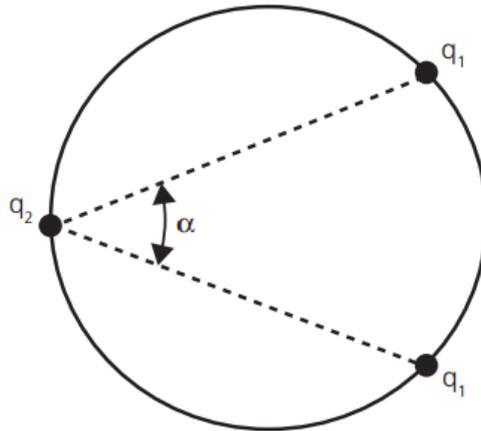
Devido à repulsão eletrostática, a esfera A desloca-se ao longo da rampa sem atrito, estacionando na posição ilustrada anteriormente. Determine o ângulo α .

Dados: Constante eletrostática = 9×10^9 (SI) $g = 10 \text{ m/s}^2$ $Q = 2mC, m = 0,3 \text{ g}$.

35.

Três cargas puntiformes podem mover-se vinculadas (sem atrito) a um aro circular apoiado num plano horizontal. Duas das cargas têm o mesmo valor q_1 e a terceira tem valor q_2 . Mostre que na posição de equilíbrio, temos que:

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{2(1 - \cos\alpha)^3}{\cos^2 \alpha}$$

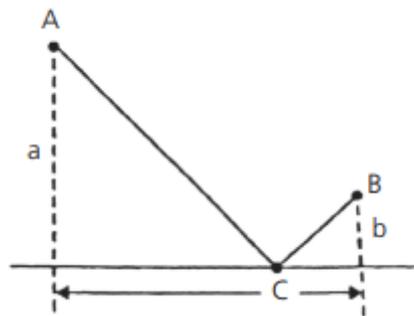


36.

Os pontos fixos A e B estão eletrizadas com carga $+Q$ cada um. O ponto C, eletrizado com carga $-Q$ pode deslizar livremente sob a guia retilínea e horizontal, perfeitamente lisa. Verifica-se que o ponto C fica em equilíbrio quando o segmento \overline{AC} é normal a \overline{BC} .

Demonstre que entre a, b e c vale a relação:

$$a^3 + b^3 = abc$$





GABARITO



6.0. Gabarito sem comentários

1) D

2) A

3) B

4) A

5) a) $x = \frac{d}{3}$ b) $q_3 = -\frac{4}{9}q_1$

6) E

7) a) $F_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$ b) $v = q\sqrt{\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m \cdot a} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]}$

8) E

9) a) descrição b) $T = 9 \times 10^{-2} N$ c) $|q_2| = 8 \times 10^{-8} C$ d) $N = 5 \times 10^{11}$

10) E

11) D

12) C

13) $Q_1 = \frac{Q}{2^{n-1}}$

14) E

15) A

16) A

17) B

18) $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

19) D

20) B

21) A

22) $T = 2\pi\sqrt{\frac{m\bar{d}^3}{2kq^2}}$

23) E

24) D

25) D

26) E

27) B

28) C



29) E

$$30) F_x = -\frac{20}{26\sqrt{26}} \cdot \frac{ke^2}{a^2} F_y = -\frac{4}{26\sqrt{26}} \cdot \frac{ke^2}{a^2}$$

$$31) T = \left(\frac{27+4\sqrt{3}}{12}\right) \cdot \frac{kQ^2}{d^2}$$

32) C

$$33) m_1 = \frac{(3+\sqrt{3})kQ^2}{40} \text{ e } m_2 = \frac{3kQ^2}{40}$$

34) $\alpha = 60^\circ$

$$35) \frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{2(1-\cos\alpha)^3}{\cos^2\alpha}$$

$$36) a^3 + b^3 = abc$$

GABARITO



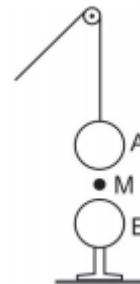
7.0. Lista de questões comentadas

7.1. Questões Propostas

1. (FUVEST – 1990)



Uma esfera condutora A, de peso P , eletrizada positivamente é presa a um fio isolante que passa por uma roldana. A esfera se aproxima de B, com velocidade constante, de uma esfera B, idêntica a interior, mas neutra isolada. A esfera A toca em B e, em seguida é puxada para cima, com velocidade também constante.



Quando A passa pelo ponto M, a tração no fio é T_1 na descida e T_2 na subida. Podemos afirmar que:

- a) $T_1 < T_2 < P$
- b) $T_1 < P < T_2$
- c) $T_2 < T_1 < P$
- d) $T_2 < P < T_1$
- e) $P < T_1 < T_2$

Comentários:

A esfera A induz carga de sentido oposto em B. Aplicando $F = ma$ ao corpo A na descida:

$$T_1 = P - \frac{kq_A(-q_A)}{d^2} = P + \frac{kq_A^2}{d^2} > P$$

Os corpos trocam carga no contato e, como são idênticos, adquirem a mesma carga final:

$$q = \frac{q_A + 0}{2} = \frac{q_A}{2}$$

Aplicando $F = ma$ ao corpo A na subida:

$$T_2 = P - \frac{kq_A^2}{4d^2} < P$$

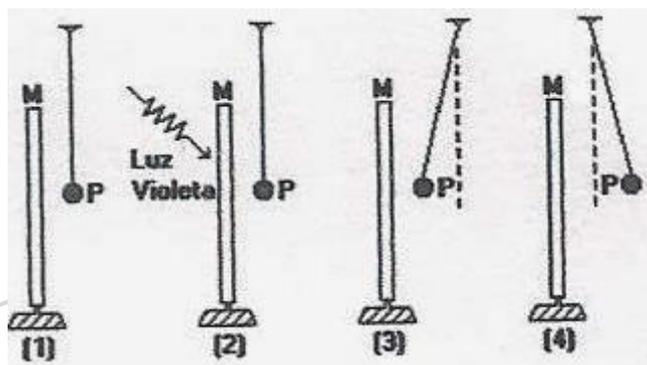
Logo:

$$T_2 < P < T_1$$

Gabarito: D

2. (FUVEST – 1993)

Dispõe-se de uma placa metálica M e de uma esferinha metálica P, suspensa por um fio isolante, inicialmente neutras e isoladas. Um feixe de luz violeta é lançado sobre a placa retirando partículas elementares da mesma. As figuras (1) a (4) adiante, ilustram o desenrolar dos fenômenos ocorridos.





Podemos afirmar que na situação (4):

- a) M e P estão eletrizadas positivamente.
- b) M está negativa e P Neutra.
- c) M está neutra e P positivamente eletrizada
- d) M e P estão eletrizadas negativamente
- e) M e P foram eletrizadas por indução.

Comentários:

Em (1) ambos os corpos estão neutros.

Em (2) as partículas retiradas são elétrons, assim *M* está negativamente carregado no seu lado esquerdo.

Em (3) *P* sofre indução de cargas negativas e é atraído até o contato com *M*, onde recebe parte de sua carga **positiva**.

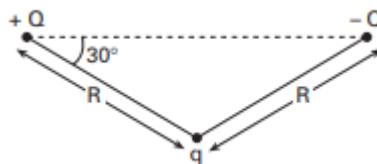
Em (4) os corpos são repelidos por apresentarem cargas de mesmo sinal.

Gabarito: A

3. (FUVEST – 1996)

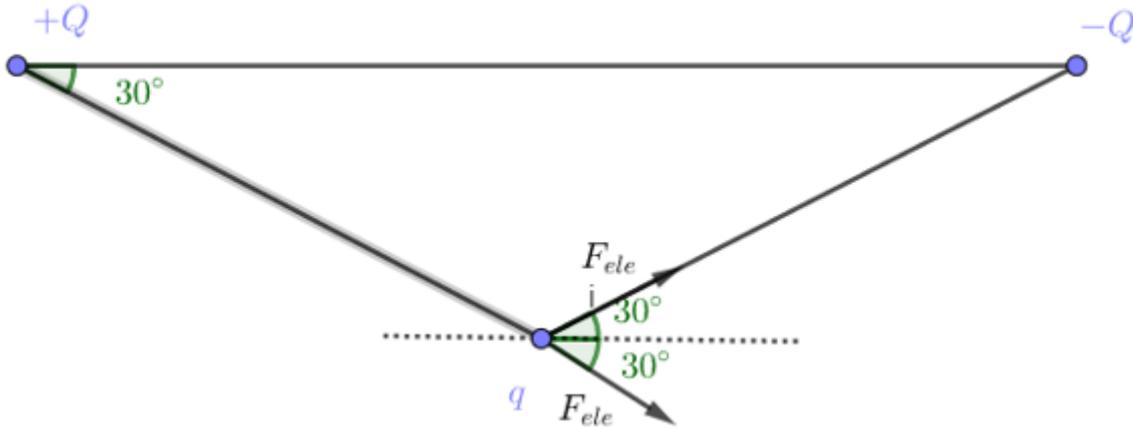
O Módulo *F* da força eletrostática entre duas cargas elétricas pontuais q_1 e q_2 , separadas por uma distância *d*, é $F = k \frac{|q_1||q_2|}{d^2}$ onde *k* é uma constante. Considere as três cargas pontuais representadas adiante por $+Q$, $-Q$ e q . o Módulo da força eletrostática total que age sobre a carga q será?

- a) $\frac{2kQq}{R^2}$
- b) $\frac{\sqrt{3}kQq}{R^2}$
- c) $\frac{kQ^2q}{R^2}$
- d) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQq}{R^2}$
- e) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQ^2q}{R^2}$



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças em *q*, temos que:



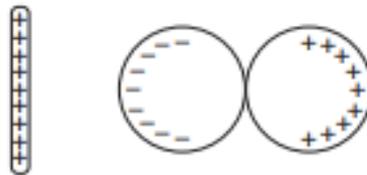
$$F_e = 2F \cos 30^\circ$$

$$F_e = \frac{\sqrt{3}kQq}{R^2}$$

Gabarito: B

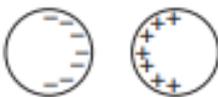
4. (FUVEST - 1996)

Aproximando-se uma barra eletrizada de duas esferas condutoras, inicialmente descarregadas e encostadas uma na outra, observa-se a distribuição de cargas esquematizada na figura abaixo.

