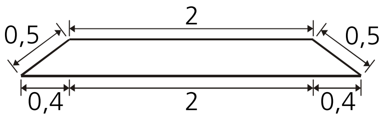
RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 1

a)



O trapézio em questão tem 2,8 m de base maior e 2 m de base menor. A diferença entre as bases é de 0,8 m, o que, dada a simetria do trapézio, implica uma diferença de 0,4 m de cada lado, como mostrado ao lado. Dado que a aresta lateral tem 0,5 m, a altura do trapézio vale $\sqrt{0{,}5^2 - 0{,}4^2} = 0{,}3$ m.

Assim, a área do trapézio é igual a (2,8 + 2)x0,3/2 = 0,72 m^2 e o volume de brita para construir 10000 m de estrada é 0,72x10000 = 7200 m^3.

Resposta: Serão gastos 7200 m^3 de brita.

b)

A caçamba do caminhão tem um volume interno de 6x2,5x0,6 = 9 m^3. O número de viagens é igual a 7200/9 = 800.

Resposta: São necessárias 800 viagens de caminhão.

Questão 2

a)

Excetuando o horário de almoço, a empresa realiza quatro viagens por hora. Assim, entre 5 horas e 11h45, são feitas 7x4 = 28 viagens. Já entre 14h15 e 24 horas, são realizadas 10x4 = 40 viagens. Finalmente, entre 12 e 14 horas, são feitas apenas 5 viagens. Dessa forma, a empresa faz 28 + 40 + 5 = 73 viagens por dia.

Considerando que 36 passageiros são transportados em cada viagem, temos um total de 73x36 = 2628 passageiros transportados por dia. Uma vez que cada passagem custa R$ 17,50, a empresa arrecada 2628x17,5 = R$ 45.990,00.

Resposta: A empresa arrecada R$ 45.990,00 por dia.

b)

A taxa de embarque é de R$ 3,30. O aumento equivale a 3,30x0,3333 ≅ R$ 1,10. Com relação ao preço da passagem, o aumento corresponde a (1,10/17,50)x100 ≅ 6,3%.

Resposta: O aumento corresponderá a 6,3% do preço da passagem.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 3

a) Na primeira figura, temos 1 quadrado, de modo que $F_1 = 4$. O número de quadrados da segunda e da terceira figuras é igual a 3 e 5, respectivamente, o que implica que $F_2 = 3x4$ e $F_2 = 5x4$. Assim, o número de quadrados da figura de ordem n deve ser 2n – 1. Como cada quadrado é formado por 4 palitos, temos $F_n = 4(2n - 1)$.
Logo, $F_{10} = 4(2.10 - 1) = 76$.

Resposta: $F_{10} = 76$ e $F_n = 8n - 4$.

a') O número de palitos usados para construir as figuras forma uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 4 e que tem razão igual a 8. A fórmula do termo geral dessa progressão é $F_n = 4 + 8(n - 1)$.
Logo, $F_{10} = 4 + 8.(10 - 1) = 76$.

Resposta: $F_{10} = 76$ e $F_n = 8n - 4$.

b) $F_1 + F_2 + \ldots + F_{50} = 8.(1 + 2 + \ldots + 50) - 4.50$. Logo, $F_1 + F_2 + \ldots + F_{50} = 8.50.51/2 - 200 = 10000$.

Resposta: São necessários 10000 fósforos para exibir as primeiras 50 figuras.

b') $F_1 + F_2 + \ldots + F_{50} = (F_1 + F_{50}).50/2$. Logo, $F_1 + F_2 + \ldots + F_{50} = (4 + 8.50 - 4).50/2 = 10000$.

Resposta: São necessários 10000 fósforos para exibir as primeiras 50 figuras.

Questão 4

a)
O atleta mais rápido ultrapassou o mais lento depois de correr 17,5 voltas em 66x17,5 = 1155 s.
Até aquele instante, o corredor mais lento havia corrido 16,5 voltas. Isso significa que o atleta retardatário faz cada volta em 1155/16,5 = 70 s.

