ENSINO MÉDIO
PRÉ-VESTIBULAR

MAT

MATEMÁTICA

2

Poliedro
Sistema de Ensino

Poliedro
Sistema de Ensino

COLEÇÃO PV

ISBN 978-65-5613-136-8

Presidente: Nicolau Arbex Sarkis

Autoria: Flavio Lieb Filho, João Guilherme Giudice, Marco Aurélio de Melo Miola, Renato Alberto Rodrigues (Tião) e Umberto Cesar Chacon Malanga

Edição de conteúdo: Juliana Grassmann dos Santos, Andriele de Carvalho Landim Aquino, Larissa Calazans Nicoletti Mesquita, Rodrigo Macena e Silva, Waldyr Correa dos Santos Junior e Gabriel Henrique Siqueira Neves (assist.)

Edição de arte: Christine Getschko, Lourenzo Acunzo, Bruna H. Fava, Marina Ferreira e Nathalia Laia

Design: Adilson Casarotti

Licenciamento e multimídia: Leticia Palaria de Castro Rocha, Jessica Clifton Riley, Danielle Navarro Fernandes e Vitor Hugo Duarte Medeiros

Revisão: Rosangela Carmo Muricy, Bianca da Silva Rocha, Ellen Barros de Souza, Paulo V. Coelho, Sara de Jesus Santos e Thiago Marques

Impressão e acabamento: PifferPrint

Crédito de capa: Viacheslav Lopatin/Shutterstock.com

Poliedro Sistema de Ensino
T. 12 3924-1616
sistemapoliedro.com.br

Sumário

Frente 1

Frente 2

Frente 3

TheHighestQualityImages/Shutterstock.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

7

Função logarítmica

Nos séculos XV e XVI, motivados pela procura de novas terras e rotas de comércio de especiarias, ouro e prata, Portugal e Espanha lideraram “a era dos descobrimentos”. No início do século XVII, França, Inglaterra e Holanda também navegavam mundo afora, chegando à Austrália e à Nova Zelândia. O sucesso dessas expedições era consequência de muita coragem, espírito aventureiro, conhecimentos de astronomia e muita matemática.

A invenção dos logaritmos pelo escocês John Napier (1550-1617) impulsionou significativamente as navegações, tornando o cálculo com operações aritméticas complicadas (potências e raízes) mais rápido e simples.

Ainda hoje a aplicação de logaritmos ajuda a modelar inúmeros fenômenos, tais como: crescimento populacional, crescimento bacteriano, cálculo de pH, estudo do carbono-14, políticas sociais, cálculo de juros, estudos sismológicos e decaimento radioativo.

Logaritmos

Ao longo do capítulo anterior, você resolveu algumas equações exponenciais, como $3^x = 3$ e $5^x = 25$, que são de fácil resolução, já que são equivalentes a igualdades entre potências de mesma base:

$$3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$$
$$5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2 \Rightarrow x = 2$$

Mas e se precisarmos resolver a equação exponencial $2^x = 3$?

Perceba que a dificuldade em resolvê-la, quando comparada com as duas primeiras equações acima, vem do fato de que não podemos expressar o número 3 como uma potência de base 2 com expoente racional.

! Atenção

Apesar de $2^1 = 2$ e $2^2 = 4$, a média entre esses dois expoentes, 1,5, **não** é solução da equação $2^x = 3$, pois $2^{1,5} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, que é diferente de 3.

A solução da equação $2^x = 3$ é um número irracional aproximadamente igual a 1,584962. Escrever ou fazer cálculos com esse número é trabalhoso, e daí vem a necessidade de escrevê-lo de uma forma mais simples. Para isso, utilizamos uma notação com logaritmos:

$$2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$$

De modo geral, temos a seguinte definição:

Sendo a e $b \in \mathbb{R}_+^*$, com $b \neq 1$, o logaritmo de a na base b, representado por $\log_b a$, é o número real x tal que $b^x = a$.

Assim, temos:

expoente logaritmo

$$b^x = a \Leftrightarrow \log_b a = x$$

base resultado da potência base logaritmando

Exemplos:

a) $\log_5 25 = 2$, pois $5^2 = 25$.

b) $\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$.

c) $\log_2 32 = 5$, pois $2^5 = 32$.

d) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$, pois $6^{-2} = \frac{1}{36}$.

! Atenção

No caso do logaritmo decimal (isto é, quando a base do logaritmo for 10), podemos omiti-la da notação:

- $\log 1 = \log_{10} 1 = 0$
- $\log 1\,000 = \log_{10} 1\,000 = 3$
- $\log 0,1 = \log_{10} 0,1 = \log_{10} 10^{-1} = -1$

Já quando a base do logaritmo é o número de Euler, $e \cong 2,7183$, a notação utilizada é ℓn:

- $\ell n\, e = \log_e e = 1$
- $\ell n\, e^3 = \log_e e^3 = 3$
- $\ell n \frac{1}{e^7} = \ell n\, e^{-7} = -7$

O logaritmo de base e recebe o nome de **logaritmo natural** ou **logaritmo neperiano**, em homenagem a John Napier, considerado um dos responsáveis pelo desenvolvimento dos logaritmos.

Alguns logaritmos são mais difíceis de ser calculados, mas podem ser convertidos em igualdades entre potências de mesma base.

Exemplos:

a) Calcule $\log_4 \sqrt{2}$.

$$\log_4 \sqrt{2} = x \Rightarrow 4^x = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

b) Calcule $\log_{1,25} 0,512$.

$$\log_{1,25} 0,512 = x \Rightarrow 1,25^x = 0,512 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{125}{100}\right)^x = \frac{512}{1000} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{64}{125} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{4^3}{5^3} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-3} \Rightarrow x = -3$$

Nem todos os logaritmos são simples de calcular. O valor de $\log_2 3 \cong 1,584962$ é um deles. Para isso, precisamos de uma calculadora ou uma "tabela de logaritmos", que será vista posteriormente.

Saiba mais

As condições de existência $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$ para o logaritmo $\log_b a$ são dadas para garantir que, para quaisquer valores de a e b nessas condições, o logaritmo exista e esteja bem definido.

Por exemplo, observe que, se $b = 1$, a expressão $\log_1 1$ não estaria bem definida, já que $x = \log_1 1$ implica $1^x = 1$, e qualquer número real satisfaz essa equação. Além disso, também não existiria $\log_1 N$ para qualquer N, número real diferente de 1, já que $x = \log_1 N$ implica $1^x = N$, e essa potência é sempre igual a 1.

Outros exemplos podem ser observados em expressões como $\log_2(-4)$ e $\log_{(-5)}(-25)$: a primeira não existe, pois toda potência de um número real positivo é positiva; a segunda gera uma equação sem solução em $\mathbb{R}$, $(-5)^x = -25$.

Consequências da definição

Algumas consequências imediatas da definição:

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a a^n = n$
3. $\log_b 1 = 0$
4. $b^{\log_b a} = a$

As três primeiras são imediatas:

1. $x = \log_a a \Leftrightarrow a^x = a \Leftrightarrow a^x = a^1 \Leftrightarrow x = 1$
2. $x = \log_a a^n \Leftrightarrow a^x = a^n \Leftrightarrow x = n$
3. $x = \log_b 1 \Leftrightarrow b^x = 1 \Leftrightarrow b^x = b^0 \Leftrightarrow x = 0$

Já a 4ª consequência vem de que, se $b^x = a \Leftrightarrow \log_b a = x$, então $b^x = b^{\log_b a} = a$.

Exemplos:

a) $2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$

b) $3^{\log_3 5} = 5$

c) $3^{2\log_3 5} = (3^2)^{\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25$

d) $\left(\frac{1}{e}\right)^{\ell n 7} = \left(e^{-1}\right)^{\ell n 7} = \left(e^{\ell n 7}\right)^{-1} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$

Saiba mais

- O cologaritmo é o simétrico (ou oposto) do logaritmo correspondente, ou seja, $\text{colog}_b a = -\log_b a$.
- O logaritmando também é chamado de antilogaritmo. Assim, $a = \text{antilog}_b x \Leftrightarrow x = \log_b a \Leftrightarrow b^x = a$. Por exemplo, como $\log_5 25 = 2$, temos $\text{antilog}_5 2 = 5^2 = 25$.

Propriedades

Considerando as condições de existência $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$ e $y > 0$, temos, além das quatro consequências da definição, quatro propriedades básicas dos logaritmos:

1. $\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
3. $\log_b x^n = n \cdot \log_b x \ (n \in \mathbb{R})$
4. $\log_{b^k} x = \dfrac{1}{k} \log_b x \ (k \neq 0)$

As demonstrações são feitas usando as propriedades das potências. Sejam $\log_b x = \text{P}$ e $\log_b y = \text{Q}$ (e, por consequência, $b^\text{P} = x$ e $b^\text{Q} = y$), com P, Q e R $\in \mathbb{R}$. Então:

1. $\log_b (x \cdot y) = \text{R} \Leftrightarrow x \cdot y = b^\text{R} \Leftrightarrow b^\text{P} \cdot b^\text{Q} = b^\text{R} \Leftrightarrow b^{\text{P}+\text{Q}} = b^\text{R} \Leftrightarrow \text{P} + \text{Q} = \text{R} \Leftrightarrow \log_b x + \log_b y = \log_b (x \cdot y)$
2. $\log_b \left(\dfrac{x}{y}\right) = \text{R} \Leftrightarrow \dfrac{x}{y} = b^\text{R} \Leftrightarrow \dfrac{b^\text{P}}{b^\text{Q}} = b^\text{R} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow b^{\text{P}-\text{Q}} = b^\text{R} \Leftrightarrow \text{P} - \text{Q} = \text{R} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \log_b x - \log_b y = \log_b \left(\dfrac{x}{y}\right)$
3. $\log_b x^n = \text{R} \Leftrightarrow x^n = b^\text{R} \Leftrightarrow (b^\text{P})^n = b^\text{R} \Leftrightarrow b^{n\text{P}} = b^\text{R} \Leftrightarrow n\text{P} = \text{R} \Leftrightarrow n \cdot \log_b x = \log_b x^n$
4. $\log_{b^k} x = \text{R} \Leftrightarrow x = (b^k)^\text{R} \Leftrightarrow b^\text{P} = b^{k\text{R}} \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow \text{P} = k\text{R} \Leftrightarrow \dfrac{\text{P}}{k} = \text{R} \Leftrightarrow \dfrac{1}{k}\log_b x = \log_{b^k} x$

Exercício resolvido

1. Dados $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, expresse os logaritmos abaixo em função de a e b.

a) log 6
b) log 12
c) log 1,5
d) log 5
e) log 27
f) log 24

Resolução:

a) $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$
b) $\log 12 = \log (2 \cdot 2 \cdot 3) = \log 2 + \log 2 + \log 3 = 2a + b$
c) $\log 1{,}5 = \log\left(\dfrac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = b - a$
d) $\log 5 = \log\left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - a$
e) $\log 27 = \log 3^3 = 3\log 3 = 3b$
f) $\log 24 = \log (2^3 \cdot 3) = \log 2^3 + \log 3 = 3\log 2 + \log 3 = 3a + b$

Atenção

Quando aplicamos as propriedades, devemos sempre observar as condições impostas pelo logaritmo. Veja um exemplo de aplicação **incorreta** da propriedade 3:

$$\log_2[(-8)^2] = 2\log_2(-8)$$

Essa aplicação está incorreta porque no membro da direita dessa equação, o logaritmando é negativo, o que não condiz com as condições de existência.

Para evitar esse tipo de erro, algumas referências apresentam as propriedades com módulo:

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b |x| + \log_b |y|$$

$$\log_b \left(\frac{x}{y}\right) = \log_b |x| - \log_b |y|$$

$$\log_b x^n = n \cdot \log_b |x|$$

Mudança de base

Dado um logaritmo qualquer, podemos escrevê-lo como uma razão entre logaritmos de mesma base. Essa técnica pode ser útil em equações, simplificações de expressões e até mesmo no uso de calculadoras que tenham apenas as operações de logaritmo decimal ou logaritmo neperiano.

Respeitando as condições de existência do logaritmo, de modo geral, temos:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Podemos verificar essa propriedade associando valores aos logaritmos da fração:

$$\log_c a = y \Leftrightarrow c^y = a \qquad \log_c b = z \Leftrightarrow c^z = b$$

Desse modo: $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$

Então: $(c^z)^x = c^y \Leftrightarrow c^{xz} = c^y \Leftrightarrow xz - y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y}{z} \therefore \log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

Exemplos:

a) $\log_3 5 = \dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$

b) $\log_2 7 = \dfrac{\ell n\, 7}{\ell n\, 2}$

Consequências da mudança de base

1. Aplicando a mudança de base para uma base igual ao logaritmando, temos:

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} \Leftrightarrow \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Outra maneira de escrevermos a mesma consequência é:

$$\log_b a = x \Rightarrow \log_a b = \frac{1}{x}$$

Exemplos:

a) $\log_3 9 = 2 \Rightarrow \log_9 3 = \dfrac{1}{2}$

b) $\dfrac{1}{\log_3 2} = \log_2 3$

2. Fazendo o produto cruzado, temos:

$$\frac{\log_b a}{1} = \frac{\log_c a}{\log_c b} \Leftrightarrow \log_b a \cdot \log_c b = \log_c a$$

Logo, quando multiplicamos dois logaritmos, se a base de um deles for igual ao logaritmando do outro, podemos escrever um único logaritmo com os valores diferentes.

Exemplos:

a) $\log_5 8 \cdot \log_2 5 = \log_2 8 = 3$

b) $\log_3 7 \cdot \log_7 2 \cdot \log_2 9 = \log_3 2 \cdot \log_2 9 = \log_3 9 = 2$

Exercício resolvido

2. Simplifique:

a) $\dfrac{\log_3 8}{\log_9 2}$ **b)** $\log_3 2 \cdot \log_4 5 \cdot \log_{25} 9$

Resolução:

a) $\dfrac{\log_3 8}{\log_9 2} = \dfrac{\log_3 8}{\log_{3^2} 2} = \dfrac{\log_3 8}{\frac{1}{2}\log_3 2} = 2\dfrac{\log_3 8}{\log_3 2} = 2\log_2 8 =$

$= 2 \cdot 3 = 6$

b) $\log_{25} 9 = \log_{5^2} 3^2 = 2 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \log_5 3 = \log_5 3$

Logo, $\log_3 2 \cdot \log_4 5 \cdot \log_{25} 9 = \log_3 2 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 3 =$
$= \log_3 2 \cdot (\log_4 5 \cdot \log_5 3) = \log_3 2 \cdot \log_4 3 = \log_4 2 = \dfrac{1}{2}$

Logaritmos decimais

Os logaritmos decimais, ou seja, os logaritmos de base 10, são muito utilizados em outras ciências, como a Química e a Física. Um dos motivos para isso é o fato de eles estarem relacionados à ordem de grandeza de números em base decimal. Para compreender isso, observe os exemplos abaixo, nos quais o logaritmando é uma potência de base 10 e expoente natural.

$\log 10 = 1$

$\log 100 = 2$

$\log 1\,000 = 3$

...

$\log 100\,000\,000 = 8$

...

$\log 10^n = n$

Logo, o logaritmo de uma potência de base 10 e expoente natural é equivalente à quantidade de zeros na expressão decimal do logaritmando.

Observe agora os exemplos abaixo, nos quais o logaritmando é uma potência de base 10 e expoente inteiro negativo.

$\log 0{,}1 = -1$

$\log 0{,}01 = -2$

$\log 0{,}001 = -3$

...

$\log 0{,}00000001 = -8$

...

$\log 10^{-n} = -n$

Assim, o logaritmo de uma potência de base 10 e expoente inteiro negativo equivale à quantidade de casas decimais após a vírgula.

Mantissa e característica

A partir dos resultados vistos anteriormente, podemos verificar o efeito no logaritmo quando multiplicamos um logaritmando inteiro maior do que 1 por potências de 10 de expoente inteiro positivo.

Exemplos:

$\log 2 \cong 0{,}3010$

$\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 \cong 0{,}3010 + 1 =$
$= 1{,}3010$

$\log 200 = \log (2 \cdot 100) = \log 2 + \log 100 \cong 0{,}3010 +$
$+ 2 = 2{,}3010$

$\log 200\,000\,000 = \log (2 \cdot 100\,000\,000) = \log 2 +$
$+ \log 100\,000\,000 \cong 0{,}3010 + 8 = 8{,}3010$

Perceba que a parte decimal do logaritmo, que é chamada de **mantissa**, permanece constante. Já a parte inteira, chamada de **característica**, varia conforme a ordem de grandeza do logaritmando: se o logaritmando é um número inteiro com N algarismos, a característica é N − 1. Assim, sabemos que, por exemplo, $\log 200\,000 \cong 5{,}3010$, usando a mantissa de log 2 e 6 − 1 = 5 como característica, já que 200 000 tem 6 algarismos.

Antes do desenvolvimento das calculadoras, a propriedade vista anteriormente, que indica que a mantissa se mantém constante quando o logaritmando é multiplicado por potências de 10, era usada junto a uma tabela de logaritmos, na qual eram indicadas aproximações da mantissa para logaritmando em determinado intervalo – por exemplo, entre 100 e 999. Desse modo, era possível estimar o logaritmo de qualquer número: bastando identificar sua característica – que é uma função de sua ordem de grandeza – e obter a mantissa correspondente aos três primeiros algarismos do logaritmando, no caso da tabela entre 100 e 999.

Por exemplo, suponha que se deseja calcular log 85 489. Para isso, fazemos o seguinte:

- Identificamos que a característica de log 85 489 é igual a 4, pois 85 489 tem 5 algarismos.
- Buscamos, em uma tabela de logaritmos, a mantissa correspondente a 854 (que são os 3 primeiros algarismos do logaritmando) e encontramos 0,9315.

	Mantissas									
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

- Logo, $\log 85\,489 \cong 4{,}9315$; valor esse que está correto até a 3ª casa decimal.

Usando essa técnica de modo inverso, a partir da característica podemos determinar o número de algarismos de um logaritmando inteiro, ou seja, encontrar a ordem de grandeza desse número.

Exercício resolvido

3. Quantos algarismos tem o número 7^{10}, sabendo que $\log 7 \cong 0{,}8451$?

Resolução:

$\log 7^{10} = 10 \cdot \log 7 \cong 10 \cdot 0{,}8451 = 8{,}451$
Como a característica de $\log 7^{10}$ é 8, o número 7^{10} tem $8 + 1 = 9$ algarismos.
Também podemos afirmar que, se $8 < \log 7^{10} < 9$, então $10^8 < 7^{10} < 10^9$.

Equações logarítmicas

Veremos mais adiante que a função logarítmica é injetora, ou seja, sabemos que só existe um logaritmando em determinada base que produz aquele resultado do logaritmo. Isso quer dizer, por exemplo, que $\log_2 8 = 3$ e não existe nenhum outro logaritmando além de 8 que, na base 2, produz o resultado 3. De modo geral, isso significa que, respeitando as condições de existência do logaritmo, temos a propriedade:

$$\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$$

Para resolver equações logarítmicas, vamos dividi-las em dois tipos.

Equações do tipo $\log_b P(x) = \log_b Q(x)$

Para equações logarítmicas cuja base dos logaritmos é a mesma, devemos igualar os logaritmandos e então impor as condições de existência, ou seja, o conjunto solução da equação $\log_b P(x) = \log_b Q(x)$ é formado pelos elementos do conjunto solução de $P(x) = Q(x)$ que satisfazem as condições de existência $P(x) > 0$ e $Q(x) > 0$.

Exercício resolvido

4. Resolva as equações a seguir.

a) $\log_3(3x - 2) = \log_3(x + 6)$
b) $\log_5(2x - 5) = \log_5(x - 3)$
c) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = \log_2(2x - 1)$

Resolução:

a) Primeiro, igualamos os logaritmandos:

$$3x - 2 = x + 6 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$$

Depois, testamos a raiz nas condições de existência, que são $3x - 2 > 0$ e $x + 6 > 0$:

$3 \cdot 4 - 2 = 10 > 0$ (V)
$4 + 6 = 10 > 0$ (V)

Portanto, $S = \{4\}$.

b) Igualamos os logaritmandos:

$$2x - 5 = x - 3 \Rightarrow x = 2$$

Ao testarmos a raiz, obtemos:

$2 \cdot 2 - 5 = -1 > 0$ (F)
$2 - 3 = -1 > 0$ (F)

Logo, se assumíssemos $x = 2$ como raiz, teríamos $\log_5(-1) = \log_5(-1)$, que não respeita as condições de existência do logaritmo.
Portanto, $S = \varnothing$.

c) Utilizando a propriedade $\log_b x + \log_b y = \log_b(x \cdot y)$, obtemos:

$\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = \log_2(2x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2[(x + 1)(x - 1)] = \log_2(2x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2(x^2 - 1) = \log_2(2x - 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 1 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

As condições de existência da equação $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = \log_2(2x - 1)$ são:

$x + 1 > 0$ (I)
$x - 1 > 0$ (II)
$2x - 1 > 0$ (III)

Testando as raízes nas condições acima, temos:

• $x = 0$:	(I)	$0 + 1 = 1 > 0$	(V)
	(II)	$0 - 1 = -1 > 0$	(F)
	(III)	$0 - 1 = -1 > 0$	(F)
• $x = 2$:	(I)	$2 + 1 = 3 > 0$	(V)
	(II)	$2 - 1 = 1 > 0$	(V)
	(III)	$4 - 1 = 3 > 0$	(V)

Portanto, $S = \{2\}$.