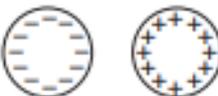


Em seguida, sem tirar do lugar a barra eletrizada, afasta-se um pouco uma esfera da outra. Finalmente, sem mexer mais nas esferas, remove-se a barra, levando-a para muito longe das esferas. Nessa situação final, a figura que melhor representa a distribuição de cargas nas duas esferas é:

a)



b)



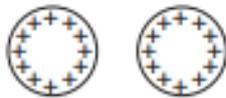
c)



d)



e)



Comentários:

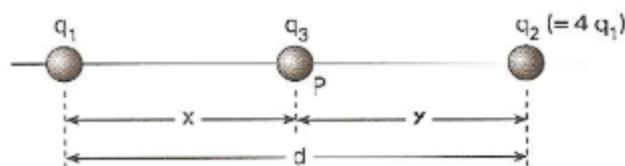
Enquanto as esferas estão em contato, logo, podemos considerá-las como um só condutor neutro, com distribuição não uniforme de cargas. Quando as esferas são separadas na presença desse desequilíbrio de cargas, resulta nessas mantendo as cargas que tinham logo antes da perda de contato. Assim, a esfera da esquerda possuirá carga negativa e a da direita positiva.

Essas cargas se atrairão, como mostrado em a).

Gabarito: A

5. (FUVEST – 1997)

Duas cargas pontuais positivas q_1 e $q_2 = 4q_1$ são fixadas a uma distância d uma da outra. uma terceira carga negativa q_3 é colocada no ponto P q_1 e q_2 , a uma distância x da carga q_1 , conforme mostra a figura.



a) Calcule o valor de x para que a força eletrostática resultante sobre a carga q_3 seja nula.

b) Verifique se existe um valor de q_3 para o qual tanto a carga q_1 como a q_2 , permanecem em equilíbrio, nas posições do item a, sem a necessidade de nenhuma outra força além das eletrostáticas entre as cargas. Caso exista, calcule este valor q_3 .

Comentários:

a) Aplicando $F_R = ma$ em q_3 ;

$$\frac{kq_1q_3}{x^2} = \frac{kq_3q_2}{y^2}$$

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{4q_1}{(d-x)^2}$$

$$\frac{d}{x} - 1 = 2$$

$$x = \frac{d}{3}$$

b) Pela terceira Lei de Newton sabemos que as forças que q_3 exerce em q_1 e q_2 são iguais em módulo, assim basta analisarmos uma dessas cargas. Aplicando $F_R = ma$ a q_1 :



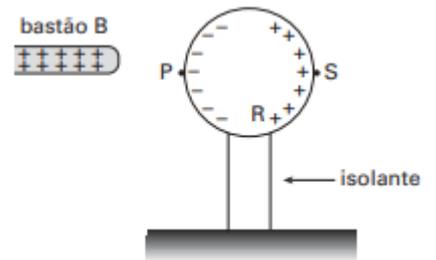
$$\frac{kq_1q_3}{x^2} = \frac{kq_1q_2}{d^2}$$

$$q_3 = \frac{4}{9}q_1$$

Gabarito: a) $x = \frac{d}{3}$ b) $q_3 = -\frac{4}{9}q_1$

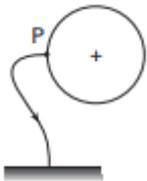
6. (FUVEST – 1997)

Quando se aproxima um bastão B, eletrizado positivamente, de uma esfera metálica, isolada e inicialmente descarregada, observa-se a distribuição de cargas representada na Figura 1.

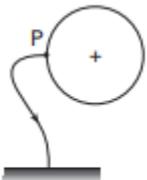


Mantendo o bastão na mesma posição, a esfera é conectada à terra por um fio condutor que pode ser ligado a um dos pontos P, R ou S da superfície da esfera. Indicando por (\rightarrow) o sentido do fluxo transitório (\emptyset) de elétrons (se houver) e por (+), (-) ou (0) o sinal da carga final (Q) da esfera, o esquema que representa \emptyset e Q é

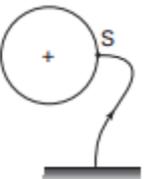
a)



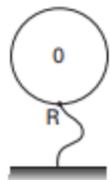
b)



c)



d)



e)



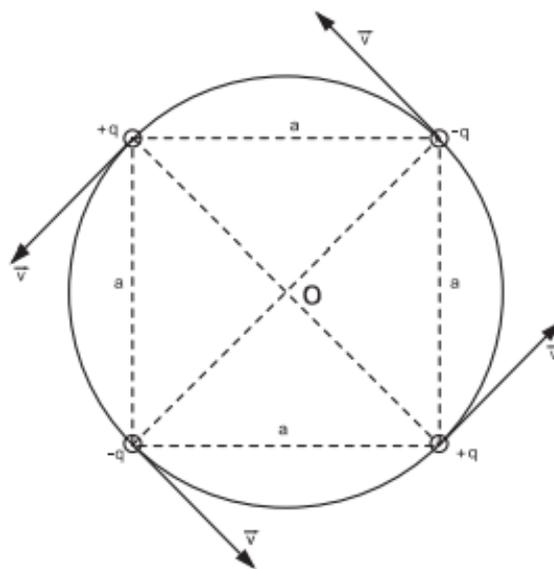
Comentários:

Antes de ser ligada à terra a esfera metálica não acumulava mais carga negativa no seu lado esquerdo devido à repulsão entre as cargas de mesmo sinal, em ambos os seus lados. Ao ser ligada à terra, mais carga negativa pôde ser trazida que não fosse de uma região saturada de cargas positivas (lado direito da esfera).

Gabarito: E

7. (FUVEST – 1998)

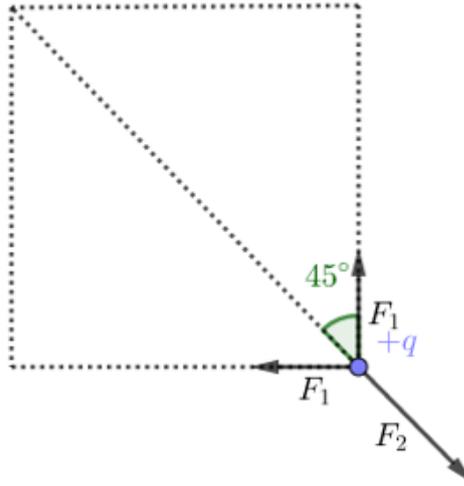
Quatro pequenas esferas de massa m , estão carregadas com cargas de mesmo valor absoluto q , sendo duas negativas e duas positivas, como mostra a figura. As esferas estão dispostas formando um quadrado de lado a e giram numa trajetória circular de centro O , no plano do quadrado, com velocidade de módulo constante v . Suponha que as únicas forças atuantes sobre as esferas são devidas à interação eletrostática. A constante de permissividade elétrica é ϵ_0 . Todas as grandezas (dadas e solicitadas) estão em unidades SI.



- a) Determine a expressão do módulo da força eletrostática resultante \vec{F} que atua em cada esfera e indique sua direção.
- b) Determine a expressão do módulo da velocidade tangencial \vec{v} das esferas.

Comentários:

a) Diante da simetria da questão, a resultante em cada carga terá o mesmo módulo. Assim, escolhendo qualquer uma das cargas, temos o seguinte diagrama de forças:



Considerando a figura acima, podemos concluir que a força resultante está na direção radial:

$$F_{ele} = 2F_1 \cos 45^\circ - F_2$$

$$F_{ele} = \frac{\sqrt{2}kq^2}{a^2} - \frac{kq^2}{(a\sqrt{2})^2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{kq^2}{a^2}$$

b) Aplicando $F = ma$ a uma carga q :

$$F_{ele} = ma_{cent}$$

$$\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{kq^2}{a^2} = \frac{mv^2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

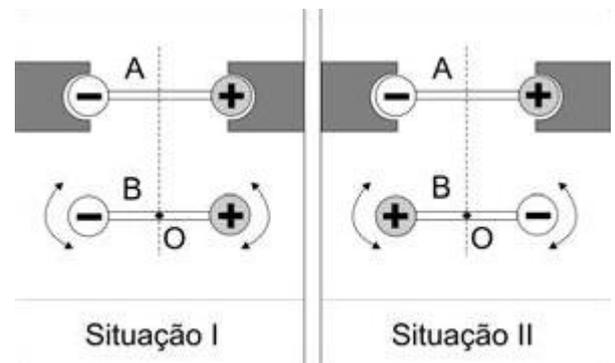
$$v = \sqrt{\frac{kq^2}{ma} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

Onde $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Gabarito: a) $F_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$ b) $v = q \sqrt{\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m \cdot a} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]}$

8. (FUVEST – 2007)

Duas barras isolantes, A e B, iguais, colocadas sobre uma mesa, têm em suas extremidades, esferas com cargas elétricas de módulos iguais e sinais opostos. A barra A é fixa, mas a barra B pode girar livremente em torno de seu centro O, que permanece fixo. Nas situações I e II, a barra B foi colocada em equilíbrio, em posições opostas. Para cada uma dessas duas situações, o equilíbrio da barra B pode ser considerado como sendo, respectivamente,



SITUAÇÕES DE EQUILÍBRIO - após o sistema ser levemente deslocado de sua posição inicial.



Estável = tende a retornar ao equilíbrio inicial.

Instável = tende a afastar-se do equilíbrio inicial.

Indiferente = permanece em equilíbrio na nova posição.

a) indiferente e instável.

b) instável e instável.

c) estável e indiferente.

d) estável e estável.

e) estável e instável.

Comentários:

Situação I: Estável

Considere um pequeno deslocamento de B no sentido horário. As cargas negativas ficarão mais próximas e as positivas mais distantes, assim a força agindo do lado esquerdo ficará maior que a força do lado direito (ambas direcionadas para baixo) gerando torque de sentido anti-horário, favorecendo o retorno à posição de equilíbrio horizontal.

