Estratégia Militares

CURSO EXTENSIVO

# ITA 2023

# GEOMETRIA PLANA II

## AULA 08

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

# Sumário

# APRESENTAÇÃO

Olá,

Na aula passada, estudamos alguns tópicos de geometria plana. Vimos o que é a geometria Euclidiana e também conceitos de retas, ângulos e triângulos. Nessa aula, estudaremos o teorema de Tales e usaremos esse teorema para provar semelhança de triângulos. Também veremos como calcular as cevianas de um triângulo qualquer e quais os pontos notáveis de um triângulo.

Tente se acostumar a "enxergar" quando dois triângulos são semelhantes. Isso será útil para resolver as questões de geometria plana da prova.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:


/profvictorso

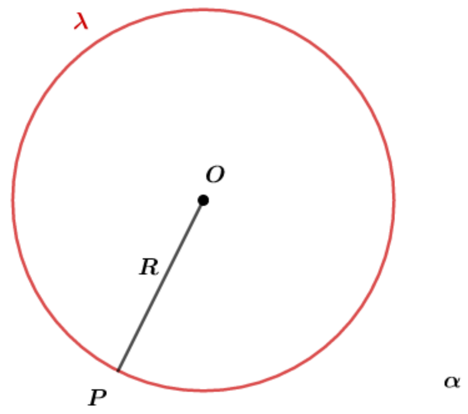
# 1. LUGAR GEOMÉTRICO

Lugar geométrico é o conjunto de pontos de um plano com uma determinada propriedade. Vamos estudar os principais:

## 1.1. CIRCUNFERÊNCIA

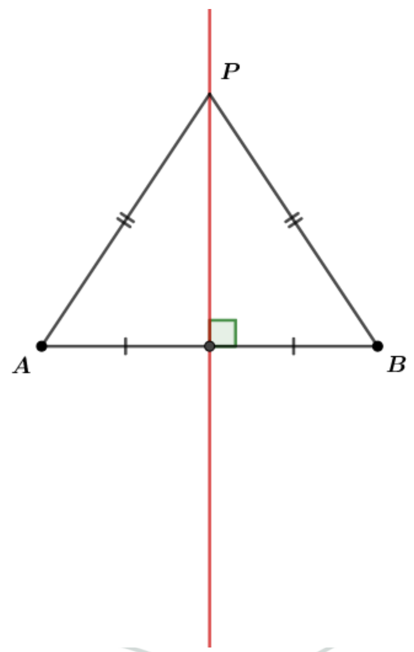
Circunferência é o lugar geométrico dos pontos $P$ de um plano que distam $R$ de um ponto fixo $O$. Sejam $\lambda$, $\alpha, O$ e $R$, a circunferência, o plano, o centro e o raio, respectivamente. Em símbolos, o LG da circunferência pode ser escrito como:

$$\lambda = \{p \in \alpha | OP = R\}$$



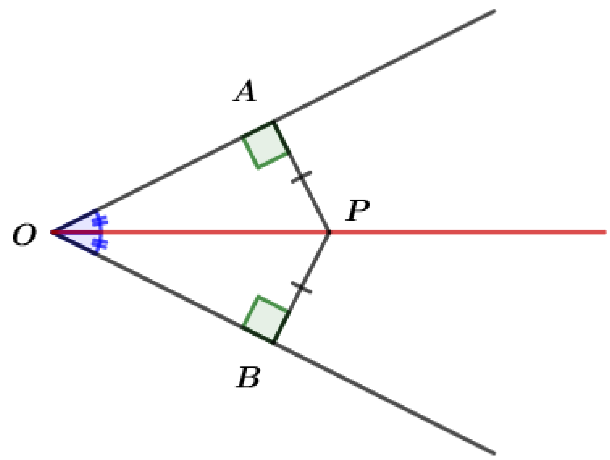

## 1.2. MEDIATRIZ

Mediatriz é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam das extremidades de um segmento.



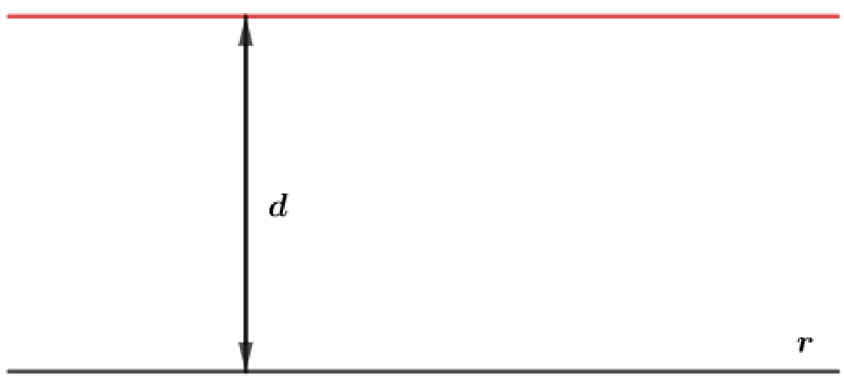
# 1.3. BISSETRIZ

É o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de duas retas concorrentes. Consequentemente, esse LG divide o menor ângulo entre as retas concorrentes em duas partes iguais.



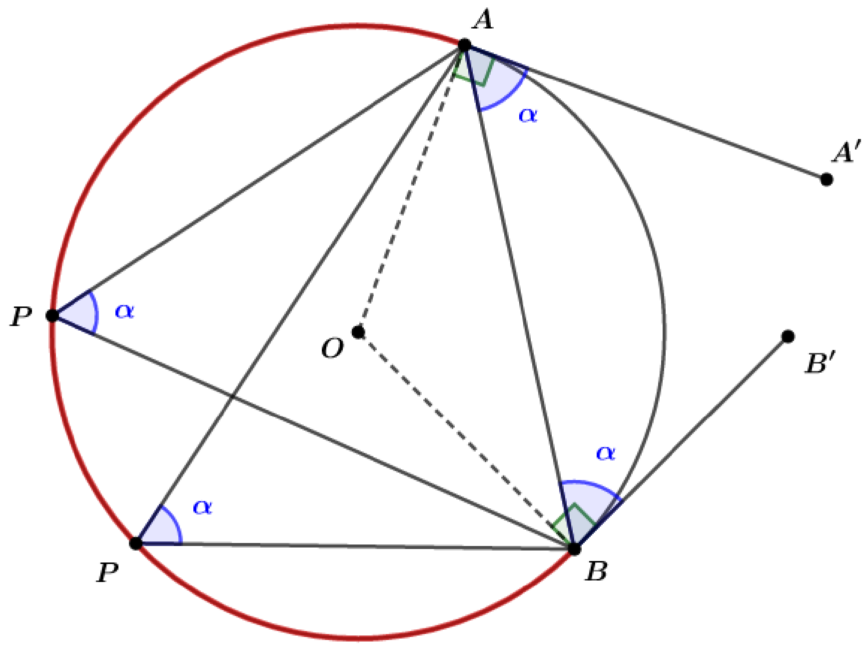

# 1.4. PAR DE RETAS PARALELAS

É o lugar geométrico dos pontos que equidistam $d$ de uma reta.




# 1.5. ARCO CAPAZ

É o lugar geométrico dos pontos que "enxergam" o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo $\alpha$ dado.



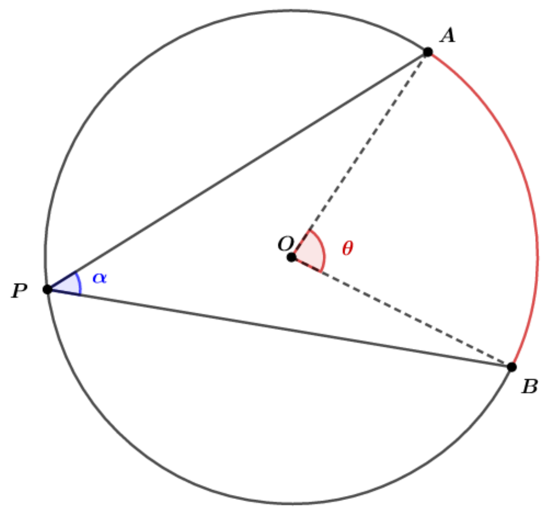

Todos os pontos $P$ pertencentes à região vermelha da circunferência são pontos do arco capaz. Perceba que quando $P \equiv A$ ou $P \equiv B$, temos que os segmentos de reta $AA'$ e $BB'$ tangenciam a circunferência nos pontos $A$ e $B$, respectivamente. Nesses pontos, eles também enxergam o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo $\alpha$.

Outro ponto a se notar é que toda reta tangente a uma circunferência forma um ângulo reto com o segmento de reta que liga o ponto de tangência ao centro da circunferência.

INDO MAIS
**FUNDO!**

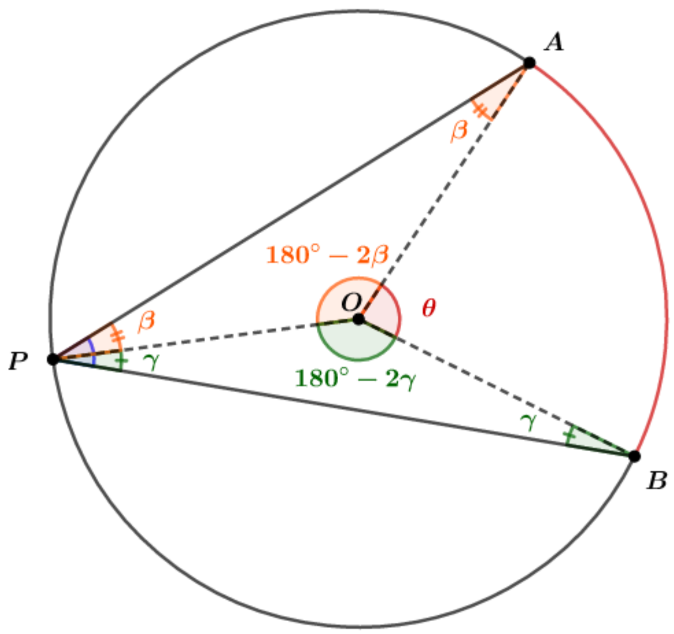
Podemos encontrar uma relação entre $\alpha$ e o menor arco de $\widehat{AB}$.

Sabemos que o ângulo do centro da circunferência é igual ao ângulo formado pelo arco $\widehat{AB}$.



$$\theta = \widehat{AB}$$

Podemos traçar o segmento de reta que liga o ponto $P$ ao centro $O$. Como $\overline{OP} = \overline{OA} = \overline{OB}$, formamos dois triângulos isósceles $OPA$ e $OPB$:




Perceba que $A\hat{P}B = \alpha = \beta + \gamma$. Analisando o centro da circunferência, vemos que:

$$\theta + 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360°$$

$$\theta = 2(\beta + \gamma)$$

$$\theta = 2\alpha$$

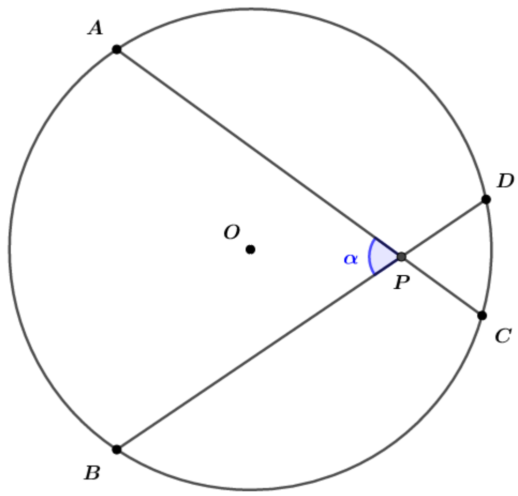
$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = \frac{\widehat{AB}}{2}}$$

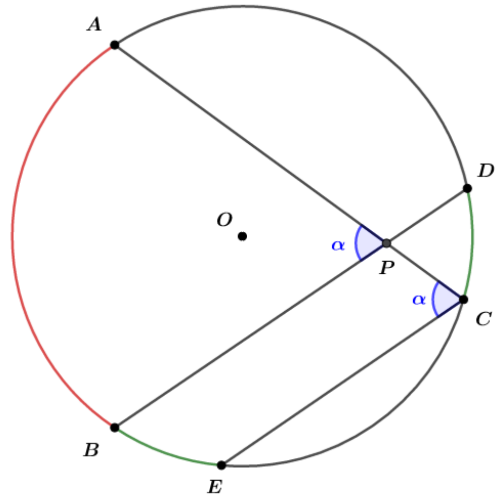
Além desse caso, temos outros dois:

$P$ pode estar localizado no interior da circunferência ou $P$ pode estar no exterior da circunferência.

Para o caso de $P$ interno à circunferência:




Nesse caso, podemos traçar um segmento de reta paralelo ao segmento $\overline{BD}$ e que passe por $C$:

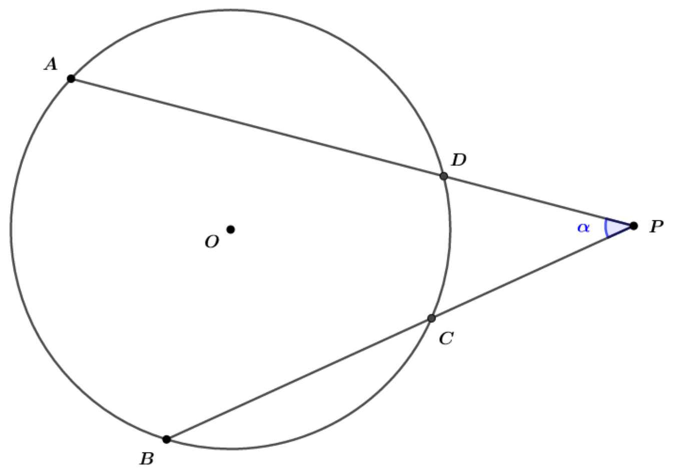



Como $EC//BD$, temos $E\hat{C}A \equiv B\hat{P}A$ e a medida dos arcos $\widehat{BE}$ e $\widehat{CD}$ são iguais. Assim, podemos ver que:

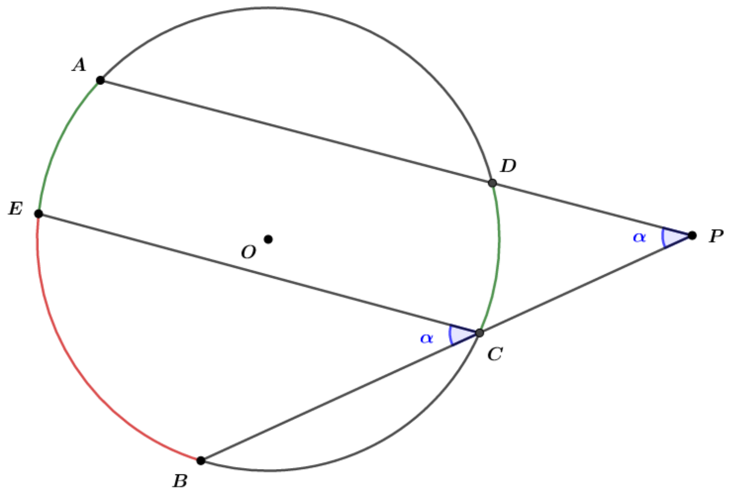
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BE}}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}}$$

Para o caso de $P$ externo à circunferência:




Vamos construir o segmento de reta $\overline{CE}$ paralelo ao segmento $\overline{AD}$:




Como $CE//AD$, temos $E\hat{C}B \equiv A\hat{P}B$ e $\widehat{AE} \equiv \widehat{CD}$. Desse modo:

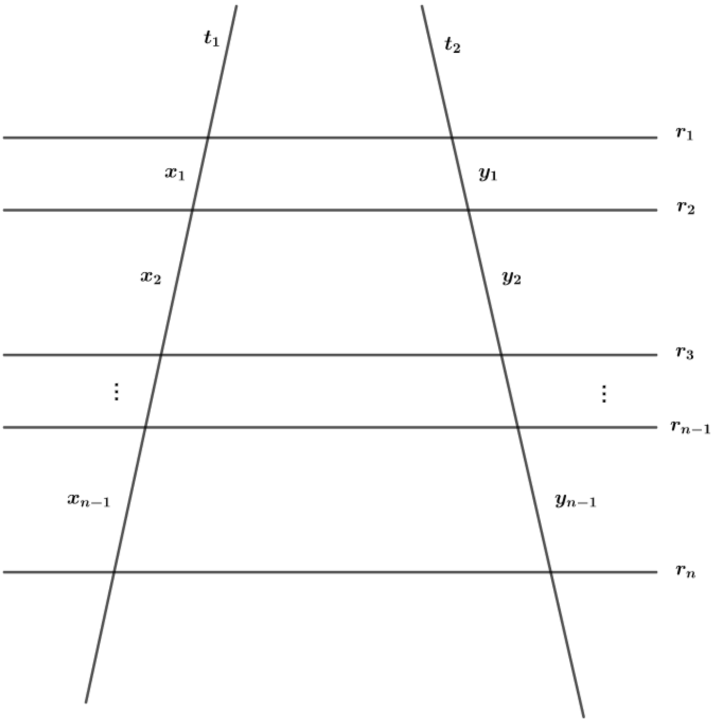
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AE}}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}}$$

## 2. TEOREMA DE TALES

O Teorema de Tales afirma que dado um feixe de retas paralelas, os segmentos de retas transversais a estas retas são proporcionais entre si.

Sejam as retas $r_1//r_2//r_3//...//r_n$ e $k \in \mathbb{R}_+^*$, então:




$$\boxed{\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = k}$$

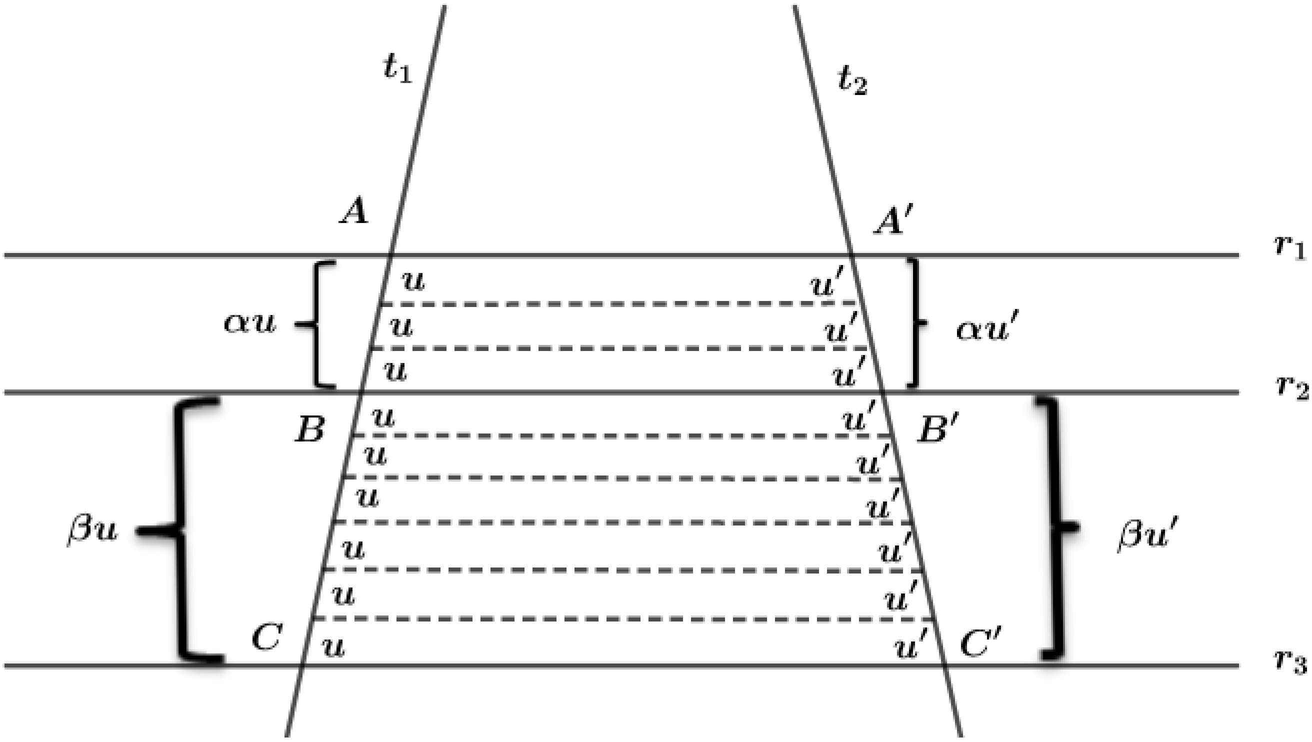
$t_1$ e $t_2$ são as retas transversais ao feixe de retas paralelas.

**Demonstração:**

Devemos dividir em dois casos:

Caso 1) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis

Se $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são comensuráveis, podemos escrever a medida desses segmentos como múltiplos de um segmento de unidade $u$. Então, para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ e $u \in \mathbb{R}_+^*$:




$$\begin{cases} \overline{AB} = \alpha \cdot u \\ \overline{BC} = \beta \cdot u \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\begin{cases} \overline{A'B'} = \alpha \cdot u' \\ \overline{B'C'} = \beta \cdot u' \end{cases} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

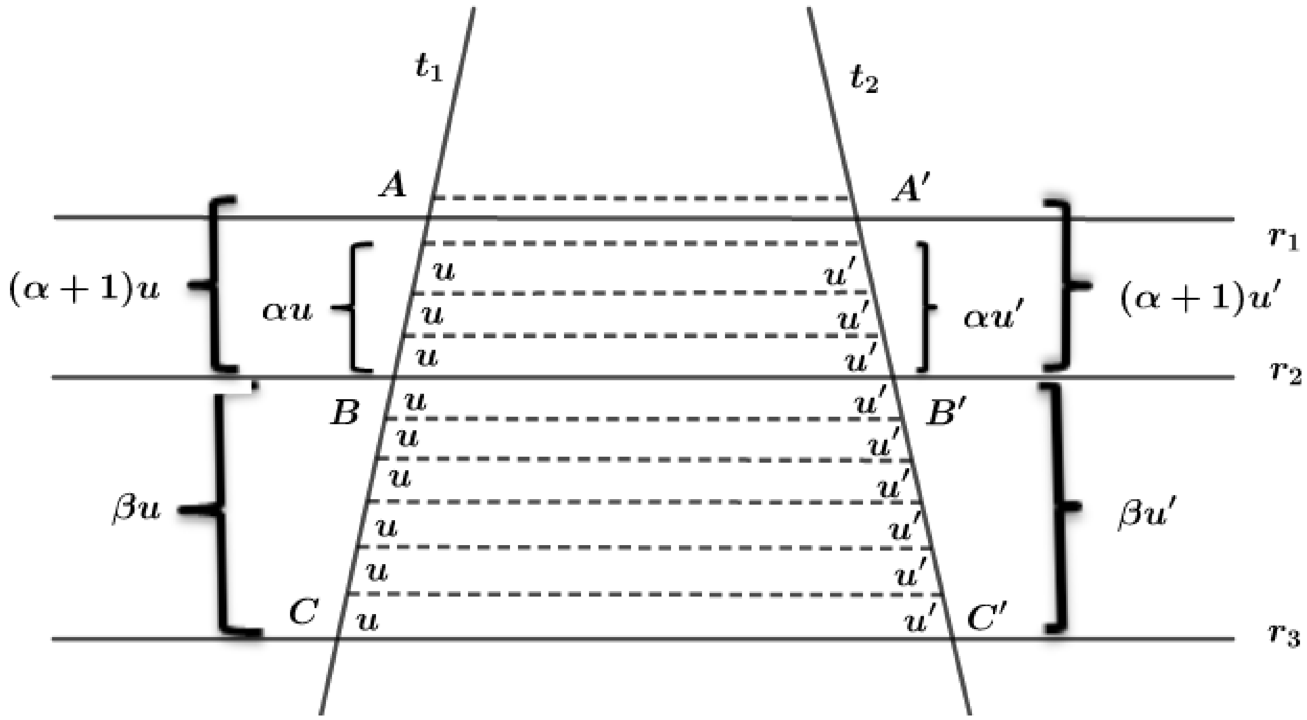
Caso 2) Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis

Se $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis, não podemos escrever ambos como múltiplos de um segmento de unidade. Então, tomando um segmento de medida $u$ que caiba $\beta$ vezes em $\overline{BC}$, temos:

$$\overline{BC} = \beta \cdot u$$

Como $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são incomensuráveis, temos que existe $\alpha \in \mathbb{N}^*$ tal que:

$$\alpha \cdot u < \overline{AB} < (\alpha + 1) \cdot u$$




Dividindo a desigualdade de $AB$ por $BC$, temos:

$$\frac{\alpha \cdot u}{\overline{BC}} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{(\alpha+1)\cdot u}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\alpha \cdot u}{\beta \cdot u} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{(\alpha+1)\cdot u}{\beta \cdot u}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} < \frac{\alpha+1}{\beta} \quad (I)$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \in \left(\frac{\alpha}{\beta}; \frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

Analogamente para $A'B'$ e $B'C'$:

$$B'C' = \beta \cdot u'$$

$$\alpha \cdot u' < A'B' < (\alpha+1)\cdot u'$$

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} < \frac{\alpha+1}{\beta} \quad (II)$$

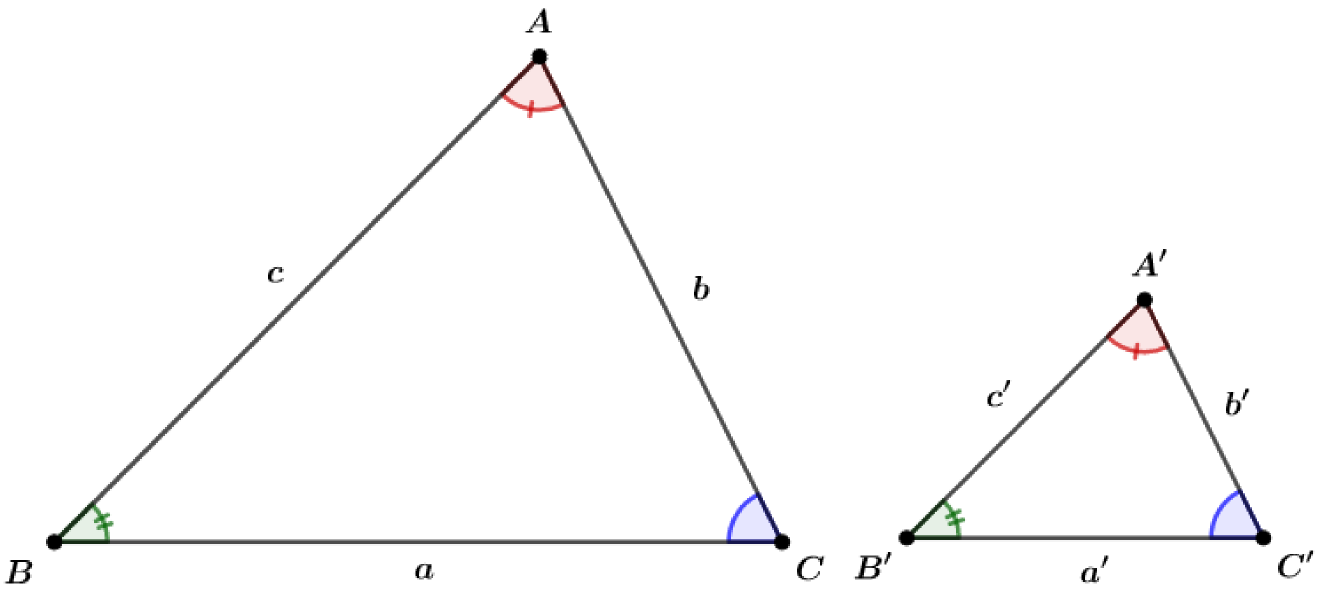
$$\therefore \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \in \left(\frac{\alpha}{\beta}; \frac{\alpha+1}{\beta}\right)$$

Podemos escolher as unidades de medidas $u$ e $u'$ muito próximas de zero e, assim, o múltiplo $\beta$ tenderia ao infinito. Consequentemente:

$$u, u' \to 0 \Rightarrow \beta \to \infty \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \to \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \therefore \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

# 3. SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos internos são congruentes e os lados opostos a esses ângulos congruentes são proporcionais entre si. Usamos o símbolo $\sim$ para indicar que dois triângulos são semelhantes.

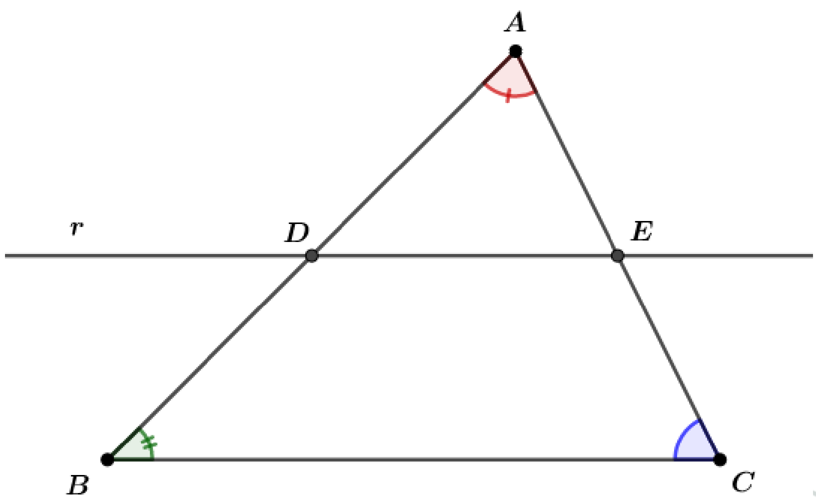



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C' \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Definimos $k$ como a razão de semelhança dos triângulos semelhantes.

## 3.1. TEOREMA FUNDAMENTAL

Dado o seguinte triângulo $ABC$ e a reta $r$ que passa por ele nos pontos $D$ e $E$, temos:



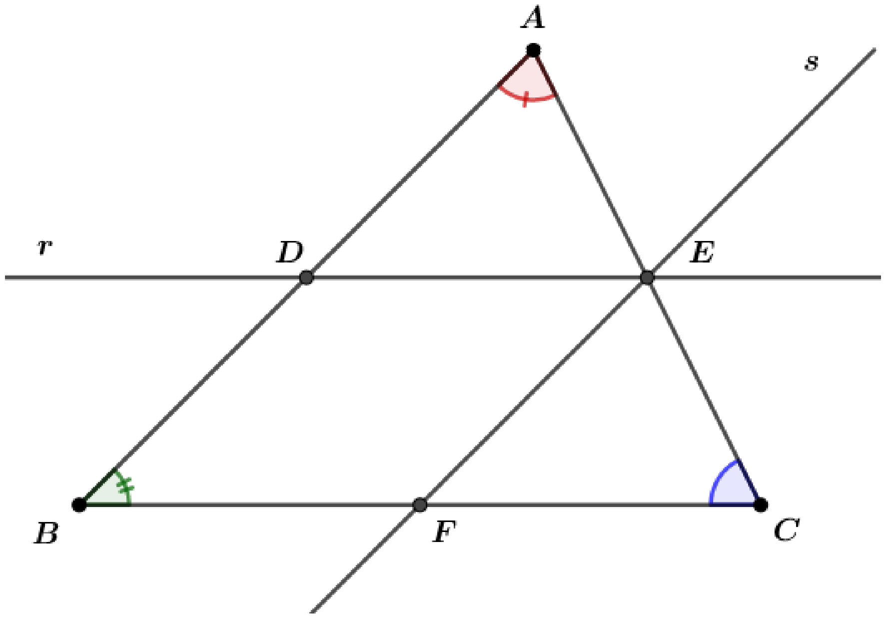
$$\boxed{r//BC \Leftrightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC}$$

Se a reta $r$ for paralela a um dos lados de um triângulo $ABC$, o $\Delta ADE$ que ele determina é semelhante ao $\Delta ABC$.

**Demonstração:**

Como $r$ é paralelo ao lado $BC$, temos $\hat{B} \equiv \hat{D}, \hat{E} \equiv \hat{C}$ e $\hat{A}$ é um ângulo comum aos $\Delta ABC$ e $\Delta ADE$.

Vamos construir a reta paralela $s$ ao lado $AB$:




Aplicando o Teorema de Tales nas retas paralelas $r$ e $AB$:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

Aplicando o Teorema de Tales nas retas paralelas $s$ e $AB$:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

Como $BDEF$ é um paralelogramo, temos $BF = DE$, desse modo:

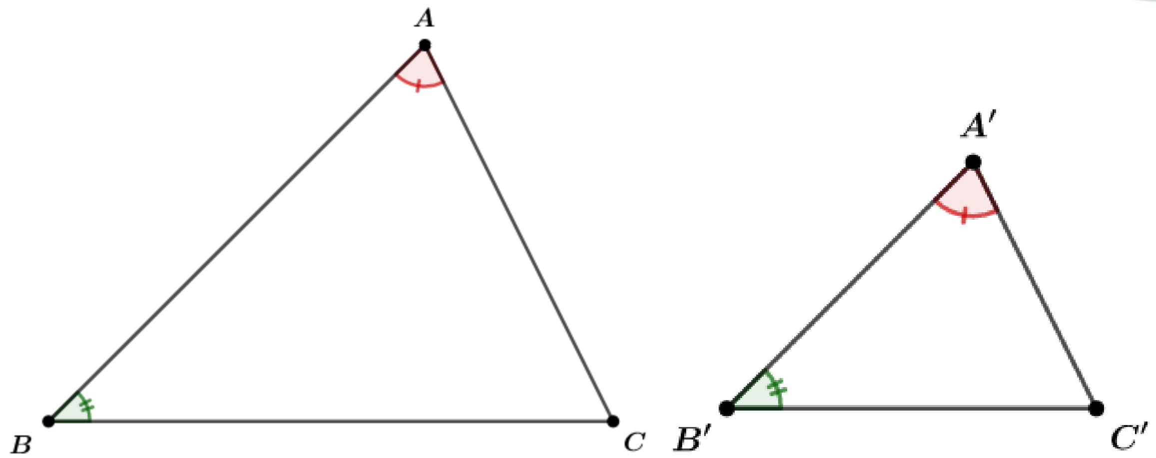
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

Portanto, os lados correspondentes dos triângulos são proporcionais e os ângulos internos são ordenadamente congruentes. Logo, são semelhantes.

## 3.2. CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

### 3.2.1. AA (DOIS ÂNGULOS CONGRUENTES)

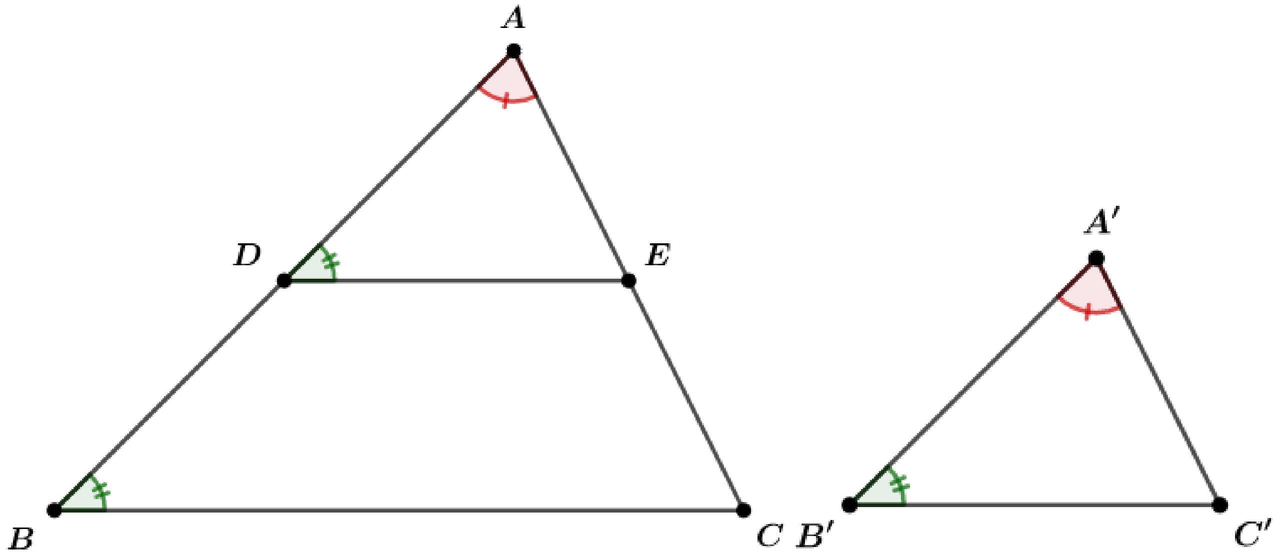
Se dois triângulos tiverem dois ângulos congruentes, eles serão semelhantes.




$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ B \equiv B' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

**Demonstração:**

Supondo que $AB > A'B'$, podemos construir um triângulo $ADE$ no triângulo $ABC$ tal que $\widehat{D} \equiv \widehat{B}'$ e $AD \equiv A'B'$:



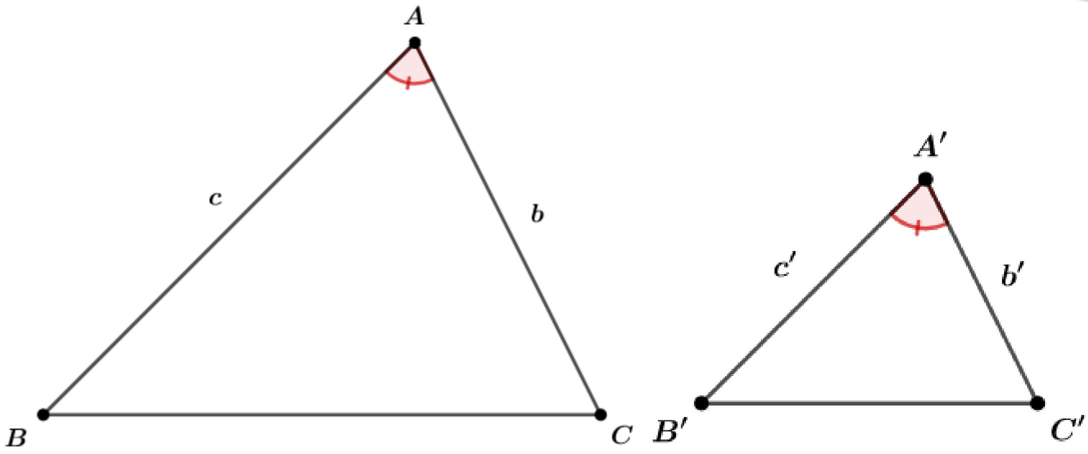

Pelo critério de congruência ALA, podemos afirmar que $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$.

Como $B \equiv B' \equiv D$, temos que $\overline{DE} // \overline{BC}$, portanto, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

Como $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$, temos $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$. Logo, são semelhantes.

### 3.2.2. LAL (LADO-ÂNGULO-LADO)

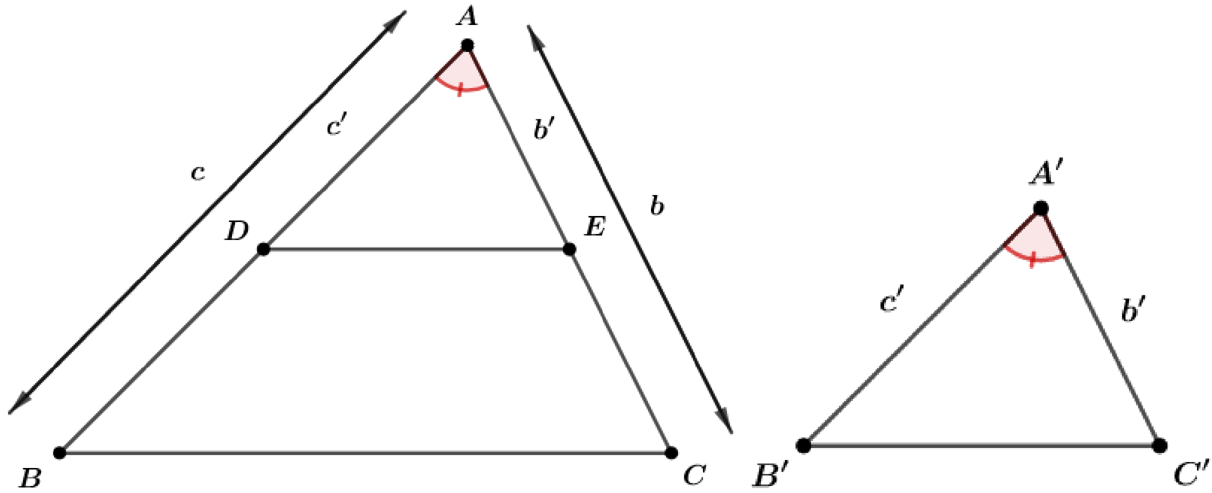
Se dois triângulos tiverem dois lados proporcionais e o ângulo compreendido entre eles for congruente, então esses triângulos são semelhantes.




$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

**Demonstração:**

Supondo $AB > A'B'$, vamos traçar o segmento de reta $\overline{DE}$ no triângulo $ABC$ tal que $AD \equiv A'B'$ e $AE \equiv A'C'$:



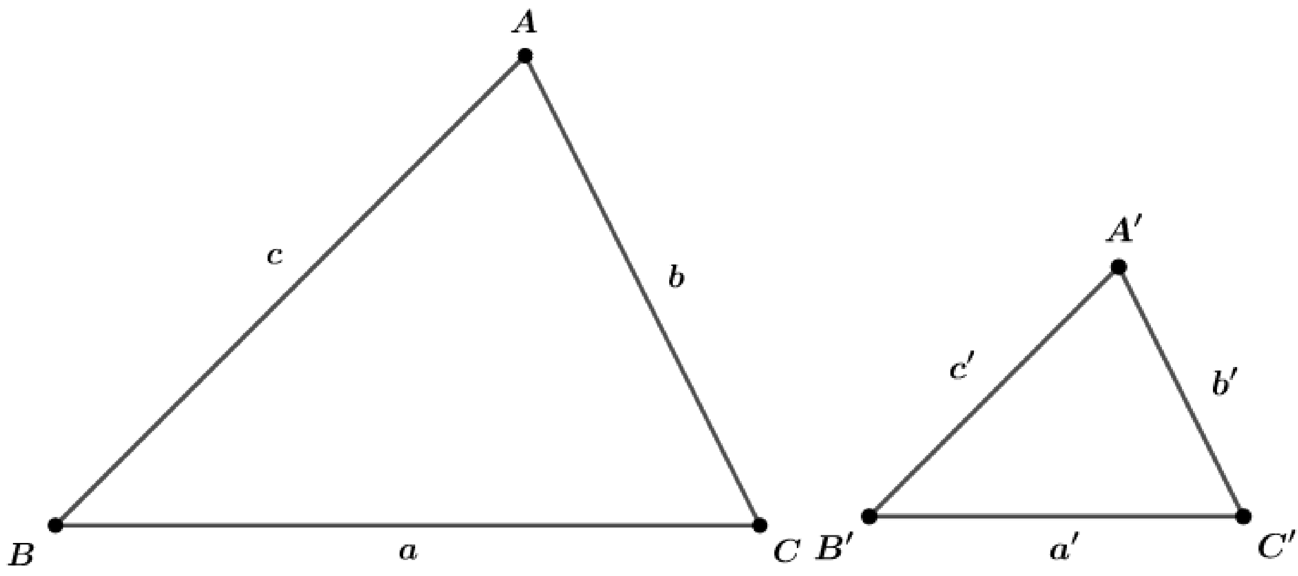

Pelo Teorema de Tales, como $\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$, temos que $\overline{DE} // \overline{BC}$. Então, $\widehat{D} \equiv \hat{B}$ e $\hat{E} \equiv \hat{C}$.

Usando o critério de congruência LAL, temos $\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$. Logo, $\widehat{D} \equiv \widehat{B}'$ e $\hat{E} \equiv \widehat{C}'$.

Portanto, pelo critério de semelhança AA, podemos ver que $\hat{A} \equiv \widehat{A}'$ e $\hat{B} \equiv \widehat{B}'$ implica $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

## 3.2.3. LLL (LADO-LADO-LADO)

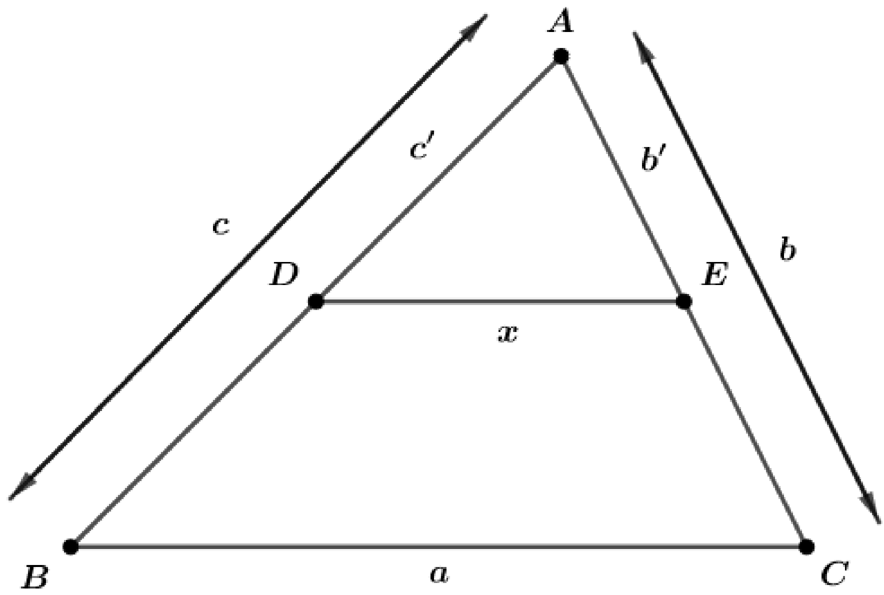
Se dois triângulos tiverem os lados correspondentes proporcionais entre si, então eles são semelhantes.




$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

**Demonstração:**

Supondo que $AB > A'B'$, podemos traçar o segmento de reta $\overline{DE}$, tal que $AD \equiv A'B'$ e $AE \equiv A'C'$:




Usando o Teorema de Tales:

$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow DE//BC$$

Então:

$$\hat{D} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{E} \equiv \hat{C} \Rightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC$$

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Da hipótese, temos:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

Portanto:

$$a' = x$$

$$\Delta ADE \equiv \Delta A'B'C'$$

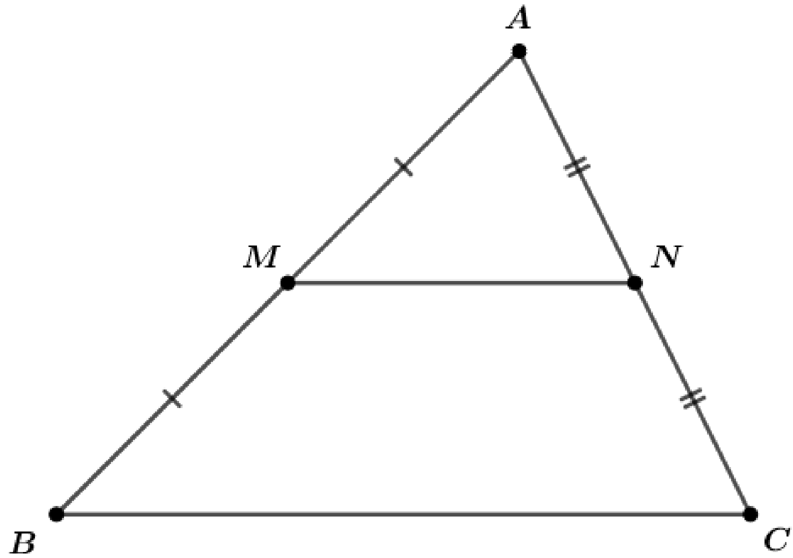
$$\therefore \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

## 3.3. PROPRIEDADES

As seguintes propriedades decorrem da semelhança de triângulos.

### 3.3.1. BASE MÉDIA

Seja $ABC$, um triângulo qualquer. Se $M$ é o ponto médio do lado $AB$ e $N$ é o ponto médio do lado $AC$, temos:




Pelo Teorema de Tales, sendo $AM = MB$ e $AN = NC$:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN//BC$$

Desse modo:

$$M \equiv B \text{ e } N \equiv C$$

Pelo critério de semelhança AA, temos:

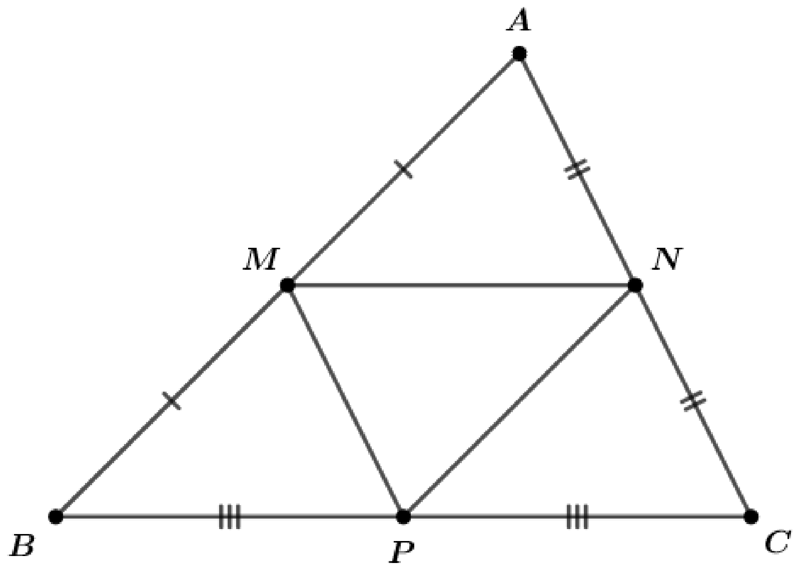
$$\Delta AMN \sim \Delta ABC$$

A razão de proporção entre eles é $1/2$:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

Se $BC$ é a base do triângulo $ABC$, então $MN$ é chamado de base média do triângulo $ABC$.

Tomando-se $P$, o ponto médio do lado $BC$ e formando o triângulo $MNP$, encontramos:




Vimos que $MN$ é paralelo ao lado $BC$, analogamente, para os outros lados, podemos provar que $NP//AB$ e $MP//AC$. Então, o triângulo $MNP$ é semelhante ao triângulo $ABC$ e possui razão igual a $1/2$.

## 3.3.2. RAZÃO DE PROPORÇÃO

Se a razão de proporção de dois triângulos é $k$, então a razão entre seus elementos lineares correspondentes é $k$. Assim, a razão entre:

-suas alturas é $k$;

-suas medianas é $k$;

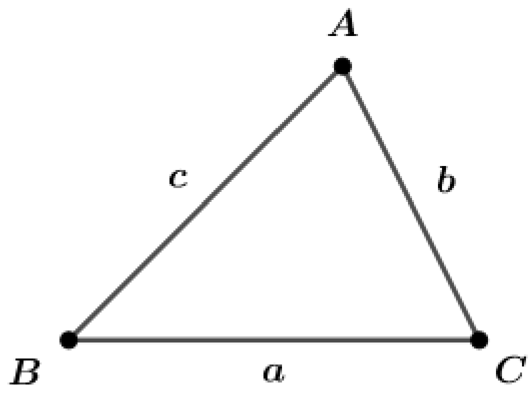
-seus perímetros é $k$;

-os raios das circunferências inscritas é $k$;

-os raios das circunferências circunscritas é $k$;

-dois elementos lineares e homólogos é $k$.

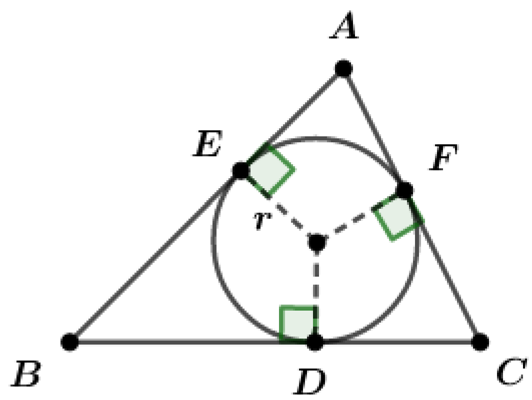
Chamamos de perímetro a soma de todos os lados de um triângulo, então para um triângulo $ABC$:




$$2p = a + b + c$$

$p$ é o semiperímetro do triângulo $ABC$ e $2p$ é o seu perímetro.

Uma circunferência inscrita em um triângulo é uma circunferência que tangencia internamente os lados do triângulo:

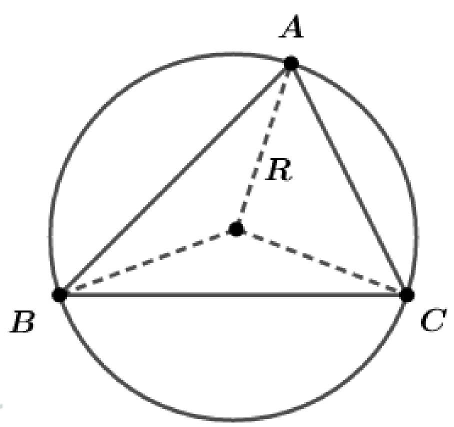



$D, E, F$ são os pontos de tangência da circunferência inscrita ao triângulo $ABC$.

$r$ é o raio da circunferência inscrita.

Perceba que os segmentos de reta que ligam o centro da circunferência aos pontos de tangência sempre formam um ângulo reto.

Uma circunferência circunscrita a um triângulo é uma circunferência que passa por todos os vértices do triângulo:



$R$ é o raio da circunferência circunscrita.

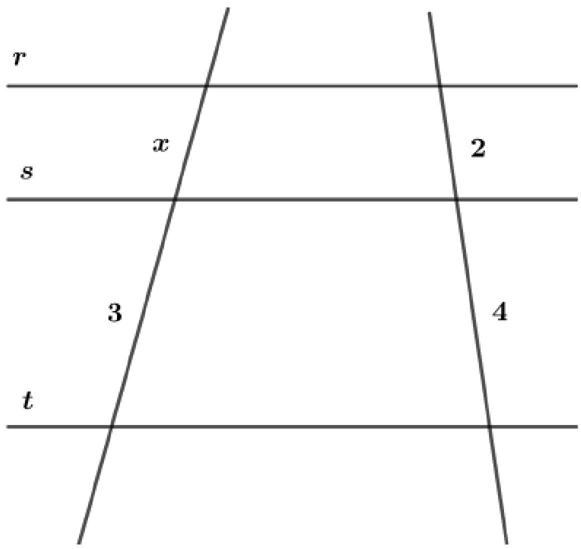
Dizemos que dois elementos são homólogos quando ambos são correspondentes um ao outro. Por exemplo, tomando-se dois triângulos semelhantes, podemos afirmar que os lados opostos aos ângulos congruentes são homólogos.

HORA DE PRATICAR!

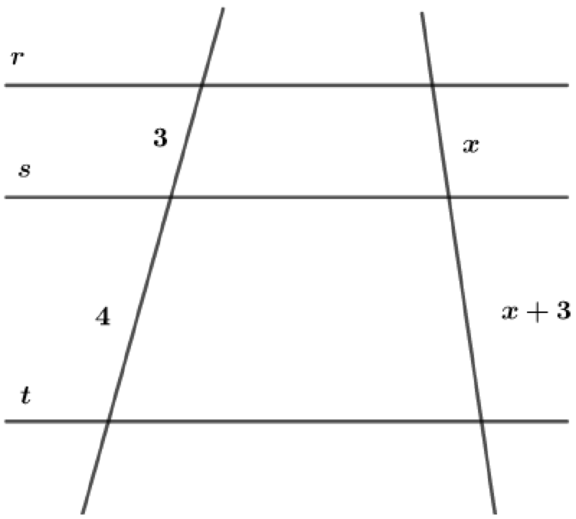
**Exercícios de Fixação**

**113.** Sendo $r, s, t$ retas paralelas. Calcule o valor de $x$:

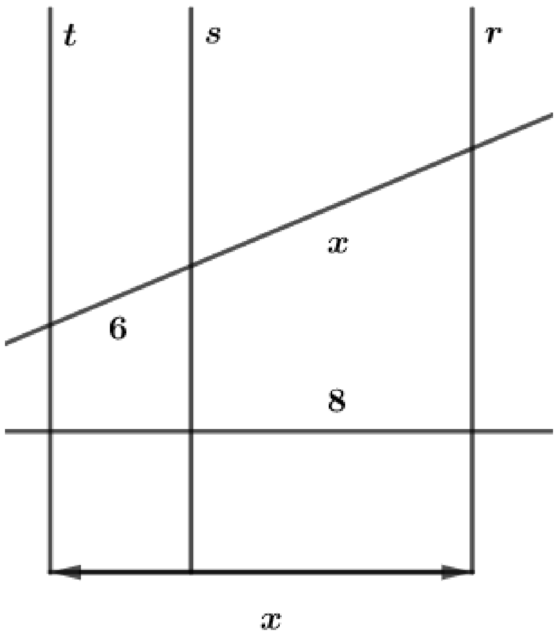
a)




b)

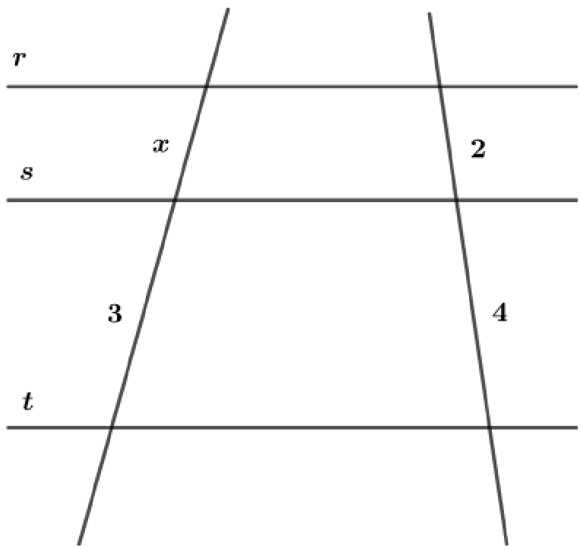



c)




**Resolução:**

a)

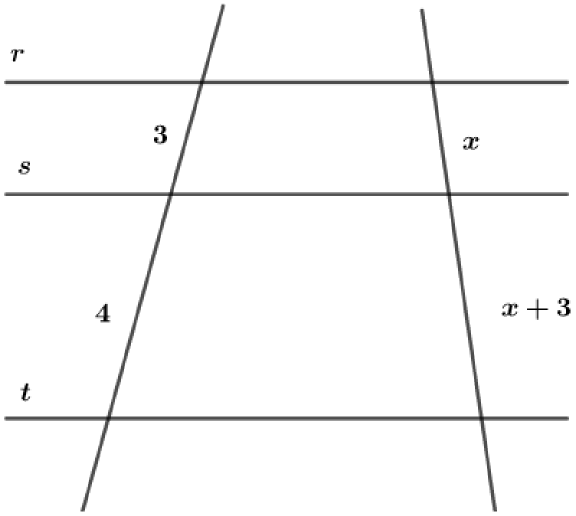



Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{4}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

b)

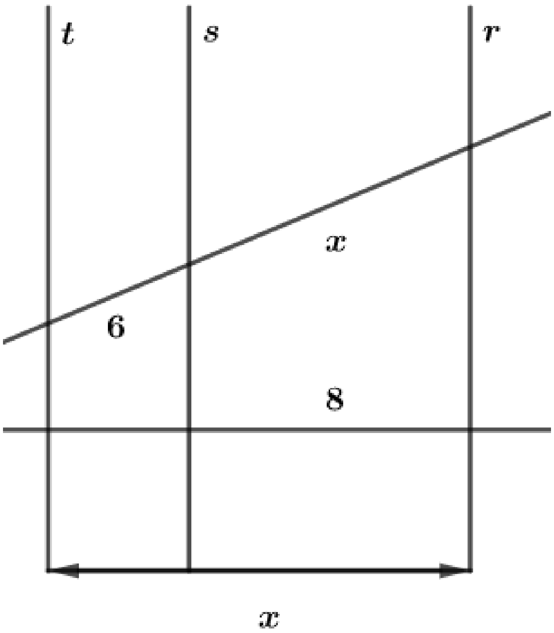



$$\frac{3}{4} = \frac{x}{x+3}$$

$$3x + 9 = 4x$$

$$x = 9$$

c)




$$\frac{x}{x+6} = \frac{8}{x}$$

$$x^2 = 8x + 48$$

$$x^2 - 8x - 48 = 0$$

$$x = \left(4 \pm \sqrt{64}\right)$$

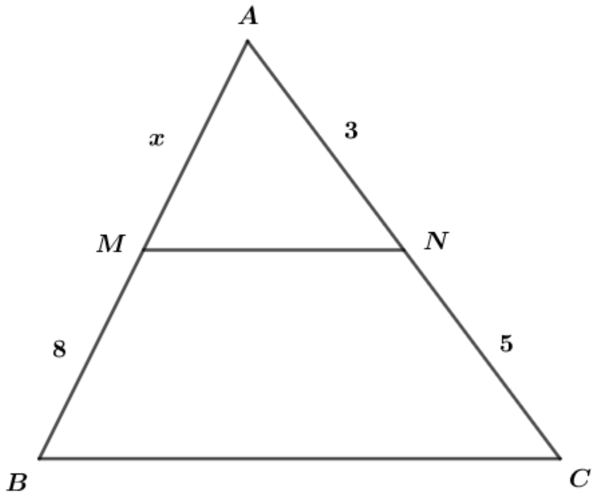
$$x = 4 \pm 8$$

$$x = 12\ ou - 4$$

$$\therefore x = 12$$

**Gabarito: a) $x = 3/2$ b) $x = 9$ c) $x = 12$**

**114.** Sendo $MN//BC$, calcule o valor de $x$ na figura abaixo:




**Resolução:**

Aplicando o teorema de Tales:

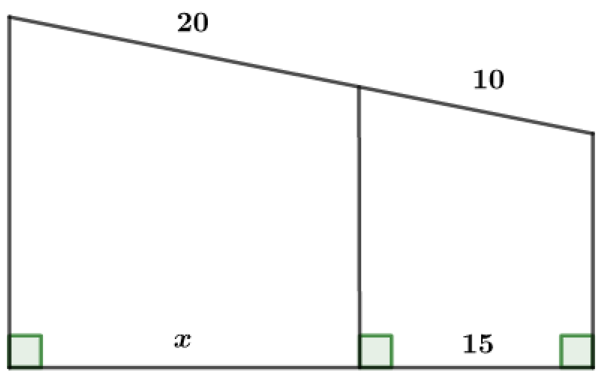
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{x}{8} = \frac{3}{5}$$

$$x = \frac{24}{5}$$

**Gabarito:** $x = 24/5$

**115.** Calcule o valor de $x$:



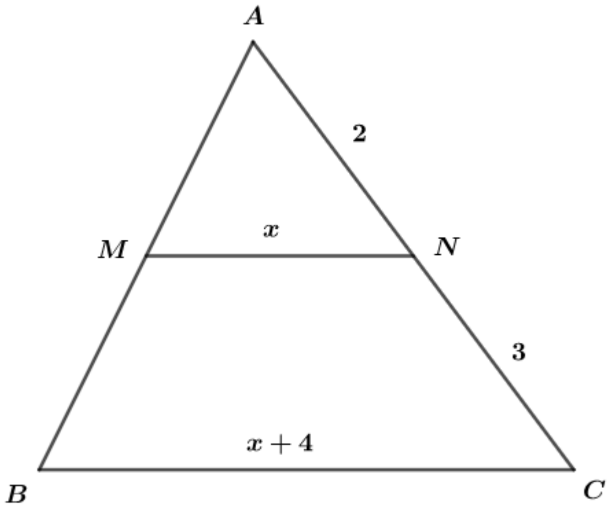

**Resolução:**

$$\frac{20}{10} = \frac{x}{15}$$

$$x = 30$$

**Gabarito:** $x = 30$

**116.** Sendo $MN//BC$, calcule o valor de $x$ na figura abaixo:




**Resolução:**

Como $MN//BC$, temos que $\Delta AMN \sim \Delta ABC$:

$$\frac{AN}{MN} = \frac{AC}{BC}$$

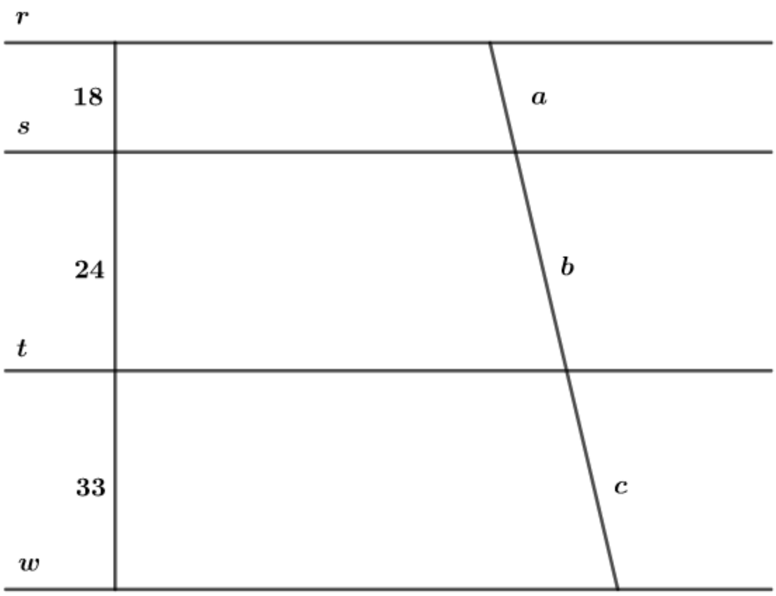
$$\frac{2}{x} = \frac{2+3}{x+4}$$

$$2x + 8 = 5x$$

$$x = \frac{8}{3}$$

**Gabarito:** $x = 8/3$

**117.** **(CGTMG/2015)** Na figura a seguir, as retas $r, s, t$ e $w$ são paralelas e, $a, b$ e $c$ representam medidas dos segmentos tais que $a + b + c = 100$.




Conforme esses dados, os valores de $a, b$ e $c$ são, respectivamente, iguais a

a) 24, 32 e 44.

b) 24, 36 e 40.

c) 26, 30 e 44.

d) 26, 34 e 40.

**Resolução:**

Pelo teorema de Tales, temos:

$$\frac{18}{a} = \frac{24}{b} = \frac{33}{c} = \frac{18+24+33}{a+b+c}$$

$$\frac{18}{a} = \frac{24}{b} = \frac{33}{c} = \frac{75}{100}$$

$$\frac{18}{a} = \frac{24}{b} = \frac{33}{c} = \frac{3}{4}$$

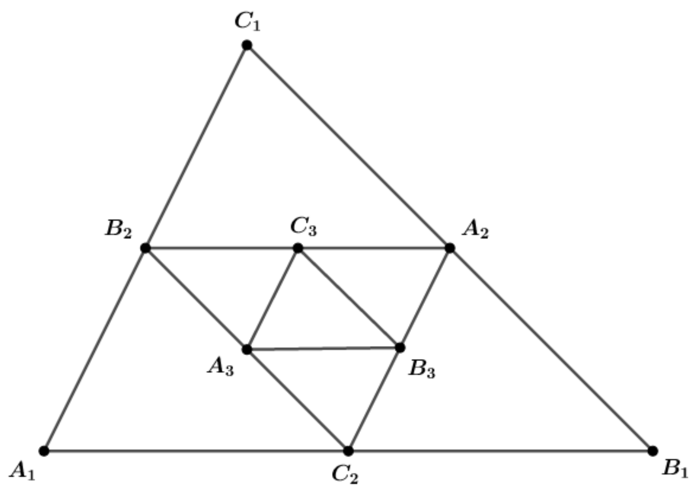
$$\Rightarrow a = 24$$

$$\Rightarrow b = 32$$

$$\Rightarrow c = 44$$

**Gabarito: “a”.**

**118.** **(UERJ/2019)** Os triângulos $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3$, ilustrados abaixo, possuem perímetros $p_1, p_2, p_3$, respectivamente. Os vértices desses triângulos, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo anterior.




Admita que $A_1B_1 = B_1C_1 = 7$ e $A_1C_1 = 4$.

Assim, $(p_1, p_2, p_3)$ define a seguinte progressão:

a) aritmética de razão $-8$.

b) aritmética de razão $-6$.

c) geométrica de razão $1/2$.

d) geométrica de razão $1/4$.

**Resolução:**

Como os vértices dos triângulos internos são os pontos médios de outros triângulos, temos que cada triângulo terá razão igual a $1/2$ do triângulo externo. Desse modo, temos:

$$p_1 = 7 + 7 + 4 = 18$$

$$p_2 = \frac{p_1}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$p_3 = \frac{p_2}{2} = \frac{9}{2}$$

Portanto, a sequência $(p_1, p_2, p_3)$ é uma PG de razão $1/2$.

**Gabarito: "c".**

**119.** **(IFCE/2016)** O triângulo $ABC$ tem lados medindo 8 cm, 10 cm e 16 cm, enquanto o triângulo $DEF$, semelhante a $ABC$, tem perímetro 204 cm. O maior e o menor dos lados de $DEF$ medem, respectivamente,

a) 64 cm e 32 cm.

b) 60 cm e 48 cm.

c) 48 cm e 24 cm.

d) 96 cm e 48 cm.

e) 96 cm e 64 cm.

**Resolução:**

O enunciado nos diz que os triângulos $ABC$ e $DEF$ são semelhantes, logo, os lados e os seus perímetros possuem a mesma razão de proporção. Vamos calcular o perímetro $p_{ABC}$ do $\Delta ABC$:

$$p_{ABC} = 8 + 10 + 16 = 34$$

Vamos calcular a razão de proporção entre os triângulos:

$$\frac{p_{ABC}}{p_{DEF}} = \frac{34}{204} = \frac{1}{6}$$

Logo, a razão de proporção entre os triângulos é $1/6$. Os lados do triângulo $DEF$ são dados por:

$$8\ cm \Rightarrow 48\ cm$$

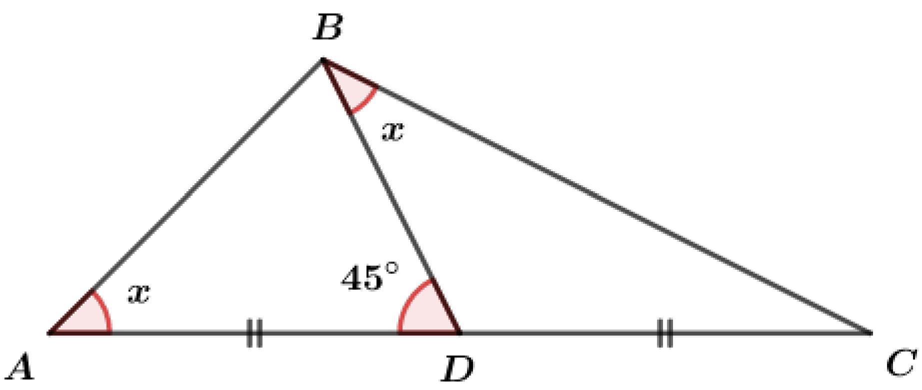
$$10\ cm \Rightarrow 60\ cm$$

$$16\ cm \Rightarrow 96\ cm$$

Portanto, o maior lado é 96 cm e o menor é 48 cm.

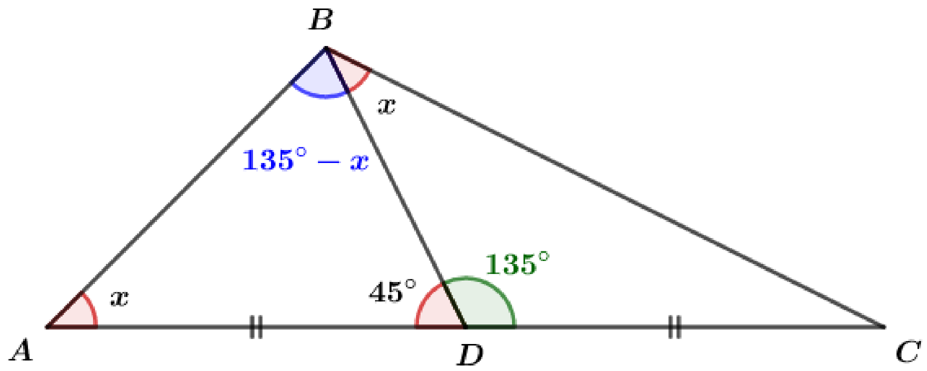
**Gabarito: "d".**

**120.** No triângulo $ABC$, $BD$ é mediana relativa ao lado $AC$ e os ângulos $B\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ são iguais. Se o ângulo $B\widehat{D}A = 45°$, calcule $x$.