! Atenção

Nas equações apresentadas ao igualar os logaritmandos, obtemos uma ou mais raízes e depois testamos as condições de existência para cada uma delas. Desse modo, não há necessidade de primeiro resolver as inequações obtidas a partir das condições de existência e depois verificar se as raízes obtidas estão nos conjuntos solução das inequações.
Perceba que, para uma raiz pertencer ao conjunto solução da equação logarítmica, ela deve satisfazer todas as condições de existência. Assim, uma raiz obtida pela igualdade entre os logaritmandos que não satisfaça uma ou mais condições de existência não pode ser raiz da equação logarítmica.

Equações do tipo $\log_b P(x) = m$

Podemos resolver uma equação do tipo $\log_b P(x) = m$ aplicando a definição de logaritmo:

$$\log_b P(x) = m \Rightarrow P(x) = b^m$$

Se a base b satisfaz as condições de existência ($b > 0$ e $b \neq 1$), então não há necessidade de testar a raiz obtida na condição de existência $P(x) > 0$, já que, sendo $b > 0$, então $P(x) = b^m > 0$.

Exercício resolvido

5. Resolva as equações a seguir.

a) $\log_4(2x + 6) = 2$
b) $\log_5(\log_2 x) = 1$
c) $\log_x(2x + 3) = 2$

Resolução:

a) $\log_4(2x+6) = 2 \Rightarrow 2x+6 = 4^2 \Rightarrow 2x+6 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 5$
Portanto, $S = \{5\}$.

b) $\log_5(\log_2 x) = 1 \Rightarrow \log_2 x = 5^1 \Rightarrow \log_2 x = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2^5 = 32$
Portanto, $S = \{32\}$.

c) Note que, na equação $\log_x(2x+3) = 2$, a base está em função de x. Desse modo, temos de testar as raízes obtidas nas condições de existência da base: $x > 0$ e $x \neq 1$.
$\log_x(2x+3) = 2 \Rightarrow 2x+3 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 3$ ou $x = -1$
Testando as raízes nas condições $x > 0$ e $x \neq 1$:
- $x = -1$: $-1 > 0$ (F); $-1 \neq 1$ (V)
- $x = 3$: $3 > 0$ (V); $3 \neq 1$ (V)

Portanto, $S = \{3\}$.

! Atenção

Como visto anteriormente, com exceção de equações do tipo $\log_b P(x) = m$, ao resolvermos uma equação logarítmica, devemos sempre testar as raízes obtidas nas condições de existência dos logaritmos, já que a aplicação de propriedades ou transformações nas equações pode introduzir raízes novas que não são válidas para a equação original.

Outras equações

Algumas outras equações logarítmicas que não se encaixam nos dois casos descritos acima podem sofrer transformações para que recaiam em um deles, por meio de troca de incógnitas, aplicação de propriedades ou fazendo mudanças de base.

Exercício resolvido

6. Resolva as equações abaixo.

a) $\log_3 x + \log_x 3 = \dfrac{5}{2}$

b) $\log_2(3x-1) + \log_2(2x) = \log_{\sqrt{2}}(x+1)$

Resolução:

a) Para essa equação, podemos trabalhar com uma incógnita auxiliar $t = \log_3 x$. Desse modo, temos $\log_x 3 = \dfrac{1}{t}$, e assim:

$$\log_3 x + \log_x 3 = \frac{5}{2} \Rightarrow t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ ou } t = \frac{1}{2}$$

Então:

$$t = 2 \Rightarrow \log_3 x = 2 \Rightarrow x = 3^2 = 9$$

ou

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

As condições de existência para a equação $\log_3 x + \log_x 3 = \dfrac{5}{2}$ são $x > 0$ e $x \neq 1$. Testando as raízes nas condições, temos:
- $x = 9$: $9 > 0$ (V); $9 \neq 1$ (V)
- $x = \sqrt{3}$: $\sqrt{3} > 0$ (V); $\sqrt{3} \neq 1$ (V)

Portanto, $S = \left\{\sqrt{3}, 9\right\}$.

b) Aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos na equação, temos:
$\log_2(3x-1) + \log_2(2x) = \log_{\sqrt{2}}(x+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2[(3x-1)(2x)] = \log_{2^{\frac{1}{2}}}(x+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2(6x^2 - 2x) = 2\log_2(x+1) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_2(6x^2 - 2x) = \log_2(x+1)^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 6x^2 - 2x = (x+1)^2 \Rightarrow 5x^2 - 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -\dfrac{1}{5}$

As condições de existência para a equação $\log_2(3x-1) + \log_2(2x) = \log_{\sqrt{2}}(x+1)$ são $3x - 1 > 0$, $2x > 0$ e $x + 1 > 0$. Testando as raízes nessas condições, temos:
- $x = 1$: $3 \cdot 1 - 1 = 2 > 0$ (V); $2 \cdot 1 = 2 > 0$ (V); $1 + 1 = 2 > 0$ (V)
- $x = -\dfrac{1}{5}$: $3 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right) - 1 = -\dfrac{8}{5} > 0$ (F); $2 \cdot \left(-\dfrac{1}{5}\right) = -\dfrac{2}{5} > 0$ (F); $\left(-\dfrac{1}{5}\right) + 1 = \dfrac{4}{5} > 0$ (V)

Portanto, $S = \{1\}$.

Função logarítmica

Função logarítmica é toda função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \log_b x$, com $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $b \neq 1$.

Exemplos:

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $g(x) = \log_{\frac{1}{7}} x$

c) $h(x) = \ell n\, x$

d) $j(x) = \log x$

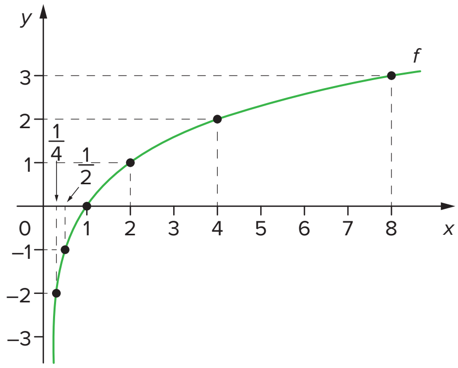
Gráfico da função logarítmica

Para analisarmos o gráfico de funções logarítmicas, devemos dividir as funções em dois casos: $0 < b < 1$ e $b > 1$.

Base maior do que 1 ($b > 1$)

Tomemos como exemplo $b = 2$, $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2 x$ e vamos atribuir valores para x para construir o gráfico da função:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y = f(x)	–2	–1	0	1	2	3



A partir do gráfico, notamos que a função f:

- tem no domínio apenas valores positivos de x:

$$D(f) = \mathbb{R}_+^*$$

- é crescente, ou seja, aumentando valores de x teremos um aumento dos valores de y:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

- é injetora: diferentes valores de x correspondem a diferentes valores de y:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

- tem como conjunto imagem os números reais:

$$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$$

- o gráfico cruza o eixo x no ponto (1, 0).

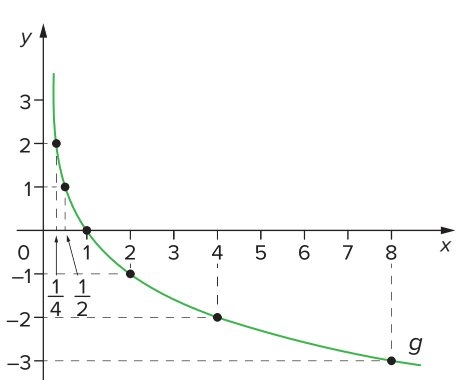
Além desses pontos, perceba que, diminuindo os valores de x, os valores de y ficam cada vez menores; o gráfico da função se aproxima do eixo das ordenadas, mas, como $x > 0$, o gráfico não "encosta" nesse eixo. Como ocorre na função exponencial, existe então uma assíntota, a reta $x = 0$: uma reta para a qual o gráfico da função "tende a encostar".

Essas características valem para todas as funções logarítmicas de base maior do que 1.

Base entre 0 e 1 ($0 < b < 1$)

Considerando agora $b = \frac{1}{2}$, $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, vamos novamente atribuir valores para x e construir o gráfico da função:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y = g(x)	2	1	0	−1	−2	−3



Comparando os dois quadros, notamos que os valores da 2ª linha em um quadro são os opostos dos valores do outro quadro. Isso implica que o gráfico de g é o resultado da reflexão do gráfico de f em torno do eixo x.

Além disso, notamos que a função g:

- tem no domínio apenas valores positivos de x:

$$D(g) = \mathbb{R}_+^*$$

- é decrescente, ou seja, aumentando valores de x, os valores de y diminuem:

$$x_1 > x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

- é injetora: diferentes valores de x correspondem a diferentes valores de y:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$$

- tem como conjunto imagem os números reais:

$$\text{Im}(g) = \mathbb{R}$$

- o gráfico cruza o eixo x no ponto (1, 0).

Por fim, assim como no gráfico de f, o gráfico de g tem a reta $x = 0$ como assíntota – quanto menor o valor de x, maiores ficam os valores de y, e o gráfico se aproxima mais da assíntota.

Essas características valem para todas as funções logarítmicas com base entre 0 e 1.

! Atenção

- A função $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ também pode ser escrita como $g(x) = -\log_2 x$, o que explica a alteração do sinal do y nos quadros e nos gráficos.
- A principal diferenciação entre os dois tipos de gráfico de função logarítmica é o seu crescimento: crescente para base maior do que 1 e decrescente para base entre 0 e 1. Daí a importância de observarmos a base da função para construirmos seu gráfico.

Exercícios resolvidos

7. Para cada uma das funções a seguir, indique se ela é crescente ou decrescente.

a) $f(x) = \log_{15} x$

b) $g(x) = \ell n\, x$

c) $h(x) = -\log_3 x$

d) $j(x) = \log_{\frac{3}{\pi}} x$

e) $k(x) = \log_2 \frac{1}{x}$

Resolução:

a) Como a base 15 é maior do que 1, f é uma função crescente.

b) A base de $\ell n\, x$ é aproximadamente 2,7, que é maior do que 1. Logo, g é uma função crescente.

c) A função $H(x) = \log_3 x$ é crescente, pois $3 > 1$. Logo, como $h(x) = -H(x)$, a função h é decrescente.

d) Como $0 < 3 < \pi$, então $0 < \frac{3}{\pi} < 1$. Portanto, j é uma função decrescente.

e) $k(x) = \log_2 \frac{1}{x} = \log_2 1 - \log_2 x = 0 - \log_2 x = -\log_2 x$.

Portanto, k é uma função decrescente.

8. Determine o domínio da função $f(x) = \log_2(x - 3)$ e construa seu gráfico. Em seguida, determine a assíntota dele.

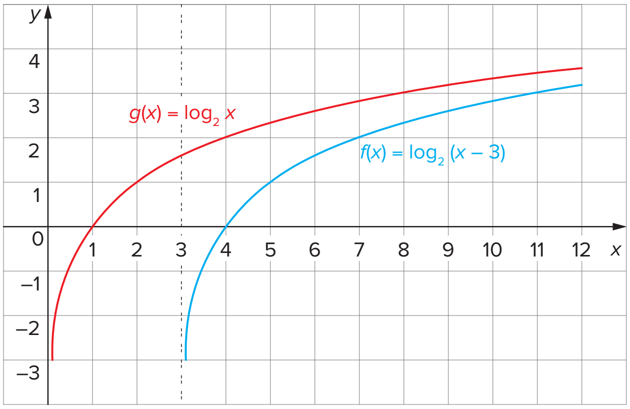
Resolução:

O domínio $D(f)$ é dado pela condição de existência do logaritmo:

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$$

Logo, $D(f) =]3, +\infty[$.

Podemos obter o gráfico de $f(x) = \log_2(x - 3)$ a partir da translação em 3 unidades para a direita do gráfico da função $g(x) = \log_2 x$.



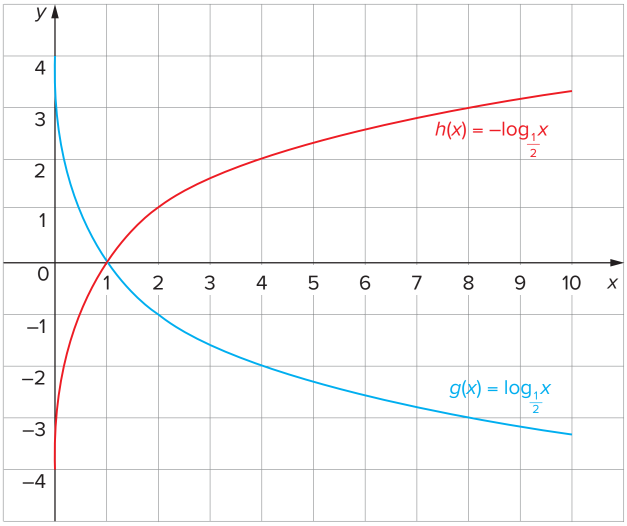
Pela representação gráfica acima, podemos observar que a assíntota do gráfico de f é a reta vertical de lei de formação $x = 3$.

9. Construa o gráfico de $f(x) = 2 - \log_{\frac{1}{2}} x$.

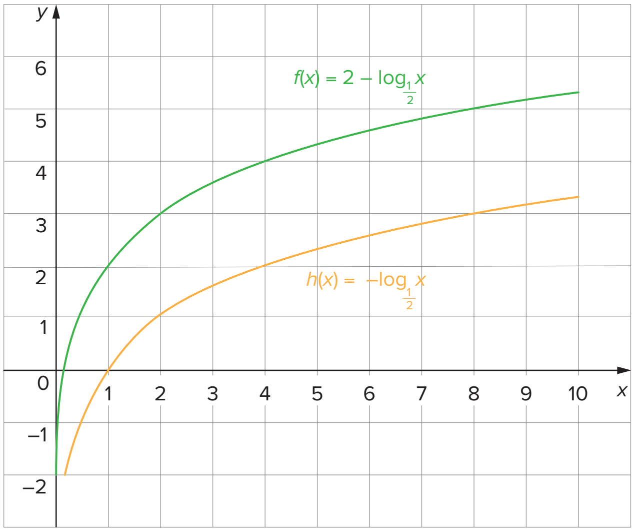
Resolução:

Para construir o gráfico da função f, podemos utilizar duas funções intermediárias: $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ e $h(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x$.

I. O gráfico de $h(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x$ é obtido pela reflexão em torno do eixo x do gráfico de $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.



II. O gráfico de $f(x) = 2 - \log_{\frac{1}{2}} x$ é obtido pela translação em 2 unidades para cima do gráfico de $h(x) = -\log_{\frac{1}{2}} x$.



Estabelecendo relações

Em diversos contextos, é necessário medirmos a intensidade do som; por exemplo, para identificar se um ambiente está com ruído acima do nível saudável para um ser humano. Para isso, utilizamos um instrumento chamado decibelímetro. No entanto, para compreendermos como ele funciona, é preciso primeiro entender que a nossa concepção de som é baseada em duas grandezas: pressão sonora e intensidade sonora, cujas unidades de medida são, respectivamente, N/m^2 e W/m^2. O problema é que a comparação entre dois valores de uma dessas grandezas é dificultada pelo fato de que, para o ouvido humano, a "intensidade" de um som não é diretamente proporcional à sua pressão sonora ou intensidade sonora – por exemplo, um som aumentar de 10 N/m^2 para 20 N/m^2 e depois de 20 N/m^2 para 30 N/m^2 não é interpretado pelos nossos ouvidos como uma mesma variação de intensidade.

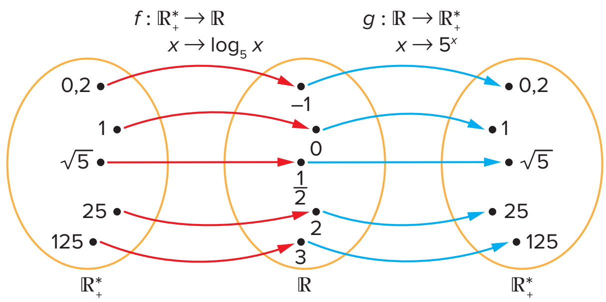
Para resolver isso, geralmente medimos o *nível* de pressão sonora ou o *nível* de intensidade sonora, que é proporcional ao logaritmo da razão entre a grandeza e um valor padrão. No caso da pressão, o valor padrão é $P_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ N/m^2 e, no caso da intensidade, é de $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. Com esse artifício, os números fornecidos pelo decibelímetro são obtidos de $20 \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$ ou $10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, respectivamente, para pressão e intensidade, ambos na unidade de medida decibel (dB). Para um mesmo som, o nível de pressão sonora e o nível de intensidade sonora serão valores próximos.

Um nível de intensidade/pressão de 0 dB é aproximadamente o menor valor possível que o ser humano consegue ouvir. Já um som de 140 dB próximo ao ouvido de um ser humano pode causar surdez instantânea.

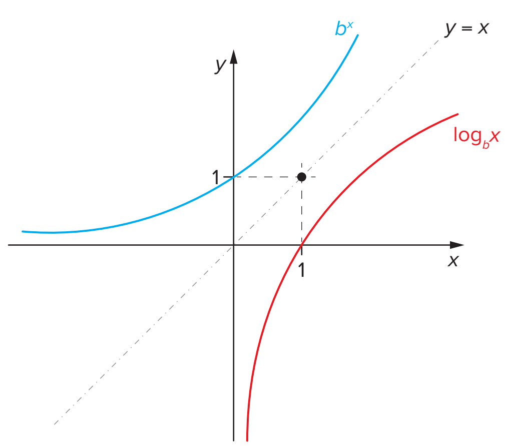
Função logarítmica e função exponencial

Uma importante relação entre a função logarítmica de base b e a função exponencial de base b é que uma é a inversa da outra: dados $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_b x$, e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = b^x$, com $b > 0$ e $b \neq 1$, temos $f^{-1} = g$ e $f = g^{-1}$.

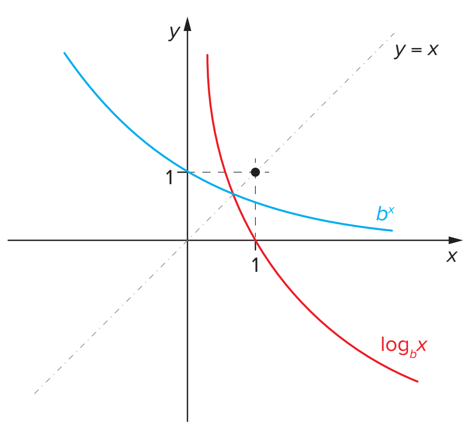
Observe esse fato no diagrama de flechas a seguir, para $b = 5$.



Como a função logarítmica e a função exponencial são inversas uma da outra, seus gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares, que tem equação $y = x$.



Gráficos de $f(x) = \log_b x$ e $g(x) = b^x$ para $b > 1$.



Gráficos de $f(x) = \log_b x$ e $g(x) = b^x$ para $0 < b < 1$.

Exercício resolvido

10. Determine a inversa da função g: $\mathbb{R} \to]2, +\infty[$, $g(x) = 2 + 3^x$.

Resolução:

Invertendo as variáveis x e y e isolando y, temos:

$y = 2 + 3^x$

$x = 2 + 3^y \Rightarrow x - 2 = 3^y \Rightarrow \log_3(x - 2) = y$

g^{-1}: $]2, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \log_3(x - 2)$

Inequações logarítmicas

Inequações logarítmicas são aquelas que apresentam incógnitas no logaritmando e/ou na base de logaritmos.

Exemplos:

a) $\log_5 x > -2$

b) $\log_3(x^2 - 1) < 4$

c) $\log_x(x + 5) \geqslant \log_x 3$

Para resolvermos inequações logarítmicas, precisamos resgatar a classificação do crescimento da função $y = \log_b x$.

- Se $b > 1$, $y = \log_b x$ é uma função crescente. Por exemplo, note que $\log_2 1 < \log_2 2 < \log_2 4 < \log_2 8$: como a base é maior do que 1, aumentando o logaritmando, o logaritmo aumenta; diminuindo o logaritmando, o logaritmo diminui.
- Se $0 < b < 1$, $y = \log_b x$ é uma função decrescente. Por exemplo, temos $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right) > \log_{\frac{1}{2}} 1 > \log_{\frac{1}{2}} 2$: como a base está entre 0 e 1, aumentando o logaritmando, o logaritmo diminui; diminuindo o logaritmando, o logaritmo aumenta.

Aliando essa característica do crescimento das funções logarítmicas às condições de existência dos logaritmos, podemos resolver algumas inequações.