Resposta: O atleta mais lento gastou 70s para completar cada volta.

b)
Os 10000 m de prova equivalem a 10000/400 = 25 voltas. Assim, o corredor mais rápido gastou 25x66 = 1650 s para completar a prova.
No instante em que o primeiro atleta cruzou a linha de chegada, o corredor mais lento havia percorrido apenas $1650/70 \cong 23,57$ voltas ou cerca de 9428 m.

Resposta: O corredor mais lento havia percorrido aproximadamente 9428 m.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 5

a)
A tabela fornece valores de y e x. Substituindo esses valores na equação $y = ax^2 + bx + c$, obtemos o sistema linear

$$\begin{array}{lllll} a & +b & +c & = & 2{,}0 \\ 4a & +2b & +c & = & 2{,}7\,. \\ 9a & +3b & +c & = & 3{,}2 \end{array}$$

Resolvendo esse sistema, encontramos a = –0,1, b = 1,0 e c = 1,1.

Resposta: a = –0,1, b = 1,0 e c = 1,1.

b)
Sabemos, agora, que $y(x) = -0{,}1x^2 + x + 1{,}1$. Como o arremesso tem início no ponto x = 0, a distância alcançada pelo peso é igual ao valor de x tal que y(x) = 0, pois é nesse ponto que o peso toca o solo. Assim, precisamos resolver a equação $-0{,}1x^2 + x + 1{,}1 = 0$. Usando a fórmula de Báskara, obtemos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-0{,}1)1{,}1}}{2(-0{,}1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1{,}44}}{0{,}2} = \frac{1 \pm 1{,}2}{0{,}2}\,.$$

Desprezando a raiz negativa, resta apenas x = 2,2/0,2 = 11 m.

Resposta: A distância percorrida pelo peso equivale a 11 m.

Questão 6

a)
Um número é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos for divisível por 9. Logo, o menor número de C que é divisível por 9 é 111.111.111.
Para que um número seja divisível por 6 é preciso que ele seja par e que seja divisível por 3. Como nenhum número de C é par, esse conjunto não possui números divisíveis por 6.

Resposta: O primeiro número divisível por 9 é 111.111.111. Por outro lado, C não tem números divisíveis por 6.

b)
Os números de C que são divisíveis por 9 são aqueles cujo número de algarismos é divisível por 9, ou seja, aqueles que têm 9, 18, 27, 36, ... algarismos. Esses números formam uma progressão aritmética que tem termos inicial e final iguais a 9 e 999, respectivamente. Como o termo final da progressão pode ser escrito na forma $a_n = a_1 + (n - 1).r$, chegamos a 999 = 9 + (n – 1).9. Logo, n = 111.
Naturalmente, C possui exatamente 1000 números com, no máximo, 1000 algarismos. Assim, a probabilidade de que o número m seja divisível por 9 é de 111/1000, ou 11,1%.

Resposta: A probabilidade de que m seja divisível por nove é igual a 111/1000, ou 11,1%.

b')
Se os números de C forem ordenados da forma habitual, aqueles que são divisíveis por 9 serão 9º, o 18º, o 27º, e assim por diante. Observamos, portanto, que esses números ocupam posições correspondentes aos múltiplos de 9. Logo, dos 1000 números com, no máximo, 1000 algarismos, temos 1000/9 ≅111 que são divisíveis por 9. A probabilidade de que o número m seja divisível por 9 é de 111/1000, ou 11,1%.

Resposta: A probabilidade de que m seja divisível por nove é igual a 111/1000, ou 11,1%.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 7

a)
A fórmula para decibéis é $R_{d\beta} = 120 + 10 \log_{10} I$. Como o ouvido humano suporta 80 decibéis, temos $80 = 120 + 10 \log_{10} I$, de modo que $\log_{10} I = (80 - 120)/10 = -4$. Logo, $I = 10^{-4}$ W/m^2.