Situação II: Instável

Considere um pequeno deslocamento de B no sentido horário. As cargas do lado esquerdo ficarão mais próximas e as do lado direito mais distantes, assim a força agindo do lado esquerdo ficará maior que a força do lado direito (ambas direcionadas para cima) gerando torque de sentido horário, favorecendo o afastamento em relação à posição de equilíbrio horizontal.

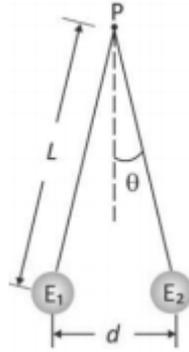
Gabarito: E

9. (FUVEST – 2018)

Um grupo de alunos, em uma aula de laboratório, eletriza um canudo de refrigerante por atrito, com um lenço de papel. Em seguida, com o canudo, eles eletrizam uma pequena esfera condutora, de massa 9 g , inicialmente neutra, pendurada em um fio de seda isolante, de comprimento L , preso em um ponto fixo P . No final do processo, a esfera e o canudo estão com cargas de sinais opostos.

a) Descreva as etapas do processo de eletrização da esfera.

Em seguida, os alunos colocam a esfera eletrizada (E_1) em contato com outra esfera (E_2), idêntica à primeira, eletricamente neutra e presa na extremidade de outro fio de seda isolante, também de comprimento L , fixo no ponto P . O sistema adquire a configuração ilustrada na figura, sendo $d = 8\text{ cm}$.



Para o sistema em equilíbrio nessa configuração final, determine:

- b) o módulo da tensão \vec{T} em um dos fios isolantes;
- c) o módulo da carga q_2 da esfera E_2 ;
- d) a diferença N entre o número de elétrons e de prótons na esfera E_2 após a eletrização.

Note e adote:

Para a situação descrita, utilize: $\cos\theta \cong 1$ e $\text{sen}\theta \cong 0,1$.

Aceleração da gravidade: 10 m/s^2

Força elétrica entre duas cargas puntiformes Q_1 e Q_2 distantes r uma da outra: $\frac{kQ_1Q_2}{r^2}$, onde $k = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

Carga do elétron: $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Ignore a massa dos fios.

Comentários:

a) Primeiramente o canudo foi trazido próximo à esfera, induzindo uma carga de sinal oposto à sua na superfície mais próxima da esfera. Após isso, ligou-se a esfera à terra, de modo que a esfera recebesse cargas de sinal oposto às do canudo. Por fim, quebrou-se a conexão da esfera com a terra e afastou-se o canudo.

b) Aplicando $F = ma$ a uma das cargas:

$$T = F_{ele} \text{sen } \theta + mg \quad (\text{eq. 1})$$

$$F_{ele} = mg \text{sen } \theta \quad (\text{eq. 2})$$

De (1) e (2), temos:

$$T = mg(1 + \text{sen}^2 \theta) \approx mg$$

c) Quando as esferas estão em contato a carga é distribuída entre elas de forma igual. ($q_1 = q_2 = q$)

Por (2), temos:

$$\frac{kq^2}{d^2} = mg \text{sen } \theta$$

$$q = d \sqrt{\frac{mg \text{sen } \theta}{k}}$$



d) Temos:

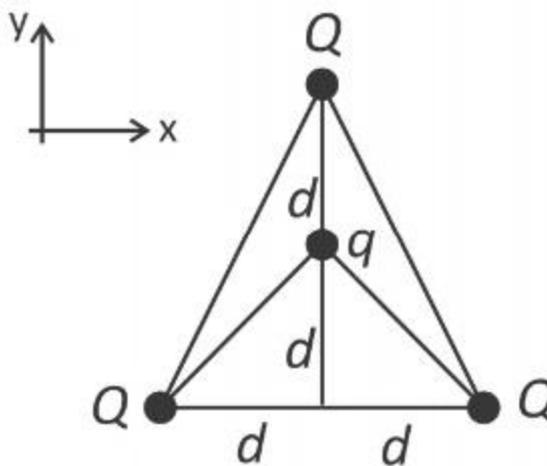
$$q = eN \Rightarrow N = \frac{q}{e}$$

Basta substituir os valores em questão.

Gabarito: a) descrição b) $T = 9 \times 10^{-2} N$ c) $|q_2| = 8 \times 10^{-8} C$ d) $N = 5 \times 10^{11}$

10. (FUVEST – 2019)

Três pequenas esferas carregadas com carga positiva Q ocupam os vértices de um triângulo, como mostra a figura. Na parte interna do triângulo, está afixada outra pequena esfera, com carga negativa q . As distâncias dessa carga às outras três podem ser obtidas a partir da figura.



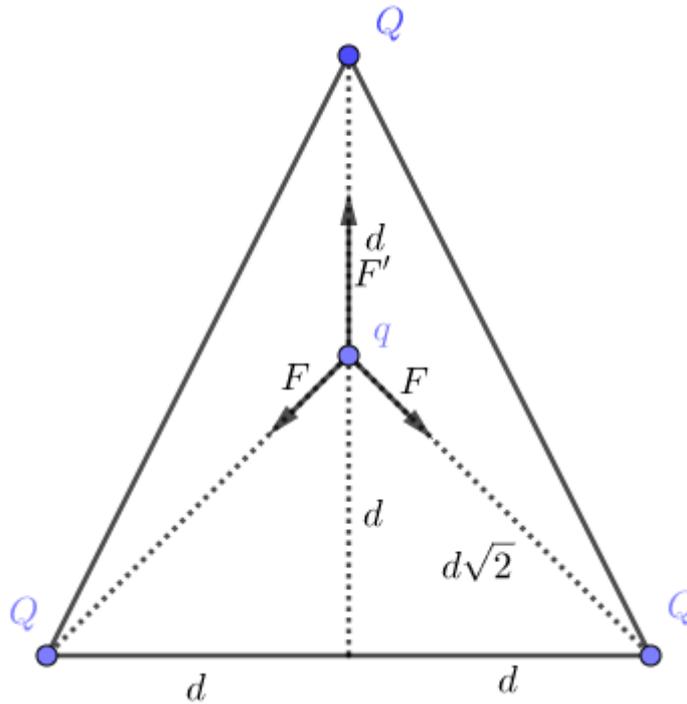
Sendo $Q = 2 \times 10^{-4} C$, $q = -2 \times 10^{-5} C$ e $d = 6 m$, a força elétrica resultante sobre a carga q

Note e adote:

A constante k_0 da Lei de Coulomb vale $9 \times 10^9 Nm^2/C^2$

- a) é nula.
- b) tem direção do eixo y , sentido para baixo e módulo 1,8 N.
- c) tem direção do eixo y , sentido para cima e módulo 1,0 N.
- d) tem direção do eixo y , sentido para baixo e módulo 1,0 N.
- e) tem direção do eixo y , sentido para cima e módulo 0,3 N.

Comentários:



A resultante das forças está na vertical. Consideraremos o sentido para cima como positivo:

$$F_{ele} = F' - 2F \cos 45^\circ$$

$$F_{ele} = k \frac{qQ}{d^2} - \sqrt{2}k \frac{qQ}{(d\sqrt{2})^2}$$

$$F_{ele} = k \frac{qQ}{d^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) > 0 (\text{para cima})$$

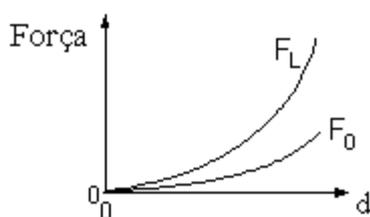
$$F_{ele} = \frac{9 \times 10^9 \cdot 2 \times 10^{-4} \cdot 2 \times 10^{-5}}{6^2} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cong 0,3 \text{ N}$$

Gabarito: E

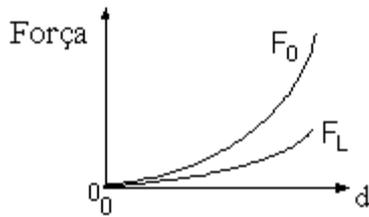
11. (UNESP – 1999)

A força elétrica entre duas pequenas partículas carregadas foi medida, em função da distância d entre elas, em dois meios diferentes, no vácuo e no interior de um líquido isolante. Assinale a alternativa que melhor representa o módulo da força medida no vácuo (F_0), comparada com o módulo da força medida no líquido (F_L), em função da distância d

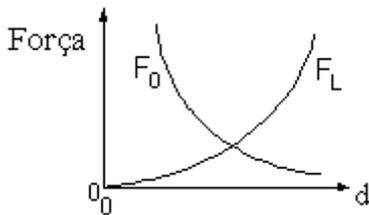
a)



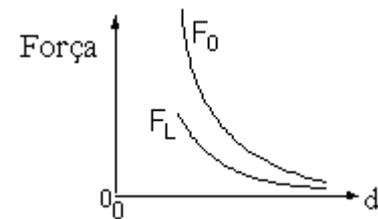
b)



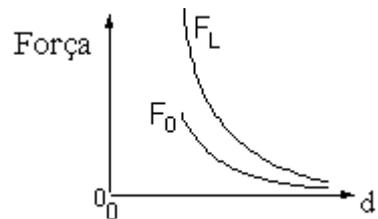
c)



d)



e)



Comentários:

Quando analisamos a Lei de Coulomb a mudança de meio afeta diretamente na constante eletrostática do meio $K = \frac{1}{4\pi\epsilon}$. Para o vácuo temos que ϵ_0 é o menor possível. No líquido, podemos dizer que $\epsilon = k \cdot \epsilon_0, k \geq 1$. Então, $K_0 \geq K_{Liq}$. Portanto, $F_0 \geq F_{Liq}$.

O entendimento da constante eletrostática do meio ficará mais clara quando estudarmos o dielétrico de um meio, cenas dos próximos capítulos.