Exercícios resolvidos

11. Resolva as inequações a seguir.

a) $\log_2 x > \log_2 3$

b) $\log_3 x \leqslant \log_3 5$

c) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{5}$

d) $\log_{0,7} x \leqslant \log_{0,7} 8$

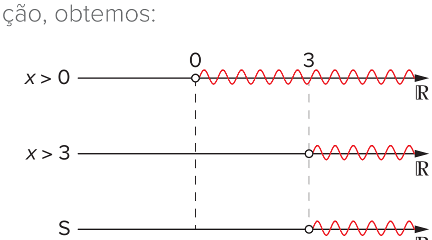
Resolução:

a) Temos:

I. Condição de existência: $x > 0$

II. $\log_2 x > \log_2 3 \Rightarrow x > 3$ (base maior do que 1)

Fazendo a interseção entre a solução e a condição, obtemos:



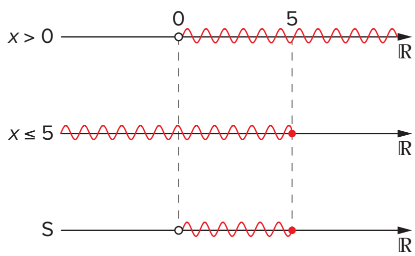
Portanto, $S =]3, +\infty[$.

b) Temos:

I. Condição de existência: $x > 0$

II. $\log_3 x \leqslant \log_3 5 \Rightarrow x \leqslant 5$ (base maior do que 1)

Fazendo a interseção entre a solução e a condição, obtemos:



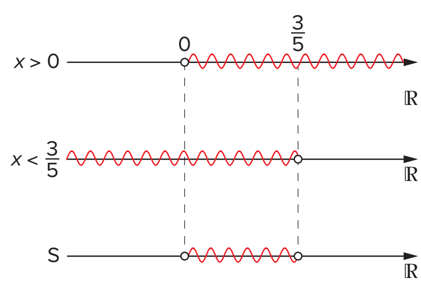
Portanto, $S =]0, 5]$.

c) Temos:

I. Condição de existência: $x > 0$

II. $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{5} \Rightarrow x < \frac{3}{5}$ (base entre 0 e 1)

Fazendo a interseção entre a solução e a condição, obtemos:



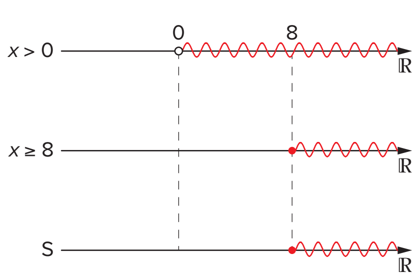
Portanto, $S = \left]0, \frac{3}{5}\right[$.

d) Temos:

I. Condição de existência: $x > 0$

II. $\log_{0,7} x \leqslant \log_{0,7} 8 \Rightarrow x \geqslant 8$ (base entre 0 e 1)

Fazendo a interseção entre a solução e a condição, obtemos:



Portanto, $S = [8, +\infty[$.

12. Resolva as seguintes inequações:

a) $\log_5 (x - 3) \leqslant 0$

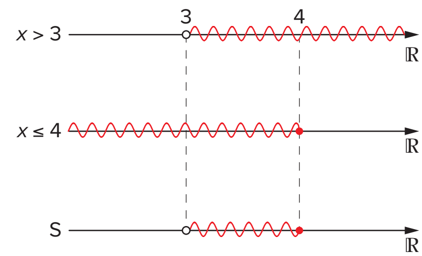
b) $\log_{\frac{1}{3}} (x + 7) < -2$

Resolução:

a) Temos:

I. Condição de existência: $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

II. $\log_5 (x - 3) \leqslant 0 \Rightarrow \log_5 (x - 3) \leqslant \log_5 5^0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 3 \leqslant 5^0 \Rightarrow x - 3 \leqslant 1 \Rightarrow x \leqslant 4$



Portanto, $S =]3, 4]$.

b) Temos:

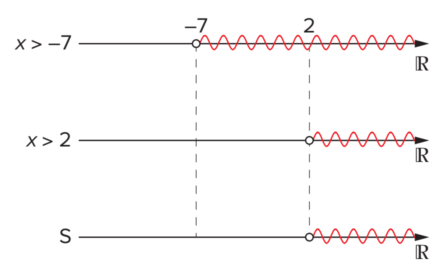
I. Condição de existência: $x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$

II. $\log_{\frac{1}{3}} (x + 7) < -2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} (x + 7) < \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} (x + 7) < \log_{\frac{1}{3}} 9 \Rightarrow x + 7 > 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x > 2$



Portanto, $S =]2, +\infty[$.

13. Determine o conjunto solução da inequação $\log_x (2x + 1) > 2$.

Resolução:

Perceba que, para essa inequação logarítmica, há uma incógnita na base. Por isso, além de uma condição de existência a mais, também precisamos levar em conta se a base é maior do que 1 ou está entre 0 e 1.

I. Condições de existência:

- $2x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$
- $x > 0$
- $x \neq 1$

Determinando a interseção entre as três condições, obtemos C.E.: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ e } x \neq 1\}$.

II. $\log_x (2x + 1) > 2 \Rightarrow \log_x (2x + 1) > \log_x x^2$

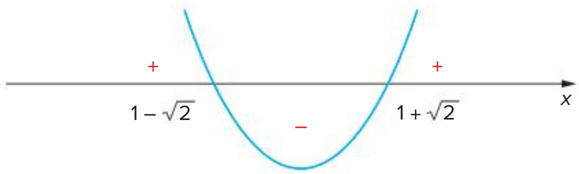
Como ainda não sabemos o valor da base do logaritmo, precisamos dividir a resolução em dois casos:

Caso 1: base maior do que 1 ($x > 1$)

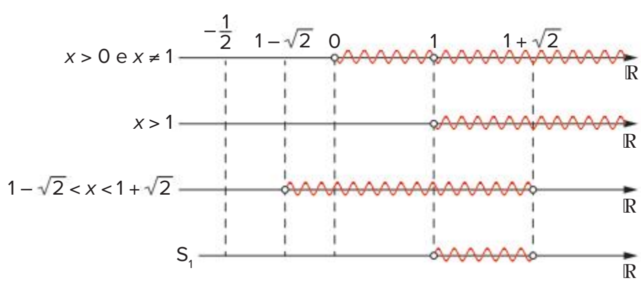
Nesse caso, temos:

$\log_x(2x+1) > \log_x x^2 \Rightarrow 2x+1 > x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 < 0$

As raízes de $x^2 - 2x - 1 = 0$ são $1-\sqrt{2}$ e $1+\sqrt{2}$. Logo, a solução de $x^2 - 2x - 1 < 0$ é $\{x \in \mathbb{R} \mid 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}\}$, como ilustrado abaixo:



Assim, temos:



Portanto, $S_1 = \left]1, 1+\sqrt{2}\right[$.

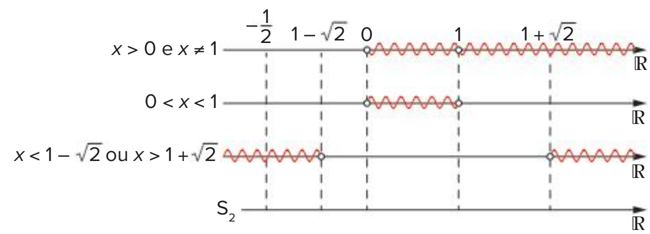
Caso 2: base entre 0 e 1 ($0 < x < 1$).

Nesse caso, temos:

$\log_x(2x+1) > \log_x x^2 \Rightarrow 2x+1 < x^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x < 1-\sqrt{2}$ ou $x > 1+\sqrt{2}$

Assim:



Portanto, $S_2 = \varnothing$.

O conjunto solução da inequação $\log_x(2x+1) > 2$ é a união entre S_1 e S_2:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left]1, 1+\sqrt{2}\right[\cup \varnothing = \left]1, 1+\sqrt{2}\right[$$

! Atenção

Outra maneira de entender a inversão ou manutenção dos sinais das inequações logarítmicas é observando os gráficos das funções. Para aumentar os valores de *y*, ou seja, "subir no gráfico", temos de aumentar os valores de *x* quando a base é maior que 1 e diminuir quando a base está entre 0 e 1.

Revisando

1. Usando a definição, calcule o valor dos logaritmos a seguir.

a) $\log_2 16$

b) $\log_5 625$

c) $\log_7 \frac{1}{49}$

d) $\log_4 \sqrt{32}$

e) $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{125}$

f) $\log 100$

g) $\log 0{,}00001$

h) $\log 10^{-12}$

2. Aplicando as consequências da definição, calcule:

a) $3^{\log_3 5}$

b) $3^{\log_3 25}$

c) $3^{2\log_3 5}$

d) $9^{\log_3 5}$

e) $9^{2\log_3 5}$

f) $9^{2\log_3 16}$

FRENTE 1

3. Calcule os logaritmos naturais abaixo.

a) $\log_e e$

b) $\ell n\, e$

c) $\ell n\, e^2$

d) $\ell n\, e^5$

e) $\ell n \dfrac{1}{e^9}$

4. Sendo $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule:

a) $\log 32$

b) $\log 81$

c) $\log \dfrac{27}{4}$

d) $\log 4{,}5$

e) $\log 15$

f) $\log_9 128$

g) $\log_{16} 81$

5. Sendo $\log 2 \cong 0{,}301$, determine o número de algarismos de 2^{30}.

6. Resolva as equações a seguir.

a) $\log_2 x^2 = \log_2 (3x)$

b) $\log_3 (x - 5) = 2$

c) $\log_5 (\log_3 x) = 0$

d) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$

7. Resolva a equação $\log_4 x + \log_x 4 = \dfrac{10}{3}$ no universo dos números reais.

8. Determine o domínio e construa o gráfico das funções a seguir.

a) $y = \log (x + 2)$

b) $y = 2 + \log x$

9. Determine a inversa da função $f\colon\,]3, +\infty[\, \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \log (x - 3)$.

10. Resolva as inequações a seguir.

a) $\log_4 (2x - 6) \geqslant 2$

b) $\log_{\frac{1}{3}} (x - 2) > -1$

Exercícios propostos

1. **Ifal 2018** Determine o valor do $\log_9(243)$.

a) $\frac{1}{2}$.
b) 1.
c) $\frac{3}{2}$.
d) 2.
e) $\frac{5}{2}$.

2. **UFRGS 2020** Se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, então $\log 288$ é

a) $2x + 5y$.
b) $5x + 2y$.
c) $10xy$.
d) $x^2 + y^2$.
e) $x^2 - y^2$.

3. **EEAR-SP 2019** Sejam m, n e b números reais positivos, com $b \neq 1$. Se $\log_b m = x$ e se $\log_b n = y$, então $\log_b(m \cdot n) + \log_b\left(\frac{n}{m}\right)$ é igual a

a) x
b) $2y$
c) $x + y$
d) $2x - y$

4. **UFRGS 2019** O valor de

$$E = \log\left(\frac{1}{2}\right) + \log\left(\frac{2}{3}\right) + \ldots + \log\left(\frac{999}{1000}\right) \text{ é}$$

a) -3.
b) -2.
c) -1.
d) 0.
e) 1.

5. **Uece 2017** Se $L_n 2 \cong 0{,}6931$, $L_n 3 \cong 1{,}0986$, pode-se afirmar corretamente que $L_n \frac{\sqrt{12}}{3}$ é igual a:

Dado: $L_n x \cong$ logaritmo natural de x.

a) 0,4721.
b) 0,3687.
c) 0,1438.
d) 0,2813.

6. **UFRGS 2017** Se $\log_5 x = 2$ e $\log_{10} y = 4$, então $\log_{20} \frac{y}{x}$ é:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

7. Seja $x = \log_2 3 + \log_2 9 + \log_2 27$.
Então, é correto afirmar que:

a) $6 \leqslant x \leqslant 7$
b) $7 \leqslant x \leqslant 8$
c) $8 \leqslant x \leqslant 9$
d) $9 \leqslant x \leqslant 10$
e) $x \geqslant 10$

8. **Unesp 2015** O cálculo aproximado da área da superfície externa de uma pessoa pode ser necessário para a determinação da dosagem de algumas medicações. A área A (em cm^2) da superfície externa de uma criança pode ser estimada por meio do seu "peso" P (em kg) e da sua altura H (em cm) com a seguinte fórmula, que envolve logaritmos na base 10:

$$\log A = 0{,}425 \log P + 0{,}725 \log H + 1{,}84$$

(Delafield Du Bois e Eugene Du Bois. *A formula to estimate the approximate surface area if height and weight be known*, 1916. Adaptado.)

Rafael, uma criança com 1 m de altura e 16 kg de "peso", precisa tomar uma medicação cuja dose adequada é de 1 mg para cada 100 cm^2 de área externa corporal. Determine a dose adequada dessa medicação para Rafael.
Adote nos seus cálculos $\log 2 = 0{,}30$ e a tabela a seguir.

x	10^x
3,3	1995
3,4	2512
3,5	3162
3,6	3981
3,7	5012
3,8	6310
3,9	7943

9. **Enem 2019** Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_S) de um terremoto que é utilizada para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_S) ($\mu m \cdot Hz$)
Pequeno	$0 \leqslant M_S \leqslant 3{,}9$
Ligeiro	$4{,}0 \leqslant M_S \leqslant 4{,}9$
Moderado	$5{,}0 \leqslant M_S \leqslant 5{,}9$
Grande	$6{,}0 \leqslant M_S \leqslant 9{,}9$
Extremo	$M_S \geqslant 10{,}0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_S = 3{,}30 + \log(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de 2 000 μm e frequência de 0,2 Hz.

Disponível em: http://cejarj.cecierj.edu.br. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Dado: Utilize 0,3 como aproximação para log 2.

De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

a) Pequeno.
b) Ligeiro.
c) Moderado.
d) Grande.
e) Extremo.

10. Unesp 2019 Um banco estabelece os preços dos seguros de vida de seus clientes com base no índice de risco do evento assegurado.
A tabela mostra o cálculo do índice de risco de cinco eventos diferentes.

Evento (E)	Risco de morte (1 em n mortes)	log n	Índice de risco de E (10 − log n)
Atingido por relâmpago	1 em 2 000 000	6,3	3,7
Afogamento	1 em 30 000	4,5	5,5
Homicídio	1 em 15 000	4,2	5,8
Acidente de motocicleta	1 em 8 000	3,9	6,1
Doenças provocadas pelo cigarro	1 em 800	2,9	7,1

Sabe-se que, nesse banco, o índice de risco de morte pela prática do evento *BASE jumping* é igual a 8.

Praticante de *BASE jumping*

(https://pt.wikipedia.org)

O risco de morte para praticantes desse esporte, segundo a avaliação do banco, é de

a) 2,5%.
b) 2%.
c) 1%.
d) 1,5%.
e) 0,5%.

11. UFJF/Pism-MG 2017 Sejam a, b, c e d números reais positivos, tais que $\log_b a = 5$, $\log_b c = 2$ e $\log_b d = 3$.

O valor da expressão $\log_c \dfrac{a^2b^5}{d^3}$ é igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 0

12. IFCE 2019 Considerando $\log_7 2 = w$, temos que o valor de $\log_4 14$ pode ser expresso por

a) $\dfrac{2}{w+1}$.
b) $\dfrac{2w}{w+1}$.
c) $\dfrac{3w}{2}$.
d) $\dfrac{2}{w}$.
e) $\dfrac{w+1}{2w}$.

13. Udesc 2019 Considerando $\ell n 10 = 2{,}3$, então o valor da expressão $\dfrac{\ell n\, a^3 - \log a - 2\,\ell n\, a}{\log a}$ é igual a:

a) 4
b) 10,5
c) $4a$
d) $2{,}3a^2$
e) 1,3

14. Mackenzie-SP 2019 Se a, b e c são números reais positivos e diferentes de 1, e $\log_b c = k$, então $\dfrac{\log_b a \cdot \log_a c}{\log_c b}$ é igual a

a) 1
b) $\dfrac{1}{k}$
c) k
d) $2k$
e) k^2

15. UPF-RS 2015 Sendo $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ e $\log_c x = 5$, o valor de $\log_{abc} x$ é:

a) 30
b) 31
c) $\dfrac{31}{30}$
d) $\dfrac{30}{31}$
e) $\dfrac{1}{3}$

16. Fuvest-SP 2016 Use as propriedades do logaritmo para simplificar a expressão

$$S = \frac{1}{2 \cdot \log_2 2016} + \frac{1}{5 \cdot \log_3 2016} + \frac{1}{10 \cdot \log_7 2016}$$

O valor de S é

a) $\dfrac{1}{2}$
b) $\dfrac{1}{3}$
c) $\dfrac{1}{5}$
d) $\dfrac{1}{7}$
e) $\dfrac{1}{10}$

17. Ifal 2017 O potencial de hidrogênio (pH) das soluções é dado pela função: pH $= -\log\,[H^+]$, onde $[H^+]$ é a concentração do cátion H^+ ou H_3O^+ na solução. Se, em uma solução, a concentração de H^+ é $2 \cdot 10^{-8}$, qual o pH dessa solução? Adote: $\log 2 = 0{,}3$.

a) 2,4.
b) 3,8.
c) 6,7.
d) 7,7.
e) 11.

18. Calcule a parte inteira dos logaritmos abaixo.

a) $\log_2 6$
b) $\log_3 32$
c) $\log_4 10$
d) $\log 12$
e) $\log 345$
f) $\log 45\,328$

19. Quantos algarismos tem o número 3^{20}, sabendo que $\log 3 \cong 0{,}4771$?

20. Sabendo que $\log 2 = 0{,}3010$, calcule o valor aproximado de $\sqrt[5]{2}$ usando a tabela abaixo.

x	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16
$\log x$	0,045	0,049	0,053	0,056	0,060	0,064

21. Enem 2019 A *Hydrangea macrophyilla* é uma planta com flor azul ou cor-de-rosa, dependendo do pH do solo no qual está plantada. Em solo ácido (ou seja, com pH < 7) a flor é azul, enquanto que em solo alcalino (ou seja, com pH > 7) a flor é rosa. Considere que a *Hydrangea* cor-de-rosa mais valorizada comercialmente numa determinada região seja aquela produzida em solo com pH inferior a 8. Sabe-se que $\text{pH} = -\log_{10} x$, em que x é a concentração de íon hidrogênio (H^+).

Para produzir a *Hydrangea* cor-de-rosa de maior valor comercial, deve-se preparar o solo de modo que x assuma

a) qualquer valor acima de 10^{-8}.
b) qualquer valor positivo inferior a 10^{-7}.
c) valores maiores que 7 e menores que 8.
d) valores maiores que 70 e menores que 80.
e) valores maiores que 10^{-8} e menores que 10^{-7}.

22. Enem PPL 2018 Em março de 2011, um terremoto de 9,0 graus de magnitude na escala Richter atingiu o Japão matando milhares de pessoas e causando grande destruição. Em janeiro daquele ano, um terremoto de 7,0 graus na escala Richter atingiu a cidade de Santiago Del Estero, na Argentina. A magnitude de um terremoto, medida pela escala Richter, é $R = \log\left(\frac{A}{A_0}\right)$, em que A é a amplitude do movimento vertical do solo, informado em um sismógrafo, A_0 é uma amplitude de referência e log representa o logaritmo na base 10.

Disponível em: http://earthquake.usgs.gov. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado).

A razão entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina é

a) 1,28
b) 2,0
c) $10^{\frac{9}{7}}$
d) 100
e) $10^9 - 10^7$

23. Determine as raízes de cada uma das equações abaixo:

a) $\log_3(x^2 - 2x) = \log_3(4x - 5)$
b) $\log_5(4x - 3) = 1$
c) $\log_2(2x^2 + 5x + 5) = 3$
d) $\log_3(\log_2 x) = 2$
e) $\log x \cdot (\log x - 1) = 6$
f) $\log_x(2x + 3) = 2$

24. Aplicando as propriedades de logaritmos, resolva as equações

a) $\log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) = 3$
b) $\log_3(2x - 1)^2 - \log_3(x - 1)^2 = 2$
c) $\log_6 x + \log_6(x + 5) = 2$
d) $\log_2(5x - 2) - \log_2 x + \log_2(x - 1) = 2$

25. Algumas equações podem ser resolvidas utilizando variáveis auxiliares. Resolva as equações abaixo aplicando essa técnica.

a) $\log_2 x + \log_x 2 = 2$
b) $(\log_2 x)^2 - 9\log_8 x = 4$
c) $(\log_x 2)\cdot\left(\log_{\frac{x}{16}} 2\right) = \log_{\frac{x}{64}} 2$
d) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{2}$

26. PUC-RS 2017 Uma turma de uma escola central de Porto Alegre recebeu a seguinte questão em sua primeira prova no Ensino Médio: Um dos valores de x que soluciona a equação $\log_2(-x^2 + 32) = 4$ é igual ao número de centros culturais localizados nas proximidades do centro da cidade. Esse número é

a) 3.
b) 4.
c) 5.
d) 6.
e) 7.

27. Unicamp-SP 2016 A solução da equação na variável real x, $\log_x(x + 6) = 2$ é um número

a) primo.
b) par.
c) negativo.
d) irracional.

28. EsPCEx-SP 2018 Resolvendo a equação $\log_3(x^2 - 2x - 3) + \log_{\frac{1}{3}}(x - 1) = \log_3(x + 1)$, obtém-se

a) $S = \{-1\}$.
b) $S = \{4, 5\}$.
c) $S = \{6\}$.
d) $S = \{\varnothing\}$.
e) $S = \{4\}$.

29. Fuvest-SP 2019 Se $\log_2 y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x$, para $x > 0$, então

a) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}$
b) $y = \sqrt{\frac{x^3}{2}}$
c) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{x^2}$
d) $y = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{x^2}$
e) $y = \sqrt{2x^3}$

30. EsPCEx-SP 2020 Seja f a função quadrática definida por $f(x) = 2x^2 + (\log_{\frac{1}{3}} k)x + 2$, com $k \in \mathbb{R}$ e $k > 0$.