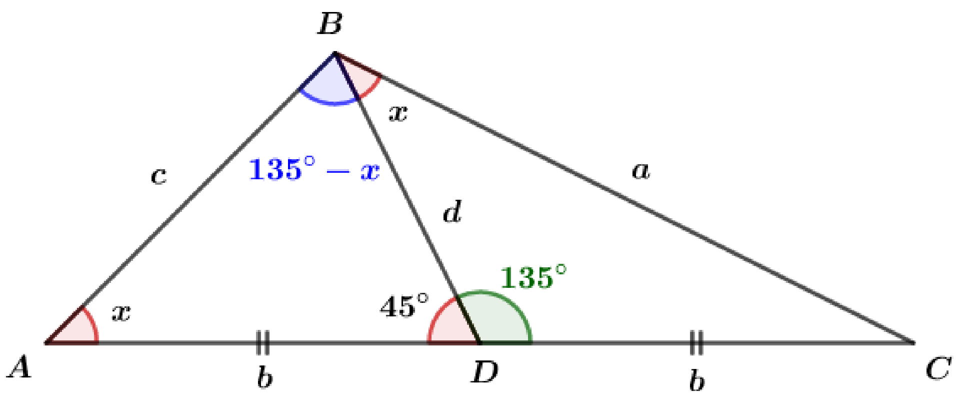

**Resolução:**

Perceba que os triângulos $ABC$ e $BDC$ são semelhantes, veja:




Pelo critério de semelhança $AA$:

$$B\hat{A}C \equiv D\hat{B}C \text{ e } A\hat{B}C \equiv B\hat{D}C \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta BDC$$




Fazendo a razão de semelhança:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{DC}$$

$$\frac{2b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow a = \sqrt{2}b$$

Aplicando a lei dos senos no triângulo $ABC$:

$$\frac{a}{senx} = \frac{2b}{sen(135°)}$$

$$\frac{\sqrt{2}b}{senx} = \frac{2b}{sen(135°)}$$

$$senx = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$senx = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 30°$$

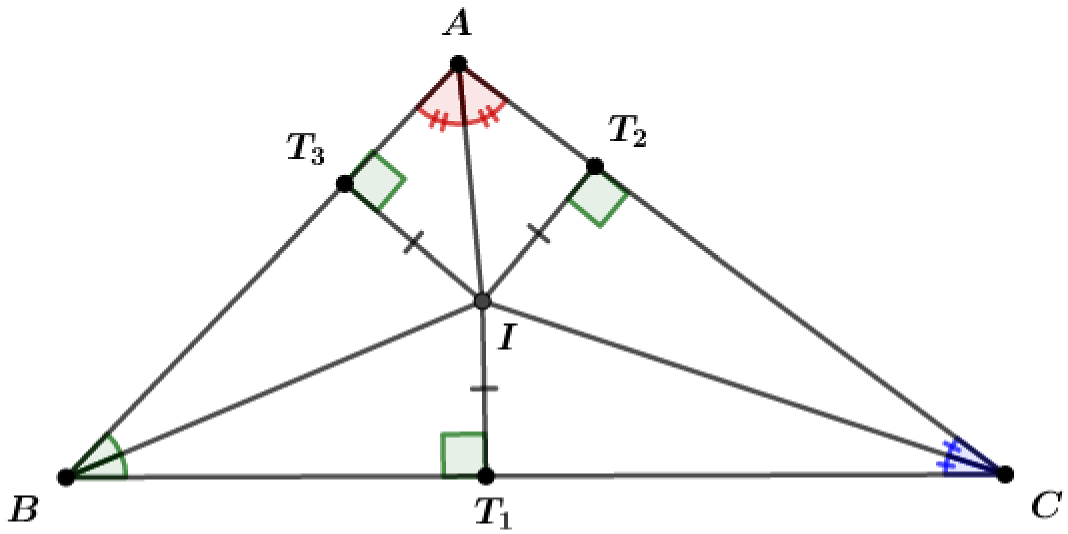
**Gabarito:** $\boldsymbol{x = 30°}$

# 4. PONTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO

## 4.1. INCENTRO E EX-INCENTRO

### 4.1.1. INCENTRO

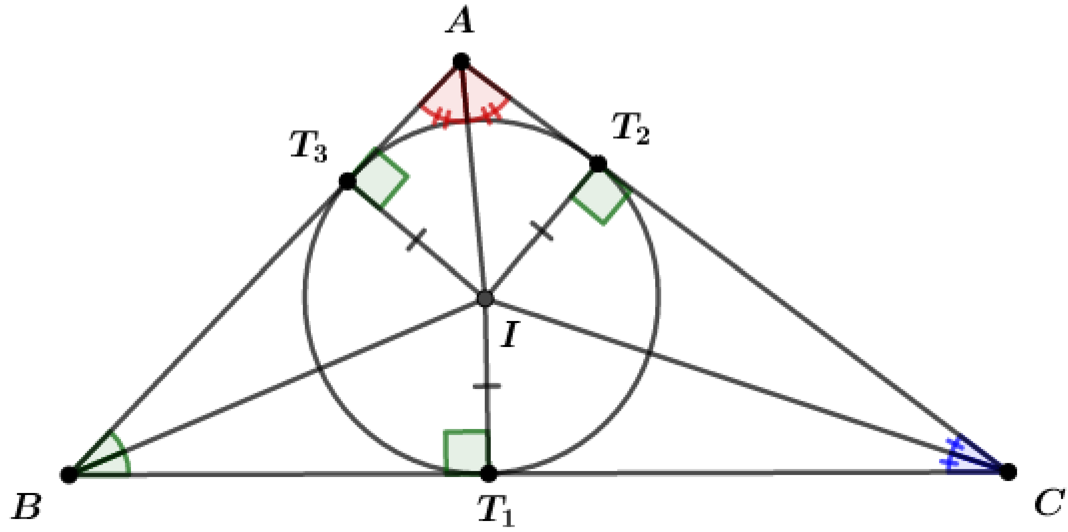
As bissetrizes internas de um triângulo encontram-se em um único ponto. A este ponto denominamos incentro do triângulo.




$I$ é o incentro e este equidista dos lados do triângulo:

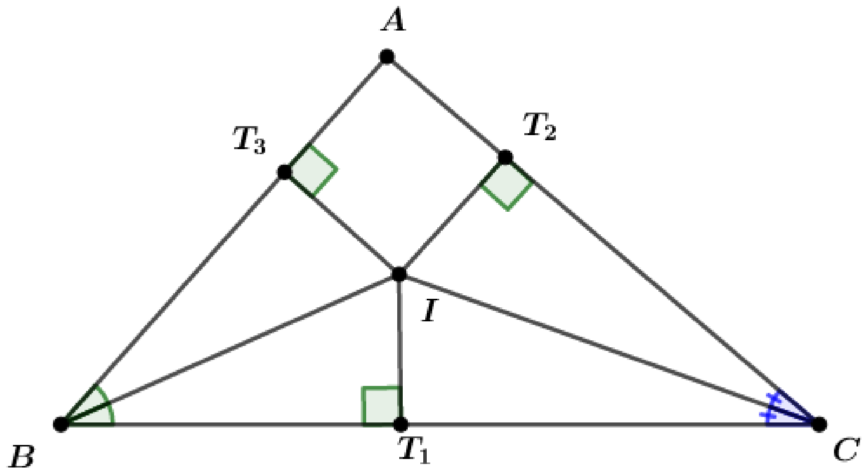
$$IT_1 = IT_2 = IT_3$$

Por esse ponto, podemos desenhar uma circunferência a qual chamamos de circunferência inscrita.




**Demonstração:**

Seja $I$ o ponto onde $\overline{BI}$ e $\overline{CI}$ se interceptam no triângulo $ABC$.




Traçando-se o segmento que liga o ponto $I$ aos lados do triângulo, temos pelo critério de congruência $LAA_0$ que $\Delta T_1BI \equiv \Delta T_3BI$ $(BI \equiv BI, IBT_1 \equiv IBT_3, IT_1B \equiv IT_3B)$ e $\Delta T_1CI \equiv T_2CI$ $(CI \equiv CI, ICT_1 \equiv ICT_2, IT_1C \equiv IT_2C)$. Assim:

$$\Delta T_1BI \equiv \Delta T_3BI \Rightarrow IT_1 = IT_3$$

$$\Delta T_1CI \equiv T_2CI \Rightarrow IT_1 = IT_2$$

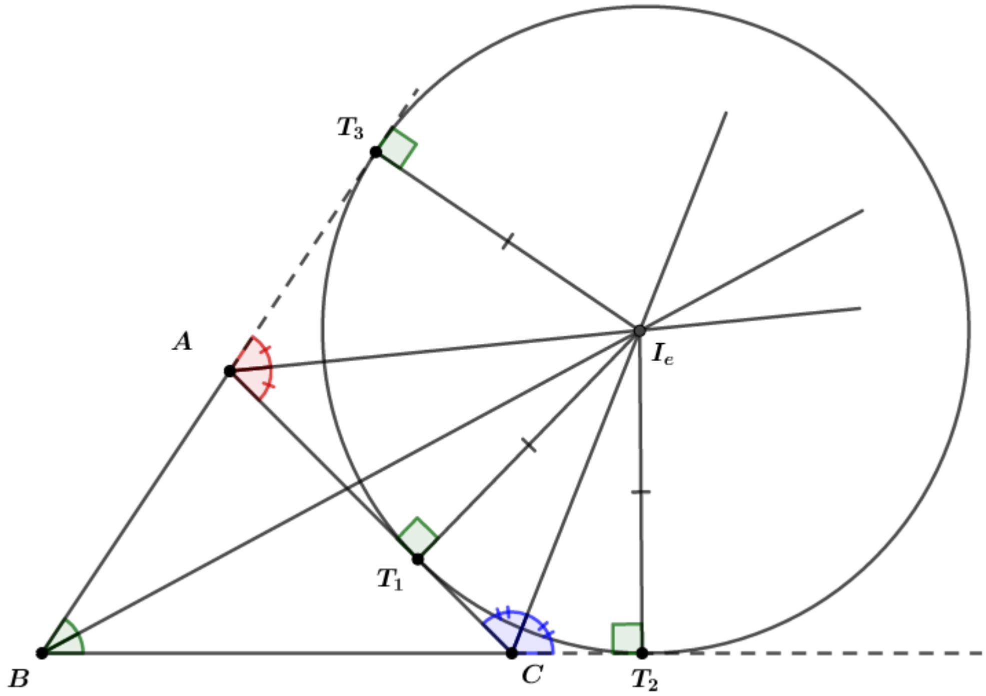
Logo:

$$IT_2 = IT_3$$

Desse modo, podemos afirmar que a bissetriz do vértice $A$ também intercepta o ponto $I$ do triângulo $ABC$.

## 4.1.2. EX-INCENTRO

Chamamos de ex-incentro ao ponto que é interceptado por uma bissetriz interna e duas bissetrizes externas. Esse ponto também equidista dos lados do triângulo e dos prolongamentos dos lados adjacentes:

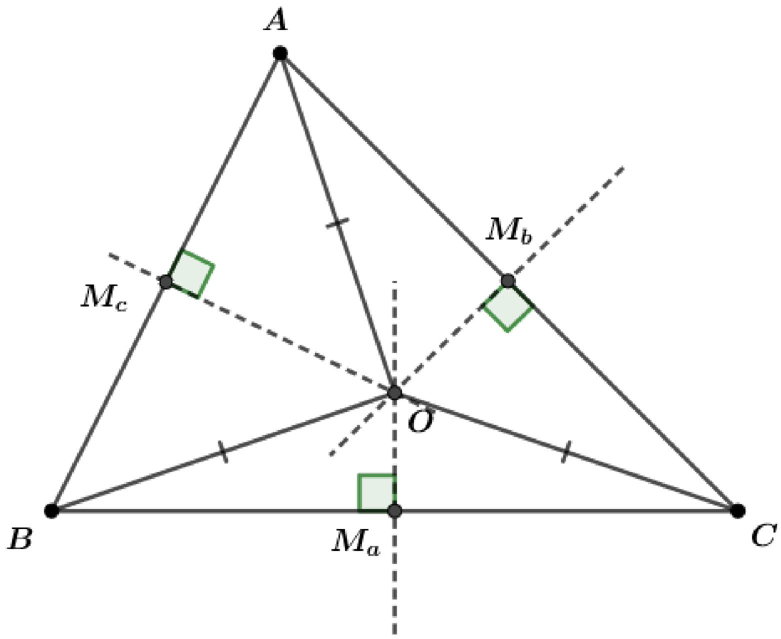



$I_e$ é o ex-incentro do triângulo $ABC$ em relação ao lado $AC$.

A demonstração da unicidade desse ponto é análoga ao caso do incentro.

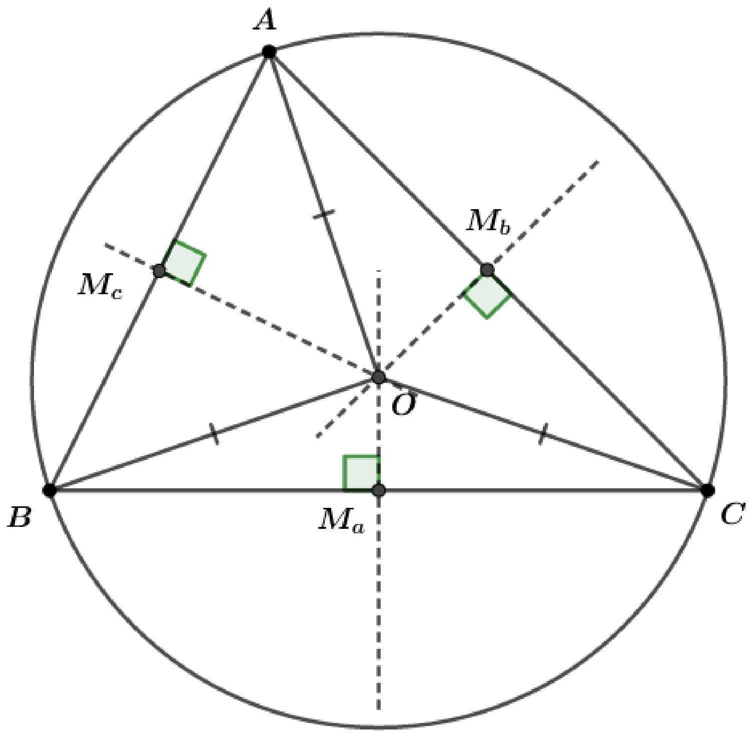
## 4.2. CIRCUNCENTRO

As mediatrizes de cada um dos lados de um triângulo se encontram em um único ponto chamado de circuncentro. Este ponto equidista dos vértices do triângulo.




$O$ é o circuncentro do triângulo $ABC$.

Como o circuncentro equidista dos vértices do triângulo, este ponto é o centro de uma circunferência que passa pelos vértices desse triângulo.




**Demonstração:**

Como a mediatriz é o segmento perpendicular ao ponto médio de outro segmento, temos pelo critério de congruência $LAL$:

$$BM_a \equiv CM_a, BM_aO \equiv CM_aO, M_aO \equiv M_aO \Rightarrow \Delta BM_aO \equiv \Delta CM_aO \Rightarrow OB = OC$$

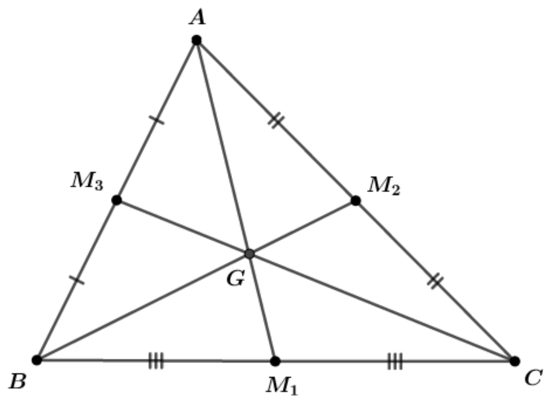
$$BM_c \equiv AM_c, BM_cO \equiv AM_cO, M_cO \equiv M_cO \Rightarrow \Delta BM_cO \equiv \Delta AM_cO \Rightarrow OB = OA$$

$$\Rightarrow OC = OA$$

Portanto, a mediatriz de $AC$ também se encontra no ponto $O$.

## 4.3. BARICENTRO

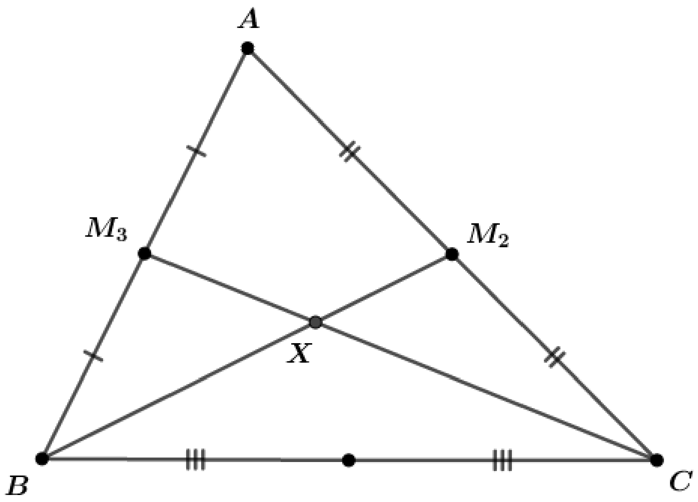
As três medianas de um triângulo interceptam-se num único ponto chamado de baricentro.



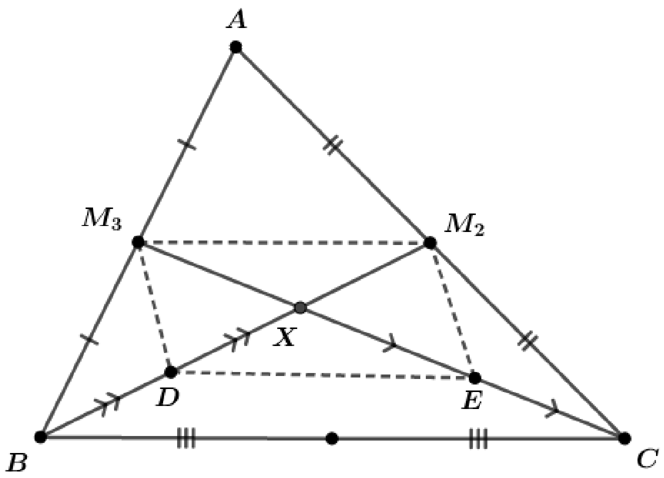

$G$ é o baricentro do triângulo $ABC$.

**Demonstração:**

Seja $X$ o ponto onde $BM_2$ e $CM_3$ se interceptam:




Tomando-se os pontos médios $D$ e $E$ dos segmentos $BX$ e $CX$, respectivamente, temos:




Do triângulo $ABC$:

$$\frac{AM_3}{AB} = \frac{AM_2}{AC} = \frac{1}{2}$$

Pelo teorema de Tales, podemos afirmar que $M_2M_3$ é paralelo ao segmento $BC$ e possui a mesma razão de proporção:

$$M_2M_3 = \frac{BC}{2}$$

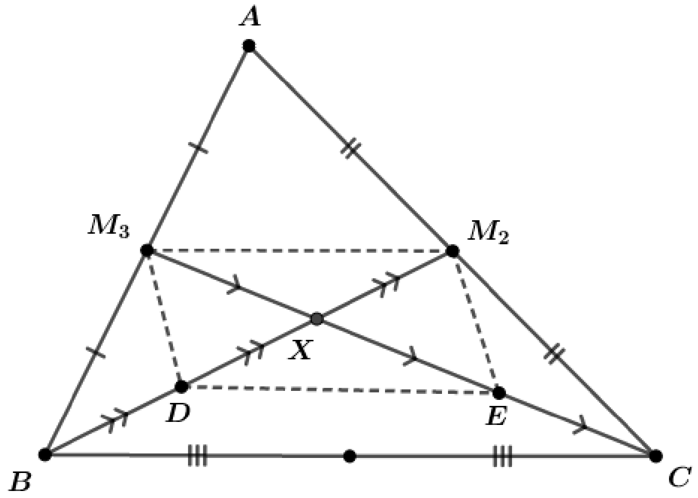
Do triângulo $XBC$:

$$\frac{XD}{XB} = \frac{XE}{XC} = \frac{1}{2}$$

Assim, pelo teorema de Tales, $DE$ também é paralelo ao lado $BC$ com razão de proporção $1/2$:

$$DE = \frac{BC}{2}$$

Como $M_2M_3 \equiv DE$ e $M_2M_3//DE$, temos que $M_2M_3DE$ é um paralelogramo.

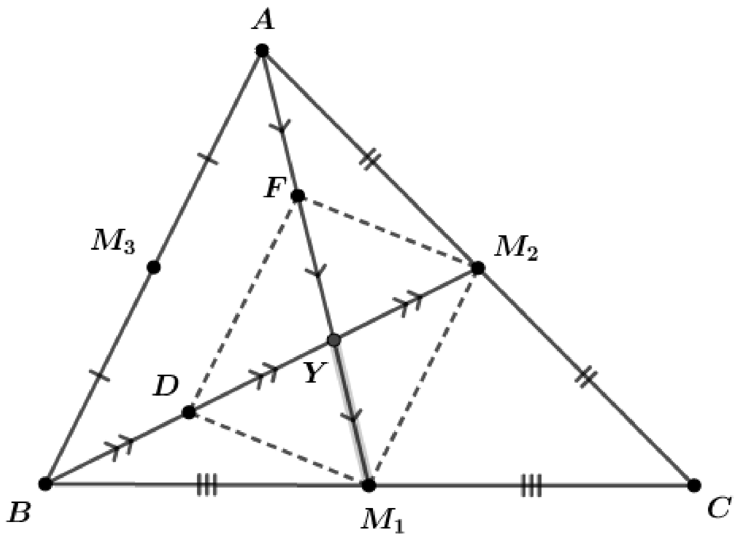



$DM_2$ e $EM_3$ são as diagonais do paralelogramo e:

$$XM_3 \equiv XE \Rightarrow CX = 2XM_3$$

$$XD \equiv XM_2 \Rightarrow BX = 2XM_2$$

Tomando-se $Y$ o ponto de encontro das medianas $AM_1$ e $BM_2$ e usando a mesma ideia acima, temos:



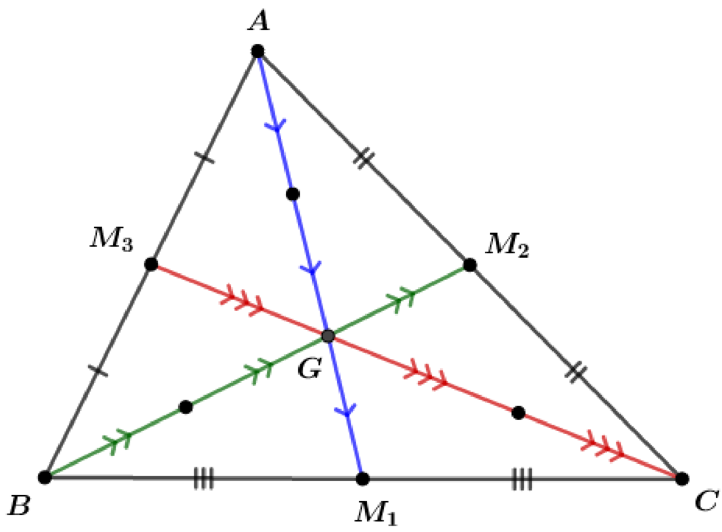

$M_1M_2FD$ é paralelogramo $\Rightarrow DY = YM_2$ e $FY = YM_1$

$$\Rightarrow AY = 2YM_1$$

$$\Rightarrow BY = 2YM_2$$

Portanto, como $BX = 2XM_2$ e $BY = 2YM_2$, temos $X = Y$. Logo, as medianas do triângulo $ABC$ se encontram no mesmo ponto. A esse ponto denominamos de baricentro.

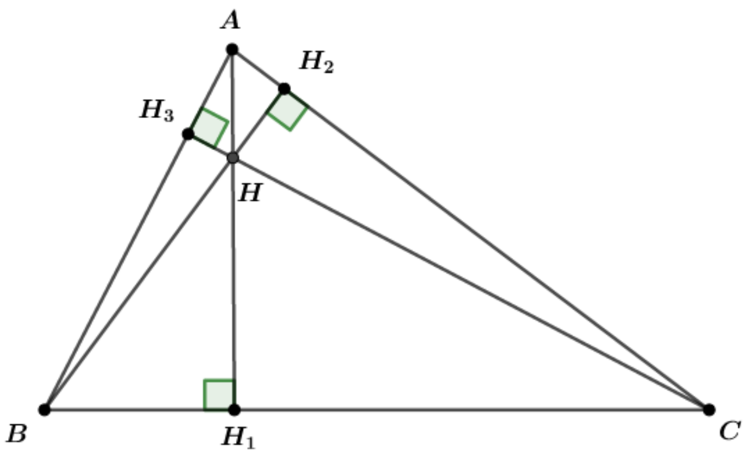
Perceba que uma propriedade do baricentro é que ela divide as medianas na razão de $2/1$:




$$AG = 2GM_1$$
$$BG = 2GM_2$$
$$CG = 2GM_3$$

## 4.4. ORTOCENTRO

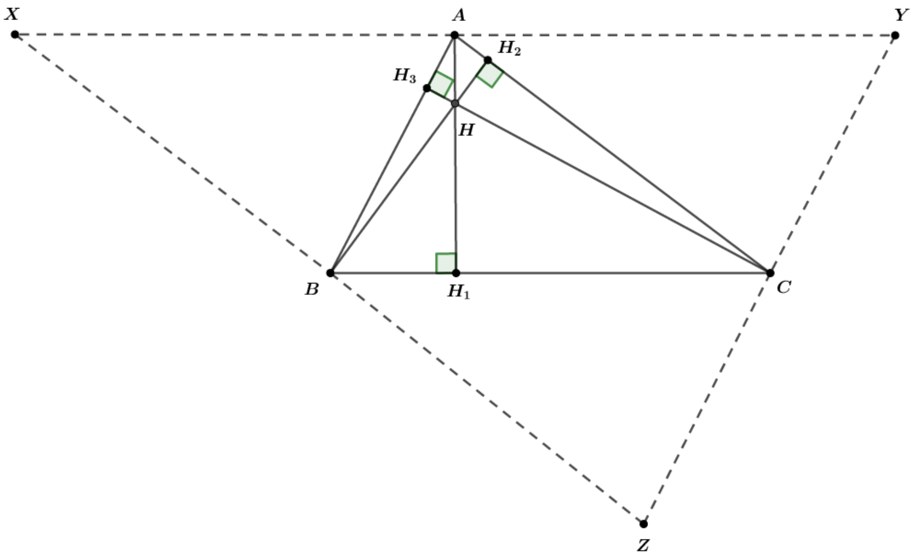
As três alturas de um triângulo interceptam-se num único ponto chamado de ortocentro.




$H$ é o ortocentro do triângulo $ABC$.

**Demonstração:**

Vamos construir os segmentos de retas paralelos aos lados do triângulo:




$$XY//BC$$
$$YZ//AB$$
$$XZ//AC$$

Como $XY//BC$ e $XZ//AC$, temos que $AXBC$ é um paralelogramo. Assim, podemos afirmar:

$$AX = BC \text{ e } BX = AC$$

$XY//BC$ e $YZ//AB$, então $AYCB$ é paralelogramo:

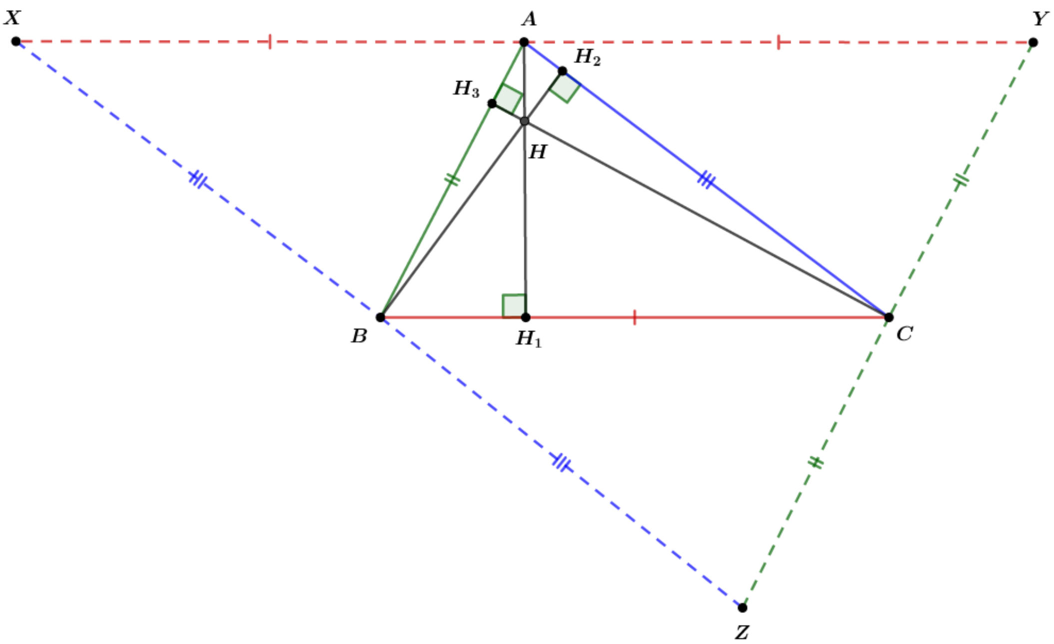
$$AY = BC \text{ e } CY = AB$$

$YZ//AB$ e $XZ//AC$, então $ABZC$ é paralelogramo:

$$CZ = AB \text{ e } BZ = AC$$

Desse modo, concluímos:

$$AX = AY, BX = BZ, CZ = CY$$




$$XY//BC \text{ e } AH_1 \perp BC \Rightarrow AH_1 \perp XY$$

$$XZ//AC \text{ e } BH_2 \perp AC \Rightarrow BH_2 \perp XZ$$

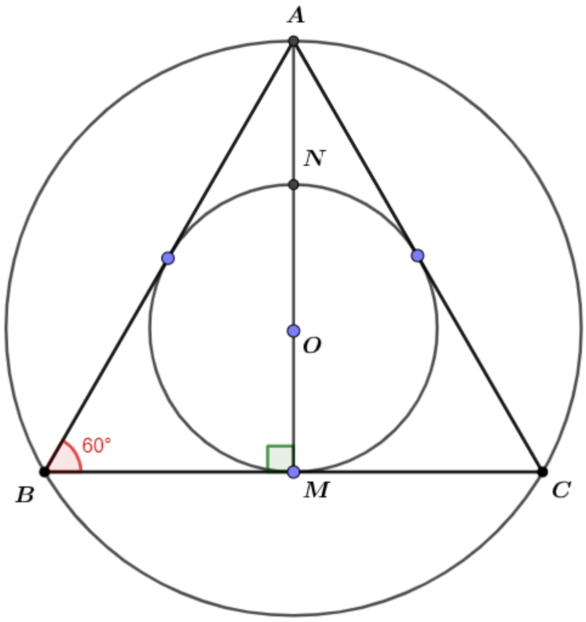
$$YZ//AB \text{ e } CH_3 \perp AB \Rightarrow CH_3 \perp YZ$$

Portanto, os segmentos $AH_1, BH_2$ e $CH_3$ são mediatrizes do triângulo $XYZ$. Logo, eles se encontram em um único ponto $H$.

$H$ é circuncentro do triângulo $XYZ$ e ortocentro do triângulo $ABC$.

## 4.5. PONTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

O triângulo equilátero é um triângulo que possui o baricentro, incentro, circuncentro e ortocentro coincidentes!




Como todos os ângulos internos do triângulo equilátero são de $60°$, temos que se o lado do triângulo mede $L$, então sua altura mede:

$$h = L\,sen(60°) = \frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Além disso, o ponto O é incentro e baricentro, logo:

$$AO = 2OM$$

Se $r$ é o raio da circunferência inscrita, temos:

$$OM = ON = r$$

$$AO = 2r \Rightarrow AN + ON = 2r \Rightarrow AN + r = 2r \therefore AN = r$$

Portanto: $AN = ON = OM = r$.

$$AM = h = 3r \Rightarrow r = \frac{1}{3}h \therefore r = \frac{1}{3}\frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Da mesma forma, note que $AO = R$ é o raio da circunferência circunscrita, logo:

$$AO = R \text{ e } OM = \frac{R}{2} \Rightarrow AM = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2} = h \Rightarrow R = \frac{2}{3}h$$

$$\therefore R = \frac{2}{3}\frac{L\sqrt{3}}{2}$$

# 5. TRIÂNGULOS QUAISQUER

## 5.1. TEOREMA DOS SENOS

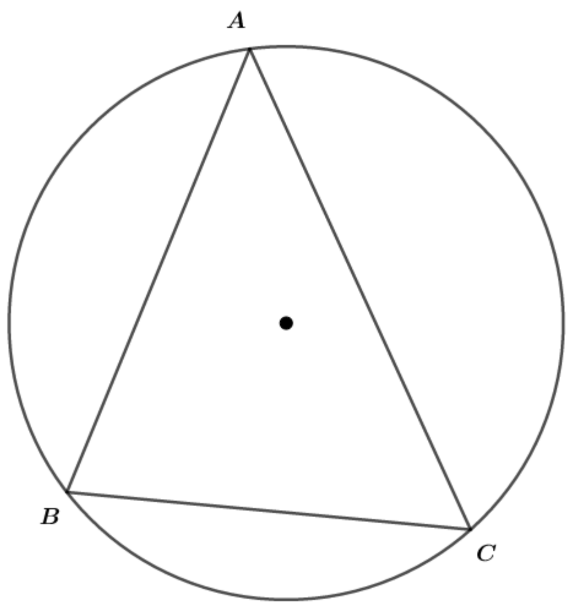
$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R}$$

A lei dos senos afirma que a razão entre cada lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual à $2R$, sendo $R$ o raio da circunferência que a circunscreve.

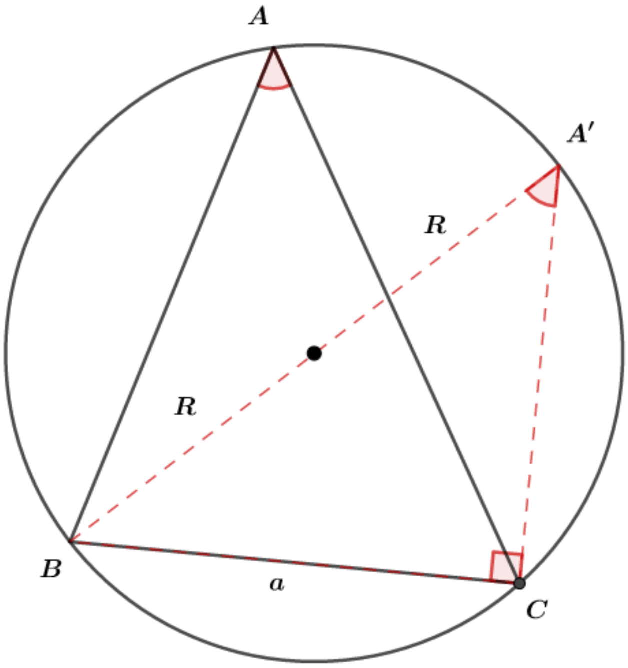
**Demonstração:**

Vamos provar para os dois casos possíveis: triângulo acutângulo e triângulo obtusângulo.

Seja $ABC$ um triângulo acutângulo representado pela seguinte figura:




Podemos traçar um triângulo $A'BC$ tal que $A'$ seja a o ponto da intersecção da reta que passa pelo centro da circunferência:



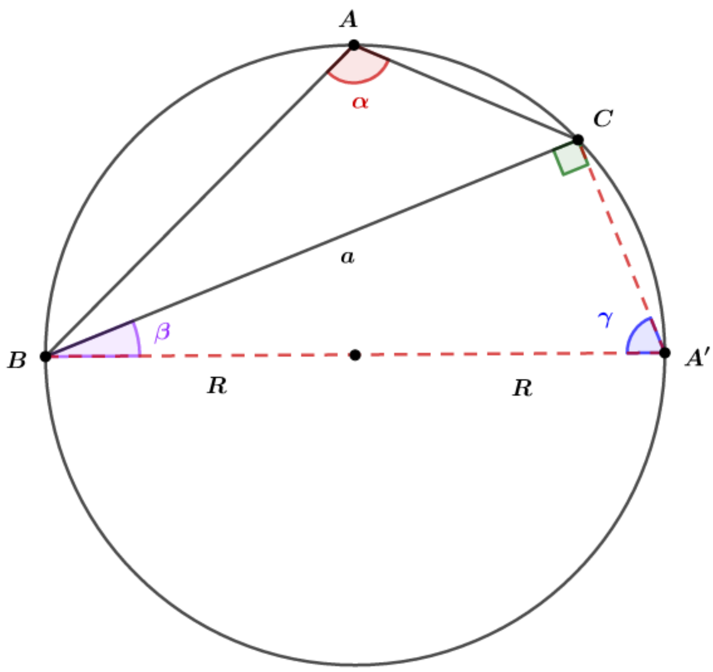

Perceba que o triângulo $A'BC$ é retângulo em $C$, essa é uma propriedade do triângulo inscrito em uma circunferência. Ainda pela figura, como os ângulos $\hat{A}$ e $\widehat{A'}$ enxergam a mesma corda $BC$, podemos afirmar que elas são iguais, então, $\hat{A} = \widehat{A'}$. Aplicando o seno no triângulo $A'BC$, encontramos:

$$senA' = \frac{a}{2R}$$

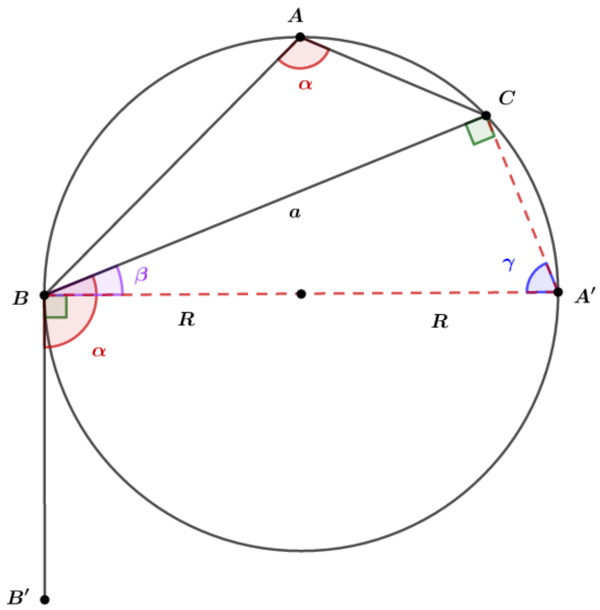
$$\widehat{A'} = \hat{A} \Rightarrow \frac{a}{senA} = 2R$$

Usando a mesma ideia, podemos provar para os outros lados.

Se o triângulo fosse obtusângulo, teríamos:



O ponto $A$ enxerga o segmento $\overline{BC}$ sob um ângulo $\alpha$, sabemos da propriedade do arco capaz que o segmento de reta tangente ao ponto $B$ também enxergará $\overline{BC}$ sob o mesmo ângulo $\alpha$. Desse modo:

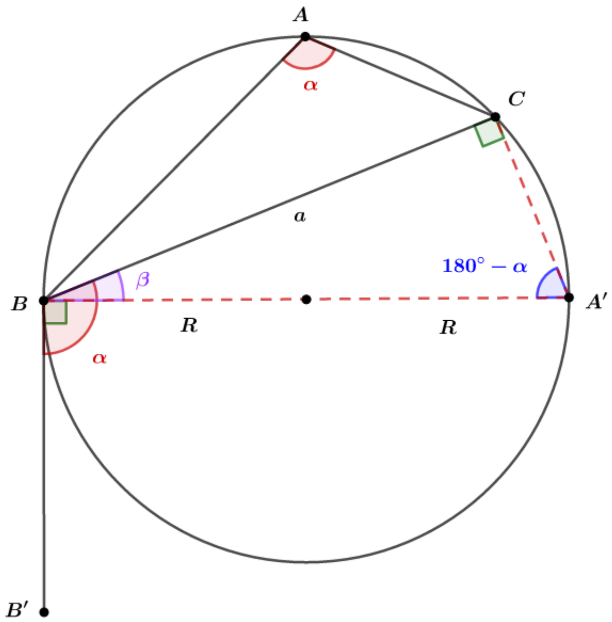



Analisando os ângulos internos do triângulo $A'BC$, podemos ver que:

$$\beta = 90° - \gamma$$

Mas:

$$\alpha = 90° + \beta \Rightarrow \beta = \alpha - 90°$$
$$\Rightarrow 90° - \gamma = \alpha - 90°$$
$$\Rightarrow \gamma = 180° - \alpha$$




Analisando o triângulo $A'BC$, vemos que o seno do vértice $A'$ é dado por:

$$sen(180° - \alpha) = \frac{a}{2R}$$

$$sen\alpha = \frac{a}{2R}$$

Como $\alpha = \hat{A}$, temos:

$$\frac{a}{senA} = 2R$$

Podemos provar analogamente para os outros vértices do triângulo $ABC$ e concluir:

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

## 5.2. TEOREMA DOS COSSENOS

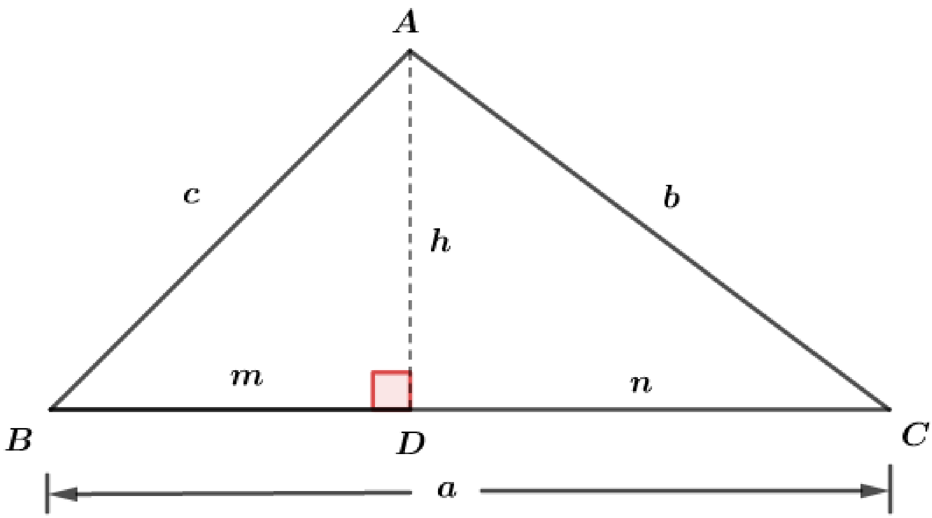
Seja $ABC$ um triângulo qualquer e $a, b, c$ são seus lados. A lei dos cossenos afirma que:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\ cosA \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\ cosB \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\ cosC \end{aligned}}$$

**Demonstração:**

Devemos dividir em dois casos, um para o triângulo com ângulo agudo e outro para o triângulo com ângulo obtuso.

1) Considere o triângulo $ABC$ dado pela figura abaixo:




Podemos ver que o triângulo $ADC$ é retângulo, então podemos aplicar o Teorema de Pitágoras:

$$b^2 = h^2 + n^2 \quad (I)$$

Analogamente para o triângulo $ADB$:

$$c^2 = m^2 + h^2 \quad (II)$$

Também, de acordo com a figura, temos:

$$n = a - m \quad (III)$$

De $(II)$, temos $h^2 = c^2 - m^2$. Substituindo $(II)$ e $(III)$ em $(I)$, obtemos:

$$b^2 = c^2 - m^2 + (a - m)^2$$

$$b^2 = c^2 - m^2 + a^2 - 2am + m^2$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2am \quad (IV)$$

Observando o triângulo $ADB$, podemos escrever a seguinte relação:

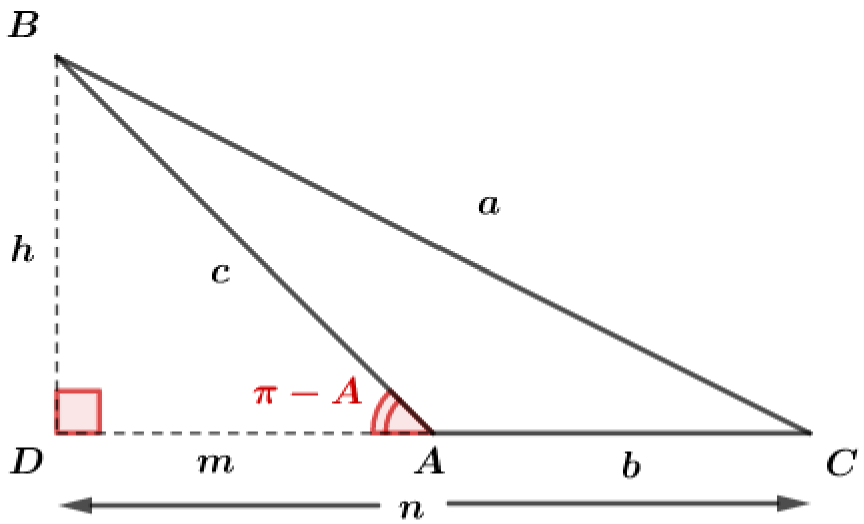
$$m = c\ cosB$$

Substituindo em $(IV)$, obtemos a lei dos cossenos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$$

Os outros lados podem ser provados usando a mesma ideia.

2) Seja $ABC$ um triângulo dado pela figura abaixo:




Os triângulos $BAD$ e $BCD$ são retângulos, desse modo, podemos escrever:

$$c^2 = m^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2 \quad (I)$$

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (II)$$

Observando o triângulo $BCD$, temos a seguinte relação:

$$n = m + b \quad (III)$$

Substituindo $(III)$ e $(I)$ em $(II)$, obtemos:

$$a^2 = (m + b)^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = m^2 + 2bm + b^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm \quad (IV)$$

No triângulo $BAD$, temos:

$$m = c\cos(\pi - A) = -c\cos A$$

Substituindo essa identidade em $(IV)$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

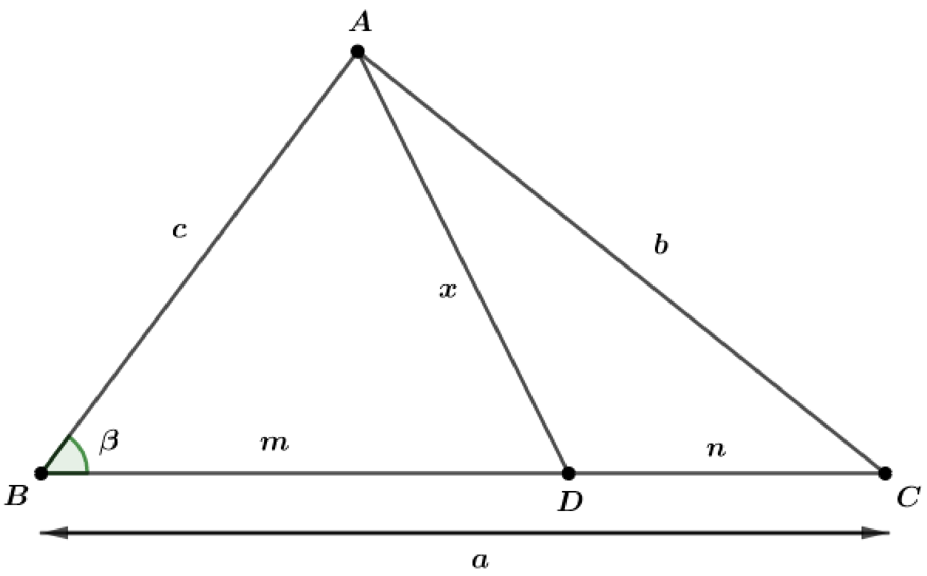
Os outros lados podem ser provados usando a mesma ideia.

## 5.3. RELAÇÃO DE STEWART

PRESTE MAIS ATENÇÃO!!

A relação de Stewart é uma ferramenta muito útil na resolução de questões envolvendo triângulos.

Dado um triângulo $ABC$, temos:




$$\boxed{ax^2 + amn = b^2m + c^2n}$$

**Demonstração:**

Aplicando o teorema dos cossenos nos triângulos $ABD$ e $ABC$, encontramos:

$$x^2 = c^2 + m^2 - 2cm\cos\beta \quad (I)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta \quad (II)$$

De $(II)$, temos:

$$c\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$$

Substituindo em $(I)$:

$$x^2 = c^2 + m^2 - 2m\left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$ax^2 = ac^2 + m^2a - mc^2 - ma^2 + mb^2$$

$$ax^2 = c^2(a - m) + ma(m - a) + b^2m$$

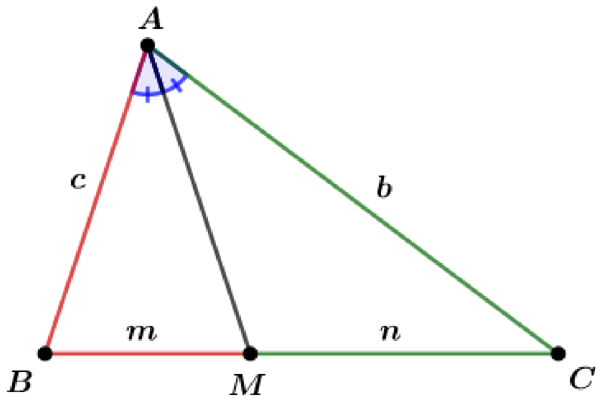
Sabemos que $n = a - m$, desse modo:

$$ax^2 = c^2n + ma(-n) + b^2m$$

$$\therefore ax^2 + amn = b^2m + c^2n$$

## 5.4. TEOREMA DAS BISSETRIZES

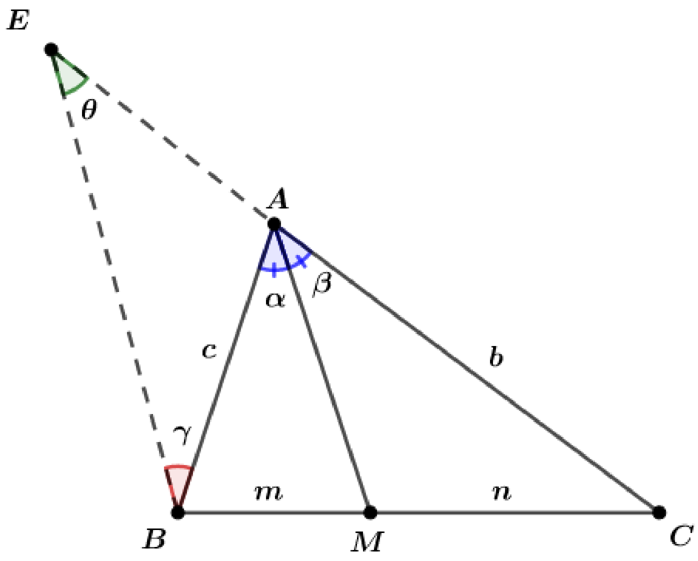
### 5.4.1. TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA




$$\boxed{\frac{c}{m} = \frac{b}{n}}$$

**Demonstração:**

Vamos traçar um segmento de reta paralelo à bissetriz $\overline{AM}$ e que passa pelo prolongamento do lado $\overline{AC}$:

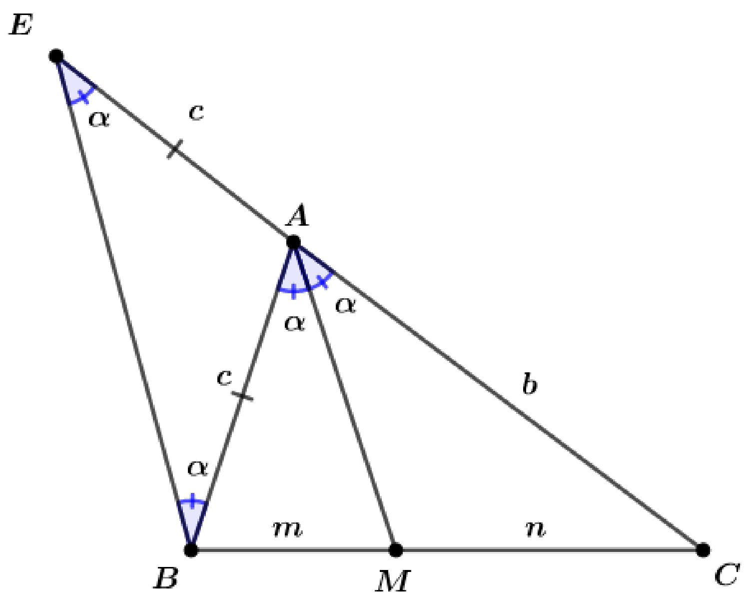



Como $\overline{EB}$ é paralelo a $\overline{AM}$, temos pela propriedade do paralelismo:

$$\gamma \equiv \alpha$$
$$\theta \equiv \beta$$

$\overline{AM}$ é bissetriz do triângulo $ABC$ no vértice $A$, então $\alpha \equiv \beta$.

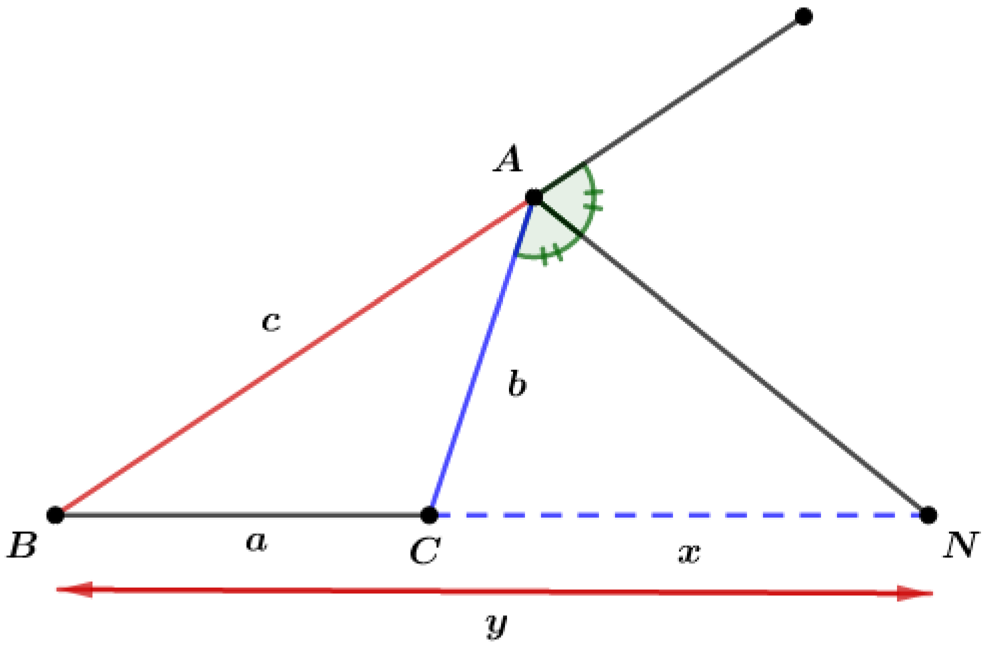
Logo, $\gamma \equiv \theta$ e, assim, $\Delta AEB$ é isósceles com $AE = AB = c$:




Aplicando o teorema de Tales, encontramos:

$$\frac{b}{c} = \frac{n}{m}$$
$$\therefore \frac{c}{m} = \frac{b}{n}$$

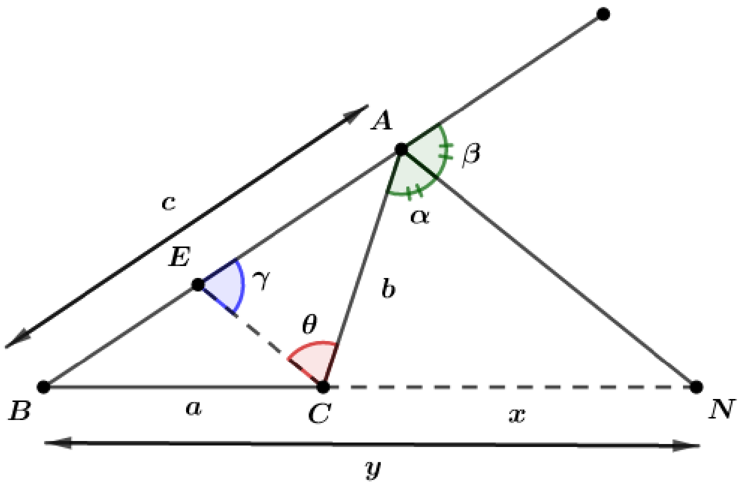
## 5.4.2. TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA




$$\boxed{\frac{c}{y} = \frac{b}{x}}$$

**Demonstração:**

Vamos construir o segmento de reta $\overline{CE}$ tal que $E$ pertença à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overline{CE}//\overline{AN}$:



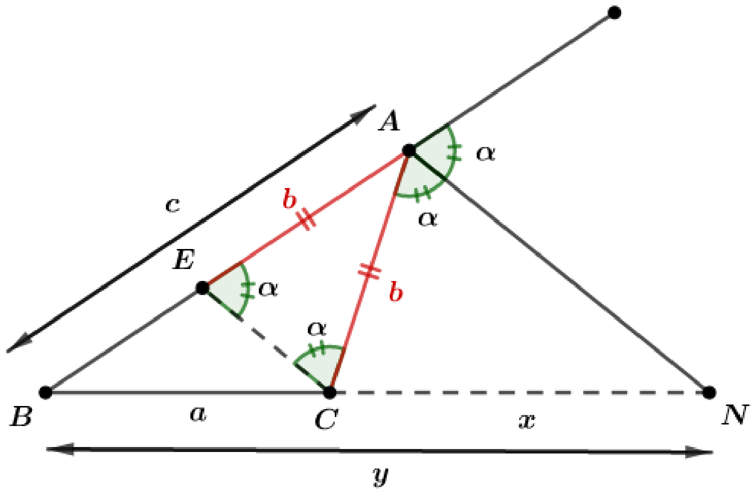

Como $EC//AN$, temos:

$$\theta \equiv \alpha$$

$$\gamma \equiv \beta$$

$AN$ é bissetriz externa, então $\alpha \equiv \beta$. Portanto:

$$\gamma \equiv \theta \Rightarrow \Delta AEC \text{ é isósceles com } AE = AC$$

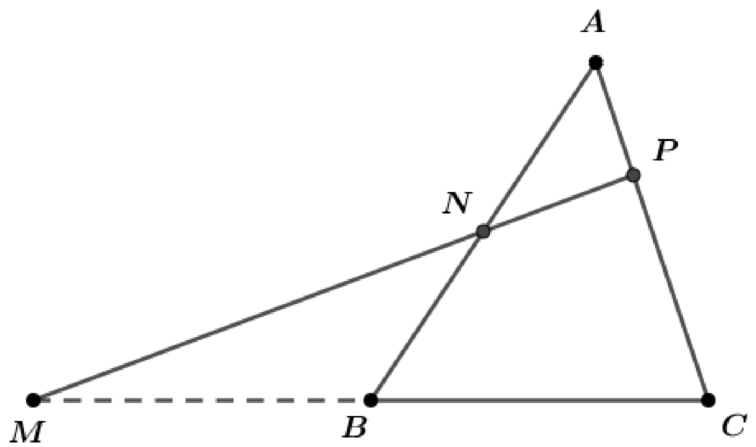



Aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{c}{y} = \frac{b}{x}$$

## 5.5. TEOREMA DE MENELAUS

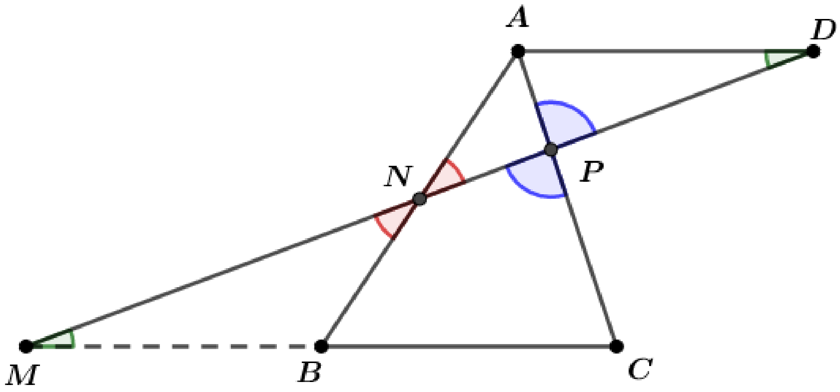



$$\boxed{\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1}$$

Esse teorema é conhecido como teorema da colinearidade, pois caso os pontos $MNP$ satisfaçam essa relação, podemos afirmar que esses pontos são colineares. $\overleftrightarrow{MP}$ é a reta de Menelaus.

**Demonstração:**

Vamos prolongar o segmento $\overline{MP}$ até o ponto $D$ tal que $\overline{AD}$ seja paralelo ao segmento $\overline{MC}$.

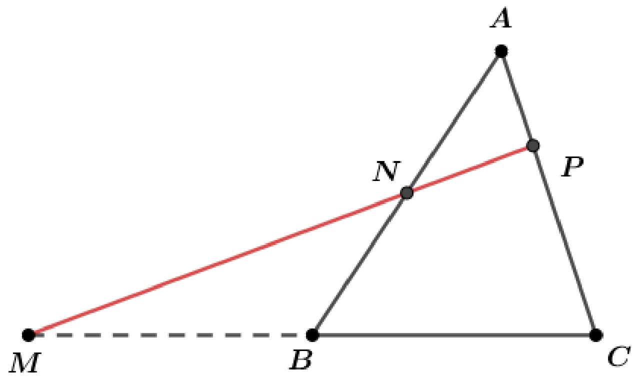



$$\Delta ADN \sim \Delta BMN \Rightarrow \frac{AD}{AN} = \frac{MB}{NB} \Rightarrow AD = MB \cdot \frac{AN}{NB}$$
$$\Delta APD \sim \Delta CPM \Rightarrow \frac{AD}{PA} = \frac{MC}{CP} \Rightarrow AD = PA \cdot \frac{MC}{CP}$$

Igualando as relações, obtemos:

$$MB \cdot \frac{AN}{NB} = PA \cdot \frac{MC}{CP}$$
$$\therefore \frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

Um modo de decorar o teorema de Menelaus é notar os pontos de colinearidade $M, N, P$:




O bizu é saber que cada razão do teorema terá sempre um ponto de colinearidade. Podemos começar pelo ponto $M$. Esse ponto pertence à reta $\overleftrightarrow{BC}$. Inicialmente, escrevemos o segmento do vértice mais próximo do ponto $M$ e dividimos com o mais afastado:

$$\frac{MB}{MC}$$

Perceba que o denominador para no ponto $C$. A próxima razão começará por esse ponto e deve possuir o ponto de colinearidade $P$ que pertence ao lado $AC$:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA}$$

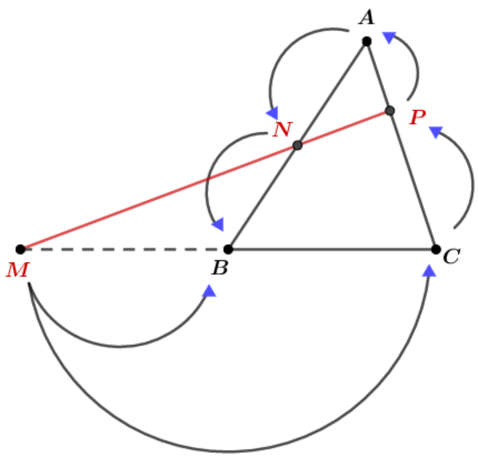
O último denominador terminou no ponto $A$, assim, a próxima razão deve iniciar nesse ponto e deve possuir o último ponto de colinearidade $N$:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB}$$

Finalmente, igualamos essa expressão a 1:

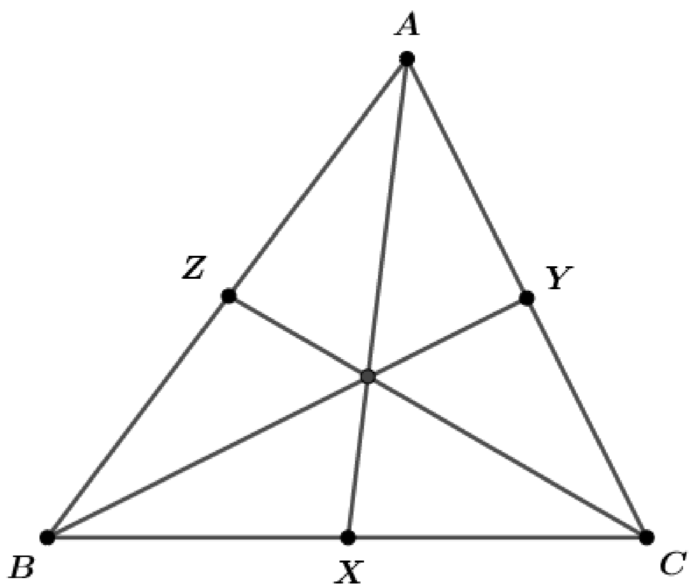
$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

ESQUEMATIZANDO




$$\boxed{\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1}$$

## 5.6. TEOREMA DE CEVA



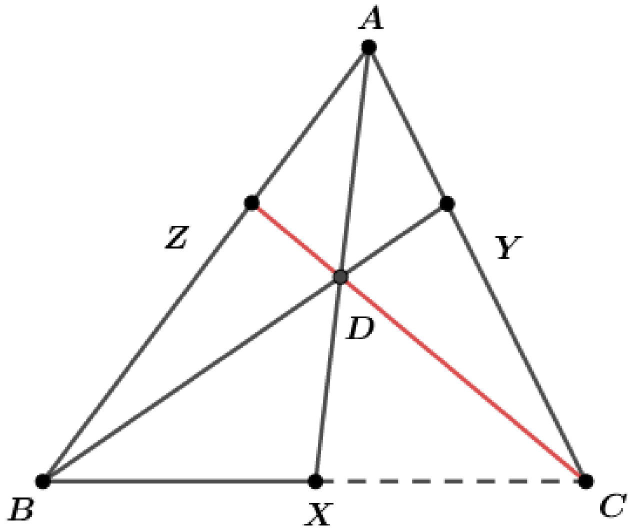

$$\boxed{\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1}$$

Esse teorema é conhecido como o teorema da concorrência, pois caso os pontos $X, Y, Z$ satisfaçam essa relação, podemos afirmar que esses pontos se encontram em um mesmo ponto.

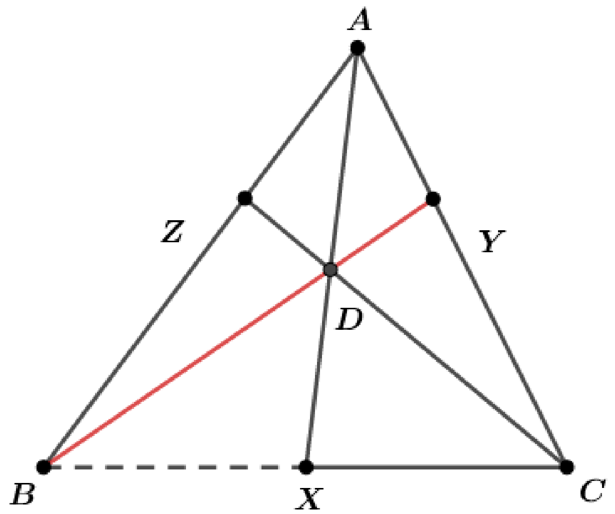
**Demonstração:**

Vamos usar o teorema de Menelaus para provar o teorema de Ceva.

Seja $CDZ$ os pontos de colinearidade. Aplicando o teorema de Menelaus no $\Delta ABX$:




$$\frac{CX}{CB}\cdot\frac{BZ}{ZA}\cdot\frac{AD}{DX}=1\ \ (I)$$




Fazendo o mesmo para o triângulo $ACX$ e os pontos de colinearidade $BDY$:

$$\frac{BX}{BC}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{AD}{DX}=1\ \ (II)$$

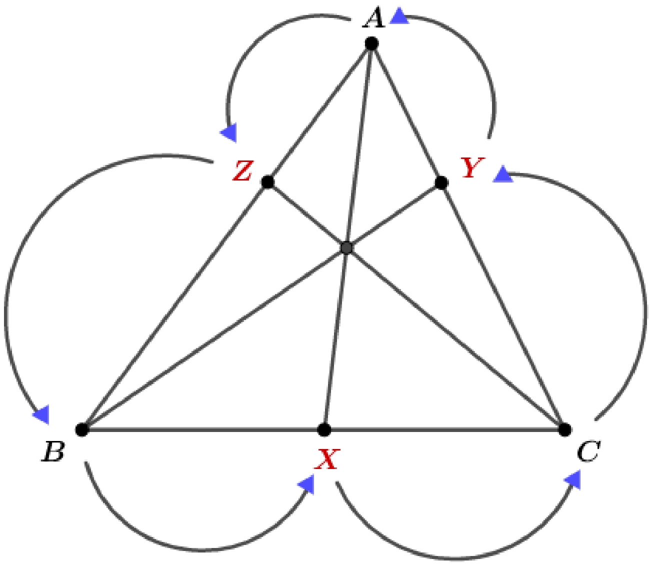
Igualando $(I)$ com $(II)$:

$$\frac{CX}{\cancel{CB}}\cdot\frac{BZ}{ZA}\cdot\frac{\cancel{AD}}{\cancel{DX}}=\frac{BX}{\cancel{BC}}\cdot\frac{CY}{YA}\cdot\frac{\cancel{AD}}{\cancel{DX}}$$

$$\frac{ZA}{BZ}\cdot\frac{BX}{CX}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

$$\therefore\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

Esse teorema é mais fácil de memorizar. O bizu é começar por um vértice e sempre incluir os pontos de concorrência em cada razão:

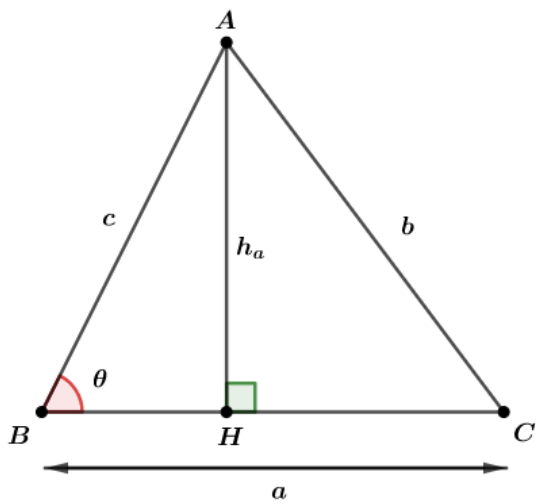



$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

## 5.7. CÁLCULO DAS CEVIANAS

Vamos deduzir as fórmulas para calcular a medida das cevianas de um triângulo qualquer em função dos lados do triângulo.

