Questão 01

Os alunos de uma escola, para serem aprovados no exame final, deverão obter, pelo menos, sessenta pontos em uma prova de cem questões. Nesta prova, cada questão respondida corretamente vale um ponto e quatro questões erradas, ou não-respondidas, anulam uma questão correta.

Calcule o número mínimo de questões que um mesmo aluno deverá acertar para que:

A) obtenha uma pontuação maior do que zero;

B) seja aprovado.

Questão 02

A temperatura média diária, T, para um determinado ano, em uma cidade próxima ao pólo norte é expressa pela função abaixo.

$$\boxed{T = 50\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{365}(t - 101)\right] + 7}$$

Nessa função, **t** é dado em dias, **t** $= 0$ corresponde ao dia 1º de janeiro e T é medida na escala Fahrenheit .

A relação entre as temperaturas medidas na escala Fahrenheit (F) e as temperaturas medidas na escala Celsius (C), obedece, por sua vez, à seguinte equação:

$$\boxed{C = \frac{5}{9}(F - 32)}$$

Em relação a esse determinado ano, estabeleça:

A) o dia no qual a temperatura será a menor possível;

B) o número total de dias em que se esperam temperaturas abaixo de 0°C.

Questão 03

Num plano cartesiano encontramos a parábola $y = 2x^2$ e as retas paralelas (r): $y = 3x$ e (s): $y = 3x + 2$. A reta (r) intercepta a parábola em A e B; a reta (s), em C e D. Unindo estes pontos, formamos o trapézio convexo ABCD. Existe, ainda, uma reta (t), paralela às retas (r) e (s), que tangencia a parábola no ponto P.

Determine:

A) a equação da reta (t) e as coordenadas do ponto P;

B) a área do trapézio convexo ABCD.

Questão 04

Para fazer uma caixa sem tampa com um único pedaço de papelão, utilizou-se um retângulo de 16 cm de largura por 30 cm de comprimento. De cada um dos quatro cantos desse retângulo foram retirados quadrados de área idêntica e, depois, foram dobradas para cima as abas resultantes.

Determine a medida do lado do maior quadrado a ser cortado do pedaço de papelão, para que a caixa formada tenha:

A) área lateral de 204 cm^2;

B) volume de 600 cm^3.

Questão 05

Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

- um dentre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo;
- um dentre os tamanhos: pequeno e grande;
- de um até cinco dentre os tipos de recheio: sardinha, atum, queijo, presunto e salame, sem possibilidade de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

Calcule:

A) quantos sanduíches distintos podem ser montados;

B) o número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta de orégano, só come sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

Questão 06

Para executar a rotação do vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de um ângulo θ no sentido anti-horário, um programa de computador multiplica-o pela matriz de rotação $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. O vetor $\vec{w} = R_\theta \cdot \vec{v}$ é o resultado desta rotação.

A) Para quaisquer θ_1 e θ_2, demonstre que $R_{\theta_1} . R_{\theta_2} = R_{\theta_1 + \theta_2}$.

B) Determine o valor de θ que torna verdadeira a igualdade $R_\theta^3 = -I$, na qual I é a matriz identidade 2×2.

Questão 07

Segundo a lei do resfriamento de Newton, a temperatura T de um corpo colocado num ambiente cuja temperatura é T_0 obedece à seguinte relação:

$$\boxed{T = T_0 + k\, e^{-ct}}$$

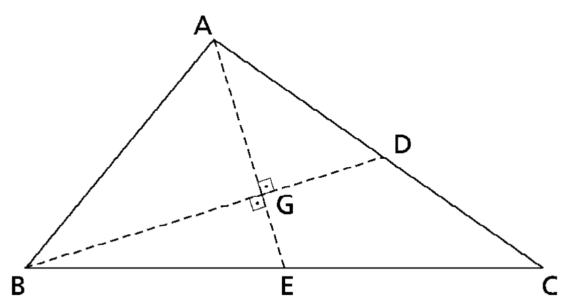
Nesta relação, T é medida na escala Celsius, **t** é o tempo medido em horas, a partir do instante em que o corpo foi colocado no ambiente, e **k** e **c** são constantes a serem determinadas. Considere uma xícara contendo café, inicialmente a 100ºC, colocada numa sala de temperatura 20ºC . Vinte minutos depois, a temperatura do café passa a ser de 40ºC.