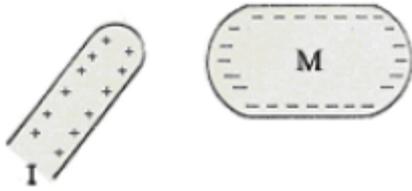
Gabarito: D

7.2. Questões Complementares

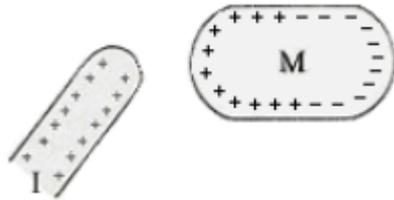
12. (ITA-1971)

Um corpo condutor (I) carregado é aproximado de um corpo metálico (M) descarregado. Qual das figuras abaixo dá uma distribuição de cargas induzidas no metal que é consistente com a posição relativa dos corpos (I) e (M)?

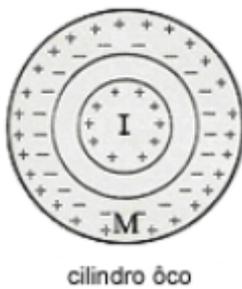
a)



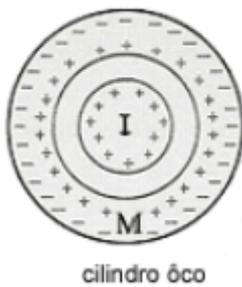
b)



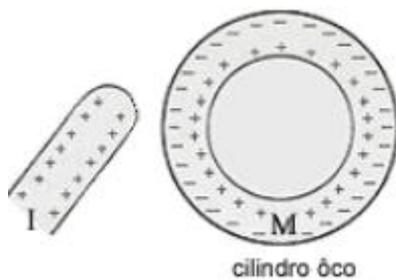
c)



d)



e)



Comentários:

- a) M se mantém neutro.
- b) A carga induzida próxima a (I) deve ser negativa.
- c) Correto.
- d) Semelhante ao item b).
- e) A distribuição de cargas não é uniforme como representada.



Gabarito: C

13.

Considere n esferas idênticas em que apenas a primeira esfera está eletrizada com uma carga Q . As outras estão eletricamente neutras. Determine o valor da carga desta esfera após o contato dela com cada uma das demais esferas.

Comentários:

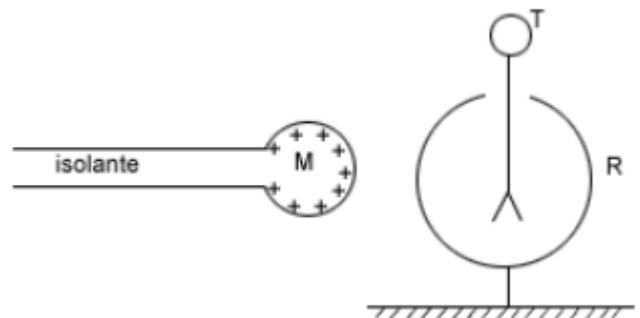
Quando uma esfera carregada entra em contato com outra idêntica e neutra há uma distribuição igual de cargas entre as duas, e assim a carga da primeira esfera se torna metade do original. No caso em questão há $n - 1$ contatos iguais ao descrito acima, logo a carga final da primeira esfera deve ser:

$$Q_1 = \frac{Q}{2^{n-1}}$$

Gabarito: $Q_1 = \frac{Q}{2^{n-1}}$

14. (ITA-1973)

Uma esfera metálica (M) é aproximada de um eletroscópio de folhas de alumínio, conforme o esquema abaixo. A carcaça metálica (R) do eletroscópio está em contato elétrico permanente com o solo.



Enquanto a esfera (M) está muito afastada do eletroscópio estabeleceu-se um contato elétrico transitório entre (T) e (R). Qual é a única afirmação correta em relação à experiência em apreço?

- a) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar o terminal (T).
- b) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar a carcaça (R).
- c) As folhas só abrirão se o contato elétrico entre (T) e (R) for mantido permanentemente.
- d) As folhas só abrirão se a carcaça (R) receber uma carga de mesmo valor, mas de sinal oposto ao da esfera (M).
- e) As folhas se abrirão à medida que (M) se aproxima de (T)

Comentários:

- a) Incorreto. Antes de tocar o terminal a esfera induz carga negativa em (T), gerando um excesso de cargas positivas nas folhas do eletroscópio.
- b) Incorreto. Como (R) está ligado à terra, a carga da esfera iria apenas escoar.
- c) Veja a).
- d) Incorreto. Para que se abram, basta as folhas estarem carregadas com carga de mesmo sinal.
- e) Correto.

**Gabarito: E**

15. (ITA-1977)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices A e B de um triângulo retângulo isósceles. Sabe-se que a força elétrica resultante que atua sobre a carga localizada no vértice C do ângulo reto tem a mesma direção da reta AB. Aplicando-se a Lei de Coulomb a esta situação, conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em A e B são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
- b) As cargas localizadas nos pontos A e B têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
- c) As três cargas são de valores absolutos iguais.
- d) As cargas localizadas nos pontos A e B têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
- e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

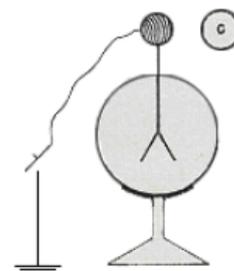
Comentários:

Como as forças possuem direção de seus respectivos catetos, o único modo de se cancelarem na direção da altura (saindo de C) é se possuírem módulos iguais e sentidos opostos (na direção dos catetos). Como as distâncias são iguais, devemos ter cargas iguais e de sinais opostos.

Gabarito: A

16. (ITA-1983)

O eletroscópio da figura foi carregado positivamente. Aproxima-se então um corpo C carregado negativamente e liga-se o eletroscópio à Terra, por alguns instantes, mantendo-se o corpo C nas proximidades. Desfaz-se a ligação à Terra e a seguir afasta-se C.



No final, a carga do eletroscópio:

- a) Permanece positiva.
- b) Fica nula devido à ligação com a Terra.
- c) Torna-se negativa.
- d) Terá sinal que vai depender da maior ou menor aproximação de C.
- e) Terá sinal que vai depender do valor da carga em C.

Comentários:

A repulsão entre as cargas negativas do eletroscópio e objeto cause um escoamento parcial dessa carga para a Terra, onde terá um amplo espaço para se espalhar.

Gabarito: A



17. (ITA-1984)

Uma partícula de massa $m = 10,0 \text{ g}$ e carga $q = -2,0 \times 10^{-6} \text{ C}$ é acoplada a uma mola de massa desprezível. Este conjunto é posto em oscilação e seu período medido é $T = 0,40\pi \text{ s}$. É fixada, a seguir, outra partícula de carga $q' = 0,20 \times 10^{-6} \text{ C}$ a uma distância d da posição de equilíbrio O do sistema massa-mola, conforme indica a figura.

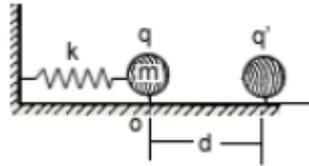
É dado: $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = k = 9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$

Obs.: considerar as duas cargas puntiformes.

O conjunto é levado lentamente até a nova posição de equilíbrio distante $x = 4,0 \text{ cm}$ da posição de equilíbrio inicial O .

O valor de d é:

- a) 56 cm.
- b) 64 cm.
- c) 60 cm.
- d) 36 cm.
- e) nenhuma das alternativas.



Comentários:

Para o movimento em MHS, temos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

$$k = \frac{1}{4} \text{ N/m}$$

Aplicando $F = ma$ na nova posição de equilíbrio:

$$kx = \frac{qq'}{(d-x)^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$10^{-2} = \frac{4 \cdot 10^{-13}}{(d - 4 \cdot 10^{-2})^2} 9 \cdot 10^9$$

$$d = 64 \text{ cm}$$

Gabarito: B

18. (IME – 84)

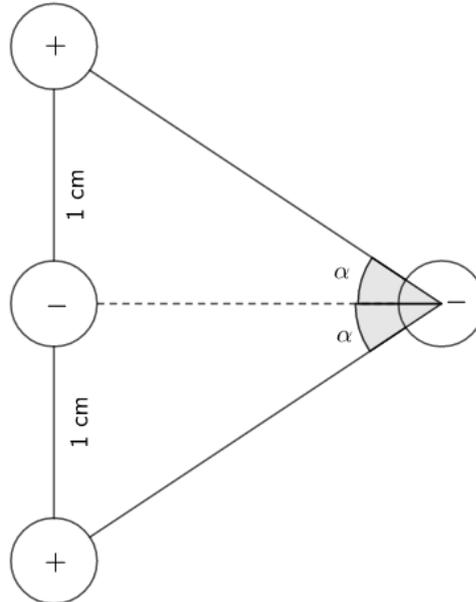
Um sistema de cargas elétricas puntiformes é constituído de quatro pequenas esferas de peso desprezível, dispostas na forma mostra na figura, dotadas das seguintes cargas elétricas:



$$Q_1 = Q_3 = 4 \times 10^{-11} C$$

$$Q_2 = Q_4 = -10^{-11} C$$

Determine o valor do ângulo α , diferente de zero, de posicionamento da esfera de carga Q_4 , de modo que a força atuante nessa carga seja nula.



Comentários:

Zerando a resultante na direção da linha tracejada: ($Q_1 = Q_3 = Q, Q_2 = Q_4 = Q'$)

$$-2K \frac{QQ'}{\left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2} + K \frac{(Q')^2}{\left(\frac{1}{\tan \alpha}\right)^2} = 0$$

$$\frac{Q'}{\cos^2 \alpha} - 2Q = 0$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{Q'}{2Q}}$$

Lembre-se que $0 < \alpha < 90^\circ$, pois não há possibilidade de equilíbrio com as cargas ao lado direito.