Resposta: A fórmula para decibéis é $R_{d\beta} = 120 + 10 \log_{10} I$. O ouvido humano suporta, sem sofrer dano, sons com intensidade máxima de 10^{-4} W/m^2.

b)
Para o motor do avião, temos $16 = 12 + \log_{10} I$, donde $\log_{10} I = 4$, ou $I = 10^4$ W/m^2.
Como a intensidade do som do tráfego em uma esquina movimentada é igual a 10^{-4} W/m^2, concluímos que a razão entre as intensidades é igual a $R = I_{avião}/I_{esquina} = 10^4/10^{-4} = 10^8$.

Resposta: A razão entre as intensidades sonoras do motor do avião e do tráfego em uma esquina movimentada é igual a 10^8.

b')
Para o motor do avião, temos $160 = 120 + 10.\log_{10} I_{avião}$, enquanto a equação associada a uma esquina movimentada é $80 = 120 + 10.\log_{10} I_{esquina}$. Assim, $\log_{10} I_{avião} = 4$ e $\log_{10} I_{esquina} = -4$, donde $\log_{10} I_{avião} - \log_{10} I_{esquina} = 8$.
Como $\log_{10} I_{avião} - \log_{10} I_{esquina} = \log_{10} (I_{avião} / I_{esquina})$, deduzimos que $\log_{10} (I_{avião} / I_{esquina}) = 8$, de modo que a razão entre as intensidades é igual a $R = I_{avião}/I_{esquina} = 10^8$.

Resposta: A razão entre as intensidades sonoras do motor do avião e do tráfego em uma esquina movimentada é igual a 10^8.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 8

a)
Se $p = -5$, $f(x) = -5x$. Para analisar o sinal de $f(x)$ e $g(x)$, devemos encontrar os zeros dessas funções. Observamos que $f(x) = 0$ somente se $x = 0$. A função $g(x)$ também tem um único zero em $x = -5/2$. Podemos, então, dividir nossa análise do sinal de $f(x)$ e de $g(x)$ nos três intervalos mostrados na tabela abaixo.

Intervalo	f(x)	g(x)
$(-\infty,-5/2)$	positiva	negativa
$(-5/2, 0)$	positiva	positiva
$(0, \infty)$	negativa	positiva

O sinal de $f(x).g(x)$ é negativo nos intervalos em que as funções têm sinais opostos, ou seja, em $(-\infty,-5/2)$ e em $(0, \infty)$.

Resposta: $f(x).g(x) < 0$ para $x < -5/2$ ou $x > 0$.

a')
Se $p = -5$, $f(x) = -5x$. Definindo $h(x) = f(x).g(x)$, temos $h(x) = -5x(2x + 5)$. As raízes de $h(x) = 0$ são $-5/2$ e 0. Como o coeficiente do termo quadrático de $h(x)$ é negativo, essa função tem concavidade para baixo. Assim, o sinal de $h(x)$ é negativo em $(-\infty,-5/2)$ e em $(0, \infty)$.

Resposta: $f(x).g(x) < 0$ para $x < -5/2$ ou $x > 0$.

b)
Exigir que $f(x)$ e $g(x)$ satisfaçam $g(x) \leq f(x)$ é equivalente a pedir que $h(x) = f(x) - g(x) \geq 0$, ou que $h(x) = (p - 2)x - 5 \geq 0$. Para que $h(-8) \geq 0$, devemos ter $-8p + 11 \geq 0$, ou $p \leq 11/8$.
Analisando o ponto $x = -1$, observamos que $h(-1) \geq 0$ se $-p - 3 \geq 0$, ou $p \leq -3$. Dado o fato de que $h(x)$ é linear, teremos $h(x) \geq 0$ em $[-8, -1]$ quando as duas condições acima forem satisfeitas, ou seja, no caso em que $p \leq -3$.