A) Calcule a temperatura do café 50 minutos após a xícara ter sido colocada na sala.

B) Considerando $\ell n\, 2 = 0{,}7$ e $\ell n\, 3 = 1{,}1$, estabeleça o tempo aproximado em que, depois de a xícara ter sido colocada na sala, a temperatura do café se reduziu à metade.

Questão 08

No triângulo ABC abaixo, os lados BC, AC e AB medem, respectivamente, **a**, **b** e **c**. As medianas AE e BD relativas aos lados BC e AC interceptam-se ortogonalmente no ponto G.



Conhecidos **a** e **b**, determine:

A) o valor de **c** em função de **a** e **b**;

B) a razão entre as áreas dos triângulos ADG e BEG.

Questão 09

Em um supermercado, podemos encontrar manteiga em dois tipos de embalagens de forma cilíndrica:

- a menor tem raio da base medindo 4 cm, altura igual a 5 cm, contém 200 g e custa R$ 1,75;
- a maior tem diâmetro da base medindo 10 cm, altura igual a 8 cm e custa R$ 4,00.

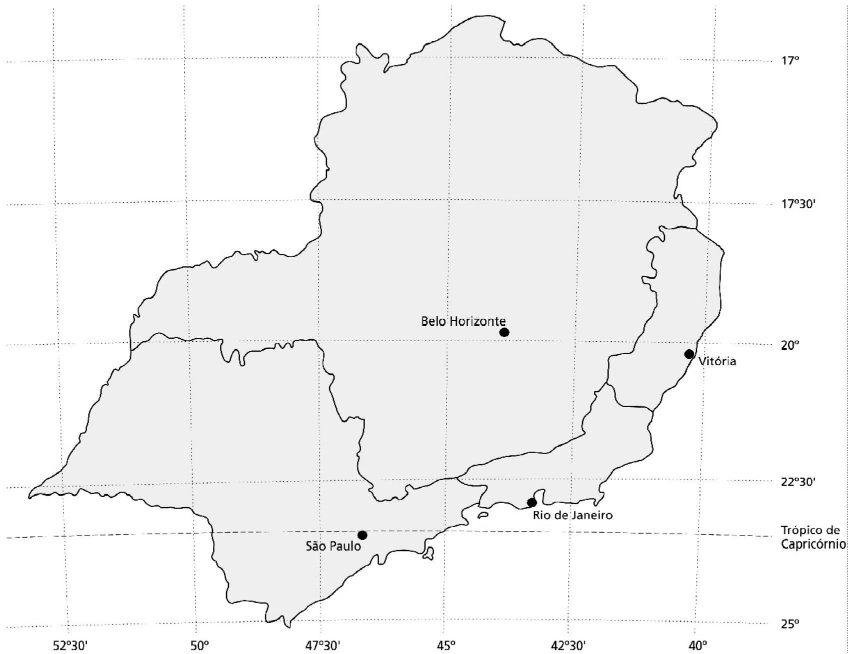
Supondo que a densidade da manteiga seja constante, determine:

A) a quantidade de manteiga, em gramas, contida na embalagem maior;

B) a embalagem que apresenta o menor preço por unidade de medida.

Questão 10

Observe o mapa da região Sudeste.



(Adaptado de BOCHICCHIO, V. R. Atlas atual: geografia. São Paulo: Atual, 1999.)

Considere o Trópico de Capricórnio como o eixo das abscissas e o meridiano de 45º como o eixo das ordenadas. Neste sistema cartesiano, as coordenadas das cidades de São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte e Vitória são, respectivamente, $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ e $\left(5, \frac{7}{2}\right)$, todas medidas em centímetros.

A) Calcule, em quilômetros quadrados, a área do quadrilátero cujos vértices estão representados por estas quatro cidades, supondo que a escala do mapa é de 1:10.000.000.

B) Determine as coordenadas de uma cidade que fique eqüidistante das cidades de São Paulo, Rio de Janeiro e Belo Horizonte.