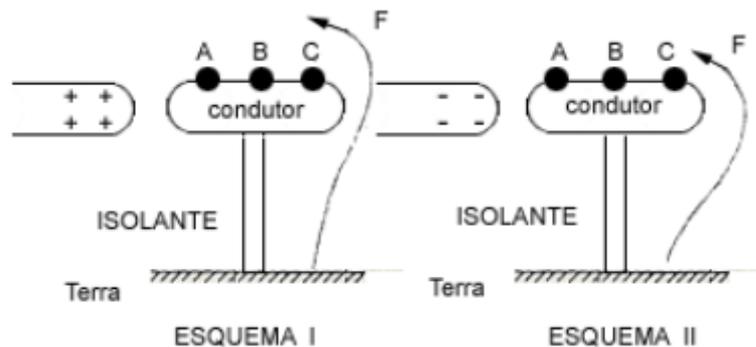
Assim:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

Gabarito: $\alpha = \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \right)$

19. (ITA-1988)

Deseja-se carregar negativamente um condutor metálico pelo processo de indução eletrostática. Nos esquemas I e II, o condutor foi fixado na haste isolante. F é um fio condutor que nos permite fazer o contato com a Terra nos pontos A, B e C do condutor.



Devemos utilizar:

a) O esquema I e ligar necessariamente F em C, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em A os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região C.

b) O esquema II e ligar necessariamente F em A, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em C os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região A.

c) Qualquer dos esquemas I ou II, desde que liguemos respectivamente em C e em A.

d) O esquema I, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.

e) O esquema II, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.

Comentários:

A carga positiva do bastão gera um potencial positivo no condutor, se ligarmos este à terra seu potencial deve se tornar nulo. Desse modo, cargas negativas fluem da Terra para o condutor para que o equilíbrio seja alcançado. Note que os argumentos acima são independentes do ponto de contato do condutor com a terra.

Gabarito: D

20. (ITA-1992)

Uma carga puntiforme $-Q_1$ de massa m percorre uma órbita circular de raio R em torno de outra carga puntiforme Q_2 , fixa no centro do círculo. A velocidade angular de $-Q_1$ é:

a) $\omega = \frac{4\pi\epsilon_0 Q_1 Q_2}{mR}$

b) $\omega = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$

c) $\omega = \left[\frac{Q_1 Q_2 R^3}{4\epsilon_0} \right]^2$

d) $\omega = \frac{mRQ_1}{4\pi\epsilon_0 Q_2}$

e) $\omega = \frac{mRQ_2}{4\pi\epsilon_0 Q_1}$



Comentários:

Aplicando $F = ma$ à carga Q_1 , temos:

$$R_{cent} = ma_{cent}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{R^2} = m\omega^2 R$$

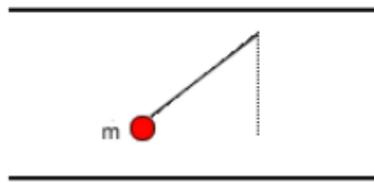
$$\omega = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

Gabarito: B

21. (ITA-1993)

Uma pequena esfera metálica de massa m , está suspensa por um fio de massa desprezível, entre as placas de um grande capacitor plano, como mostra a figura. Na ausência de qualquer carga, tanto no capacitor quanto na esfera, o período de oscilação da esfera é $T = 0,628$ s. Logo em seguida, eletriza-se a esfera com uma carga $+e$ e a placa superior do capacitor é carregada positivamente. Nessas novas condições o período de oscilação da esfera torna-se $T = 0,314$ s. Qual é a intensidade da força que o campo elétrico do capacitor exerce sobre a esfera?

- a) $F = 3mg$
- b) $F = 2mg$
- c) $F = mg$
- d) $F = 6mg$
- e) $F = \frac{3mg}{2}$



Comentários:

Calculando a gravidade aparente na região entre as placas:

$$g_{apa} = g + \frac{F_{ele}}{m} \quad (eq. 1)$$

Lembrando-se que o período de oscilação de um pêndulo é dado por: $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

$$\frac{T}{T_f} = \sqrt{\frac{g_{apa}}{g}}$$

Substituindo (1) na equação acima, temos:

$$\frac{T}{T_f} = \sqrt{1 + \frac{F_{ele}}{mg}}$$

$$F_{ele} = 3mg$$



Gabarito: A

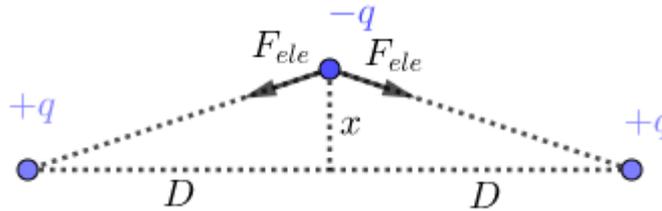
22.

Duas cargas positivas $+q$ separadas por uma distância $2D$. No ponto médio do segmento que une as cargas coloca-se uma carga $-q$. Desloca-se $-q$ levemente da sua posição de equilíbrio, de tal forma que ela passa a oscilar em torno da posição de equilíbrio mantendo-se sobre a mediatriz do segmento que une as cargas $+q$. Determine o período da oscilação, considerando que a perturbação em $-q$ seja muito pequena. Todas as cargas têm massa m .

Adote: para ângulos pequenos vale a aproximação: $\text{sen } \alpha \cong \text{tg } \alpha \cong \alpha(\text{rad})$

Comentários:

As forças que agem em $-q$, desprezando a força peso em relação a ordem de grandeza quando comparada a força elétrica, temos:



Calcularemos a força resultante sobre $-q$ em função de seu deslocamento x :

$$F_{res} = -2F_{ele} \text{sen } \alpha = -2 \frac{kq^2}{\left(\frac{D}{\cos \alpha}\right)^2} \text{sen } \alpha$$

Fazendo as aproximações $\text{sen } \alpha \approx \tan \alpha$ e $\cos \alpha \approx 1$ para pequenos ângulos, temos:

$$F_{res} = -2 \frac{kq^2}{D^2} \tan \alpha = -2 \frac{kq^2}{D^3} x$$

Caracterizando um MHS com frequência angular dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{2kq^2}{mD^3}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{mD^3}{2kq^2}}$$

Gabarito: $T = 2\pi \sqrt{\frac{mD^3}{2kq^2}}$

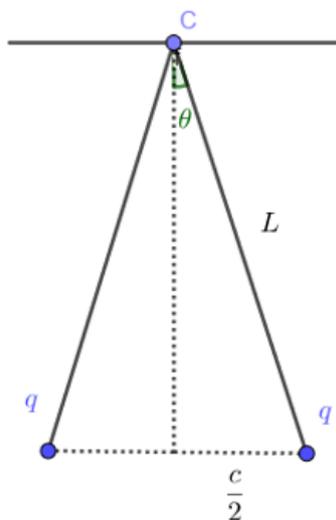
23. (ITA-1993)

Duas esferas condutoras, de massa m , bem pequenas, estão igualmente carregadas. Elas estão suspensas num mesmo ponto por dois fios de seda, de massas desprezíveis e de comprimentos iguais a L . As cargas das esferas são tais que elas estarão em equilíbrio quando a distância entre elas é igual a a ($a \ll L$). Num instante posterior, uma das esferas é descarregada. Qual será a nova distância b ($b < L$) entre as esferas, quando após se tocarem o equilíbrio entre elas for novamente restabelecido?



- a) $b = \frac{a}{2}$
- b) $b = a\sqrt{2}/2$
- c) $b = a\sqrt{3}/2$
- d) $b = a/\sqrt[3]{2}$
- e) $b = a/\sqrt[3]{4}$

Comentários:



Considere a situação na qual as esferas encontram equilíbrio a uma distância arbitrária $c \ll L$:

Vertical –

$$T \cos \theta = mg \approx T \quad (\text{eq. 1})$$

Horizontal –

$$T \sin \theta = F_{ele} \quad (\text{eq. 2})$$

Substituindo (1) em (2), temos;

$$mg \left(\frac{c}{2L} \right) = \frac{kq^2}{c^2}$$

$$\frac{mg}{2Lk} = \frac{q^2}{c^3} = \text{const.}$$

Note que, após se tocarem, a carga final de ambas as esferas é metade da inicial, logo:

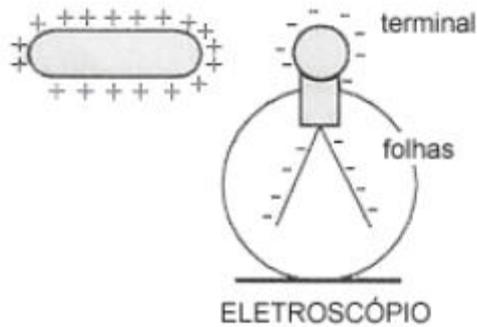
$$\frac{q_0^2}{a^3} = \frac{\left(\frac{q_0}{2}\right)^2}{b^3}$$

$$b = \frac{a}{\sqrt[3]{4}}$$

Gabarito: E

24. (ITA-1996)

Um objeto metálico carregado positivamente, com carga $+Q$, é aproximado de um eletroscópio de folhas, que foi previamente carregado negativamente com carga igual a $-Q$.



I) À medida que o objeto for se aproximando do eletroscópio, as folhas vão se abrindo além do que já estavam.

II) À medida que o objeto for se aproximando, as folhas permanecem como estavam.

III) Se o objeto tocar no terminal externo do eletroscópio, as folhas devem necessariamente fechar-se.

- a) Somente a afirmativa I é correta.
- b) As afirmativas II e III são corretas.
- c) As afirmativas I e III são corretas.
- d) Somente a afirmativa III é correta.
- e) Nenhuma das afirmativas é correta.

Comentários:

I) Incorreto. O objeto atrai mais carga negativa para o terminal, diminuindo a carga nas folhas e, conseqüentemente, fazendo-as se aproximarem.

II) Incorreto. Veja (I).

III) Correto. A carga total dos dois condutores é $(-Q) + Q = 0$, logo o contato entre os dois produz a neutralização de ambos.