### 5.7.1. ALTURA



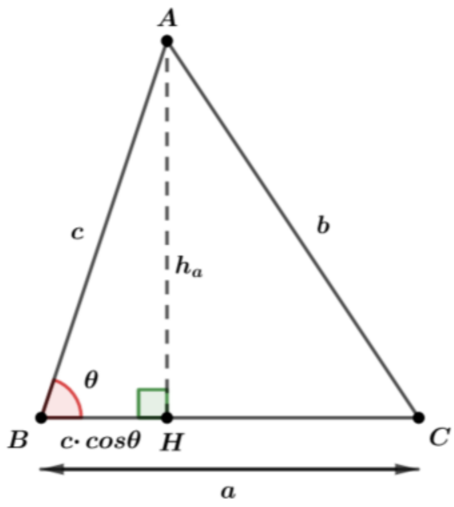

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

**Demonstração:**

Considere o seguinte triângulo $ABC$:




Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos $AHB$, temos:

$$\Delta AHB \Rightarrow c^2 = h_a^2 + (c\cos^2\theta) \Rightarrow h_a = c\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

Usando a lei dos cossenos no $\Delta ABC$:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

Substituindo o valor do cosseno na equação de $h_a$:

$$h_a = c\sqrt{1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2}$$

Simplificando a equação:

$$h_a = \sqrt{c^2\left[1-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2\right]}$$

$$h_a = \sqrt{c^2 - c^2\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2}$$

$$h_a = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2}$$

$$h_a = \sqrt{\left(c-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\right)\left(c+\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\right)}$$

$$h_a = \sqrt{\left(\frac{2ac-(a^2+c^2)+b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac+(a^2+c^2)-b^2}{2a}\right)}$$

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{\left(b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)\right)\left((a^2 + 2ac + c^2) - b^2\right)}$$

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{(b^2 - (a-c)^2)((a+c)^2 - b^2)}$$

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{\left(b - (a-c)\right)(b + a - c)(a + c - b)(a + c + b)}$$

Sabendo que $2p = a + b + c$:

$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{\underbrace{(-a+b+c)}_{2p-2a}\underbrace{(a+b-c)}_{2p-2c}\underbrace{(a-b+c)}_{2p-2b}\underbrace{(a+b+c)}_{2p}}$$

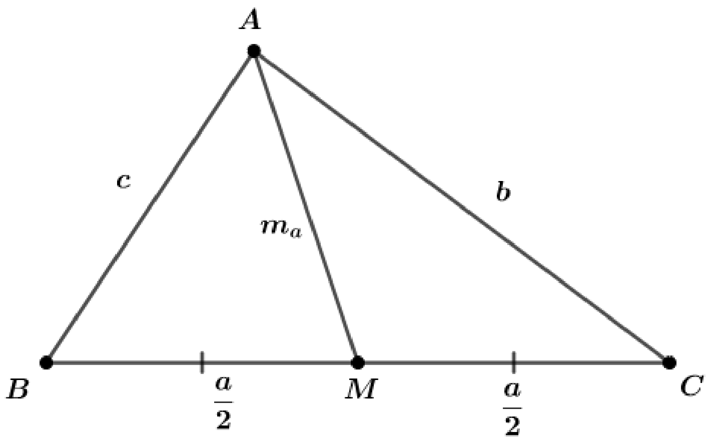
$$h_a = \frac{1}{2a}\sqrt{2^4 p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Podemos deduzir a fórmula das outras alturas analogamente.

Essa fórmula também é válida para triângulos obtusângulos, basta usar a mesma ideia para deduzi-la.

## 5.7.2. MEDIANA



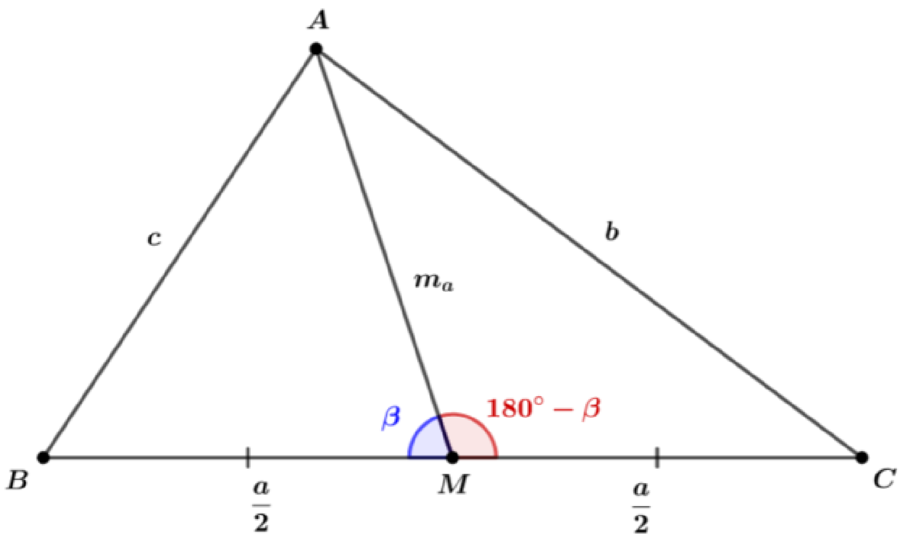

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

**Demonstração:**

Considere o seguinte triângulo $ABC$:




Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos $ABM$ e $AMC$, obtemos:

$$\Delta ABM \Rightarrow c^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right) m_a \cos\beta \quad (I)$$

$$\Delta AMC \Rightarrow b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right) m_a \cos(180° - \beta)$$

$$b^2 = m_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right) m_a \cos\beta \quad (II)$$

Somando $(I)$ e $(II)$, temos:

$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

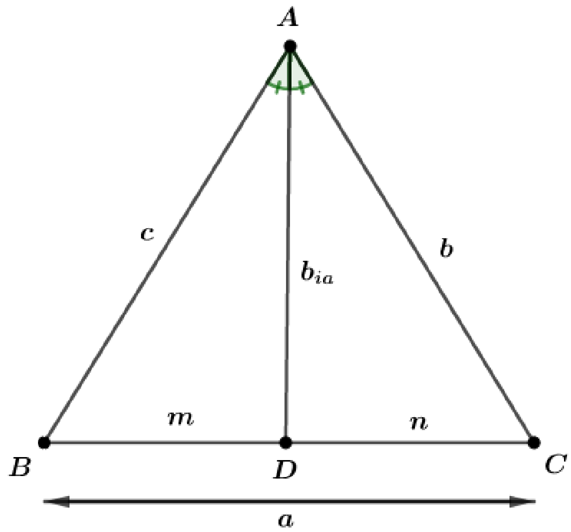
$$2m_a^2 = b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$\therefore m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

Podemos provar a fórmula das outras medianas analogamente.

Também é válida para triângulos obtusângulos.

## 5.7.3. BISSETRIZ INTERNA




$$b_{ia} = \sqrt{bc - mn}$$

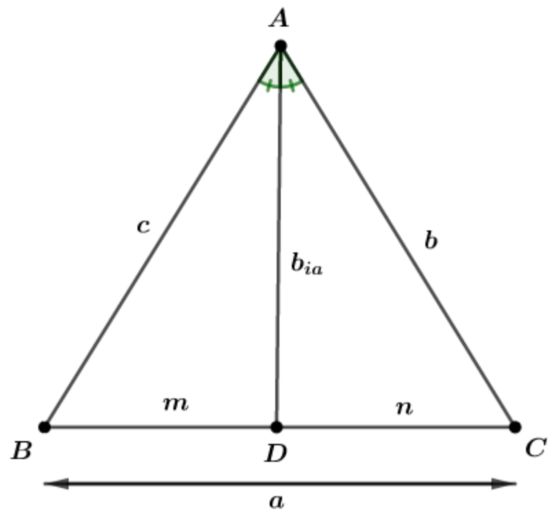
$$b_{ia} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$b_{ib} = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

$$b_{ic} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

**Demonstração:**

Seja $\Delta ABC$ cujos lados são $a, b, c$:




Pelo teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$$

Usando a relação de Stewart:

$$b_{ia}^2 a + amn = b^2 m + c^2 n$$

Dividindo toda a equação por $amn$:

$$\frac{b_{ia}^2}{mn} + 1 = \frac{b^2}{an} + \frac{c^2}{am}$$

$$\frac{b_{ia}^2 + mn}{mn} = \frac{b}{n} \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{m} \cdot \frac{c}{a}$$

Substituindo $\frac{c}{m} = \frac{b}{n}$:

$$\frac{b_{ia}^2 + mn}{mn} = \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right)$$

$$\frac{b_{ia}^2 + mn}{m} = b \cdot \left(\frac{b + c}{a}\right)$$

$$b_{ia}^2 + mn = bm \cdot \left(\frac{b + c}{a}\right) \quad (I)$$

Pela figura, podemos ver que $n = a - m$, desse modo:

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{n} \Rightarrow cn = bm \Rightarrow c(a - m) = bm \Rightarrow m(b + c) = ac$$

Substituindo essa identidade na equação $(I)$:

$$b_{ia}^2 + mn = \frac{b}{a} \cdot ac$$

$$\therefore b_{ia} = \sqrt{bc - mn}$$

Para provar a outra fórmula, devemos usar:

$$\begin{cases} m + n = a \quad (I) \\ \frac{c}{m} = \frac{b}{n} \quad (II) \\ b_{ia}^2 a + amn = b^2 m + c^2 n \quad (III) \end{cases}$$

Da equação $(II)$, temos:

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{n} \Rightarrow \frac{b + c}{m + n} = \frac{b}{n} = \frac{c}{m} \Rightarrow \frac{b + c}{a} = \frac{b}{n} = \frac{c}{m}$$

$$\Rightarrow n = \frac{ab}{b + c}$$

$$\Rightarrow m = \frac{ac}{b + c}$$

Substituindo $m$ e $n$ em $(III)$:

$$b_{ia}^2 a + a \cdot \frac{ac}{b + c} \cdot \frac{ab}{b + c} = b^2 \cdot \frac{ac}{b + c} + c^2 \cdot \frac{ab}{b + c}$$

Como $a \neq 0$:

$$b_{ia}^2 = \frac{b^2 c}{b + c} + \frac{c^2 b}{b + c} - \frac{ac}{b + c} \cdot \frac{ab}{b + c}$$

Simplificando:

$$b_{ia}^2 = \frac{b^2c(b+c) + c^2b(b+c) - a^2bc}{(b+c)^2}$$

$$b_{ia}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot (b^2 + bc + bc + c^2 - a^2)$$

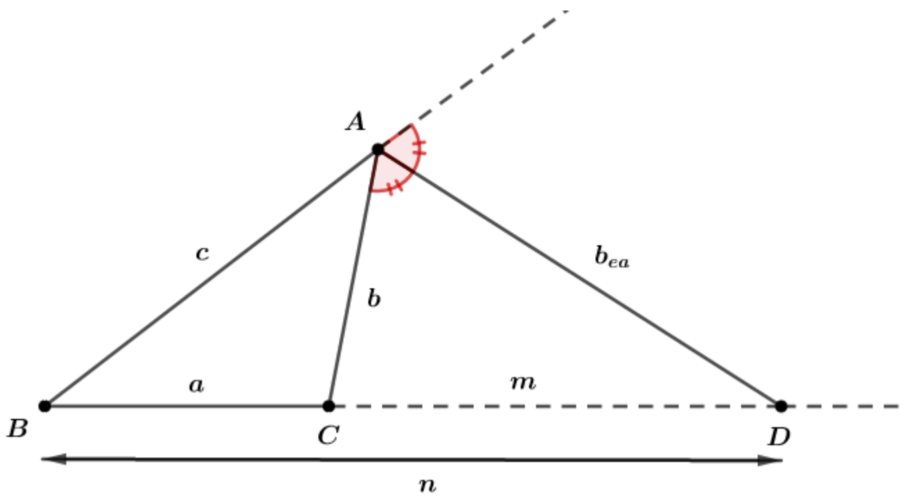
$$b_{ia} = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc((b+c)^2 - a^2)}$$

$$b_{ia} = \frac{1}{b+c}\sqrt{bc\,\underbrace{(b+c-a)}_{2p-2a}\,\underbrace{(b+c+a)}_{2p}}$$

$$\therefore b_{ia} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

Analogamente, obtemos a fórmula para as outras bissetrizes internas.

## 5.7.4. BISSETRIZ EXTERNA




$$b_{ea} = mn - bc$$

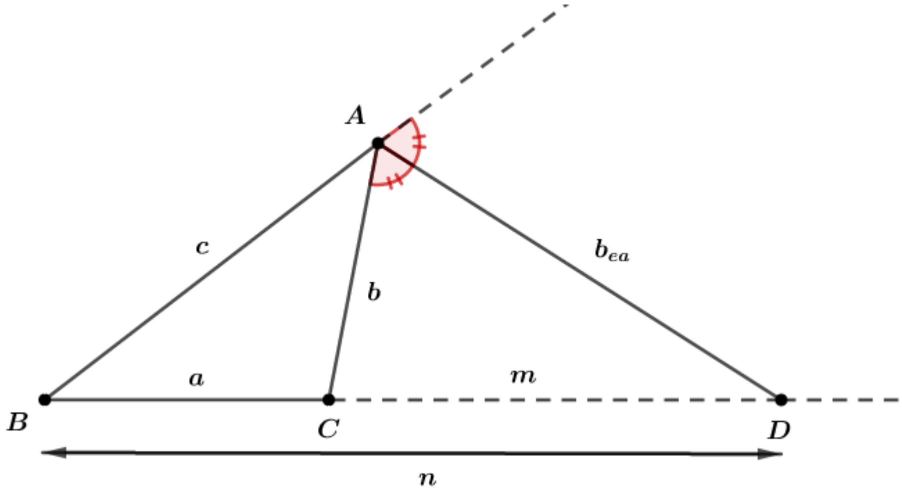
$$b_{ea} = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

$$b_{eb} = \frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$

$$b_{ec} = \frac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

**Demonstração:**

Dados os lados $a, b, c$ do triângulo, temos:




$$\begin{cases} n - m = a \ \ (I) \\ \dfrac{c}{n} = \dfrac{b}{m} \ \ (II) \\ b^2 n + amn = b_{ea}^2 a + c^2 m \ \ (III) \end{cases}$$

De $(II)$:

$$\frac{c}{n} = \frac{b}{m} \Rightarrow \frac{c-b}{n-m} = \frac{c}{n} = \frac{b}{m}$$

$$\Rightarrow m = \frac{ab}{c-b}$$

$$\Rightarrow n = \frac{ac}{c-b}$$

Substituindo em $(III)$:

$$b^2 n + amn = b_{ea}^2 a + c^2 m$$

$$b^2 n - c^2 m + amn = b_{ea}^2 a$$

$$b_{ea}^2 a = b^2 \left(\frac{ac}{c-b}\right) - c^2 \left(\frac{ab}{c-b}\right) + a \left(\frac{ab}{c-b}\right)\left(\frac{ac}{c-b}\right)$$

$$b_{ea}^2 = \frac{bc}{(c-b)^2}\left(b(c-b) - c(c-b) + a^2\right)$$

$$b_{ea}^2 = \frac{bc}{(c-b)^2}\left(a^2 - \underbrace{(b^2 - 2bc + c^2)}_{(b-c)^2}\right)$$

$$b_{ea}^2 = \frac{bc}{(c-b)^2}\big(a - (b-c)\big)(a + b - c)$$

$$b_{ea}^2 = \frac{bc}{(c-b)^2}\underbrace{(a - b + c)}_{2p-2b}\underbrace{(a + b - c)}_{2p-2c}$$

$$b_{ea}^2 = \frac{2}{|c-b|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

Também, podemos escrever a bissetriz externa de outra forma. Dividindo $(III)$ por $amn$:

$$\frac{b^2}{am} + 1 = \frac{b_{ea}^2}{mn} + \frac{c^2}{an}$$

$$b_{ea}^2 = mn\left(\frac{b^2}{am} - \frac{c^2}{an} + 1\right)$$

$$b_{ea}^2 = mn\left(\frac{b^2}{am} - \frac{c^2}{an} + 1\right)$$

$$b_{ea}^2 = mn + mn\left(\frac{b^2}{am} - \frac{c^2}{an}\right)$$

Substituindo $\frac{c}{n} = \frac{b}{m}$:

$$b_{ea}^2 = mn + mn\left(\frac{b}{a} \cdot \frac{b}{m} - \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{m}\right)$$

$$b_{ea}^2 = mn + \frac{bn(b-c)}{a} \quad (IV)$$

De $(II)$:

$$\frac{c}{n} = \frac{b}{m} \Rightarrow cm = bn \Rightarrow c(n-a) = bn \Rightarrow -ac = n(b-c)$$

Substituindo em $(IV)$:

$$b_{ea}^2 = mn + \frac{b(-ac)}{a}$$

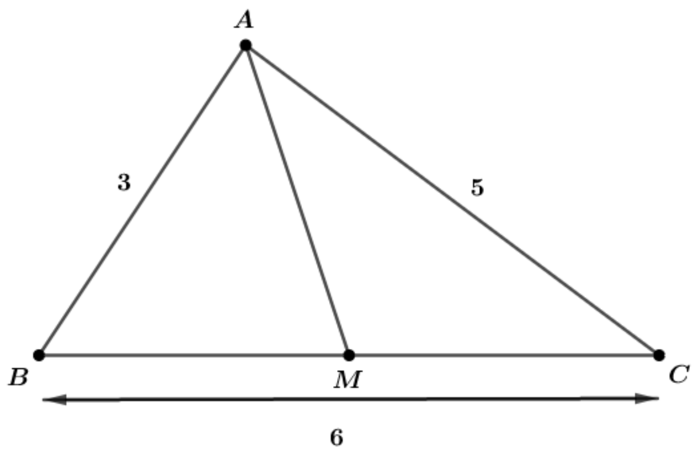
$$\therefore b_{ea} = \sqrt{mn - bc}$$

Analogamente, obtemos as outras bissetrizes externas.

HORA DE PRATICAR!

**Exercícios de Fixação**

**121.** Determine a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo $ABC$ abaixo:



**Resolução:**

Vamos usar a fórmula da mediana:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(5^2+3^2)-6^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{68-36}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{m_a = 2\sqrt{2}}$

**122.** Determine a medida das alturas do triângulo de lados $6, 10$ e $12$.

**Resolução:**

Usando as fórmulas das alturas, temos:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Calculando o semiperímetro $p$:

$$2p = 6+10+12$$

$$p = 14$$

Calculando o valor da expressão $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, supondo que $a = 6, b = 10$ e $c = 12$:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{14(14-6)(14-10)(14-12)} = \sqrt{14\cdot 8\cdot 4\cdot 2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 8\sqrt{14}$$

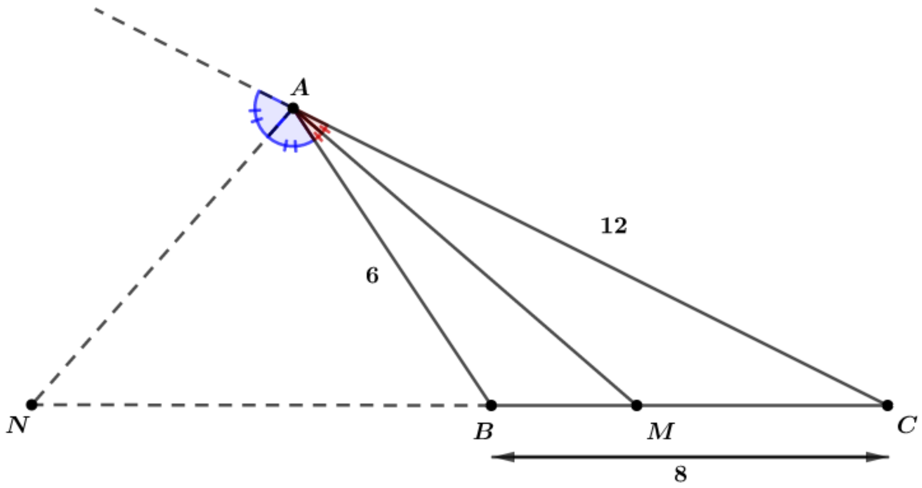
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{6}\cdot 8\sqrt{14} = \frac{8\sqrt{14}}{3}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{10}\cdot 8\sqrt{14} = \frac{8\sqrt{14}}{5}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{12}\cdot 8\sqrt{14} = \frac{4\sqrt{14}}{3}$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{h_a = \frac{8\sqrt{14}}{3}; h_b = \frac{8\sqrt{14}}{5}; h_c = \frac{4\sqrt{14}}{3}}$

**123.** Determine a medida da bissetriz interna $\overline{AM}$ e bissetriz externa $\overline{AN}$ da figura abaixo:




**Resolução:**

Lembrando que a fórmula da bissetriz interna e bissetriz externa são dadas por:

$$AM = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$AN = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

Calculando os valores:

$$2p = a + b + c$$

$$p = \frac{6+8+12}{2} = 13$$

$$AM = \frac{2}{12+6}\sqrt{12 \cdot 6 \cdot 13 \cdot (13-8)}$$

$$AM = \frac{1}{9}\sqrt{6^2 \cdot 26 \cdot 5}$$

$$AM = \frac{2}{3}\sqrt{130}$$

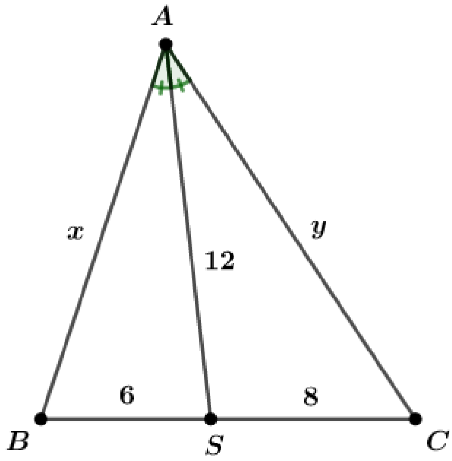
$$AN = \frac{2}{|12-6|}\sqrt{12 \cdot 6 \cdot (13-12)(13-6)}$$

$$AN = \frac{1}{3}\sqrt{6^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7}$$

$$AN = 2\sqrt{14}$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{AM = \frac{2}{3}\sqrt{130}; AN = 2\sqrt{14}}$

**124.** Se $\overline{AS}$ é bissetriz interna do triângulo $ABC$, determine $x$ e $y$.




**Resolução:**

Usando o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{8} \ \ (I)$$

Aplicando a relação de Stewart no triângulo $ABC$:

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = x^2 \cdot 8 + y^2 \cdot 6 \ \ (II)$$

Elevando $(I)$ ao quadrado:

$$x^2 = y^2 \cdot \frac{9}{16}$$

Substituindo $x^2$ em $(II)$:

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = y^2 \cdot \frac{9}{16} \cdot 8 + y^2 \cdot 6$$

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = y^2 \cdot \frac{9}{2} + y^2 \cdot 6$$

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = y^2 \left(\frac{21}{2}\right)$$

$$y^2 = \frac{2}{21} \cdot \left( \underbrace{12}_{2^2 \cdot 3} \cdot \underbrace{12}_{2^2 \cdot 3} \cdot \underbrace{14}_{2 \cdot 7} + \underbrace{12}_{2^2 \cdot 3} \cdot \underbrace{6}_{2 \cdot 3} \cdot \underbrace{8}_{2^3} \right)$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 7} \cdot 2^5 \cdot (3^2 \cdot 7 + 3^2 \cdot 2)}$$

$$y = 2^3 \sqrt{\frac{1}{7}(3 \cdot 7 + 3 \cdot 2)}$$

$$y = 8\sqrt{\frac{28}{7}}$$

$$y = 16$$

$$x = \frac{3}{4} y \Rightarrow x = 12$$

**Gabarito: $x = 12$ e $y = 16$**

**125.** Deduza as fórmulas das medianas de um triângulo em função dos seus lados $a, b, c$.

**Resolução:** Demonstração vista na teoria.

**Gabarito: Demonstração**

**126.** Deduza as fórmulas das alturas de um triângulo em função dos seus lados $a, b, c$.

**Resolução:** Demonstração vista na teoria.

**Gabarito: Demonstração**

**127.** Deduza as fórmulas das bissetrizes internas e externas de um triângulo em função dos seus lados $a, b, c$.

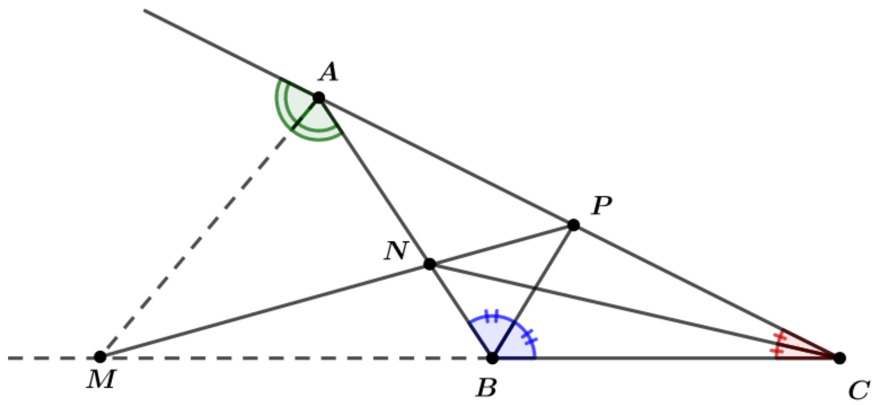
**Resolução:** Demonstração vista na teoria.

**Gabarito: Demonstração**

**128.** Prove que as bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo não isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo cortam os lados opostos em 3 pontos colineares.

**Resolução:**

Vamos supor que o triângulo $ABC$ é representado pela figura abaixo:




Aplicando o teorema da bissetriz interna no triângulo $ABC$:

$$\hat{B} \Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{BC}{CP} \Rightarrow \frac{AN+NB}{AP} = \frac{BC}{CP} \Rightarrow \frac{CP}{AP} = \frac{BC}{AN+NB}$$

$$\hat{C} \Rightarrow \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \frac{AP+PC}{AN} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AP+PC}{BC}$$

Usando o teorema da bissetriz externa em $\hat{A}$:

$$\hat{A} \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{AB}{MB} \Rightarrow \frac{AP+PC}{MC} = \frac{AN+NB}{MB} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AN+NB}{AP+PC}$$

Para provar que $M, N, P$ são colineares, podemos usar o teorema de Menelaus. Assim, devemos provar que:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AN}{NB}=1$$

Vamos calcular o valor da expressão da esquerda:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AN}{NB}$$

Substituindo cada razão pelos valores encontrados usando o teorema das bissetrizes interna e externa, encontramos:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AN}{NB}=\frac{AN+NB}{AP+PC}\cdot\frac{BC}{AN+NB}\cdot\frac{AP+PC}{BC}=1$$

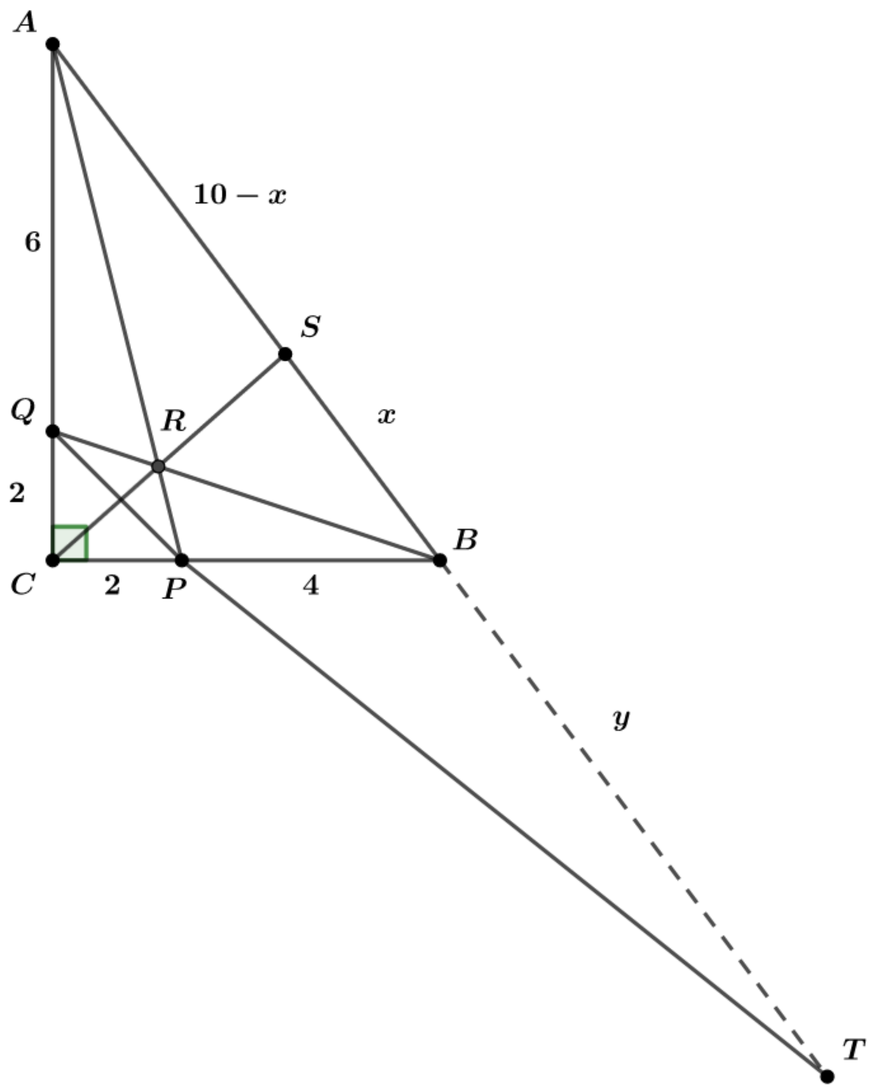
Portanto, os pontos $M, N, P$ satisfazem ao teorema de Menelaus, logo, são colineares.

**Gabarito: Demonstração**

**129.** No triângulo retângulo $ABC, P$ e $Q$ estão sobre $BC$ e $AC$, respectivamente, tais que $CP = CQ = 2$. Pelo ponto de interseção $R$ de $AP$ e $BQ$, uma reta é desenhada passando também por $C$ e cortando $AB$ em $S$. O prolongamento de $PQ$ corta $AB$ em $T$. Se a hipotenusa $AB = 10$ e $AC = 8$, encontre $TS$.

**Resolução:**

Como $ABC$ é retângulo com hipotenusa $AB = 10$ e $AC = 8$, temos pelo teorema de Pitágoras $BC = 6$. Desenhando a figura do texto, temos:




$R$ é ponto de concorrência do triângulo $ABC$, assim, podemos usar o teorema de Ceva:

$$\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}\cdot\frac{BS}{SA}=1$$

$$\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{x}{10-x}=1$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{x}{10-x}=1$$

$$3x=20-2x$$

$$5x=20$$

$$\therefore x=4$$

Como $T$ é prolongamento de $PQ$, temos que $Q, P, T$ são colineares, logo, podemos aplicar o teorema de Menelaus:

$$\frac{TB}{TA}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CP}{PB}=1$$

$$\frac{y}{10+y}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{2}{4}=1$$

$$\frac{y}{10+y}\cdot\frac{3}{2}=1$$

$$3y = 20 + 2y$$

$$\therefore y = 20$$

Portanto, $TS$ é dado por:

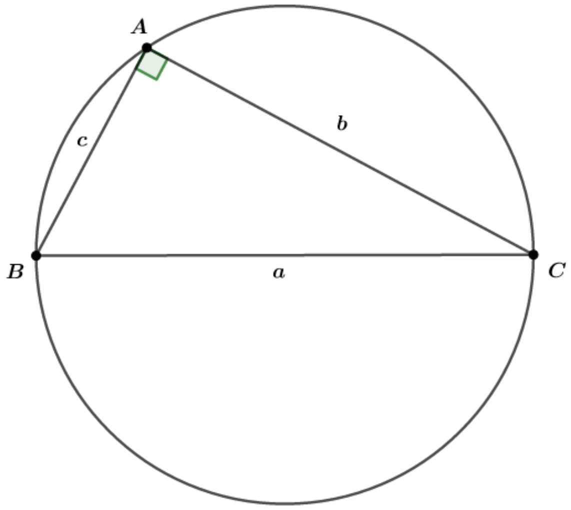
$$TS = x + y = 4 + 20 = 24$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{TS = 24}$

# 6. TRIÂNGULO RETÂNGULO

## 6.1. PONTOS NOTÁVEIS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

A hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência possui medida igual ao diâmetro da circunferência.



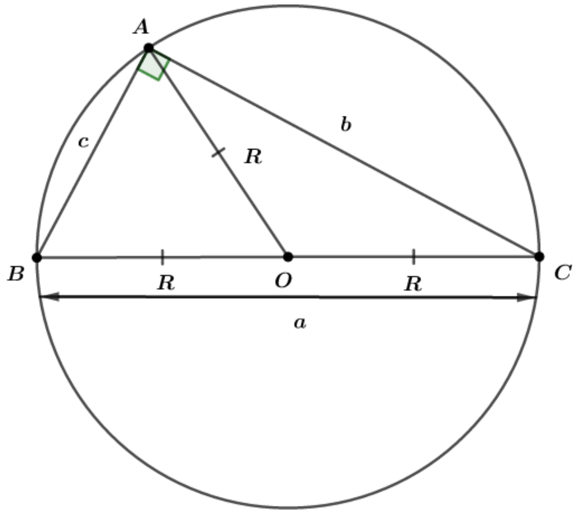

**Demonstração:**

Vimos no tópico de arco capaz que $\hat{A} = \widehat{BC}/2$. Desse modo:

$$\widehat{BC} = 2\hat{A}$$

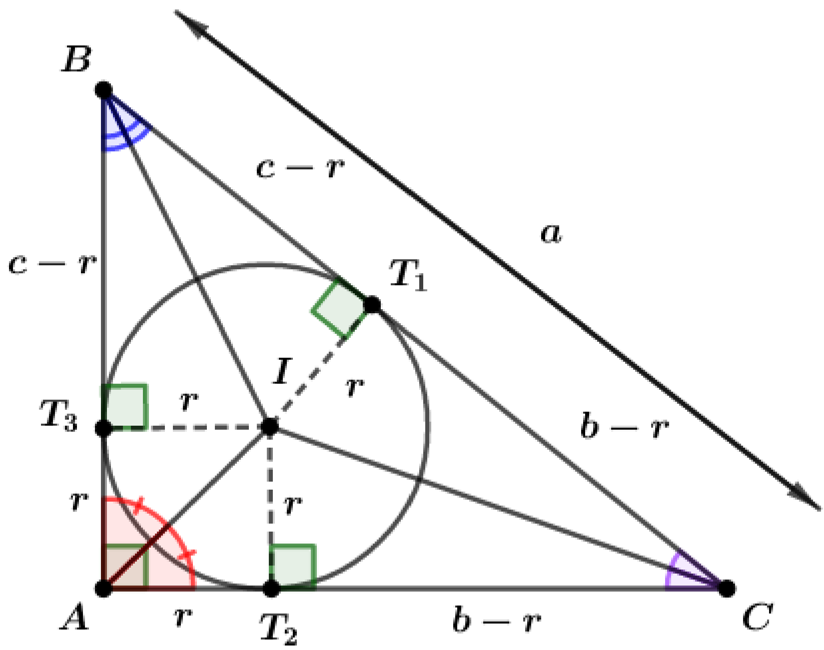
$$\widehat{BC} = 180°$$

Assim, o segmento $\overline{BC}$ é a diagonal da circunferência. O centro dessa circunferência é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo:




$$\Rightarrow a = 2R$$

Para uma circunferência inscrita em um triângulo retângulo, temos:




$T_1, T_2, T_3$ são os pontos de tangência da circunferência inscrita. Vimos no tópico de incentro que esses pontos de tangência possuem a seguinte relação:

$$BT_1 = BT_3$$

$$AT_2 = AT_3$$

$$CT_1 = CT_2$$

Observando a figura, podemos ver que:

$$a = c - r + b - r$$

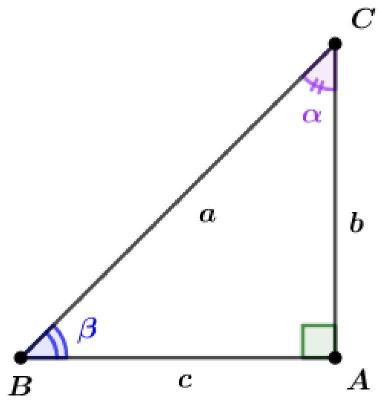
$$a + 2r = b + c$$

Como o triângulo $ABC$ é retângulo com hipotenusa $BC$, ele é circunscritível e a sua hipotenusa é a diagonal da circunferência que a circunscreve. Seja $R$, o raio dessa circunferência. Assim, podemos escrever:

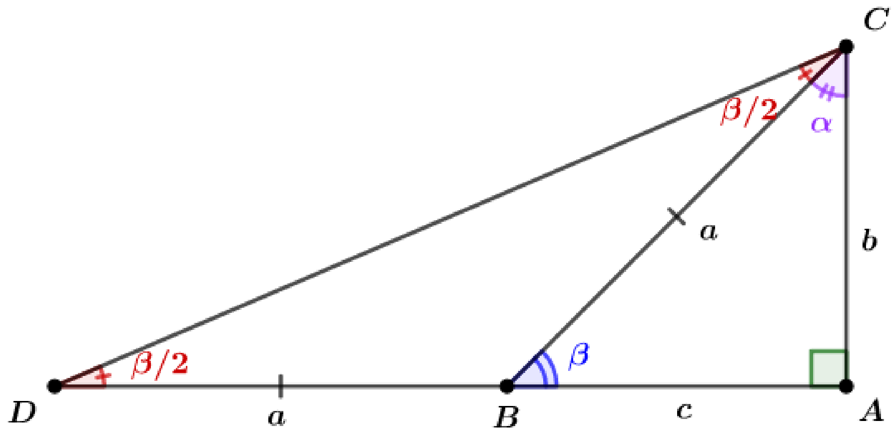
$$a = 2R \Rightarrow 2R + 2r = b + c$$

## 6.2. RELAÇÃO TRIGONOMÉTRICA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Podemos usar a geometria plana para encontrar algumas razões trigonométricas não triviais. O bizu para isso é usar a propriedade do triângulo isósceles. Seja o triângulo $ABC$ dado abaixo:




Vamos prolongar o segmento $\overline{AB}$ de modo a obter um triângulo isósceles com $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$.




Perceba que pela propriedade do ângulo externo, temos $B\hat{D}C \equiv B\hat{C}D = \beta/2$.

Podemos calcular as tangentes do triângulo $ADC$:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{b}{a + c}$$

Dividindo o lado direito da equação por $a$, temos:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{c}{a}}$$

Do triângulo $ABC$, podemos escrever:

$$sen\beta = \frac{b}{a}$$
$$cos\beta = \frac{c}{a}$$

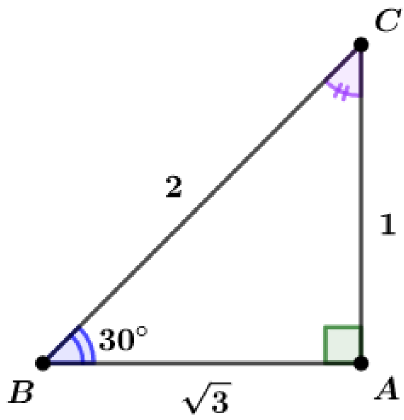
Substituindo na equação da tangente:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{sen\beta}{1 + cos\beta}$$

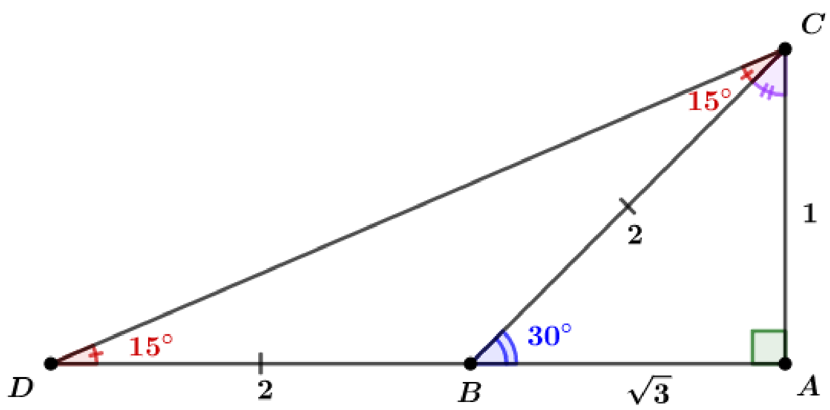
Usando essa ideia, podemos calcular o valor das razões trigonométricas para os ângulos de $15°$ e $22,5°$.

### 6.2.1. 15°

Vamos construir o triângulo retângulo $ABC$ com $\hat{B} = 30°$. Sabemos que $sen(30°) = 1/2$ e $\cos(30°) = \sqrt{3}/2$:




Prolongando o lado $AB$ de modo a obter um triângulo isósceles, encontramos:

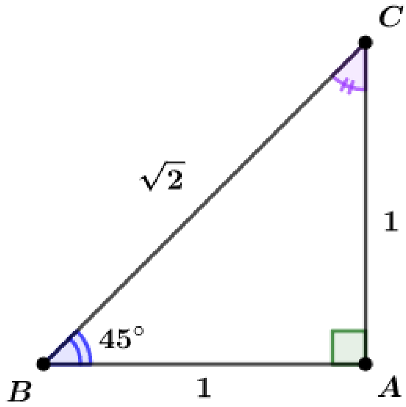



Assim, podemos notar que:

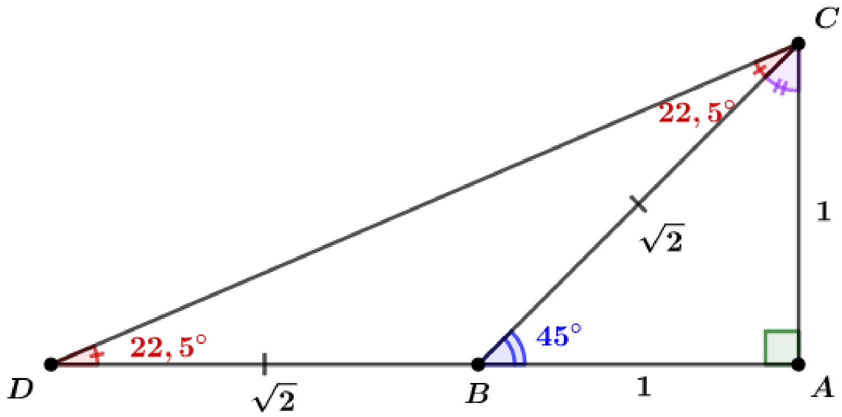
$$tg(15°) = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$
$$tg(15°) = 2 - \sqrt{3}$$

### 6.2.2. $22,5°$

Usando a mesma ideia do item acima, temos:




Prolongando o lado $AB$:



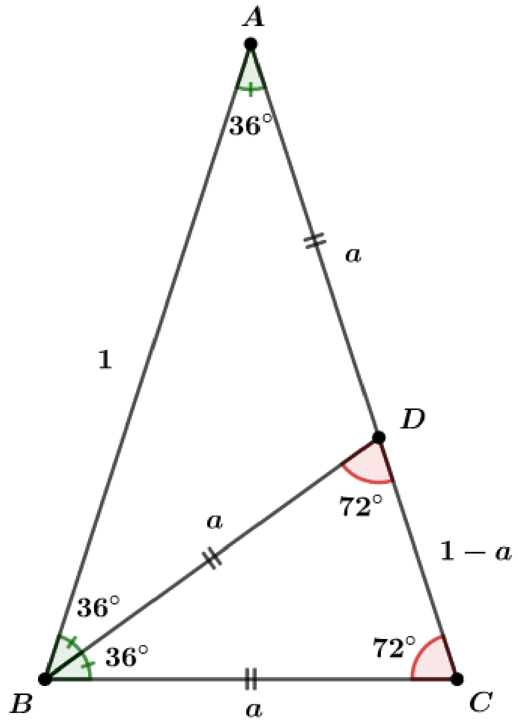

Assim, vemos que:

$$tg(22{,}5°) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$tg(22{,}5°) = \sqrt{2} - 1$$

### 6.2.3. $36°$

Nesse caso, devemos usar o seguinte triângulo isósceles de lados $AB = AC = 1$:




Note que $\overline{BD}$ é a bissetriz do triângulo $ABC$ no vértice $B$.

$\Delta ABC$ e $\Delta BCD$ são isósceles.

Vamos calcular o valor da base. Usando a semelhança de triângulos:

$$\Delta ABC \sim \Delta BCD \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$$

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}$$

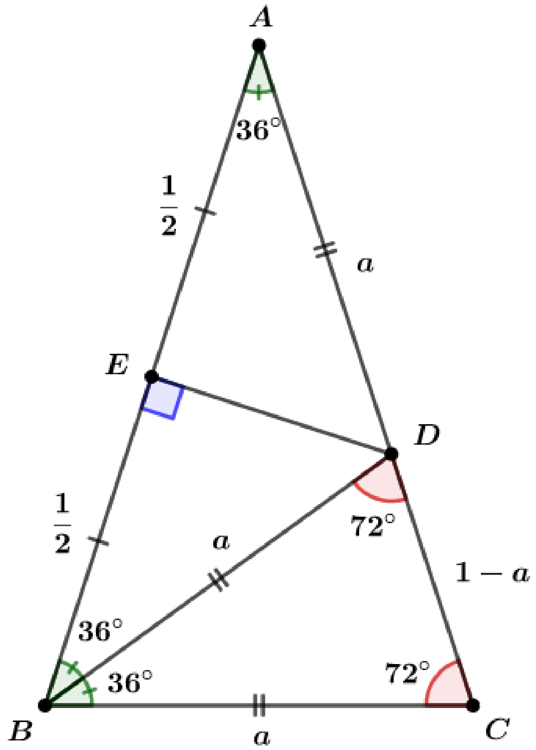
$$1 - a = a^2$$

$$a^2 + a - 1 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Agora, podemos calcular o valor do cosseno de $36°$. Como $\Delta ABD$ é isósceles com base $AB$, temos que $ED$ é a sua mediatriz. Assim, temos:




Do triângulo $BED$, podemos escrever:

$$\cos(36°) = \frac{\frac{1}{2}}{a}$$

$$\cos(36°) = \frac{1}{2a}$$

$$\cos(36°) = \frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

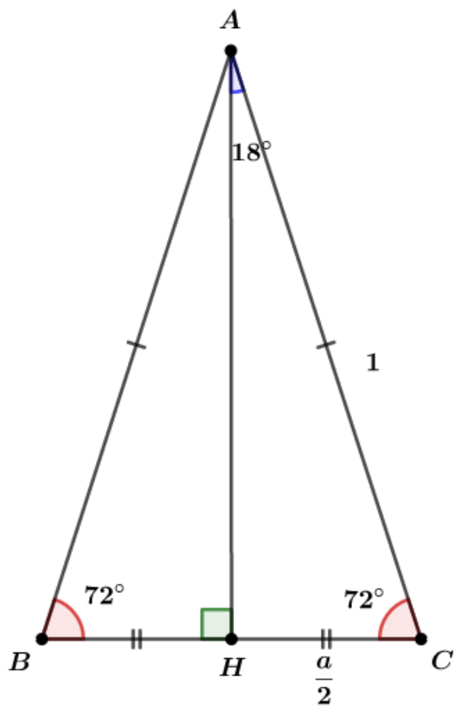
$$\cos(36°) = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$$

$$\therefore \cos(36°) = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Para calcular o valor do seno, basta aplicar o teorema de Pitágoras e encontrar o valor do lado $ED$.

## 6.2.4. 18°

Podemos calcular o valor do seno de 18° através do mesmo triângulo do item anterior:




Como $\Delta ABC$ é isósceles com base $BC$, temos que $AH$ é a mediatriz do triângulo. Assim, $H$ é o ponto médio da base $BC$. Desse modo:

$$sen(18°) = \frac{\frac{a}{2}}{1}$$

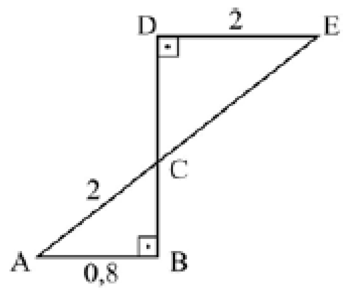
$$sen(18°) = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2}$$

$$\therefore sen(18°) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

## 7. QUESTÕES NÍVEL 1

**1. (EEAR/2021.2)**

**Os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$ interceptam-se no ponto $C$ e os ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{D}$ são retos, como mostra a figura. Sendo $\overline{AB}//\overline{DE}$, a medida de $\overline{AE}$ é**



a) 6

b) 7

c) 8

d) 9

**2. (EEAR/2021)**

Uma circunferência de 5 cm de raio possui duas cordas AB = 6 cm e BC = x cm. Se $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, então x é igual a

a) 8

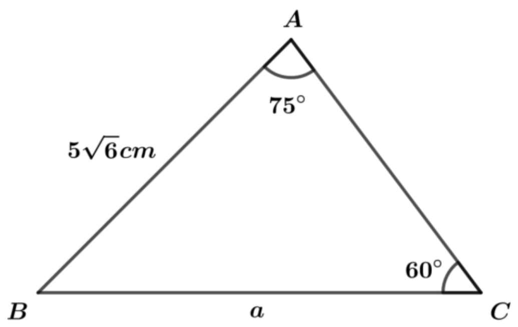
b) 7

c) 6

d) 5

**3. (EEAR/2021)**

Considerando a figura e que $sen\ 75°$ é igual a $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, calcula-se que a = 5 (_____) cm.




a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

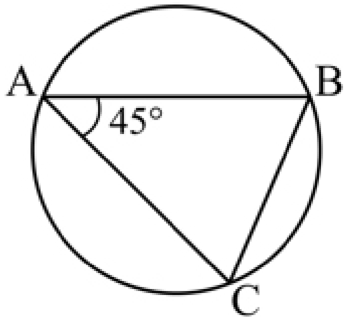
b) $1+\sqrt{3}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

**4. (EEAR/2018)**

O triângulo $ABC$ está inscrito na circunferência. Se $BC = 8$, a medida do raio é




a) $4\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $4$

d) $2$

5. **(EEAR/2018)**

Num triângulo ABC, são dados $\widehat{A} = 45°, \widehat{B} = 30°$ e $\overline{AC} = 6\ cm$. Então $\overline{BC} =$ ____$cm$.

a) $4\sqrt{3}$

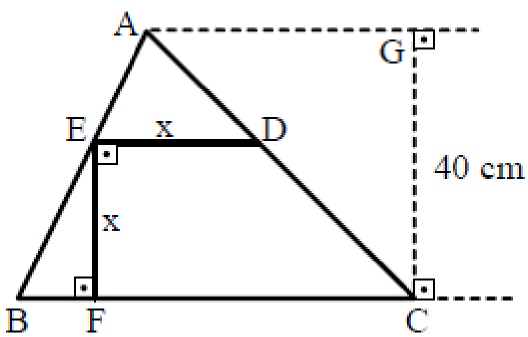
b) $6\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

6. **(EEAR/2018)**

Na figura, se $BC = 60cm$, a medida de $DE$, em cm, é




a) $20$

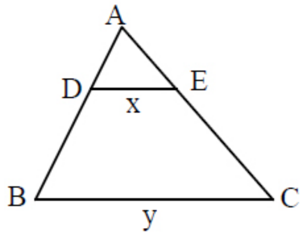
b) $24$

c) $30$

d) $32$

7. **(EEAR/2017)**

**Seja um triângulo $\Delta ABC$, conforme a figura.**




**Se $D$ e $E$ são pontos, respectivamente, de $AB$ e $AC$, de forma que $AD = 4, DB = 8, DE = x, BC = y$, e se $DE//BC$, então**

**a)** $y = x + 8$

**b)** $y = x + 4$

**c)** $y = 3x$

**d)** $y = 2x$

8. **(EEAR/2017)**

**Seja um triângulo inscrito em uma circunferência de raio R. Se esse triângulo tem um ângulo medindo $30°$, seu lado oposto a esse ângulo mede**

**a)** $\frac{R}{2}$

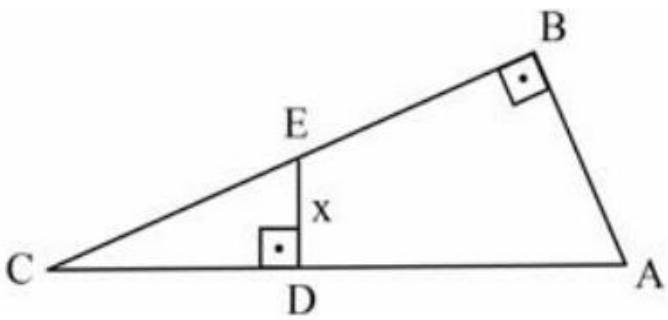
**b)** $R$

**c)** $2R$

**d)** $\frac{2R}{3}$

9. **(EEAR/2017)**

**Conforme a figura, os triângulos $ABC$ e $CDE$ são retângulos.**




**Se $\overline{AB} = 8\ cm, \overline{BC} = 15\ cm$ e $\overline{CD} = 5\ cm$, então a medida de $\overline{DE}$, em cm, é**

**a)** $\frac{2}{5}$

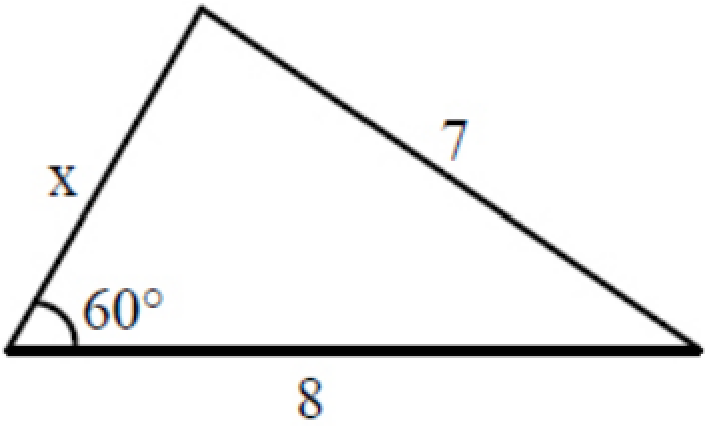
b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{8}{3}$

d) $\frac{1}{4}$

**10. (EEAR/2017)**

**Se o perímetro do triângulo abaixo é maior que 18, o valor de x é**




**a) 4**

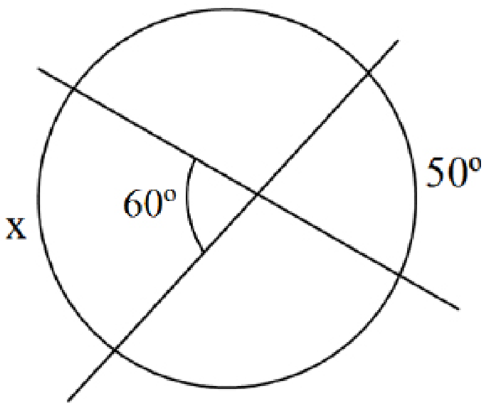
**b) 5**

**c) 6**

**d) 7**

**11. (EEAR/2016)**

**Duas cordas se cruzam num ponto distinto do centro da circunferência, conforme esboço.**




**A partir do conceito de ângulo excêntrico interior, a medida do arco $x$ é**

**a) $40°$**

**b) $70°$**

c) $110°$

d) $120°$

12. (EEAR/2016)

Um triângulo acutângulo ABC tem a medida do ângulo $\hat{A}$ igual a 30◦. Sabe-se que os lados adjacentes ao ângulo $\hat{A}$ medem $\sqrt{3}$ cm e 4 cm. A medida, em cm, do lado oposto ao referido ângulo é

a) $\sqrt{3}$

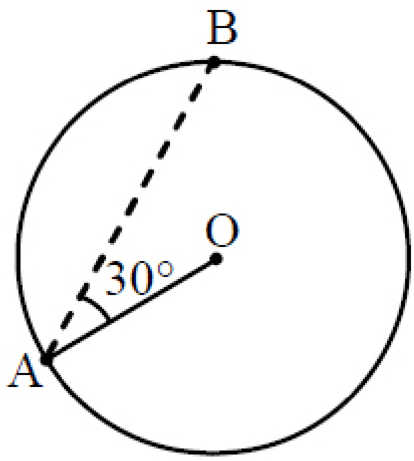
b) $\sqrt{7}$

c) $5\sqrt{3}$

d) $\sqrt{19-4\sqrt{3}}$

13. (EEAR/2015)

O ponto $O$ é o centro da circunferência da figura, que tem $3m$ de raio e passa pelo ponto $B$. Se o segmento $AB$ forma um ângulo de $30°$ com o raio $OA$, então a medida de $AB$, em $m$, é




a) $6\sqrt{3}$

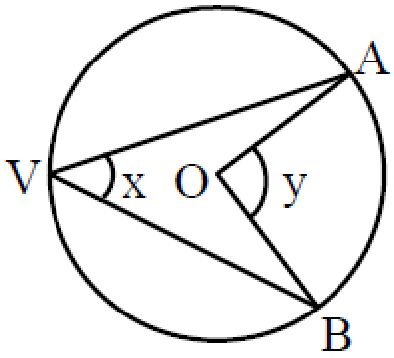
b) $3\sqrt{3}$

c) $6\sqrt{2}$

d) $3\sqrt{2}$

14. (EEAR/2015)

Na circunferência da figura, $O$ é o seu centro e $V$, $A$ e $B$ são três de seus pontos.




Se $x$ e $y$ são, respectivamente, as medidas dos ângulos $AOB$ e $BVA$, então sempre é correto afirmar que

a) $x = 2y$.

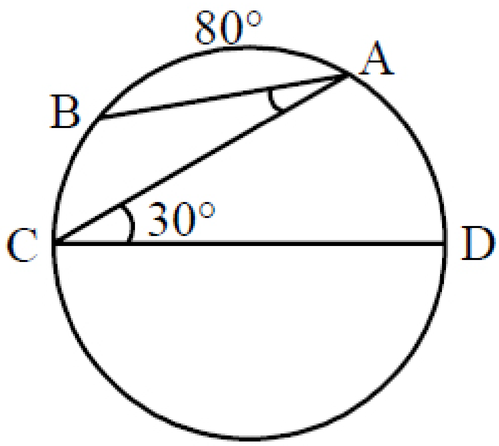
b) $y = 2x$.

c) $x + y = 90°$.

d) $x - y = 90°$.

15. (EEAR/2015)

Na figura, $A$ e $B$ são pontos da circunferência e $CD$ é seu diâmetro.




Assim, o ângulo $B\hat{A}C$ mede

a) $20°$.

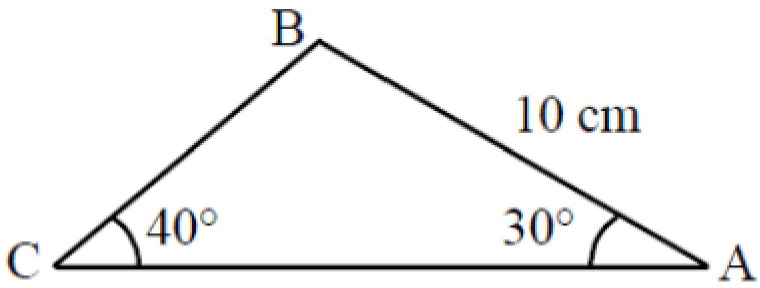
b) $30°$.

c) $50°$.

d) $60°$.

16. (EEAR/2013)

Considerando $sen(40°) = 0,6$, o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, mede, em cm, aproximadamente




a) 6,11

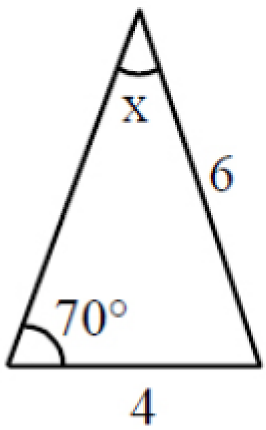
b) 7,11

c) 8,33

d) 9,33

**17. (EEAR/2013)**

**Considere as medidas indicadas na figura e que $sen(70°) = 0,9$. Pela "Lei dos Senos", obtém-se $sen(x) =$ ____.**




a) 0,4

b) 0,5

c) 0,6

d) 0,7

**18. (EEAR/2012)**

**O perímetro de um triângulo equilátero de altura h = $\sqrt{3}$ é ____m.**

a) 3

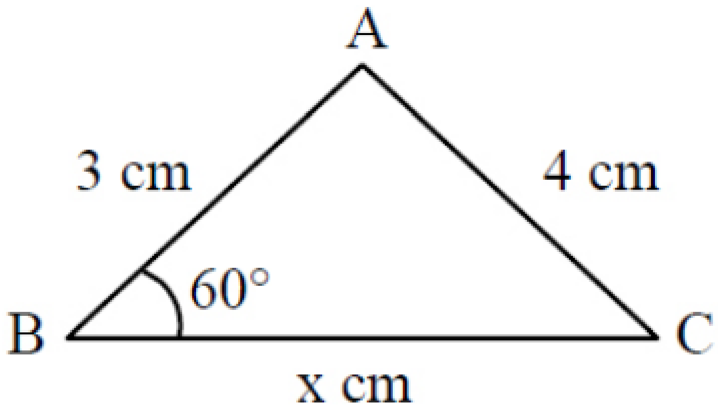
b) 4

c) 5

d) 6

**19. (EEAR/2012)**

**Considerando $\sqrt{37} = 6$, o valor de x na figura é**




**a) 2,5**

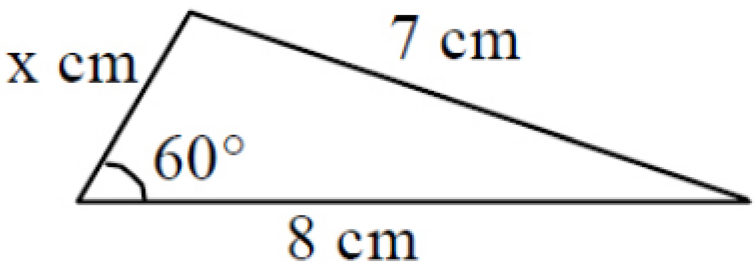
**b) 3,5**

**c) 4,5**

**d) 5,5**

**20. (EEAR/2011)**

**No triângulo, o menor valor que x pode assumir é**




**a) 4**

**b) 3**

**c) 2**

**d) 1**

**21. (EEAR/2011)**

**Um triângulo, inscrito em uma circunferência, tem um ângulo de $30°$ oposto a um lado de 10 cm. O diâmetro da circunferência, em cm, é**

**a) 10**

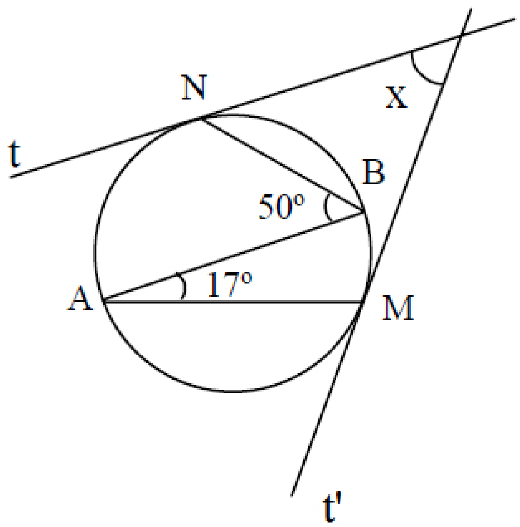
b) 15

c) 20

d) 25

22. (EEAR/2010)

Sejam $AB$ o diâmetro da circunferência, e as retas $t$ e $t'$ tangentes a ela nos pontos $N$ e $M$, respectivamente.




O valor de $x$ é

a) $66°$.

b) $60°$.

c) $55°$.

d) $50°$.

23. (EEAR/2010)

Os lados de um triângulo obtusângulo medem 3m, 5m e 7m. A medida da projeção do menor dos lados sobre a reta que contém o lado de 5m é, em m,

a) 2,5

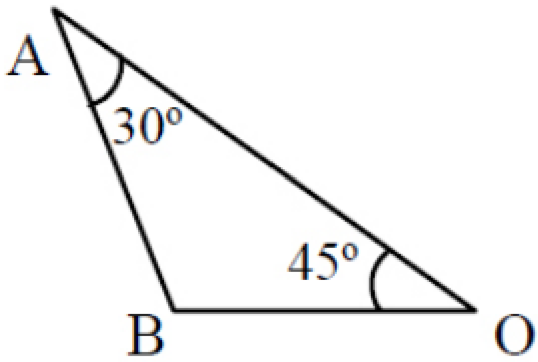
b) 1,5

c) 2

d) 1

24. (EEAR/2010)

No triângulo AOB, $\overline{OB} = 5\ cm$; então AB, em cm, é igual a




a) 6

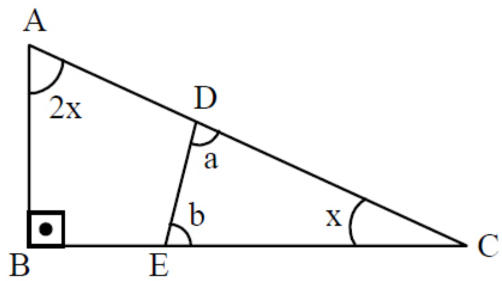
b) 8

c) $5\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{3}$

25. (EEAR/2010)

Se o triângulo CDE é semelhante ao triângulo ABC, o valor de $|a - b|$ é:




a) $30°$

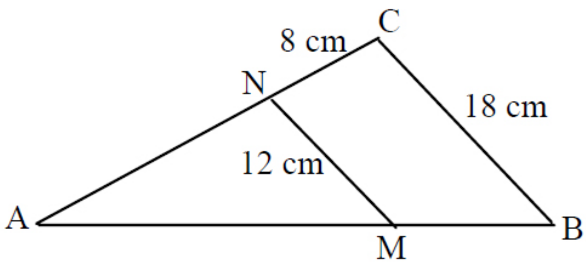
b) $45°$

c) $60°$

d) $90°$

26. (EEAR/2009)

Na figura, $\overline{MN} // \overline{BC}$.




Se $AB = 30cm$, então $\overline{MB}$ mede, em cm,

a) $5$

b) $10$

c) $15$

d) $20$

**27. (EEAR/2009)**

Dois lados de um triângulo medem 6 cm e 8 cm, e formam um ângulo de $60°$. A medida do terceiro lado desse triângulo, em cm, é

a) $2\sqrt{13}$

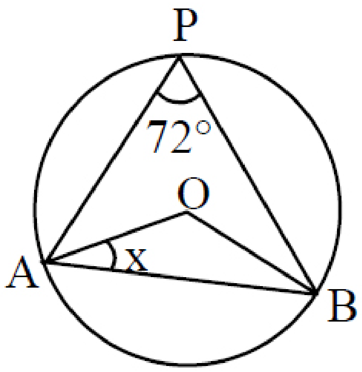
b) $3\sqrt{17}$

c) $\sqrt{23}$

d) $\sqrt{29}$

**28. (EEAR/2009)**

Na figura, $O$ é o centro da circunferência.




O valor de $x$ é

a) $18°$.

b) $20°$.

c) $22°$.

d) $24°$.

**29. (EEAR/2009)**

Sejam uma circunferência de centro $O$ e um ponto $A$ exterior a ela. Considere $AT$ um segmento tangente à circunferência, em $T$. Se o raio da circunferência mede $4\ cm$ e $AT = 8\sqrt{2}\ cm$, então a medida de $AO$, em $cm$, é

a) 10.

b) 12.

c) 13.

d) 15.

**30. (EEAR/2008)**

Dado um triângulo qualquer, é FALSO afirmar que

a) uma de suas alturas pode coincidir com um de seus lados.

b) suas alturas podem interceptar-se num ponto externo a ele.

c) o incentro é o centro da circunferência nele inscrita.

d) o circuncentro é o encontro das suas medianas.

**31. (EEAR/2008)**

No triângulo, cujos lados medem 5 cm, 10 cm e 6 cm, o maior ângulo tem cosseno igual a

a) $\frac{7}{10}$

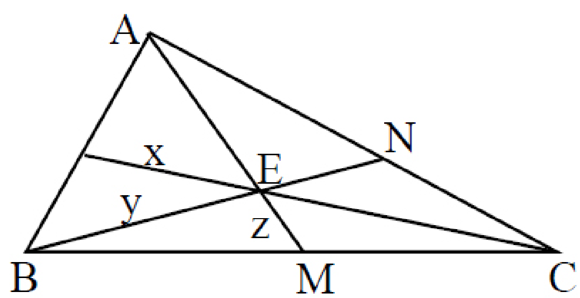
b) $\frac{9}{20}$

c) $-\frac{13}{20}$

d) $-\frac{8}{10}$

**32. (EEAR/2007)**

Sendo E o baricentro do triângulo $ABC, AE = 10cm, EN = 6cm, e\ CE = 14cm$, o valor, em cm, de $x + y + z$ é:




a) 18.

b) 20.

c) 22.

d) 24.

33. (EEAR/2007)

Dois triângulos são semelhantes, e uma altura do primeiro é igual aos $\frac{2}{5}$ de sua homóloga no segundo. Se o perímetro do primeiro triângulo é $140cm$, então o perímetro do segundo, em $cm$, é:

a) 250.

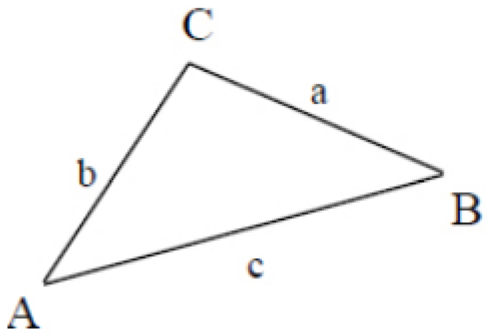
b) 280.

c) 300.

d) 350.

34. (EEAR/2007)

Considere o triângulo ABC. Assinale a alternativa FALSA.




a) $sen\,\widehat{B} = \frac{b}{a}$ e $cos\,\widehat{B} = \frac{c}{a}$

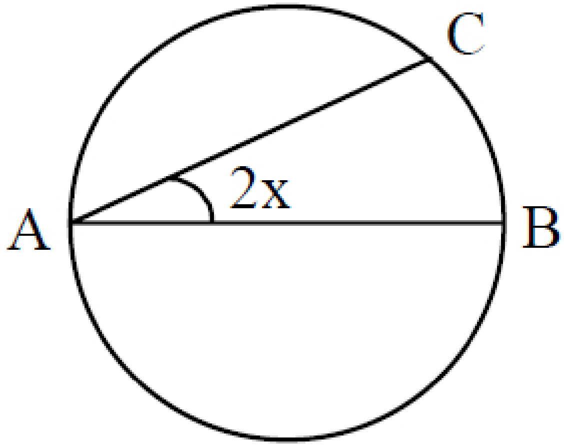
b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\,\widehat{A}$

c) $\frac{a}{sen(\widehat{A})} = \frac{b}{sen(\widehat{B})} = \frac{c}{sen(\widehat{C})}$

d) $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\widehat{B}$

35. (EEAR/2007)

Na figura, $AB$ é o diâmetro da circunferência e o arco $AC$ mede $100°$.




O valor de $x$ é:

a) $20°$.

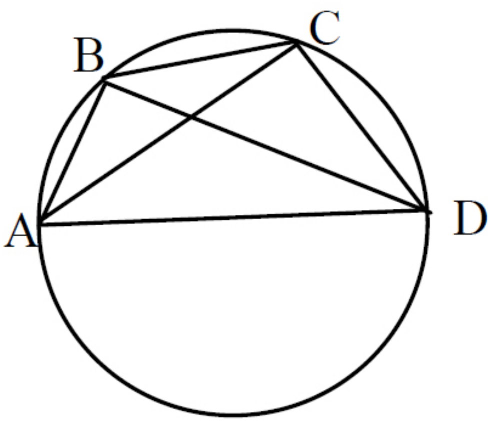
b) $35°$.

c) $45°$.

d) $50°$.

**36. (EEAR/2007)**

Na figura, $AD$ é o diâmetro da circunferência, $C\hat{A}D$ mede $35°$ e $B\widehat{D}C$, $25°$.




A medida de $A\widehat{C}B$ é

a) $30°$.

b) $35°$.

c) $40°$.

d) $45°$.

**37. (EEAR/2007)**

Um triângulo, inscrito numa circunferência de $10\ cm$ de raio, determina nesta três arcos, cujas medidas são $90°$, $120°$ e $150°$. A soma das medidas dos menores lados desse triângulo, em $cm$, é

a) $10(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

b) $10(1+\sqrt{3})$

c) $5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

d) $5(1+\sqrt{3})$

38. (EEAR/2006)

Num triângulo $ABC$, o ângulo $B\widehat{E}C$ mede $114°$. Se E é o incentro de $ABC$, então o ângulo $\hat{A}$ mede:

a) 44.

b) 48.

c) 56.

d) 58.