O produto dos valores reais de k para os quais a função $f(x)$ tem uma raiz dupla é igual a

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

31. Fuvest-SP 2017 Considere as funções $f(x) = x^2 + 4$ e $g(x) = 1 + \log_{\frac{1}{2}} x$, em que o domínio de f é o conjunto dos números reais e o domínio de g é o conjunto dos números reais maiores do que 0. Seja

$$h(x) = 3\, f(g(x)) + 2\, g(f(x)),$$

em que $x > 0$. Então, $h(2)$ é igual a

a) 4
b) 8
c) 12
d) 16
e) 20

32. FMP-RJ 2019 Considere a função logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_7(x)$.

Quanto vale a razão $\dfrac{f(4)}{f(16)}$?

a) $\log_7\left(\dfrac{1}{4}\right)$
b) $\sqrt{7}$
c) $\dfrac{1}{4}$
d) $\sqrt[4]{7}$
e) $\dfrac{1}{2}$

33. FICSAE-SP 2016 Uma pesquisa foi desenvolvida a partir de 250 bactérias de uma cultura. Estimou-se então, de maneira aproximada, que, durante certo tempo, o aumento percentual do número de bactérias na cultura poderia ser obtido pela expressão $B(t) = -30 \cdot \log_3(t + 21) + 150$, em que t é o tempo decorrido, em minutos, após o início da pesquisa. Nessas condições, ao fim da primeira hora da pesquisa, quantas bactérias havia em tal cultura?

a) 325
b) 400
c) 450
d) 525

34. IFPE 2018 Os alunos do curso de Meio Ambiente do *campus* Cabo de Santo Agostinho observaram que o número de flores em uma árvore X segue o modelo matemático $F(h) = 16 - \log_2(3h + 1)$, onde $F(h)$ é a quantidade de flores após h horas de observação. Após quanto tempo de observação esta árvore estará com apenas 10 flores?

a) 6 horas.
b) 25 horas.
c) 20 horas.
d) 21 horas.
e) 64 horas.

35. O domínio de uma função logarítmica é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual as condições de existência são satisfeitas. Sabendo disso, determine o domínio das funções abaixo:

a) $f(x) = \log_2(3x - 6)$
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(5 - x)$
c) $f(x) = \log_{(x-2)}(x - 1)$
d) $f(x) = \log_3(x^2 - 1)$

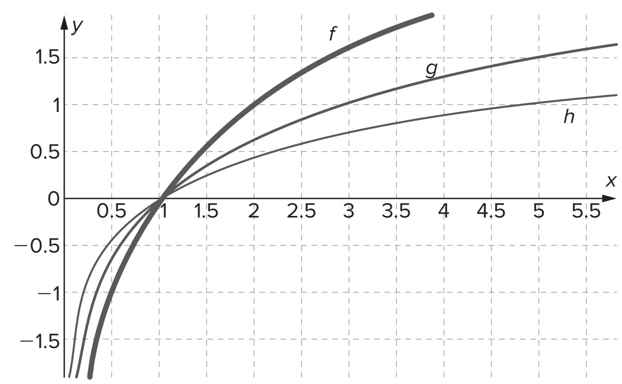
36. UEG-GO 2019 Sendo $f(x) = \log_{x-1} x^2 + 1$, então

a) $x < -1$ e $x \neq -2$
b) $x < 1$
c) $-1 \leq x < 1$
d) $x > 1$
e) $x > 1$ e $x \neq 2$

37. Utilizando as propriedades de translação e de reflexão em relação aos eixos coordenados, construa o gráfico das funções a seguir.

a) $f(x) = \log_2(x - 2)$
b) $g(x) = -\log_2 x$
c) $h(x) = \log_2(-x)$

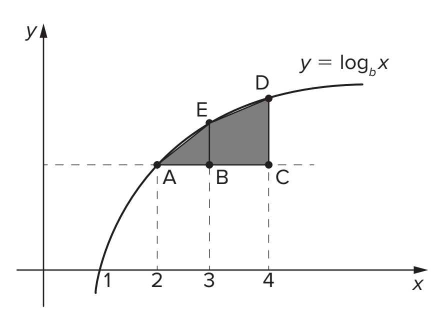
38. UFJF/Pism-MG 2019 No plano cartesiano abaixo estão representados os gráficos das funções f, g e h, todas definidas no conjunto dos números reais positivos por $f(x) = \log_a x$, $g(x) = \log_b x$ e $h(x) = \log_c x$.



O valor de $\log_{10}(abc)$ é

a) 1
b) 3
c) $\log_{10} 3$
d) $1 + \log_{10} 3$
e) $\log_{10} 2 \times \log_{10} 3 \times \log_{10} 5$

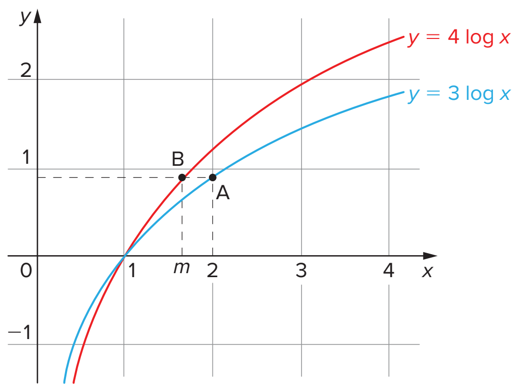
39. Acafe-SC A figura abaixo representa o gráfico da função $y = \log_b x$, com $b > 1$ e $x > 0$.



Nessa representação, o polígono ABCDE possui área igual a:

a) $\log_b \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
b) $\log_b 3$
c) $\log_b 3 + \log_b 2$
d) $1{,}5 \log_b \sqrt{2}$

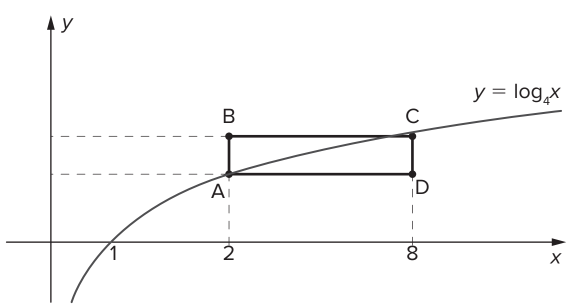
40. Famerp-SP 2019 A figura indica os gráficos das funções f e g, definidas de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$, cujas leis são, respectivamente, $f(x) = 4 \log x$ e $g(x) = 3 \log x$.



O valor de m, indicado na figura, é igual a

a) log 12
b) $2^{0,75}$
c) log 7
d) $2^{0,25}$
e) $2^{1,25}$

41. EsPCEx-SP 2018 A curva do gráfico abaixo representa a função $y = \log_4 x$.

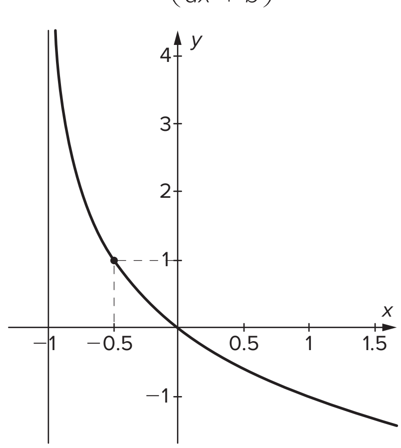


Desenho ilustrativo fora de escala.

A área do retângulo ABCD é

a) 12.
b) 6.
c) 3.
d) $6 \log_4 \frac{3}{2}$.
e) $\log_4 6$.

42. UEG-GO 2018 O gráfico a seguir é a representação da função $f(x) = \log_2\left(\dfrac{1}{ax + b}\right)$.



O valor de $f^{-1}(-1)$ é

a) -1
b) 0
c) -2
d) 2
e) 1

43. Fuvest-SP 2017 Uma quantidade fixa de um gás ideal é mantida à temperatura constante, e seu volume varia com o tempo de acordo com a seguinte fórmula:

$$V(t) = \log_2(5 + 2\,\text{sen}(\pi t)),\ 0 \leqslant t \leqslant 2,$$

em que t é medido em horas e $V(t)$ é medido em m^3. A pressão máxima do gás no intervalo de tempo [0, 2] ocorre no instante

a) $t = 0{,}4$
b) $t = 0{,}5$
c) $t = 1$
d) $t = 1{,}5$
e) $t = 2$

44. Unicamp-SP 2014 A altura (em metros) de um arbusto em uma dada fase de seu desenvolvimento pode ser expressa pela função $h(t) = 0{,}5 + \log_3(t + 1)$, onde o tempo $t \geqslant 0$ é dado em anos.

a) Qual é o tempo necessário para que a altura aumente de 0,5 m para 1,5 m?
b) Suponha que outro arbusto, nessa mesma fase de desenvolvimento, tem sua altura expressa pela função composta $g(t) = h(3t + 2)$. Verifique que a diferença $g(t) - h(t)$ é uma constante, isto é, não depende de t.

45. Fuvest-SP 2017 Um analgésico é aplicado via intravenosa. Sua concentração no sangue, até atingir a concentração nula, varia com o tempo de acordo com a seguinte relação:

$$c(t) = 400 - k\log_3(at + 1),$$

em que t é dado em horas e $c(t)$ é dado em mg/L. As constantes a e k são positivas.

a) Qual é a concentração do analgésico no instante inicial $t = 0$?
b) Calcule as constantes a e k sabendo que, no instante $t = 2$, a concentração do analgésico no sangue é metade da concentração no instante inicial e que, no instante $t = 8$, a concentração do analgésico no sangue é nula.

46. Para existir a inversa f^{-1}, a função f deve ser bijetora. As funções exponenciais abaixo são bijetoras, e suas inversas são obtidas a partir de funções logarítmicas. Determine a inversa dessas funções:

a) $f: \mathbb{R} \to]1, +\infty[,\ f(x) = 2^x + 1$
b) $g: \mathbb{R} \to]0, +\infty[,\ g(x) = 3^{x-1}$

FRENTE 1

47. UPF-RS 2017 Considere as funções reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = 1 + 3^{x-2} \text{ e } g(x) = \log_a x.$$

Sabe-se que, na representação gráfica das funções, as curvas interceptam-se no ponto de abscissa 2. Dessa forma, o valor de *a* é:

a) $-\sqrt{2}$

b) $-\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{1}{2}$

d) $\sqrt{2}$

48. EsPCEx-SP 2017 O número N de bactérias de uma cultura é dado em função do tempo *t* (em minutos), pela fórmula $N(t) = (2,5)^{1,2t}$. Considere $\log_{10} 2 = 0,3$, o tempo (em minutos) necessário para que a cultura tenha 10^{84} bactérias é

a) 120
b) 150
c) 175
d) 185
e) 205

49. Unesp 2017 Leia a matéria publicada em junho de 2016.

Energia eólica deverá alcançar 10 GW nos próximos dias

O dia mundial do vento, 15 de junho, terá um marco simbólico este ano. Antes do final do mês, a fonte de energia que começou a se tornar realidade no país há seis anos alcançará 10 GW, sendo que o potencial brasileiro é de 500 GW. A perspectiva é a de que, em metade deste tempo, o Brasil duplique os 10 GW.

(www.portalabeeolica.org.br. Adaptado.)

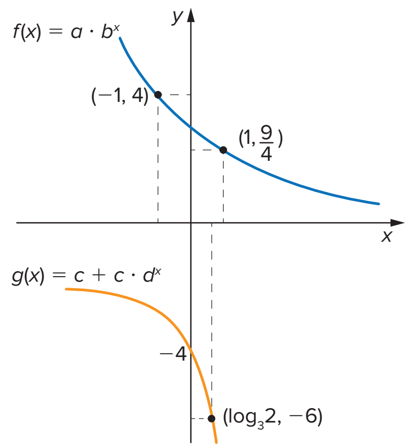
Considerando que a perspectiva de crescimento continue dobrando a cada três anos, calcule o ano em que o Brasil atingirá 64% da utilização do seu potencial eólico. Em seguida, calcule o ano aproximado em que o Brasil atingirá 100% da utilização do seu potencial eólico, empregando um modelo exponencial de base 2 e adotando $\log 2 \cong 0,3$ no cálculo final.

50. ESPM-SP 2017 A taxa de crescimento populacional de um país é de 2% ao ano. Utilizando os dados da tabela abaixo e considerando que essa taxa permanecerá constante, podemos afirmar que a população desse país dobrará em:

N	Log N
2,00	0,3010
2,02	0,3054
2,04	0,3096

a) 15 anos
b) 20 anos
c) 25 anos
d) 30 anos
e) 35 anos

51. Unesp 2019 Os gráficos a seguir referem-se às funções exponenciais *f* e *g*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por $f(x) = a \cdot b^x$ e $g(x) = c + c \cdot d^x$, com *a*, *b*, *c* e *d* sendo números reais, $0 < b \neq 1$ e $0 < d \neq 1$.



a) Determine a função *f* e as coordenadas do ponto de intersecção do seu gráfico com o eixo *y*.

b) Determine a função *g* e a equação da assíntota do seu gráfico.

52. Unicamp-SP 2013 Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740 °C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40 °C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função

$$T(t) = \left(T_0 - T_{AR}\right) \times 10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR},$$

sendo *t* o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140 °C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

a) 12[log (7) − 1] minutos

b) 12[1 − log(7)] minutos

c) 12 log (7) minutos

d) $\dfrac{[1 - \log(7)]}{12}$ minutos

53. UFPR 2019 Um tanque contém uma solução de água e sal cuja concentração está diminuindo devido à adição de mais água. Suponha que a concentração Q(*t*) de sal no tanque, em gramas por litro (g/L), decorridas *t* horas após o início da diluição, seja dada por

$$Q(t) = 100 \times 5^{-0,3t}$$

Assinale a alternativa que mais se aproxima do tempo necessário para que a concentração de sal diminua para 50 g/L.

Dado: Use $\log 5 = 0,7$.

a) 4 horas e 45 minutos.
b) 3 horas e 20 minutos.
c) 2 horas e 20 minutos.
d) 1 hora e 25 minutos.
e) 20 minutos.

54. PUC-PR 2015 O número de bactérias N em um meio de cultura que cresce exponencialmente pode ser determinado pela equação $N = N_0e^{kt}$ em que N_0 é a quantidade inicial, isto é, $N_0 = N(0)$ e k é a constante de proporcionalidade. Se inicialmente havia 5 000 bactérias na cultura e 8 000 bactérias 10 minutos depois, quanto tempo será necessário para que o número de bactérias se torne duas vezes maior que o inicial?

Dados: $\ell n\, 2 = 0{,}69$; $\ell n\, 5 = 1{,}61$

a) 11 minutos e 25 segundos.
b) 11 minutos e 15 segundos.
c) 15 minutos.
d) 25 minutos.
e) 25 minutos e 30 segundos.

55. Enem 2013 Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após t anos, é calculada pela expressão $M(t) = A \cdot (2{,}7)^{kt}$, onde A é a massa inicial e k é uma constante negativa.

Dado: Considere 0,3 como aproximação para log 2.

Qual o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

a) 27 b) 36 c) 50 d) 54 e) 100

56. IFPE 2016 Biólogos estimam que a população P de certa espécie de aves é dada em função do tempo t, em anos, de acordo com a relação $P = 250 \cdot (1{,}2)^{\frac{t}{5}}$, sendo $t = 0$ o momento em que o estudo foi iniciado. Em quantos anos a população dessa espécie de aves irá triplicar?

Dados: $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$

a) 45 b) 25 c) 12 d) 18 e) 30

57. Acafe-SC 2017 Quando um paciente ingere um medicamento, a droga entra na corrente sanguínea e, ao passar pelo fígado e pelos rins, é metabolizada e eliminada. A quantidade de medicamentos, em miligramas, presente no organismo de um paciente é calculada pela função $Q(t) = 30 \cdot 2^{1 - \frac{t}{10}}$, onde t é o tempo dado em horas.

O tempo necessário para que a quantidade de medicamento em um paciente se reduza a 40% da quantidade inicial, é:

Dado: $\log 2 = 0{,}3$

a) 13 horas e 33 minutos.
b) 6 horas e 6 minutos.
c) 13 horas e 20 minutos.
d) 6 horas e 40 minutos.

58. Resolva as inequações a seguir no universo dos números reais.

a) $\log_3(3x - 3) < \log_3(x + 7)$
b) $\log_{\frac{1}{5}}(2x + 4) \leqslant \log_{\frac{1}{5}}(x + 5)$
c) $\log_2(5x - 2) > 3$
d) $\log_{\frac{1}{3}}(4x - 1) > -1$
e) $\log_2(x^2 - 9) \leqslant 4$

59. Impondo as condições de existência e aplicando as propriedades dos logaritmos, resolva as inequações a seguir.

a) $\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) \leqslant 1$
b) $\log_2(3x + 2) - \log_2(1 - 2x) > 2$
c) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(3x - 2) \geqslant -2$

60. UFPR 2018 Faça o que se pede.

a) Calcule $\log_{16}\left(\frac{1}{8}\right)$. Forneça sua resposta com duas casas decimais.
b) Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}}(2x + 3) \geqslant 1$. Expresse sua resposta na forma de intervalo.

61. Mackenzie-SP 2016 A equação do 2º grau $x^2 + x \cdot \log t + 0{,}5 \cdot \log t = 0$ tem duas raízes reais distintas, se

a) $t > 0$
b) $t > 1$
c) $t = 0$ ou $t = 2$
d) $0 < t < 2$
e) $0 < t < 1$ ou $t > 100$

62. Mackenzie-SP 2012 Na igualdade $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2} - 3\right)}$, supondo x o maior valor inteiro possível, então, nesse caso, x^{2y} vale

a) $\frac{1}{8}$
b) 4
c) $\frac{1}{4}$
d) 8
e) 1

63. Uece 2020 O domínio de uma função real de variável real f é o mais amplo subconjunto X de $\mathbb{R}$, tal que para cada $x \in X$, $f(x)$ é um número real bem definido. Portanto, se X é o domínio da função real de variável real f, definida pela expressão $f(x) = \sqrt{(\log x^2 - 6x + 6)}$, então, tem-se que

Dado: $\log (k) \cong$ logaritmo decimal de k

a) $X = \{x \in \mathbb{R}: x \leqslant 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}: x \geqslant 5\}$.
b) $X = \mathbb{R}$.
c) $X = \{x \in \mathbb{R}: x \geqslant 0\}$.
d) $X = \mathbb{R} - \{0\}$.

Texto complementar

O uso das séries infinitas

Por volta de 1665, Isaac Newton (1642-1727) descobriu várias séries infinitas representando funções conhecidas. Por exemplo, pela fórmula da soma de uma série geométrica,

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

ou, ainda,

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n.$$

Supondo $|x| < 1$, é claro que x^{n+1} torna-se cada vez mais próximo de zero quanto maior for n. Dizemos que x^{n+1} tende a zero com n tendendo a infinito. E, fazendo n tender a infinito nessa última identidade, obtemos

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots,$$

onde o membro da direita é uma soma infinita.

A partir dessa série, Newton obteve a seguinte série para a função $\ell n\,(1 + x)$ (onde ℓn significa logaritmo natural ou logaritmo na base e):

$$\ell n\,(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots.$$

Trocando x por $-x$ nessa série, obtemos também

$$\ell n\,(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots,$$

finalmente, subtraindo uma série da outra, obtemos uma série para a função

$$\ell n \frac{1 + x}{1 - x} = \ell n(1 + x) - \ell n(1 - x),$$

qual seja,

$$\ell n \frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right)$$

Em princípio, essa série permite calcular o logaritmo (natural) de qualquer número. De fato, à medida que x varia no intervalo $-1 < x < 1$, $y = \frac{1 + x}{1 - x}$ varia de zero a infinito, como se pode ver pelo exame do gráfico dessa última função. [...] Dizemos "em princípio" porque a série só é útil para fazer cálculos quando x está próximo de zero, caso em que basta somar poucos termos dela para obtermos uma boa aproximação do logaritmo procurado. À medida que x vai ficando mais e mais próximo de -1 ou 1, mais e mais termos vão sendo necessários para se obter boa aproximação.