Resposta: Teremos $g(x) \leq f(x)$ para todo $p \leq -3$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 9

a)

Como P é ortogonal, $P^{-1}P = P^TP = I$. Para obter os valores de a e b, basta multiplicar, por exemplo, a segunda linha de P^T pela primeira coluna de P, igualando o resultado ao elemento da 2ª linha e 1ª coluna de I, que é 0, e multiplicar a segunda linha de P^T pela terceira coluna de P, igualando o resultado ao elemento da 2ª linha e 3ª coluna de I, que também é 0. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}(-2/3)(-1/3) + a(-2/3) + b(-2/3) &= 0\\ (-2/3)(-2/3) + a(-1/3) + b(2/3) &= 0\end{aligned}.$$

Multiplicando a primeira equação por –3/2 e a segunda equação por –3, e isolando os termos constantes, obtemos o novo sistema linear

$$\begin{aligned}a \;\; + b &= 1/3\\ a \;\; - 2b &= 4/3\end{aligned},$$

cuja solução é a = 2/3 e b = –1/3.

Resposta: a = 2/3 e b = –1/3.

a')

Como P é ortogonal, $PP^{-1} = PP^T = I$. Para obter os valores de a e b, basta multiplicar, por exemplo, a primeira linha de P pela segunda coluna de P^T, igualando o resultado ao elemento da 1ª linha e 2ª coluna de I, que é 0, e multiplicar a primeira linha de P pela terceira coluna de P^T, igualando o resultado ao elemento da 1ª linha e 3ª coluna de I, que também é 0. Nesse caso, temos

$$\begin{aligned}(-1/3)(-2/3) + (-2/3)a + (-2/3)(-1/3) &= 0\\ (-1/3)(-2/3) + (-2/3)b + (-2/3)(2/3) &= 0\end{aligned}.$$

Da primeira equação, obtemos 4/9 – (2/3)a = 0, ou a = 2/3. A segunda equação equivale a –2/9 – (2/3)b = 0, que implica em b = –1/3.

Resposta: a = 2/3 e b = –1/3.

b)

Como $x = A^{-1}b$ e A = QR, temos $x = (QR)^{-1}b = R^{-1}Q^{-1}b$. Dado o fato de Q ser ortogonal e R ser diagonal, temos:

$$Q^{-1} = Q^T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2\\ -1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\end{bmatrix} \text{ e } R^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Calculando $y = Q^Tb$, obtemos:

$$y = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2\\ -1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6\\ -2\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\\ -2\\ -4\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

Finalmente, encontramos x através do produto:

$$x = R^{-1}y = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\\ -2\\ -4\sqrt{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ -4\end{bmatrix}.$$

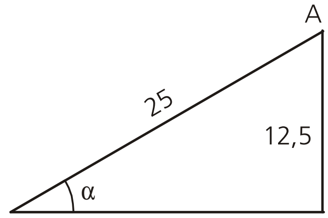
Resposta: $x = [1\ 1\ -4]^T$.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 10

a)

Como os pontos A e B estão sempre à mesma altura, basta determinarmos o tempo gasto para elevar um dos pontos. Tomemos, então, o ponto A. Como a ponte tem 50 m de comprimento e divide-se ao meio, cada parte elevada tem 25 m. A figura ao lado ilustra a situação na qual temos o ponto A a 12,5 m de altura. Nela, constatamos que o ângulo α que o vão da ponte faz com a horizontal é tal que sen(α) = 12,5/25 = 1/2. Assim sendo, α = 30º.

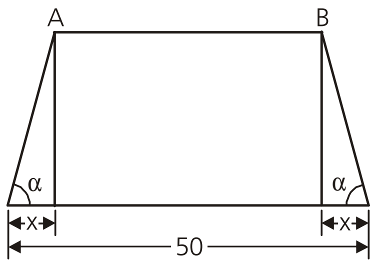


Se o tempo gasto para girar a ponte em 1º é 1/2 minuto, para girá-la em 30º, consome-se 30x(1/2) = 15 minutos.