39. (EEAR/2006)

Num triângulo $ABC$, $AB = BC = 5\sqrt{2}cm$. Se R é o ponto médio de $\overline{AC}$, e S é o ponto médio de $\overline{AB}$, então a medida de $\overline{RS}$, em cm, é igual a:

a) $\frac{5}{2}$

b) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

40. (EEAR/2006)

Num triângulo ABC, a razão entre as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é 2. Se $\widehat{A} = 120°$ e $\overline{AC} = 1\ cm$, então o lado $\overline{BC}$ mede, em cm,

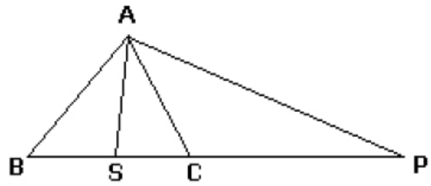
a) $\sqrt{7}$

b) $\sqrt{7}+1$

c) $\sqrt{13}$

d) $\sqrt{13}-1$

41. (EEAR/2005)




Na figura, $AS$ e $AP$ são, respectivamente, bissetrizes internas e externa do triângulo $\Delta ABC$. Se $BS = 8m$ e $SC = 6m$, então $SP$ mede, em m:

a) 48

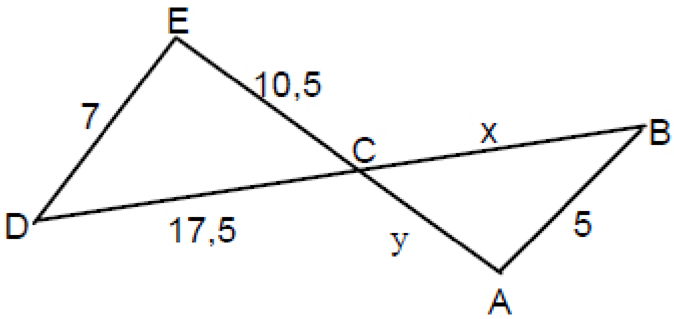
b) 42

c) 38

d) 32

**42. (EEAR/2005)**

Na figura, $DE//AB$. O valor de $x + y$ é:




a) $12,5$

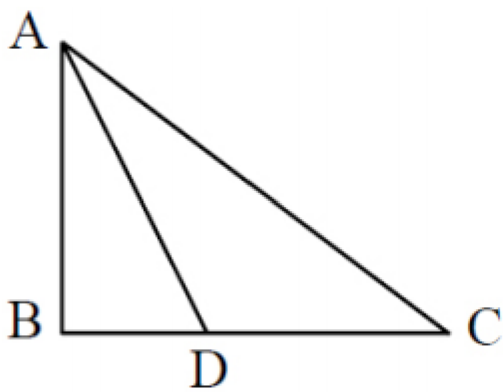
b) $17,5$

c) $20$

d) $22$

**43. (EEAR/2005)**

Seja o triângulo ABC retângulo em B



Se $\overline{AD}$ é bissetriz de $\hat{A}$, $\overline{AB} = 6\ cm$, e $\overline{AC} = 10\ cm$, então a medida de $\overline{DC}$, em cm, é

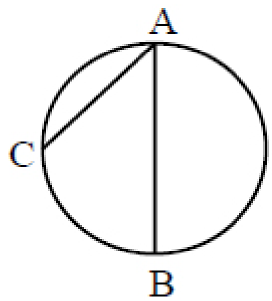
a) 6

b) 5

c) 4

d) 3

44. (EEAR/2005)




Na figura, $AB$ é diâmetro. Se o arco agudo $AC$ mede $70°$, a medida do ângulo $C\hat{A}B$ é

a) $50°$.

b) $55°$.

c) $60°$.

d) $65°$.

45. (EEAR/2005)

Num triângulo $ABC$, $BC = 10\ cm$ e $A\hat{B}C = 60°$. Se esse triângulo está inscrito numa semicircunferência e $BC$ é seu menor lado, então o raio dessa semicircunferência mede, em $cm$,

a) $5$.

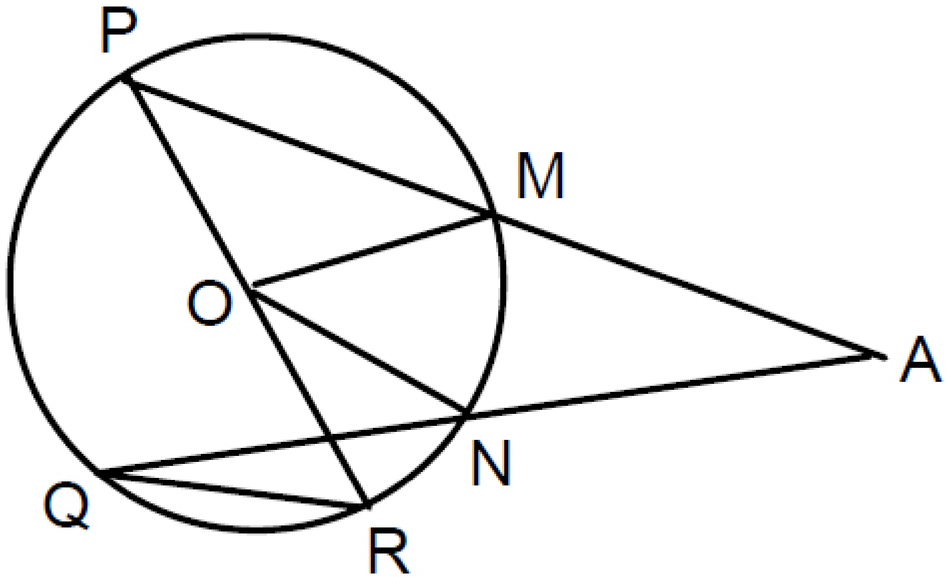
b) $10$.

c) $10\sqrt{2}$.

d) $10\sqrt{3}$.

46. (EEAR/2004)

Na figura, $O$ é o centro da circunferência, $M\hat{O}N = 62°$, e $P\hat{R}Q = 65°$. O ângulo $M\hat{A}N$ mede




a) $34°$.

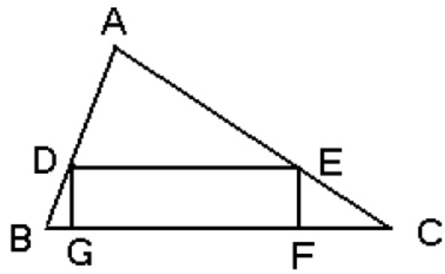
b) $36°$.

c) $38°$.

d) $40°$.

47. (EEAR/2004)

Na figura, o lado $BC$ do triângulo $ABC$ mede $12cm$, e a altura relativa ao lado $BC$ mede $8cm$. Se $FG = 3EF$, então o perímetro do retângulo $DEFG$, em cm, é:




a) $30$

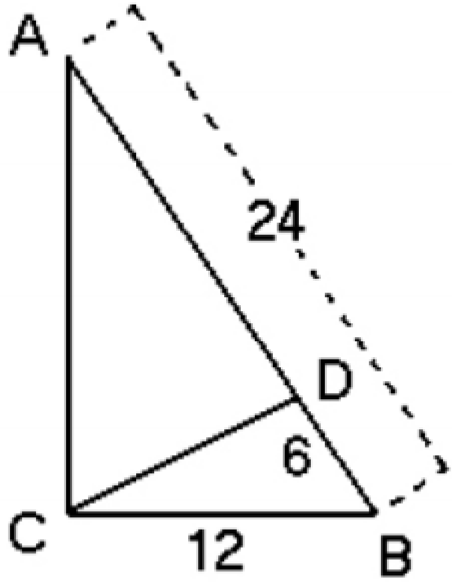
b) $28$

c) $\frac{85}{3}$

d) $\frac{64}{3}$

48. (EEAR/2004)

Se os dados no triângulo ABC, retângulo em C, estão em cm, então o triângulo BCD é




a) $\text{obtusângulo}$.

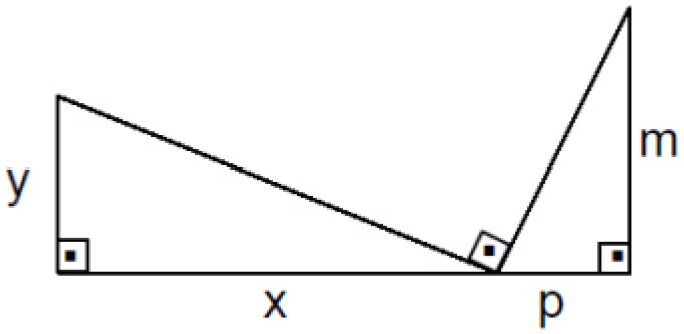
b) $\text{retângulo}$.

c) $\text{isósceles}$.

d) $\text{equilátero}$.

**49. (EEAR/2004)**

Na figura, os ângulos assinalados são retos. Assim, necessariamente, teremos




a) $\frac{x}{y} = \frac{p}{m}$

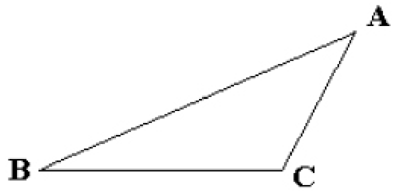
b) $\frac{x}{y} = \frac{m}{p}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$

d) $x^2 + y^2 = p^2 + m^2$

**50. (EEAR/2003)**

Na figura, as medidas dos lados $AB, AC\ e\ BC$ são, respectivamente, $40cm, 20cm\ e\ 30cm$.




A bissetriz interna desse triângulo, relativa ao vértice A, encontra o lado oposto no ponto $P$, e a bissetriz externa, relativa ao mesmo vértice, encontra o prolongamento do lado $BC$ no ponto $S$. A medida do segmento $PS$, em cm, é igual a:

a) $30$

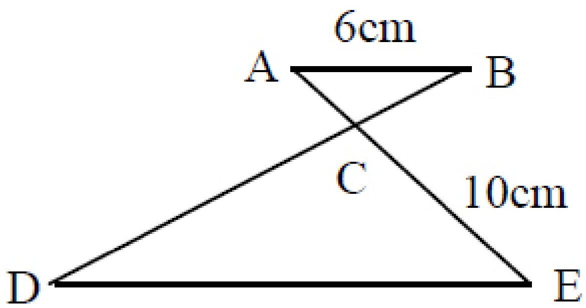
b) $35$

c) $40$

d) $45$

51. (EEAR/2003)

Na figura os triângulos ABC e EDC são semelhantes.




Sabendo que $AC = x - 5$ e $DE = 2x + 4$, a soma $med(AC) + med(CE)$, em cm, vale

a) $10,3$

b) $18$

c) $13$

d) $23,3$

52. (EEAR/2003)

Numa circunferência de centro C e raio 20 cm, considere a corda $\overline{AB}$, cujo ponto médio é M. Se $\overline{CM} = 10\ cm$, então a medida de $\overline{AB}$ é, em cm,

a) $15\sqrt{5}$

b) $20\sqrt{3}$

c) $15$

d) $20$

53. (EEAR/2003)

Se forem indicados por m, n, e p os três lados de um triângulo e por $\widehat{M}, \widehat{N}$ e $\widehat{P}$, respectivamente, os ângulos opostos a esses lados, então sendo conhecidos os lados m e n e o ângulo $\widehat{N}$, qual das fórmulas abaixo poderá ser utilizada para calcular o valor do lado p?

a) $m^2 = n^2 + p^2 - 2 \cdot n \cdot p \cdot \cos(\widehat{M})$

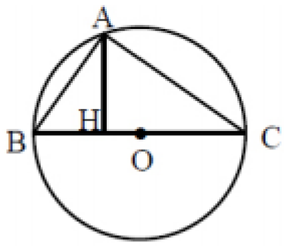
b) $n^2 = m^2 + p^2 + 2 \cdot m \cdot p \cdot \cos(\widehat{M} + \widehat{P})$

c) $p^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos(\widehat{P})$

d) $p^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos(\widehat{M} + \widehat{N})$

54. (EEAR/2003)

O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O e de raio 13 cm




Sabendo que $\overline{AB} = 10\ cm$, a altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ mede, em cm, aproximadamente

a) 7,6

b) 8,4

c) 9,23

d) 10,8

55. (EEAR/2003)

Seja o triângulo ABC e D um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $\overline{AD} = 2\ cm$, $\overline{AB} = \sqrt{3}\ cm$, $\overline{BD} = \overline{DC}$ e $B\hat{A}C = 30°$, a medida, em cm, do lado $\overline{BC}$ é igual a

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{5}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\sqrt{7}$

56. (EEAR/2003)

Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AB}$ mede $6\sqrt{3}\ cm$ e o ângulo $\widehat{C}$, oposto ao lado $\overline{AB}$, mede $60°$. O raio da circunferência que circunscreve o triângulo, em cm, mede

a) 6

b) 12

c) $6\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{6}$

57. (EEAR/2003)

As medidas dos lados de um triângulo são iguais a 4 cm, 5 cm e 6 cm. O cosseno do menor ângulo desse triângulo é igual a

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{9}{16}$

c) $\frac{3}{4}$

d) $\frac{2}{5}$

58. (EEAR/2003)

Se em uma circunferência uma corda mede $16\sqrt{2}\ cm$ e dista $6\sqrt{2}\ cm$ do centro, então a medida do raio dessa circunferência, em $cm$, é

a) $12\sqrt{2}$

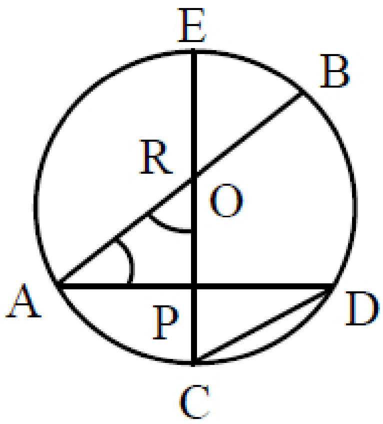
b) $10\sqrt{2}$

c) $8\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{2}$

59. (EEAR/2003)

Na figura, as cordas $AB$ e $CD$ são paralelas.




$EC$ é um diâmetro e $P$ é o ponto médio da corda $AD$. As medidas, em graus, dos ângulos $A\hat{R}C$ e $P\hat{A}R$ são, respectivamente, $4x - 14°$ e $5x - 13°$. As medidas dos ângulos do triângulo $\Delta PCD$ são

a) $42°, 57°, 81°$

b) $45°, 45°, 90°$

c) $46°, 45°, 90°$

d) $52°, 38°, 90°$

60. (EEAR/2003)

Em um triângulo $ABC$, a bissetriz do ângulo $\hat{A}$ encontra $BC$ em $D$, e a circunferência circunscrita, em $E$. Sendo $AE = 9\ cm$ e $DE = 4\ cm$, então a medida $EB$, em $cm$, é

a) $6$

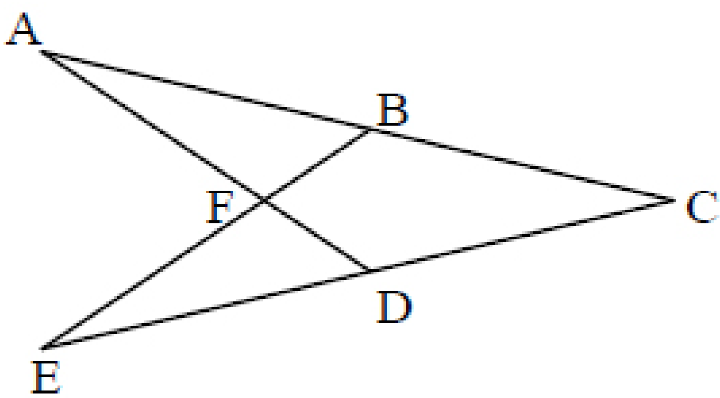
b) $5$

c) $2\sqrt{5}$

d) $3\sqrt{2}$

61. (EEAR/2002)

Na figura, se o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{E}$ , então a relação falsa é



a) $CA \cdot CB = CE \cdot CD$

b) $\frac{CA-CE}{CE} = \frac{CD-CB}{CD}$

c) $\frac{CA+CD}{CE+CB} = \frac{CD}{CB}$

d) $\frac{CA \cdot CD \cdot DA}{CE \cdot CB \cdot EB} = \left(\frac{CD}{CB}\right)^3$

62. (EEAR/2002)

Sejam: $\overline{AB}$ o diâmetro de uma circunferência de centro $O$; $\overline{AR}$ uma corda, tal que $B\hat{A}R = 20°$; $t$, paralela a $\overline{AR}$, uma reta tangente à circunferência, em $T$. Sabendo que $T$ e $R$ são pontos da mesma semicircunferência em relação a $AB$, a medida, em graus, do ângulo agudo formado pela reta $t$ e pela corda $AT$ é igual a

a) $25$

b) $35$

c) $50$

d) $70$

63. (EEAR/2002)

Traçam-se duas cordas de uma mesma extremidade de um diâmetro de um círculo. Uma delas mede $9\ cm$, e sua projeção sobre o diâmetro mede $5,4\ cm$. O comprimento da outra corda, cuja projeção no diâmetro é de $9,6\ cm$ mede, em $cm$,

a) $10$

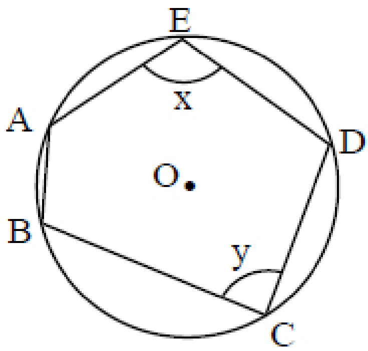
b) $12$

c) $14$

d) $15$

64. (EEAR/2002)

Seja o pentágono $ABCDE$ da figura, inscrito numa circunferência de centro $O$. Se o ângulo $A\hat{O}B = 50°$, então $x + y$ vale, em graus




a) $216$

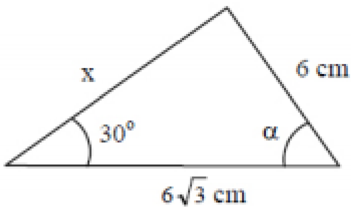
b) $205$

c) $180$

d) $105$

65. (EEAR/2002)

Sendo α um ângulo agudo, o lado x do triângulo abaixo, em cm, mede




a) 6

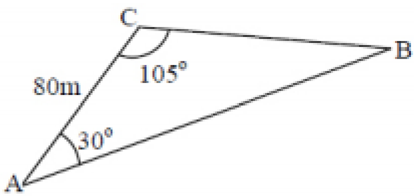
b) 10

c) 12

d) 15

66. (EEAR/2002)

De acordo com os dados da figura, a distância aproximada, em metros, entre os pontos A e B é




a) 100

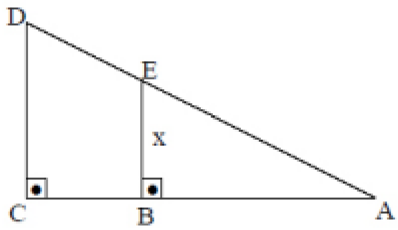
b) 102

c) 104

d) 108

67. (EEAR/2002)

Dada a figura abaixo, se $\overline{AB} = 8\text{ cm}$, $\overline{CD} = 4\text{ cm}$ e $\overline{AD} = 20\text{ cm}$, a medida, em cm, de $x$ é




a) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

68. (EEAR/2001)

Num círculo de centro $C$ e raio $R$, tomam-se dois pontos $A$ e $B$ sobre a circunferência do círculo. Sendo o ângulo $\alpha = A\hat{C}B$ e sabendo-se que o arco $\widehat{AB}$ tem comprimento $R$, então pode-se afirmar:

a) $\alpha = 45°$

b) $\alpha = 90°$

c) $45° < \alpha < 50°$

d) $55° < \alpha < 60°$

69. (EEAR/2001)

Sejam $P$, $Q$ e $R$ pontos de uma circunferência de centro $O$, tais que $P$ e $Q$ estejam do mesmo lado em relação ao diâmetro que passa por $R$. Sabendo-se que $med(O\hat{R}P) = 10°$ e $med(R\hat{O}Q) = 80°$, tem-se que o ângulo $P\hat{Q}O$ mede:

a) $20°$

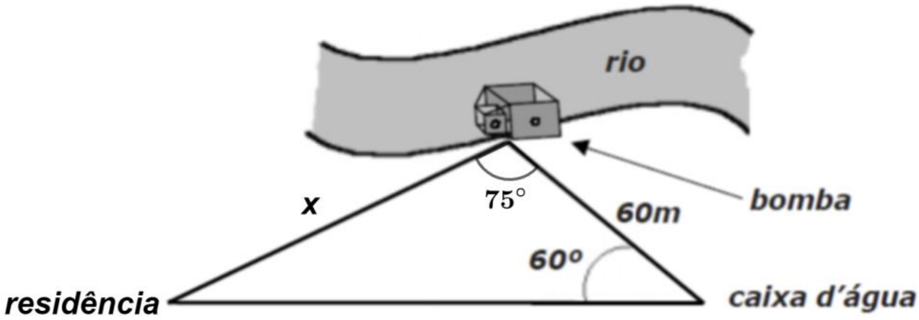
b) $40°$

c) $50°$

d) $60°$

70. (ESA/2021)

**A água utilizada em uma residência é captada e bombeada do rio para uma caixa d`água localizada a 60 m de distância da bomba. Os ângulos formados pelas direções bomba – caixa d`água – residência é de $60°$ e residência – bomba – caixa d`água é de $75°$, conforme a figura abaixo. Para bombear água do mesmo ponto de captação, diretamente para a residência, quantos metros de tubulação são necessários? Use $\sqrt{6} = 2,4$**




**a) 12,5 metros**

**b) 72 metros**

**c) 35,29 metros**

**d) 21,25 metros**

**e) 28 metros**

**71. (ESA/2019)**

**As medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo são expressas por $x + 1$, $2x$ e $x^2 - 5$ e estão em progressão aritmética, nessa ordem. Calcule o perímetro do triângulo:**

**a) 18**

**b) 25**

**c) 15**

**d) 20**

**e) 24**

**72. (ESA/2019)**

**Uma pequena praça tem o formato triangular, as medidas dos lados desse triângulo são $\sqrt{37}$m, $4$m e $3$m. Qual a medida do ângulo oposto ao maior lado?**

**a) 120°**

**b) 60°**

**c) 90°**

d) 45°

e) 150°

73. (ESA/2011)

Um terreno de forma triangular tem frentes de $20$ metros e $40$ metros, em ruas que formam, entre si, um ângulo de $60°$. Admitindo-se $\sqrt{3} = 1,7$, a medida do perímetro do terreno, em metros, é

a) $94.$

b) $93.$

c) $92.$

d) $91.$

e) $90.$

74. (ESA/2007) [Adaptada]

Seja um ponto $P$ pertencente a um dos lados de um ângulo de $60°$, distante $4,2\ cm$ do vértice. Qual é a distância, em $cm$, deste ponto à bissetriz do ângulo?

a) $2,2$

b) $2,1$

c) $2,0$

d) $2,3$

e) $2,4$

75. (ESA/2006)

O triângulo $ABC$ retângulo em $A$ e que $\angle ABC > \angle ACD$. A bissetriz interna de $\hat{A}$ intersepta o lado BC em D. Seja $HD \perp BC$ ($H$ entre $A$ e $C$). Nestas condições podemos afirmar que o ângulo HBD mede, em graus:

a) 35

b) 25

c) 45

d) 65

e) 55

76. (ESA/2004)

A soma dos lados de um triângulo ABC é 140cm. A bissetriz interna do ângulo A divide o segmento oposto BC em dois outros segmentos: 20cm e 36cm. As medidas dos lados AB e AC são, respectivamente:

a) 42cm e 42cm

b) 60cm e 24cm

c) 34cm e 50cm

d) 32cm e 52cm

e) 30cm e 54cm

**77. (ESPCEX/2021)**

Os lados AB, AC e BC de um triângulo ABC medem, respectivamente, 4cm, 4cm e 6cm. Então a medida, em cm, da mediana relativa ao lado AB é igual a:

a) $\sqrt{14}$

b) $\sqrt{17}$

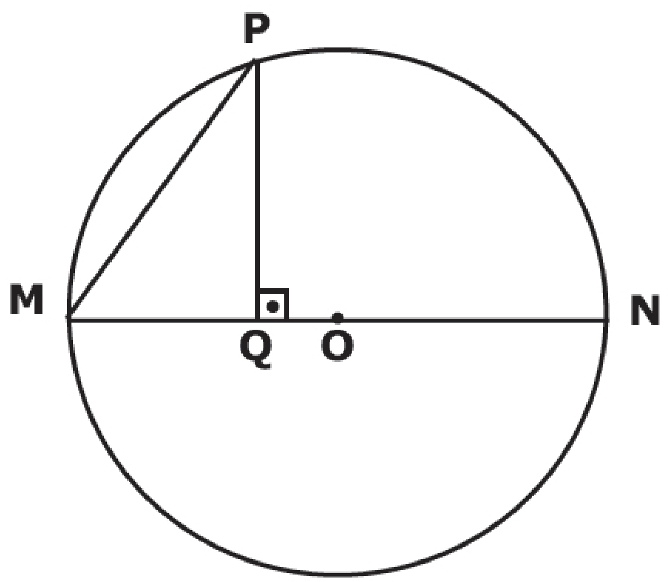
c) $\sqrt{18}$

d) $\sqrt{21}$

e) $\sqrt{22}$

**78. (EsPCEx/2016)**

Na figura, o raio da circunferência de centro $O$ é $\frac{25}{2}$ $cm$ e a corda $MP$ mede $10$ $cm$.




desenho ilustrativo-fora de escala

A medida, em centímetros, do segmento $PQ$ é

a) $\frac{25}{2}$

b) $10$

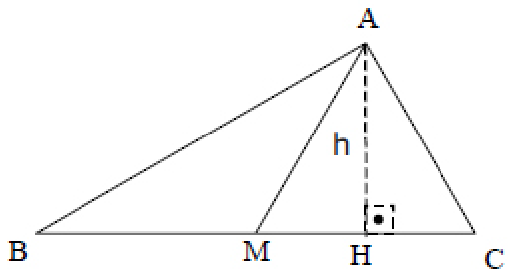
c) $5\sqrt{21}$

d) $\sqrt{21}$

e) $2\sqrt{21}$

79. (EsPCEx/2007)

No triângulo $ABC$, a base $\overline{BC}$ mede $8\ cm$, o ângulo $\hat{B}$ mede $30°$ e o segmento $\overline{AM}$ é congruente ao segmento $\overline{MC}$, sendo $M$ o ponto médio de $\overline{BC}$. A medida, em centímetros, da altura $h$, relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo $ABC$, é de




a) $\sqrt{2}\ cm$

b) $2\sqrt{2}\ cm$

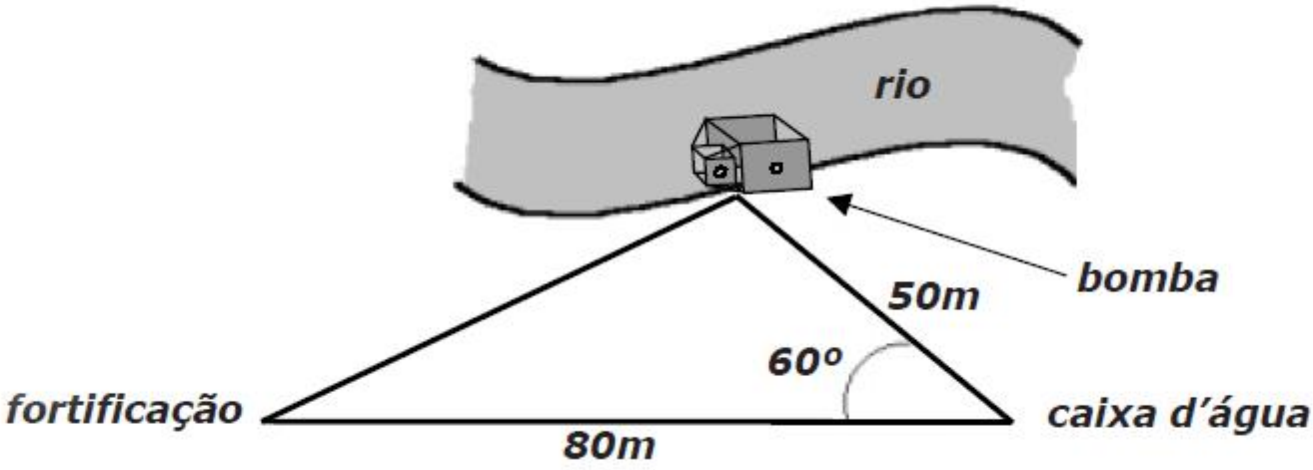
c) $\sqrt{3}\ cm$

d) $2\sqrt{3}\ cm$

e) $3\sqrt{3}\ cm$

80. (EsPCEx/2005)

A água utilizada em uma fortificação é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água localizada a $50\ m$ de distância da bomba. A fortificação está a $80\ m$ de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções bomba – caixa d'água e caixa d'água – fortificação é de $60°$, conforme mostra a figura abaixo.




**Para bombear água do mesmo ponto de captação, diretamente para a fortificação, quantos metros de tubulação são necessários?**

**a)** $54$ **metros.**

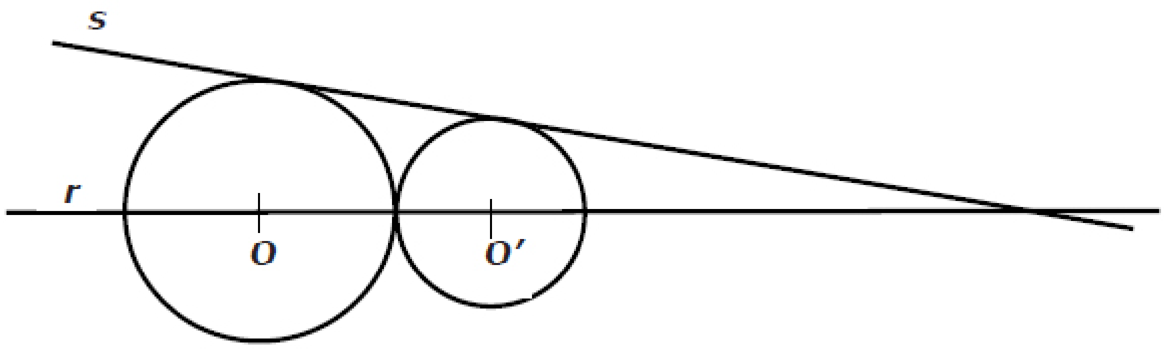
**b)** $55$ **metros.**

**c)** $65$ **metros.**

**d)** $70$ **metros.**

**e)** $75$ **metros.**

**81. (EsPCEx/2005)**




**Na figura, as circunferências são tangentes entre si e seus raios estão na razão $\frac{1}{3}$. Se a reta $r$ passa pelos centros $O$ e $O'$ das duas circunferências, e a reta $s$ é tangente a ambas, então o menor ângulo formado por essas duas retas mede**

**a)** $\text{arcsen}\,\frac{1}{3}$

**b)** $\text{arctg}\,\frac{1}{2}$

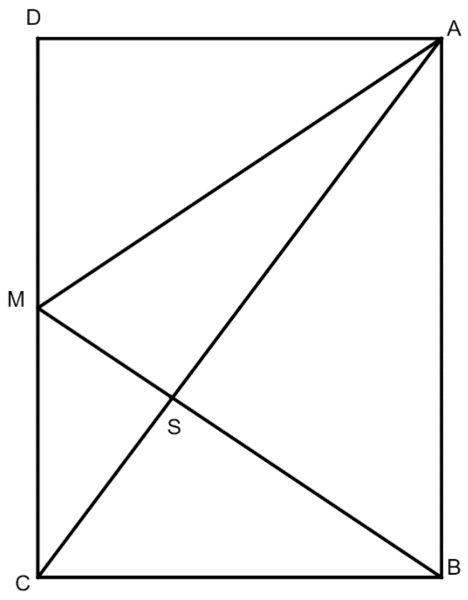
**c)** $60°$

**d)** $45°$

e) $30°$

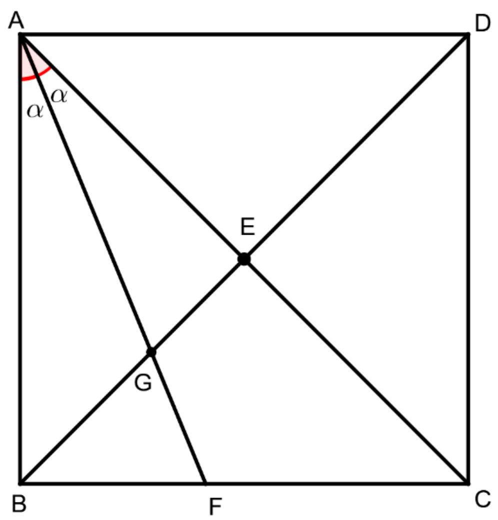
**82. (Tópicos de Matemática)**

**Na figura $ABCD$ é um retângulo, $M$ é o ponto médio de $CD$ e o triângulo $ABM$ é equilátero. Se $AB = 15m$, calcule $BS$.**



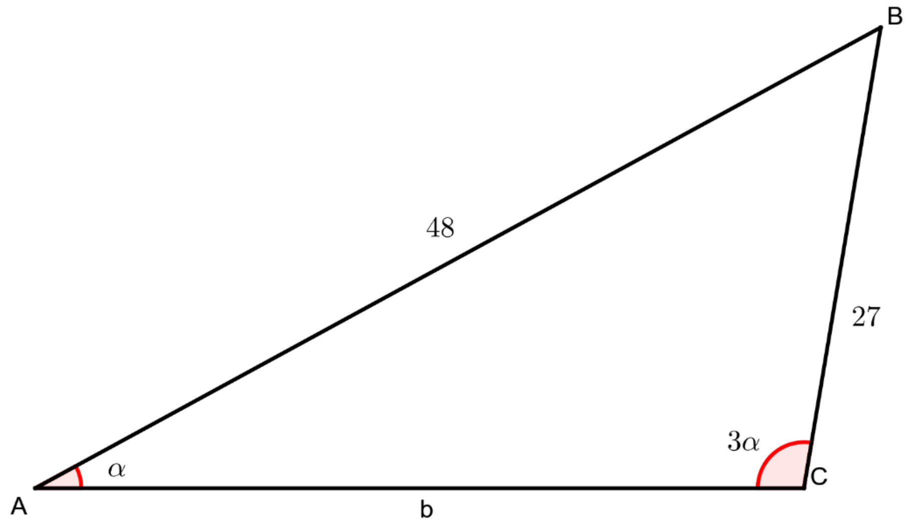

**83. (Tópicos de Matemática)**

**Em um quadrado $ABCD$, $AC$ e $BD$ se interceptam em $E$. O ponto $F$ sobre $BC$ é tal que os ângulos $C\hat{A}F$ e $F\hat{A}B$ são iguais, se $AF$ intersecta $BD$ em $G$ e se $EG = 24$, determine $CF$.**



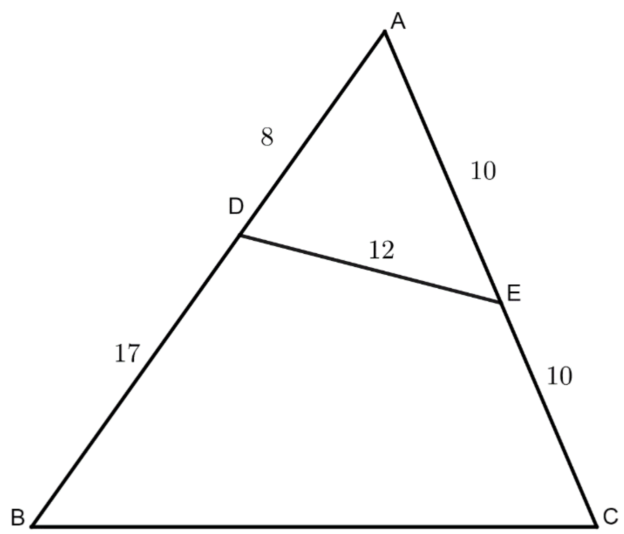

**84. (Tópicos de Matemática)**

**No triângulo $ABC$ (obtusângulo) da figura abaixo, determine a medida $b$ do lado $AC$.**



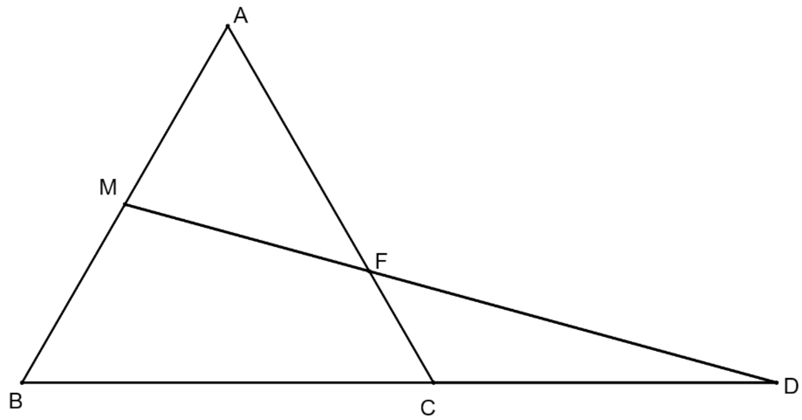

**85. (Tópicos de Matemática)**

**No triângulo $ABC$ da figura abaixo, determine a medida do lado $BC$.**




**86. (Mack/1978)**

**O triângulo $ABC$ da figura é equilátero. $AM = MB = 10$ e $CD = 12$. Calcule o valor de $FC$.**




**87. (CN/2019)**

**A circunferência $\lambda$, inscrita no triângulo retângulo ABC, tangencia a hipotenusa BC, dividindo-a em dois segmentos de reta de medidas $'p'$ e $'q'$, a partir desse ponto de tangência. A média geométrica dos catetos $'b'$ e $'c'$ desse triângulo é igual a:**

**a)** $(pq)^2$

**b)** $(2pq)^2$

**c)** $\sqrt{pq}$

**d)** $\sqrt{2pq}$

**e)** $\sqrt{\frac{pq}{2}}$

**88. (CN/2017)**

**Analise as afirmativas a seguir.**

**I. Sejam $a, b$ e $c$ lados de um triângulo, com $c > b > a$. Pode-se afirmar que $c^2 = a^2 + b^2$ se, e somente se, o triângulo for retângulo.**

**II. Se um triângulo é retângulo, então as bissetrizes internas dos ângulos agudos formam entre si um ângulo de 45° ou 135°.**

**III. O centro de um círculo circunscrito a um triângulo retângulo está sobre um dos catetos.**

**IV. O baricentro de um triângulo retângulo é equidistante dos lados do triângulo.**

**Assinale a opção correta.**

**a) Somente I e II são verdadeiras.**

**b) Somente II e III são verdadeiras.**

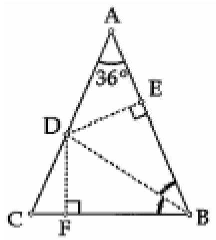
**c) Somente I e IV são verdadeiras.**

**d) Somente I, II e IV são verdadeiras.**

e) As afirmativas I, II, III e IV são verdadeiras.

89. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.




A figura a acima mostra um triângulo isósceles ABC, com BÂC = 36° e AB = AC = 1 m. A bissetriz interna de B corta AC em D. Por D, traçam-se as distâncias até AB e até BC, determinando os pontos E e F, respectivamente. Sendo assim, é correto afirmar que o valor do produto $\frac{DE}{AD} \cdot \frac{DF}{BF}$ é

a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

b) $\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

c) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{3\sqrt{5}-1}{2}$

e) $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$

90. (CN/2016)

Analise as afirmativas abaixo:

I. Todo triângulo retângulo de lados inteiros e primos entre si possui um dos lados múltiplo de 5.

II. Em um triângulo retângulo, o raio do círculo inscrito é igual ao perímetro do triângulo menos a hipotenusa.

III. Há triângulos que não admitem triângulo órtico, ou seja, o triângulo formado pelos pés das alturas.

IV. O raio do círculo circunscrito a um triângulo retângulo é o dobro da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

a) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

b) Apenas as afirmativas I e IV são verdadeiras.

c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

d) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas III e IV são verdadeiras.

91. (CN/2015)

Qual a medida da maior altura de um triângulo de lados 3, 4 e 5?

a) $\frac{12}{5}$

b) $3$

c) $4$

d) $5$

e) $\frac{20}{3}$

92. (CN/2014)

Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados AC = $b$ e BC = $a$. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:

a) $\frac{a^2}{b^2}$

b) $\frac{a^3}{b^2}$

c) $\frac{a^2}{b^3}$

d) $\frac{a^3}{b^3}$

e) $\frac{a}{b}$

93. (CN/2013)

Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.

I. Seja AB = $c$, AC = $b$ e BC = $a$. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$.

II. Seja AB = $c$, AC = $b$ e BC = $a$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.

III. Se M é ponto médio de BC e $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$, ABC é retângulo.

IV. Se ABC é retângulo, então o raio do seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

a) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

c) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

d) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

94. (CN/2010)

Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é k, pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será

a) $\frac{5k}{2}$

b) $\frac{4k}{3}$

c) $\frac{4k}{5}$

d) $\frac{k}{2}$

e) $\frac{k}{3}$

95. (CN/2009)

Em um triângulo retângulo ABC, BD é a bissetriz interna relativa ao cateto maior AC e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Se o ponto I é a intersecção entre BD e AH, pode-se afirmar que $\frac{med(BH)}{med(IH)}$ é igual a:

a) $\frac{med(BC)}{med(AH)}$

b) $\frac{med(BC)}{med(AD)}$

c) $\frac{med(BC)}{med(CD)}$

d) $\frac{med(AD)}{med(AI)}$

e) $\frac{med(AD)}{med(IH)}$

96. (CN/2008)

Um triângulo retângulo, de lados expressos por números inteiros consecutivos, está inscrito em um triângulo equilátero T de lado x. Se o maior cateto é paralelo a um dos lados de T, pode-se concluir que x é aproximadamente igual a

a) 6,5

b) 7,0

c) 7,5

d) 8,0

e) 8,5

97. (CN/2008)

Considere um triângulo acutângulo ABC, e um ponto P coplanar com ABC. Sabendo-se que P é equidistante das retas suportes de AB e de BC e que o ângulo BPC tem medida igual a 25°, pode-se afirmar que um dos ângulos de ABC mede:

a) 25°

b) 45°

c) 50°

d) 65°

e) 85°

98. (CN/2005)

No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida $x$ e a mediana BM tem a mesma medida $y$ do lado BC. Sendo assim, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{y}$ é um valor compreendido entre

a) 0 e 1

b) 1 e 2

c) 2 e 3

d) 3 e 4

e) 4 e 5

99. (CN/2005)

Num determinado triângulo escaleno ABC, o ângulo BAC é igual a 90°. Sabe-se que AB = c, AC = b e BC = a. Internamente ao segmento BC, determina-se o ponto P de modo que $BP = \frac{(c+b)\cdot(c-b)}{a}$, o perímetro do triângulo a APC é dado pela expressão:

a) $\frac{2b\cdot(a+b)}{a}$

b) $\frac{2c\cdot(a+b)}{a}$

c) $\frac{2b\cdot(b+c)}{a}$

d) $\frac{2c\cdot(b+c)}{a}$

e) $\frac{2b\cdot(a+c)}{a}$

**100. (CN/2003)**

Quantos são os pontos de um plano $\alpha$ que estão equidistantes das três retas suportes dos lados de um triângulo ABC contido em $\alpha$?

a) Um.

b) Dois.

c) Três.

d) Quatro.

e) Cinco.

**101. (CN/1998)**

Um triângulo isósceles tem os lados congruentes medindo 5cm e base medindo 8cm. A distância entre seu incentro e o seu baricentro é, aproximadamente, igual a:

a) 0,1 cm

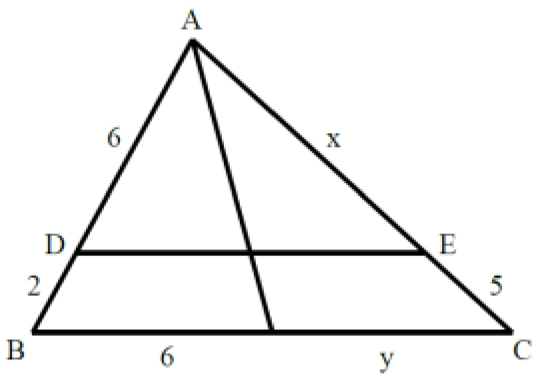
b) 0,3 cm

c) 0,5 cm

d) 0,7 cm

e) 0,9 cm

**102. (CN/1998)**




Na figura acima, DE é paralelo a BC e AM é bissetriz interna do triângulo ABC. Então $x + y$ é igual a:

a) 15

b) 20

c) 25

d) 30

e) 35

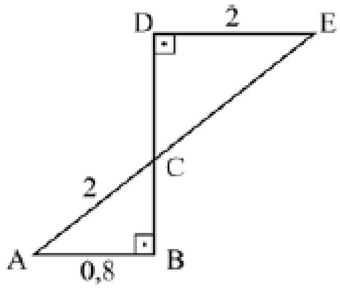
## GABARITO

1. B
2. a
3. b
4. a
5. b
6. b
7. c
8. b
9. c
10. b
11. b
12. b
13. b
14. b
15. a
16. c
17. c
18. d
19. c
20. b
21. c
22. a
23. b
24. c
25. a
26. b
27. a
28. a
29. b
30. d
31. c
32. d
33. d
34. a
35. a
36. a
37. a
38. b
39. d
40. a
41. a
42. c
43. b
44. b
45. b
46. a
47. d
48. b
49. b
50. c
51. c
52. b
53. b
54. c
55. a
56. a
57. c
58. b
59. d
60. a
61. b
62. b
63. b
64. b
65. a
66. d
67. c
68. d
69. c
70. B
71. e
72. a
73. a
74. b
75. c
76. e
77. e
78. e
79. d
80. d
81. e
82. $BS = 10$
83. $CF = 48$
84. $b = 35$
85. $BC = 30$
86. $FC = 60/11$
87. d
88. a
89. b
90. a
91. c
92. a
93. d
94. e
95. c
96. c
97. Anulada
98. b
99. a
100. d
101. b
102. d

# RESOLUÇÃO

**1. (EEAR/2021.2)**

**Os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{BD}$ interceptam-se no ponto $C$ e os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{D}$ são retos, como mostra a figura. Sendo $\overline{AB}//\overline{DE}$, a medida de $\overline{AE}$ é**




**a) 6**

**b) 7**

**c) 8**

**d) 9**

**Comentários**

Por semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} \Rightarrow \frac{2}{EC} = \frac{0{,}8}{2} \Rightarrow EC = \frac{4}{0{,}8} = 5$$

Logo, $AE = AC + EC = 5 + 2 = 7$.

**Gabarito: B**

---

**2. (EEAR/2021)**

**Uma circunferência de 5 cm de raio possui duas cordas AB = 6 cm e BC = x cm. Se $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, então x é igual a**

**a) 8**

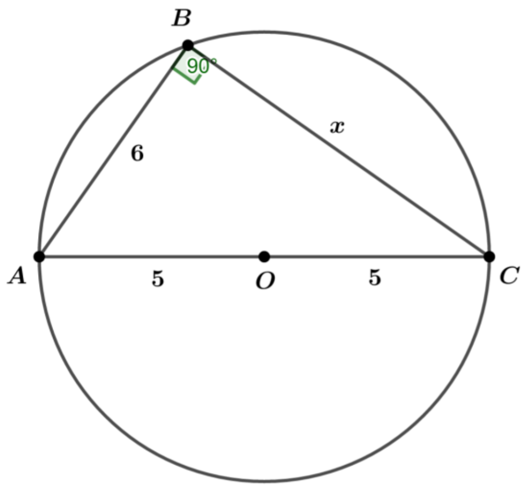
**b) 7**

**c) 6**

**d) 5**

**Comentários**

Temos a seguinte figura:




Note que pelo fato de $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ serem perpendiculares, temos que o $\Delta ABC$ é retângulo e está inscrito em uma circunferência de raio 5 cm. Com isso, temos que a hipotenusa desse triângulo é igual ao diâmetro da circunferência. Assim, aplicando o teorema de Pitágoras:

$$10^2 = 6^2 + x^2$$

$$100 = 36 + x^2$$

$$x^2 = 64$$

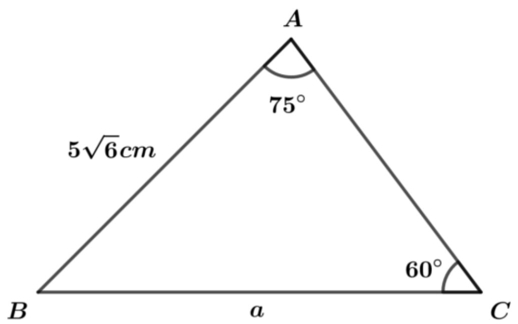
$$\therefore x = 8\ cm$$

**Gabarito: A**

---

**3. (EEAR/2021)**

**Considerando a figura e que $sen\ 75°$ é igual a $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, calcula-se que a = 5 (______) cm.**




**a)** $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

**b)** $1 + \sqrt{3}$

**c)** $\sqrt{2}$

**d)** $\sqrt{3}$

**Comentários**

Podemos aplicar a lei dos senos:

$$\frac{a}{sen75°} = \frac{5\sqrt{6}}{sen60°} \Rightarrow a = 5\sqrt{6} \cdot \frac{sen75°}{sen60°} = 5\sqrt{6} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = 5\sqrt{6} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

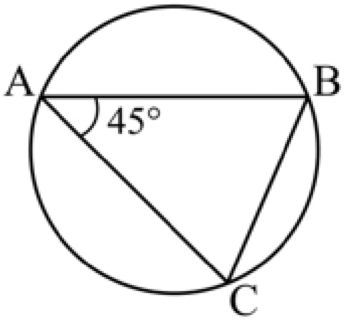
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right) = \frac{5\left(2+2\sqrt{3}\right)}{2} = 5\left(1+\sqrt{3}\right)$$

**Gabarito: B**

---

**4. (EEAR/2018)**

**O triângulo $ABC$ está inscrito na circunferência. Se $BC = 8$, a medida do raio é**




**a) $4\sqrt{2}$**

**b) $2\sqrt{2}$**

**c) $4$**

**d) $2$**

**Comentário:**

Considere o triângulo $\Delta OBC$, sendo $O$ o centro da circunferência. Como $B\hat{O}C$ é ângulo central que enxerga o mesmo arco que o inscrito $B\hat{A}C$, temos que $B\hat{O}C = 90°$ e daí $\Delta OBC$ é retângulo em $O$. Logo pelo teorema de Pitágoras $OB^2 + OC^2 = BC^2 \Rightarrow 2r^2 = 8^2 \therefore r = 4\sqrt{2}$.

**Gabarito: "a".**

---

**5. (EEAR/2018)**

**Num triângulo ABC, são dados $\hat{A} = 45°, \hat{B} = 30°$ e $\overline{AC} = 6\ cm$. Então $\overline{BC} = \_\_\_\_ cm$.**

**a) $4\sqrt{3}$**

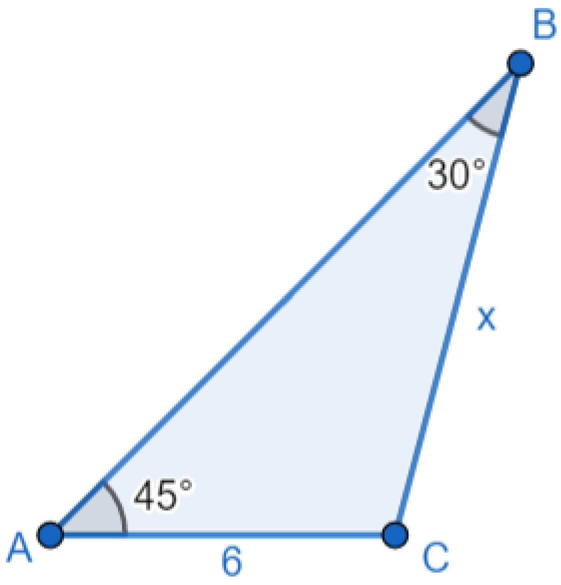
**b) $6\sqrt{2}$**

**c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$**

**d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Usaremos a Lei dos Senos

$$\frac{\overline{AC}}{sen(\hat{B})} = \frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{sen(30°)} = \frac{\overline{BC}}{sen(45°)}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{1/2} = \frac{\overline{BC}}{\sqrt{2}/2}$$

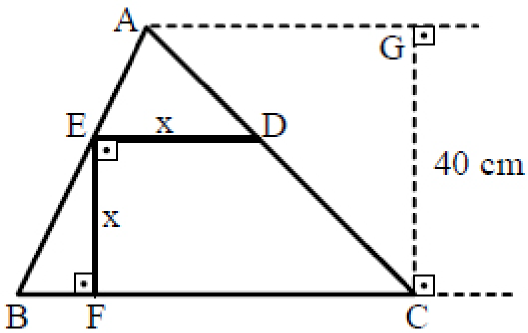
$$\Rightarrow \overline{BC} = \frac{6}{1/2} \cdot \sqrt{2}/2 = 6\sqrt{2}$$

**Gabarito: "b"**

---

**6. (EEAR/2018)**

**Na figura, se $BC = 60cm$, a medida de $DE$, em cm, é**




**a) 20**

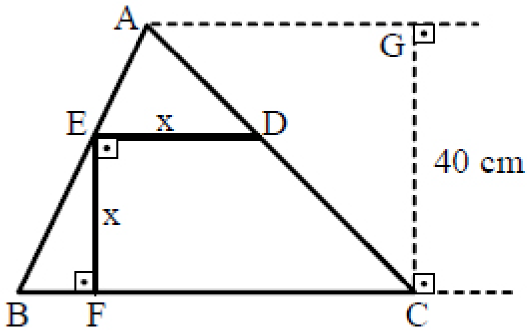
**b) 24**

**c) 30**

**d) 32**

**Comentários**

Com base na seguinte figura presente no enunciado, temos




Perceba a relação de semelhança dos triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta AED$:

A altura do triângulo $\Delta ABC$ em ralação a $BC$ é $40\ cm$.

No triângulo $\Delta AED$ observe que a altura em relação a $ED$ vale $40 - x$

Portanto obtemos a relação de proporcionalidade a seguir:

$$\frac{h_{ABC}}{BC} = \frac{h_{AED}}{ED}$$
$$\Rightarrow \frac{40}{60} = \frac{40 - x}{x}$$
$$\frac{2}{3} = \frac{40 - x}{x}$$
$$2x = 120 - 3x$$
$$5x = 120$$
$$x = 24$$

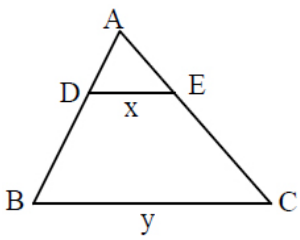
Portanto o valor de $DE = x = 24$

**Gabarito: "b".**

---

**7. (EEAR/2017)**

**Seja um triângulo $\Delta ABC$, conforme a figura.**




**Se $D$ e $E$ são pontos, respectivamente, de $AB$ e $AC$, de forma que $AD = 4, DB = 8, DE = x, BC = y$, e se $DE//BC$, então**

**a)** $y = x + 8$

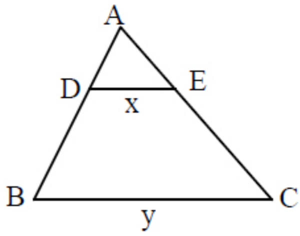
**b)** $y = x + 4$

**c)** $y = 3x$

d) $y = 2x$

**Comentários**

De acordo com a seguinte figura presente no enunciado, obtemos uma relação de proporcionalidade entre os triângulos $\Delta ADE$ e $\Delta ABC$:




Pela relação de proporcionalidade:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\frac{4}{8+4} = \frac{x}{y}$$

$$4y = 12x$$

$$y = 3x$$

**Gabarito: "c".**

---

**8. (EEAR/2017)**

**Seja um triângulo inscrito em uma circunferência de raio R. Se esse triângulo tem um ângulo medindo $30°$, seu lado oposto a esse ângulo mede**

a) $\frac{R}{2}$

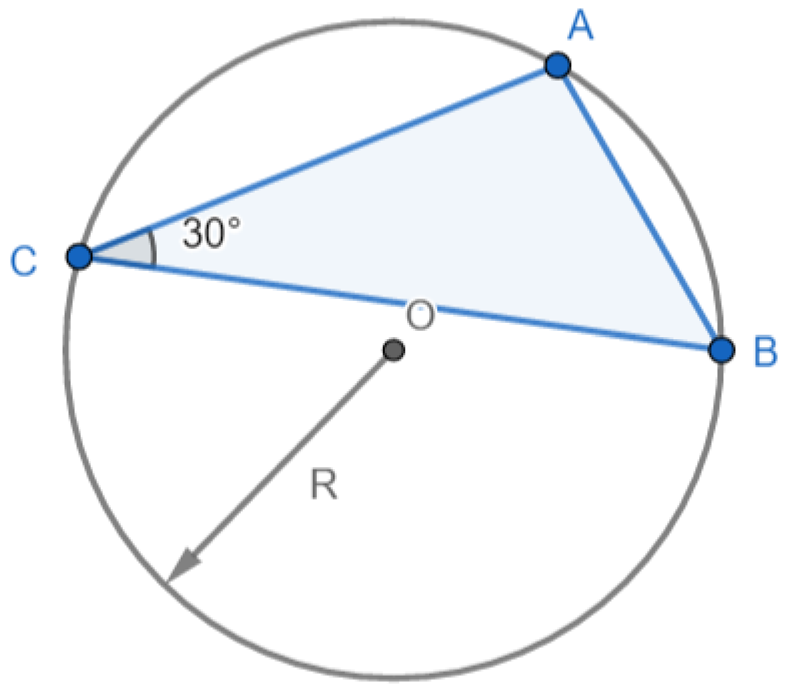
b) $R$

c) $2R$

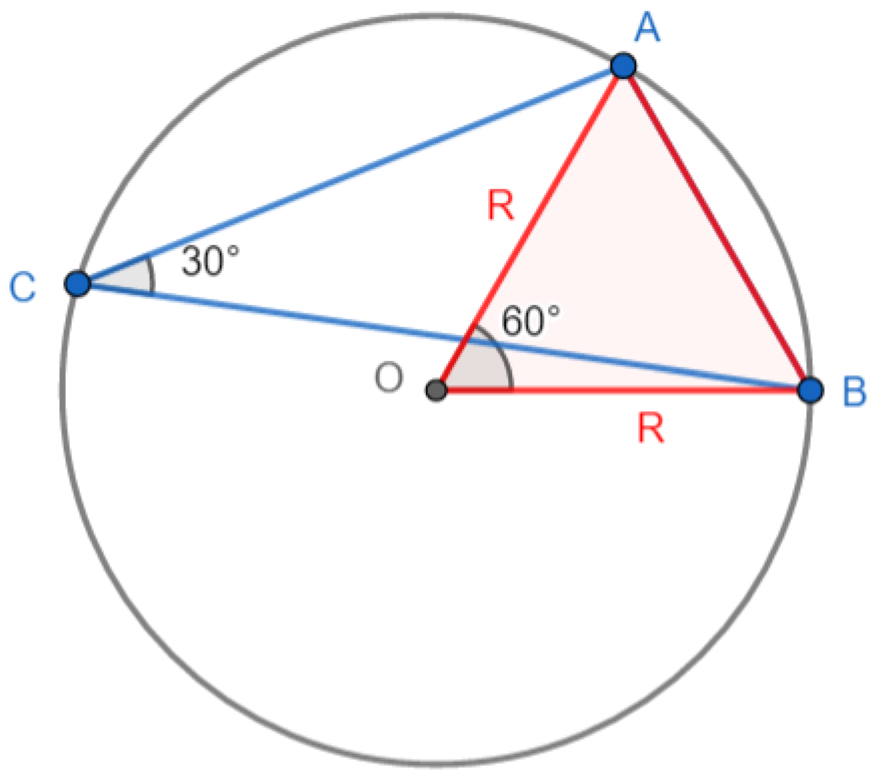
d) $\frac{2R}{3}$

**Comentários**

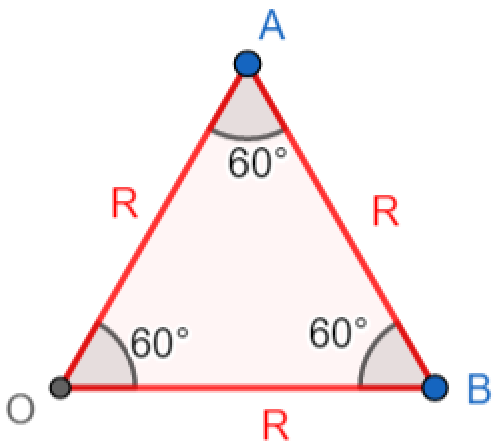
De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Utilizando o conceito de ângulo central, obtemos:




Perceba que o triângulo que representa o ângulo central é um triângulo isósceles de $60°$, então os ângulos adjacentes também medem $60°$, caracterizando-se assim, um triângulo equilátero.

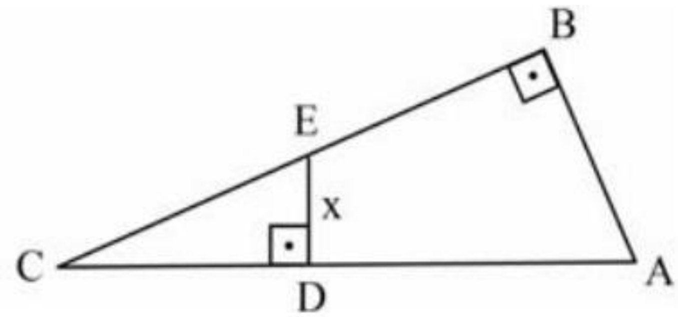



Portando, o lado oposto ao ângulo central, também mede R.

**Gabarito: "b".**

**9. (EEAR/2017)**

**Conforme a figura, os triângulos $ABC$ e $CDE$ são retângulos.**




**Se $\overline{AB} = 8\ cm$, $\overline{BC} = 15\ cm$ e $\overline{CD} = 5\ cm$, então a medida de $\overline{DE}$, em cm, é**

**a) $\frac{2}{5}$**

**b) $\frac{3}{2}$**

**c) $\frac{8}{3}$**

**d) $\frac{1}{4}$**

**Comentários**

Perceba que os triângulos CDE e CBA são semelhantes.

$$\Rightarrow \frac{\overline{ED}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

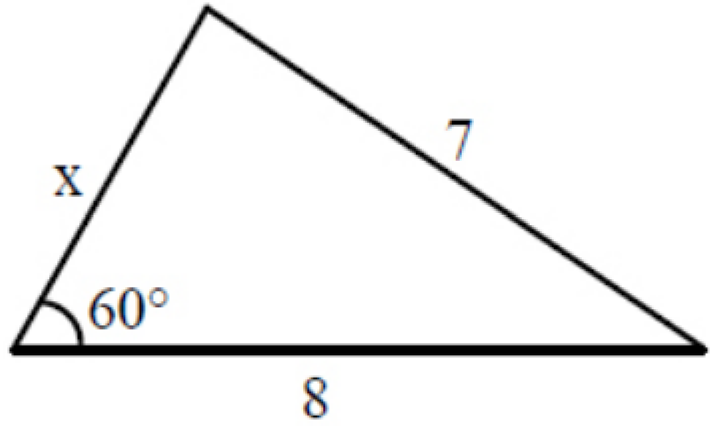
$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

**Gabarito: "c".**

**10. (EEAR/2017)**

Se o perímetro do triângulo abaixo é maior que 18, o valor de x é




a) 4

b) 5

c) 6

d) 7

**Comentários**

Do enunciado:

$$7 + 8 + x > 18$$

$$\Rightarrow x > 3 \ \ (1)$$

Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos:

$$(7)^2 = (8)^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot (8) \cdot \cos(60°)$$

$$\Rightarrow 49 = 64 + x^2 - 16 \cdot x \cdot (\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau pelo método de Bhaskara, obtemos:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (15)}}{2 \cdot (1)}$$

$$\Rightarrow x = 3 \ ou \ x = 5$$

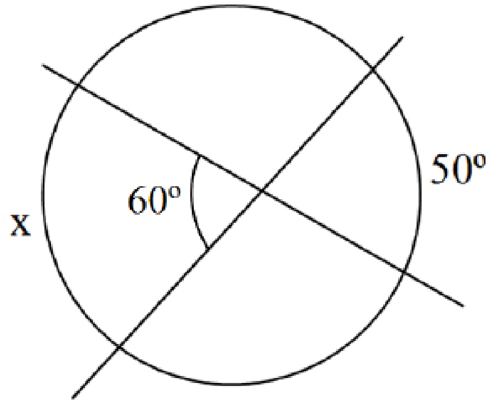
Considerando a desigualdade obtida em (1), conclui-se que o único resultado que satisfaz o problema é $x = 5$.

**Gabarito: "b".**

---

**11. (EEAR/2016)**

**Duas cordas se cruzam num ponto distinto do centro da circunferência, conforme esboço.**




**A partir do conceito de ângulo excêntrico interior, a medida do arco $x$ é**

**a) $40°$**

**b) $70°$**

**c) $110°$**

**d) $120°$**

**Comentário:**

Sabe-se que a medida do ângulo determinado por duas cordas é a média aritmética dos arcos internos por elas determinados. Portanto,

$$60° = \frac{1}{2} \cdot (x + 50°) \Rightarrow x = 70°.$$

**Gabarito: "b".**

---

**12. (EEAR/2016)**

**Um triângulo acutângulo ABC tem a medida do ângulo $\hat{A}$ igual a 30◦. Sabe-se que os lados adjacentes ao ângulo $\hat{A}$ medem $\sqrt{3}$ cm e 4 cm. A medida, em cm, do lado oposto ao referido ângulo é**

**a) $\sqrt{3}$**

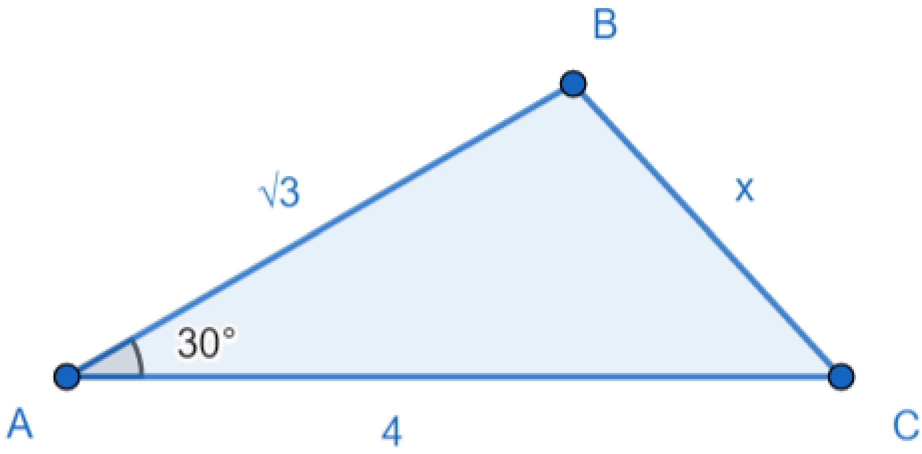
**b) $\sqrt{7}$**

**c) $5\sqrt{3}$**

**d) $\sqrt{19 - 4\sqrt{3}}$**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos:

$$x^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + (4)^2 - 2 \cdot \left(\sqrt{3}\right) \cdot (4) \cdot \cos(30°)$$

$$\Rightarrow \ x^2 = 3 + 16 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \ x^2 = 19 - 4 \cdot 3 = 19 - 12 = 7$$

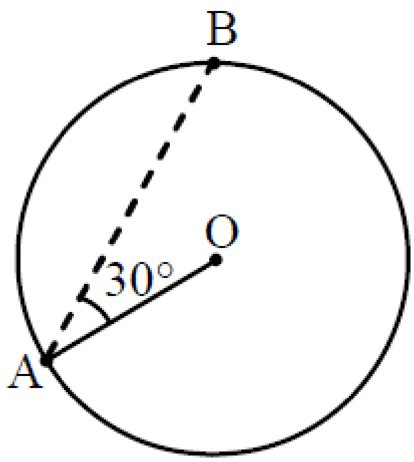
$$\Rightarrow \ x = \sqrt{7}$$

**Gabarito: “b”.**

---

**13. (EEAR/2015)**

**O ponto $O$ é o centro da circunferência da figura, que tem $3m$ de raio e passa pelo ponto $B$. Se o segmento $AB$ forma um ângulo de $30°$ com o raio $OA$, então a medida de $AB$, em $m$, é**




**a)** $6\sqrt{3}$

**b)** $3\sqrt{3}$

**c)** $6\sqrt{2}$

**d)** $3\sqrt{2}$

**Comentário:**

Seja $M$ o ponto médio da corda $AB$. Então o triângulo $\Delta AMO$ é retângulo em $M$. Portanto, o cosseno do ângulo $O\hat{A}M$ é dado por:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° = \cos O\hat{A}M = \frac{AM}{OA} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2} OA = \frac{3\sqrt{3}}{2}\ m$$

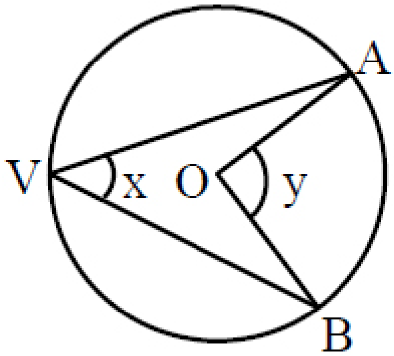
Logo $AB = 2 \cdot AM = 3\sqrt{3}\ m$.

**Gabarito: "b".**

---

**14. (EEAR/2015)**

**Na circunferência da figura, $O$ é o seu centro e $V$, $A$ e $B$ são três de seus pontos.**




**Se $x$ e $y$ são, respectivamente, as medidas dos ângulos $AOB$ e $BVA$, então sempre é correto afirmar que**

**a) $x = 2y$.**

**b) $y = 2x$.**

**c) $x + y = 90°$.**

**d) $x - y = 90°$.**

**Comentário:**

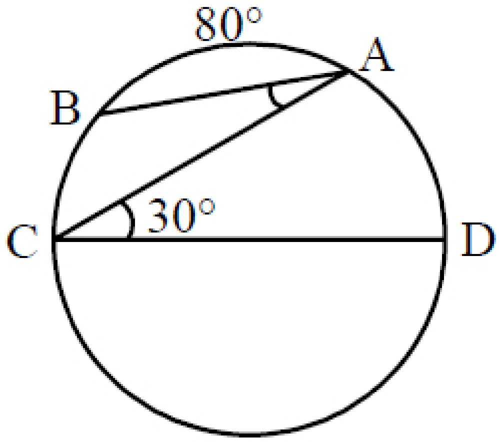
$x$ é um ângulo inscrito na circunferência que enxerga o mesmo arco que o ângulo central $y$, donde $y = 2x$.

**Gabarito: "b".**

---

**15. (EEAR/2015)**

**Na figura, $A$ e $B$ são pontos da circunferência e $CD$ é seu diâmetro.**




Assim, o ângulo $B\hat{A}C$ mede

a) $20°$.

b) $30°$.

c) $50°$.

d) $60°$.

**Comentário:**

Vamos calcular o comprimento do arco agudo $BC$. Como $A\hat{C}D$ é ângulo inscrito, o arco $AD$ vale o dobro, isto é, $AD$ vale 60°. Como o segmento $CD$ é diâmetro, o arco $CD$ vale 180°. Portanto:

$$180° = CD = CB + BA + AD = CB + 80° + 60° \therefore CB = 40°.$$

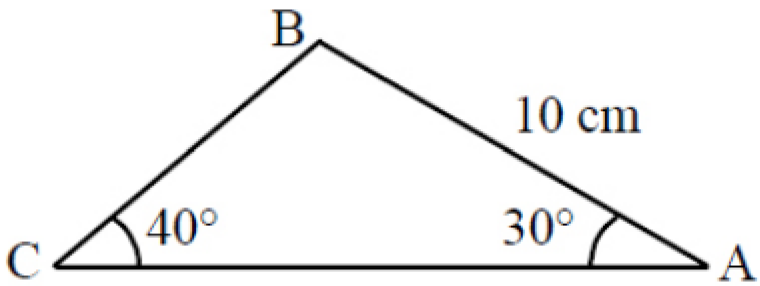
Portanto o ângulo inscrito $C\hat{A}B = 20°$, a metade do valor do arco.