Como exemplo, vejamos como Euler (em seu livro *Introduction to Analysis of the Infinite*, Springer, Book I, p. 98) calculou os logaritmos dos inteiros de 2 a 10. Ele começou atribuindo a x os valores $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, com o que y assume os valores $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{4}$, respectivamente. Uma vez calculados os logaritmos desses números (pela última série acima), os logaritmos dos inteiros de 2 a 10 são calculados assim:

$$\ell n\,2 = \ell n \frac{3}{2} + \ell n \frac{4}{3},$$
$$\ell n\,3 = \ell n \frac{3}{2} + \ell n\,2,$$
$$\ell n\,4 = \ell n\,2^2 = 2\,\ell n\,2,$$
$$\ell n\,5 = \ell n \frac{5}{4} + \ell n\,4,$$
$$\ell n\,6 = \ell n\,2^2 + \ell n\,3,$$
$$\ell n\,8 = \ell n\,2^3 = 3\,\ell n\,2,$$
$$\ell n\,9 = \ell n\,3^2 = 2\,\ell n\,3,$$
$$\ell n\,10 = \ell n\,2 + \ell n\,5.$$

Falta calcular o logaritmo de 7. Para isso Euler teve a genial ideia de substituir $x = \frac{1}{99}$ na série, donde $y = \frac{50}{49}$; a série permite obter o logaritmo deste último número, e o logaritmo de 7 é dado por

$$\ell n\,7 = \ell n \sqrt{49} = \frac{1}{2}\left[\ell n\,50 - \ell n \frac{50}{49}\right] = \frac{1}{2}\left[\ell n\,5 + \ell n\,10 - \ell n \frac{50}{49}\right].$$

Observe que esses logaritmos são, como dissemos, os logaritmos naturais, ou logaritmos na base e. Para passarmos aos logaritmos decimais, usamos a fórmula

$$\log x = \frac{\ell n\,x}{\ell n\,10},$$

que nos diz que os logaritmos decimais são os mesmos naturais divididos pelo fator $\ell n\,10$. Aliás, essa fórmula é caso particular da fórmula mais geral de mudança de base:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

a qual também nos diz que os logaritmos dos números numa determinada base a são iguais aos logaritmos dos mesmos números numa outra base qualquer b divididos pelo fator $\log_b a$.

ÁVILA, Geraldo. Como se constrói uma tábua de logaritmos. *Revista do professor de Matemática*. Rio de Janeiro, n. 26. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/26/1.htm. Acesso em: 5 out. 2021.

Resumindo

Definição de logaritmo

Para $a > 0$, $b > 0$ e $b \neq 1$, $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$.

Consequências da definição

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a a^n = n$
3. $\log_b 1 = 0$
4. $b^{\log_b a} = a$

Propriedades

1. $\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
3. $\log_b x^n = n \cdot \log_b x$
4. $\log_{b^k} x = \frac{1}{k}\log_b x$
5. $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

Equações logarítmicas

- As soluções da equação $\log_b P(x) = \log_b Q(x)$ são as soluções de $P(x) = Q(x)$ que satisfazem as condições de existência $P(x) > 0$ e $Q(x) > 0$.
- As soluções da equação $\log_b P(x) = m$ são as soluções de $P(x) = b^m$.

Função logarítmica

Função logarítmica é toda função $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \log_b x$, com $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Para essas funções, vale:

- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.
- f é injetora: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.
- O gráfico de f cruza o eixo x no ponto $(1, 0)$.
- O gráfico de f tem assíntota vertical $x = 0$.

Além disso, temos:

- Se $b > 1$, a função f é crescente: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- Se $0 < b < 1$, a função f é decrescente: $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Inequação logarítmica

Para $x > 0$ e $y > 0$, temos:

- Se $b > 1$, as soluções de $\log_b P(x) > \log_b Q(x)$ são as soluções de $P(x) > Q(x)$ que satisfazem as condições de existência $P(x) > 0$ e $Q(x) > 0$.
- Se $0 < b < 1$, as soluções de $\log_b P(x) > \log_b Q(x)$ são as soluções de $P(x) < Q(x)$ que satisfazem as condições de existência $P(x) > 0$ e $Q(x) > 0$.

Quer saber mais?

Sites

Um pouco da história dos logaritmos. Instituto de Física da Universidade de São Paulo. Disponível em: http://ecalculo.if.usp.br/funcoes/logaritmica/historia/hist_log.htm. Acesso em: 4 out. 2021.

Nesse *site*, são abordados detalhes sobre o desenvolvimento dos logaritmos e os trabalhos de matemáticos como John Napier, Jost Bürgi e Henry Briggs nesse desenvolvimento.

SATO, Eduardo Akio. Lendo gráficos sobre a COVID-19. Universidade de Campinas, 20 abr. 2020. Disponível em: https://www.blogs.unicamp.br/covid-19/lendo-graficos-sobre-a-covid-19/. Acesso em: 4 out. 2021.

Nesse *blog* da Unicamp, é mostrada a aplicação da escala logarítmica no gráfico de casos de Covid-19 no Brasil, com o objetivo de melhorar a interpretação do crescimento dessa quantidade.

Exercícios complementares

1. Mackenzie-SP 2018 O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \log_3 3 & \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \\ 1 & \log_3 27 & \log_{\frac{1}{3}} 27 \\ 0 & \log_3 81 & \log_3 243 \end{vmatrix}$$ é

a) 0
b) 1
c) -1
d) 3
e) $\frac{1}{3}$

2. Uece 2018 Se n é um número inteiro maior do que dois, o valor de $\log_n\left[\log_n\left(\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\sqrt[n]{n}}}}\right)\right]$ é:

Dado: $\log_n \cong$ logaritmo na base n.

a) 3.
b) -4.
c) 4.
d) -3.

3. Cefet-MG 2015 Se $M = (4^{\log_5 9})^{\log_4 5}$ então, o valor de M é igual a

a) 3
b) 9
c) 27
d) 81

4. EsPCEx-SP 2016 Fazendo $x = \ell n 5$, temos que $y = e^x - e^{-x} = \frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, a e b primos entre si. Logo $a + b$ é igual a

a) 28
b) 29
c) 40
d) 51
e) 52

5. UEM-PR 2020 Assinale o que for **correto**.

01 $\log_3 12 = \log_2 8$
02 $3^{\log_9 16} = 4$
04 $\log_{25} 61 = (\log_{61} 25)^{-1}$
08 $(\log 3)^{\log_{\log_3 3}} = 3$
16 $\log 8 - \log 4 = \log 4$

Soma:

6. UFPR 2020 O pH de uma substância é um valor que expressa a concentração de íons de hidrogênio $[H^+]$, medida em mol por litro (mol/L), em uma solução aquosa. Para o cálculo do pH de uma substância, usa-se a expressão:

$$pH = -\log[H^+].$$

a) Sabendo que a água possui pH = 7 e que uma bebida energética tem pH = 3, quantas vezes a concentração de íons hidrogênio $[H^+]$ é maior na bebida energética em relação à concentração na água?
b) Constatou-se em laboratório que o suco de limão possui uma concentração de íons de hidrogênio $[H^+] = 0{,}0072$ mol/L. Supondo que $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule o pH do suco de limão. Dê sua resposta na forma decimal.

7. FGV-SP 2017 Para todos os inteiros n de 1 a 2016, temos que:

$$a_n = \begin{cases} 2, \text{ se } \log n \text{ for número inteiro} \\ (-1)^n, \text{ se } \log n \text{ não for número inteiro} \end{cases}$$

Sendo assim, a soma $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2016}$ é igual a

a) 8
b) 7
c) 6
d) -6
e) -8

8. Uece 2019 Para cada número natural n, defina $x_n = \log(2^n)$, onde $\log(z)$ representa logaritmo de z na base 10. Assim, pode-se afirmar corretamente que $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_8$ é igual a

a) $6x_8$.
b) $8x_4$.
c) $8x_6$.
d) $9x_4$.

9. ITA-SP 2020 Sejam x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 números reais tais que $2^{x_1} = 4$; $3^{x_2} = 5$; $4^{x_3} = 6$; $5^{x_4} = 7$; $6^{x_5} = 8$ e $7^{x_6} = 9$. Então, o produto $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ é igual a

a) 6.
b) 8.
c) 10.
d) 12.
e) 14.

10. Udesc 2015 Considere a função $f(x) = \log_8(x + 3)^3$. A quantidade de números inteiros que pertencem ao conjunto solução da inequação $4^{f(x)} \leqslant 2x + 105$ é igual a:

a) 8
b) 12
c) 21
d) 19
e) 11

11. ITA-SP 2018 Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant 1$.

c) $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{3}{2}$.

d) $\frac{3}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant 2$.

e) $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

12. Uece 2015 O maior valor de k para o qual a desigualdade $\log_2 x + \log_x 2 \geqslant k$ se verifica para todo número real x maior do que um é

a) 1,5. b) 2,0. c) 2,5. d) 3,0.

13. ITA-SP 2017 Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I. $a^{(\log_c b)} = b^{(\log_c a)}$

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e II.
d) apenas II e III.
e) todas.

14. Udesc 2016 No século XVII, os logaritmos foram desenvolvidos com o objetivo de facilitar alguns cálculos matemáticos. Com o uso dos logaritmos e com tabelas previamente elaboradas era possível, por exemplo, transformar multiplicações em somas e divisões em subtrações. Com o auxílio dos logaritmos era possível também realizar, de forma muito mais rápida, as operações de radiciação.
A tabela abaixo é um pequeno exemplo do que era uma tabela de logaritmos.

Tabela de logaritmos

log 1,5	0,176
log 1,52	0,181
log 1,54	0,187
log 1,56	0,193
log 1,58	0,198
log 2	0,301
log 3	0,477
log 4	0,602
log 5	0,699
log 6	0,778
log 7	0,845
log 8	0,903
log 9	0,954

Com base nas informações da tabela acima, pode-se concluir que o valor aproximado para $\sqrt[8]{35}$ é:

a) 1,50
b) 1,56
c) 1,52
d) 1,54
e) 1,58

15. Unesp 2016 Um torneio de futebol será disputado por 16 equipes que, ao final, serão classificadas do 1º ao 16º lugar. Para efeitos da classificação final, as regras do torneio impedem qualquer tipo de empate.
Considerando para os cálculos $\log 15! = 12$ e $\log 2 = 0{,}3$, a ordem de grandeza do total de classificações possíveis das equipes nesse torneio é de

a) bilhões.
b) quatrilhões.
c) quintilhões.
d) milhões.
e) trilhões.

16. Enem 2016 Em 2011, um terremoto de magnitude 9,0 na escala Richter causou um devastador *tsunami* no Japão, provocando um alerta na usina nuclear de Fukushima. Em 2013, outro terremoto, de magnitude 7,0 na mesma escala, sacudiu Sichuan (sudoeste da China), deixando centenas de mortos e milhares de feridos. A magnitude de um terremoto na escala Richter pode ser calculada por

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

sendo E a energia, em kWh, liberada pelo terremoto e E_0 uma constante real positiva. Considere que E_1 e E_2 representam as energias liberadas nos terremotos ocorridos no Japão e na China, respectivamente.

Disponível em: www.terra.com.br. Acesso em: 15 ago. 2013 (adaptado).

Qual a relação entre E_1 e E_2?

a) $E_1 = E_2 + 2$
b) $E_1 = 10^2 \cdot E_2$
c) $E_1 = 10^3 \cdot E_2$
d) $E_1 = 10^{\frac{9}{7}} \cdot E_2$
e) $E_1 = \frac{9}{7} \cdot E_2$

17. UEPG-PR 2018 Um retângulo tem base a e altura b. Considerando que a é a solução da equação $\log_3(4x - 5) = \log_3 7$ e que b é a solução da equação $5 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x-2} = 308$, assinale o que for correto.

01 A diagonal desse retângulo mede 5.
02 A área desse retângulo é um número múltiplo de seis.
04 O perímetro desse retângulo é um número primo.
08 A diagonal desse retângulo é um número par.
16 O perímetro desse retângulo é um número ímpar.

Soma:

18. Uerj 2017 Uma calculadora tem duas teclas especiais, A e B. Quando a tecla A é digitada, o número que está no visor é substituído pelo logaritmo decimal desse número. Quando a tecla B é digitada, o número do visor é multiplicado por 5.

Considere que uma pessoa digitou as teclas BAB, nesta ordem, e obteve no visor o número 10. Nesse caso, o visor da calculadora mostrava inicialmente o seguinte número:

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50

19. Ifal 2016 Resolvendo a equação $\log 2^x + \log(1 + 2^x) = \log 20$, encontramos o valor de x real igual a

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

20. Unicamp-SP 2015 Considere a função $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}$, definida para todo número real x.

a) Mostre que $f\left(\log_{10}\left(2 + \sqrt{3}\right)\right)$ é um número inteiro.
b) Sabendo que $\log_{10} 2 \cong 0{,}3$, encontre os valores de x para os quais $f(x) = 52$.

21. Mackenzie-SP 2018 O sistema $\begin{cases} \log_b(9a - 35) = 6 \\ \log_{3b}(27a - 81) = 3 \end{cases}$, com $b > 1$, tem como solução (a, b) igual a

a) (2, 11)
b) (11, 2)
c) (1, 11)
d) (11, 1)
e) (1, 2)

22. Fuvest-SP Seja $x > 0$ tal que a sequência $a_1 = \log_2 x$, $a_2 = \log_4(4x)$, $a_3 = \log_8(8x)$, forme, nessa ordem, uma progressão aritmética. Então, $a_1 + a_2 + a_3$ é igual a:

a) $\frac{13}{2}$
b) $\frac{15}{2}$
c) $\frac{17}{2}$
d) $\frac{19}{2}$
e) $\frac{21}{2}$

23. EsPCEx-SP 2019 A equação $\log_3 x = 1 + 12\log_{x^2} 3$ tem duas raízes reais. O produto dessas raízes é

a) 0.
b) $\frac{1}{3}$.
c) $\frac{3}{2}$.
d) 3.
e) 9.

24. FGV-SP 2018 O valor do número real b para o qual a igualdade $\frac{11}{\log_2 x} + \frac{1}{2\log_{25} x} - \frac{3}{\log_8 x} = \frac{1}{\log_b x}$ é verdadeira para todo $x > 0$ e $x \neq 1$ é

a) 20.
b) 50.
c) 100.
d) 250.
e) 400.

25. Enem 2018

Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.

Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100 000 transistores distribuídos em 0,25 cm^2 de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponível em: www.pocket-lint.com.
Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

Considere 0,30 como aproximação para $\log_{10} 2$.
Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

a) 1999
b) 2002
c) 2022
d) 2026
e) 2146

26. Unifesp 2019 Em um jogo disputado em várias rodadas consecutivas, um jogador ganhou metade do dinheiro que tinha a cada rodada ímpar e perdeu metade do dinheiro que tinha a cada rodada par.

a) Sabendo que o jogador saiu do jogo ao término da 4ª rodada com R$ 202,50, calcule com quanto dinheiro ele entrou na 1ª rodada do jogo.

b) Suponha que o jogador tenha entrado na 1ª rodada do jogo com R$ 1 000,00, terminando, portanto, essa rodada com R$ 1 500,00, e que tenha saído do jogo ao término da 20ª rodada. Utilizando $\log 2 \cong 0{,}301$, $\log 3 \cong 0{,}477$ e os dados da tabela, calcule com quanto dinheiro, aproximadamente, ele saiu do jogo.

x	Valor aproximado de 10^x
1,5	32
1,55	35
1,6	40
1,65	45
1,7	50
1,75	56
1,8	63
1,85	71

27. UEL-PR 2018 Um pesquisador estuda uma população e determina que a equação $N = t^9 10^{-15}$ descreve a incidência de câncer, representada por N, em função do tempo t. Ele observa que N cresce rapidamente, o que dificulta a análise gráfica dessa relação. Por isso, o pesquisador decide operar simultaneamente com as variáveis N e t a fim de representá-las como uma semirreta no plano cartesiano $x \cdot y$. Para esse fim, suponha que o pesquisador escolha uma base b, positiva e distinta de 1, e que ele considere as seguintes operações para $N > 0$ e $t > 0$:

$$\begin{cases} x = \log_b(t) \\ y = \log_b(N) \end{cases}$$

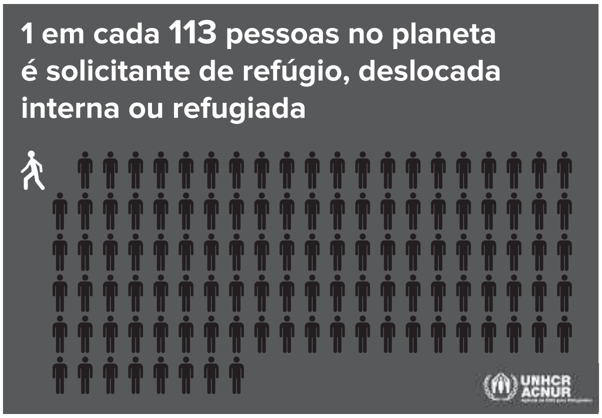
Supondo que $y = 9x + 1$ seja a equação que descreve a semirreta que o pesquisador obteve no plano cartesiano $x \cdot y$, e recordando que $1 = \log_b(b)$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a escolha da base b feita pelo pesquisador.

a) 1
b) 9
c) 9^{15}
d) 10^{-9}
e) 10^{-15}

28. Fatec-SP 2017 Leia o texto e o infográfico, relacionados a dados referentes ao ano de 2015.

O relatório anual "Tendências Globais", que registra o deslocamento forçado ao redor do mundo, aponta um total de 65,3 milhões de pessoas deslocadas por guerras e conflitos até o final de 2015 – um aumento de quase 10% se comparado com o total de 59,5 milhões registrado em 2014. Esta é a primeira vez que o deslocamento forçado ultrapassa o marco de 60 milhões de pessoas. No final de 2005, o Alto Comissariado das Nações Unidas para Refugiados (ACNUR) registrou uma média de 6 pessoas deslocadas a cada minuto. Hoje (2015), esse número é de 24 por minuto.

O universo de 65,3 milhões inclui 21,3 milhões de refugiados ao redor do mundo, 3,2 milhões de solicitantes de refúgio e 40,8 milhões de deslocados que continuam dentro de seus países.



<http://tinyurl.com/k2q6v9y>. Acesso em: 03.02.2017.
Original colorido. Adaptado.

Suponha um aumento exato de 10% no número de pessoas deslocadas no ano de 2015 em relação a 2014, e que esse crescimento ocorrerá a essa mesma taxa anualmente.

O número de pessoas deslocadas, em relação a 2014, dobrará no ano

Adote: $\log 2 = 0{,}30$, $\log 1{,}1 = 0{,}04$

a) 2018.
b) 2020.
c) 2022.
d) 2024.
e) 2026.

29. Acafe-SC 2016 Dentre os carros que mais desvalorizam, os carros de luxo são os que mais sofrem depreciação. Na compra de um carro de luxo no valor de R$ 120 000,00, o consumidor sabe que o modelo adquirido sofre uma desvalorização de 10% ao ano, isto é, o carro tem, a cada instante, um valor menor do que o valor que tinha um ano antes.

Para que o carro perca 70% do seu valor inicial, é necessário que se passe entre:

Dado: $\log 3 = 0{,}477$

a) 9 e 10 anos.
b) 12 e 13 anos.
c) 10 e 11 anos.
d) 11 e 12 anos.

30. ESPM 2019 Se $x \neq y$ são reais não negativos e $\log(x^2 + y^2) = 2 \cdot \log(x + y)$, o valor de $x^y + y^x$ é igual a:

a) 2
b) 1
c) 4
d) 0
e) 3

31. Mackenzie-SP 2019 Se a e b, $a < b$, são soluções da equação $x^{\log_5 x} = \dfrac{x^4}{125}$, então o valor de $\dfrac{1}{2}(b - a)$ é

a) 125
b) 120
c) 60
d) 3
e) 1

32. Insper 2014 Analisando o comportamento das vendas de determinado produto em diferentes cidades, durante um ano, um economista estimou que a quantidade vendida desse produto em um mês (Q), em milhares de unidades, depende do seu preço (P), em reais, de acordo com a relação

$$Q = 1 + 4 \cdot (0{,}8)^{2P}.$$

No entanto, em Economia, é mais usual, nesse tipo de relação, escrever o preço P em função da quantidade Q. Dessa forma, isolando a variável P na relação fornecida acima, o economista obteve

a) $P = \log_{0{,}8}\sqrt{\dfrac{Q-1}{4}}.$
b) $P = \log_{0{,}8}\left(\dfrac{Q-1}{8}\right).$
c) $P = 0{,}5 \cdot \sqrt[0{,}8]{\dfrac{Q-1}{4}}.$
d) $P = \sqrt[0{,}8]{\dfrac{Q-1}{8}}.$
e) $P = 0{,}5 \cdot \log_{0{,}8}\left(\dfrac{Q}{4} - 1\right).$

33. IME-RJ 2020 Sabe-se que $S = x + y + z$, onde x, y e z são soluções inteiras do sistema abaixo.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} \\ y = e^{2\ell n(x)} \\ \log_2 y + \log_x z = (x + 3) \end{cases}$$

O valor de S é:

a) 84
b) 168
c) 234
d) 512
e) 600

34. Enem 2018 Um contrato de empréstimo prevê que, quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1 + i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Dados: Utilize 0,2877 como aproximação para $\ell n\left(\dfrac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para $\ell n(1{,}0132)$.

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a

a) 56ª
b) 55ª
c) 52ª
d) 51ª
e) 45ª

35. FGV-SP 2018 As bases de um contrato de trabalho estabelecem que Rafael, funcionário recém-contratado de uma empresa, irá receber salário anual de R$ 100 000,00 com reajustes anuais de 4% sobre o salário total recebido no ano anterior.

Adote: log 104 = 2,017 nos cálculos dos itens a seguir

a) No 11º ano de trabalho de Rafael nessa empresa, seu salário anual será igual a 10^x reais. Calcule x.
b) A tabela a seguir indica aproximações de 10^x para alguns valores de x. Usando essa tabela, calcule o montante total de dinheiro recebido por Rafael em 11 anos de trabalho nessa empresa, considerando que o salário anual do 1º ano é de R$ 100 000,00.