Resposta: Gastam-se 15 minutos para girar a ponte até que os pontos A e B estejam a 12,5 m de altura.

b)

A figura ao lado mostra a posição da ponte quando α = 75º. Observa-se que x = 25.cos(75). Usando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos, obtemos cos(75º) = cos(45º).cos(30º) – sen(45º).sen(30º) = $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$.



Logo, $\overline{AB} = 50 - 2x = 50 - 50\cos(75°) = 50\left[1-\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\right]$.

Resposta: $\overline{AB} = 50\left[1-\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)\right]$**.**

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 11

a)

Os segmentos AC e AD têm o mesmo comprimento, 20 cm, de modo que o triângulo ACD é isósceles. Assim, $A\hat{D}C = A\hat{C}D = (180 - 120)/2 = 30°$. Pela lei dos senos, temos $\text{sen}(C\hat{A}D)/\overline{CD} = \text{sen}(A\hat{D}C)/\overline{AC}$. Isolando $\overline{CD}$ nessa equação, encontramos:

$$\overline{CD} = \text{sen}(C\hat{A}D) \cdot \overline{AC} / \text{sen}(A\hat{D}C) = \text{sen}(120°) \cdot 20 / \text{sen}(30) = (20\sqrt{3}/2)/[1/2] = 20\sqrt{3}.$$

Como os segmentos BD e BC também têm o mesmo comprimento e $D\hat{B}C = 60°$, o triângulo DCB é eqüilátero, de modo que $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 20\sqrt{3}$. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{AB}^2 = (20\sqrt{3})^2 - 20^2$, ou simplesmente $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ cm.

Resposta: O livro tem altura igual a $20\sqrt{2}$ cm.

a')

Os segmentos AC e AD têm o mesmo comprimento, 20 cm. Assim, pela lei dos cossenos, temos:

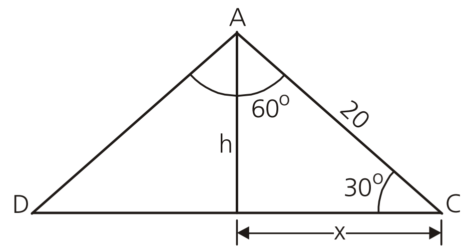
$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \cos(120°) = 400 + 400 - 2.20.20.(-1/2) = 1200.$$

Logo, $\overline{CD} = 20\sqrt{3}$.

Como os segmentos BD e BC também têm o mesmo comprimento e $D\hat{B}C = 60°$, o triângulo DCB é eqüilátero, de modo que $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 20\sqrt{3}$. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{AB}^2 = (20\sqrt{3})^2 - 20^2$, ou simplesmente $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ cm.

Resposta: O livro tem altura igual a $20\sqrt{2}$ cm.

a'')



Os segmentos AC e AD têm o mesmo comprimento, de modo que o triângulo ACD é isósceles. Assim, $A\hat{C}D = (180 - 120)/2 = 30°$. Observando a figura ao lado, concluímos que x = 20 cos(30º) = $10\sqrt{3}$, o que implica que $\overline{CD} = 2x = 20\sqrt{3}$.

Como os segmentos BD e BC também têm o mesmo comprimento e $D\hat{B}C = 60°$, o triângulo DCB é eqüilátero, de modo que $\overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD} = 20\sqrt{3}$. Usando o teorema de Pitágoras, obtemos $\overline{AB}^2 = (20\sqrt{3})^2 - 20^2$, ou simplesmente $\overline{AB} = 20\sqrt{2}$ cm.