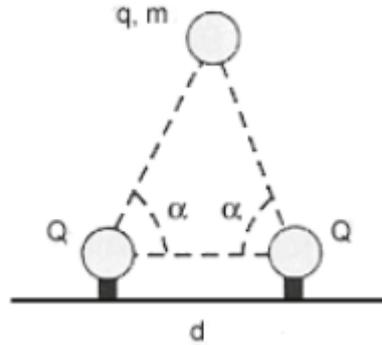
Gabarito: D

25. (ITA-1997)

Uma pequena esfera de massa m e carga q , sob influência da gravidade e da interação eletrostática, encontra-se suspensa por duas cargas Q fixas, colocadas a uma distância d no plano horizontal, como mostrado na figura. Considere que a esfera e as cargas fixas estejam no mesmo plano vertical e que sejam iguais a os respectivos ângulos entre a horizontal e cada reta passando pelos centros das cargas fixas e da esfera. A massa da esfera é então:



- a) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$
- b) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{g}$
- c) $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$
- d) $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \text{sen } \alpha}{g}$
- e) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha}{g}$



Comentários:

Equilibrando as forças na direção vertical:

$$2F_{ele} \text{sen } \alpha = mg$$

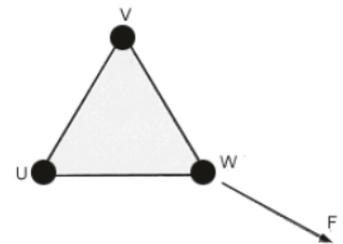
$$2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq \text{sen } \alpha}{\left(\frac{d}{2 \cos \alpha}\right)^2} = mg$$

$$m = \frac{8}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq \cos^2 \alpha \text{sen } \alpha}{d^2 g}$$

Gabarito: D

26. (ITA-1998)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices U, V e W de um triângulo equilátero. Suponha-se que a soma das cargas é nula e que a força sobre a carga localizada no vértice W é perpendicular à reta UV e aponta para fora do triângulo, como mostra a figura.



Conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em U e V são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
- b) As cargas localizadas nos pontos U e V têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
- c) As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto, com uma delas de sinal diferente das demais.
- d) As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
- e) A configuração descrita é fisicamente impossível.

Comentários:

Para termos uma resultante na direção desejada, as cargas de U e V devem ter o mesmo módulo e sinal, digamos q . Assim a carga em W deve ser $-2q$ (somatório das cargas é nulo), logo a força entre as cargas seria de atração, direcionada para dentro do triângulo.

Gabarito: E



27. (ITA-1998)

Suponha que o elétron em um átomo de hidrogênio se movimenta em torno de um próton em uma órbita circular de raio R . Sendo m a massa do elétron e q o módulo da carga de ambos, elétron e próton, conclui-se que o módulo da velocidade do elétron é proporcional a:

- a) $q \cdot \sqrt{\frac{R}{m}}$
- b) $\frac{q}{\sqrt{mR}}$
- c) $\frac{q}{m} \cdot \sqrt{R}$
- d) $\frac{qR}{\sqrt{m}}$
- e) $\frac{q^2R}{\sqrt{m}}$

Comentários:

Aplicando $F = ma$ ao elétron, temos;

$$R_{cent} = ma_{cent} \Rightarrow k \frac{q^2}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

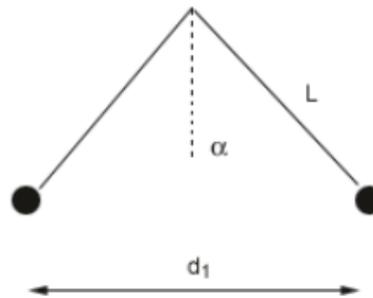
$$v = \sqrt{k} \frac{q}{\sqrt{mR}}$$

Gabarito: B

28. (ITA-2001)

Duas partículas têm massas iguais a m e cargas iguais a Q . Devido a sua interação eletrostática, elas sofrem uma força F quando separadas de uma distância d . Em seguida, estas partículas são penduradas de um mesmo ponto, por fios de comprimento L e ficam equilibradas quando a distância entre elas é d_1 . A cotangente do ângulo que cada fio forma com a vertical, em função de m, g, d, d_1, F e L , é:

- a) $\frac{mgd_1}{Fd}$
- b) $\frac{mgLd_1}{Fd^2}$
- c) $\frac{mgd_1^2}{Fd^2}$
- d) $\frac{mgd^2}{Fd_1^2}$
- e) $\frac{Fd^2}{mgd_1^2}$



Comentários:

Equilibrando as forças agindo sobre uma carga:

Vertical –



$$T \cos \alpha = mg \quad (\text{eq. 1})$$

Horizontal –

$$T \sin \alpha = k \frac{Q^2}{d_1^2} \quad (\text{eq. 2})$$

Dividindo (1) por (2), temos:

$$\cotg \alpha = \frac{mgd_1^2}{kQ^2} \quad (\text{eq.*})$$

A questão fornece a força entre as cargas para uma distância d :

$$F = \frac{kQ^2}{d^2}$$

$$kQ^2 = d^2 F \quad (\text{eq. 3})$$

Substituindo (3) em (*), temos:

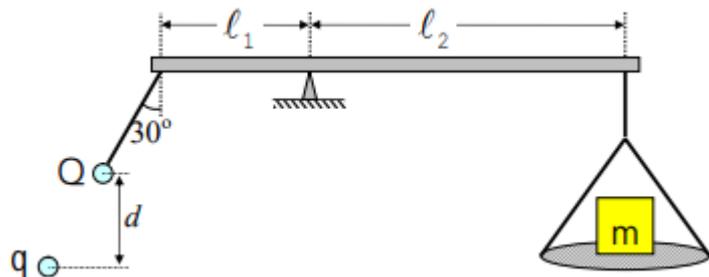
$$\cotg \alpha = \frac{mgd_1^2}{d^2 F}$$

Gabarito: C

29. (ITA – 2010)

Considere uma balança de braços desiguais, de comprimentos l_1 e l_2 , conforme mostra a figura. No lado esquerdo encontra-se pendurada uma carga de magnitude Q e massa desprezível, situada a uma certa distância de outra carga, q . No lado direito encontra-se uma massa m sobre um prato de massa desprezível. Considerando as cargas como pontuais e desprezível a massa do prato da direita, o valor de q para equilibrar a massa m é dado por:

- A) $-mgl_2d^2/(k_0Ql_1)$
- B) $-8mgl_2d^2/(k_0Ql_1)$
- C) $-4mgl_2d^2/(3k_0Ql_1)$
- D) $-2mgl_2d^2/(\sqrt{3}k_0Ql_1)$
- E) $-8mgl_2d^2/(3\sqrt{3}k_0Ql_1)$



Comentários:

No equilíbrio, o torque total do sistema deve ser nulo em relação a qualquer ponto. Calculando o torque em relação ao ponto de suporte da balança:

$$F_{ele} l_1 \sin 60^\circ = mgl_2 \Rightarrow \frac{k_0 Q |q| l_1}{\left(\frac{d}{\cos 30^\circ}\right)^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = mgl_2$$

$$|q| = \frac{8}{3\sqrt{3}} \frac{mgl_2 d^2}{k_0 Q l_1}$$

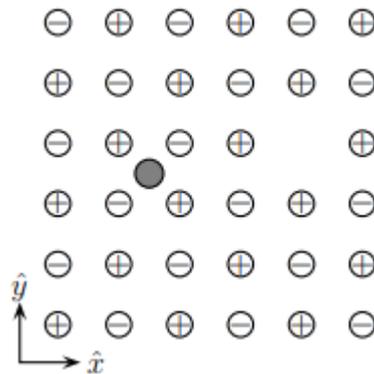
A força deve ser de atração, logo q é negativo.



Gabarito: E

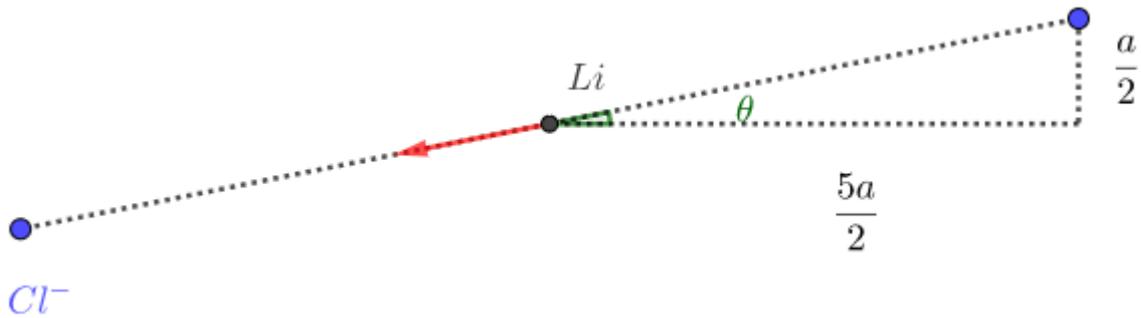
30. (ITA – 2014)

A figura mostra parte de uma camada de um cristal tridimensional infinito de sal de cozinha, em que a distância do átomo de Na ao de seu vizinho Cl é igual a a . Considere a existência dos seguintes defeitos neste cristal: ausência de um átomo de Cl e a presença de uma impureza de lítio (esfera cinza), cuja carga é igual à fundamental $+e$, situada no centro do quadrado formado pelos átomos de Na e Cl . Obtenha as componentes F_x e F_y da força eletrostática resultante $\vec{F} = F_x\hat{x} + F_y\hat{y}$ que atua no átomo de lítio. Dê sua resposta em função de e , a e da constante de Coulomb K_0 .