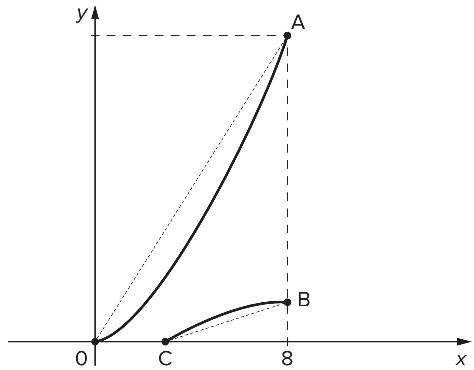
x	0,02	0,08	0,15	0,17	1,02	1,08	1,15	1,17	1,20
10^x	1,05	1,20	1,41	1,48	10,47	12,02	14,13	14,79	15,85

36. UEPG/PSS-PR 2018 Considerando as funções definidas por $f(x) = 2^{x+1}$ e $g(x) = \log_2(x^2 - 1)$, assinale o que for correto.

01 $f(g(x)) = 2(x^2 - 1)$.
02 Se $g(x) = 2$, então x é um número irracional.
04 Se $f(x) = 512$, então x é ímpar.
08 O domínio da função $g(x)$ é o intervalo $[-1, 1]$.

Soma:

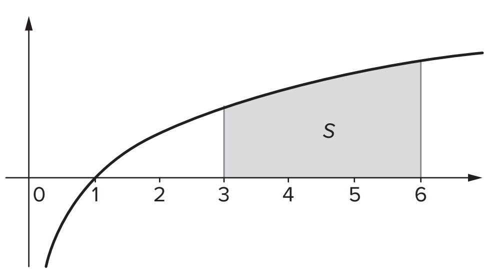
37. Cefet-MG 2017 Na figura abaixo estão representadas as funções $f(x) = 2^x - 1$ e $g(x) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$.



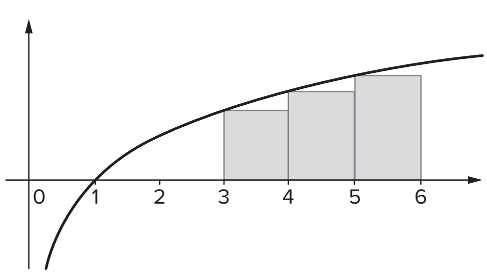
Sabendo-se que o ponto A tem abscissa 8, a área do quadrilátero OABC é

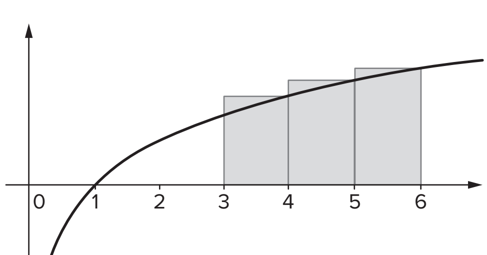
a) 53.
b) 56.
c) 1 014.
d) 1 814.

38. FGV-RJ 2016 Um aluno precisava estimar a área S da região sob o gráfico da função $y = \log x$ (logaritmo decimal de x) entre as abscissas $x = 3$ e $x = 6$ que se vê na figura a seguir.



Para obter um valor aproximado de S, o aluno pensou na estratégia que as figuras abaixo mostram. Ele calculou a área S_1 dos três retângulos da primeira figura abaixo e calculou a área S_2 dos três retângulos da segunda figura abaixo.





Ele imaginou que uma boa aproximação para a área que deseja obter é $S = \frac{S_1 + S_2}{2}$.

Dados $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 3 = 0{,}477$, obtenha um valor para S, usando a estratégia descrita acima.

39. UFRGS 2019 Dadas as funções reais de variável real f e g, definidas por $f(x) = -\log_2(x)$ e $g(x) = x^2 - 4$, pode-se afirmar que $f(x) = g(x)$ é verdadeiro para um valor de x localizado no intervalo

a) [0; 1].
b) [1; 2].
c) [2; 3].
d) [3; 4].
e) [4; 5].

40. Acafe-SC 2019 Considere a função $f(x) = \log_2 x$, analise as afirmações a seguir e assinale a alternativa correta.

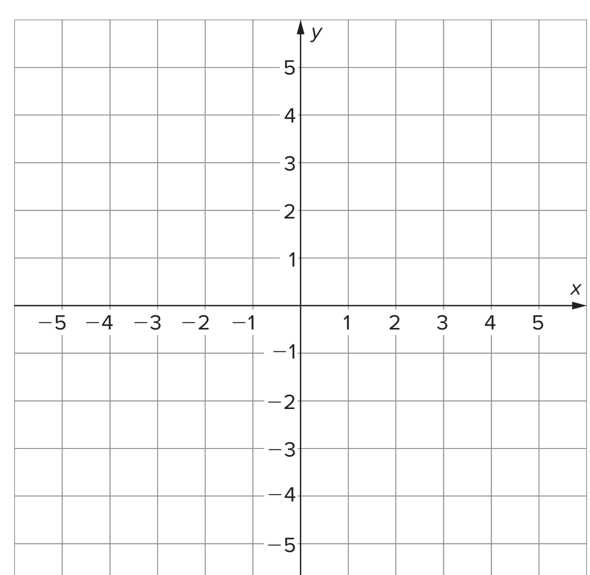
a) Se $f(x + y) = -4$ e $x^2 - y^2 = 32$, então $f(x - y) = 9$.
b) f é crescente para $x \in [0, +\infty)$.
c) Existem dois valores $x \in D(f)$ tais que $f(x^2) = 2$.
d) A função f é bijetora e sua inversa é definida por $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$.

41. Fuvest-SP 2016 Considere as funções f e g definidas por

$$f(x) = 2\log_2(x - 1), \text{ se } x \in \mathbb{R}, x > 1,$$

$$g(x) = \log_2\left(1 - \frac{x}{4}\right), \text{ se } x \in \mathbb{R}, x < 4.$$

a) Calcule $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(2)$, $f(3)$, $g(-4)$, $g(0)$ e $g(2)$.
b) Encontre x, $1 < x < 4$, tal que $f(x) = g(x)$.
c) Levando em conta os resultados dos itens a) e b), esboce os gráficos de f e de g no sistema cartesiano abaixo.



42. Enem 2019 Um jardineiro cultiva plantas ornamentais e as coloca à venda quando estas atingem 30 centímetros de altura. Esse jardineiro estudou o crescimento de suas plantas, em função do tempo, e deduziu uma fórmula que calcula a altura em função do tempo, a partir do momento em que a planta brota do solo até o momento em que ela atinge sua altura máxima de 40 centímetros. A fórmula é $h = 5 \cdot \log_2(t + 1)$, em que t é o tempo contado em dia e h, a altura da planta em centímetro.
A partir do momento em que uma dessas plantas é colocada à venda, em quanto tempo, em dia, ela alcançará sua altura máxima?

a) 63
b) 96
c) 128
d) 192
e) 255

43. USF-SP 2016 O número de bactérias de uma determinada cultura pode ser modelado utilizando a função $B(t) = 800 \cdot 2^{\frac{t}{40}}$, sendo B o número de bactérias presentes na cultura e t o tempo dado em horas a partir do início da observação. Aproximadamente, quantas horas serão necessárias para se observar 5 000 bactérias nessa cultura?

Dado: Considere $\log 2 \cong 0{,}3$.

a) 10 horas.
b) 50 horas.
c) 110 horas.
d) 150 horas.
e) 200 horas.

Leia o texto para responder às questões **44** e **45**.
Psicólogos educacionais podem utilizar modelos matemáticos para investigar questões relacionadas à memória e retenção da informação. Suponha que um indivíduo tenha feito um teste e que, depois de t meses e sem rever o assunto do teste, ele tenha feito um novo teste, equivalente ao que havia feito anteriormente. O modelo matemático que descreve situação de normalidade na memória do indivíduo é dado por $y = 82 - 12\log(t + 1)$, sendo y a quantidade de pontos feitos por ele no instante t.

44. Insper-SP 2018 Após t meses da aplicação do teste inicial, a pontuação de um indivíduo no novo teste caiu para 70 pontos. Assim, é correto concluir que esse novo teste ocorreu t meses após o primeiro teste, com t igual a

a) 11.
b) 8.
c) 15.
d) 12.
e) 9.

45. Insper-SP 2018 Considere agora que, após t meses da aplicação do teste inicial, a pontuação do indivíduo tenha caído 18 pontos na nova aplicação do teste. Adotando $\sqrt{10} \cong 3{,}16$, t é igual a

a) 25,1.
b) 30,6.
c) 32,3.
d) 32,4.
e) 28,8.

46. UFSM-RS 2014 Quando um elemento radioativo, como o Césio 137, entra em contato com o meio ambiente, pode afetar o solo, os rios, as plantas e as pessoas. A radiação não torna o solo infértil, porém tudo que nele crescer estará contaminado. A expressão $Q(t) = Q_0e^{-0{,}023t}$ representa a quantidade, em gramas, de átomos radioativos de Césio 137 presentes no instante t, em dias, onde Q_0 é a quantidade inicial. O tempo, em dias, para que a quantidade de Césio 137 seja a metade da quantidade inicial é igual a:

Dado: $\ell n\, 2 = 0{,}69$.

a) 60
b) 30
c) 15
d) 5
e) 3

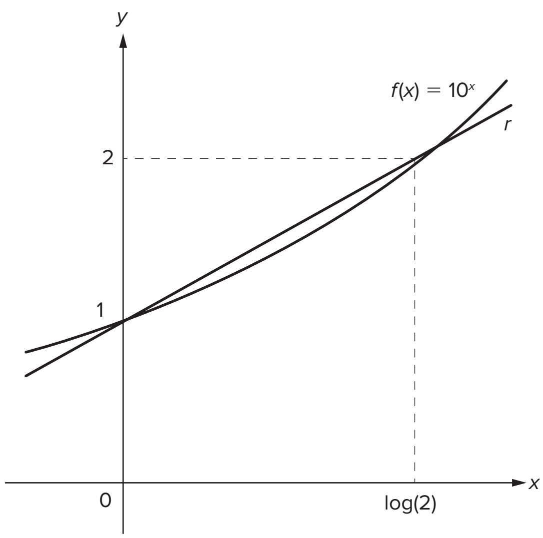
47. FGV-RJ 2017 Em uma experiência de Física, para cada valor da variável contínua x, obteve-se, no laboratório, um resultado y. A tabela a seguir mostra os resultados de cinco medidas realizadas para valores inteiros de x:

x	y
1	2,97
2	9,05
3	26,8
4	81,6
5	241

Os resultados sugeriram que, para os valores de x do intervalo [1, 5], uma função adequada para modelar essa experiência é exponencial, ou seja, da forma $y = a^x$. De fato, para certo valor inteiro de a, os valores encontrados na experiência e os valores dados por essa função diferem muito pouco.
Usando essa função, determine, aproximadamente, para que valor de x encontra-se $y = 100$.

Dados: Utilize o que for necessário:
$\log 2 = 0{,}301$
$\log 3 = 0{,}477$
$\log 5 = 0{,}699$

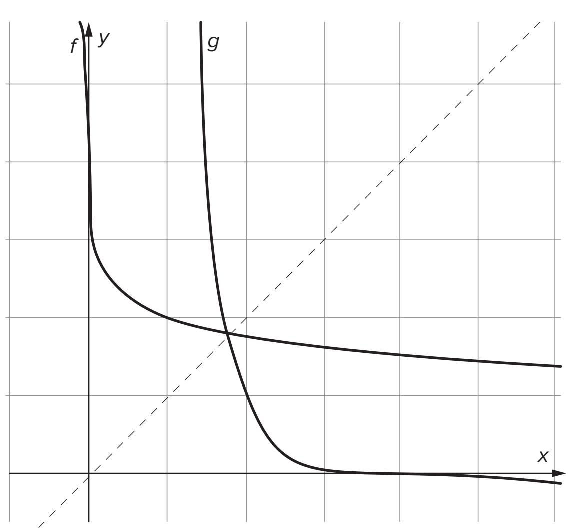
48. UFPR 2014 Considere o gráfico da função $f(x) = 10^x$, com x real, e da reta r, apresentados na figura abaixo.



a) Utilizando a aproximação $\log(2) = 0{,}3$ determine a equação da reta r.

b) Como a reta r está próxima da curva, para valores de x entre 0 e $\log(2)$, utilize a equação de r para obter uma estimativa dos valores de $10^{0{,}06}$ e de $\log(1{,}7)$.

49. Insper-SP 2016 A figura mostra os gráficos das funções f e g, que são simétricos em relação à reta de equação $y = x$.



Se a função f é dada pela lei $f(x) = 1 + 3^{1-\sqrt[3]{x}}$, então a lei da função g é

a) $g(x) = [1 - \log_3(x - 1)]^3$

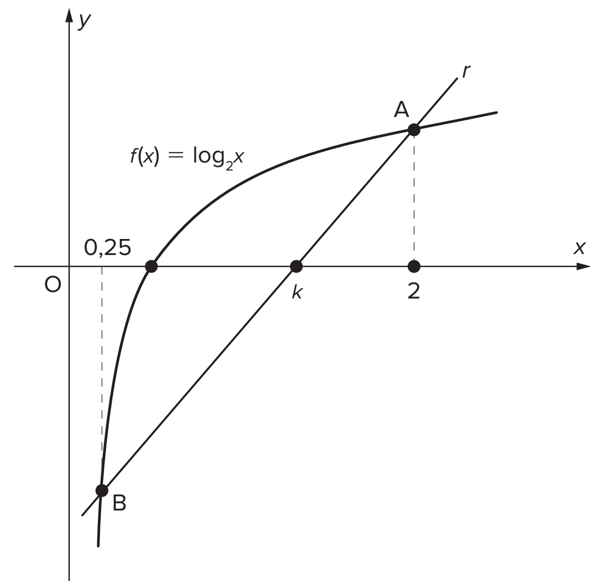
b) $g(x) = [1 + \log_3(x - 1)]^3$

c) $g(x) = 1 - \log_3(x - 1)^3$

d) $g(x) = 1 + \log_3(x - 1)^3$

e) $g(x) = 1 - \log_3(x^3 - 1)$

50. UFPR 2016 Considere o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ e a reta r que passa pelos pontos A e B, como indicado na figura abaixo, sendo k a abscissa do ponto em que a reta r intersecta o eixo Ox. Qual é o valor de k?



a) $\frac{17}{12}$

b) $\frac{14}{11}$

c) $\frac{12}{7}$

d) $\frac{11}{9}$

e) $\frac{7}{4}$

51. Unesp 2015 No artigo "Desmatamento na Amazônia Brasileira: com que intensidade vem ocorrendo?", o pesquisador Philip M. Fearnside, do INPA, sugere como modelo matemático para o cálculo da área de desmatamento a função $D(t) = D(0) \cdot e^{k \cdot t}$, em que D($t$) representa a área de desmatamento no instante t, sendo t medido em anos desde o instante inicial, D(0) a área de desmatamento no instante inicial $t = 0$, e k a taxa média anual de desmatamento da região. Admitindo que tal modelo seja representativo da realidade, que a taxa média anual de desmatamento (k) da Amazônia seja 0,6% e usando a aproximação $\ell n\, 2 \cong 0{,}69$, o número de anos necessários para que a área de desmatamento da Amazônia dobre seu valor, a partir de um instante inicial prefixado, é aproximadamente

a) 51.

b) 115.

c) 15.

d) 151.

e) 11.

FRENTE 1

52. UFU-MG 2017 Um indivíduo com uma grave doença teve a temperatura do corpo medida em intervalos curtos e igualmente espaçados de tempo, levando a equipe médica a deduzir que a temperatura corporal T do paciente, em cada instante *t*, é bem aproximada pela função $T = 36 \cdot 10^{\frac{t}{100}}$, em que *t* é medido em horas, e T em graus Celsius. Quando a temperatura corporal deste paciente atingir os 40 °C, a equipe médica fará uma intervenção, administrando um remédio para baixar a temperatura.
Nestas condições, quantas horas se passarão desde o instante $t = 0$ até a administração do remédio?

Dado: Utilize $\log_{10} 9 = 0,95$.

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8

53. USF-SP 2017 Um determinado medicamento, ingerido durante o tratamento de certa doença, é dissolvido, absorvido pelo organismo e distribuído por meio da corrente sanguínea, sendo metabolizado e, posteriormente, excretado.
Ao estudar a presença do medicamento no organismo, foi revelado que a quantidade desse fármaco no organismo obedece à função $Q(t) = 20 \cdot 2^{1-\frac{t}{12}}$, na qual Q é a quantidade do medicamento em miligramas e *t* o tempo dado em horas.
De acordo com essas informações e sabendo que $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, é correto afirmar que, após a ingestão de uma dose, o tempo necessário para que essa quantidade fique reduzida a 60% da quantidade inicial é de

a) 7 horas e 20 minutos.
b) 7 horas e 33 minutos.
c) 8 horas e 8 minutos.
d) 8 horas e 48 minutos.
e) 55 horas e 12 minutos.

54. Uece 2020 No país das comunicações, cuja população é *x* (em milhões de habitantes), uma notícia de interesse nacional foi divulgada e, *t* horas após a divulgação, o número de pessoas que tomaram conhecimento da notícia é dado por $f(t) = \dfrac{x}{1 + 5 \cdot 2^{\frac{-x}{2}t}}$.
Sabendo que, uma hora após a divulgação, a metade da população já tinha conhecimento da notícia, é correto afirmar que a população desse país, em milhões de habitantes, é, aproximadamente,

Dado: Considere o logaritmo de cinco na base dois, aproximadamente, igual a 2,32.

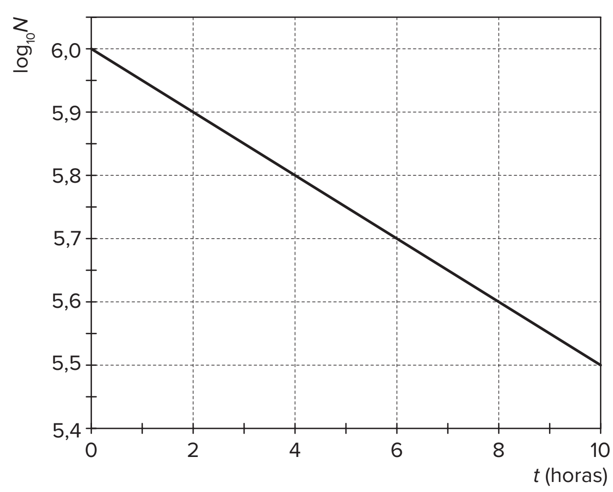
a) 4,64.
b) 8,32.
c) 6,62.
d) 3,68.

55. UCS-RS 2016 Um equipamento é depreciado de tal forma que, *t* anos após a compra, seu valor é dado por $V(t) = C \cdot e^{-0,2t} + 31\,000$. Se 10 anos após a compra o equipamento estiver valendo R$ 112 000,00, então ele foi comprado por um valor, em reais,

Dado: $\ell n\, 7,4 \cong 2$

a) maior que 700 000
b) entre 600 000 e 700 000
c) entre 500 000 e 600 000
d) entre 400 000 e 500 000
e) menor que 400 000

56. Fuvest-SP 2013 O número N de átomos de um isótopo radioativo existente em uma amostra diminui com o tempo *t*, de acordo com a expressão $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$, sendo N_0 o número de átomos deste isótopo em $t = 0$ e λ a constante de decaimento. Abaixo, está apresentado o gráfico do $\log_{10} N$ em função de *t*, obtido em um estudo experimental do radiofármaco Tecnécio 99 metaestável ($^{99\,m}Tc$), muito utilizado em diagnósticos do coração.



A partir do gráfico, determine

a) o valor de $\log_{10} N_0$;
b) o número N_0 de átomos radioativos de $^{99\,m}Tc$;
c) a meia-vida ($T_{1/2}$) do $^{99\,m}Tc$.

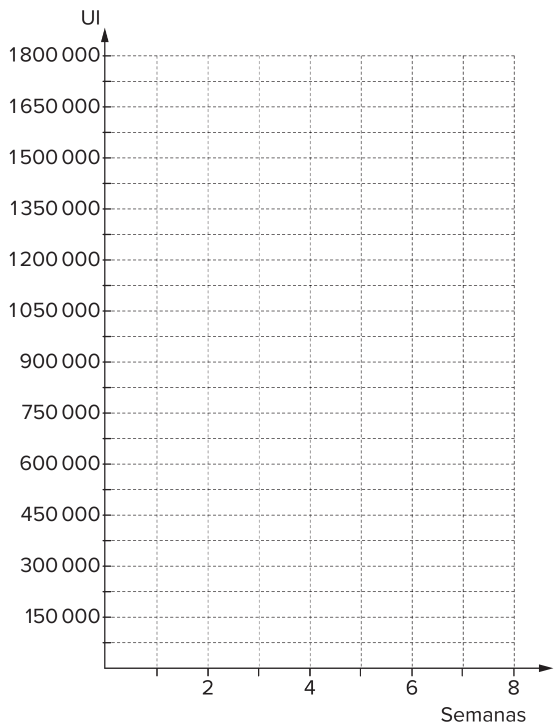
Note e adote: A meia-vida ($T_{1/2}$) de um isótopo radioativo é o intervalo de tempo em que o número de átomos desse isótopo existente em uma amostra cai para a metade.
$\log_{10} 2 = 0,3$; $\log_{10} 5 = 0,7$

57. ITA-SP 2019 Sabendo que *x* pertence ao intervalo fechado [1, 64], determine o maior valor da função

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right).$$

58. Unesp 2020 A penicilina benzatina é um antibiótico indicado no tratamento de certas infecções, e sua meia-vida é de 336 horas. Ou seja, após esse período de tempo a quantidade de medicamento no sangue reduz-se pela metade. O tratamento convencional é feito com uma aplicação de 1200000 UI do medicamento e essa dose mantém-se em quantidade adequada no sangue (isto é, não inferior a 300000 UI) durante os 28 dias seguintes. A dosagem, o número de doses e o intervalo de tempo entre as doses dependem da doença a ser tratada.

a) Considere um paciente que recebeu 2 doses, cada uma de 1200000 UI, desse medicamento, sendo que a segunda dose foi aplicada 28 dias após a primeira dose. Faça um esboço gráfico na malha a seguir, representando a quantidade desse medicamento no sangue ao longo de 8 semanas de tratamento.



b) Considere outro caso, em que um paciente foi tratado com 2 doses, cada uma de 2400000 UI, de penicilina benzatina, sendo a segunda dose aplicada 14 dias após a primeira. Determine a quantidade desse medicamento no sangue do paciente, em UI, logo após ele tomar a segunda dose e indique durante quantos dias completos, após essa segunda dose, a quantidade de medicamento permanecerá em quantidade adequada no sangue desse paciente.