**Gabarito: "a".**

---

**16. (EEAR/2013)**

Considerando $sen(40°) = 0,6$, o lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, mede, em cm, aproximadamente




a) 6,11

b) 7,11

c) 8,33

d) 9,33

**Comentários**

Usando a Lei dos Senos:

$$\frac{\overline{AB}}{sen(\hat{C})}=\frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{sen(40°)}=\frac{\overline{BC}}{sen(30°)}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{0,6}=\frac{\overline{BC}}{1/2}$$

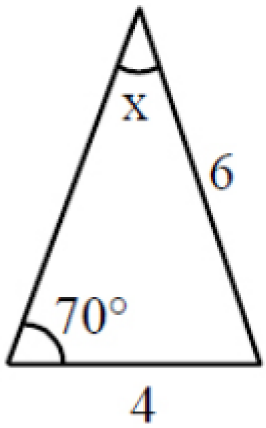
$$\Rightarrow \overline{BC}=\frac{10}{0,6}\cdot\frac{1}{2}\approx 8,33$$

**Gabarito: "c".**

---

**17. (EEAR/2013)**

**Considere as medidas indicadas na figura e que $sen(70°)=0,9$. Pela "Lei dos Senos", obtém-se $sen(x)=$ ____.**



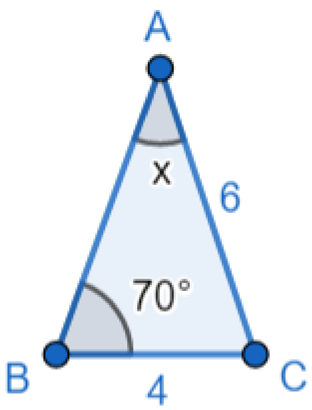

**a) 0,4**

**b) 0,5**

**c) 0,6**

**d) 0,7**

**Comentários**




Aplicando a Lei dos Senos, obtemos:

$$\frac{\overline{AC}}{sen(\hat{B})} = \frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{sen(70°)} = \frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{0{,}9} = \frac{4}{sen(x)}$$

$$\Rightarrow sen(x) = \frac{4 \cdot 0{,}9}{6} = 0{,}6$$

**Gabarito: “c”.**

---

**18. (EEAR/2012)**

**O perímetro de um triângulo equilátero de altura h = $\sqrt{3}$ é ___m.**

**a)** 3

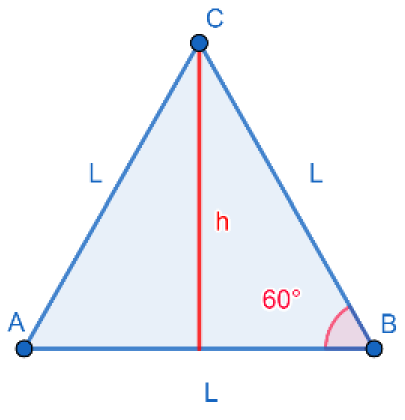
**b)** 4

**c)** 5

**d)** 6

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Perceba que no triângulo equilátero $\Delta ABC$ temos no ângulo $\hat{B} = 60°$ a seguinte relação:

$$sen(60°) = \frac{h}{L}$$

$$L = \frac{h}{sen(60°)} \Longrightarrow L = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$$

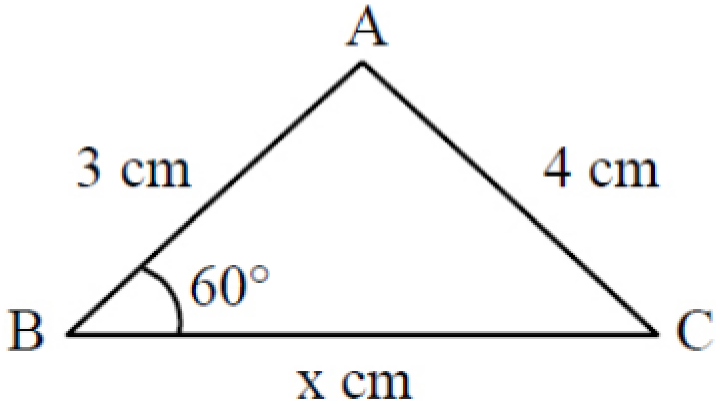
Portanto, temos que a soma do valor dos lados, o perímetro, vale

$$P = L + L + L = 3L$$
$$\Longrightarrow P = 3 \cdot 2 = 6$$

**Gabarito: “d”.**

**19. (EEAR/2012)**

**Considerando $\sqrt{37} = 6$, o valor de x na figura é**




**a) 2,5**

**b) 3,5**

**c) 4,5**

**d) 5,5**

**Comentários**

Aplicaremos a Lei Dos Cossenos:

$$(4)^2 = x^2 + (3)^2 - 2 \cdot (3) \cdot (x) \cdot \cos(60°)$$

$$\Rightarrow 16 = x^2 + 9 - 6 \cdot \mathrm{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$16 - 9 = x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow x^2 - 3 \cdot x - 7 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau pelo método de Bhaskara, obtemos:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-7)}}{2 \cdot (1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$$

Mas, segundo o enunciado, devemos considerar que $\sqrt{37} = 6$, então:

$$x = \frac{3 \pm 6}{2}$$

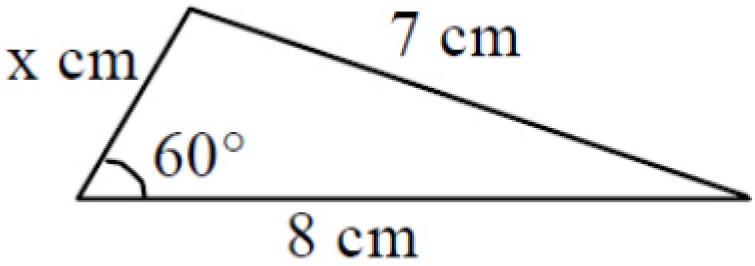
$$\Rightarrow x = 4{,}5 \; ou \; x = -1{,}5 \; (não \; convém, pois \; seria \; uma \; medida \; negativa)$$

$$x = 4{,}5$$

**Gabarito: “c”.**

**20. (EEAR/2011)**

**No triângulo, o menor valor que x pode assumir é**




**a) 4**

**b) 3**

**c) 2**

**d) 1**

**Comentários**

Aplicaremos a Lei Dos Cossenos:

$$(7)^2 = x^2 + (8)^2 - 2 \cdot (8) \cdot (x) \cdot \cos(60°)$$

$$\Rightarrow 49 = x^2 + 64 - 16 \cdot \text{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$49 - 64 = x^2 - 8x$$

$$\Rightarrow x^2 - 8 \cdot x + 15 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau pelo método de Bhaskara, obtemos:

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (15)}}{2 \cdot (1)}$$

$$x = 5 \; ou \; x = 3$$

O menor valor possível é $x = 3$.

**Gabarito: "b".**

---

**21. (EEAR/2011)**

**Um triângulo, inscrito em uma circunferência, tem um ângulo de $30°$ oposto a um lado de 10 cm. O diâmetro da circunferência, em cm, é**

**a) 10**

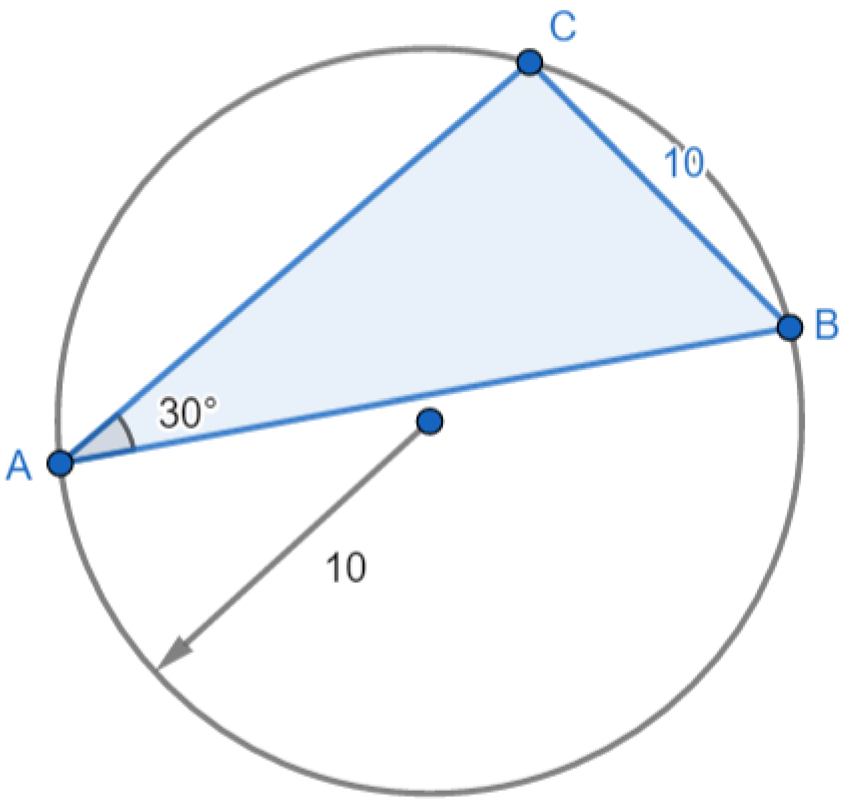
**b) 15**

**c) 20**

**d) 25**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Usaremos a Lei dos Senos

$$\frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})} = \frac{\overline{AB}}{sen(\hat{C})} = \frac{\overline{AC}}{sen(\hat{B})} = 2 \cdot R = D$$

Em que D é o diâmetro da circunferência

$$\frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})} = D$$

$$\Rightarrow \frac{10}{sen(30°)} = \frac{10}{1/2} = 20$$

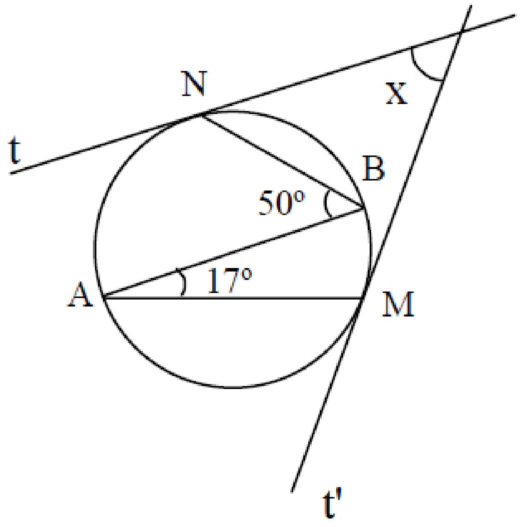
$$\Rightarrow D = 20cm$$

**Gabarito: "c".**

---

**22. (EEAR/2010)**

**Sejam $AB$ o diâmetro da circunferência, e as retas $t$ e $t'$ tangentes a ela nos pontos $N$ e $M$, respectivamente.**




O valor de $x$ é

a) $66°$.

b) $60°$.

c) $55°$.

d) $50°$.

**Comentário:**

Podemos calcular quanto valem os arcos determinados pelos pontos $A, B, N$ e $M$, e a partir deles determinar a medida do ângulo externo $x$, dado pela seguinte fórmula de subtração de arcos:

$$x = \frac{1}{2}(\widehat{MAN} - \widehat{NBM})$$

Temos que o arco agudo $\widehat{AN}$ vale o dobro do ângulo inscrito $A\hat{B}N$, isto é, $\widehat{AN} = 100°$. Como $AB$ é diâmetro, concluímos que o suplementar de $\widehat{AN}$, $\widehat{NB}$, vale $\widehat{NB} = 180° - 100° = 80°$.

Da mesma forma o arco agudo $\widehat{BM}$ vale o dobro do ângulo inscrito $B\hat{A}M$, donde $\widehat{BM} = 34°$. O suplementar vale $\widehat{MA} = 180° - 34° = 146°$.

Logo, $\widehat{MAN} = \widehat{MA} + \widehat{AN} = 146° + 100° = 246°$ e $\widehat{NBM} = \widehat{NB} + \widehat{BM} = 80° + 34° = 114°$. Portanto,

$$x = \frac{1}{2} \cdot (246° - 114°) = 66°.$$

**Gabarito: "a".**

---

**23. (EEAR/2010)**

**Os lados de um triângulo obtusângulo medem 3m, 5m e 7m. A medida da projeção do menor dos lados sobre a reta que contém o lado de 5m é, em m,**

a) 2,5

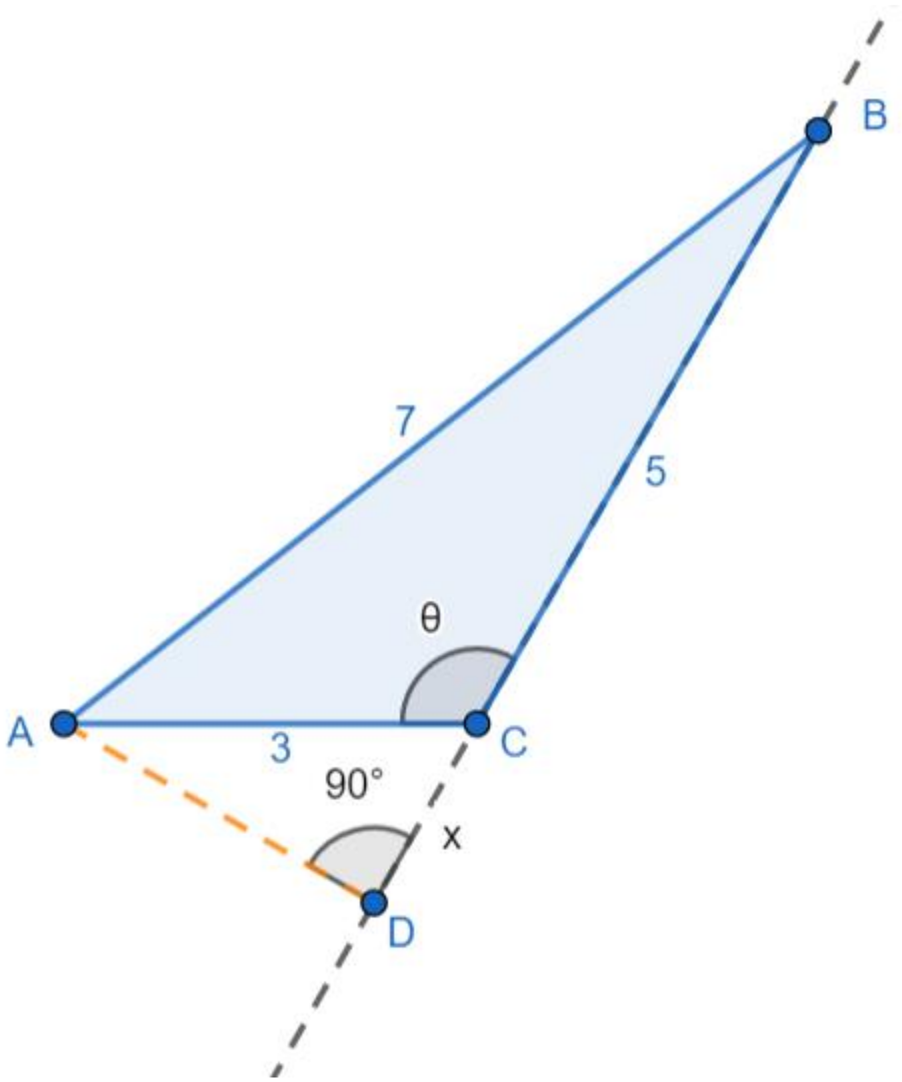
**b) 1,5**

**c) 2**

**d) 1**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




**Obs:** Como propriedade, o maior lado é oposto ao maior ângulo, portanto o lado oposto ao ângulo obtuso, necessariamente, é o lado de 7 cm.

Aplicaremos a Lei Dos Cossenos:

$$(7)^2 = (3)^2 + (5)^2 - 2 \cdot (3) \cdot (5) \cdot \cos(\theta)$$

$$49 = 9 + 25 - 30 \cdot \cos(\theta)$$

$$30 \cdot \cos(\theta) = -15$$

$$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$$

De acordo com o ciclo trigonométrico, o ângulo cujo cosseno equivale a $-\frac{1}{2}$ é o ângulo de $120°$.

$$\theta = 120°$$

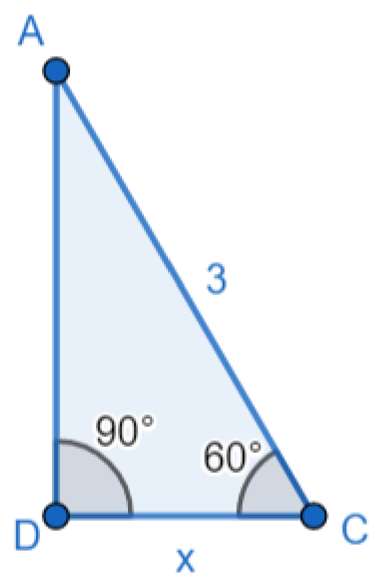
O ângulo A$\hat{C}D$ é ângulo suplementar de $\theta$, então:

$$A\hat{C}D + \theta = 180°$$

$$A\hat{C}D + 120° = 180°$$

$$A\hat{C}D = 60°$$

Agora estudaremos o triângulo ACD




Aplicando a definição de cosseno no ângulo de 60°, obtemos:

$$\cos(60°) = \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot x = 3$$

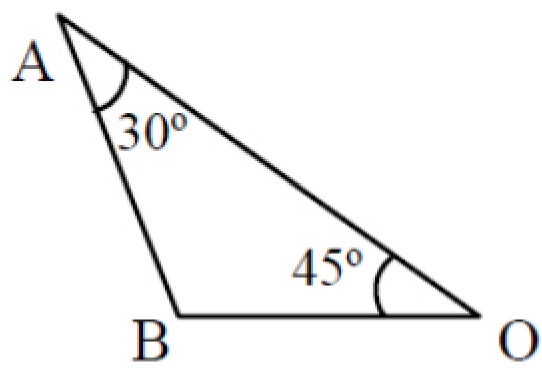
$$x = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

**Gabarito: "b".**

---

**24. (EEAR/2010)**

**No triângulo AOB, $\overline{OB} = 5\ cm$; então AB, em cm, é igual a**




**a) 6**

b) $8$

c) $5\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{3}$

**Comentários**

Trata-se de uma aplicação direta da Lei Dos Senos:

$$\frac{\overline{OB}}{sen(\hat{A})} = \frac{\overline{AB}}{sen(\hat{O})}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{sen(30°)} = \frac{\overline{AB}}{sen(45°)}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{1/2} = \frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}/2}$$

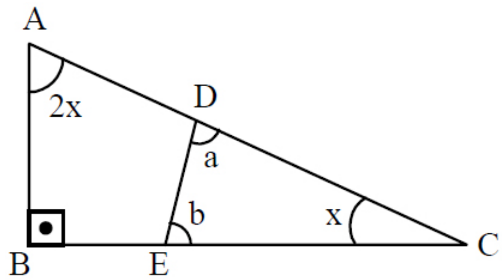
$$\Rightarrow \overline{AB} = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

**Gabarito: "c"**

---

**25. (EEAR/2010)**

**Se o triângulo CDE é semelhante ao triângulo ABC, o valor de $|a - b|$ é:**




a) $30°$

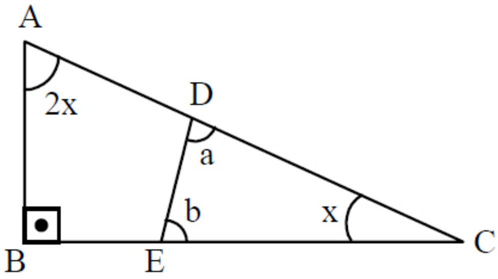
b) $45°$

c) $60°$

d) $90°$

**Comentários**

De acordo com figura do enunciado a seguir:




Sabemos que o triângulo $\boldsymbol{\Delta ABC}$é retângulo, logo

$$\mathbf{90° + 2x + x = 180°}$$
$$\mathbf{3x = 90°}$$
$$\mathbf{x = 30°}$$

Do enunciado que o triângulo $\boldsymbol{\Delta ABC \sim \Delta CDE}$, dessa semelhança supomos que o ângulo $\boldsymbol{a}$ é congruente $\boldsymbol{B\hat{A}C}$ e ângulo $\boldsymbol{b}$ é congruente $\boldsymbol{A\hat{B}C}$, portanto $\begin{cases} \boldsymbol{a = 2x = 60°} \\ \boldsymbol{b = 90°} \end{cases}$

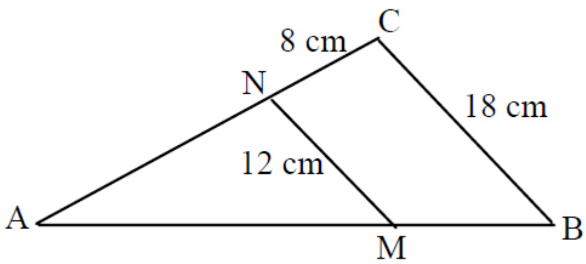
Portanto $|\boldsymbol{a - b}| = |\mathbf{60° - 90°}| = \mathbf{30°}$

**Gabarito: "a".**

---

**26. (EEAR/2009)**

**Na figura, $\overline{MN}//\overline{BC}$.**




**Se $AB = 30cm$, então $\overline{MB}$ mede, em cm,**

**a) 5**

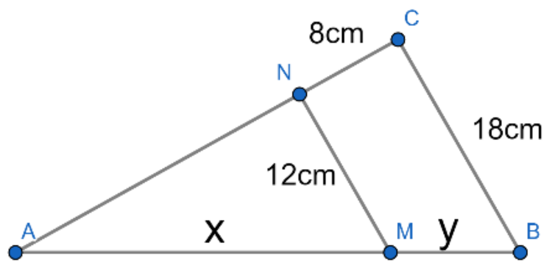
**b) 10**

**c) 15**

**d) 20**

**Comentários**

De acordo com figura do enunciado a seguir:




Pela semelhança $\Delta ABC \sim \Delta AMN$

$$\frac{x}{12} = \frac{30}{18}$$
$$x = 20\ cm$$

Sabendo que $AB = 30 = x + y$, como $x = 20\ cm$, temos $y = 10\ cm$.

$$y = \overline{MB} = 10\ cm$$

**Gabarito: "b".**

---

**27. (EEAR/2009)**

**Dois lados de um triângulo medem 6 cm e 8 cm, e formam um ângulo de $60°$. A medida do terceiro lado desse triângulo, em cm, é**

**a)** $2\sqrt{13}$

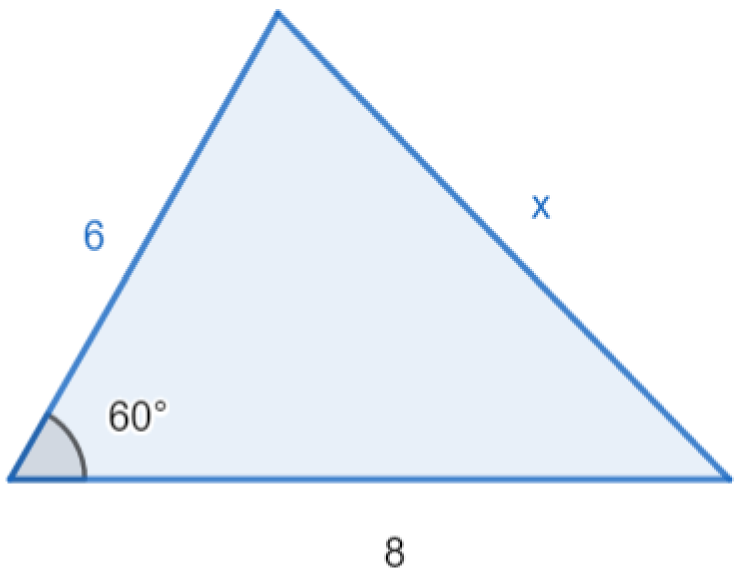
**b)** $3\sqrt{17}$

**c)** $\sqrt{23}$

**d)** $\sqrt{29}$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos:

$$x^2 = (6)^2 + (8)^2 - 2 \cdot (6) \cdot (8) \cdot \cos(60°)$$

$$\Rightarrow x^2 = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 = 100 - 48 = 52$$

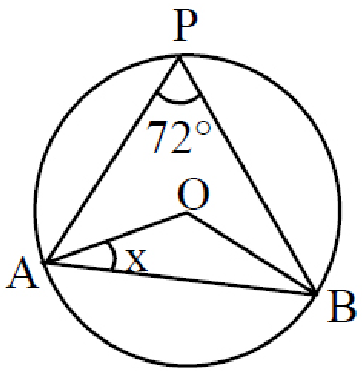
$$\Rightarrow x = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

**Gabarito: "a"**

---

**28. (EEAR/2009)**

**Na figura, $O$ é o centro da circunferência.**




**O valor de $x$ é**

**a) $18°$.**

**b) $20°$.**

**c) $22°$.**

**d) $24°$.**

**Comentário:**

O ângulo $A\hat{O}B$ é central e enxerga o mesmo arco que o ângulo inscrito $A\hat{P}B$, donde $A\hat{O}B = A\hat{P}B \cdot 2 = 144°$. Como $OA = OB =$ raio da circunferência, o $\Delta OAB$ é isósceles, donde

$$2x + 144° = O\hat{A}B + O\hat{B}A + A\hat{O}B = 180° \therefore x = \frac{1}{2} \cdot (180° - 144°) = 18°.$$

**Gabarito: "a".**

---

**29. (EEAR/2009)**

**Sejam uma circunferência de centro $O$ e um ponto $A$ exterior a ela. Considere $AT$ um segmento tangente à circunferência, em $T$. Se o raio da circunferência mede $4\ cm$ e $AT = 8\sqrt{2}\ cm$, então a medida de $AO$, em $cm$, é**

**a) 10.**

**b) 12.**

c) 13.

d) 15.

**Comentário:**

Pitágoras no triângulo $AOT$, retângulo em $T$ por ser um ponto de tangência.

$$AO^2 = AT^2 + OT^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 + 4^2 = 144 \therefore AO = 12.$$

**Gabarito: "b".**

---

**30. (EEAR/2008)**

**Dado um triângulo qualquer, é FALSO afirmar que**

**a) uma de suas alturas pode coincidir com um de seus lados.**

**b) suas alturas podem interceptar-se num ponto externo a ele.**

**c) o incentro é o centro da circunferência nele inscrita.**

**d) o circuncentro é o encontro das suas medianas.**

**Comentários**

Analisando cada alternativa:

a) (V) No caso do triângulo retângulo, a altura do cateto coincide com o outro cateto.

b) (V) Basta ser um triângulo obtusângulo para as alturas se coincidirem no exterior, formando um triângulo com ortocentro exterior.

c) (V) Correto pela definição de incentro.

d) (F) O circuncentro é caracterizado pelo encontro das mediatrizes.

**Gabarito: "d".**

---

**31. (EEAR/2008)**

**No triângulo, cujos lados medem 5 cm, 10 cm e 6 cm, o maior ângulo tem cosseno igual a**

**a)** $\frac{7}{10}$

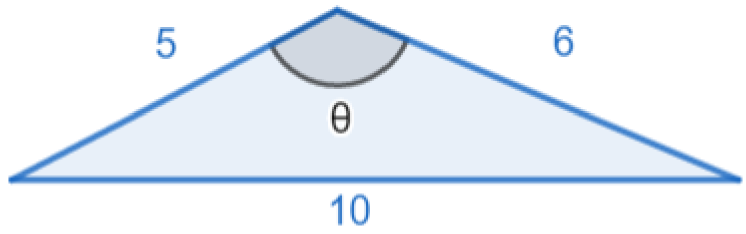
**b)** $\frac{9}{20}$

**c)** $-\frac{13}{20}$

**d)** $-\frac{8}{10}$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Em triângulos, o maior ângulo é oposto ao maior lado. Logo, aplicaremos a Lei Dos Cossenos relativa ao lado de 10 cm:

$$(10)^2 = (5)^2 + (6)^2 - 2 \cdot (5) \cdot (6) \cdot \cos(\theta)$$

$$100 = 25 + 36 - 60 \cdot \cos(\theta)$$

$$60 \cdot \cos(\theta) = -39$$

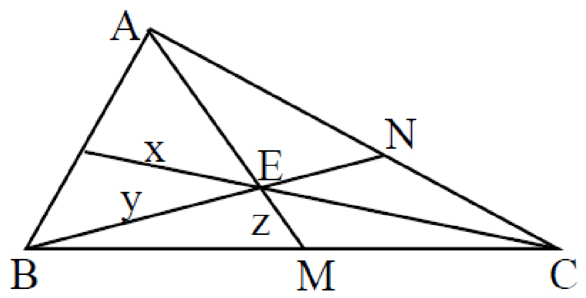
$$\cos(\theta) = -\frac{13}{20}$$

**Gabarito: "c"**

---

**32. (EEAR/2007)**

**Sendo E o baricentro do triângulo $ABC$, $AE = 10cm$, $EN = 6cm$, $e$ $CE = 14cm$, o valor, em cm, de $x + y + z$ é:**




**a) 18.**

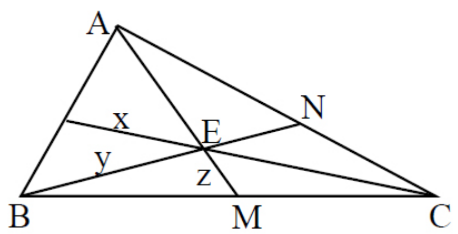
**b) 20.**

**c) 22.**

**d) 24.**

**Comentários**

Sabe-se que em qualquer triângulo, o baricentro divide as retas medianas na razão de 2:1, de modo que triângulo do enunciado:




Portanto temos as seguintes relações:

$$\frac{EC}{x} = \frac{2}{1}, \quad \frac{y}{EN} = \frac{2}{1}, \quad \frac{AE}{z} = \frac{2}{1}$$
$$x = \frac{EC}{2}, \quad EN = 2y, \quad z = \frac{AE}{2}$$
$$x = \frac{14}{2}, \quad EN = 2 \cdot 6, \quad z = \frac{10}{2}$$
$$x = 7, \quad EN = 12, \quad z = 5$$

Portanto: $x + y + z = 24$

**Gabarito: "d".**

---

**33. (EEAR/2007)**

**Dois triângulos são semelhantes, e uma altura do primeiro é igual aos $\frac{2}{5}$ de sua homóloga no segundo. Se o perímetro do primeiro triângulo é $140cm$, então o perímetro do segundo, em $cm$, é:**

**a) 250.**

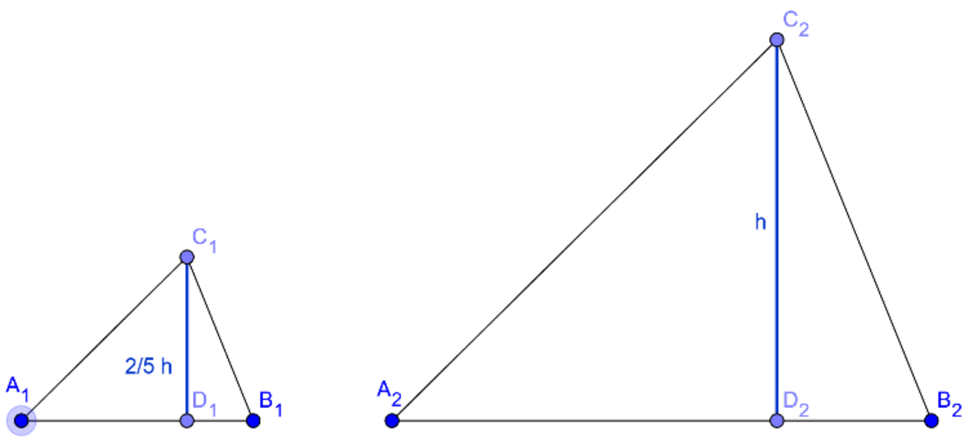
**b) 280.**

**c) 300.**

**d) 350.**

**Comentários**

De acordo com o enunciado temos a seguinte figura:




Como os triângulos são semelhantes, sabemos que há uma proporcionalidade direta entre os seus lados, determinado pelo coeficiente de proporcionalidade. Temos que a razão de proporção entre os dois triângulos é:

$$k = \frac{l_2}{l_1} = \frac{h}{\frac{2h}{5}} = \frac{5}{2}$$

Como o perímetro é a soma dos lados, esse também segue a proporcionalidade, portanto

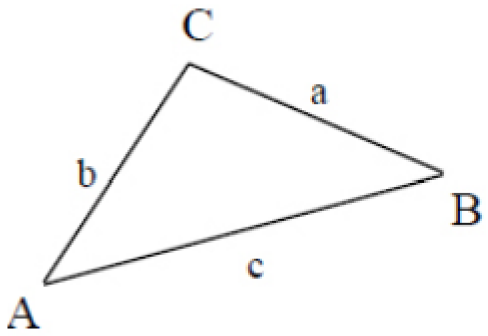
$$k = \frac{P_2}{P_1} = \frac{5}{2}$$

$$P_2 = \frac{5}{2}P_1 = \frac{5}{2}140 = 350$$
$$P_2 = 350$$

**Gabarito: "d".**

**34. (EEAR/2007)**

**Considere o triângulo ABC. Assinale a alternativa FALSA.**




a) $sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}$ e $cos\,\hat{B} = \frac{c}{a}$

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot cos\,\hat{A}$

c) $\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})}$

d) $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot cos\,\hat{B}$

**Comentários**

a) O triângulo não é retângulo de hipotenusa $\overline{BC} = a$. **FALSA**

b) Aplicação da lei dos cossenos relativa ao lado $\overline{BC}$. **VERDADEIRA**

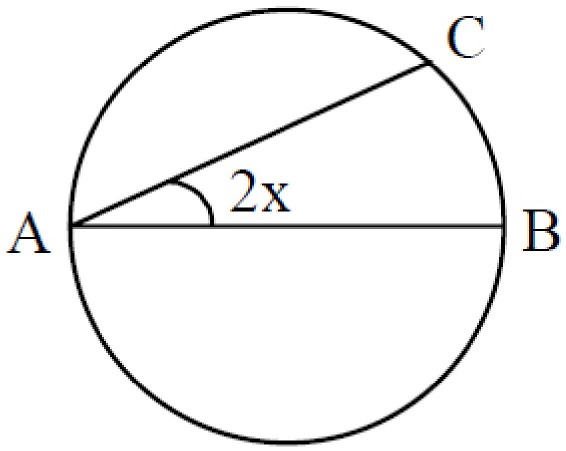
c) Aplicação da lei dos senos. **VERDADEIRA**

d) Aplicação da lei dos cossenos relativa ao lado $\overline{AC}$. **VERDADEIRA**

**Gabarito: "a"**

**35. (EEAR/2007)**

**Na figura, $AB$ é o diâmetro da circunferência e o arco $AC$ mede $100°$.**



O valor de $x$ é:

a) $20°$.

b) $35°$.

c) $45°$.

d) $50°$.

**Comentário:**

O arco $\widehat{BC}$ é o suplementar do arco $\widehat{AC}$ e, portanto, mede $\widehat{BC} = 180° - 100° = 80°$.

O ângulo $B\hat{A}C$ é inscrito na circunferência e, portanto, mede, por um lado, $B\hat{A}C = \frac{1}{2}\widehat{BC} = 40°$

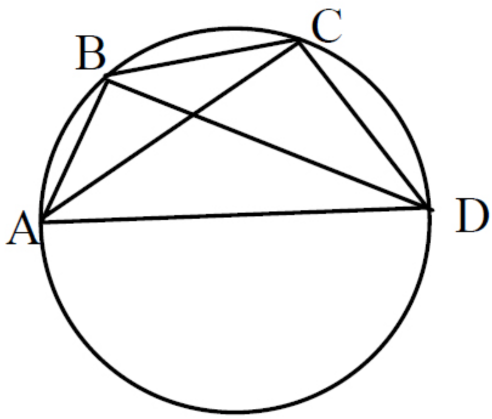
Por outro, $B\hat{A}C = 2x$, donde $2x = 40° \therefore x = 20°$.

**Gabarito: "a".**

---

36. (EEAR/2007)

Na figura, $AD$ é o diâmetro da circunferência, $C\hat{A}D$ mede $35°$ e $B\hat{D}C$, $25°$.




A medida de $A\hat{C}B$ é

a) $30°$.

b) $35°$.

c) $40°$.

d) $45°$.

**Comentário:**

Observe as relações entre os arcos e os ângulos inscritos na circunferência. Como $C\hat{A}D = 35°$ enxerga o arco $\widehat{CD}$, este mede $\widehat{CD} = 2 \cdot C\hat{A}D = 70°$. Como $B\hat{D}C = 25°$ enxerga o arco $\widehat{BC}$, este mede $\widehat{BC} = 2 \cdot B\hat{D}C = 50°$. Logo, o arco $\widehat{AB}$, que é o suplementar do arco $\widehat{BD} = \widehat{BC} + \widehat{CD}$, mede $\widehat{AB} = 180° - (50° + 70°) = 60°$, donde o ângulo inscrito $A\hat{C}B = \frac{1}{2}\widehat{AB} = 30°$.

**Gabarito: "a".**

---

**37. (EEAR/2007)**

**Um triângulo, inscrito numa circunferência de $10\ cm$ de raio, determina nesta três arcos, cujas medidas são $90°$, $120°$ e $150°$. A soma das medidas dos menores lados desse triângulo, em $cm$, é**

**a) $10(\sqrt{2}+\sqrt{3})$**

**b) $10(1+\sqrt{3})$**

**c) $5(\sqrt{2}+\sqrt{3})$**

**d) $5(1+\sqrt{3})$**

**Comentário:**

Sejam $\Delta ABC$ o triângulo, $a, b, c$ as medidas dos lados de $\Delta ABC$ opostos respectivamente a $A, B, C$. Temos que as medidas dos ângulos internos valem a metade das medidas dos arcos que eles enxergam. Sem perda de generalidade, $\hat{A} = 45°, \hat{B} = 60°, \hat{C} = 75°$. Pela lei dos senos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

Logo, como ao menor ângulo está associado o menor lado, a soma pedida é $a + b$:

$$a + b = 2R \cdot (\operatorname{sen} 45° + \operatorname{sen} 60°) = 2 \cdot 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10(\sqrt{2} + \sqrt{3}).$$

**Gabarito: "a".**

---

**38. (EEAR/2006)**

**Num triângulo $ABC$, o ângulo $B\hat{E}C$ mede $114°$. Se E é o incentro de $ABC$, então o ângulo $\hat{A}$ mede:**

**a) 44.**

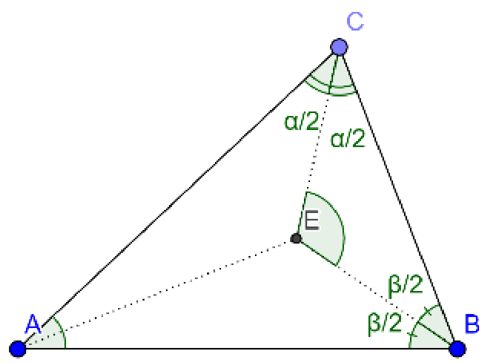
**b) 48.**

**c) 56.**

**d) 58.**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, obtemos a seguinte imagem:




Temos no $\Delta BEC$ a relação 1:

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + B\hat{E}C = 180°$$

Temos no $\Delta ABC$ a relação 2:

$$\alpha + \beta + \hat{A} = 180°$$

Multiplicando a relação 1 e subtraindo a relação 2, tem-se:

$$\alpha + \beta + 2B\hat{E}C - \alpha - \beta - \hat{A} = 360° - 180°$$
$$2B\hat{E}C - \hat{A} = 180°$$

$$\hat{A} = 2B\hat{E}C - 180°$$
$$\hat{A} = 228° - 180° = 48°$$

**Gabarito: "b".**

---

**39. (EEAR/2006)**

**Num triângulo $ABC$, $AB = BC = 5\sqrt{2}cm$. Se R é o ponto médio de $\overline{AC}$, e S é o ponto médio de $\overline{AB}$, então a medida de $\overline{RS}$, em cm, é igual a:**

a) $\frac{5}{2}$

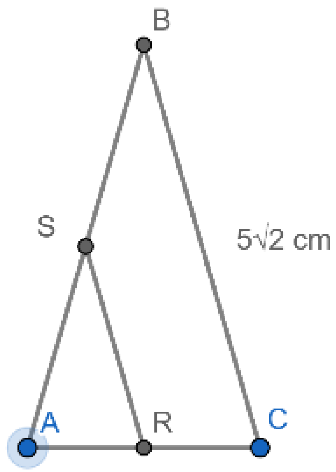
b) $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

c) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Perceba que o triângulo $\Delta ASR$ é semelhante ao triângulo $\Delta ABC$.

Dessa maneira descobrindo a constante de proporcionalidade entre $\Delta ASR$ e $\Delta ABC$:

$$k = \frac{AR}{AC} = \frac{AS}{AB} = \frac{SR}{BC}$$

Entretanto sabemos que $R$ e $S$ são pontos médios, logo $AR = RC, AS = SB$, portanto temos que:

$$k = \frac{AR}{AR + RC} = \frac{AR}{2AR} = \frac{1}{2}$$

Portanto temos que o comprimento de $RS$ é a metade da base $BC$

$$k = \frac{SR}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow RS = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$RS = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

**Gabarito: "d".**

---

**40. (EEAR/2006)**

**Num triângulo ABC, a razão entre as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é 2. Se $\hat{A} = 120°$ e $\overline{AC} = 1\ cm$, então o lado $\overline{BC}$ mede, em cm,**

**a)** $\sqrt{7}$

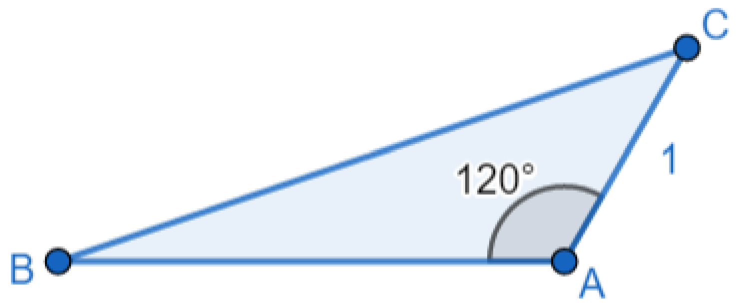
**b)** $\sqrt{7} + 1$

**c)** $\sqrt{13}$

**d)** $\sqrt{13} - 1$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Do enunciado sabemos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 2 \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{1} = 2 \Rightarrow \overline{AB} = 2$$

Aplicando a Lei dos Cossenos

$$\overline{BC}^2 = (1)^2 + (2)^2 - 2 \cdot (1) \cdot (2) \cdot \cos(120°)$$

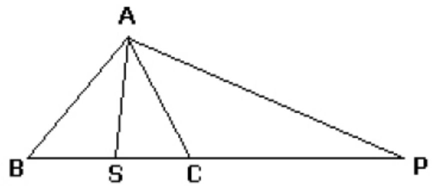
$$\Rightarrow \overline{BC}^2 = 1 + 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{BC}^2 = 5 + 2 = 7$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{7}$$

**Gabarito: “a”**

**41. (EEAR/2005)**




**Na figura, $AS$ e $AP$ são, respectivamente, bissetrizes internas e externa do triângulo $\Delta ABC$. Se $BS = 8m$ e $SC = 6m$, então $SP$ mede, em m:**

**a) 48**

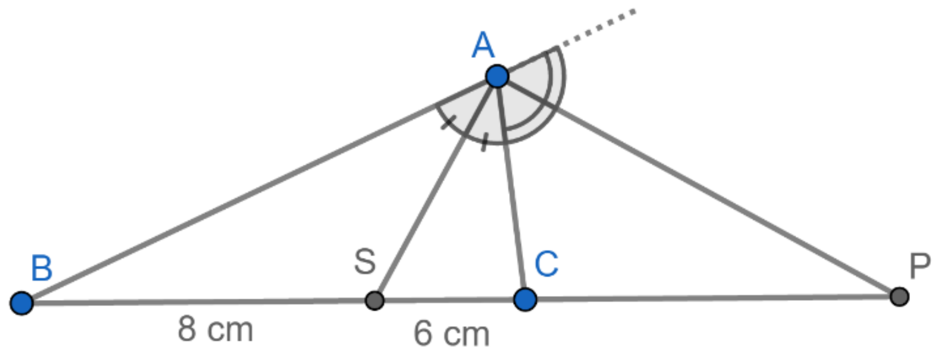
**b) 42**

**c) 38**

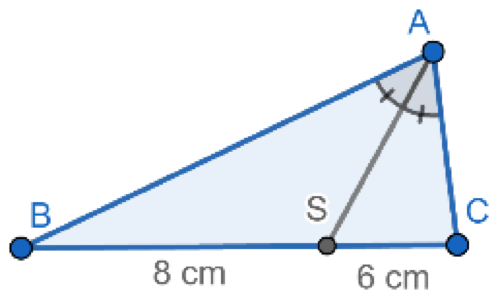
**d) 32**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:

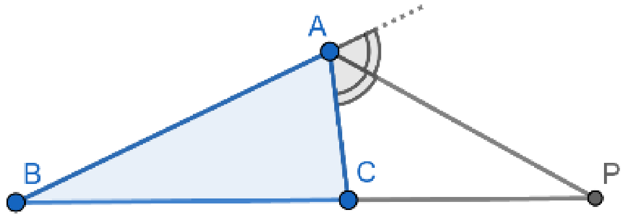



No triângulo $\Delta ABC$ temos pelo teorema da bissetriz interna:




$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{SC} \Rightarrow \frac{AB}{8} = \frac{AC}{6}$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{8}{6}$$

No triângulo $\Delta ABP$ temos pelo teorema da bissetriz externas:




$$\frac{AB}{BP}=\frac{AC}{CP}$$
$$\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{CP}$$

Com as duas relações encontradas pelos teoremas da bissetriz interna e externa, temos:

$$\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{8}{6}=\frac{BP}{CP}$$
$$CP=\frac{6}{8}\cdot BC=\frac{6}{8}\cdot(6+8+CP)$$
$$CP=\frac{6}{8}\cdot(6+8+CP)$$

Resolvendo a equação:

$$8CP=6\cdot 14+6CP$$
$$2CP=6\cdot 14$$
$$CP=42$$

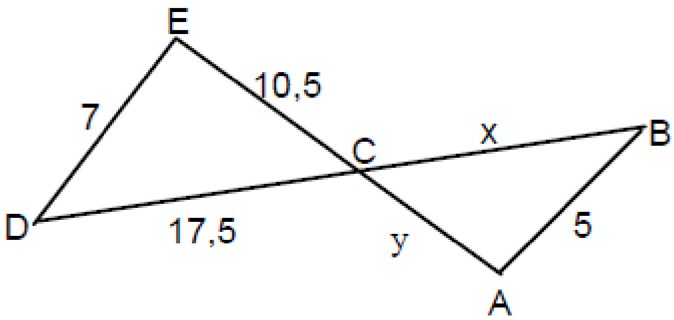
Assim obtemos $SP=SC+CP=42+6=48$.

**Gabarito: "a".**

---

**42. (EEAR/2005)**

**Na figura, $DE//AB$. O valor de $x+y$ é:**




**a) $12,5$**

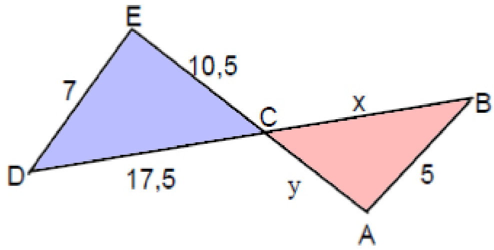
**b) $17,5$**

**c) $20$**

**d) $22$**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Temos que os triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta CDE$ são semelhantes, portanto, temos a constante de proporcionalidade:

$$k = \frac{EC}{CA} = \frac{DC}{CB} = \frac{DE}{AB}$$
$$\Rightarrow k = \frac{DE}{AB} = \frac{7}{5}$$
$$k = \frac{7}{5}$$

Aplicando a relação de proporção para os outros dois lados, temos:

$$k = \frac{EC}{CA} \qquad k = \frac{DC}{CB}$$
$$\frac{7}{5} = \frac{10,5}{y} \qquad \frac{7}{5} = \frac{17,5}{x}$$
$$y = 7,5 \qquad x = 12,5$$

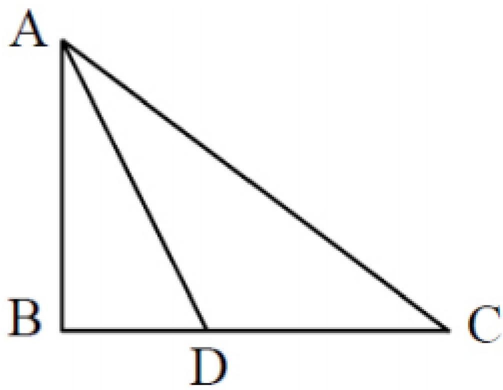
Portanto, $x + y = 7,5 + 12,5 = 20$.

**Gabarito: "c".**

---

**43. (EEAR/2005)**

**Seja o triângulo ABC retângulo em B**




**Se $\overline{AD}$ é bissetriz de $\widehat{A}$, $\overline{AB} = 6\ cm$, e $\overline{AC} = 10\ cm$, então a medida de $\overline{DC}$, em cm, é**

**a) 6**

**b) 5**

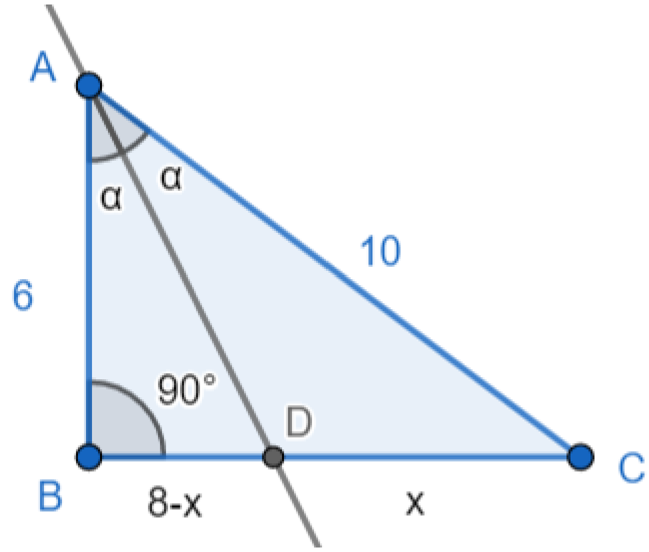
**c) 4**

**d) 3**

**Comentários**

Por Pitágoras, descobrimos que o lado $\overline{BC} = 8\ cm$.

Aplicaremos agora o Teorema da Bissetriz Interna.




O teorema da bissetriz interna diz que uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes. Ou seja:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{6}{8-x} = \frac{10}{x}$$

$$\Rightarrow \quad 6x = 10(8-x)$$

$$\Rightarrow \quad 6x = 80 - 10x$$

$$\Rightarrow \quad 16x = 80$$

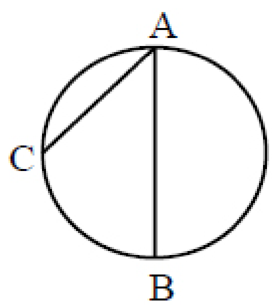
$$\Rightarrow \quad x = \frac{80}{16} = 5$$

$$\therefore \quad \overline{DC} = 5\ cm$$

**Gabarito: "b"**

---

**44. (EEAR/2005)**




**Na figura, $AB$ é diâmetro. Se o arco agudo $AC$ mede $70°$, a medida do ângulo $C\hat{A}B$ é**

**a) $50°$.**

**b) $55°$.**

c) $60°$.

d) $65°$.

**Comentário:**

O arco $\widehat{ACB}$ é uma semicircunferência e, portanto, mede $180°$. Logo, o arco $\widehat{CB}$ é o suplementar do arco $\widehat{AC}$, e portanto vale $180° - 70° = 110°$. O ângulo $C\hat{A}B$, sendo ângulo inscrito na circunferência, vale metade do arco que ele enxerga, $\widehat{CB}$. Portanto, $C\hat{A}B = \frac{\widehat{CB}}{2} = 55°$.

**Gabarito: "b".**

---

**45. (EEAR/2005)**

**Num triângulo $ABC$, $BC = 10\ cm$ e $A\hat{B}C = 60°$. Se esse triângulo está inscrito numa semicircunferência e $BC$ é seu menor lado, então o raio dessa semicircunferência mede, em $cm$,**

a) $5$.

b) $10$.

c) $10\sqrt{2}$.

d) $10\sqrt{3}$.

**Comentário:**

Supondo que $AB$ é o diâmetro da semicircunferência, temos que o ângulo $\hat{C} = 90°$ é reto. Temos, no triângulo $\Delta ABC$, retângulo em $C$, $\hat{B} = 60°$ e $BC = 10$ cm. Logo, calculando o cosseno do ângulo $\hat{B}$, obtemos:

$$\frac{1}{2} = \cos 60° = \cos \hat{B} = \frac{BC}{AB} = \frac{10\ cm}{AB} \Rightarrow AB = 20\ cm.$$

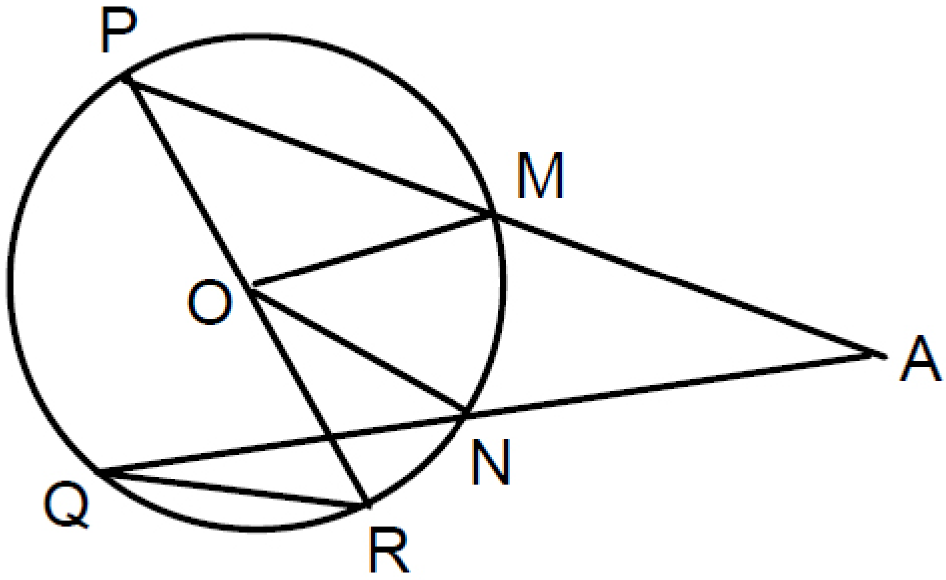
Mas, sendo $AB$ diâmetro, ela vale duas vezes o raio, logo, o raio vale $10\ cm$.

**Gabarito: "b".**

---

**46. (EEAR/2004)**

**Na figura, $O$ é o centro da circunferência, $M\hat{O}N = 62°$, e $P\hat{R}Q = 65°$. O ângulo $M\hat{A}N$ mede**




a) $34°$.

b) $36°$.

c) $38°$.

d) $40°$.

**Comentário:**

O arco $\widehat{PQ}$ é enxergado pelo ângulo inscrito $P\hat{R}Q$ e, portanto, mede $\widehat{PQ} = 2 \cdot P\hat{R}Q = 130°$.

O arco $\widehat{MN}$ é enxergado pelo ângulo central $M\hat{O}N$ e, portanto, mede $\widehat{MN} = M\hat{O}N = 62°$.

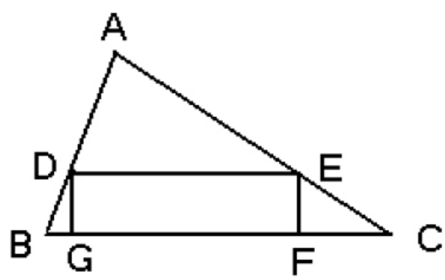
O ângulo $P\hat{A}Q$ enxerga os arcos $\widehat{PQ}$ e $\widehat{MN}$ e, portanto, mede $\frac{\widehat{PQ}-\widehat{MN}}{2} = 34°$.

**Gabarito: "a".**

---

**47. (EEAR/2004)**

**Na figura, o lado $BC$ do triângulo $ABC$ mede $12cm$, e a altura relativa ao lado $BC$ mede $8cm$. Se $FG = 3EF$, então o perímetro do retângulo $DEFG$, em cm, é:**




a) $30$

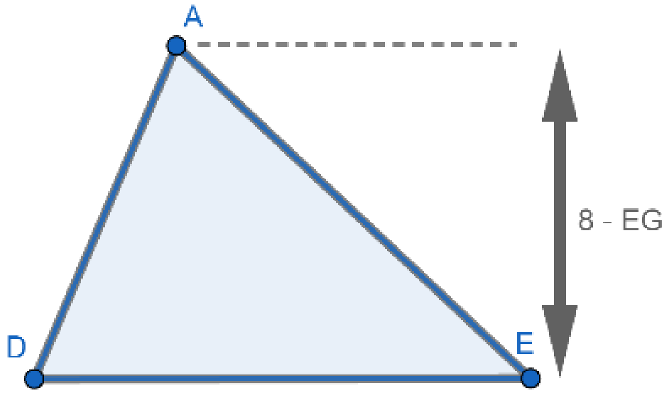
b) $28$

c) $\frac{85}{3}$

d) $\frac{64}{3}$

**Comentários**

Perceba que o triângulo $\Delta ABC$ é semelhante ao triângulo $\Delta ADE$, destacado na figura seguinte:




Pela relação de semelhança entre a base e a altura temos:

$$\frac{DE}{8-EF}=\frac{12}{8}$$

Porem temos $FG = DE = 3EF$

Logo:

$$\frac{3EF}{8-EF}=\frac{3}{2}$$
$$6EF = 24 - 3EF$$
$$9EF = 24$$
$$EF = \frac{8}{3}$$

Como perímetro do retângulo $DEFG$

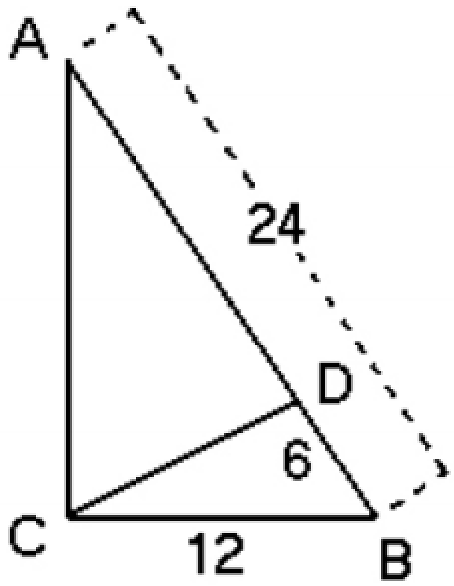
$$P_{DEFG} = 2EF + 2DE = 2EF + 6EF = 8EF$$
$$P_{DEFG} = 8EF = \frac{64}{3}$$

**Gabarito: “d”**

---

**48. (EEAR/2004)**

**Se os dados no triângulo ABC, retângulo em C, estão em cm, então o triângulo BCD é**




**a) obtusângulo.**

**b) retângulo.**

**c) isósceles.**

**d) equilátero.**

**Comentários**

Devemos ficar sempre atentos para as proporções dos valores das medidas, pois muitas conclusões podem ser tiradas apenas observando os valores dados.

$$sen\left(B\hat{A}C\right) = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = \text{sen}(30°)$$

$$\therefore \quad B\hat{A}C = 30° \;\Rightarrow\quad A\hat{B}C = 60°$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo BCD, obtemos:

$$\overline{CD}^2 = (12)^2 + (6)^2 - 2 \cdot (12) \cdot (6) \cdot \cos(60°)$$

$$\Rightarrow \overline{BC}^2 = 144 + 36 - 2 \cdot 72 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{BC}^2 = 180 - 72 = 108$$

$$\Rightarrow \overline{BC} = 6\sqrt{3}$$

d) FALSO. Pela definição de triângulo equilátero.

c) FALSO. Pela definição de triângulo isósceles.

b) VERDADEIRO.

$$(12)^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 + (6)^2$$

$$144 = 108 + 36$$

Verdadeiro.

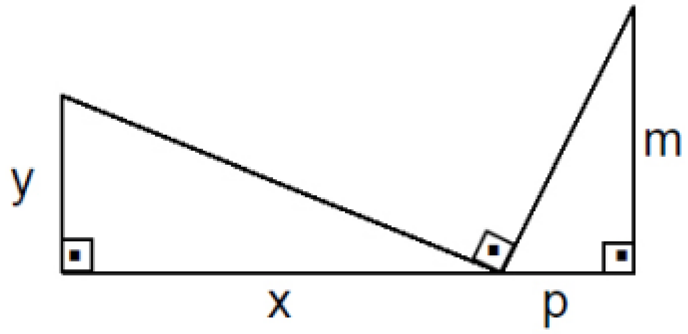
FALSO. Pois não se pode ser retângulo – ângulo de $90°$ – e obtusângulo – ângulo maior que $90°$ - ao mesmo tempo, pois a soma dos ângulos internos seria maior do que $180°$. Logo, se b) é verdadeiro, a) é automaticamente falso.

**Gabarito: "b"**

---

**49. (EEAR/2004)**

**Na figura, os ângulos assinalados são retos. Assim, necessariamente, teremos**



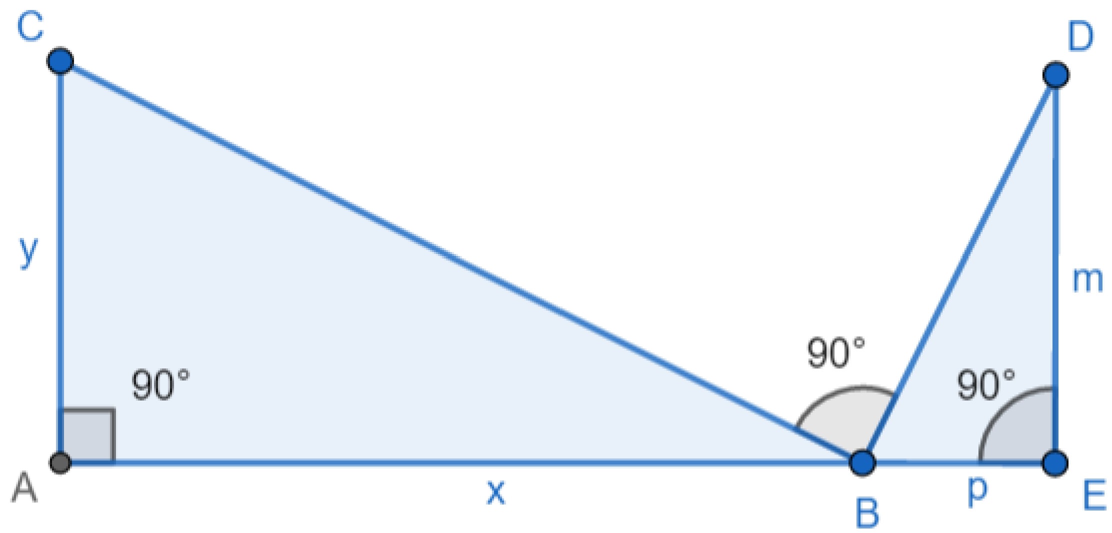

a) $\frac{x}{y} = \frac{p}{m}$

b) $\frac{x}{y} = \frac{m}{p}$

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$

d) $x^2 + y^2 = p^2 + m^2$

**Comentários**




Analisando os ângulos, obtemos que:

$$A\hat{B}C + C\hat{B}D + D\hat{B}E = 180°$$

$$A\hat{B}C + 90° + D\hat{B}E = 180°$$

$$A\hat{B}C + D\hat{B}E = 90°$$

Mas, como

$$A\hat{B}C + A\hat{C}B = 90°$$

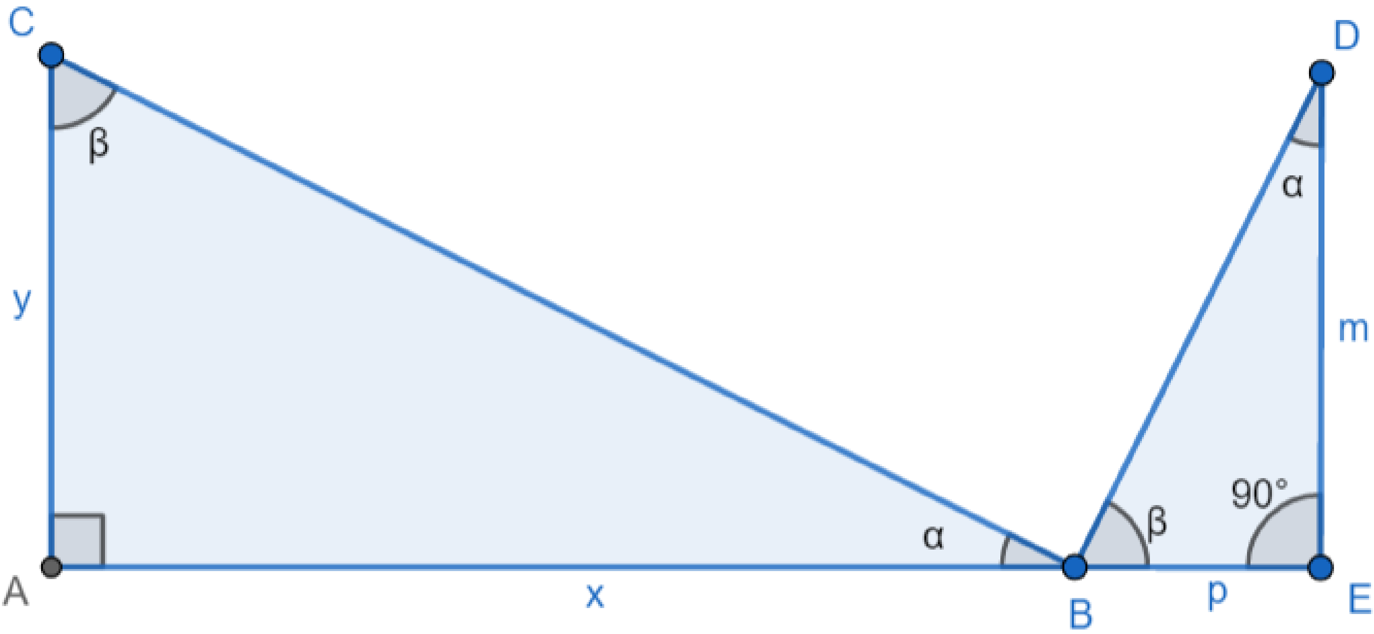
Então:

$$A\hat{C}B = D\hat{B}E$$

Analogamente,

$$A\hat{B}C = B\hat{D}E$$

Redesenhando a figura:




Perceba que os triângulos ABC e EDB são semelhantes, logo,

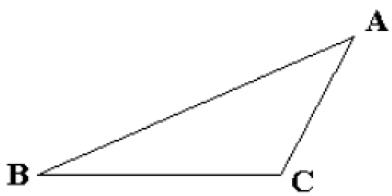
$$\frac{x}{y} = \frac{m}{p}$$

**Gabarito: "b"**

---

**50. (EEAR/2003)**

**Na figura, as medidas dos lados $AB, AC$ e $BC$ são, respectivamente, $40cm, 20cm$ e $30cm$.**




**A bissetriz interna desse triângulo, relativa ao vértice A, encontra o lado oposto no ponto $P$, e a bissetriz externa, relativa ao mesmo vértice, encontra o prolongamento do lado $BC$ no ponto $S$. A medida do segmento $PS$, em cm, é igual a:**

**a) 30**

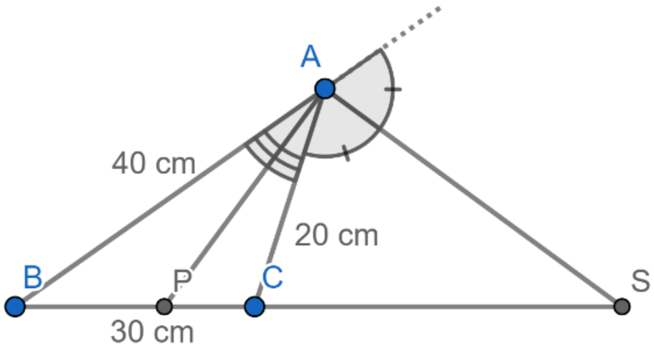
**b) 35**

**c) 40**

d) 45

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




No triângulo $\Delta ABC$ temos pelo teorema da bissetriz interna:

$$\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{PC} \Rightarrow \frac{40}{BP} = \frac{20}{PC}$$
$$\Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{40}{20} = \frac{2}{1}$$

Como $BC = BP + PC$:

$$BC = BP + PC$$
$$30 = BP + PC$$
$$30 = 2PC + PC$$
$$10 = PC$$

No triângulo $\Delta ABP$ temos pelo teorema da bissetriz externas:

$$\frac{AB}{BS} = \frac{AC}{CS}$$
$$\Rightarrow \frac{BS}{CS} = \frac{40}{20} = \frac{2}{1}$$

Como $BS = BC + CS$

$$2CS = BS$$
$$2CS = BC + CS$$
$$CS = BC$$
$$CS = 30$$

Assim obtemos

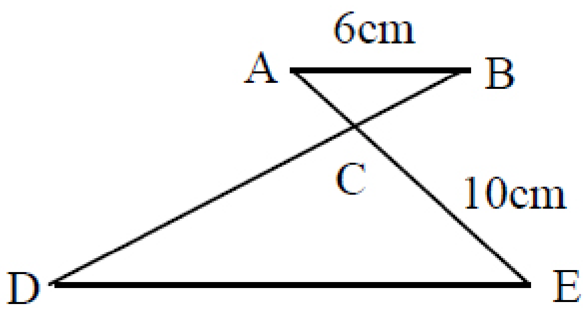
$$SP = SC + CP = 30 + 10 = 40$$

**Gabarito: "c".**

---

**51. (EEAR/2003)**

**Na figura os triângulos ABC e EDC são semelhantes.**




**Sabendo que $AC = x - 5$ e $DE = 2x + 4$, a soma $med(AC) + med(CE)$, em cm, vale**

**a) $10,3$**

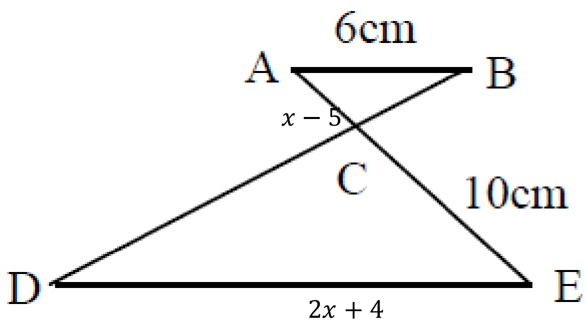
**b) $18$**

**c) $13$**

**d) $23,3$**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Temos que os triângulos $ABC$ e $CDE$ são semelhantes, e, portanto, vale a seguinte relação:

$$\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{DE}$$

Dessa relação obtemos a equação:

$$\frac{x-5}{10} = \frac{6}{2x+4}$$
$$(x-5)\cdot(x+2) = 30$$
$$x^2 - 3x - 10 = 30$$
$$x^2 - 3x - 40 = 0$$
$$(x-8)\cdot(x+5) = 0$$

Na qual obtemos que $x = 8$, portanto,

$$\begin{cases} AC = 8 - 5 = 3 \\ AC + CE = 3 + 10 \end{cases}$$
$$AC + CE = 13$$

**Gabarito: "c".**

**52. (EEAR/2003)**

**Numa circunferência de centro C e raio 20 cm, considere a corda $\overline{AB}$, cujo ponto médio é M. Se $\overline{CM} = 10\ cm$, então a medida de $\overline{AB}$ é, em cm,**

**a) $15\sqrt{5}$**

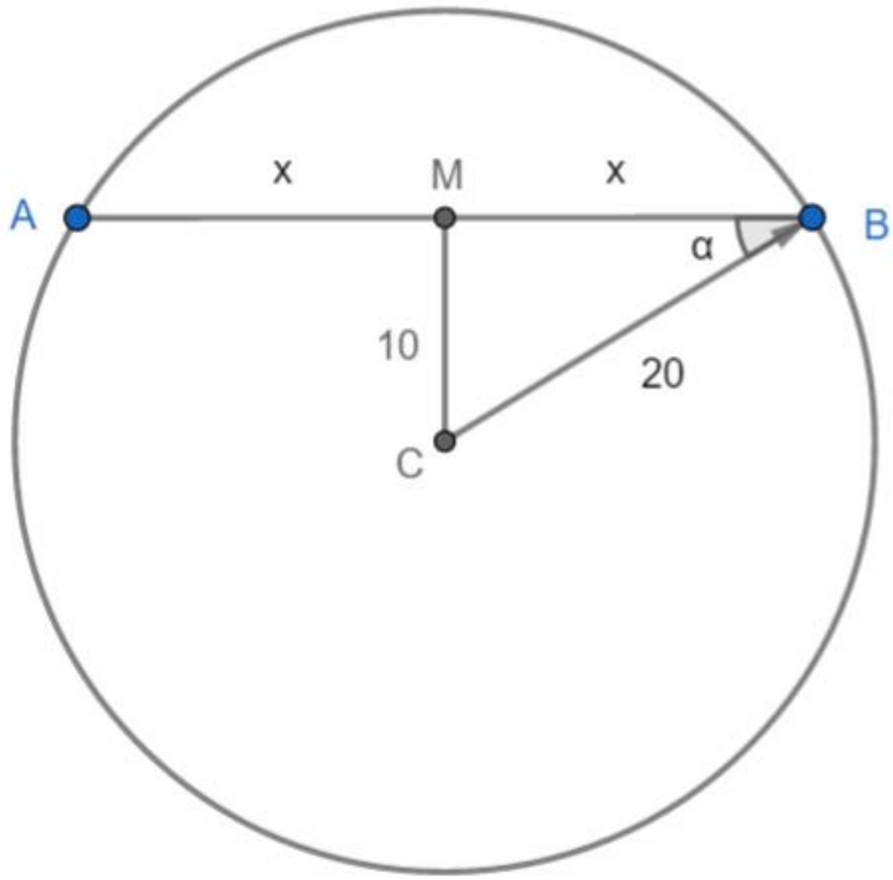
**b) $20\sqrt{3}$**

**c) $15$**

**d) $20$**

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Atente-se para o ângulo $\alpha$:

$$sen(\alpha) = \frac{\overline{CM}}{\overline{BC}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} = sen(30°)$$

Logo $\alpha = 30°$, então podemos calcular o valor de x:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overline{MB}}{\overline{BC}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{20}$$

$$\Rightarrow \quad x = 10\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \overline{AB} = 2x = 20\sqrt{3}$$

**Gabarito: “b”**

**53. (EEAR/2003)**

**Se forem indicados por m, n, e p os três lados de um triângulo e por $\widehat{M}, \widehat{N}$ $e$ $\widehat{P}$, respectivamente, os ângulos opostos a esses lados, então sendo conhecidos os lados m e n e o ângulo $\widehat{N}$, qual das fórmulas abaixo poderá ser utilizada para calcular o valor do lado p?**

**a)** $m^2 = n^2 + p^2 - 2 \cdot n \cdot p \cdot \cos(\widehat{M})$

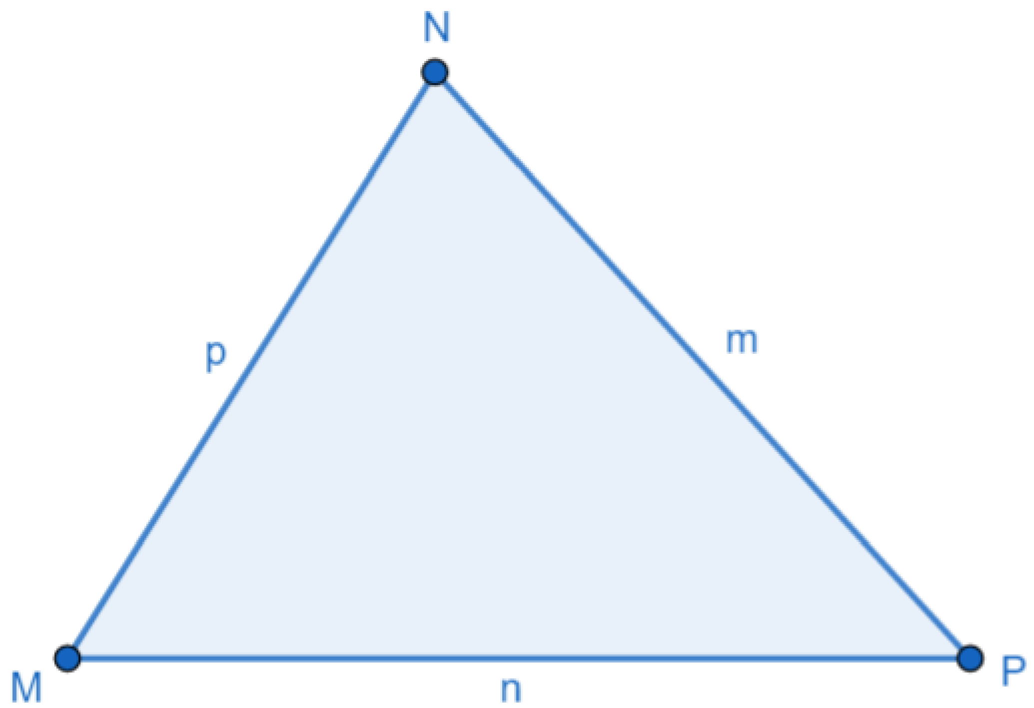
**b)** $n^2 = m^2 + p^2 + 2 \cdot m \cdot p \cdot \cos(\widehat{M} + \widehat{P})$

**c)** $p^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos(\widehat{P})$

**d)** $p^2 = m^2 + n^2 - 2 \cdot m \cdot n \cdot \cos(\widehat{M} + \widehat{N})$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Aplicando a Lei Dos Cossenos relativo ao lado $\overline{MP}$, temos:

$$n^2 = m^2 + p^2 - 2 \cdot m \cdot p \cdot \cos(\widehat{N})$$

Mas, pelas relações no ciclo trigonométrico e a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, temos que: $\cos(\widehat{N}) = -\cos(180° - \widehat{N}) = -\cos(\widehat{M} + \widehat{P})$

Logo,

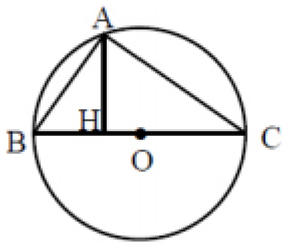
$$n^2 = m^2 + p^2 - 2 \cdot m \cdot p \cdot (-\cos(\widehat{M} + \widehat{P}))$$
$$n^2 = m^2 + p^2 + 2 \cdot m \cdot p \cdot \cos(\widehat{M} + \widehat{P})$$

Obs: O que torna as outras alternativas falsas, é que, mesmo em posse do valor de $\hat{N}$, não poderíamos chegar diretamente no valor de $\cos(\hat{M})$, $\cos(\hat{P})$ e nem $\cos(\hat{M}+\hat{N})$, sem antes obter o valor de p. Então usá-las de primeira mão seria inadequado.