Comentários:

Considere uma carga arbitrária no cristal, essa carga sempre possuirá uma simétrica em relação ao átomo de lítio (cristal infinito), a qual cancela a força que esta exerce sobre tal átomo. Assim, a força resultante será a força da única carga que não tem simétrica em relação ao átomo de Lítio:



$$\vec{F} = k \frac{e^2}{\frac{26a^2}{4}} (-\cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y})$$

$$\vec{F} = -\frac{4}{26\sqrt{26}} \frac{ke^2}{a^2} (5\hat{x} + \hat{y})$$

Gabarito: $F_x = -\frac{20}{26\sqrt{26}} \cdot \frac{ke^2}{a^2}$ $F_y = -\frac{4}{26\sqrt{26}} \cdot \frac{ke^2}{a^2}$

31. (ITA – 2015)



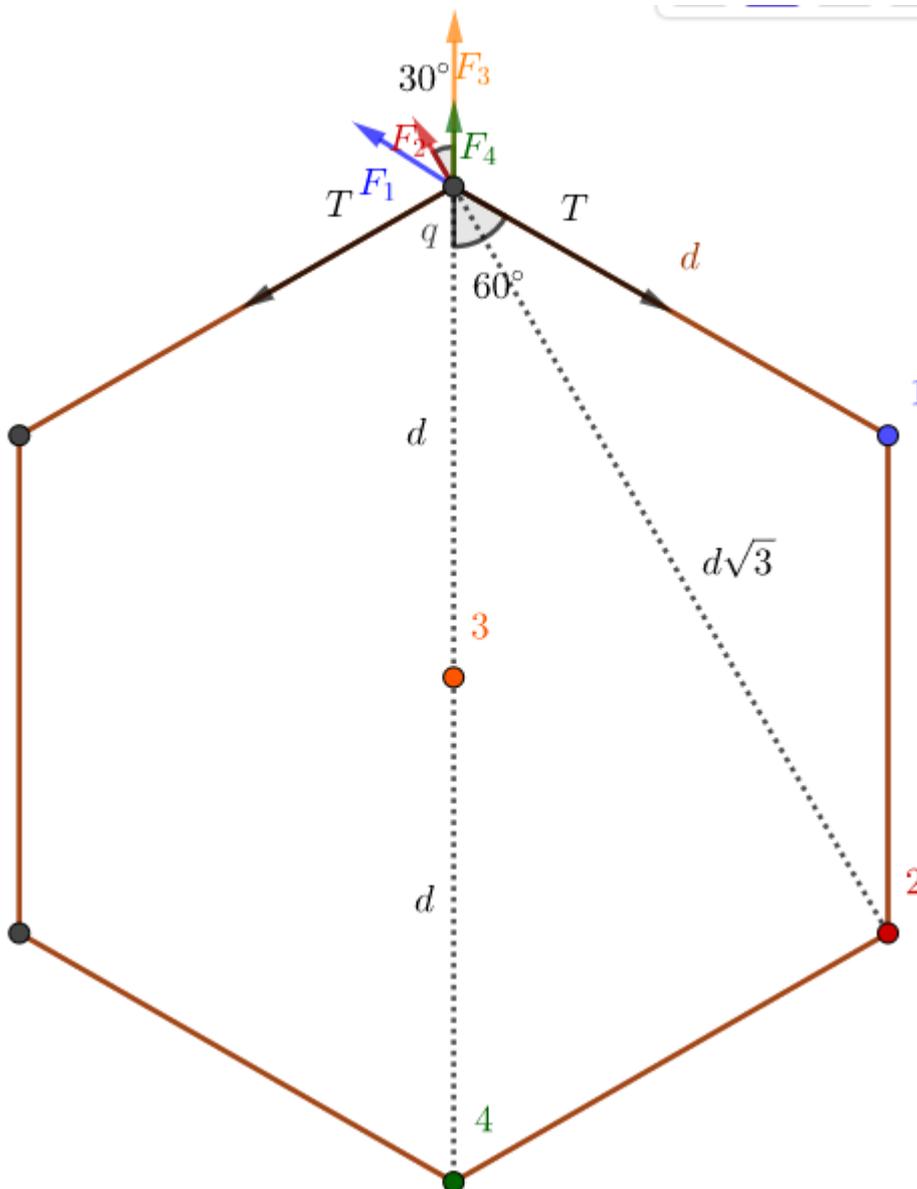
Uma carga q ocupa o centro de um hexágono regular de lado d tendo em cada vértice uma carga idêntica q . Estando todas as sete cargas interligadas por fios inextensíveis, determine as tensões em cada um deles.

Comentários:

Na nossa opinião essa questão poderia ser anulada, ou a resposta seria impossível determinar as tensões.

Sendo o sistema simétrico, precisamos analisar o equilíbrio de apenas uma das cargas nos vértices. Encontramos que a resultante da força elétrica agindo sobre essa carga tem direção radial e sentido para fora.

Considere a seguinte situação:



$$2T \cos 60^\circ = 2F_1 \cos 60^\circ + 2F_2 \cos 30^\circ + F_3 + F_4$$

$$T = \frac{kq^2}{d^2} + \sqrt{3} \frac{kq^2}{3d^2} + \frac{kq^2}{d^2} + \frac{kq^2}{4d^2}$$



$$T = \frac{27 + 4\sqrt{3}}{12} \frac{kq^2}{d^2}$$

Perceba que as cargas estão em equilíbrio, agora se ligarmos todos os pares que ainda falta serem ligados com fios, teremos uma solução para o problema inicial, com os esses fios frouxos e os fios externos com a tensão calculada acima.

Do mesmo modo, colocando apenas fios ligando os vértices ao centro renderia uma solução para o problema original, com o resto dos fios frouxos. Assim esse problema não tem solução única.

Gabarito: $T = \left(\frac{27+4\sqrt{3}}{12}\right) \cdot \frac{kQ^2}{d^2}$

32. (ITA – 2015)

Considere um tubo horizontal cilíndrico de comprimento ℓ , no interior do qual encontram-se respectivamente fixadas em cada extremidade de sua geratriz inferior as cargas q_1 e q_2 , positivamente carregadas. Nessa mesma geratriz, numa posição entre as cargas, encontra-se uma pequena esfera em condição de equilíbrio, também positivamente carregada. Assinale a opção com as respostas corretas na ordem das seguintes perguntas:

- I. Essa posição de equilíbrio é estável?
 - II. Essa posição de equilíbrio seria estável se não houvesse o tubo?
 - III. Se a esfera fosse negativamente carregada e não houvesse o tubo, ela estaria em equilíbrio estável?
- A) Não. Sim. Não.
 - B) Não. Sim. Sim.
 - C) Sim. Não. Não.
 - D) Sim. Não. Sim.
 - E) Sim. Sim. Não.

Comentários:

I) Correto. Se a esfera for deslocada, irá aproximar-se da carga no lado do deslocamento, sofrendo maior repulsão, de modo que a resultante de forças sobre ela aponta no sentido do equilíbrio anterior.

II) Incorreto. Se deslocarmos a esfera na direção perpendicular, as duas forças exercidas sobre ela tendem a acelerá-la para longe.

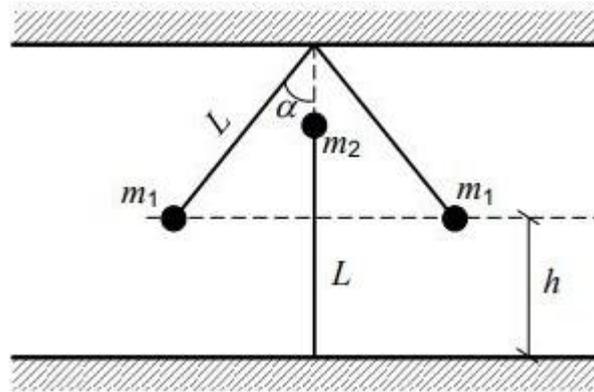
III) Incorreto. Se a esfera for deslocada, na direção da linha que liga as duas, irá aproximar-se da carga no lado do deslocamento, sofrendo maior atração, de modo que a resultante de forças sobre ela aponta no sentido de afastamento ao equilíbrio anterior.

Gabarito: oficial C.

33. (IME 2019 – 2ª fase)



A figura acima mostra um sistema em equilíbrio composto por três corpos presos por tirantes de comprimento L cada, carregados com cargas iguais a Q . Os corpos possuem massas m_1 e m_2 , conforme indicados na figura. Sabendo que o tirante conectado à massa m_2 não está tensionado, determine os valores de m_1 e m_2 em função de k e Q .



Dados:

constante dielétrica do meio: $k[Nm^2/C^2]$;

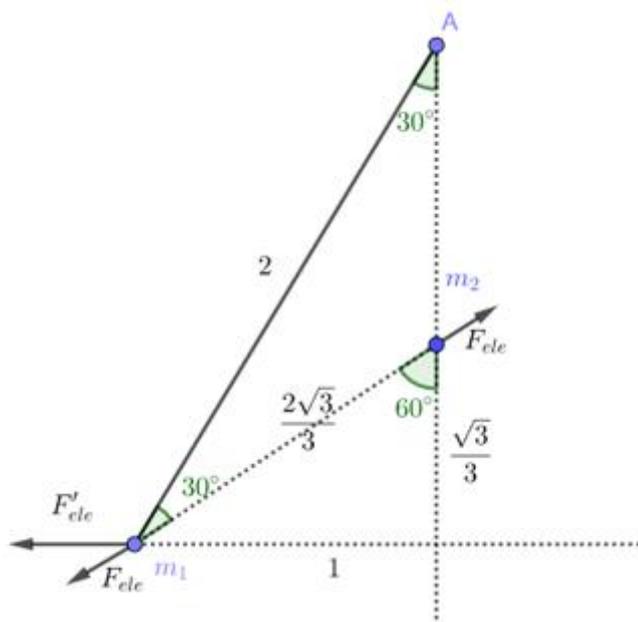
carga elétrica dos corpos: $Q [C]$;

comprimento dos tirantes: $L = 2 m$;

altura: $h = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) m$

aceleração da gravidade: $g = 10 m/s^2$; e $\alpha = 30^\circ$.

Comentários:



Equilibrando as forças na vertical para m_2 , temos;

$$m_2 g = 2 F_{ele} \cos 60^\circ$$

$$m_2 g = \frac{k Q^2}{\frac{4}{3}}$$



$$m_2 = \frac{3kQ^2}{4g}$$

Equilibrando as forças na direção perpendicular ao tirante, temos:

$$F_{ele} \sen 30^\circ + F'_{ele} \sen 60^\circ = m_1 g \sen 30^\circ$$

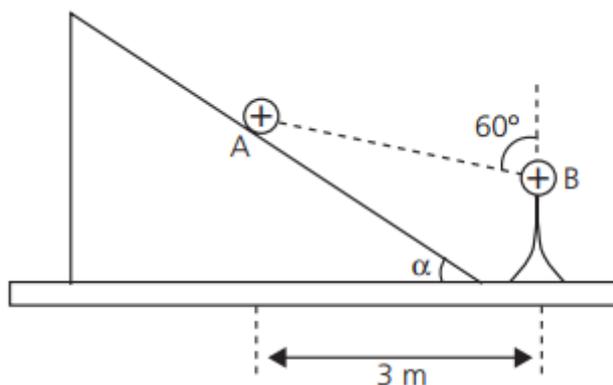
$$\frac{kQ^2}{4} \frac{1}{2} + \frac{kQ^2 \sqrt{3}}{4} \frac{1}{2} = m_1 g$$

$$m_1 = \frac{kQ^2}{40} (3 + \sqrt{3})$$

Gabarito: $m_1 = \frac{(3+\sqrt{3})kQ^2}{40}$ e $m_2 = \frac{3kQ^2}{40}$

34.