Dados: Adote em seus cálculos $\log 2 = 0{,}30$; $\log 3 = 0{,}48$.

59. UFMS 2020 Qual a condição sobre a para o gráfico da função $2x^2 - 4x - \log_{0,5} a$ não interceptar o eixo das abscissas?

a) $a > \frac{1}{8}$

b) $a > 4$

c) $0 < a < 8$

d) $4 < a < 8$

e) $a < \frac{1}{4}$

60. Fuvest-SP 2015 Resolva as inequações:

a) $x^3 - x^2 - 6x > 0$;

b) $\log_2(x^3 - x^2 - 6x) \leq 2$.

61. ITA-SP 2016 Seja f a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:

a) O domínio D_f da função f.

b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$.

c) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$.

62. AFA-SP 2019 O domínio mais amplo da função real f definida por $f(x) = \sqrt{\log_a (x^2 - 3)}$, em que $a \in]0, 1[$, é

a) $[-2, 2]$

b) $]-2, 2[$

c) $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$

d) $\left[-2, -\sqrt{3}\, [\cup]\, \sqrt{3}, 2\right]$

63. ITA-SP 2016 Considere as seguintes afirmações:

I. A função $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

II. A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$ possui uma única solução real.

III. A equação $(x + 1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

e) apenas III.

FRENTE 1

BNCC em foco

Use as informações a seguir para responder às questões de **1** a **3**.
A intensidade sonora mede a potência do som (W) gerado por uma fonte em determinada área (m^2). A intensidade $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 é a menor potência que um ser humano pode perceber. A escala de bel compara as intensidades de sons com I_0, gerando o nível sonoro através da fórmula $\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, medido em decibéis.

EM13MAT305

1. Qual é o nível sonoro na escala bel de uma onda com intensidade $2 \cdot 10^{-5}$ W/m^2? Dado $\log 2 = 0,3$.

EM13MAT305

2. Qual é a intensidade sonora de uma onda com nível sonoro de 80 decibéis?

EM13MAT305

3. O ouvido humano pode sofrer lesões se submetido a sons intensos por longos períodos. Por isso, a legislação trabalhista brasileira define o tempo máximo durante o qual um trabalhador pode ficar exposto a certos níveis de intensidade sonora, como mostra o quadro a seguir.

Limites de tolerância para ruído contínuo ou intermitente

Nível de ruído dB (A)	Máxima exposição diária permissível
85	8 horas
86	7 horas
87	6 horas
88	5 horas
89	4 horas e 30 minutos
90	4 horas
91	3 horas e 30 minutos
92	3 horas
93	2 horas e 40 minutos
94	2 horas e 15 minutos
95	2 horas
96	1 hora e 45 minutos
98	1 hora e 15 minutos
100	1 hora
102	45 minutos
104	35 minutos
105	30 minutos
106	25 minutos
108	20 minutos
110	15 minutos
112	10 minutos
114	8 minutos
115	7 minutos

BRASIL. Norma Regulamentadora Nº 15 (NR-15) - Anexo 1. Disponível em: https://www.gov.br/trabalho-e-previdencia/pt-br/composicao/orgaos-especificos/secretaria-de-trabalho/inspecao/seguranca-e-saude-no-trabalho/normas-regulamentadoras/nr-15-anexo-01.pdf. Acesso em: 6 out. 2021.

Nessas condições, qual é a máxima exposição diária permissível para um ruído de intensidade sonora de 10^{-2} W/m^2?

Bilk Sergey/Shutterstock.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

8

Função modular

Uma das principais aplicações do conceito de módulo é facilitar o trabalho com o valor absoluto de algumas grandezas, principalmente em estudos da Estatística e da Física, como no cálculo da dilatação linear de um corpo – o trilho de um trem, por exemplo, sofre dilatação ao aumentar a temperatura. As funções modulares também são comumente aplicadas em conceitos de variação de grandezas e de distâncias entre pontos, planetas ou objetos, além de nos ajudar a demonstrar limites no cálculo diferencial, muito utilizados na Engenharia.

Neste capítulo, estudaremos o conceito de módulo e alguns tipos de função, equação e inequação modulares. Além disso, aprenderemos a construir o gráfico de funções modulares no plano cartesiano.

Módulo de números reais

O **módulo** de um número real x, ou valor absoluto de x, cuja notação é $|x|$, é o próprio x, se x for um número não negativo, ou é o oposto de x, se x for um número negativo. Em linguagem matemática, podemos escrever:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos:

a) $|3| = 3$

b) $|-7| = 7$

c) $|0| = 0$

d) $|6 - \sqrt{2}|$

A expressão numérica $6 - \sqrt{2}$, que está dentro do módulo, é positiva. Então, para desenvolver o módulo (ou seja, para escrever a expressão sem usar a notação de módulo), mantemos os sinais de todos os termos no resultado: $|6 - \sqrt{2}| = 6 - \sqrt{2}$.

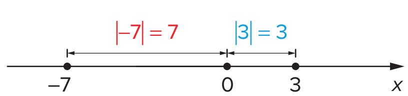
e) $|\pi - 7|$

A expressão $\pi - 7$, que está dentro do módulo, é negativa. Então, alteramos os sinais de cada um dos termos ao desenvolver o módulo: $|\pi - 7| = -(\pi - 7) = -\pi + 7$.

! Atenção

Verifique que $|8 - 2 - 1| = 8 - 2 - 1$.
Um erro comum no desenvolvimento de um módulo é alterar o sinal de cada termo para positivo. Nesse exemplo, $|8 - 2 - 1| \neq 8 + 2 + 1$.

Geometricamente, o módulo de um número real é a distância entre o número e a origem da reta dos números reais. Por exemplo, $|-7| = 7$ porque a distância entre -7 e 0 é igual a 7, e $|3| = 3$ porque a distância entre 3 e 0 é igual a 3.



Módulo de expressões abertas

Expressões ou sentenças abertas dependem do valor das variáveis para sabermos se assumem valores positivos, negativos ou nulos. Assim, para desenvolver o módulo de uma expressão aberta, devemos fazer o estudo do sinal da expressão para aplicar a definição de módulo.

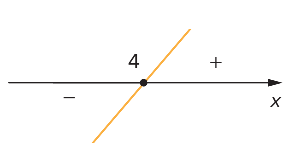
Exemplos:

a) $|2x - 8|$

Para desenvolver esse módulo, analisamos o sinal da sentença aberta $2x - 8$. Fazendo $y = 2x - 8$, determinamos a raiz dessa equação:

$$2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Assim:



- Se $x \geqslant 4$, então $y \geqslant 0$.
- Se $x < 4$, então $y < 0$.

Logo, aplicando a definição de módulo, temos:

$$|2x - 8| = \begin{cases} 2x - 8, \text{ se } x \geqslant 4 \\ -2x + 8, \text{ se } x < 4 \end{cases}$$

! Atenção

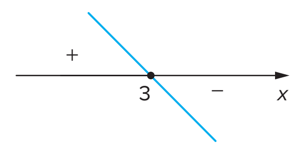
Para $x = 4$, a expressão é igual a zero em qualquer um dos dois casos. Assim, podemos acrescentar o sinal de igual em qualquer um dos intervalos ou até mesmo em ambos.

b) $|9 - 3x|$

Fazendo $y = 9 - 3x$, determinamos a raiz dessa equação:

$$9 - 3x = 0 \Rightarrow x = 3$$

Assim:



- Se $x > 3$, então $y < 0$.
- Se $x \leqslant 3$, então $y \geqslant 0$.

Logo:

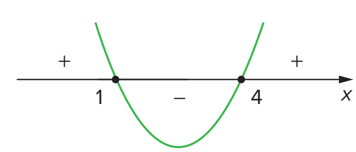
$$|9 - 3x| = \begin{cases} -9 + 3x, \text{ se } x > 3 \\ 9 - 3x, \text{ se } x \leqslant 3 \end{cases}$$

c) $|x^2 - 5x + 4|$

Fazendo $y = x^2 - 5x + 4$, determinamos as raízes dessa equação:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4$$

Assim:



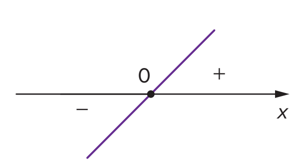
- Se $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 4$, então $y \geqslant 0$.
- Se $1 < x < 4$, então $y < 0$.

Logo:

$$|x^2 - 5x - 4| = \begin{cases} x^2 - 5x + 4, \text{ se } x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 4 \\ -x^2 + 5x - 4, \text{ se } 1 < x < 4 \end{cases}$$

d) $|x|$

Fazendo $y = x$, a raiz dessa equação é $x = 0$.
Assim:



Portanto:

- Se $x \geqslant 0$, então $y \geqslant 0$.
- Se $x < 0$, então $y < 0$.

Logo:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Atenção

Note que $|x|$ pode ser igual a x ou a $-x$ dependendo do valor de x. Assim, nos exercícios, não escreva $|x| = x$ sem antes avaliar o sinal de x.

Propriedades

Algumas propriedades podem auxiliar no desenvolvimento do módulo de números reais ou expressões abertas.

$$|a| \geqslant 0, \text{ com } a \in \mathbb{R}$$

Exemplos: $|-7| = 7$ e $|0{,}5| = 0{,}5$.

$$|-a| = |a|, \text{ com } a \in \mathbb{R}$$

Exemplos: $|-5| = |+5|$ e $|x - 2| = |2 - x|$.

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

Exemplos: $|2 \cdot 5| = |2| \cdot |5| = 2 \cdot 5 = 10$ e $|3x| = |3| \cdot |x| = 3|x|$.

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \text{ com } a \in \mathbb{R} \text{ e } b \in \mathbb{R}^*$$

Exemplos: $\left|\frac{56}{7}\right| = \frac{|56|}{|7|} = \frac{56}{7} = 8$ e $\left|\frac{x}{-2}\right| = \frac{|x|}{|-2|} = \frac{|x|}{2}$.

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \text{ com } a \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

Exemplos: $|3 + 1| = |3| + |1|$ e $|3 + (-1)| < |3| + |-1|$.

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ com } a \in \mathbb{R}$$

Exemplos: $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$, $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$ e $\sqrt{(x-6)^2} = |x - 6|$.

Atenção

É possível "simplificar" o radical com o expoente apenas quando o radicando não é negativo.

$$\sqrt[\cancel{2}]{5^{\cancel{2}}} = 5$$

Como o valor de uma raiz quadrada, no conjunto dos números reais, nunca é negativo, se não soubermos o sinal do radicando, obrigatoriamente temos que $\sqrt{a^2} = |a|$.

Saiba mais

Em uma equação irracional na forma $\sqrt{A} = B$, temos a condição $B \geqslant 0$, pois o valor de uma raiz quadrada nunca é negativo no conjunto dos números reais. Resolvendo essa equação, obtemos:

$$\left(\sqrt{A}\right)^2 = B^2 \Leftrightarrow A = B^2$$

Ao resolver essa equação, não precisamos considerar a condição $A \geqslant 0$ nem indicar usando a notação de módulo, $|A| = B^2$, pois A certamente é positivo porque é igual a um número real elevado ao quadrado. Assim, podemos "cancelar" a raiz com o quadrado.

$$\left(\sqrt[\cancel{2}]{A}\right)^{\cancel{2}} = B^2 \Leftrightarrow A = B^2$$

Exercício resolvido

1. Determine os valores de x e y na equação $|x + y - 6| + |x - y - 2| = 0$.

Resolução:

Para que a soma de duas sentenças seja igual a zero, o valor de uma sentença deve ser o oposto do valor da outra. Como ambas as sentenças nessa equação estão em módulo, elas nunca assumem valores negativos. Portanto, a única maneira de essa igualdade ser verdadeira é se os módulos de ambas as sentenças forem iguais a zero.

$$\begin{cases} |x + y - 6| = 0 \\ |x - y - 2| = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$$

Função modular

Chamamos de função modular a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.

Assim, do conceito de módulo apresentado anteriormente, podemos escrever que:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Gráfico da função modular

Funções na forma $g(x) = |f(x)|$

O efeito de aplicar o módulo em uma função é o mesmo de aplicar a um número real.

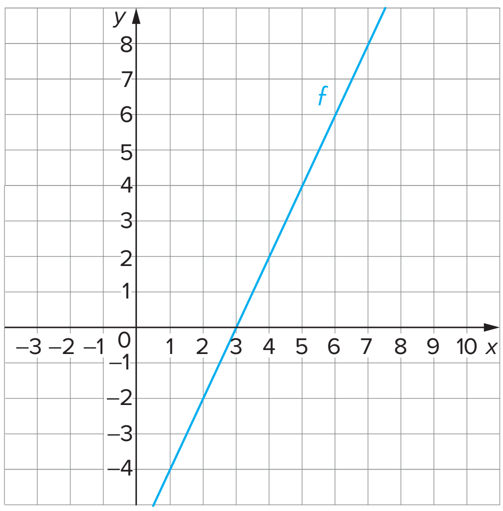
- Se $f(x) \geqslant 0$, então $|f(x)| = f(x)$.
- Se $f(x) < 0$, então $|f(x)| = -f(x)$.

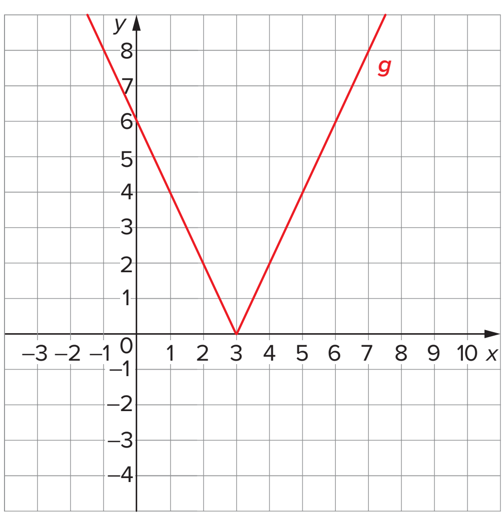
Assim, ao aplicar o módulo em uma função, os pontos pertencentes à parte positiva do gráfico (acima do eixo das abscissas) não sofrem alteração, e os pontos pertencentes à parte negativa (abaixo do eixo das abscissas) têm o sinal das ordenadas alterado de negativo para positivo. Podemos dizer que a parte negativa do gráfico sofre uma reflexão em relação ao eixo das abscissas ou que é "rebatida" para cima do eixo das abscissas.

Exemplos:

a) $g(x) = |2x - 6|$

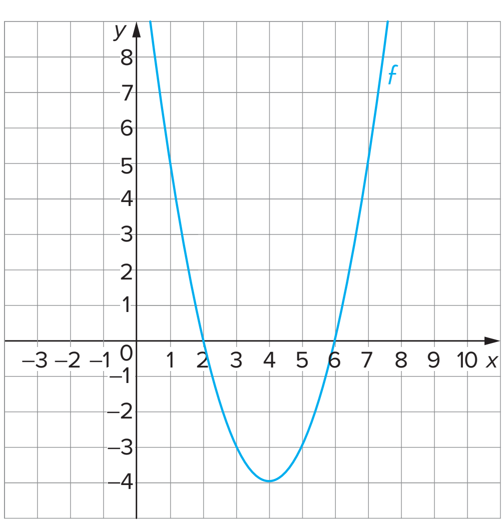
Para construir o gráfico de g, podemos inicialmente traçar o gráfico de $f(x) = 2x - 6$. Como $g(x) = |f(x)|$, "rebatemos" a parte negativa do gráfico de f.

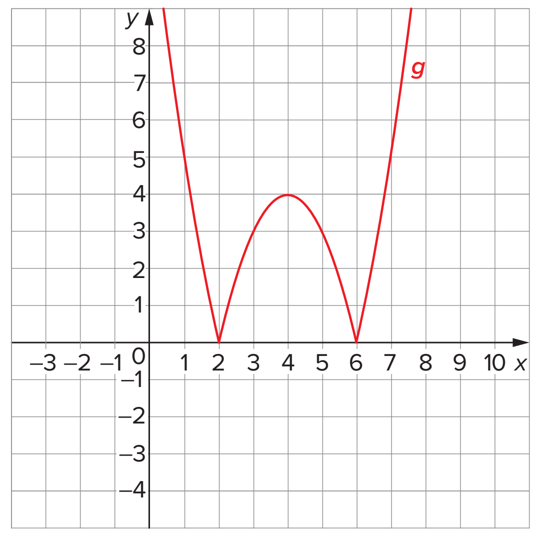




b) $g(x) = |x^2 - 8x + 12|$

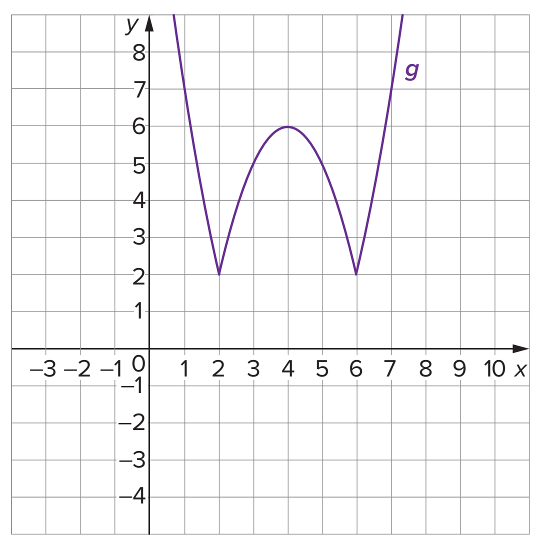
Traçamos o gráfico de $f(x) = x^2 - 8x + 12$ e, como $g(x) = |f(x)|$, "rebatemos" a parte negativa do gráfico.





c) $g(x) = |x^2 - 8x + 12| + 2$

Adicionando ou subtraindo uma constante k na lei de uma função, o gráfico se desloca verticalmente para cima ou para baixo, respectivamente. Nesse caso, temos $f(x) = x^2 - 8x + 12$ e $g(x) = |f(x)| + 2$, ou seja, "rebatemos" a parte negativa do gráfico (como fizemos no exemplo anterior) e então deslocamos o gráfico obtido em 2 unidades para cima.



Funções na forma $g(x) = f(|x|)$

Substituindo x por $|x|$ em uma função $f(x)$, os pontos do gráfico com valores positivos de x permanecem inalterados, e os pontos com valores negativos de x passam a ter a mesma imagem dos respectivos valores positivos.

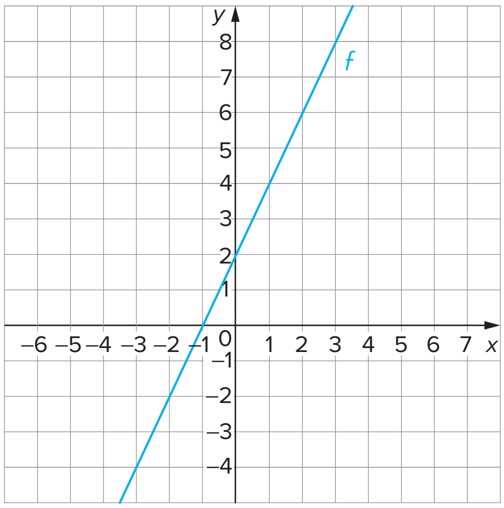
$$f(|-1|) = f(1),\ f(|-2|) = f(2),\ f(|-3|) = f(3), \ldots$$

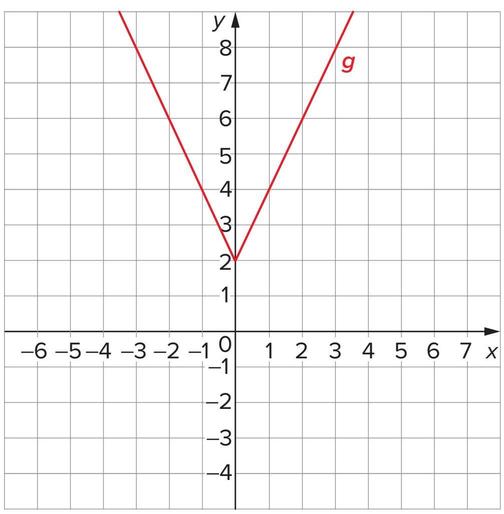
O efeito dessa transformação gera um gráfico simétrico em relação ao eixo das ordenadas, preservando a parte de $f(x)$ para $x \geqslant 0$, ou seja, a parte do gráfico à direita do eixo das ordenadas, e fazendo uma cópia refletida dessa parte em relação ao eixo das ordenadas, à esquerda desse eixo.