**Gabarito: "b"**

**54. (EEAR/2003)**

**O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de centro O e de raio 13 cm**




**Sabendo que $\overline{AB} = 10\ cm$, a altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$ mede, em cm, aproximadamente**

**a) 7,6**

**b) 8,4**

**c) 9,23**

**d) 10,8**

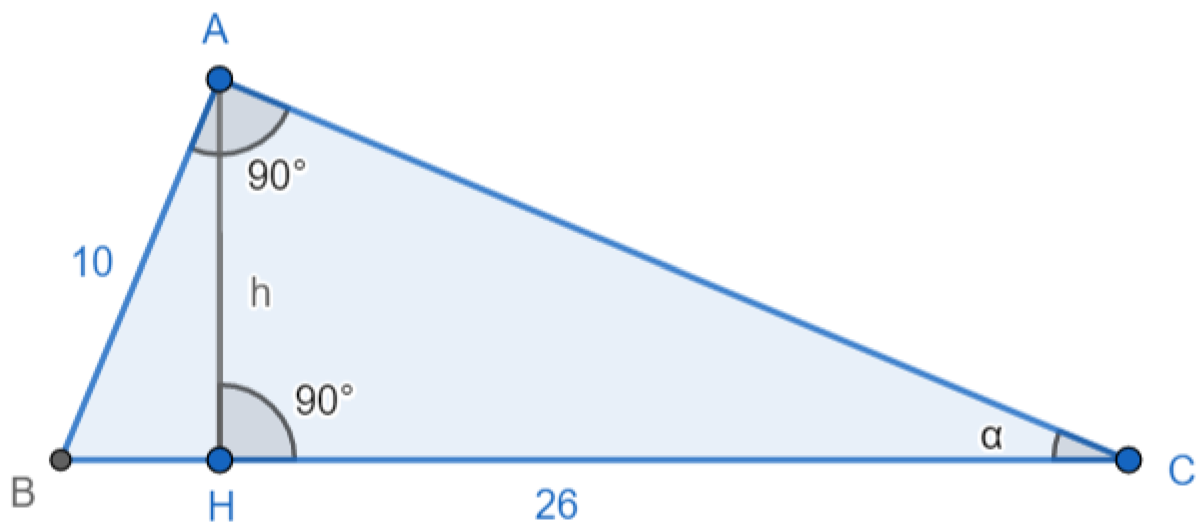
**Comentários**

De acordo com a figura é possível perceber que o seguimento $\overline{BC}$ passa pelo centro da circunferência, isso nos passa duas informações:

$\overline{BC} = 26\ cm$, pois trata-se de um diâmetro

$B\hat{A}C = 90°$, pois o arco definido por $\overline{BC}$ possui $180°$.

Desenhando o triângulo com as novas informações, obtemos:




Por Pitágoras obtemos que $\overline{AC} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{AB}^2} \quad \Rightarrow \quad \overline{AC} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24\ cm$

Perceba que os triângulos ABC e HAC são semelhantes. Portanto:

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{h}{24} = \frac{10}{26}$$

$$h = \frac{240}{26} = \frac{120}{13} \approx 9,23$$

**Gabarito: "c"**

**55. (EEAR/2003)**

**Seja o triângulo ABC e D um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $\overline{AD} = 2\ cm$, $\overline{AB} = \sqrt{3}\ cm$, $\overline{BD} = \overline{DC}$ e $B\hat{A}C = 30°$, a medida, em cm, do lado $\overline{BC}$ é igual a**

**a)** $\sqrt{3}$

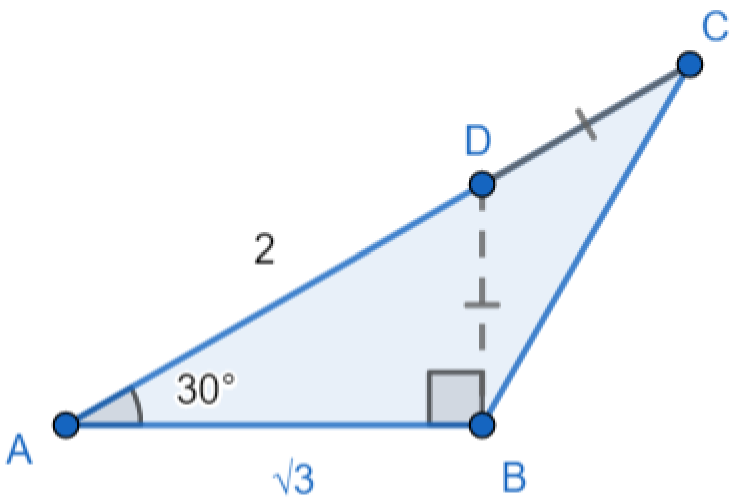
**b)** $\sqrt{5}$

**c)** $\sqrt{6}$

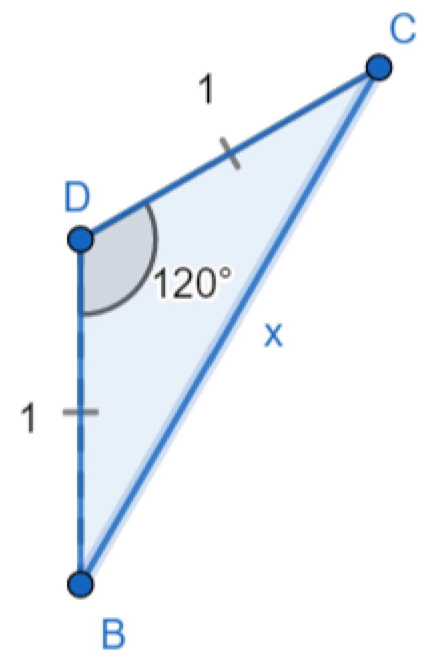
**d)** $\sqrt{7}$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Aplicando a definição de seno no triângulo ABD é possível obter o valor de $\overline{BD}$ e descobrir que $\overline{BD} = 1\ \text{cm}$. Perceba também que $A\hat{D}B = 60° \Rightarrow B\hat{D}C = 120°$. E, segundo o enunciado, $\overline{BD} = \overline{CD} = 1\ cm$. Logo, ficamos com o triângulo BCD representado logo abaixo:




Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos:

$$x^2 = (1)^2 + (1)^2 - 2 \cdot (1) \cdot (1) \cdot \cos(120°)$$
$$\Rightarrow \ x = \sqrt{3}$$
$$\therefore \ \overline{BC} = \sqrt{3}$$

**Gabarito: “a”**

---

**56. (EEAR/2003)**

**Em um triângulo ABC, o lado $\overline{AB}$ mede $6\sqrt{3}\ cm$ e o ângulo $\hat{C}$, oposto ao lado $\overline{AB}$, mede $60°$. O raio da circunferência que circunscreve o triângulo, em cm, mede**

**a) 6**

**b) 12**

**c) $6\sqrt{3}$**

**d) $3\sqrt{6}$**

**Comentários**

Esta questão dispensa figura. Trata-se de uma aplicação direta da lei dos senos:

$$\frac{\overline{BC}}{sen(\hat{A})} = \frac{\overline{AB}}{sen(\hat{C})} = \frac{\overline{AC}}{sen(\hat{B})} = 2 \cdot R$$

Em que R é o raio da circunferência

$$\frac{\overline{AB}}{sen(\hat{C})} = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{sen(60°)} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}/_2} = 12 = 2R$$

$$\Rightarrow R = 6\ cm$$

**Gabarito: "a"**

**57. (EEAR/2003)**

**As medidas dos lados de um triângulo são iguais a 4 cm, 5 cm e 6 cm. O cosseno do menor ângulo desse triângulo é igual a**

**a)** $\frac{1}{8}$

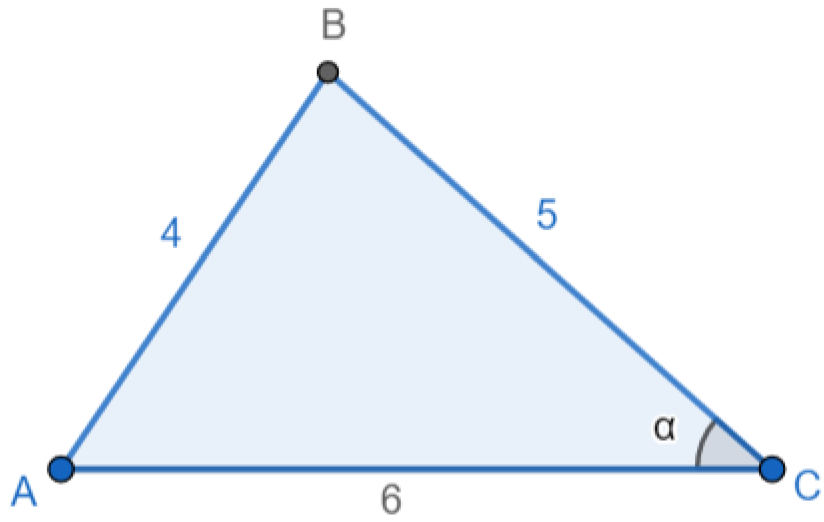
**b)** $\frac{9}{16}$

**c)** $\frac{3}{4}$

**d)** $\frac{2}{5}$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




O menor ângulo é oposto ao menor lado.

Aplicando a Lei dos cossenos, obtemos

$$(4)^2 = (6)^2 + (5)^2 - 2 \cdot (6) \cdot (5) \cdot \cos(\alpha)$$

$$16 = 36 + 25 - 60 \cdot \cos(\alpha)$$

$$60 \cdot \cos(\alpha) = 55$$

$$\cos(\alpha) = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

**Gabarito: "c"**

**58. (EEAR/2003)**

**Se em uma circunferência uma corda mede $16\sqrt{2}\ cm$ e dista $6\sqrt{2}\ cm$ do centro, então a medida do raio dessa circunferência, em $cm$, é**

**a)** $12\sqrt{2}$

b) $10\sqrt{2}$

c) $8\sqrt{2}$

d) $6\sqrt{2}$

**Comentário:**

Seja $MN$ tal corda, $P$ o seu ponto médio e $O$ o centro da circunferência. Pelo teorema de Pitágoras,

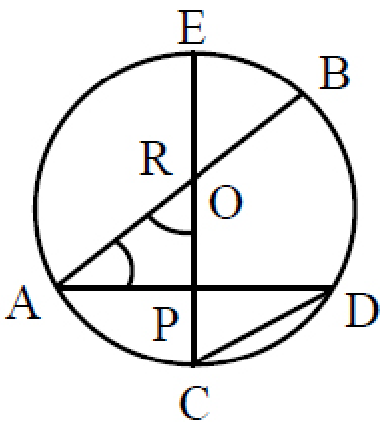
$$MP^2 + OP^2 = OM^2 \Leftrightarrow \left(\frac{MN}{2}\right)^2 + OP^2 = OM^2 \Leftrightarrow \left(\frac{16\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = raio^2 \therefore raio = 10\sqrt{2}$$

**Gabarito: "b".**

---

**59. (EEAR/2003)**

**Na figura, as cordas $AB$ e $CD$ são paralelas.**




**$EC$ é um diâmetro e $P$ é o ponto médio da corda $AD$. As medidas, em graus, dos ângulos $A\hat{R}C$ e $P\hat{A}R$ são, respectivamente, $4x - 14°$ e $5x - 13°$. As medidas dos ângulos do triângulo $\Delta PCD$ são**

a) $42°, 57°, 81°$

b) $45°, 45°, 90°$

c) $46°, 45°, 90°$

d) $52°, 38°, 90°$

**Comentário:**

Apesar de não sermos informados, suporemos que $O$ é o centro da circunferência. Como $AD$ é uma corda cujo ponto médio $P \in EC$, conclui-se que $APO = 90°$. Logo, $\Delta POA$ é retângulo em $P$ e portanto $ARC + PAR = 90° \Rightarrow (4x - 14°) + (5x - 13°) = 90° \Rightarrow x = 13°$. Como os triângulos $\Delta PCD$ e $\Delta POA$ têm os três lados respectivamente paralelos, temos $\Delta PCD \sim \Delta POA$, donde se conclui que os ângulos de $\Delta PCD$ e $\Delta POA$ são iguais. Logo, os ângulos são $90°$, $4x - 14°$ e $5x - 13°$, isto é, $90°$, $38°$ e $52°$.

**Gabarito: "d".**

---

**60. (EEAR/2003)**

**Em um triângulo $ABC$, a bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ encontra $BC$ em $D$, e a circunferência circunscrita, em $E$. Sendo $AE = 9\ cm$ e $DE = 4\ cm$, então a medida $EB$, em $cm$, é**

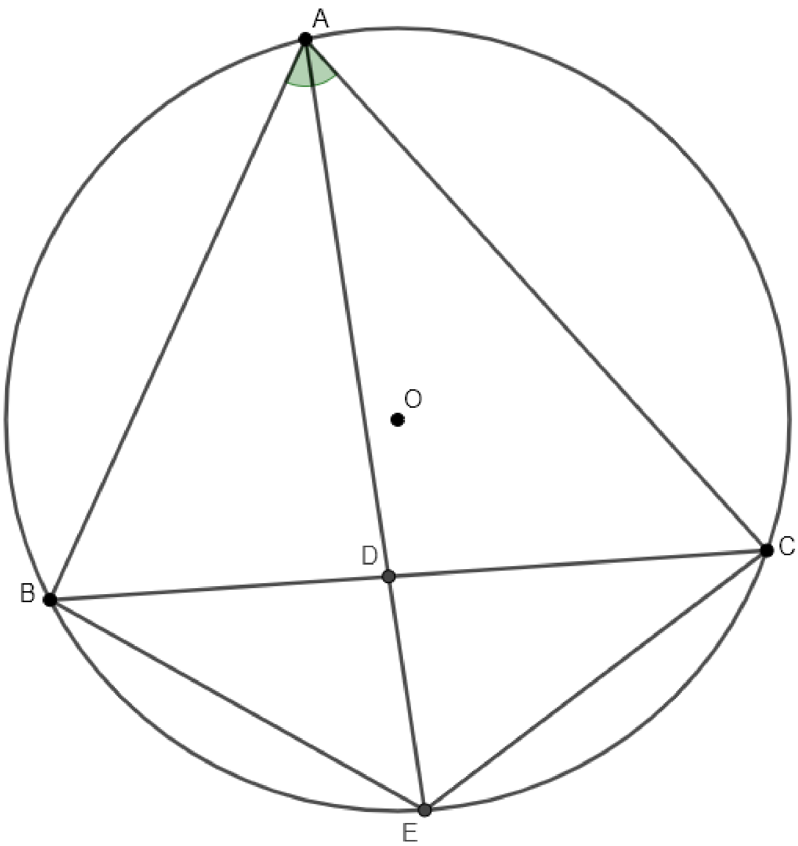
**a) 6**

**b) 5**

**c) $2\sqrt{5}$**

**d) $3\sqrt{2}$**

**Comentário:**




Como $AE$ é a bissetriz do ângulo $\hat{A}$, temos que os ângulos $C\hat{A}E$ e $E\hat{A}B$ são iguais e, portanto, também são os arcos por eles observados, $\widehat{CE} = \widehat{EB}$. Observe que o ângulo $E\hat{B}D$ também observa $\widehat{CE}$, donde $E\hat{B}D = \frac{\widehat{CE}}{2} = \frac{\widehat{EB}}{2} = E\hat{A}B$. Como os triângulos $\Delta AEB$ e $\Delta BED$ possuem o ângulo $\hat{E}$ em comum, e como $E\hat{B}D = E\hat{A}B$, concluímos que os triângulos $\Delta AEB \sim \Delta BED$ são semelhantes pois têm todos os ângulos congruentes. Portanto,

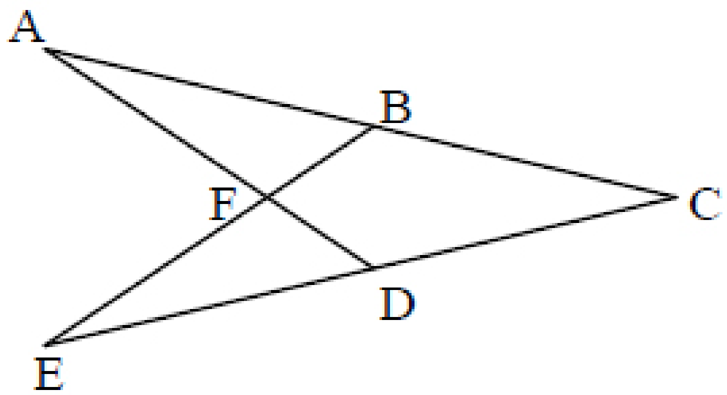
$$\frac{EB}{DE} = \frac{EA}{BE} \Rightarrow EB^2 = AE \cdot DE = 9 \cdot 4 \therefore EB = 6\ cm.$$

**Gabarito: “a”.**

---

**61. (EEAR/2002)**

**Na figura, se o ângulo $\hat{A}$ é congruente ao ângulo $\hat{E}$ , então a relação falsa é**




a) $CA \cdot CB = CE \cdot CD$

b) $\frac{CA-CE}{CE} = \frac{CD-CB}{CD}$

c) $\frac{CA+CD}{CE+CB} = \frac{CD}{CB}$

d) $\frac{CA \cdot CD \cdot DA}{CE \cdot CB \cdot EB} = \left(\frac{CD}{CB}\right)^3$

**Comentário:**

Os triângulos $\Delta ECB$ e $\Delta ACD$ são semelhantes, pois $A\hat{C}D = E\hat{C}B$ e $C\hat{A}D = C\hat{E}B$. Logo, sendo k a constante de proporcionalidade,

$$\frac{CA}{CE} = \frac{AD}{EB} = \frac{CD}{CB} = k$$

Temos:

$$CA \cdot CB = (k \cdot CE) \cdot \left(\frac{CD}{k}\right) = CE \cdot CD$$

$$\frac{CA + CD}{CE + CB} = \frac{k \cdot CE + k \cdot CB}{CE + CB} = k = \frac{CD}{CB}$$

$$\frac{CA \cdot CD \cdot DA}{CE \cdot CB \cdot EB} = \frac{(k \cdot CE) \cdot (k \cdot CB) \cdot (k \cdot EB)}{CE \cdot CB \cdot EB} = k^3 = \left(\frac{CD}{CB}\right)^3$$

Mas

$$\frac{CA - CE}{CE} = \frac{k \cdot CE - CE}{CE} = k - 1$$

e

$$\frac{CD - CB}{CD} = \frac{k \cdot CB - CB}{k \cdot CB} = \frac{k-1}{k}$$

Por isso, o item b só seria verdadeiro se tivéssemos

$$\frac{k-1}{k} = k - 1 \therefore k = 1$$

o que não necessariamente é verdade.

**Gabarito: “b”.**

62. (EEAR/2002)

**Sejam: $\overline{AB}$ o diâmetro de uma circunferência de centro $O$; $\overline{AR}$ uma corda, tal que $B\widehat{A}R = 20°$; $t$, paralela a $\overline{AR}$, uma reta tangente à circunferência, em $T$. Sabendo que $T$ e $R$ são pontos da mesma semicircunferência em relação a $AB$, a medida, em graus, do ângulo agudo formado pela reta $t$ e pela corda $AT$ é igual a**

a) $25$

b) $35$

c) $50$

d) $70$

**Comentário:**

O triângulo $\Delta OAT$ é isósceles de base $AT$, visto que seus lados $OA$ e $OT$ valem $r$, o raio da circunferência. Segue que $OTA = OAT = OAR + RAT = BAR + RAT \Rightarrow OTA = BAR + RAT$.

Seja A' um ponto de $t$ no semiplano oposto de $R$ em relação à $AT$. Como $AR \parallel t$, os ângulos $RAT$ e $ATA'$ são alternos internos, donde $RAT = ATA'$. Como $T$ é ponto de tangência, segue que $OTA'$ é reto. Logo, $90° = OTA' = OTA + ATA' = BAR + RAT + ATA' = 20° + RAT + RAT \Rightarrow RAT = \frac{1}{2} \cdot (90° - 20°) \therefore RAT = 35°$.

O ângulo pedido, entre a reta $t$ e a corda $AT$ é justamente $RAT$.

**Gabarito: "b".**

63. (EEAR/2002)

**Traçam-se duas cordas de uma mesma extremidade de um diâmetro de um círculo. Uma delas mede $9\ cm$, e sua projeção sobre o diâmetro mede $5,4\ cm$. O comprimento da outra corda, cuja projeção no diâmetro é de $9,6\ cm$ mede, em $cm$,**

a) $10$

b) $12$

c) $14$

d) $15$

**Comentário:**

Primeiramente, vejamos o seguinte fato que ajudará na resolução:

Seja $AB$ o diâmetro de uma circunferência de centro $O$. Seja $C$ um ponto qualquer sobre a circunferência, diferente de $A$ e de $B$. Seja $C'$ a projeção de $C$ sobre $AB$. Se $l$ é a medida da corda $AC$, $p$ é a medida da projeção $AC'$ e $2r$ é a medida do diâmetro $AB$, pelo teorema de Pitágoras nos triângulos $C'AC$ e $C'OC$, temos:

$$C'A^2 + C'C^2 = CA^2 \Leftrightarrow p^2 + C'C^2 = l^2$$
$$C'O^2 + C'C^2 = CO^2 \Leftrightarrow (p - r)^2 + C'C^2 = r^2.$$

Portanto, $l^2 - p^2 = C'C^2 = r^2 - (p-r)^2 \Rightarrow l^2 - p^2 = r^2 - (p^2 - 2rp + r^2) \Rightarrow l^2 = 2rp$.

$$\therefore \frac{l^2}{p} = 2r = constante$$

Assim, variando o ponto $C$ pela circunferência, variamos $l$ e $p$, mas a razão $\frac{l^2}{p}$ se mantém fixa. Aplicando tal fato ao problema, chamando $x$ ao comprimento da corda cuja projeção mede $9{,}6\ cm$, temos:

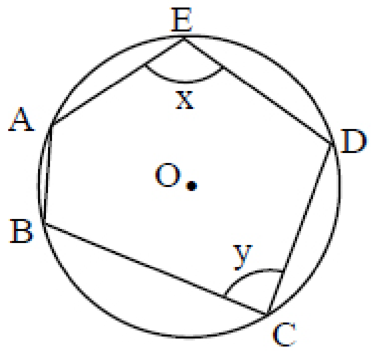
$$\frac{(9\ cm)^2}{5{,}4\ cm} = \frac{x^2}{9{,}6\ cm} \therefore x = 12cm.$$

**Gabarito: "b".**

---

**64. (EEAR/2002)**

**Seja o pentágono $ABCDE$ da figura, inscrito numa circunferência de centro $O$. Se o ângulo $A\hat{O}B = 50°$, então $x + y$ vale, em graus**




**a) $216$**

**b) $205$**

**c) $180$**

**d) $105$**

**Comentário:**

A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco para o qual ele "olha". Sabendo disso,

$$x = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CD)$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot (DE + EA + AB)$$

Logo,

$$x + y = \frac{1}{2} \cdot (AB + BC + CD + DE + EA) + \frac{1}{2} \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 360° + \frac{1}{2} \cdot 50° = \frac{1}{2} \cdot (360° + 50°)$$

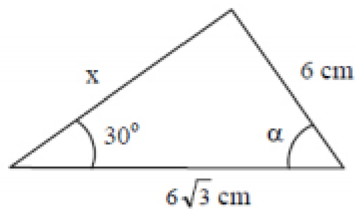
$$\therefore x + y = 205°.$$

**Gabarito: “b”.**

---

**65. (EEAR/2002)**

**Sendo α um ângulo agudo, o lado x do triângulo abaixo, em cm, mede**




**a) 6**

**b) 10**

**c) 12**

**d) 15**

**Comentários**

Aplicando a Lei Dos Cossenos relativo ao lado de $\boldsymbol{6\ cm}$

$$(6)^2 = x^2 + \left(6\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot(x)\cdot\left(6\sqrt{3}\right)\cdot\cos(30°)$$

$$x^2 - 18x + 72 = 0$$

$$x = 12\ ou\ x = 6$$

Suponha $x = 12$. Pela Lei Dos Senos.

$$\frac{x}{sen\,\alpha} = \frac{12}{sen\,\alpha} = \frac{6}{sen\,30°} = 12 \Rightarrow sen\,\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 90°\ (\text{não é ângulo agudo})$$

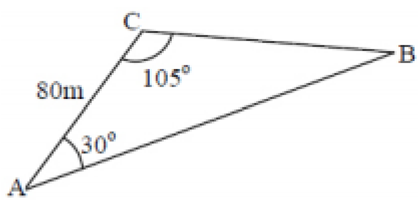
Como o ângulo $\alpha$ é agudo, o valor de x mais adequado é $x = 6$

**Gabarito: “a”**

---

**66. (EEAR/2002)**

**De acordo com os dados da figura, a distância aproximada, em metros, entre os pontos A e B é**




**a) 100**

**b) 102**

**c) 104**

**d) 108**

**Comentários**

Note que $\widehat{B} = 45°$, queremos aplicar a lei dos senos, mas antes precisamos obter o valor de $sen(105°)$. Iremos aplicar a fórmula do seno da soma:

$$sen(105°) = sen(60° + 45°) = sen(60°) \cdot \cos(45°) + sen(45°) \cdot \cos(60°) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$sen(105°) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Aplicando a lei dos senos

$$\frac{80}{sen(45°)} = \frac{\overline{AB}}{sen(105°)}$$

$$\overline{AB} = \frac{80 \cdot sen(105°)}{sen(45°)} = \frac{80 \cdot \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 40 \cdot (\sqrt{3}+1)$$

Utilizaremos a aproximação $\sqrt{3} \approx 1,7$

$$AB \approx 40 \cdot (1,7 + 1) = 108$$

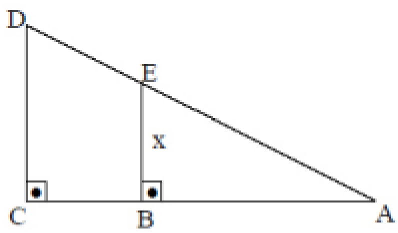
$$AB \approx 108\ m$$

**Gabarito: “d”**

---

**67. (EEAR/2002)**

**Dada a figura abaixo, se $\overline{AB} = 8$ cm, $\overline{CD} = 4$ cm e $\overline{AD} = 20$ cm, a medida, em cm, de $x$ é**




a) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

c) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

**Comentários**

Por Pitágoras, descobrimos que $\overline{AC} = \sqrt{20^2 - 4^2} = 8\sqrt{6}$.

Devido à semelhança de triângulos entre ACD e ABE:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$$

$$\frac{8}{x} = \frac{8\sqrt{6}}{4}$$

$$x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

**Gabarito: “c”**

---

**68. (EEAR/2001)**

**Num círculo de centro $C$ e raio $R$, tomam-se dois pontos $A$ e $B$ sobre a circunferência do círculo. Sendo o ângulo $\alpha = A\hat{C}B$ e sabendo-se que o arco $\widehat{AB}$ tem comprimento $R$, então pode-se afirmar:**

**a) $\alpha = 45°$**

**b) $\alpha = 90°$**

**c) $45° < \alpha < 50°$**

**d) $55° < \alpha < 60°$**

**Comentário:**

O ângulo $\alpha$ olha para o arco $\widehat{AB}$. Portanto, temos $\widehat{AB} = \alpha \cdot R \Rightarrow R = \alpha \cdot R \therefore \alpha = 1\, rad \approx 57°$.

$$1\, rad = \frac{180°}{\pi\, rad} \cdot 1\, rad = \frac{180°}{\pi} \approx \frac{180°}{3{,}14} \approx 57°.$$

**Gabarito: “d”.**

---

**69. (EEAR/2001)**

**Sejam $P$, $Q$ e $R$ pontos de uma circunferência de centro $O$, tais que $P$ e $Q$ estejam do mesmo lado em relação ao diâmetro que passa por $R$. Sabendo-se que $med(O\hat{R}P) = 10°$ e $med(R\hat{O}Q) = 80°$, tem-se que o ângulo $P\hat{Q}O$ mede:**

**a) $20°$**

**b) $40°$**

**c) $50°$**

**d) $60°$**

**Comentário:**

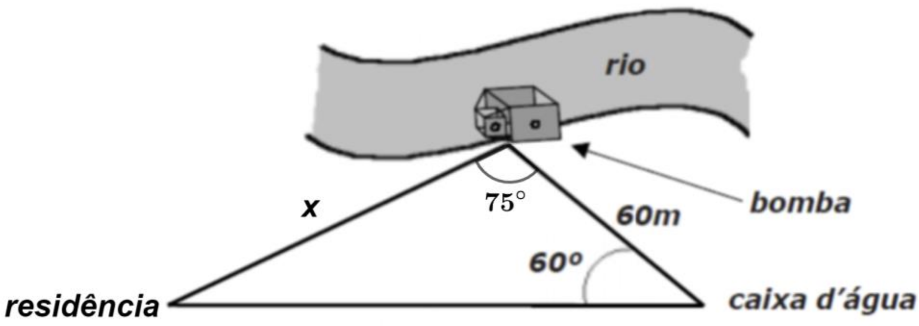
Seja $S$ o outro extremo do diâmetro que passa por $R$. Como $med(O\hat{R}P) = 10°$ e este ângulo está inscrito na circunferência, temos que $med(S\hat{O}P) = 20°$, o dobro. Como o ângulo $S\hat{O}P$ é raso, temos $med(S\hat{O}P) + med(P\hat{O}Q) + med(R\hat{O}Q) = 180° \Rightarrow 20° + med(P\hat{O}Q) + 80° = 180° \therefore med(P\hat{O}Q) = 80°$. Olhando para o triângulo isósceles $\Delta POQ$, temos que a medida de $P\hat{Q}O$ é a metade do suplementar de $P\hat{O}Q$, isto é:

$$med(P\hat{Q}O) = \frac{180° - med(P\hat{O}Q)}{2} = \frac{180° - 80°}{2} = 50°.$$

**Gabarito: “c”.**

**70. (ESA/2021)**

**A água utilizada em uma residência é captada e bombeada do rio para uma caixa d`água localizada a 60 m de distância da bomba. Os ângulos formados pelas direções bomba – caixa d`água – residência é de $60°$ e residência – bomba – caixa d`água é de $75°$, conforme a figura abaixo. Para bombear água do mesmo ponto de captação, diretamente para a residência, quantos metros de tubulação são necessários? Use $\sqrt{6} = 2,4$**




**a) 12,5 metros**

**b) 72 metros**

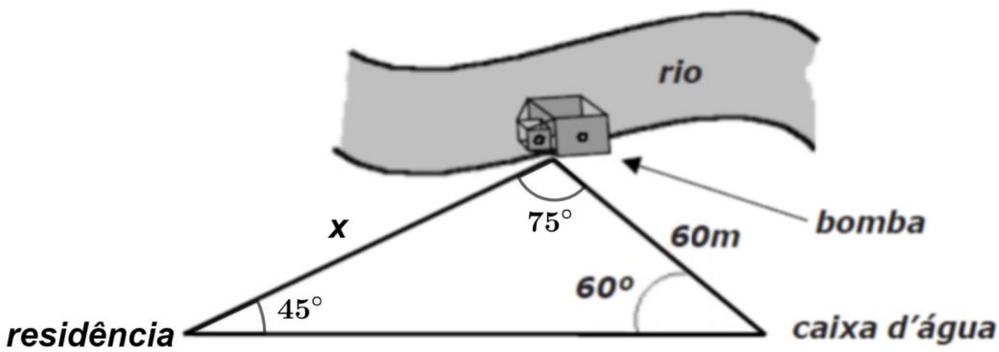
**c) 35,29 metros**

**d) 21,25 metros**

**e) 28 metros**

**Comentários**

Para resolver essa questão, precisamos aplicar a lei dos senos. Mas antes, perceba que o ângulo formado pelas direções caixa d`água – residência – bomba é $45°$, devido à soma dos ângulos internos do triângulo. Assim, temos:




Aplicando a lei dos senos:

$$\frac{x}{sen(60°)} = \frac{60}{sen(45°)}$$

$$x = 60 \cdot sen(60°) \cdot \frac{1}{sen(45°)} = 60 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x = 30\sqrt{6} = 30 \cdot 2{,}4 = 72\ m$$

**Gabarito: B**

---

**71. (ESA/2019)**

**As medidas, em centímetros, dos lados de um triângulo são expressas por $x+1$, $2x$ e $x^2-5$ e estão em progressão aritmética, nessa ordem. Calcule o perímetro do triângulo:**

**a) 18**

**b) 25**

**c) 15**

**d) 20**

**e) 24**

**Comentários**

Sabemos que três termos consecutivos de uma PA podem ser escritos como $(a-r, a, a+r)$ e, portanto, a soma dos extremos é o dobro do termo central:

$$\Rightarrow (x^2-5)+(x+1) = 2\cdot 2x \Rightarrow x^2-5+x+1 = 4x \Rightarrow x^2-3x-4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 3^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 25$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ ou} -1$$

Como $x+1$ é um lado de um triângulo então $x=4$, pois não pode ser -1. Assim, os lados são:

$$x+1 = 5, 2x = 8\ e\ x^2-5 = 11$$

Portanto, o perímetro é:

$$5+8+11 = 24$$

**Gabarito: "e".**

---

**72. (ESA/2019)**

**Uma pequena praça tem o formato triangular, as medidas dos lados desse triângulo são $\sqrt{37}$m, 4m e 3m. Qual a medida do ângulo oposto ao maior lado?**

**a) 120°**

**b) 60°**

**c) 90°**

**d) 45°**

**e) 150°**

**Comentários**

Basta aplicar Lei dos cossenos usando o ângulo $\theta$ oposto ao lado maior $\sqrt{37}$:

$$\left(\sqrt{37}\right)^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\theta$$

$$37 = 16 + 9 - 24\cos\theta \Rightarrow 12 = -24\cos\theta$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} = \cos\theta$$

Como $\theta$ está entre 0 e 180° pois é um ângulo de triângulo, então:

$$\theta = 120°$$

**Gabarito: "a".**

---

**73. (ESA/2011)**

**Um terreno de forma triangular tem frentes de $20$ metros e $40$ metros, em ruas que formam, entre si, um ângulo de $60°$. Admitindo-se $\sqrt{3} = 1,7$, a medida do perímetro do terreno, em metros, é**

**a) $94$.**

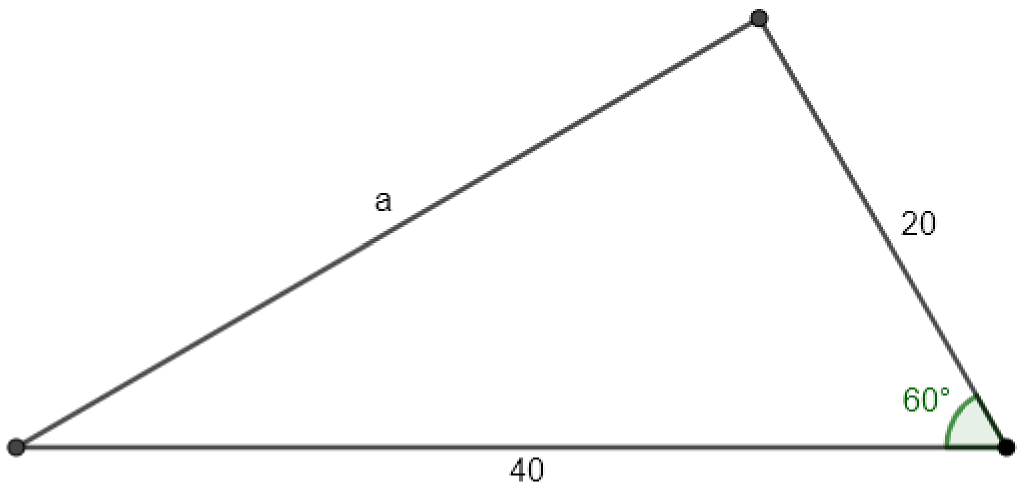
**b) $93$.**

**c) $92$.**

**d) $91$.**

**e) $90$.**

**Comentário:**




Usando a leis dos cossenos, temos:

$$a^2 = 40^2 + 20^2 - 2 \cdot 40 \cdot 20 \cdot \cos 60° = 1600 + 400 - 1600 \cdot \frac{1}{2} = 1200$$

$$\therefore a = 20\sqrt{3} = 20 \cdot 1{,}7 = 34$$

Logo, o perímetro do triângulo é

$$P = 40 + 20 + a = 40 + 20 + 34 = 94.$$

**Gabarito: “a”.**

**74. (ESA/2007) [Adaptada]**

**Seja um ponto $P$ pertencente a um dos lados de um ângulo de $60°$, distante $4,2$ $cm$ do vértice. Qual é a distância, em $cm$, deste ponto à bissetriz do ângulo?**

**a) $2,2$**

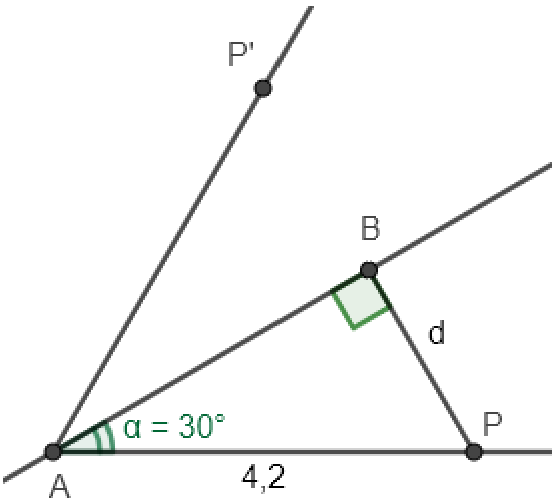
**b) $2,1$**

**c) $2,0$**

**d) $2,3$**

**e) $2,4$**

**Comentário:**




No triângulo retângulo $\Delta ABP$, temos:

$$\text{sen } P\hat{A}B = \frac{BP}{AP} \Leftrightarrow \text{sen } 30° = \frac{d}{4{,}2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{d}{4{,}2} \therefore d = 2{,}1$$

**Gabarito: “b”.**

**75. (ESA/2006)**

**O triângulo $ABC$ retângulo em $A$ e que $\angle ABC > \angle ACD$. A bissetriz interna de $\hat{A}$ intercepta o lado BC em D. Seja $HD \perp BC$ ($H$ entre $A$ e $C$). Nestas condições podemos afirmar que o ângulo HBD mede, em graus:**

**a) 35**

**b) 25**

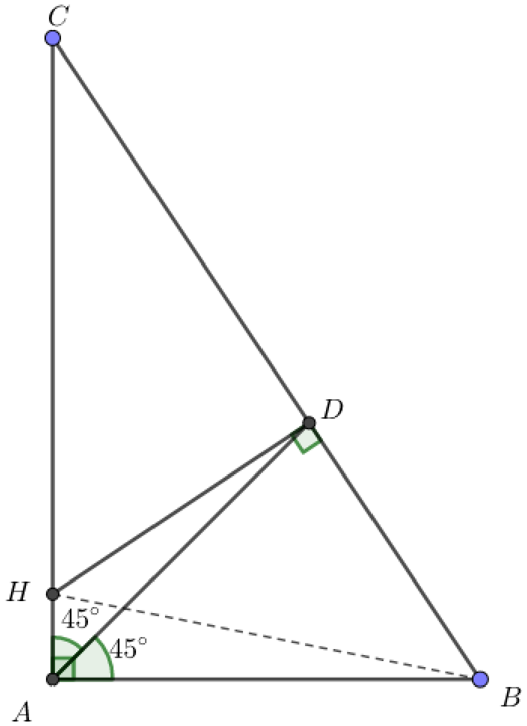
**c) 45**

**d) 65**

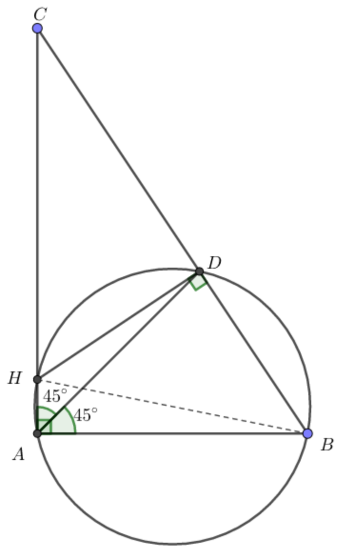
**e) 55**

**Comentários**

Fazendo o desenho do que é descrito no enunciado:




Veja na figura o quadrilátero $ADHB$. Seus ângulos opostos $\angle BAH$ e $\angle HDB$ são retos. Portanto, podemos afirmar categoricamente que o quadrilátero $AHDB$ é inscritível em uma circunferência, e mais: Por $\angle BAH = \angle HDB = 90°$, o diâmetro dessa circunferência é $HB$. Essa circunferência pode ser vista abaixo:




Por esse motivo, veja que o ângulo que se pede $\angle HBD$ é o ângulo inscrito que olha para o arco $HD$. Entretanto veja que o ângulo inscrito $\angle HAD = 45°$ também olha para o mesmo arco. Isso implica que eles são iguais:

$$\angle HBD = \angle HAD = 45°$$

**Gabarito: "c".**

**76. (ESA/2004)**

**A soma dos lados de um triângulo ABC é 140cm. A bissetriz interna do ângulo A divide o segmento oposto BC em dois outros segmentos: 20cm e 36cm. As medidas dos lados AB e AC são, respectivamente:**

**a) 42cm e 42cm**

**b) 60cm e 24cm**

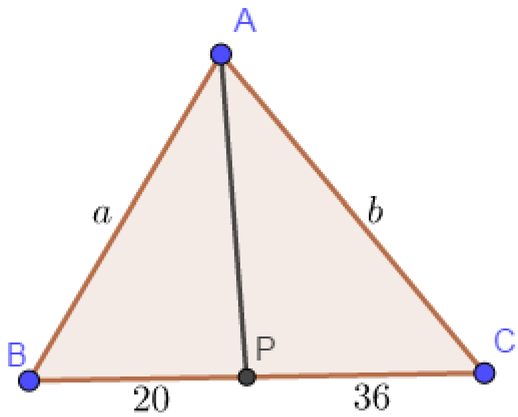
**c) 34cm e 50cm**

**d) 32cm e 52cm**

**e) 30cm e 54cm**

**Comentários**

Fazendo o desenho do triângulo e bissetriz, temos:




Dessa maneira, usando teorema da bissetriz interna:

$$\frac{a}{b} = \frac{20}{36} \Rightarrow 5b = 9a$$

Por outro lado:

$$a + b + 56 = 140 \Rightarrow a + b = 84 \Rightarrow 5a + 5b = 420 \Rightarrow 14a = 420$$
$$\Rightarrow a = 30 \Rightarrow b = 54$$

**Gabarito: "e".**

---

**77. (ESPCEX/2021)**

**Os lados AB, AC e BC de um triângulo ABC medem, respectivamente, 4cm, 4cm e 6cm. Então a medida, em cm, da mediana relativa ao lado AB é igual a:**

**a)** $\sqrt{14}$

**b)** $\sqrt{17}$

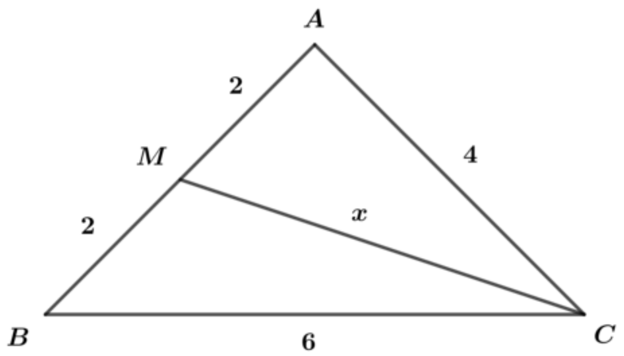
**c)** $\sqrt{18}$

**d)** $\sqrt{21}$

**e)** $\sqrt{22}$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos:




Para calcular o valor da mediana, podemos aplicar a relação de Stewart:

$$ax^2 + amn = b^2m + c^2n$$

Nesse caso, temos $a = 4, m = n = 2, b = 4$ e $c = 6$. Logo:

$$4x^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2 = 4^2 \cdot 2 + 6^2 \cdot 2$$

$$4x^2 + 4 \cdot 4 = 4 \cdot 8 + 18 \cdot 4$$

$$x^2 + 4 = 8 + 18$$

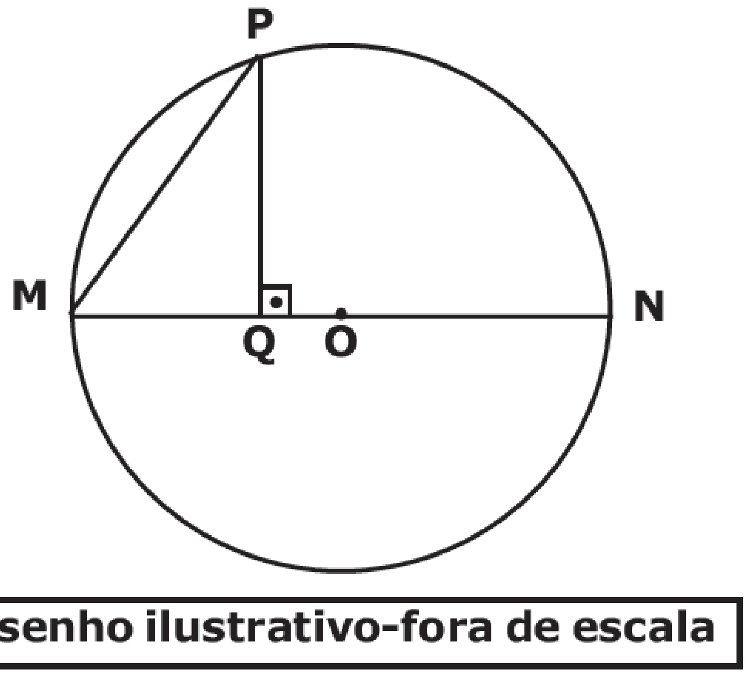
$$x^2 = 22$$

$$\therefore x = \sqrt{22}$$

**Gabarito: E**

**78. (EsPCEx/2016)**

**Na figura, o raio da circunferência de centro $O$ é $\frac{25}{2}$ $cm$ e a corda $MP$ mede 10 $cm$.**



**A medida, em centímetros, do segmento $PQ$ é**

a) $\frac{25}{2}$

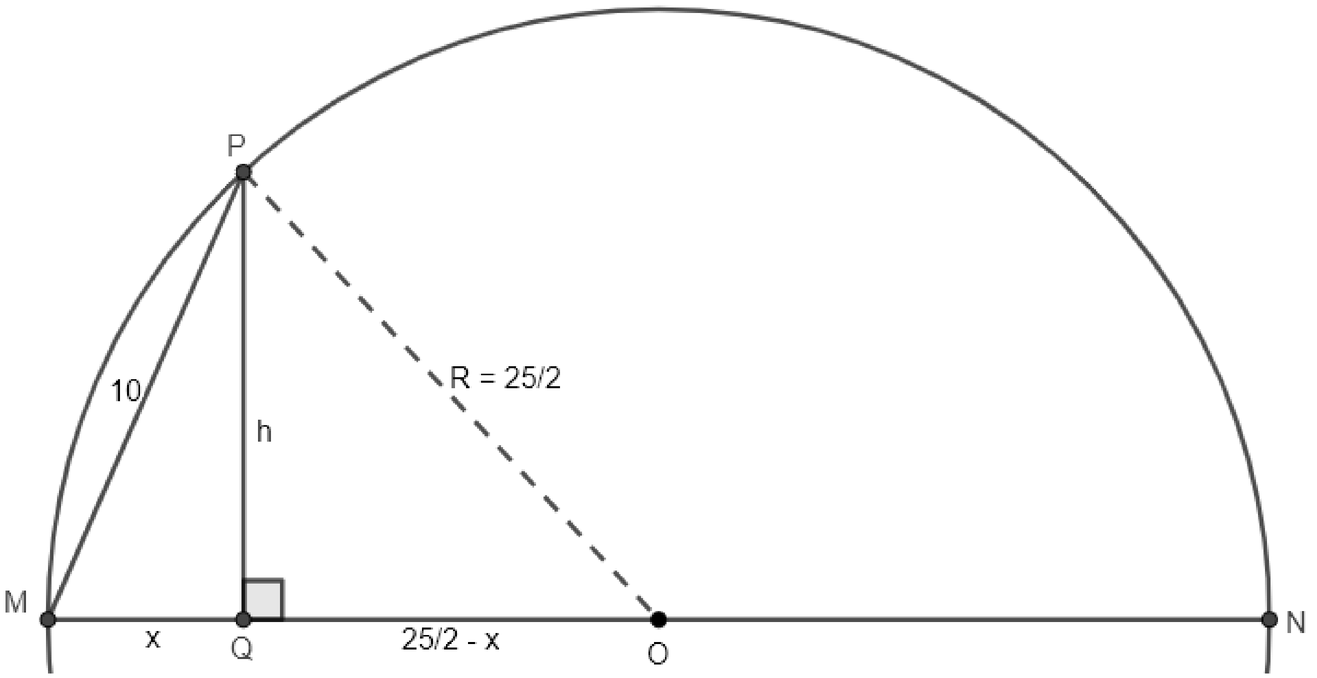
b) $10$

c) $5\sqrt{21}$

d) $\sqrt{21}$

e) $2\sqrt{21}$

**Comentário:**




Vamos calcular o valor de $h = PQ$ utilizando o teorema de Pitágoras.

No triângulo $\Delta MQP$:

$$10^2 = h^2 + x^2$$

No triângulo $\Delta OQP$:

$$\left(\frac{25}{2}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{25}{2} - x\right)^2$$

Fazendo a diferença entre as duas equações, e usando que $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$, temos:

$$10^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2 = x^2 - \left(\frac{25}{2} - x\right)^2 \Leftrightarrow \left(10 - \frac{25}{2}\right)\left(10 + \frac{25}{2}\right) = \left(x - \left(\frac{25}{2} - x\right)\right)\left(x + \left(\frac{25}{2} - x\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2} \cdot \frac{45}{2} = \left(2x - \frac{25}{2}\right) \cdot \frac{25}{2} \Leftrightarrow -225 = (4x - 25) \cdot 25 \Leftrightarrow -9 = 4x - 25 \Leftrightarrow 4x = 16$$

$$\therefore x = 4.$$

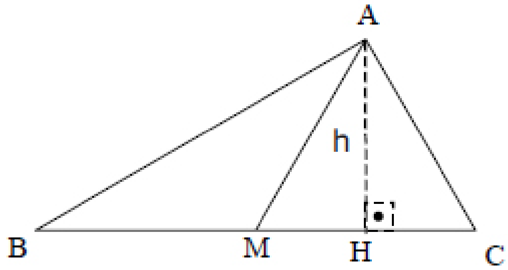
Retornando esse valor na primeira equação, temos:

$$10^2 = h^2 + 4^2 \Leftrightarrow 100 = h^2 + 16 \Leftrightarrow h^2 = 84 \therefore h = 2\sqrt{21}.$$

**Gabarito: "e".**

**79. (EsPCEx/2007)**

**No triângulo $ABC$, a base $\overline{BC}$ mede $8\ cm$, o ângulo $\widehat{B}$ mede $30°$ e o segmento $\overline{AM}$ é congruente ao segmento $\overline{MC}$, sendo $M$ o ponto médio de $\overline{BC}$. A medida, em centímetros, da altura $h$, relativa ao lado $\overline{BC}$ do triângulo $ABC$, é de**




**a) $\sqrt{2}\ cm$**

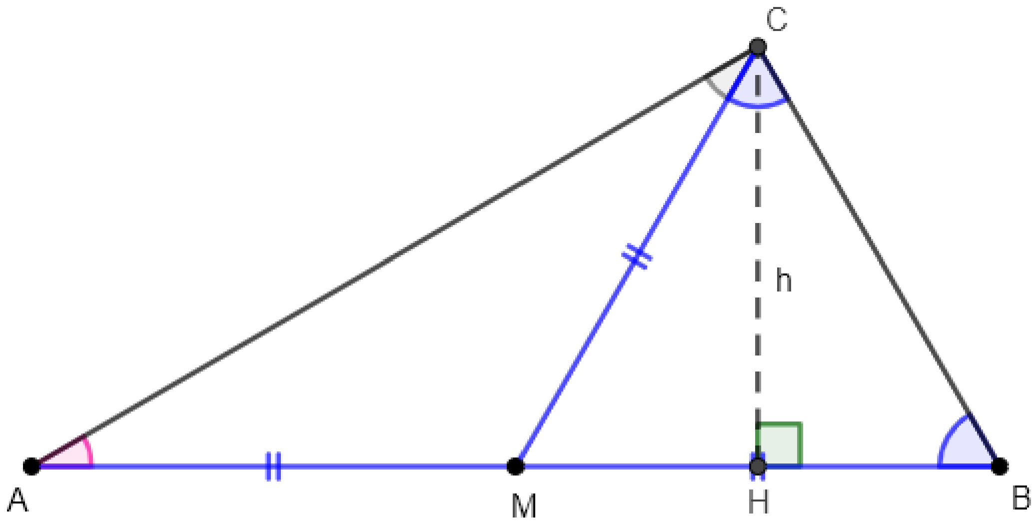
**b) $2\sqrt{2}\ cm$**

**c) $\sqrt{3}\ cm$**

**d) $2\sqrt{3}\ cm$**

**e) $3\sqrt{3}\ cm$**

**Comentário:**




Sendo $M$ o ponto médio de $\overline{BC}$, temos que $\overline{BM} = \overline{MC}$.

Do enunciado, $\overline{AM} = \overline{MC}$. Portanto, $\overline{AM} = \overline{BM} \Rightarrow \Delta MAB$ é isósceles de base $\overline{AB} \Rightarrow M\hat{A}B = M\hat{B}A = 30°$.

Pelo teorema do ângulo externo, temos que $C\widehat{M}A = M\hat{A}B + M\hat{B}A = 30° + 30° = 60°$.

Como $\overline{AM} = \overline{MC}$, temos que $\Delta MAC$ é isósceles de base $\overline{AC} \Rightarrow M\hat{A}C = M\hat{C}A = \alpha$.

A soma dos ângulos do $\Delta MAC$ deve ser $180° \Rightarrow 180° = M\hat{A}C + M\hat{C}A + C\hat{M}A = \alpha + \alpha + 60° \Leftrightarrow 2\alpha + 60° = 180° \therefore \alpha = 60°$. Portanto, o triângulo $\Delta MAC$ é equilátero.

Como $\overline{BM} = \overline{MC}$ e $\overline{BC}$ mede $8\ cm$, temos que $MC = 4\ cm$ é o lado do triângulo equilátero $\Delta MAC$.

A altura de um triângulo equilátero, dado seu lado $l$, é $\frac{l\sqrt{3}}{2}$. Portanto $h = \overline{AH}$, na figura, vale:

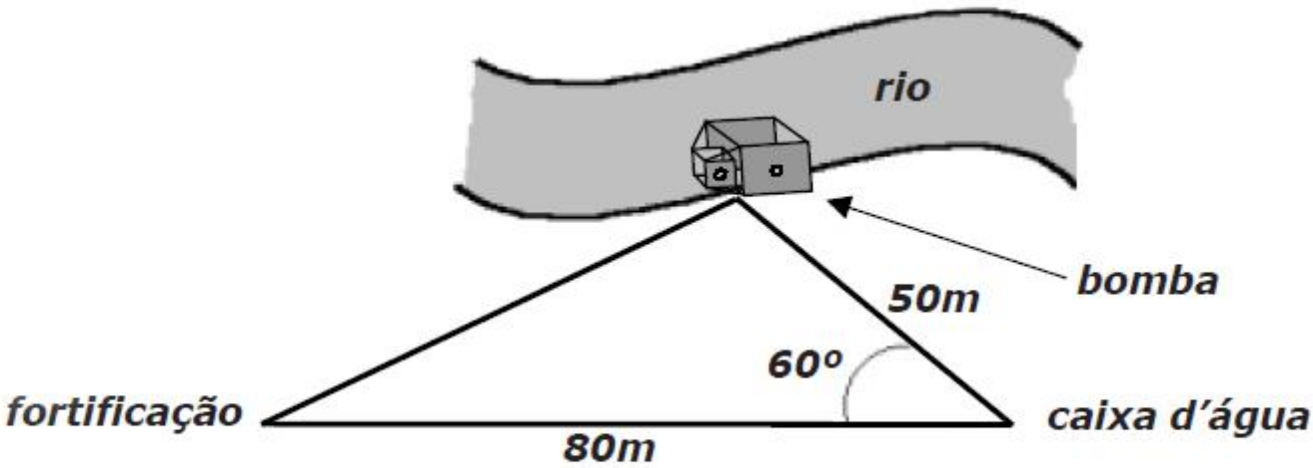
$$h = \frac{\overline{MC}\sqrt{3}}{2} = \frac{(4\ cm)\cdot\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ cm.$$

**Gabarito: "d".**

---

**80. (EsPCEx/2005)**

**A água utilizada em uma fortificação é captada e bombeada do rio para uma caixa d'água localizada a $50\ m$ de distância da bomba. A fortificação está a $80\ m$ de distância da caixa d'água e o ângulo formado pelas direções bomba – caixa d'água e caixa d'água – fortificação é de $60°$, conforme mostra a figura abaixo.**




**Para bombear água do mesmo ponto de captação, diretamente para a fortificação, quantos metros de tubulação são necessários?**

**a) $54$ metros.**

**b) $55$ metros.**

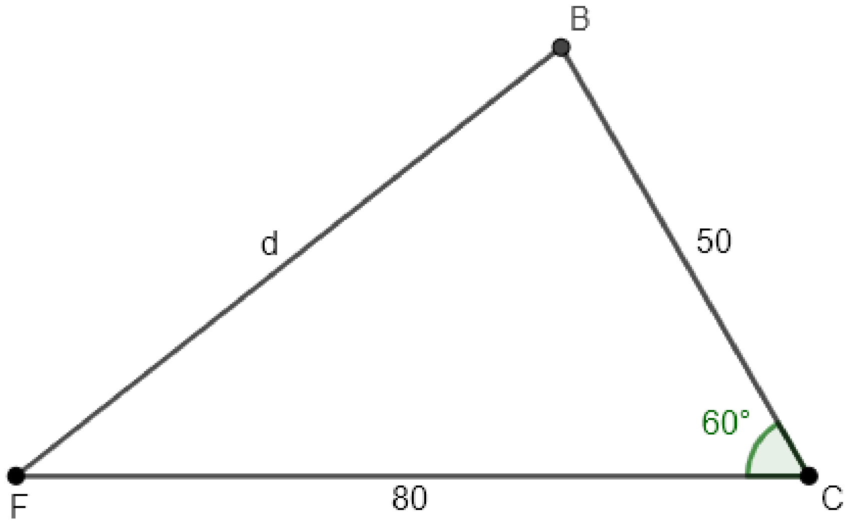
**c) $65$ metros.**

**d) $70$ metros.**

**e) $75$ metros.**

**Comentário:**

O resultado segue pela lei dos cossenos. Na figura a seguir, $B$ é a bomba, $C$ é a caixa d'agua e $F$ é a fortificação.




Pela lei dos cossenos,

$$d^2 = \overline{BC}^2 + \overline{FC}^2 - 2 \cdot \overline{BC} \cdot \overline{FC} \cdot \cos\alpha \Leftrightarrow d^2 = 50^2 + 80^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos 60°$$

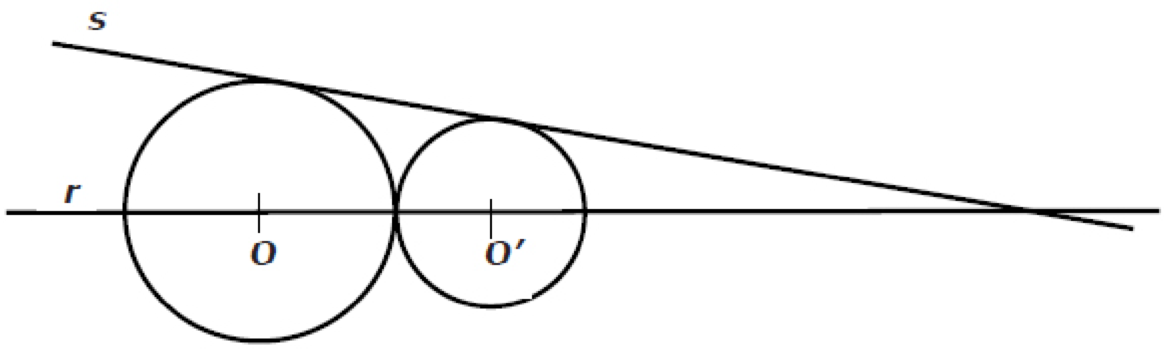
$$= 2500 + 6400 - 8000 \cdot \frac{1}{2} = 4900 \therefore d = \sqrt{4900} = 70.$$

Resposta: a distância $d$ entre a bomba e a fortificação é, em linha reta, de $70$ metros.

**Gabarito: "d".**

---

**81. (EsPCEx/2005)**




**Na figura, as circunferências são tangentes entre si e seus raios estão na razão $\frac{1}{3}$. Se a reta $r$ passa pelos centros $O$ e $O'$ das duas circunferências, e a reta $s$ é tangente a ambas, então o menor ângulo formado por essas duas retas mede**

**a) $\text{arcsen}\,\frac{1}{3}$**

**b) $\text{arctg}\,\frac{1}{2}$**

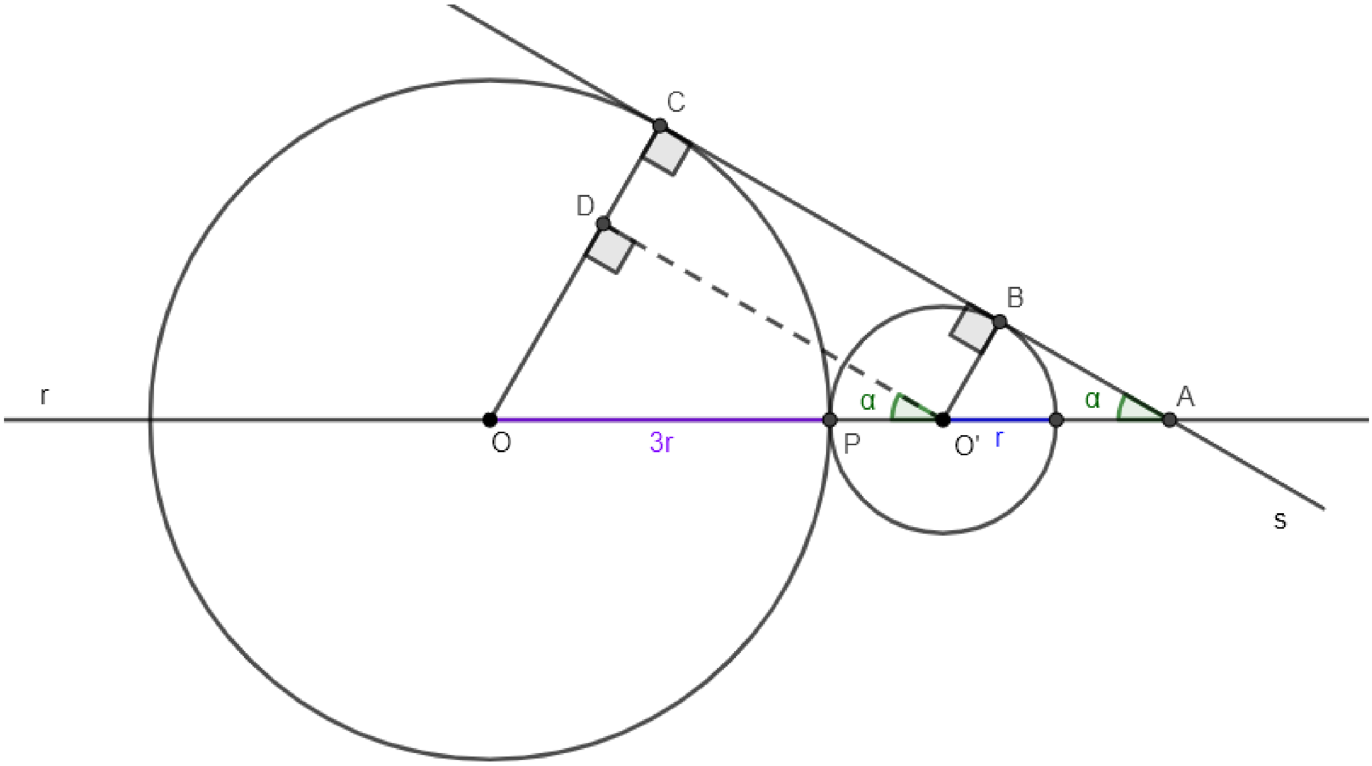
**c) $60°$**

**d) $45°$**

**e) $30°$**

**Comentário:**

Uma representação mais fidedigna da situação seria:




Sendo a razão entre os raios $\frac{1}{3}$, podemos dizer que o menor mede $r$ e o maior mede $3r$. Sejam $B$ e $C$ os pontos de tangência na reta $s$ das circunferências menor e maior, respectivamente. Seja $D$ a projeção sobre $OC$ de $O'$. Temos $O\widehat{O'}D = O\hat{A}C = \alpha$. Então:

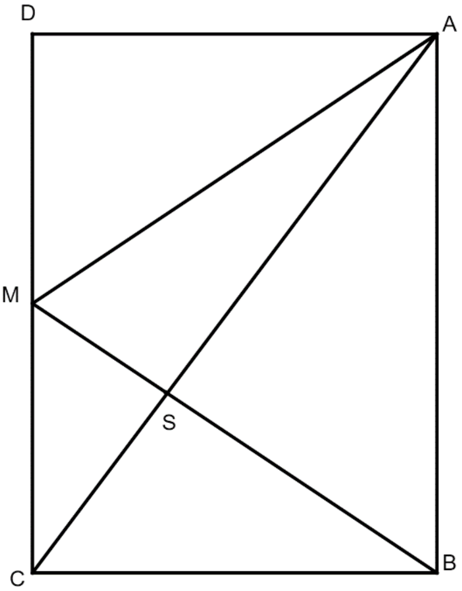
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{OD}{OO'} = \frac{OC - DC}{OP + PO'} = \frac{OC - O'B}{OP + O'P} = \frac{3r - r}{3r + r} = \frac{2r}{4r} = \frac{1}{2} \therefore \alpha = 30°$$

**Gabarito: "e".**

---

**82. (Tópicos de Matemática)**

**Na figura $ABCD$ é um retângulo, $M$ é o ponto médio de $CD$ e o triângulo $ABM$ é equilátero. Se $AB = 15m$, calcule $BS$.**




**Comentários**

Como o triângulo $ABM$ é equilátero, temos $BM = MA = AB = 15$.