Resposta: O livro tem altura igual a $20\sqrt{2}$ cm.

b)

A área da base do tetraedro é igual a $A_B = \dfrac{\overline{CD} \cdot h}{2} = \dfrac{\overline{CD} \cdot \overline{AC} \cdot \text{sen}(30°)}{2} = \dfrac{20\sqrt{3} \cdot 20 \cdot (1/2)}{2} = 100\sqrt{3}$ cm².

Logo, o volume do tetraedro é $\dfrac{1}{3} A_B \cdot \overline{AB} = \dfrac{1}{3} 100\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{2} = \dfrac{2000}{3}\sqrt{6}$ cm³.

Resposta: O tetraedro tem um volume de $\dfrac{2000}{3}\sqrt{6}$ cm³.

b')

A área da base do tetraedro é igual a $A_B = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \text{sen}(120°)}{2} == \dfrac{20 \cdot 20 \cdot \left(\sqrt{3}/2\right)}{2} = 100\sqrt{3}$ cm².

Logo, o volume do tetraedro é $\dfrac{1}{3} A_B \cdot \overline{AB} = \dfrac{1}{3} 100\sqrt{3} \cdot 20\sqrt{2} = \dfrac{2000}{3}\sqrt{6}$ cm³.

Resposta: O tetraedro tem um volume de $\dfrac{2000}{3}\sqrt{6}$ cm³.

RESPOSTAS ESPERADAS – MATEMÁTICA

Questão 12

a)
O ponto R está na interseção das duas retas, de modo que sua abscissa satisfaz ax + b = cx. Mas b = (a + c)/2, de modo que c = 2b – a, o que implica que ax + b = (2b – a)x, ou x = b/(2b – 2a). Usando y = cx, temos y = (2b – a)b/(2b – 2a).
O ponto P está sobre as retas y = ax + b e y = 0, de modo que sua abscissa é –b/a. Já o ponto Q está sobre as retas y = ax + b e x = 0, de modo que sua ordenada é b.

Resposta: As coordenadas são P(–b/a, 0), Q(0, b) e R(b/(2b – 2a), (2b – a)b/(2b – 2a)).

b)
A área do triângulo OPQ, que vale 1, é igual à soma das áreas dos triângulos OPR e ORQ . Assim, como $A_{OPR} = 2A_{ORQ}$, temos $A_{ORQ} + 2A_{ORQ} = 1$, ou $A_{ORQ} = 1/3$. Logo, $A_{OPR} = 2/3$.
Uma vez que $A_{ORQ} = \overline{OQ} \cdot R_x / 2 = b^2 /[2(2b-2a)] = 1/3$, temos $3b^2 = 4(b - a)$.
Da mesma forma, $A_{OPR} = \overline{OP} \cdot R_y / 2 = -(b/a) \cdot (2b-a)b /[2 \cdot (2b-2a)] = 2/3$, donde $-3b^2(2b - a) = 8a(b - a)$.
Substituindo o termo $3b^2$ por 4(b – a) nessa última equação, obtemos a – 2b = 2a, ou a = –2b. Assim, $3b^2 = 4(b - (-2b)) = 12b$, ou 3b(b – 4) = 0. Como b ≠ 0, temos b = 4, donde a = –8 e c = 2b – a = 16.

Resposta: a = –8, b = 4 e c = 16.

b')
A área do triângulo OPQ vale 1, de modo que $\frac{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}\right)b = 1$. Assim, $a = -\frac{b^2}{2}$.

Como $A_{OPR} = 2A_{ORQ}$, temos $\frac{\overline{OP} \cdot R_y}{2} = 2\frac{\overline{OQ} \cdot R_x}{2}$, ou $\frac{1}{2}\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{(2b-a)b}{2b-2a}\right) = b\left(\frac{b}{2b-2a}\right)$.
Desta equação, concluímos que (2b – a) = –2a, ou a = –2b.
Juntando esses dois resultados, obtemos $2b = b^2/2$, ou b = 4. Daí, a = –8, e c = 2b – a = 16.

Resposta: a = –8, b = 4 e c = 16.