Uma pequena esfera A1 de carga +Q e massa m, encontra-se em repouso nas proximidades de um plano inclinado, quando dela é aproximada lentamente uma segunda esfera B, de carga +Q, fixa sobre um suporte isolante.



Devido à repulsão eletrostática, a esfera A desloca-se ao longo da rampa sem atrito, estacionando na posição ilustrada anteriormente. Determine o ângulo α .

Dados: Constante eletrostática = 9×10^9 (SI) $g = 10 \text{ m/s}^2$ $Q = 2\text{mC}$, $m = 0,3 \text{ g}$.

Comentários:

Equilibrando as forças na esfera A:

Vertical –

$$F_{ele} \cos 60^\circ + N \cos \alpha = mg \quad (eq. 1)$$

Horizontal –

$$F_{ele} \sen 60^\circ = N \sen \alpha \quad (eq. 2)$$

Dividindo (2) por (1), obtemos:



$$\tan \alpha = \frac{\frac{kQ^2}{\left(\frac{3}{\sin 60^\circ}\right)^2} \sin 60^\circ}{mg - \frac{kQ^2}{\left(\frac{3}{\sin 60^\circ}\right)^2} \cos 60^\circ}$$

$$\tan \alpha = \frac{10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-12} \frac{3\sqrt{3}}{4 \cdot 2}}{3 \cdot 10^{-3} - \frac{3}{2} \cdot 10^{-3}} = \sqrt{3}$$

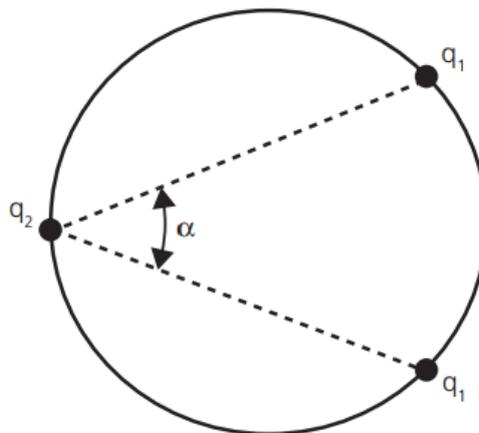
$$\alpha = 60^\circ$$

Gabarito: $\alpha = 60^\circ$

35.

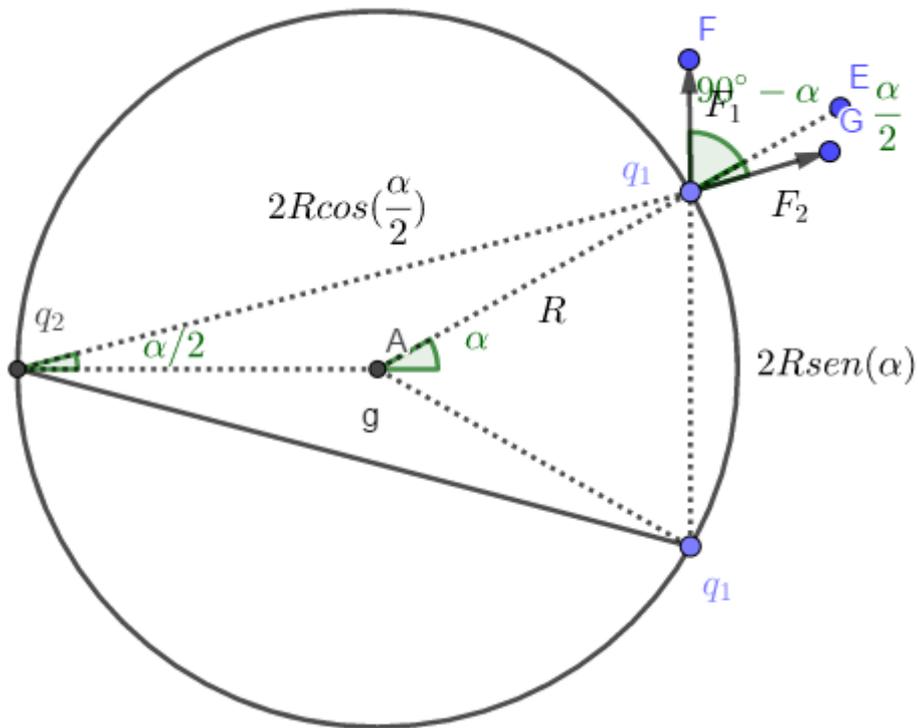
Três cargas puntiformes podem mover-se vinculadas (sem atrito) a um aro circular apoiado num plano horizontal. Duas das cargas têm o mesmo valor q_1 e a terceira tem valor q_2 . Mostre que na posição de equilíbrio, temos que:

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{2(1 - \cos \alpha)^3}{\cos^2 \alpha}$$



Comentários:

Na direção radial o aro mantém as cargas fixas, assim queremos garantir uma resultante tangencial nula: (Note que a força que q_2 exerce deve ser a mesma para ambas as cargas, logo o raio que se liga a q_2 secciona o ângulo α ao meio)



$$F_2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = F_1 \operatorname{sen} 90^\circ - \alpha$$

$$k \frac{q_1 q_2}{(2R \cos(\frac{\alpha}{2}))^2} \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2}) = k \frac{q_1^2}{(2R \operatorname{sen} \alpha)^2} \cos \alpha$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})}{\cos \alpha \cos^2(\frac{\alpha}{2})} = \frac{4 \operatorname{sen}^3(\frac{\alpha}{2})}{\cos \alpha}$$

$$\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{16 (\operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2}))^3}{\cos^2 \alpha} = \frac{2 (2 \operatorname{sen}^2(\frac{\alpha}{2}))^3}{\cos^2 \alpha} = \frac{2(1 - \cos \alpha)^3}{\cos^2 \alpha}$$

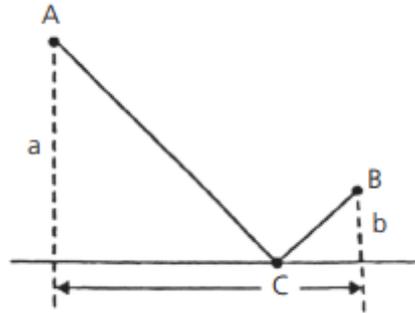
Gabarito: $\frac{q_1^2}{q_2^2} = \frac{2(1 - \cos \alpha)^3}{\cos^2 \alpha}$

36.

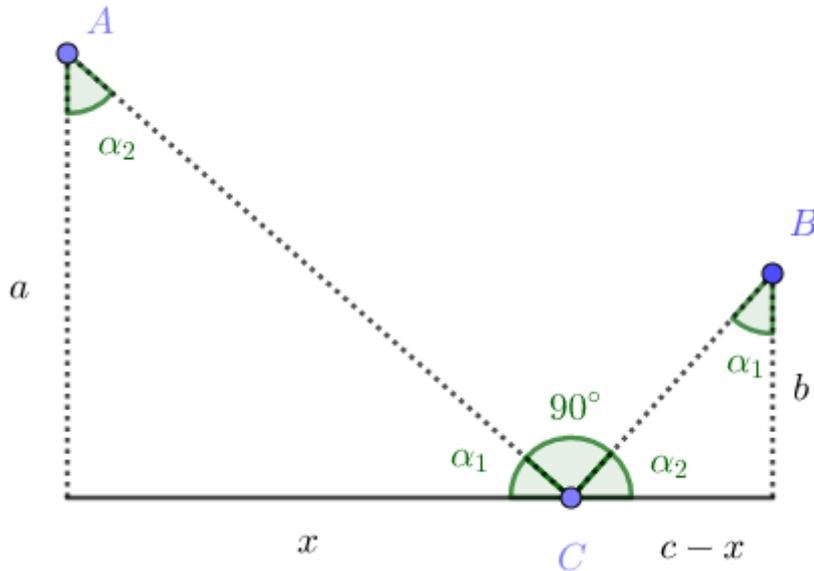
Os pontos fixos A e B estão eletrizadas com carga $+Q$ cada um. O ponto C, eletrizado com carga $-Q$ pode deslizar livremente sob a guia retilínea e horizontal, perfeitamente lisa. Verifica-se que o ponto C fica em equilíbrio quando o segmento \overline{AC} é normal a \overline{BC} .

Demonstre que entre a, b e c vale a relação:

$$a^3 + b^3 = abc$$



Comentários:



Como os dois triângulos acima são semelhantes, temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{c-x}{b}$$

$$x = \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2} \quad (\text{considere } x > c - x)$$

Além disso:

$$\frac{CB}{AC} = \frac{c-x}{a} = \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}$$

Devemos ter uma resultante nula na direção horizontal:

$$F_1 \cos \alpha_1 = F_2 \cos \alpha_2 = F_2 \operatorname{sen} \alpha_1$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{CB}{AC}\right)^2$$

$$\frac{2a}{c + \sqrt{c^2 - 4ab}} = \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right)^2$$

$$4a^2 = [c^2 - (c^2 - 4ab)] \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right)$$

$$\frac{2a^2}{b} = c - \sqrt{c^2 - 4ab}$$



$$c^2 - 4ab = \left(c - \frac{2a^2}{b}\right)^2$$

$$\boxed{a^3 + b^3 = abc}$$

Gabarito: $a^3 + b^3 = abc$





8.0. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 5. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 3. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 3. 9ª ed. Moderna. 490p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 3. 10ª ed. LTC. 365p.
- [6] G. Iezzi, C. Murakami, N. J. Machado. Fundamentos de Matemática Elementar volume 8. 7ª ed. Atual Editora, 2013. 280p.



@prof.maldonado

Vamos que vamos! Fé na missão!