Além disso, dado que $M$ é ponto médio de $CD$, temos $DM = MC = 7{,}5$.

Seja $BS = x$, então $MS = BM - BS = 15 - x$.

Veja que os triângulos $ABS$ e $CSM$ são semelhantes pelo caso $AA$, então temos:

$$\frac{MS}{BS} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{15 - x}{x} = \frac{7{,}5}{15} = \frac{1}{2} \Rightarrow 30 - 2x = x \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow x = 10$$

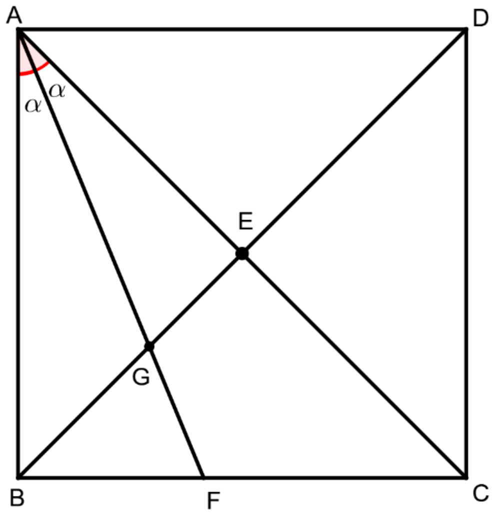
Portanto $BS = 10$.

**Gabarito: $\boldsymbol{BS = 10}$**

---

**83. (Tópicos de Matemática)**

**Em um quadrado $ABCD$, $AC$ e $BD$ se interceptam em $E$. O ponto $F$ sobre $BC$ é tal que os ângulos $C\hat{A}F$ e $F\hat{A}B$ são iguais, se $AF$ intersecta $BD$ em $G$ e se $EG = 24$, determine $CF$.**




**Comentários**

Como $AC$ é diagonal do quadrado, temos $2\alpha = 45°$ e o $\Delta ABE$ é retângulo em $E$. Dessa forma, temos:

$$\Delta ABF \Rightarrow tg\alpha = \frac{BF}{AB}\ (I)$$

$$\Delta AEG \Rightarrow tg\alpha = \frac{EG}{EA}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{BF}{AB} = \frac{EG}{EA}$$

Mas $EA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$ e $EG = 24$, logo:

$$\frac{BF}{AB} = \frac{24}{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boxed{BF = 24\sqrt{2}}$$

Além disso, de $(I)$:

$$AB = \frac{BF}{tg\alpha}\ (II)$$

Sabendo que:

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga\, tgb}$$

Sendo $a = b = 22{,}5° = \alpha$, temos:

$$tg\ 45° = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$$

$$tg\alpha = -1 \pm \sqrt{2}$$

Mas $0° < \alpha < 90°$, logo, $tg\alpha > 0$. Assim:

$$tg\alpha = \sqrt{2} - 1$$

Substituindo em $(II)$:

$$AB = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\boxed{AB = 24 \cdot (2 + \sqrt{2}) = BC}$$

Por fim:

$$CF = BC - BF = 24 \cdot (2 + \sqrt{2}) - 24\sqrt{2}$$

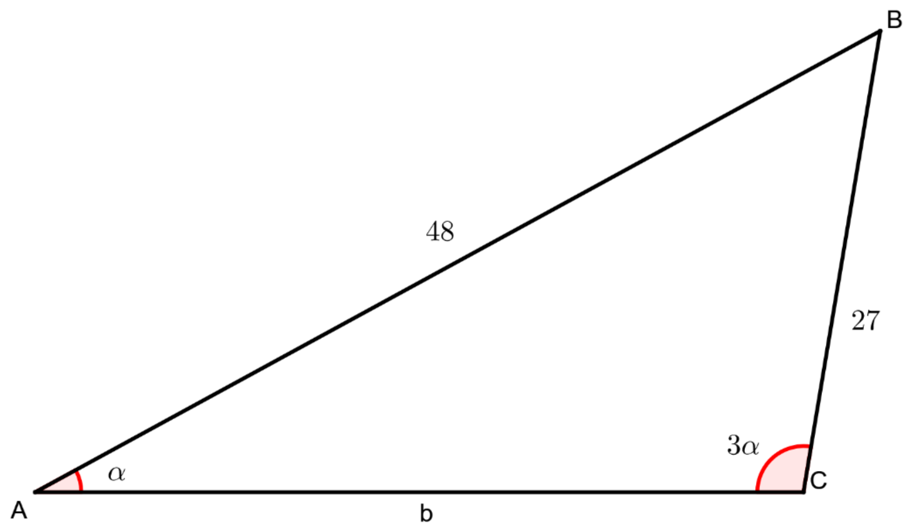
$$\boxed{CF = 48}$$

**Gabarito: $CF = 48$**

---

**84. (Tópicos de Matemática)**

**No triângulo $ABC$ (obtusângulo) da figura abaixo, determine a medida $b$ do lado $AC$.**




**Comentários**

Pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{27}{sen\ \alpha} = \frac{48}{sen\ 3\alpha} = \frac{b}{sen\ (180 - 4\alpha)} = \frac{b}{sen\ 4\alpha}$$

Mas $sen\ 3\alpha$ pode ser escrito como:

$$sen\ 3\alpha = sen\ \alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot sen\ 2\alpha$$

$$sen\ 3\alpha = sen\ \alpha \cdot (2cos^2\ \alpha - 1) + 2\ sen\ \alpha \cdot cos^2\ \alpha$$

$$\Rightarrow sen\ 3\alpha = sen\ \alpha \cdot (4cos^2\ \alpha - 1)$$

Substituindo $sen\ 3\alpha$ na razão encontrada acima, temos:

$$\frac{27}{sen\ \alpha} = \frac{48}{sen\ 3\alpha} \Rightarrow \frac{27}{sen\ \alpha} = \frac{48}{sen\ \alpha \cdot (4cos^2\ \alpha - 1)}$$

Sendo $\alpha$ ângulo interno do triângulo, temos $sen\ \alpha \neq 0$, logo:

$$4cos^2\ \alpha - 1 = \frac{48}{27} = \frac{16}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{6}$$

Podemos escrever $sen\ 4\alpha$ como:

$$sen\ 4\alpha = 2sen\ 2\alpha \cos 2\alpha$$

$$sen\ 4\alpha = 4\ sen\ \alpha \cdot \cos\alpha \cdot (2cos^2\ \alpha - 1)$$

Substituindo $sen\ 4\alpha$ e $cos\ \alpha$ temos:

$$\frac{27}{sen\ \alpha} = \frac{b}{sen\ 4\alpha} \Rightarrow \frac{27}{sen\ \alpha} = \frac{b}{4\ sen\ \alpha \cdot \cos\alpha \cdot (2cos^2\ \alpha - 1)}$$

$$b = 4 \cdot 27 \cdot \cos\alpha \cdot (2cos^2\ \alpha - 1)$$

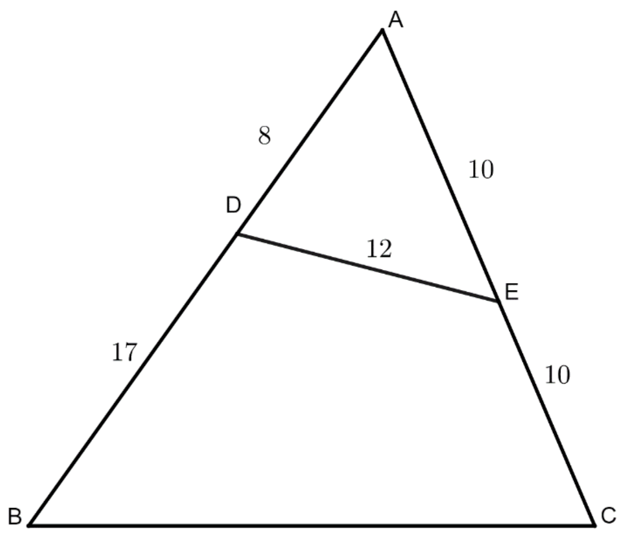
$$b = 4 \cdot 27 \cdot \frac{5}{6} \cdot \left(2\frac{25}{36} - 1\right) = 35$$

**Gabarito: $b = 35$**

---

**85. (Tópicos de Matemática)**

**No triângulo $ABC$ da figura abaixo, determine a medida do lado $BC$.**




**Comentários**

Perceba as seguintes relações:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{10}{8+17} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{AD}{AC} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

Então, pelo caso $LAL$, os triângulos $ADE$ e $ACB$ são semelhantes. Portanto:

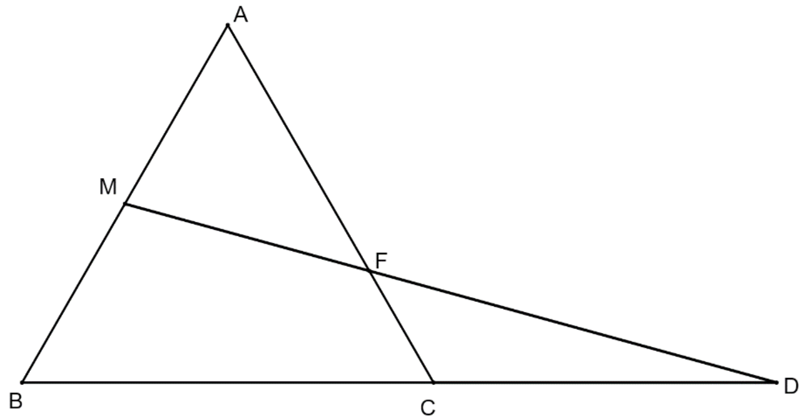
$$\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{12}{BC} = \frac{2}{5} \Rightarrow BC = 30$$

**Gabarito: $BC = 30$**

---

**86. (Mack/1978)**

**O triângulo $ABC$ da figura é equilátero. $AM = MB = 10$ e $CD = 12$. Calcule o valor de $FC$.**




**Comentários**

Como o triângulo $ABC$ é equilátero, temos:

$$AB = BC = CA = 20$$

Assim:

$$BD = BC + CD = 20 + 12 = 32$$

Pelo teorema de Menelaus, temos que:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{32}{12} \cdot \frac{CF}{20 - CF} \cdot \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow 8CF = 3(20 - CF) \Rightarrow \boxed{FC = \frac{60}{11}}$$

**Gabarito: $FC = \frac{60}{11}$**

---

**87. (CN/2019)**

**A circunferência $\lambda$, inscrita no triângulo retângulo ABC, tangencia a hipotenusa BC, dividindo-a em dois segmentos de reta de medidas $'p'$ e $'q'$, a partir desse ponto de tangência. A média geométrica dos catetos $'b'$ e $'c'$ desse triângulo é igual a:**

**a)** $(pq)^2$

**b)** $(2pq)^2$

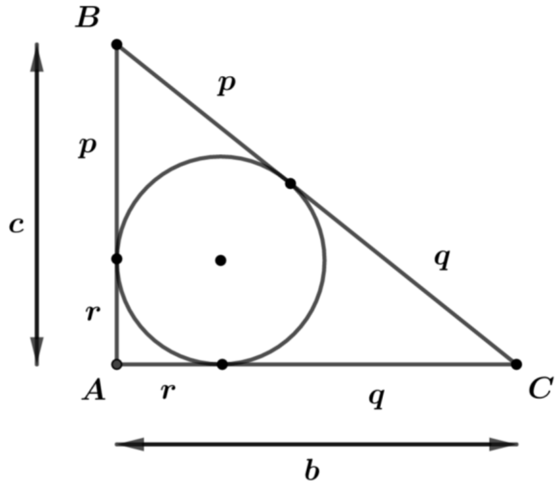
**c)** $\sqrt{pq}$

d) $\sqrt{2pq}$

e) $\sqrt{\frac{pq}{2}}$

**Comentários**

Observe a seguinte figura:




Queremos:

$$\sqrt{bc}$$

Da figura, podemos escrever:

$$r = c - p = b - q \Rightarrow c - b = p - q \Rightarrow c^2 + b^2 - 2bc = (p - q)^2$$

Além disso, do teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = (p + q)^2$$

Logo, temos que:

$$(p + q)^2 - 2bc = (p - q)^2 \Rightarrow (p + q)^2 - (p - q)^2 = 2bc$$

Fatorando o lado esquerdo:

$$(p + q + p - q)(p + q - p + q) = 2bc \Rightarrow 4pq = 2bc \Rightarrow bc = 2pq$$

Do que segue que:

$$\sqrt{bc} = \sqrt{2pq}$$

**Gabarito: "d".**

---

**88. (CN/2017)**

**Analise as afirmativas a seguir.**

**I. Sejam $a, b$ e $c$ lados de um triângulo, com $c > b > a$. Pode-se afirmar que $c^2 = a^2 + b^2$ se, e somente se, o triângulo for retângulo.**

**II. Se um triângulo é retângulo, então as bissetrizes internas dos ângulos agudos formam entre si um ângulo de 45° ou 135°.**

**III. O centro de um círculo circunscrito a um triângulo retângulo está sobre um dos catetos.**

**IV. O baricentro de um triângulo retângulo é equidistante dos lados do triângulo.**

**Assinale a opção correta.**

**a) Somente I e II são verdadeiras.**

**b) Somente II e III são verdadeiras.**

**c) Somente I e IV são verdadeiras.**

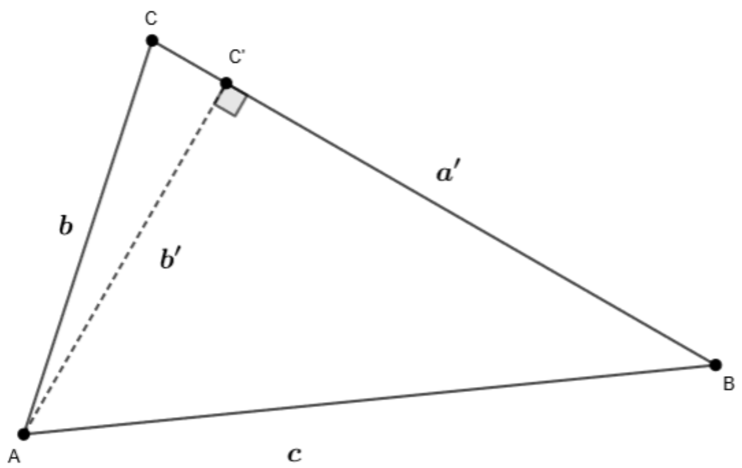
**d) Somente I, II e IV são verdadeiras.**

**e) As afirmativas I, II, III e IV são verdadeiras.**

**Comentários**

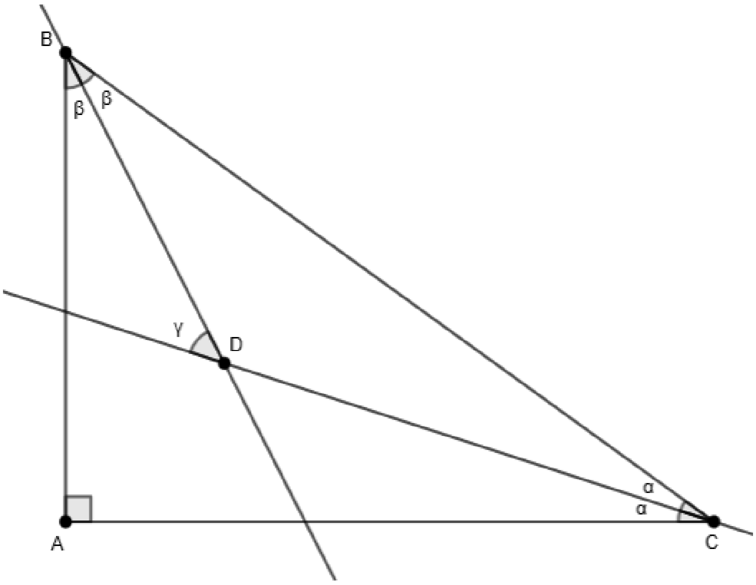
Vamos analisar cada afirmativa.

I. Se um triângulo é retângulo, o teorema de Pitágoras nos garante que $c^2 = a^2 + b^2$. Suponha então, por absurdo, que $c^2 = a^2 + b^2$ e o triângulo é acutângulo:




Veja que $b' < b$ e $a' < BC = a$, ou seja, $a'^2 + b'^2 < a^2 + b^2 = c^2$. Mas isso é um absurdo, pois no triângulo retângulo $\Delta ABC'$ também vale que $a'^2 + b'^2 = c^2$.
Um argumento análogo funciona para um triângulo obtusângulo.
Portanto, a afirmativa é verdadeira.

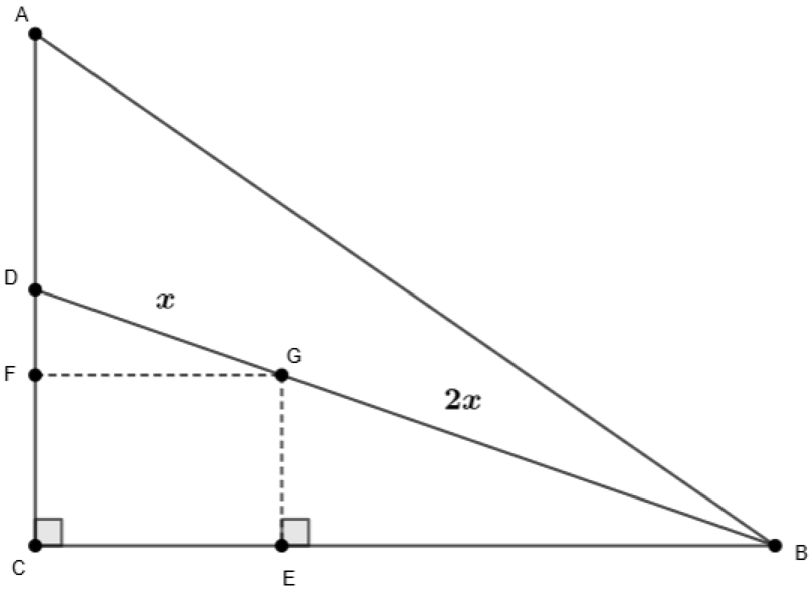
II. Observe a figura abaixo:




Temos que $2\beta + 2\alpha = 90 \Rightarrow \beta + \alpha = 45°$. Além disso, pela propriedade do ângulo externo $\beta + \alpha = \gamma = 45°$.
Logo, é verdadeira.

III. Do estudo da geometria plana, sabemos que o centro está sobre a hipotenusa. Portanto, falsa.

IV. Observe o seguinte esquema:




Veja que a distância do baricentro $G$ ao lado $AC$ é a medida do seguimento $GF = CE$. Seja $BC = a$, da semelhança entre os triângulos $\Delta DCB$ e $\Delta EBG$, temos:

$$\frac{BE}{a} = \frac{2x}{3x} \Rightarrow BE = \frac{2}{3}a$$

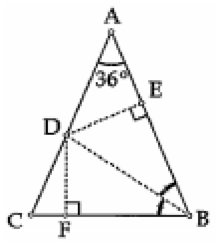
Mas $BE + CE = BC \Rightarrow \frac{2}{3}a + CE = a \Rightarrow CE = \frac{a}{3} \Rightarrow GF = \frac{a}{3}$.

Se $AC = b$, podemos concluir, com argumento análogo, que a distância do baricentro ao lado $BC$ vale $\frac{b}{3}$. Logo, se $a \neq b$, a afirmação é falsa.

**Gabarito: "a".**

**89. (CN/2017)**

**Observe a figura a seguir.**




**A figura a acima mostra um triângulo isósceles ABC, com BÂC = 36° e AB = AC = 1 m. A bissetriz interna de B corta AC em D. Por D, traçam-se as distâncias até AB e até BC, determinando os pontos E e F, respectivamente. Sendo assim, é correto afirmar que o valor do produto $\frac{DE}{AD}\cdot\frac{DF}{BF}$ é**

**a)** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

**b)** $\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

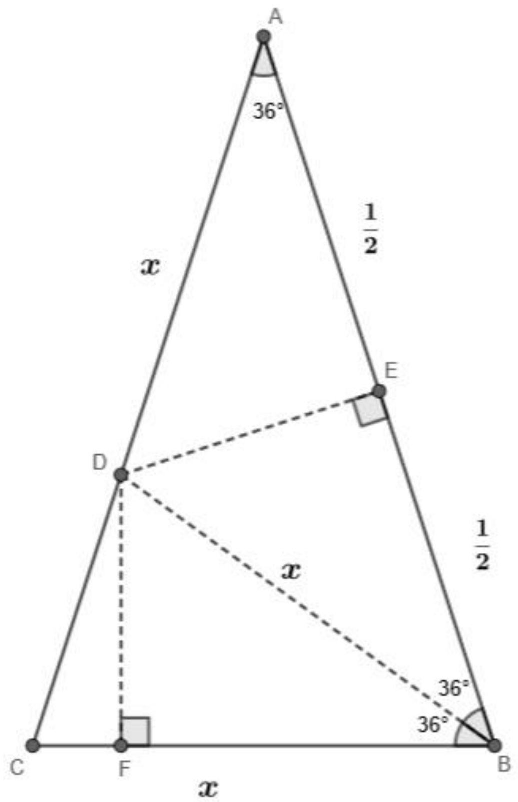
**c)** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

**d)** $\frac{3\sqrt{5}-1}{2}$

**e)** $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$

**Comentários**

Observe a figura abaixo:



Nela, foram destacadas algumas relações provenientes da construção fornecida no enunciado.

Os triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta CBD$ são semelhantes pelo caso $AAA$. Disso, podemos escrever que:

$$\frac{AC}{CB}=\frac{BD}{DC}\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}\Rightarrow x^2+x-1=0\ eq.01$$

Resolvendo para $x>0$, temos:

$$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Queremos $\frac{DE}{AD}\cdot\frac{DF}{BF}$. Pela congruência entre os triângulos $\Delta FDB, \Delta BDE\ e\ \Delta DEA$, temos que:

$$DE=DF=y$$

$$AD=x\ e\ BF=\frac{1}{2}$$

Ou seja, queremos na verdade:

$$\frac{y^2}{x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Por Pitágoras no $\Delta DEB$, vem:

$$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+y^2$$

Da $eq.01$:

$$x^2=1-x\Rightarrow x^2=1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Ou seja:

$$y^2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5-2\sqrt{5}}{4}$$

Logo:

$$\frac{y^2}{x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{5-2\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$$

**Gabarito: "b".**

---

**90. (CN/2016)**

**Analise as afirmativas abaixo:**

**I. Todo triângulo retângulo de lados inteiros e primos entre si possui um dos lados múltiplo de 5.**

**II. Em um triângulo retângulo, o raio do círculo inscrito é igual ao perímetro do triângulo menos a hipotenusa.**

**III. Há triângulos que não admitem triângulo órtico, ou seja, o triângulo formado pelos pés das alturas.**

**IV. O raio do círculo circunscrito a um triângulo retângulo é o dobro da hipotenusa.**

**Assinale a opção correta.**

**a) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.**

**b) Apenas as afirmativas I e IV são verdadeiras.**

**c) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.**

**d) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.**

**e) Apenas as afirmativas III e IV são verdadeiras.**

**Comentários**

Vamos analisar cada afirmação.

Afirmação I:

Verdadeira. Perceba que os restos possíveis da divisão de um quadrado perfeito por 5 são 0, 1 e 4:

$$1^2 = 1 \rightarrow resto\ 1$$
$$2^2 = 4 \rightarrow resto\ 1$$
$$3^2 = 9 \rightarrow resto\ 4$$
$$4^2 = 16 \rightarrow resto\ 1$$
$$5^2 = 25 \rightarrow resto\ 0$$
$$\vdots$$

Vamos supor que para tal triângulo não tenhamos lados múltiplo de 5, assim, temos que os restos possíveis serão 1 e 4. Pelo teorema de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Da divisão de $b^2$ e $c^2$ por 5, temos como possíveis restos:

| $b^2$ | $c^2$ |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 4 | 1 |
| 1 | 4 |
| 4 | 4 |

Assim, os restos possíveis de $a^2 = b^2 + c^2$ são:

| $b^2$ | $c^2$ | $a^2 = b^2 + c^2$ |
|---|---|---|

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 |
| 4 | 1 | 0 |
| 1 | 4 | 0 |
| 4 | 4 | 3 |

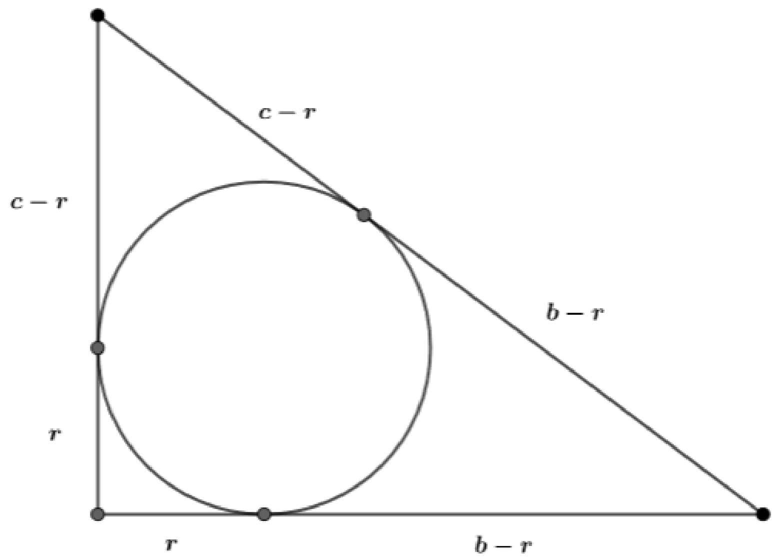
Perceba que o primeiro e o último restos não são valores válidos da divisão por 5, e o segundo e o terceiro mostram que o número é divisível por 5, o que é absurdo por hipótese. Portanto, concluímos que dadas as condições da afirmação, temos que um dos lados do triângulo sempre será múltiplo de 5.

Afirmação II:

Sejam $b$ $e$ $c$ os catetos do triângulo retângulo e $a$ sua hipotenusa. O perímetro do triângulo menos a hipotenusa corresponde à soma dos catetos, isto é, sendo $r$ o raio dessa circunferência, teríamos:

$$r = b + c$$

Observe a figura:




Disso, segue que

$$c - r + b - r = a \Rightarrow r = \frac{c + b - a}{2}$$

Comparando as duas formas de calcular o raio:

$$b + c = \frac{c + b - a}{2} \Rightarrow c + b = -a < 0$$

Que é um absurdo, pois $c + b > 0$.

Afirmação III:

É verdadeira, pois o triângulo retângulo possui duas alturas com pés coincidentes, do que não é possível formar um triângulo.

Afirmação IV:

O raio do círculo circunscrito é a METADE da hipotenusa. Logo, é falsa.

**Gabarito: “a”.**

---

**91. (CN/2015)**

**Qual a medida da maior altura de um triângulo de lados 3, 4 e 5?**

**a)** $\frac{12}{5}$

**b)** $3$

**c)** $4$

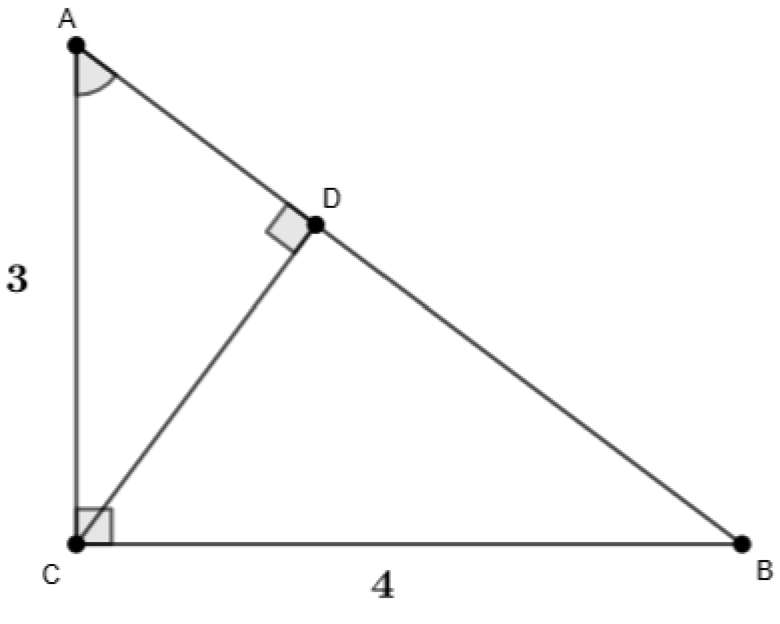
**d)** $5$

**e)** $\frac{20}{3}$

**Comentários**

Duas das alturas já são dadas pelo fato de o triângulo ser retângulo: os catetos.

Observe o esquema a seguir:




Da semelhança entre os triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta ADC$:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BC} \Rightarrow CD = \frac{BC \cdot AC}{AB} = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}$$

Veja que:

$$4 > 3 > \frac{12}{5}$$

**Gabarito: “c”.**

---

**92. (CN/2014)**

**Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados AC = $b$ e BC = $a$. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:**

a) $\frac{a^2}{b^2}$

b) $\frac{a^3}{b^2}$

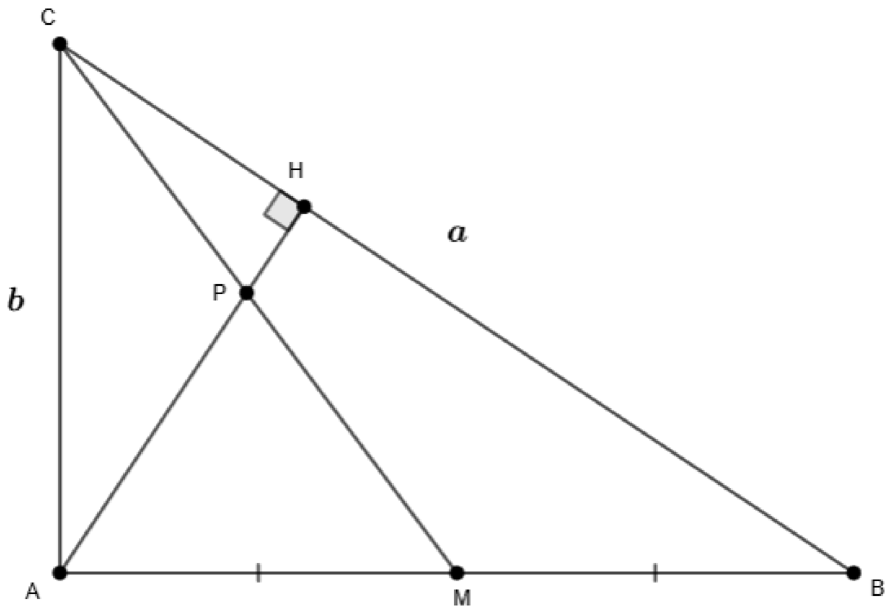
c) $\frac{a^2}{b^3}$

d) $\frac{a^3}{b^3}$

e) $\frac{a}{b}$

**Comentários**

Observe a figura abaixo:




Essa questão é uma aplicação direta do teorema de Menelaus ao triângulo $\Delta ABH$, isto é:

$$\frac{BC}{CH}\cdot\frac{HP}{PA}\cdot\frac{AM}{MB}=1$$

Veja que, como $M$ é ponto médio:

$$AM=MB\Rightarrow\frac{AM}{MB}=1$$

Além disso, da semelhança entre os triângulos $\Delta ABC$ e $\Delta AHC$:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}\Rightarrow\frac{CH}{BC}=\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{BC}{CH}=\frac{a^2}{b^2}$$

Por fim, temos que:

$$\frac{BC}{CH}\cdot\frac{HP}{PA}\cdot 1 = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PH} = \frac{BC}{CH} = \frac{a^2}{b^2}$$

**Gabarito: “a”.**

---

**93. (CN/2013)**

**Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.**

**I. Seja AB = $c$, AC = $b$ e BC = $a$. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$.**

**II. Seja AB = $c$, AC = $b$ e BC = $a$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.**

**III. Se M é ponto médio de BC e $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$, ABC é retângulo.**

**IV. Se ABC é retângulo, então o raio do seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.**

**Assinale a opção correta.**

**a) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.**

**b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.**

**c) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.**

**d) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.**

**e) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.**

**Comentários**

Vamos analisar cada afirmativa.

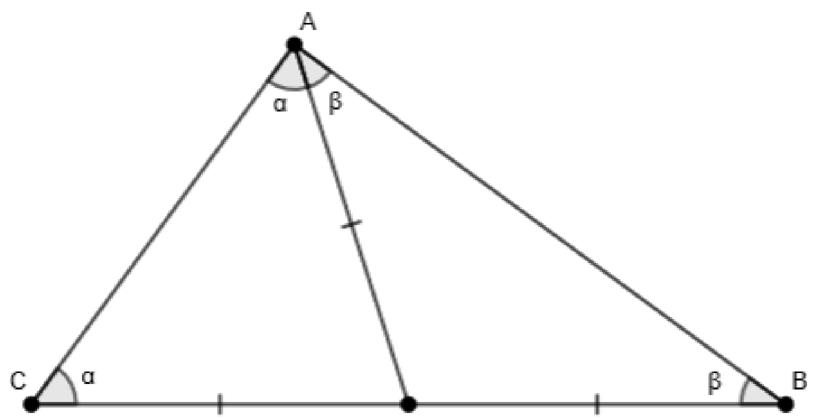
Afirmativa I:

Segue do próprio teorema de Pitágoras o resultado. Logo, é verdadeiro.

Afirmativa II:

Essa é a volta do Teorema de Pitágoras, logo, verdadeiro.

Afirmativa III:



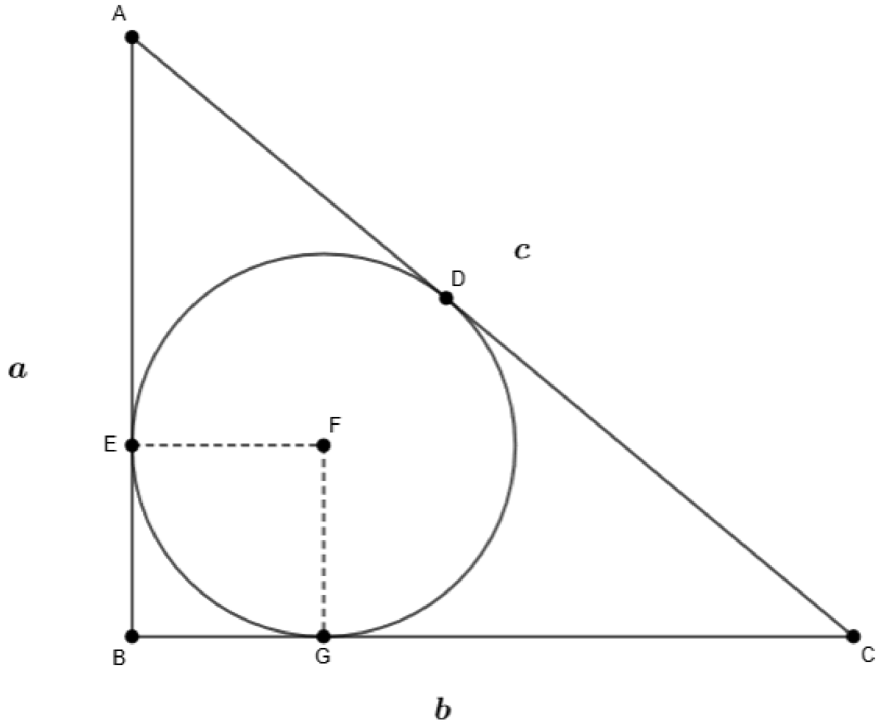

Do triângulo acima, temos:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

Ou seja, o ângulo $B\hat{A}C$ é reto. Portanto, a alternativa é verdadeira.

Afirmativa IV:

Suponha que seja possível.




Observe a figura. Do teorema do bico, temos que:

$$AE = AD \ e \ GC = CD$$

Mas:

$$EB = BG = \frac{3}{4}c$$

Ou seja:

$$AE = a - \frac{3}{4}c \ e \ GC = b - \frac{3}{4}c$$

Como $AD + CD = c \Rightarrow a - \frac{3}{4}c + b - \frac{3}{4}c \Rightarrow a + b = \frac{5}{2}c$.

Disso, temos que:

$$(a + b)^2 = \frac{25}{4}c^2 \Rightarrow ab = \frac{21}{8}c^2$$

Da desigualdade das médias:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = ab = \frac{21}{8}c^2$$

Do teorema de Pitágoras:

$$\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{c^2}{2}\geq\frac{21}{8}c^2\Rightarrow 0\geq c^2$$

Que é absurdo, pois $c>0$. Logo, é falsa.

**Gabarito: "d".**

---

**94. (CN/2010)**

**Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é k, pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será**

**a)** $\frac{5k}{2}$

**b)** $\frac{4k}{3}$

**c)** $\frac{4k}{5}$

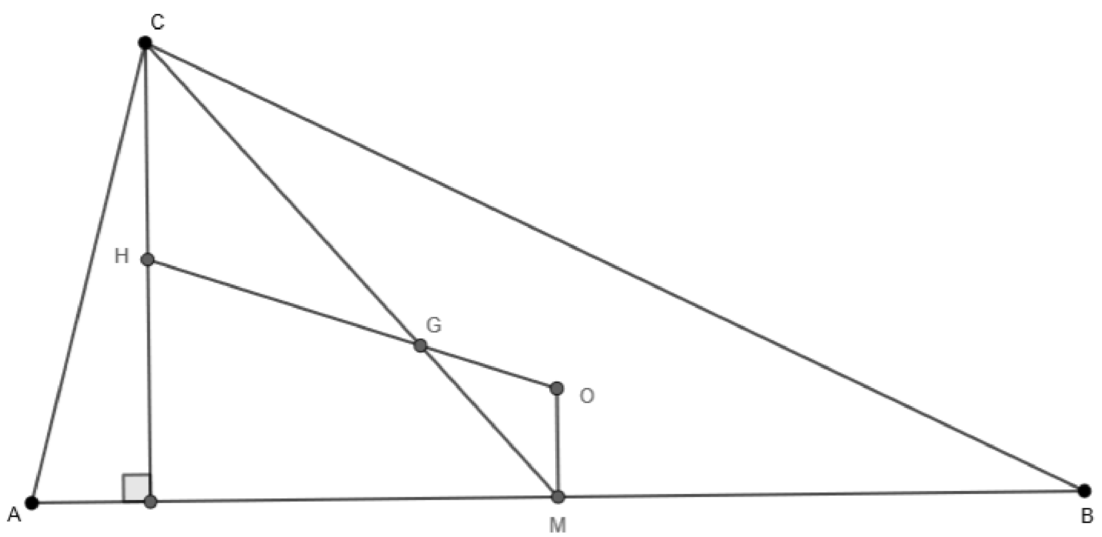
**d)** $\frac{k}{2}$

**e)** $\frac{k}{3}$

**Comentários**

O resultado de que os pontos notáveis do triângulo estão alinhados é conhecido como reta de Euler.

Sabe-se, do estudo da geometria plana, que o baricentro divide a mediana na razão de $2:1$. Dessa forma, observe a figura abaixo:




Do enunciado:

$$HO=k$$

Além disso, do que foi dito acima:

$$\frac{CG}{GM}=2$$

Os triângulos $\Delta HGC$ e $\Delta GMO$ são semelhantes pelo caso $LLL$. Disso, temos:

$$\frac{CG}{GM}=\frac{GH}{GO}=2\Rightarrow GH=2GO$$

Mas:

$$GH+GO=k\Rightarrow 2GO+GO=k\Rightarrow GO=\frac{k}{3}$$

**Gabarito: “e”.**

---

**95. (CN/2009)**

**Em um triângulo retângulo ABC, BD é a bissetriz interna relativa ao cateto maior AC e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Se o ponto I é a intersecção entre BD e AH, pode-se afirmar que $\frac{med(BH)}{med(IH)}$ é igual a:**

**a)** $\frac{med(BC)}{med(AH)}$

**b)** $\frac{med(BC)}{med(AD)}$

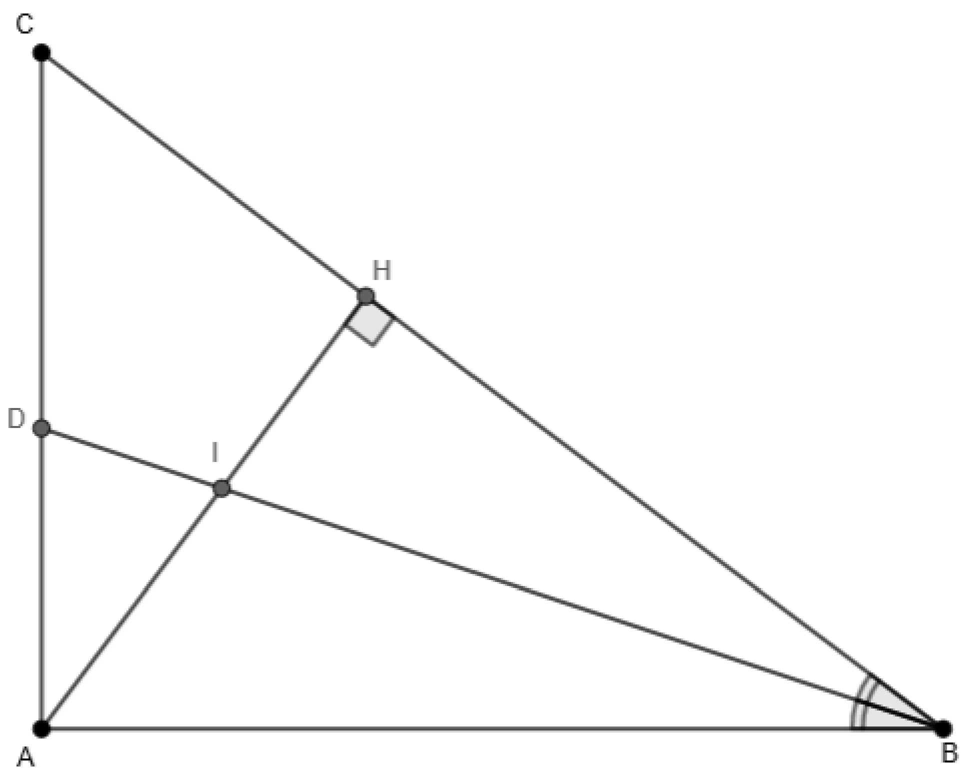
**c)** $\frac{med(BC)}{med(CD)}$

**d)** $\frac{med(AD)}{med(AI)}$

**e)** $\frac{med(AD)}{med(IH)}$

**Comentários**

Observe o esquema abaixo:



Os triângulos $\Delta HIB$ e $\Delta ABD$ são semelhantes $(AA)$, logo:

$$\frac{BH}{HI} = \frac{BA}{AD}$$

Aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo $\Delta ABC$, temos:

$$\frac{BA}{AD} = \frac{BC}{CD}$$

Por fim:

$$\frac{BH}{HI} = \frac{BA}{AD} = \frac{BC}{CD}$$

**Gabarito: "c".**

---

**96. (CN/2008)**

**Um triângulo retângulo, de lados expressos por números inteiros consecutivos, está inscrito em um triângulo equilátero T de lado x. Se o maior cateto é paralelo a um dos lados de T, pode-se concluir que x é aproximadamente igual a**

**a) 6,5**

**b) 7,0**

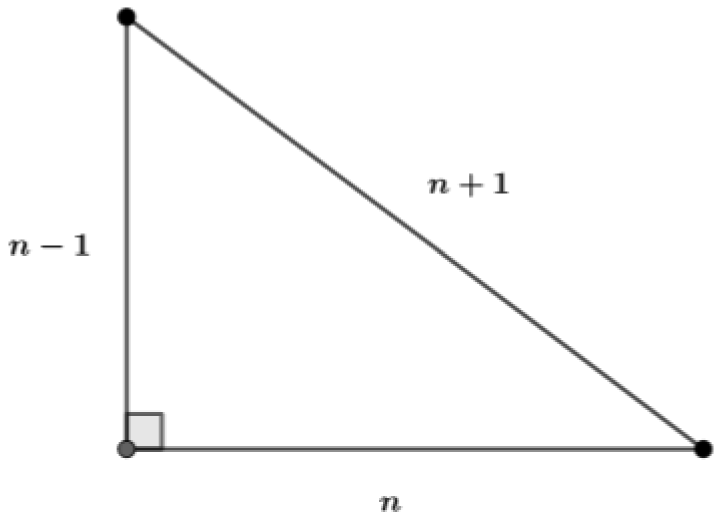
**c) 7,5**

**d) 8,0**

**e) 8,5**

**Comentários**

O primeiro passo é descobrir os lados do triângulo retângulo:




Do teorema de Pitágoras:

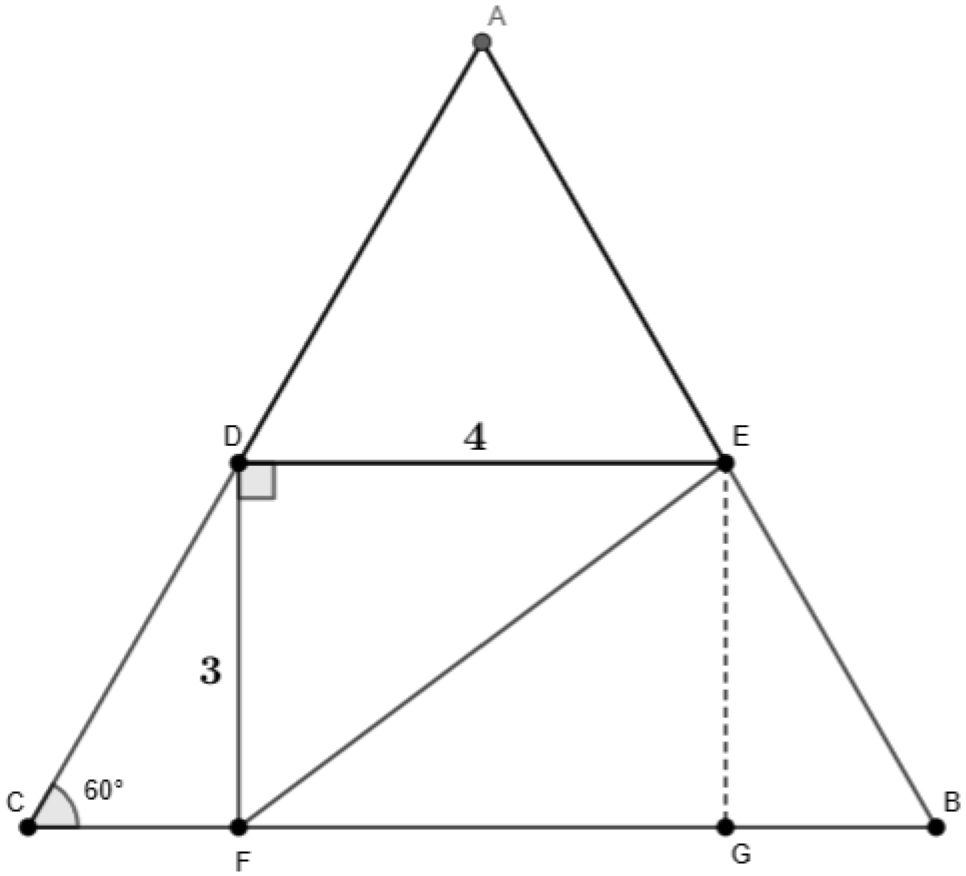
$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$

$$n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1 \Rightarrow n^2 - 4n = 0 \Rightarrow n(n-4) = 0$$

Como $n \neq 0$:

$$n - 4 = 0 \Rightarrow n = 4$$

Esse triângulo está inscrito em outro, equilátero, de modo que seu cateto maior seja paralelo a um dos lados deste. Disso, temos a seguinte figura:




Da trigonometria aplicada à geometria, temos:

$$\tan 60° = \frac{DF}{CF} \Rightarrow CF = \frac{DF}{\tan 60°} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Por simetria, $CF = GB = \sqrt{3}$.

Como o lado do triângulo vale $x$, temos:

$$x = CB = CF + FG + GB = \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}46$$

**Gabarito: "c".**

---

**97. (CN/2008)**

**Considere um triângulo acutângulo ABC, e um ponto P coplanar com ABC. Sabendo-se que P é equidistante das retas suportes de AB e de BC e que o ângulo BPC tem medida igual a 25°, pode-se afirmar que um dos ângulos de ABC mede:**

**a) 25°**

**b) 45°**

c) 50°

d) 65°

e) 85°

**Comentários**

Não é possível determinar um dos ângulos desse triângulo, pois todo triângulo possui um ponto sobre a bissetriz de um dos ângulos, ou seja, o lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas suporte dos lados, tal que a reta $PC$ faz um ângulo de $25°$ com essa bissetriz, isto é, o ponto $P$ não tem nada de especial que determine um dos ângulos do triângulo.

**Gabarito: Anulada.**

---

**98. (CN/2005)**

**No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida $x$ e a mediana BM tem a mesma medida $y$ do lado BC. Sendo assim, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{y}$ é um valor compreendido entre**

a) 0 e 1

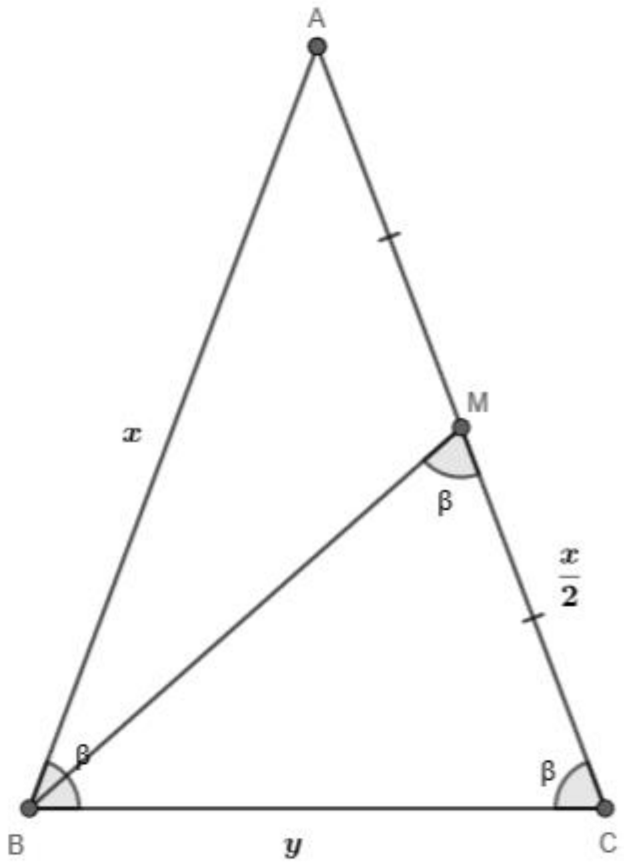
b) 1 e 2

c) 2 e 3

d) 3 e 4

e) 4 e 5

**Comentários**




Os $\Delta ABC\ e\ \Delta BMC$ são semelhantes pelo caso $AAA$, já que eles compartilham o ângulo $B\hat{C}A$ e são ambos isósceles.

Dessa forma, podemos dizer que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CM} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

Sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$.

**Gabarito: "b".**

---

**99. (CN/2005)**

**Num determinado triângulo escaleno ABC, o ângulo BAC é igual a 90°. Sabe-se que AB = c, AC = b e BC = a. Internamente ao segmento BC, determina-se o ponto P de modo que $BP = \frac{(c+b)\cdot(c-b)}{a}$, o perímetro do triângulo a APC é dado pela expressão:**

**a)** $\frac{2b\cdot(a+b)}{a}$

**b)** $\frac{2c\cdot(a+b)}{a}$

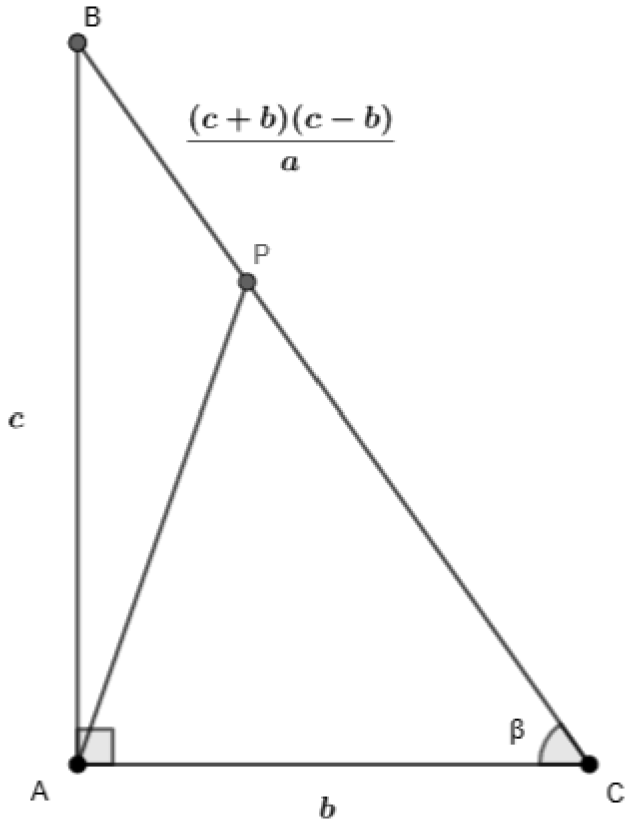
**c)** $\frac{2b\cdot(b+c)}{a}$

**d)** $\frac{2c\cdot(b+c)}{a}$

**e)** $\frac{2b\cdot(a+c)}{a}$

**Comentários**

A situação é representada como segue:




Veja que:

$$CP = BC - BP = a - \frac{(c+b)(c-b)}{a} = \frac{a^2 - c^2 + b^2}{a} = \frac{2b^2}{a}$$

Aplicando o teorema dos cossenos ao $\Delta APC$, temos:

$$AP^2 = b^2 + \left(\frac{2b^2}{a}\right)^2 - 2 \cdot b \cdot \left(\frac{2b^2}{a}\right)\cos\beta$$

Mas:

$$\cos\beta = \frac{b}{a}$$

Logo:

$$AP^2 = b^2 + \frac{4b^4}{a} - \frac{4b^4}{a} = b^2 \Rightarrow AP = b$$

Disso, temos que o perímetro do $\Delta APC$ é dado por:

$$b + b + \frac{2b^2}{a} = \frac{2b(a+b)}{a}$$

**Gabarito: “a”.**

**100.(CN/2003)**

**Quantos são os pontos de um plano $\alpha$ que estão equidistantes das três retas suportes dos lados de um triângulo ABC contido em $\alpha$?**

**a) Um.**

**b) Dois.**

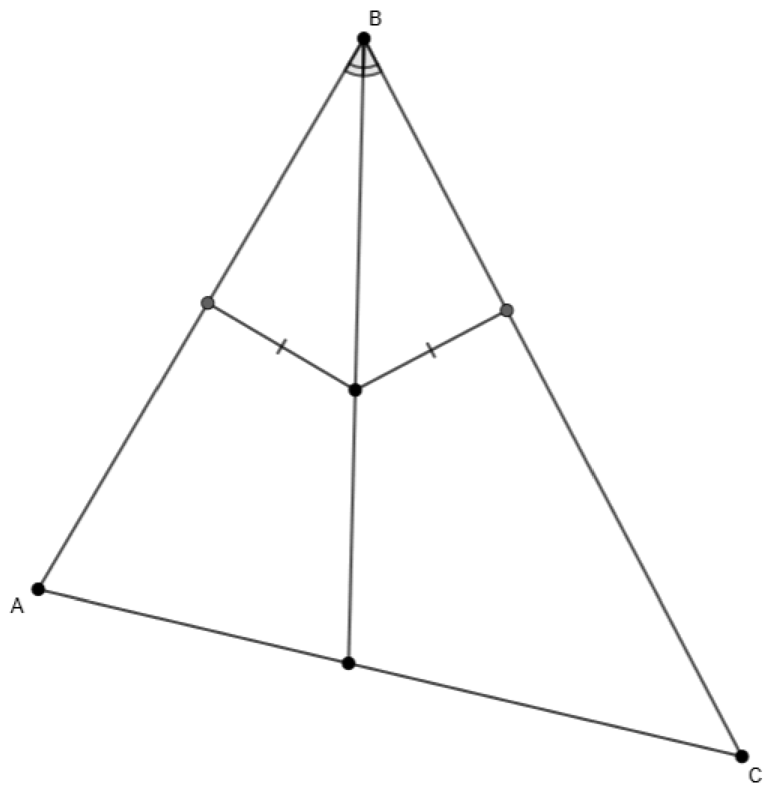
**c) Três.**

**d) Quatro.**

**e) Cinco.**

**Comentários**

Dado um triângulo qualquer, o lugar geométrico dos pontos equidistantes das retas suportes dos lados que formam um ângulo desse triângulo são as bissetrizes internas e externas desse ângulo. Isto é, seja o ângulo $A\hat{B}C$, a bissetriz interna desse ângulo é equidistante das retas suporte de $BA$ $e$ $BC$. Veja:




Dessa forma, o ponto de encontro de duas bissetrizes (Incentro e Ex-incentros) são equidistantes dos três lados ao mesmo tempo.

Para cada triângulo, temos $3$ Ex-incentros e $1$ incentro, ou seja, $1 + 3 = 4$ pontos equidistantes das retas suportes dos lados do triângulo.

**Gabarito: "d".**

**101.(CN/1998)**

**Um triângulo isósceles tem os lados congruentes medindo 5cm e base medindo 8cm. A distância entre seu incentro e o seu baricentro é, aproximadamente, igual a:**

**a) 0,1 cm**

**b) 0,3 cm**

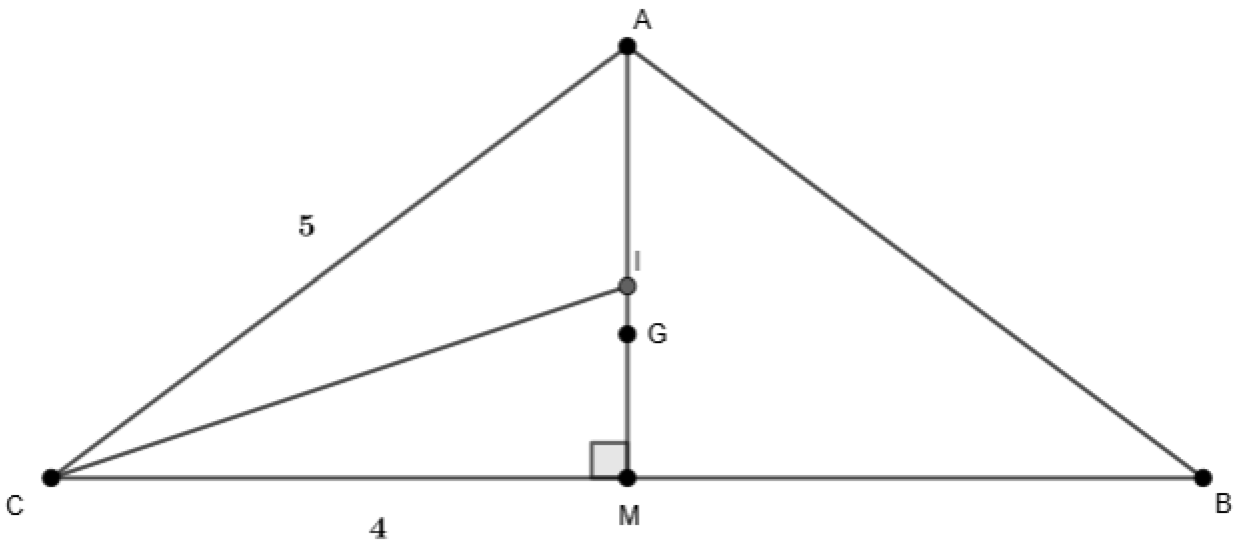
**c) 0,5 cm**

**d) 0,7 cm**

**e) 0,9 cm**

**Comentários**

A figura abaixo representa a situação:




Como $\Delta AMC$ é retângulo, temos:

$$5^2 = 4^2 + AM^2 \Rightarrow AM = 3$$

Do estudo da geometria plana, sabemos que:

$$AG = 2GM \Rightarrow GM + 2GM = 3 \Rightarrow GM = 1$$

Como $I$ é o incentro do triângulo $ABC$, $CI$ é bissetriz de $A\hat{C}M$, do que podemos aplicar o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{CM}{MI} = \frac{CA}{AI} \Rightarrow AI = MI \cdot \frac{CA}{CM} = \frac{5}{4}MI$$

Mas:

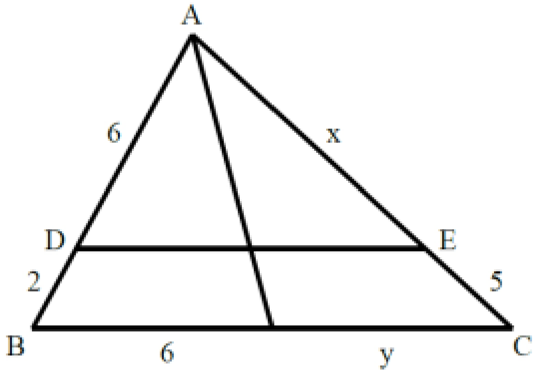
$$MI + AI = AM = 3 \Rightarrow MI + \frac{5}{4}MI = 3 \Rightarrow MI = \frac{4}{3}$$

Queremos:

$$IG = MI - GM = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \approx 0,3$$

**Gabarito: “b”.**

**102.(CN/1998)**




**Na figura acima, DE é paralelo a BC e AM é bissetriz interna do triângulo ABC. Então $x + y$ é igual a:**

**a) 15**

**b) 20**

**c) 25**

**d) 30**

**e) 35**

**Comentários**

Como $DE$ é paralelo a $BC$, podemos aplicar o teorema de Tales:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 15$$

Como $AM$ é bissetriz interno do triângulo $ABC$, podemos aplicar o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CM} \Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{20}{y} \Rightarrow y = 15$$

Por fim, temos que:

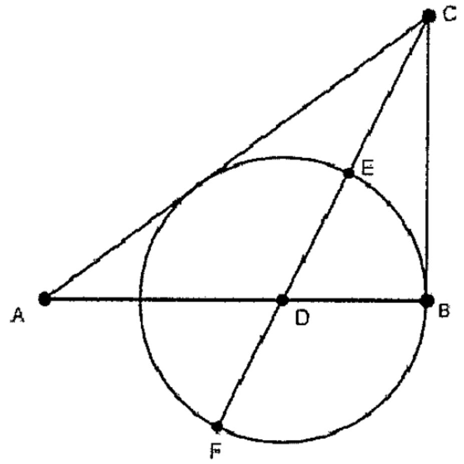
$$x + y = 15 + 15 = 30$$

**Gabarito: “d”.**

## 8. QUESTÕES NÍVEL 2

**103.(EN/2021)**

**Seja o triângulo $ABC$, retângulo em $B$, com $AB = 8\sqrt{2}$ e $BC = 6\sqrt{2}$. Sabendo que $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$, $D$ é o centro da circunferência de raio $BD$ e $x$ é a razão $\frac{EF}{CE}$, podemos afirmar que $x$ é tal que**




a) $0 < x \leq 0,5$

b) $0,5 < x \leq 1$

c) $1 < x \leq 1,5$

d) $1,5 < x \leq 2$

e) $2 < x \leq 2,5$

**104.(EFOMM/2020)**

**Seja $ABC$ um triângulo inscrito em uma circunferência de centro $O$. Sejam $O'$ e $E$ o incentro do triângulo $ABC$ e o ponto médio do arco $BC$ que não contém o ponto $A$, respectivamente. Assinale a opção que apresenta a relação entre os segmentos $EB$,$EO'$ e $EC$.**

a) $EB = EO' = EC$

b) $EB < EO' = EC$

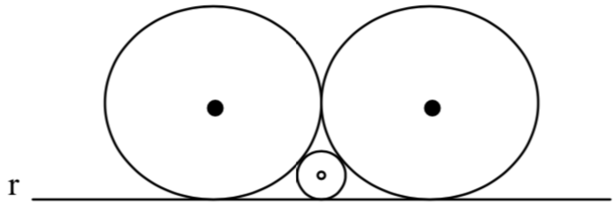
c) $EB > EO' > EC$

d) $EB = EO' > EC$

e) $EB < EO' < EC$

**105. (EFOMM/2005)**

**Tangenciando a reta $r$ encontramos três circunferências tangentes entre si. Determine a medida do raio da circunferência menor, sabendo que as outras duas têm raios de medida igual a $5\ cm$.**




a) $1,25$

b) $1,50$

c) $1,75$

d) $1,85$

e) $2$

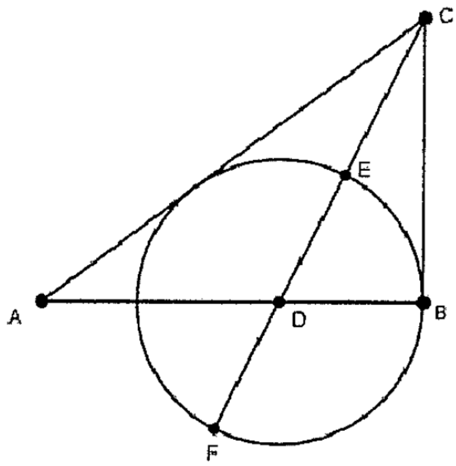
## GABARITO

| | |
|---|---|
| **103.** | d |
| **104.** | a |
| **105.** | a |

## RESOLUÇÃO

**103.(EN/2021)**

**Seja o triângulo $ABC$, retângulo em $B$, com $AB = 8\sqrt{2}$ e $BC = 6\sqrt{2}$. Sabendo que $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$, $D$ é o centro da circunferência de raio $BD$ e $x$ é a razão $\frac{EF}{CE}$, podemos afirmar que $x$ é tal que**




a) $0 < x \leq 0,5$

b) $0,5 < x \leq 1$

c) $1 < x \leq 1,5$

d) $1,5 < x \leq 2$

e) $2 < x \leq 2,5$

**Comentários**

Se $BC = 6\sqrt{2}$ e $AB = 8\sqrt{2}$, com o triângulo retângulo em B, então temos um triângulo retângulo semelhante ao triângulo 3, 4 e 5. Portanto, $AC = 10\sqrt{2}$.

Chamando de $M$ o ponto de tangência de AC na circunferência. Então $MC = BC = 6\sqrt{2}$ (teorema do bico) e $AM = 4\sqrt{2}$. Se você ligar M ao ponto D, então MD é perpendicular a AC e $MD = R$, em que $R$ é o raio da circunferência. Dessa forma, note que $CF$ é bissetriz de $A\hat{C}B$.

Aplicando o teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DB}$$

Mas $DB = R$, então:

$$\frac{10\sqrt{2}}{AB - R} = \frac{6\sqrt{2}}{R}$$

$$\frac{5}{8\sqrt{2} - R} = \frac{3}{R}$$

$$R = 3\sqrt{2}$$

Portanto: $MD = DE = DF = DB = 3\sqrt{2}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $DBC$, temos:

$$DC^2 = BC^2 + DB^2$$

$$DC^2 = 6^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2$$

$$DC = 3\sqrt{10}$$

Então:

$$EC = 3\sqrt{10} - 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Portanto:

$$\frac{EF}{EC} = \frac{6\sqrt{2}}{3\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)} = 2 \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\frac{EF}{EC} \cong \frac{2{,}2 + 1}{2} = 1{,}6$$

**Gabarito: D**

**104.(EFOMM/2020)**

**Seja $ABC$ um triângulo inscrito em uma circunferência de centro $O$. Sejam $O'$ e $E$ o incentro do triângulo $ABC$ e o ponto médio do arco $BC$ que não contém o ponto $A$, respectivamente. Assinale a opção que apresenta a relação entre os segmentos $EB$, $EO'$ e $EC$.**

a) $EB = EO' = EC$

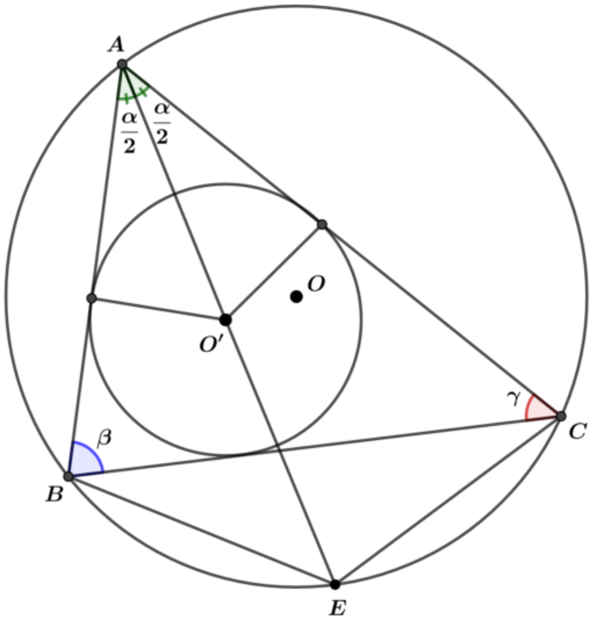
b) $EB < EO' = EC$

c) $EB > EO' > EC$

d) $EB = EO' > EC$

e) $EB < EO' < EC$

**Comentários**

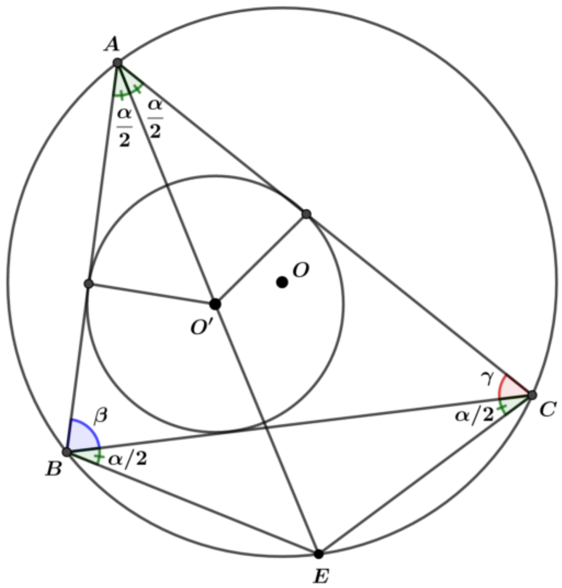



Sabemos que o incentro é o ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo. Como $E$ é o ponto médio do arco $\widehat{BC}$, temos que $\widehat{BE} = \widehat{EC} \Rightarrow B\hat{A}E = E\hat{A}C = \alpha/2$. Assim, $A, O'$ e $E$ estão alinhados. Da propriedade do arco capaz, temos do arco $\widehat{EC}$:

$$E\hat{B}C = E\hat{A}C = \frac{\alpha}{2}$$

Do arco $\widehat{BE}$:

$$B\hat{A}E = B\hat{C}E = \frac{\alpha}{2}$$




Dos ângulos internos do triângulo $ABC$, sabe-se que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180°$. Logo,

$$\hat{B}+\frac{\hat{A}}{2}=180°-\left(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{2}\right)\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{2}\right)=\operatorname{sen}\left[180°-\left(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{2}\right)\right]=\operatorname{sen}\left(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{2}\right)$$

No triângulo ABE temos que:

$$\frac{AE}{\operatorname{sen}\left(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{2}\right)}=\frac{EB}{\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}}$$

Já no triângulo ACE, temos que:

$$\frac{AE}{\operatorname{sen}\left(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{2}\right)}=\frac{EC}{\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}}$$

Como $\operatorname{sen}\left(\hat{B}+\frac{\hat{A}}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\hat{C}+\frac{\hat{A}}{2}\right)$, concluímos:

$$\frac{EB}{\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}}=\frac{EC}{\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}}$$

Assim, $EB=EC$.

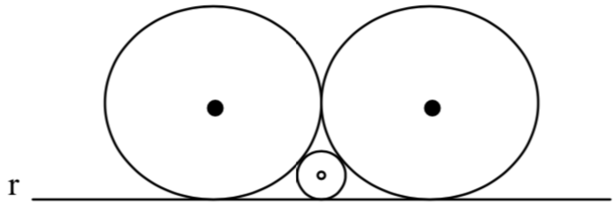
Perceba que a única alternativa que possui essa possibilidade é a letra “a” que é o nosso gabarito.

**Gabarito: “a”.**

---

**105.(EFOMM/2005)**

**Tangenciando a reta $r$ encontramos três circunferências tangentes entre si. Determine a medida do raio da circunferência menor, sabendo que as outras duas têm raios de medida igual a 5 $cm$.**




a) $1,25$

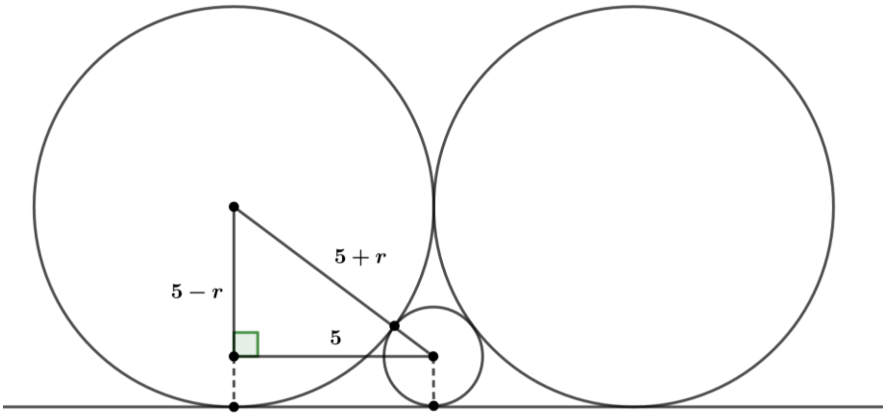
b) $1,50$

c) $1,75$

d) $1,85$

e) $2$

**Comentários**




Do triângulo retângulo da figura, temos por Pitágoras:

$$(r+5)^2 = 5^2 + (5-r)^2$$

$$(r^2 + 10r + 25) = 25 + (r^2 - 10r + 25)$$

$$10r = 25 - 10r$$

$$20r = 25$$

$$r = \frac{25}{20}$$

$$\therefore r = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

**Gabarito: “a”.**

# 9. QUESTÕES NÍVEL 3

**106.(ITA/2017)**

Considere o triângulo $ABC$, em que os segmentos $\overline{AC}, \overline{CB}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, $10\ cm$, $15\ cm$ e $20\ cm$. Seja $D$ um ponto do segmento $\overline{AB}$ de tal modo que $\overline{CD}$ é a bissetriz do ângulo $A\widehat{C}B$ e seja $E$ um ponto do prolongamento de $\overline{CD}$, na direção de $D$, tal que $D\widehat{B}E = D\widehat{C}B$. A medida, em $cm$, de $CE$ é

a) $\frac{11\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{13\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{17\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{20\sqrt{6}}{3}$

e) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$

**107.(ITA/2013)**

Uma reta $r$ tangencia uma circunferência num ponto $B$ e intercepta uma reta $s$ num ponto $A$ exterior à circunferência. A reta $s$ passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto $C$, tal que o ângulo $A\widehat{B}C$ seja obtuso. Então o ângulo $C\widehat{A}B$ é igual a

a) $\frac{1}{2}A\widehat{B}C$

b) $\frac{3}{2}\pi - 2A\widehat{B}C$

c) $\frac{2}{3}A\widehat{B}C$

d) $2A\widehat{B}C - \pi$

e) $A\widehat{B}C - \frac{\pi}{2}$

**108.(ITA/2013)**

Em um triângulo de vértices $A, B$ e $C$, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice $C$, dividem o ângulo $B\widehat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se $l$ é a medida do lado oposto ao vértice $C$, calcule:

a) A medida da mediana em função de $l$.

b) Os ângulos $C\widehat{A}B, A\widehat{B}C$ e $B\widehat{C}A$.

**109.(ITA/2011)**

Seja $ABC$ um triângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se $D$ é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo $ADC$ é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

a) $3/4$

b) $15/6$

c) $15/4$

d) $25/4$

e) $25/2$

**110.(ITA/2007)**

Seja $C_1$ uma circunferência de raio $R_1$ inscrita num triângulo equilátero de altura $h$. Seja $C_2$ uma segunda circunferência, de raio $R_2$, que tangencia dois lados do triângulo internamente e $C_1$ externamente. Calcule $(R_1 - R_2)/h$.

**111.(ITA/2005)**

Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a

a) $4/5$

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

d) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$

e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

**112.(ITA/1998)**

Seja $ABC$ um triângulo isósceles de base $BC$. Sobre o lado $AC$ deste triângulo considere um ponto $D$ tal que os segmentos $AD$, $BD$ e $BC$ são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) $23°$

b) $32°$

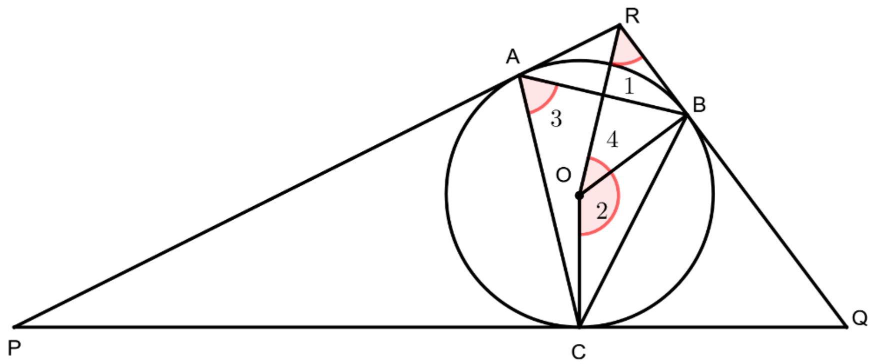
c) $36°$

d) $40°$

e) $45°$

**113. (ITA-1992)**

**Considere o triângulo $PQR$ abaixo, circunscrito a uma circunferência de centro $O$, cujos pontos de tangência são $A, B$ e $C$. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão nessa ordem, em progressão aritmética de razão $20°$. Os ângulos $1, 2, 3, 4$ conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:**




**a) $40°, 120°, 60°, 50°$.**

**b) $40°, 100°, 50°, 40°$.**

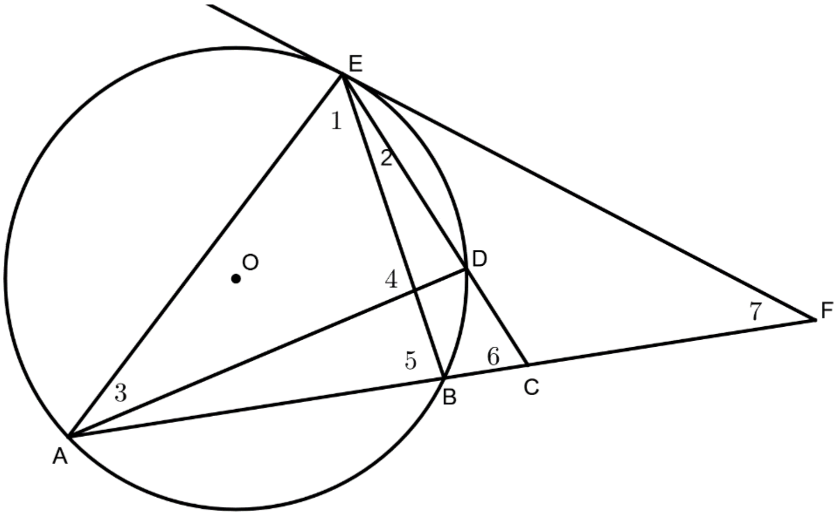
**c) $60°, 140°, 60°, 40°$.**

**d) $60°, 120°, 40°, 50°$.**

**e) $n.d.a.$**

**114. (ITA-1990)**

**Na figura abaixo $O$ é centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por $E$ e $F$ é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos $1, 2$ e $3$ são dadas, respectivamente, por $49°, 18°, 34°$, determinar a medida dos ângulos $4, 5, 6$ e $7$. Nas alternativas a seguir considere os valores dados iguais às medidas de $4, 5, 6$ e $7$, respectivamente:**




a) $97°, 78°, 61°, 26°.$

b) $102°, 79°, 58°, 23°.$

c) $92°, 79°, 61°, 30°.$

d) $97°, 79°, 61°, 27°.$

e) $97°, 80°, 62°, 29°.$

**115.(IME/2017)**

**Em um triângulo $ABC$, a medida da bissetriz interna $AD$ é a média geométrica entre as medidas dos segmentos $BD$ e $DC$, e a medida da mediana $AM$ é a média geométrica entre os lados $AB$ e $AC$. Os pontos $D$ e $M$ estão sobre o lado $BC$ de medida $a$. Pede-se determinar os lados $AB$ e $AC$ do triângulo $ABC$ em função de $a$.**

**116. (IME/2016)**

**Em um triângulo $ABC$, o ponto $D$ é o pé da bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$. Sabe-se que $\overline{AC} = \overline{AD}$, $r = \overline{AB}/\overline{AC}$ e que $\hat{C} = \alpha$. Portanto o valor de $sen^2\alpha$ é**

a) $\frac{3r-1}{4}$

b) $\frac{3r-1}{4r}$

c) $\frac{r+3}{4}$

d) $\frac{3r+1}{4r}$

e) $\frac{3r+1}{4}$

**117.(IME/2013)**

**Seja um triângulo $ABC$. $AH$ é a altura relativa de $BC$, com $H$ localizado entre $B$ e $C$. Seja $BM$ a mediana relativa de $AC$. Sabendo que $BH = AM = 4$, a soma dos possíveis valores inteiros de $BM$ é**

**a) 11**

**b) 13**

**c) 18**

**d) 21**

**e) 6**

## GABARITO

**106.** e
**107.** b
**108.** a) $CM = l/2$ b) $C\hat{A}B = 67{,}5°, B\hat{C}A = 90°, A\hat{B}C = 22{,}5°$
**109.** d
**110.** $\frac{R_1-R_2}{h} = \frac{2}{9}$
**111.** c
**112.** c
**113.** a
**114.** d
**115.** $AB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ $e$ $AC = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ou $AB = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$ $e$ $AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$
**116.** d
**117.** b

## RESOLUÇÃO

**106.(ITA/2017)**

**Considere o triângulo $ABC$, em que os segmentos $\overline{AC}, \overline{CB}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, $10\ cm$, $15\ cm$ e $20\ cm$. Seja $D$ um ponto do segmento $\overline{AB}$ de tal modo que $\overline{CD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e seja $E$ um ponto do prolongamento de $\overline{CD}$, na direção de $D$, tal que $D\hat{B}E = D\hat{C}B$. A medida, em $cm$, de $CE$ é**

**a)** $\frac{11\sqrt{6}}{3}$

**b)** $\frac{13\sqrt{6}}{3}$

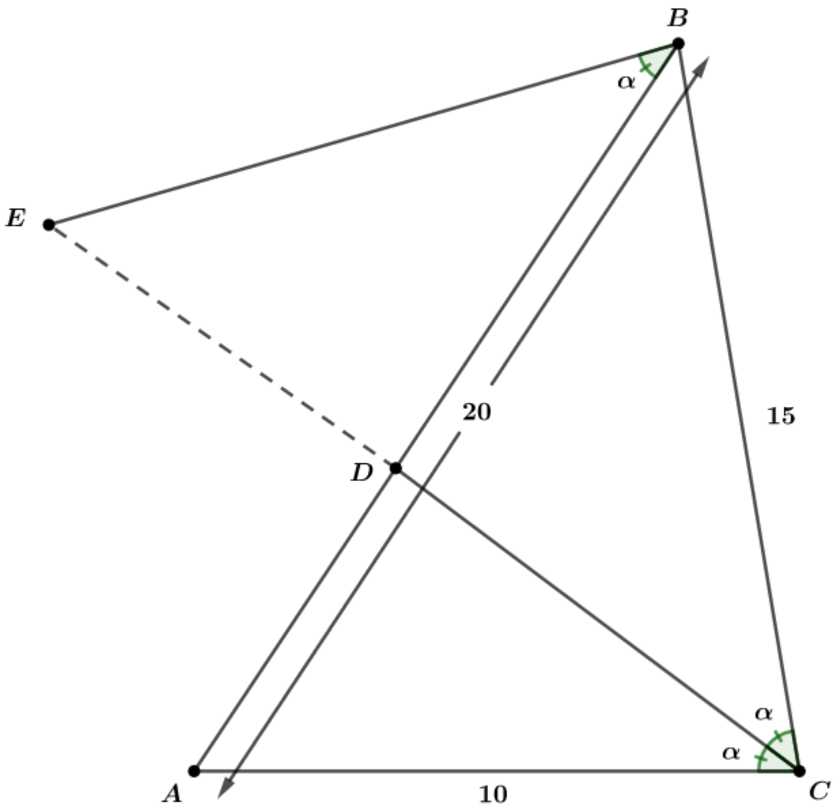
**c)** $\frac{17\sqrt{6}}{3}$

**d)** $\frac{20\sqrt{6}}{3}$

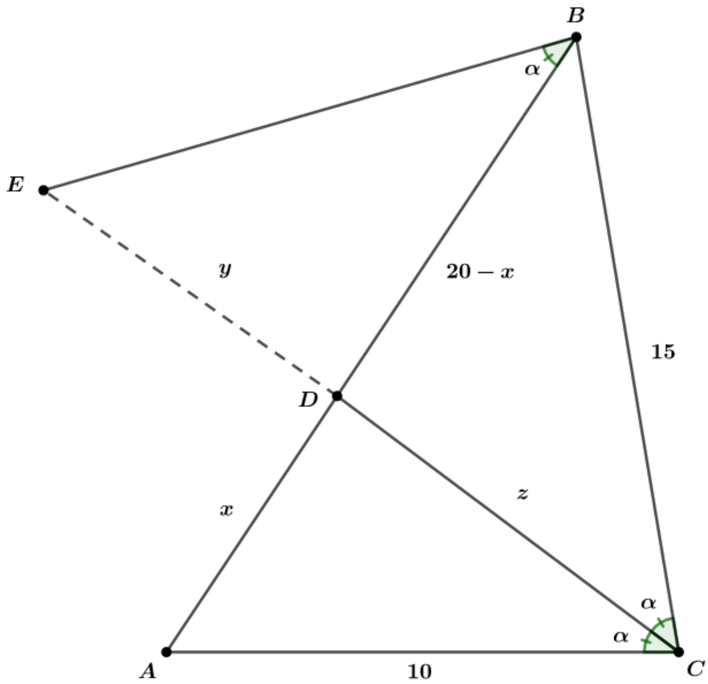
e) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$

**Comentários**

Desenhando a figura da questão, obtemos:

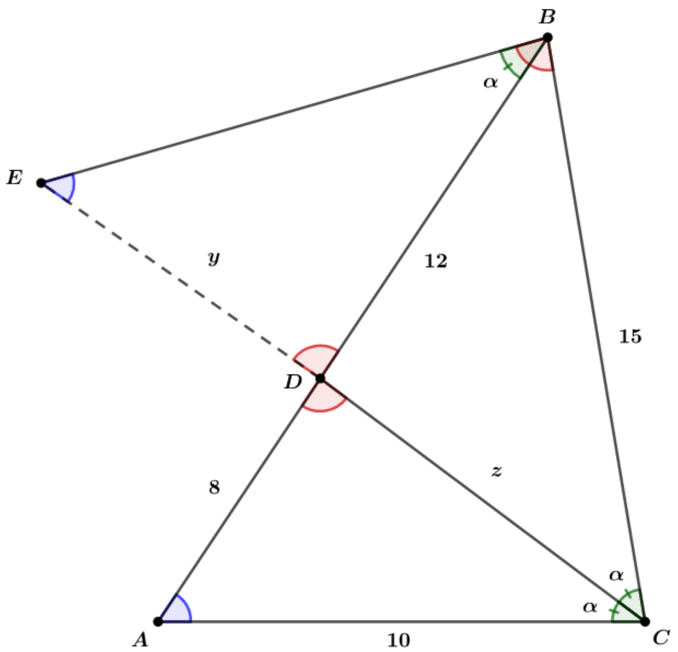



Usando o teorema da bissetriz interna:




$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{20 - x}{15} \Rightarrow 15x = 200 - 10x \Rightarrow x = 8$$

Como $A\widehat{D}C$ e $E\widehat{D}B$ são opostos pelo vértice e $A\widehat{B}E = A\widehat{C}D$, temos que $\Delta ADC \equiv \Delta EDB \equiv \Delta EBC$:




Assim, temos as seguintes razões:

$$\Delta ADC \sim \Delta EDB \Rightarrow \frac{8}{z} = \frac{y}{12} \Rightarrow yz = 96 \;\; (I)$$

$$\Delta ADC \sim \Delta EBC \Rightarrow \frac{10}{z} = \frac{y+z}{15} \Rightarrow 150 = yz + z^2 \;\; (II)$$

Substituindo $(I)$ em $(II)$:

$$150 = 96 + z^2 \Rightarrow z = \sqrt{54} \Rightarrow z = 3\sqrt{6}$$

Substituindo $z$ em $(I)$:

$$y = \frac{96}{z} \Rightarrow y = \frac{96}{3\sqrt{6}} \Rightarrow y = \frac{16\sqrt{6}}{3}$$

A medida de $CE$ é dada por:

$$CE = y + z = \frac{16\sqrt{6}}{3} + 3\sqrt{6} = \frac{25\sqrt{6}}{3}$$

**Gabarito: “e”.**

---

**107. (ITA/2013)**

**Uma reta $r$ tangencia uma circunferência num ponto $B$ e intercepta uma reta $s$ num ponto $A$ exterior à circunferência. A reta $s$ passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto $C$, tal que o ângulo $A\widehat{B}C$ seja obtuso. Então o ângulo $C\widehat{A}B$ é igual a**

**a)** $\frac{1}{2} A\widehat{B}C$

**b)** $\frac{3}{2}\pi - 2A\widehat{B}C$

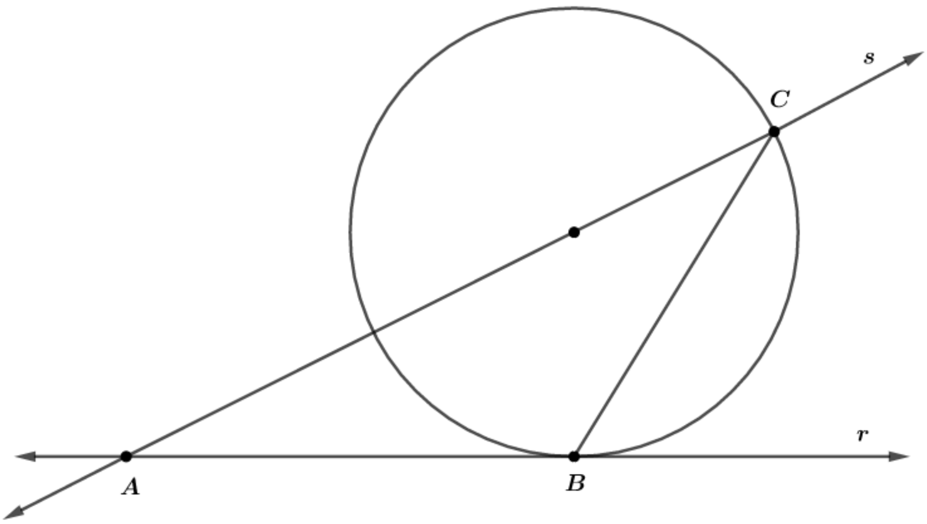
c) $\frac{2}{3}A\hat{B}C$

d) $2A\hat{B}C - \pi$

e) $A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}$

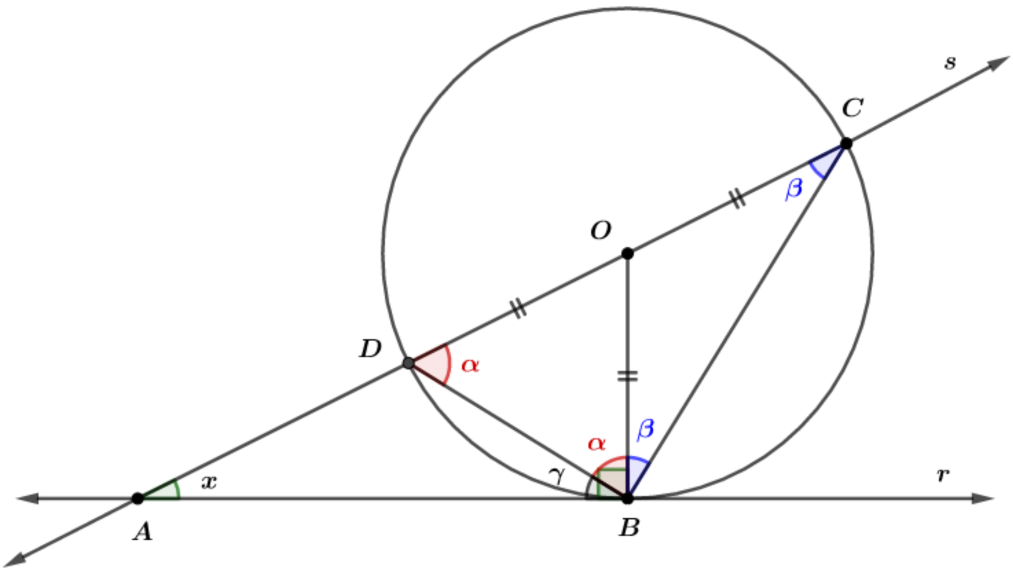
**Comentários**

O desenho do enunciado é dado abaixo:

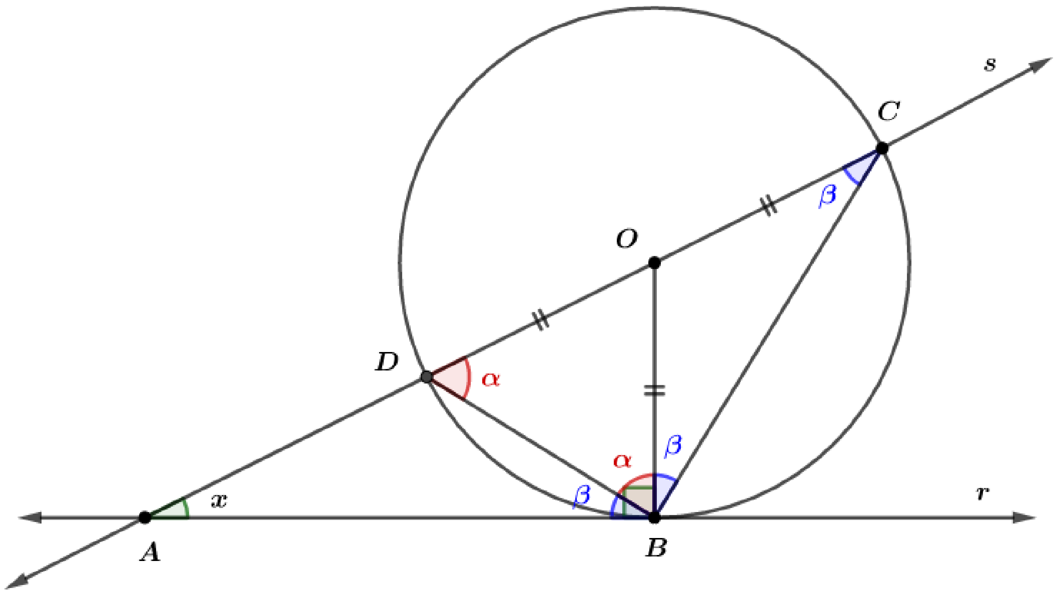



Seja $O$, o centro da circunferência. Então, $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

Os triângulos $OBD$ e $OBC$ são isósceles, então $O\hat{B}D = O\hat{D}B$ e $O\hat{C}B = O\hat{B}C$.




Perceba que $A\hat{B}D$ e $B\hat{C}D$ enxergam o mesmo segmento $\overline{BD}$, logo $\gamma = \beta$.




Queremos calcular o valor de $C\hat{A}B = x$. Analisando as alternativas, vemos que todas opções possuem o ângulo $A\hat{B}C$. Desse modo, vamos encontrar uma relação entre $x$ e $A\hat{B}C$.

$$A\hat{B}C = \alpha + \beta + \beta = \alpha + 2\beta$$

Somando os ângulos internos do $\Delta ABC$ e $\Delta BCD$:

$$x + \alpha + \beta + \beta + \beta = \pi \Rightarrow x = \pi - \alpha - 3\beta$$

$$2\alpha + 2\beta = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

Assim, temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} A\hat{B}C = \alpha + 2\beta \ \ (I) \\ x = \pi - \alpha - 3\beta \ \ (II) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \ \ (III) \end{cases}$$

Substituindo $(III)$ em $(I)$:

$$A\hat{B}C = \frac{\pi}{2} - \beta + 2\beta \Rightarrow \beta = A\hat{B}C - \frac{\pi}{2} \ \ (IV)$$

Substituindo $(III)$ em $(II)$:

$$x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - 3\beta$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 2\beta \ \ (V)$$

Substituindo $(IV)$ em $(V)$:

$$x = \frac{\pi}{2} - 2\left(A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \frac{3\pi}{2} - 2A\hat{B}C$$

**Gabarito: “b”.**

**108.(ITA/2013)**

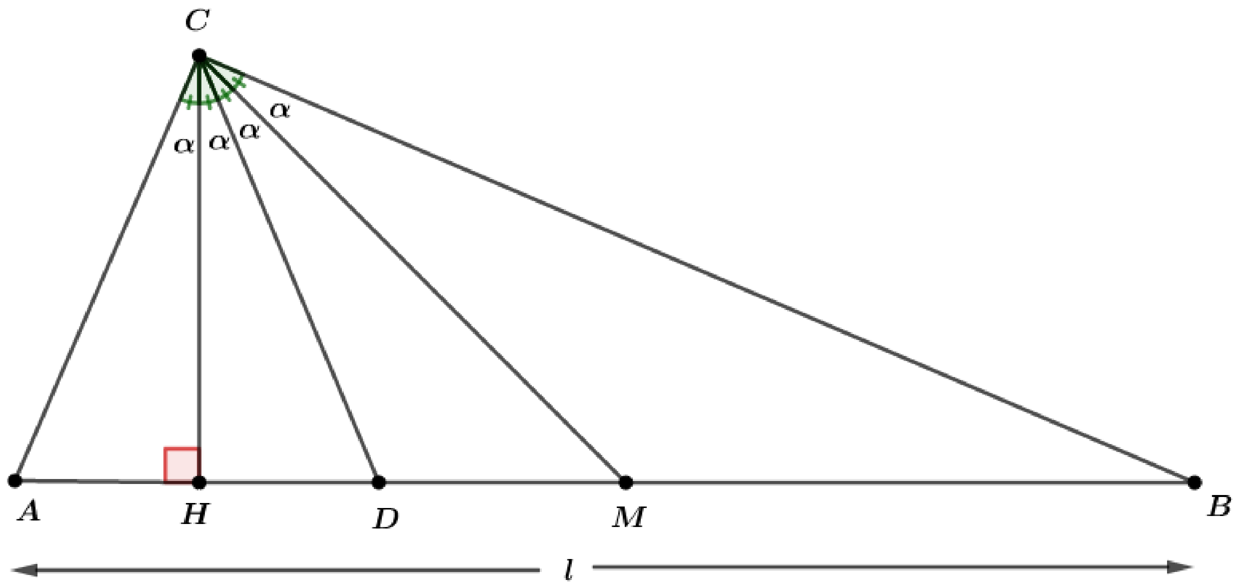
**Em um triângulo de vértices $A, B$ e $C$, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice $C$, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se $l$ é a medida do lado oposto ao vértice $C$, calcule:**

**a) A medida da mediana em função de $l$.**

**b) Os ângulos $C\hat{A}B, A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.**

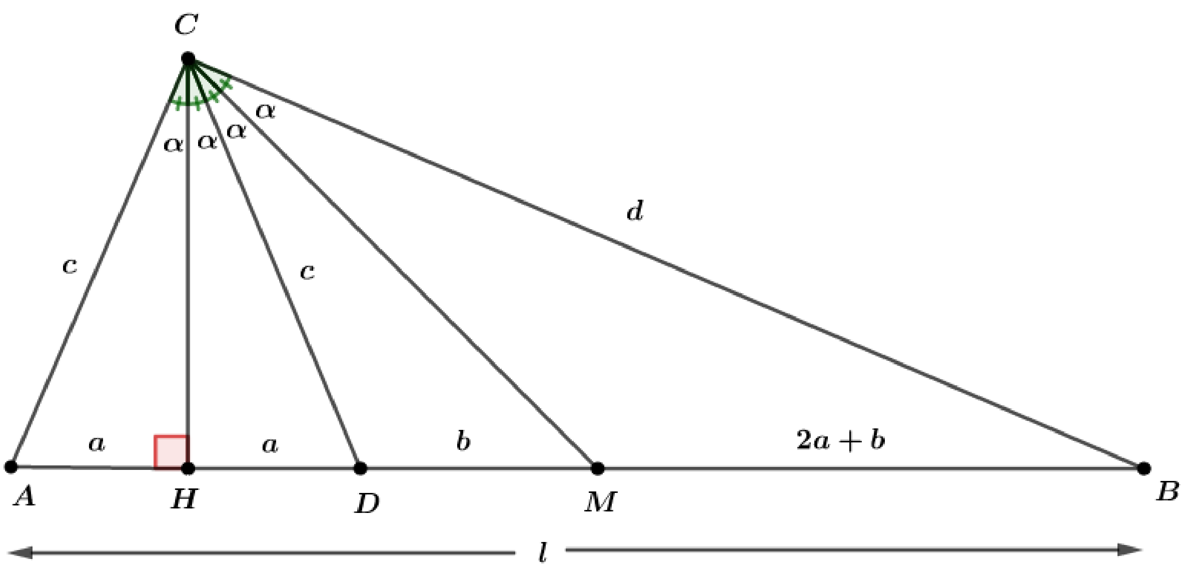
**Comentários**

Pelo enunciado, temos a seguinte figura:




a) Queremos calcular o valor de $CM$.

Analisando a figura, podemos ver que $CH$ é mediatriz do triângulo $ADC$, pois esse segmento é altura e bissetriz do triângulo. Desse modo, $AH = HD = a$. Como $M$ é o ponto médio do segmento $AB$, temos $AM = MB$. Então, se $DM = b$, temos $MB = a + a + b = 2a + b$.




Vamos aplicar o teorema da bissetriz interna nos triângulos $ABC$ e $BCD$:

$$\Delta ABC \Rightarrow \frac{c}{2a} = \frac{d}{2a+2b} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{a+b}\ (I)$$

$$\Delta BCD \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{d}{2a+b} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{b}{2a+b}\ (II)$$

Igualando $(I)$ e $(II)$:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{2a+b}$$

$$2a^2 + ab = ab + b^2$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

Podemos tentar encontrar o valor de $\alpha$. Analisando os triângulos $AHC$ e $MHC$:

$$\Delta AHC \Rightarrow tg\alpha = \frac{a}{CH}\ (III)$$

$$\Delta MHC \Rightarrow tg(2\alpha) = \frac{a+b}{CH}\ (IV)$$

Dividindo $(IV)$ por $(III)$:

$$\frac{tg(2\alpha)}{tg\alpha} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

$$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \cdot \frac{1}{tg\alpha} = 1 + \sqrt{2}$$

$$2 = (1 - tg^2\alpha)(1+\sqrt{2})$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}} = 1 - tg^2\alpha$$

$$tg^2\alpha = 1 - \underbrace{\frac{2}{1+\sqrt{2}}}_{2(\sqrt{2}-1)}$$

$$tg^2\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$$

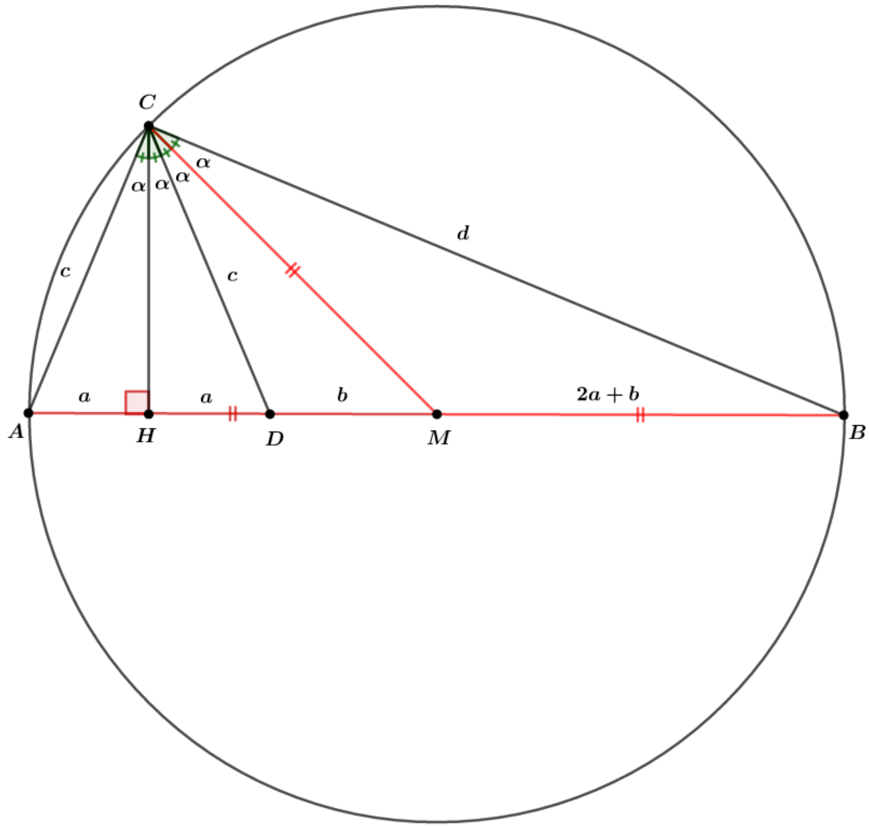
$$tg^2\alpha = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \sqrt{2} - 1$$

Esse valor de tangente é conhecido como $45°/2$, então:

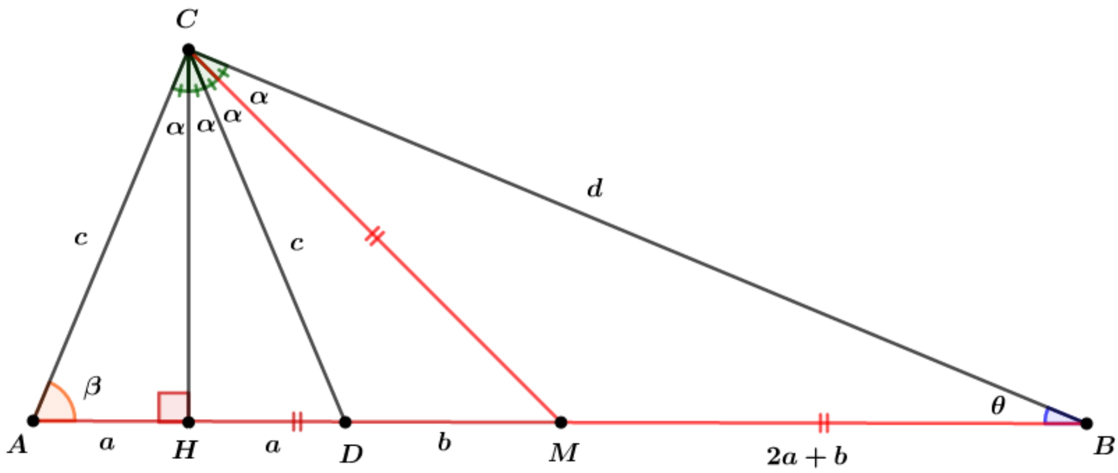
$$\alpha = \frac{45°}{2} = 22{,}5°$$

Assim, podemos ver que o triângulo $ABC$ é retângulo em $C$. Como $M$ é o ponto médio do segmento $AB$ e $\Delta ABC$ é retângulo, temos que $\Delta ABC$ pode ser inscrito em uma circunferência e $M$ é o seu centro. Logo, $CM = AM = BM = l/2$.




$$CM = \frac{l}{2}$$

b) Analisando os ângulos internos do triângulo, obtemos:




$$\Delta AHC \Rightarrow \beta + 22{,}5° + 90° = 180° \Rightarrow \beta = 67{,}5°$$
$$\Delta ABC \Rightarrow \beta + 90° + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 22{,}5°$$
$$\therefore C\hat{A}B = 67{,}5°, B\hat{C}A = 90°, A\hat{B}C = 22{,}5°$$

**Gabarito: a) $CM = l/2$ b) $C\hat{A}B = 67,5°, B\widehat{C}A = 90°, A\hat{B}C = 22,5°$**

---

**109. (ITA/2011)**

**Seja $ABC$ um triângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se $D$ é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo $ADC$ é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a**

a) $3/4$

b) $15/6$

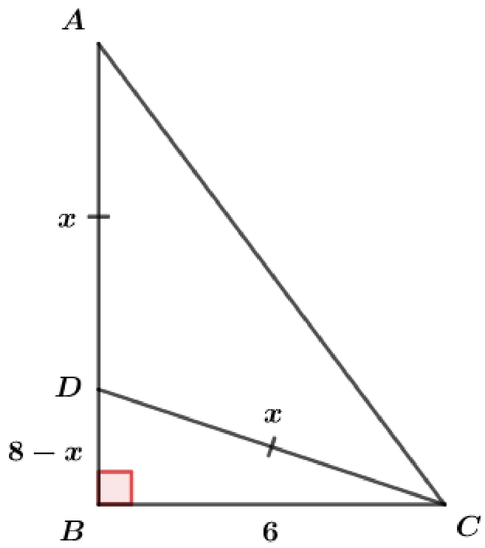
c) $15/4$

d) $25/4$

e) $25/2$

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




Como o $\Delta BDC$ é retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (8 - x)^2 + 6^2$$

$$x^2 = x^2 - 16x + 64 + 36$$

$$16x = 100$$

$$x = \frac{25}{4}$$

**Gabarito: "d".**

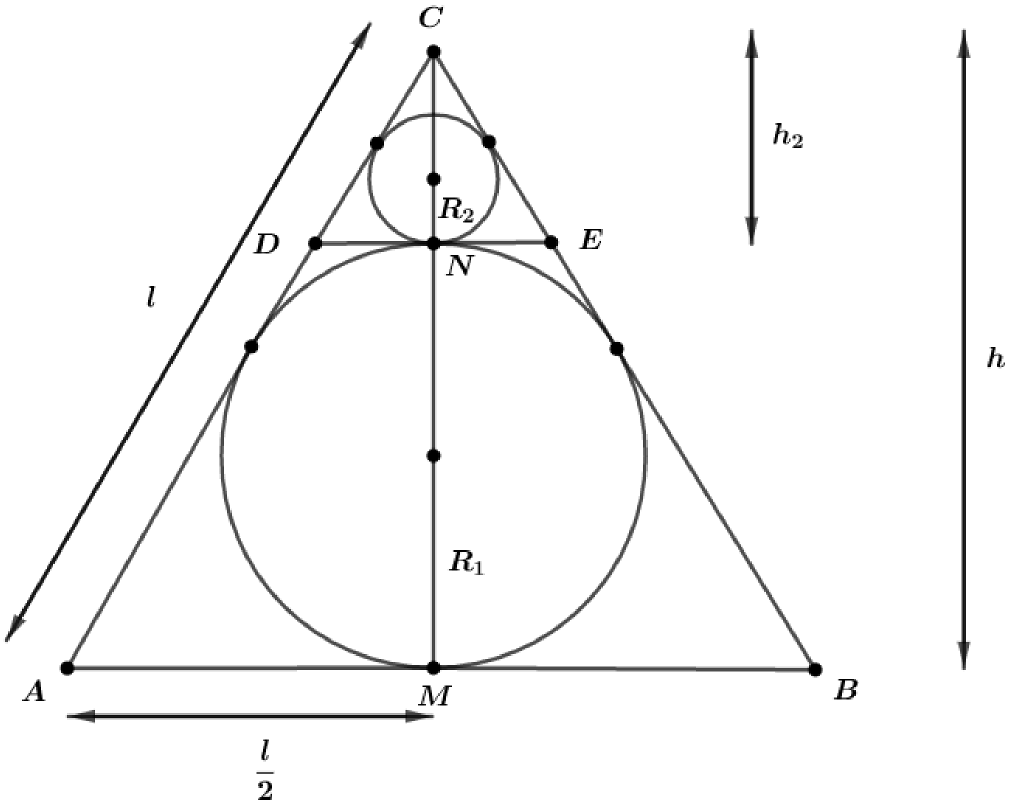
---

**110.(ITA/2007)**

**Seja $C_1$ uma circunferência de raio $R_1$ inscrita num triângulo equilátero de altura $h$. Seja $C_2$ uma segunda circunferência, de raio $R_2$, que tangencia dois lados do triângulo internamente e $C_1$ externamente. Calcule $(R_1 - R_2)/h$.**

**Comentários**

Temos a seguinte figura:




Pelas propriedades da circunferência inscrita num triângulo equilátero, temos:

$$h = 3R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{h}{3}$$

$$h_2 = 3R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{h_2}{3}$$

$$h_2 = R_1 = \frac{h}{3}$$

Vamos escrever $R_1$ e $R_2$ em função do lado $l$ do triângulo equilátero $ABC$. Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta AMC$:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

$DE$ é paralelo ao lado $AB$, então o triângulo $CDE$ também é equilátero. Como $h_2 = \frac{h}{3}$, temos que o lado desse triângulo é $\frac{l}{3}$. Então:

$$h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} l$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{3}}{6} l$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{\sqrt{3}}{18} l$$

Calculando $(R_1 - R_2)/h$:

$$\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}l - \frac{\sqrt{3}}{18}l}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{2\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{9}$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{2}{9}}$

---

**111. (ITA/2005)**

**Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a**

**a)** $4/5$

**b)** $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$

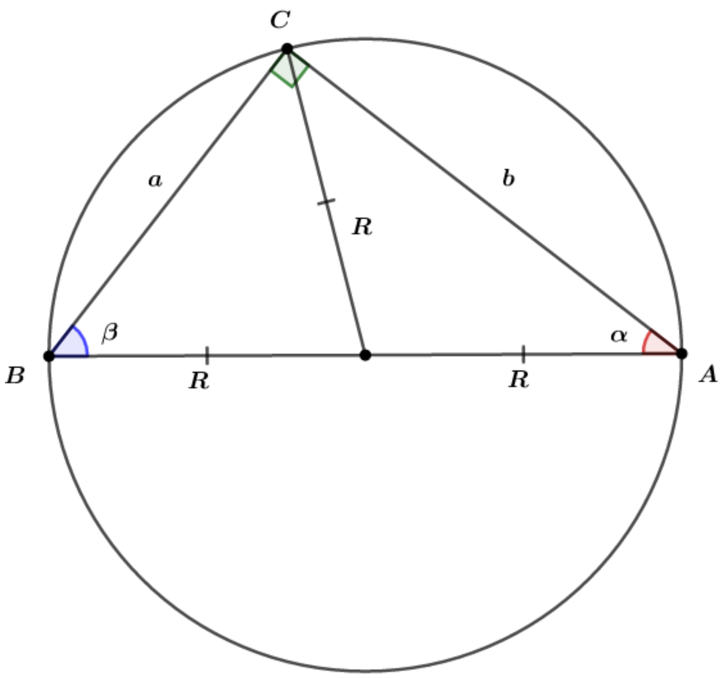
**c)** $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

**d)** $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$

**e)** $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

**Comentários**

A mediana de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa é igual ao raio da circunferência que a circunscreve, então:




Vamos escrever os catetos em função de $R$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo:

$$(2R)^2 = a^2 + b^2$$

Segundo o enunciado:

$$R = \sqrt{ab}$$

Substituindo na equação de Pitágoras:

$$4ab = a^2 + b^2$$

$$a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

Resolvendo a equação em $a$:

$$a = 2b \pm \sqrt{3b^2} = (2 \pm \sqrt{3})b$$

Substituindo $a$ na equação de $R$:

$$R^2 = (2 \pm \sqrt{3})b^2$$

$$b = \frac{R}{\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}$$

$$b = R\sqrt{2 \mp \sqrt{3}}$$

Calculando o cosseno de $\alpha$:

$$cos\alpha = \frac{b}{2R} = \frac{R\sqrt{2 \mp \sqrt{3}}}{2R}$$

$$cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2 \mp \sqrt{3}}$$

Analisando as alternativas, vemos que um possível valor de cosseno é:

$$cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

**Gabarito: "c".**

---

**112. (ITA/1998)**

**Seja $ABC$ um triângulo isósceles de base $BC$. Sobre o lado $AC$ deste triângulo considere um ponto $D$ tal que os segmentos $AD, BD$ e $BC$ são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:**

**a) $23°$**

**b) $32°$**

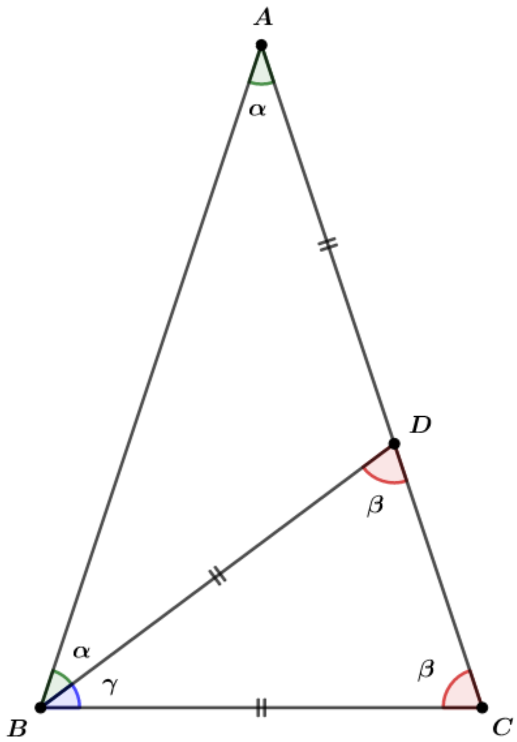
**c) $36°$**

**d) $40°$**

**e) $45°$**

**Comentários**

Dos dados do enunciado, temos a seguinte figura:



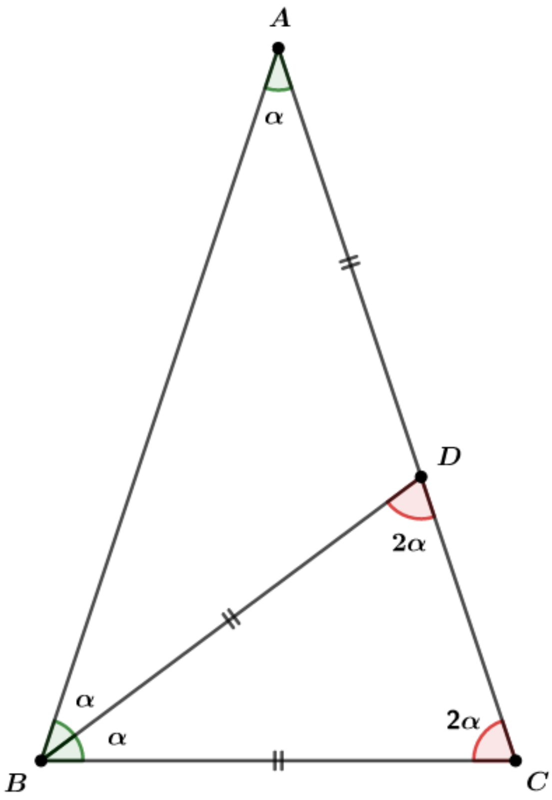

Como $AD \equiv BD \equiv BC$, temos:

$$\Delta DAB \text{ é isósceles} \Rightarrow D\hat{A}B = D\hat{B}A$$

$$\Delta BCD \text{ é isósceles} \Rightarrow B\hat{C}D = B\hat{D}C$$

$$B\hat{D}C \text{ é externo ao triângulo } DAB \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

$$\Delta DAB \text{ é isósceles} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta \Rightarrow \gamma = \alpha$$



Somando-se os ângulos internos, encontramos:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$$

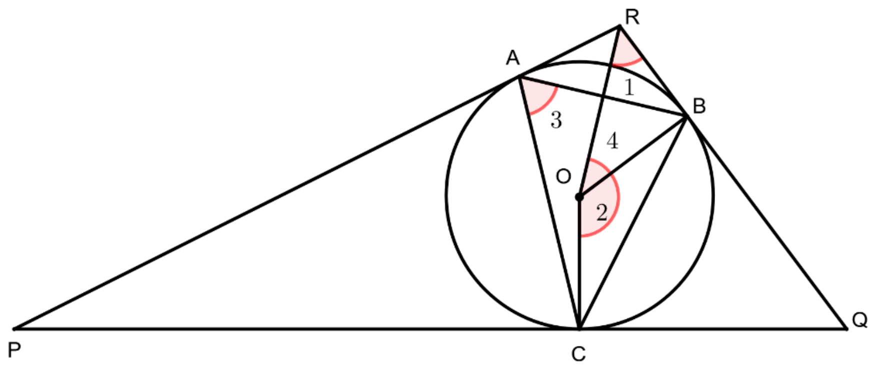
$$5\alpha = 180°$$

$$\alpha = 36°$$

**Gabarito: “c”.**

**113.(ITA-1992)**

**Considere o triângulo $PQR$ abaixo, circunscrito a uma circunferência de centro $O$, cujos pontos de tangência são $A, B$ e $C$. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão nessa ordem, em progressão aritmética de razão $20°$. Os ângulos $1, 2, 3, 4$ conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:**




**a) $40°, 120°, 60°, 50°$.**

**b) $40°, 100°, 50°, 40°$.**

**c) $60°, 140°, 60°, 40°$.**

**d) $60°, 120°, 40°, 50°$.**

**e) $n.d.a.$**

**Comentários**

Os ângulos $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nessa ordem, em progressão aritmética de razão $20°$. Seja $\hat{P} = x$, então, temos do $\Delta PQR$:

$$\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = 180° \Rightarrow x + (x + 20°) + (x + 40°) = 180° \Rightarrow x = 40°$$

Portanto $\hat{P} = 40°, \hat{Q} = 60°$ e $\hat{R} = 80°$.

Sabendo que $O$ é obtido do encontro das bissetrizes do triângulo, então o ângulo $1$ mede:

$$\hat{a}ngulo\ 1 = \frac{\hat{R}}{2} = \frac{80°}{2} = 40°$$

Além disso, como $B$ e $C$ são pontos de tangência, temos $O\hat{B}Q = O\hat{C}Q = 90°$. Lembrando que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$, temos:

$$\hat{a}ngulo\ 2+90°+90°+\hat{Q}=360° \Rightarrow \hat{a}ngulo\ 2=180°-\hat{Q}=180°-60°=120°$$

O ângulo 3 é dado pela metade do ângulo 2, assim, ela mede:

$$\hat{a}ngulo\ 3=\frac{120°}{2}=60°$$

Por fim, como $O\hat{B}R=90°$, o ângulo 4 mede:

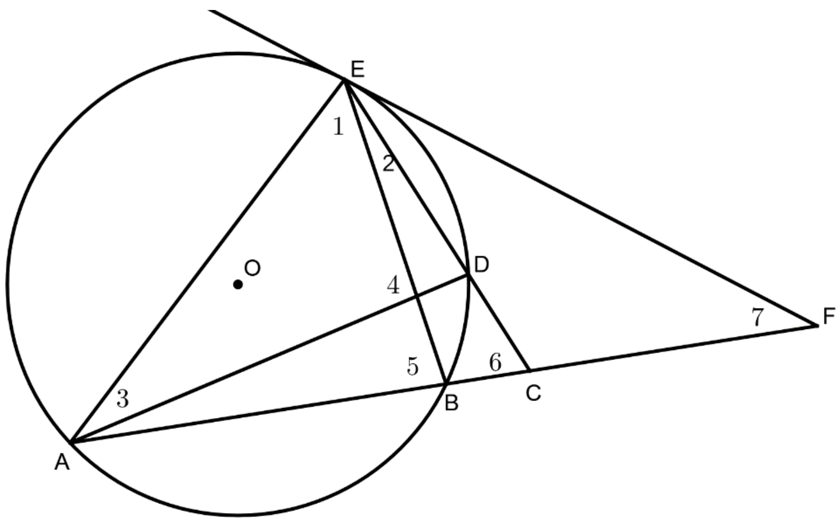
$$\hat{a}ngulo\ 4=90°-\frac{\hat{R}}{2}=90°-40°=50°$$

**Gabarito: "a"**

---

**114. (ITA-1990)**

**Na figura abaixo $O$ é centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por $E$ e $F$ é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos $1, 2$ e $3$ são dadas, respectivamente, por $49°, 18°, 34°$, determinar a medida dos ângulos $4, 5, 6$ e $7$. Nas alternativas a seguir considere os valores dados iguais às medidas de $4, 5, 6$ e $7$, respectivamente:**




**a) $97°, 78°, 61°, 26°$.**

**b) $102°, 79°, 58°, 23°$.**

**c) $92°, 79°, 61°, 30°$.**

**d) $97°, 79°, 61°, 27°$.**

**e) $97°, 80°, 62°, 29°$.**

**Comentários**

Nessa questão, devemos usar a propriedade do arco capaz. Então, se dois pontos na circunferência "enxergam" o mesmo segmento de reta, podemos afirmar que os ângulos desses pontos são congruentes.

Note que a soma dos ângulos $1, 3$ e $4$ é $180°$. Logo, o ângulo 4 mede:

$$\hat{a}ngulo\ 4=180°-49°-34°=97°$$

Veja que $D\hat{A}B = 18°$, pois "enxerga" o mesmo segmento de reta que o ângulo 2. Assim, o ângulo 5 mede:

$$\hat{a}ngulo\ 4 = \hat{a}ngulo\ 5 + D\hat{A}B$$

$$\Rightarrow \hat{a}ngulo\ 5 = \hat{a}ngulo\ 4 - D\hat{A}B = 97° - 18° = 79°$$

No triângulo $AEC$, temos que a soma dos ângulos é:

$$\hat{a}ngulo\ 1 + \hat{a}ngulo\ 2 + \hat{a}ngulo\ 3 + D\hat{A}B + \hat{a}ngulo\ 6 = 180°$$

$$\hat{a}ngulo\ 6 = 180° - \left(\hat{a}ngulo\ 1 + \hat{a}ngulo\ 2 + \hat{a}ngulo\ 3 + D\hat{A}B\right) = 61°$$

$$\Rightarrow \hat{a}ngulo\ 6 = 180° - (49° + 18° + 34° + 18°) = 61°$$

Por fim, $F\hat{E}C = F\hat{E}D = 34°$, pois é igual ao valor do ângulo 3. Assim, o ângulo 7 é:

$$\hat{a}ngulo\ 6 = \hat{a}ngulo\ 7 + F\hat{E}C$$

$$\Rightarrow \hat{a}ngulo\ 7 = \hat{a}ngulo\ 6 - F\hat{E}C = 61° - 34° = 27°$$

**Gabarito: "d"**

---

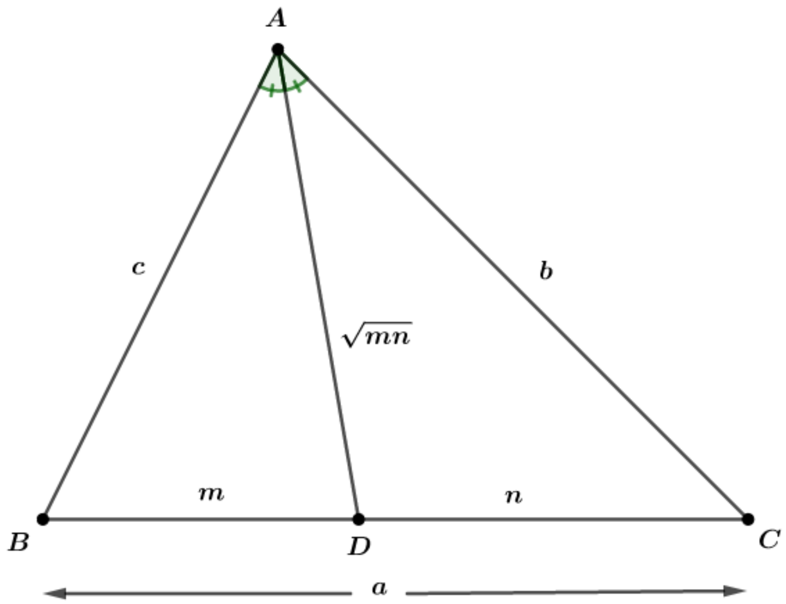
**115.(IME/2017)**

**Em um triângulo $ABC$, a medida da bissetriz interna $AD$ é a média geométrica entre as medidas dos segmentos $BD$ e $DC$, e a medida da mediana $AM$ é a média geométrica entre os lados $AB$ e $AC$. Os pontos $D$ e $M$ estão sobre o lado $BC$ de medida $a$. Pede-se determinar os lados $AB$ e $AC$ do triângulo $ABC$ em função de $a$.**

**Comentários**

Vamos dividir o problema em dois casos. Para cada um dos casos, temos as seguintes figuras:

Caso 1) Bissetriz $AD$:




Usando o teorema de Stewart, temos:

$$b^2m + c^2n = mna + \sqrt{mn}^2 a$$

$$b^2m + c^2n = 2mna \ \ (I)$$

Podemos escrever $m$ e $n$ em função de $a, b, c$ usando o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{n} \Rightarrow cn = bm$$

De acordo com a figura:

$$a = m + n \Rightarrow m = a - n$$

$$cn = b(a - n)$$

$$n = \frac{ab}{b + c}$$

Analogamente, para $m$:

$$n = a - m$$

$$c(a - m) = bm$$

$$m = \frac{ac}{b + c}$$

Substituindo em $(I)$:

$$b^2\left(\frac{ac}{b + c}\right) + c^2\left(\frac{ab}{b + c}\right) = 2\left(\frac{ac}{b + c}\right)\left(\frac{ab}{b + c}\right)a$$

$$\frac{abc(b + c)}{b + c} = \frac{2(a^3bc)}{(b + c)^2}$$

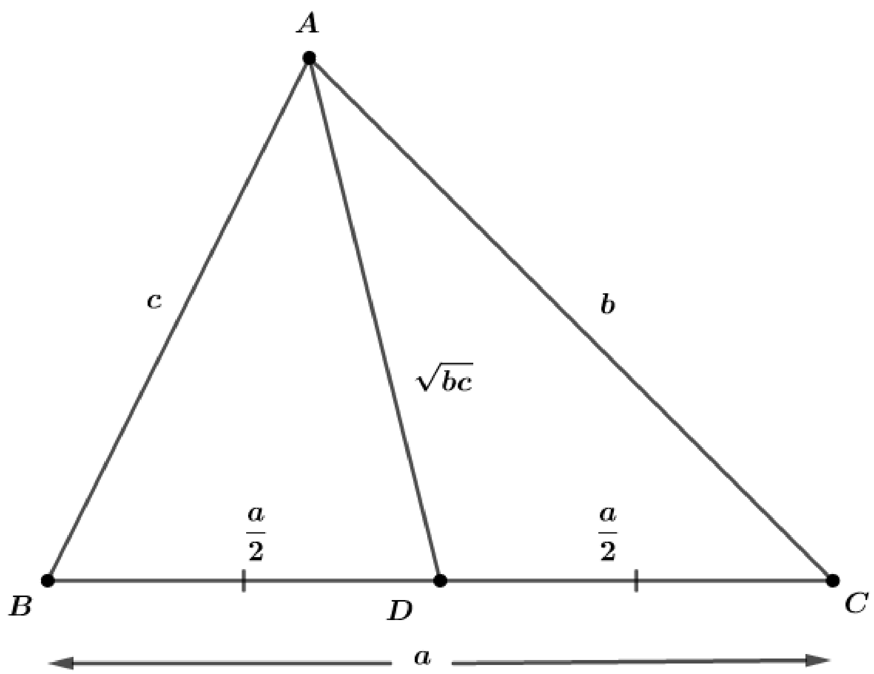
Como $b + c \neq 0$ e $abc \neq 0$, podemos simplificar:

$$(b + c)^2 = 2a^2$$

$a, b, c$ são os lados de um triângulo, então $a > 0$ e $b + c > 0$:

$$b + c = a\sqrt{2} \ \ (II)$$

Caso 2) Mediana $AM$:




Aplicando o teorema de Stewart:

$$\frac{b^2a}{2}+\frac{c^2a}{2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a+\left(\sqrt{bc}\right)^2 a$$

$$a\neq 0\Rightarrow\frac{b^2+c^2}{2}=\frac{a^2}{4}+bc$$

$$\frac{a^2}{4}=\frac{b^2-2bc+c^2}{2}$$

$$a^2=2(b-c)^2$$

$$|b-c|=\frac{a\sqrt{2}}{2}\quad(III)$$

Supondo que $b>c$, temos:

$$b-c=\frac{a\sqrt{2}}{2}\quad(IV)$$

Somando $(IV)$ e $(II)$:

$$2b=a\sqrt{2}+\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$b=a\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Substituindo o valor de $b$ em $(II)$:

$$c=a\sqrt{2}-a\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$c=\frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Se $c > b$:

$$c - b = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (V)$$

Somando $(V)$ e $(II)$:

$$2c = a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$c = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$b = a\sqrt{2} - a\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$b = a\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Portanto, temos o seguinte resultado:

$$AB = \frac{a\sqrt{2}}{4} \ e\ AC = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Ou

$$AB = a\frac{3\sqrt{2}}{4} \ e\ AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{AB = \frac{a\sqrt{2}}{4}\ e\ AC = a\frac{3\sqrt{2}}{4}}$ **ou** $\boldsymbol{AB = a\frac{3\sqrt{2}}{4}\ e\ AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}}$

---

**116. (IME/2016)**

**Em um triângulo $ABC$, o ponto $D$ é o pé da bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$. Sabe-se que $\overline{AC} = \overline{AD}, r = \overline{AB}/\overline{AC}$ e que $\hat{C} = \alpha$. Portanto o valor de $sen^2\alpha$ é**

a) $\frac{3r-1}{4}$

b) $\frac{3r-1}{4r}$

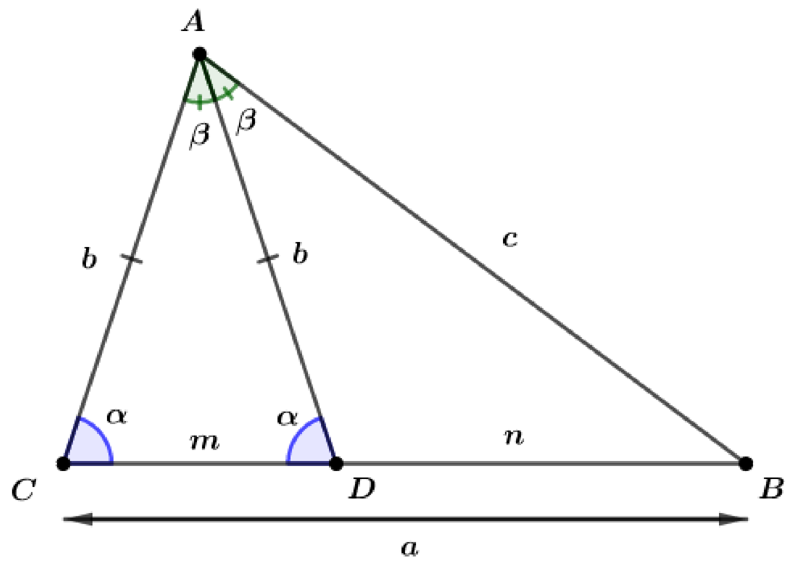
c) $\frac{r+3}{4}$

d) $\frac{3r+1}{4r}$

e) $\frac{3r+1}{4}$

**Comentários**

De acordo com o enunciado:




O texto afirma que $r = \overline{AB}/\overline{AC}$:

$$r = \frac{c}{b} \Rightarrow c = br$$

Usando o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{n} \Rightarrow n = \frac{cm}{b} \Rightarrow n = \frac{brm}{b} = rm \Rightarrow m = \frac{n}{r}$$

Aplicando o teorema dos senos no triângulo $ACD$:

$$\frac{m}{sen\beta} = \frac{b}{sen\alpha} \Rightarrow m = \frac{bsen\beta}{sen\alpha} \Rightarrow \frac{n}{r} = \frac{bsen\beta}{sen\alpha} \Rightarrow n = br \cdot \frac{sen\beta}{sen\alpha}$$

Aplicando o teorema dos senos no $\Delta ABC$:

$$\frac{a}{sen(2\beta)} = \frac{c}{sen\alpha}$$

Como $a = m + n$:

$$\frac{m+n}{sen(2\beta)} = \frac{c}{sen\alpha}$$

$$\left(\frac{n}{r} + n\right) \cdot \frac{1}{sen(2\beta)} = \frac{br}{sen\alpha}$$

$$br \cdot \frac{sen\beta}{sen\alpha} \cdot \left(\frac{1}{r} + 1\right) \cdot \frac{1}{sen(2\beta)} = \frac{br}{sen\alpha}$$

$$sen\alpha \neq 0 \; e \; b, r \neq 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{sen\beta}{2sen\beta cos\beta}\right) = 1$$

$$\Rightarrow cos\beta = \frac{r+1}{2r}$$

Somando os ângulos internos do $\Delta ACD$:

$$\beta + 2\alpha = \pi \Rightarrow \beta = \pi - 2\alpha$$

$$cos(\pi - 2\alpha) = \frac{r+1}{2r}$$

$$-cos(2\alpha) = \frac{r+1}{2r}$$

$$-(1 - 2sen^2\alpha) = \frac{r+1}{2r}$$

$$2sen^2\alpha = \frac{r+1}{2r} + 1$$

$$\Rightarrow sen^2\alpha = \frac{3r+1}{4r}$$

**Gabarito: "d".**

---

**117. (IME/2013)**

**Seja um triângulo $ABC$. $AH$ é a altura relativa de $BC$, com $H$ localizado entre $B$ e $C$. Seja $BM$ a mediana relativa de $AC$. Sabendo que $BH = AM = 4$, a soma dos possíveis valores inteiros de $BM$ é**

**a) 11**

**b) 13**

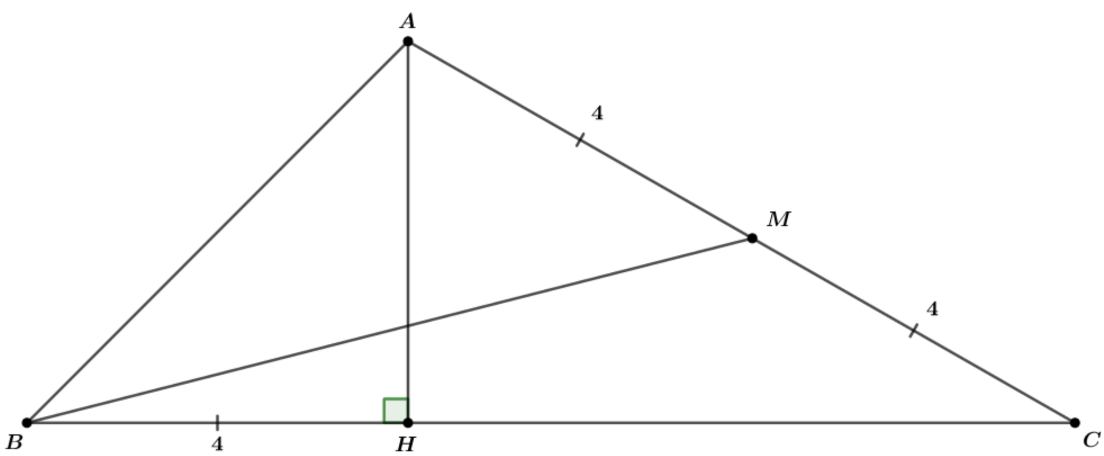
**c) 18**

**d) 21**

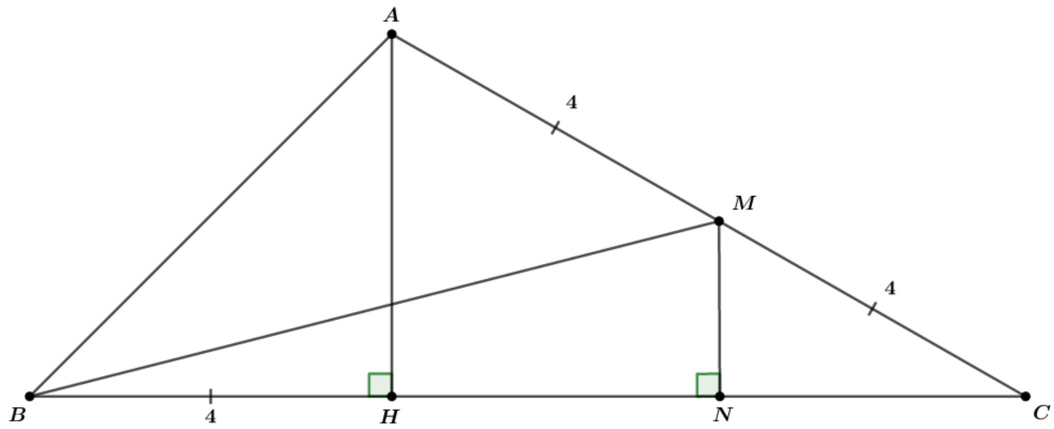
**e) 6**

**Comentários**

Do enunciado, temos a seguinte figura:




Podemos traçar a reta paralela à altura $AH$ e que passa por $M$:

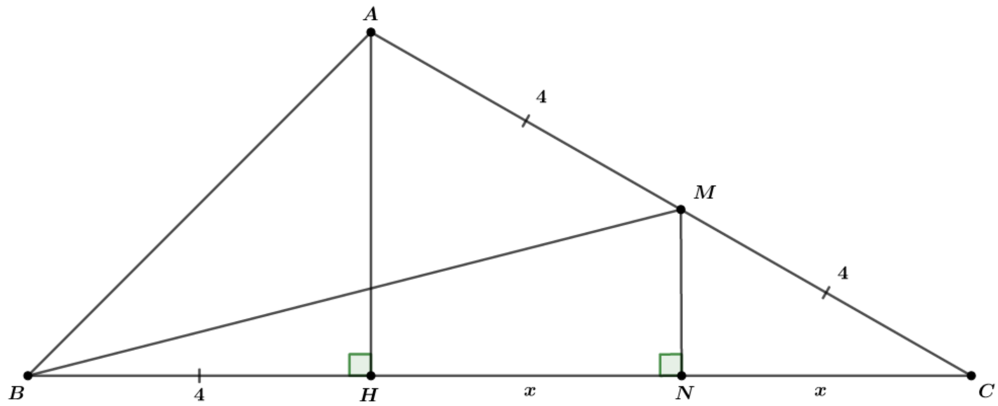



Perceba que os triângulos $AHC$ e $MNC$ são semelhantes, então:

$$\frac{AC}{MC} = \frac{HC}{NC}$$

$$\frac{HC}{NC} = \frac{8}{4} = 2$$

$$HC = 2NC \Rightarrow HN = NC = x$$




Aplicando o teorema de Pitágoras nos $\Delta MNB$ e $\Delta MNC$:

$$BM^2 = MN^2 + (4 + x)^2 \;\; (I)$$

$$4^2 = MN^2 + x^2 \;\; (II)$$

Fazendo $(I) - (II)$:

$$BM^2 - 4^2 = (4 + x)^2 - x^2$$

$$BM^2 - 16 = 16 + 8x$$

$$\frac{BM^2 - 32}{8} = x \;\; (III)$$

Como $x$ é o cateto do triângulo retângulo $MNC$, temos:

$$0 < x < 4$$

Substituindo $(III)$ na desigualdade acima:

$$0 < \frac{BM^2 - 32}{8} < 4$$

$$32 < BM^2 < 64$$

Se $BM = 5$, temos $BM^2 = 25$ e se $BM = 8$, $BM = 64$, então $5 < BM < 8$.

Os valores inteiros possíveis para $BM$ são:

$$BM = 6 \text{ ou } BM = 7$$

Logo, a soma desses possíveis valores é:

$$S = 6 + 7 = 13$$

**Gabarito: “b”.**

---

## 10. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA

Chegamos ao final da aula.

Nessa aula, vimos como calcular as cevianas de um triângulo qualquer e alguns teoremas que podem ser úteis na resolução das questões. Os teoremas de Ceva e Menelaus podem ajudar-nos a resolver algumas questões mais difíceis das provas. Veremos que, normalmente, as bancas cobram questões sobre os pontos notáveis do triângulo e o cálculo das suas cevianas.

Normalmente, as questões de geometria das provas costumam misturar figuras geométricas, então, tente aprender a trabalhar com cada uma delas.

Caso fique alguma dúvida ou tenha alguma crítica/sugestão, pode entrar em contato:


/profvictorso

## 11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Dolce, Osvaldo. Pompeo, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar, 9: geometria plana. 9. ed. Atual, 2013. 456p.

[2] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria I. 5 ed. Livraria Francisco Alves Editora, 1990. 151p.

[3] Morgado, Augusto César. Wagner, Eduardo. Jorge, Miguel. Geometria II. 1 ed. FC & Z Livros, 2002. 296p.