Exemplos:

a) $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = f(|x|) = 2|x| + 2$

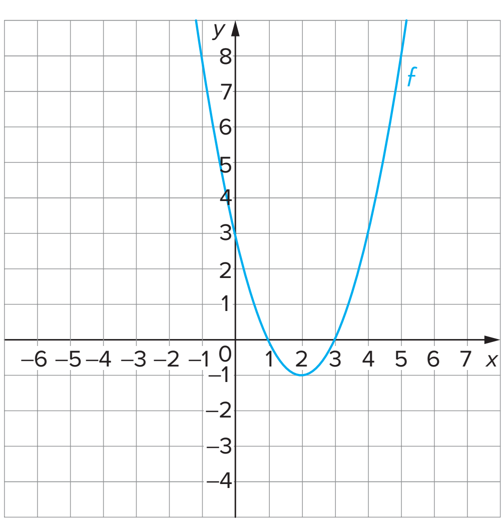
Para construir o gráfico de g, inicialmente traçamos o gráfico de f e, depois, refletimos a parte do gráfico à direita do eixo das ordenadas em relação a esse eixo.

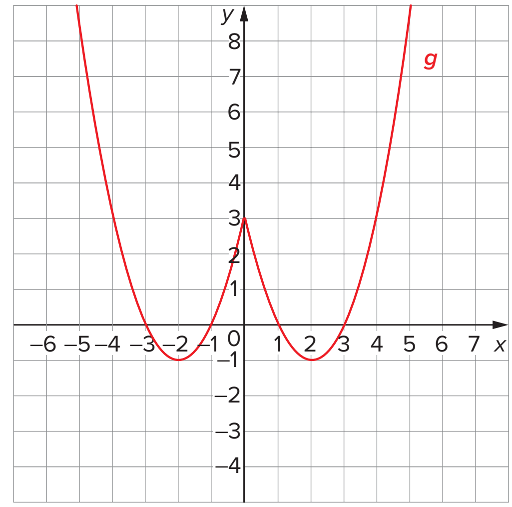




b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ e $g(|x|) = |x|^2 - 4|x| + 3$

Traçamos o gráfico de f e refletimos a parte à direita do eixo das ordenadas em relação a esse eixo.





Outras funções com módulo

Outros casos de funções envolvendo módulos são estudados aplicando a definição de módulo.

Exemplo:

$$g(x) = |2x - 2| + x - 4$$

Aplicando a definição de módulo na expressão $|2x - 2|$, obtemos:

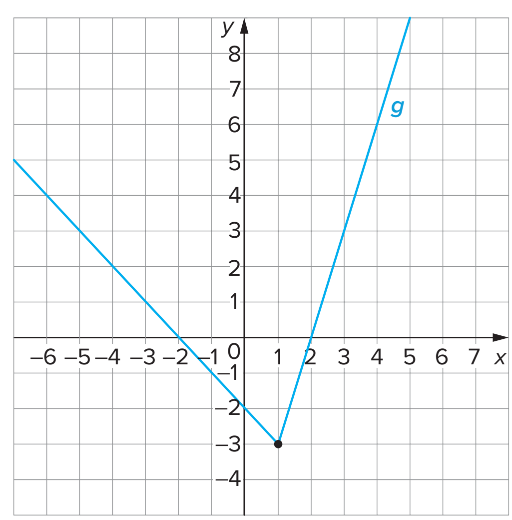
$$|2x - 2| = \begin{cases} 2x - 2, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -2x + 2, \text{ se } x \leqslant 1 \end{cases}$$

Assim:

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 2 + x - 4, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -2x + 2 + x - 4, \text{ se } x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} 3x - 6, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x - 2, \text{ se } x \leqslant 1 \end{cases}$$

Traçamos, então, as duas partes do gráfico de g considerando os intervalos.



Equações modulares

Uma equação é modular quando pelo menos uma das incógnitas está dentro do módulo.

É possível resolver todas as equações modulares utilizando a definição de módulo e algumas técnicas de acordo com a forma da equação.

Equações na forma $|f(x)| = k$

Nesse tipo de equação, é importante verificar a condição $k \geq 0$, pois o módulo tem sempre um valor positivo ou nulo.

$$|f(x)| = k \Leftrightarrow f(x) = k \text{ ou } f(x) = -k, \text{ com } k \geq 0$$

Exercício resolvido

2. Resolva as equações modulares a seguir.

a) $|2x - 10| = 8$ **b)** $||x - 1| - 3| = 6$

Resolução:

a) $2x - 10 = 8 \Rightarrow 2x = 18 \Rightarrow x = 9$ ou $2x - 10 = -8 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

Logo, S = {1, 9}.

b) **Caso 1:**

$|x - 1| - 3 = 6$

$|x - 1| = 9$

$x - 1 = 9 \Rightarrow x = 10$ ou $x - 1 = -9 \Rightarrow x = -8$

Caso 2:

$|x - 1| - 3 = -6$

$|x - 1| = -3$

(não convém)

Logo, S = {−8, 10}.

! Atenção

Note que os valores de x podem ser negativos desde que o valor do módulo não seja negativo.

Equações na forma $|f(x)| = g(x)$

Nesse tipo de equação, verificamos também a condição $g(x) \geq 0$.

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ ou } f(x) = -g(x), \text{ com } g(x) \geq 0$$

Exercício resolvido

3. Resolva a equação $|x - 1| + 3 + 4x = 6x + 4$.

Resolução:

Inicialmente, devemos isolar o módulo para verificar a restrição do valor positivo ou nulo.

$$|x - 1| + 3 + 4x = 6x + 4 \Rightarrow |x - 1| = 2x + 1$$

Condição: $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$

$x - 1 = 2x + 1 \Rightarrow x = -2$ ou $x - 1 = -2x - 1 \Rightarrow x = 0$

Temos que $x = -2$ não respeita a condição. Logo, S = {0}.

Equações na forma $|f(x)| = |g(x)|$

Nesse tipo de equação, podemos considerar a propriedade $\sqrt{a^2} = |a|$ e elevar ambos os membros da equação ao quadrado.

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow [f(x)]^2 = [g(x)]^2$$

Outra possibilidade é aplicar a definição, e, nesse caso, não há condição restritiva para os valores, pois ambas as expressões estão dentro do módulo.

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ ou } f(x) = -g(x)$$

Exercício resolvido

4. Resolva a equação $|x + 5| = |2x + 4|$.

Resolução:

$x + 5 = 2x + 4 \Rightarrow x = 1$ ou $x + 5 = -2x - 4 \Rightarrow x = -3$

Logo, S = {−3, 1}.

Outros tipos de equação

Quando não há a possibilidade de reduzirmos as equações às técnicas anteriores, aplicaremos a definição em cada módulo da equação, analisando os intervalos.

Exercício resolvido

5. Resolva a equação $|x + 2| + |3 - 3x| = 7$.

Resolução:

Aplicamos a definição em cada módulo da equação:

$$|x+2| = \begin{cases} x+2, \text{ se } x \geq -2 \\ -x-2, \text{ se } x \leq -2 \end{cases}$$

$$|3-3x| = \begin{cases} -3+3x, \text{ se } x \geq 1 \\ 3-3x, \text{ se } x \leq 1 \end{cases}$$

Devido aos dois pontos críticos (−2 e 1), há três intervalos a serem analisados: $x \leq -2$, $-2 \leq x \leq 1$ e $x \geq 1$. Assim, para cada intervalo, substituímos cada módulo pelo respectivo valor e calculamos o valor de x. Ainda para cada intervalo, é essencial verificamos se o valor de x pertence ao intervalo que está sendo analisado.

$x \leq -2$	$(-x - 2) + (3 - 3x) = 7$ $-4x = 6$ $x = -\frac{3}{2}$ $x = -\frac{3}{2}$ não convém, pois $-\frac{3}{2} \leq -2$ (F)
$-2 \leq x \leq 1$	$(x + 2) + (3 - 3x) = 7$ $-2x = 2$ $x = -1$ $-2 \leq -1 \leq 1$ (V)
$x \geq 1$	$(x + 2) + (-3 + 3x) = 7$ $4x = 8$ $x = 2$ $2 \geq 1$ (V)

Considerando apenas os valores que condizem com os respectivos intervalos:

$$S = \{-1, 2\}$$

Inequações modulares

Uma inequação é modular quando pelo menos uma das incógnitas está dentro do módulo.

Assim como nas equações modulares, sempre podemos aplicar a definição de módulo na resolução das inequações modulares. Além disso, algumas formas de inequações permitem aplicar técnicas de resolução.

Inequações do tipo $|f(x)| > k$ ou $|f(x)| \geqslant k$

Nesse tipo de inequação, devemos verificar quais valores de x tornam a sentença verdadeira.

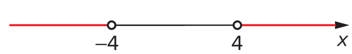
$$|f(x)| > k \Rightarrow f(x) > k \text{ ou } f(x) < -k, \text{ com } k \geqslant 0$$
$$|f(x)| \geqslant k \Rightarrow f(x) \geqslant k \text{ ou } f(x) \leqslant -k, \text{ com } k \geqslant 0$$

Exemplos:

a) $|x| > 4$

Alguns valores positivos que tornam essa sentença verdadeira são 5, 6, 7, 8, ... Os valores negativos são $-5, -6, -7, \ldots$

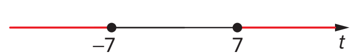
Assim, temos os seguintes intervalos e o conjunto solução:



Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4 \text{ ou } x > 4\}$.

b) $|2x + 1| \geqslant 7$

Podemos atribuir uma incógnita $t = 2x + 1$ e analisar os intervalos para ela, que incluem os extremos -7 e 7.



$$\begin{array}{rcr} t \leqslant -7 & & t \geqslant 7 \\ 2x + 1 \leqslant -7 & \text{ou} & 2x + 1 \geqslant 7 \\ x \leqslant -4 & & x \geqslant 3 \end{array}$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -4 \text{ ou } x \geqslant 3\}$.

Inequações do tipo $|f(x)| < k$ ou $|f(x)| \leqslant k$

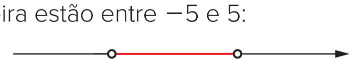
Observe que os valores que tornam a sentença verdadeira são escritos de uma forma diferente do tipo anterior.

$$|f(x)| < k \Rightarrow -k < f(x) < k, \text{ com } k \geqslant 0$$
$$|f(x)| \leqslant k \Rightarrow -k \leqslant f(x) \leqslant k, \text{ com } k \geqslant 0$$

Exemplos:

a) $|x| < 5$

Alguns dos valores que satisfazem essa inequação são 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3 e -4, pois em módulo são menores do que 5. Os valores que tornam essa sentença verdadeira estão entre -5 e 5:



$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5\}$$

b) $|2x - 3| \leqslant 11$

Podemos atribuir uma incógnita $t = 2x - 3$ e analisar o intervalo para ela, que inclui os extremos.

$$-11 \leqslant t \leqslant 11$$
$$-11 \leqslant 2x - 3 \leqslant 11$$
$$-8 \leqslant 2x \leqslant 14$$
$$-4 \leqslant x \leqslant 7$$
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leqslant x \leqslant 7\}$$

! Atenção

Para resolver uma dupla desigualdade, também podemos escrevê-la na forma de sistema e resolver cada inequação separadamente.

$$-11 \leqslant 2x - 3 \leqslant 11 \Rightarrow \begin{cases} -11 \leqslant 2x - 3 \\ 2x - 3 \leqslant 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x \geqslant -8 \\ 2x \leqslant 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -4 \\ x \leqslant 7 \end{cases} \Rightarrow -4 \leqslant x \leqslant 7$$

Exercício resolvido

6. Resolva as inequações modulares:

a) $|x + 1| < -2$
b) $|2x - 6| > 0$
c) $||x - 4| - 5| > 2$
d) $|3x - 2| \leqslant 3 - 2x$
e) $|3x - 1| < 2x - 4$

Resolução:

a) Nenhum valor de x torna essa sentença verdadeira, pois nenhum módulo tem valor negativo. Logo, $S = \varnothing$.

b) $|2x - 6| > 0 \Rightarrow 2x - 6 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$

Logo, $S = \mathbb{R} - \{3\}$.

c) $||x - 4| - 5| > 2$

Caso 1:

$$|x - 4| - 5 < -2$$
$$|x - 4| < 3$$
$$-3 < x - 4 < 3$$
$$1 < x < 7$$

Caso 2:

$$|x - 4| - 5 > 2$$
$$|x - 4| > 7$$
$$\begin{array}{rcr} x - 4 < -7 & \text{ou} & x - 4 > 7 \\ x < -3 & & x > 11 \end{array}$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } 1 < x < 7 \text{ ou } x > 11\}$.

d) $|3x - 2| \leqslant 3 - 2x \Rightarrow -(3 - 2x) \leqslant 3x - 2 \leqslant 3 - 2x \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3 + 2x \leqslant 3x - 2 \\ 3x - 2 \leqslant 3 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geqslant -1 \\ x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant 1$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

e) $|3x - 1| < 2x - 4 \Rightarrow -(2x - 4) < 3x - 1 < 2x - 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 4 < 3x - 1 \\ 3x - 1 < 2x - 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -3 \end{cases}$$

Nesse caso, a dupla desigualdade não tem solução, pois não existe interseção entre as soluções de cada inequação. Logo, $S = \varnothing$.

Revisando

1. Calcule o valor de cada módulo.

a) $|-3|$

b) $|\pi - 4|$

c) $|6 - \sqrt{2}|$

d) $\left|5 - |4 - \sqrt{3}|\right|$

e) $\left||1 - \sqrt{2}| - 3\right|$

f) $\left||\pi - \sqrt{2}| - |8 - \sqrt{3}|\right|$

2. Analise as expressões abaixo e reescreva-as eliminando o módulo:

a) $|2x - 6|$

b) $|10 - 2x|$

c) $|x^2 - 6x + 8|$

d) $|2^x - 8|$

e) $|\log_3 x|$

f) $|x^2 + 1|$

3. Porque a afirmação $|x| = x$ é falsa?

4. Qual é o erro que podemos cometer ao "simplificar" uma raiz quadrada com um expoente 2 do radicando, como em: $\sqrt{(x - 2)^2} = x - 2$?

5. Esboce o gráfico da função real $y = |x^2 - 5x + 6|$.

6. Esboce o gráfico da função real $y = |x|^2 - 5|x| + 6$.

7. Esboce o gráfico da função real $y = \left||x|^2 - 5|x| + 6\right|$.

8. Resolva as equações modulares:

a) $|x| = 3$

b) $|x - 4| = 5$

c) $|2x + 5| = -1$

d) $\left||x - 1| - 5\right| = 3$

e) $\left||2x - 1| - 3\right| = 4$

f) $|x^2 + x| = 2$

9. Resolva as equações e, se necessário, desenvolva os módulos nos intervalos determinados por eles.

a) $|x - 2| = 2x + 1$

b) $|2x - 5| = 1 - x$

c) $|3x + 2| = |x - 6|$

d) $|x - 2| + |2 - x| = 10$

e) $|2x - 10| + |3x + 15| = 35$

f) $|x| + |4x| = 15$

10. Resolva as inequações:

a) $|2x - 5| > 9$

b) $|2x + 3| \leqslant 7$

c) $|x^2 - 4| < 3x$

d) $|x - 2| + |x - 4| \geqslant 6$

Exercícios propostos

1. Considere as proposições a seguir:

I. $x^2 \geqslant x$
II. $|x| > 0$
III. $|2x| \geqslant |x|$
IV. $|x^2 + x| \geqslant x^2 + x$

São sempre verdadeiras as proposições:

a) I e II. **b)** I e III. **c)** II e III. **d)** II e IV. **e)** III e IV.

2. A soma dos valores de x e y que satisfazem a equação $|x + y - 5| + |x - y + 1| = 0$ é:

a) 2. **b)** 3. **c)** 4. **d)** 5. **e)** 6.

3. O maior valor de x na expressão $E = |x - 2| - |x + 6|$ é:

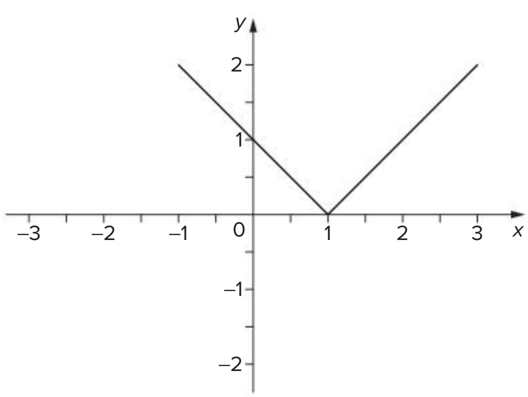
a) -4. **b)** 0. **c)** 4. **d)** 6. **e)** 8.

4. Determine o conjunto imagem das funções dadas construindo os respectivos gráficos. Depois, verifique se alguma dessas funções é injetora.

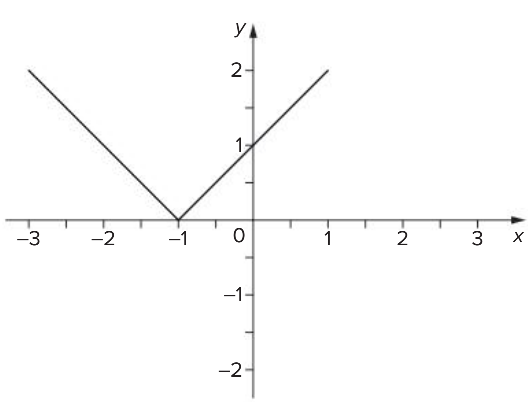
a) $y = |2x - 4|$
b) $y = |2x| - 4$
c) $y = |x^2 - 2x - 3|$
d) $y = |x|^2 - 2|x| - 3$
e) $y = |2x - 4| + x$
f) $y = |x^2 - 4| + x^2 + 2x$

5. **PUC-Rio 2014** Considere a função real $f(x) = |-x + 1|$. O gráfico que representa a função é:

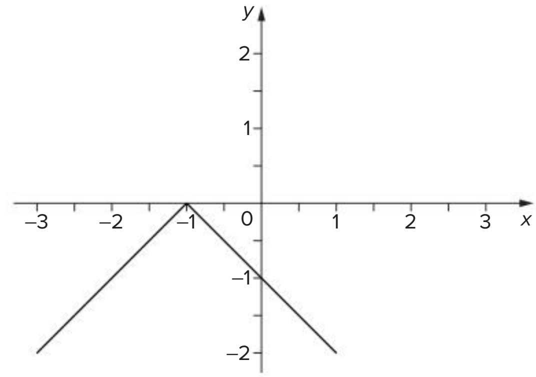
a)



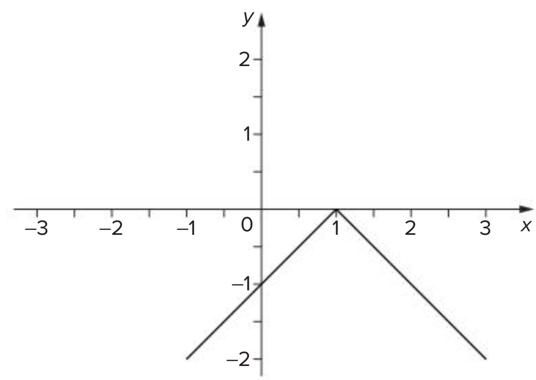
b)



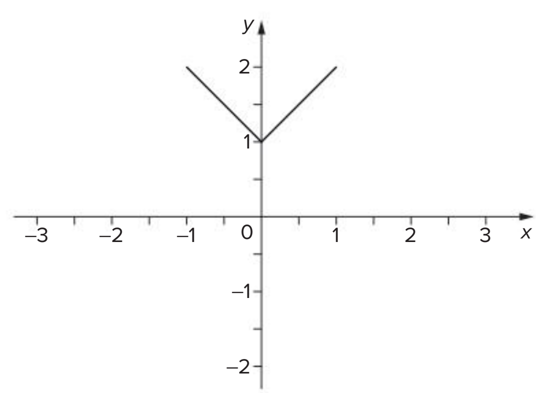
c)



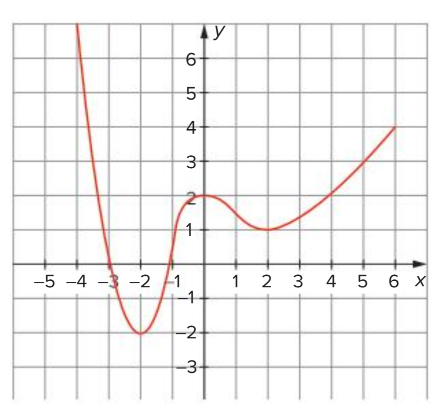
d)



e)



6. **Insper-SP 2012** A figura a seguir mostra o gráfico da função $f(x)$.

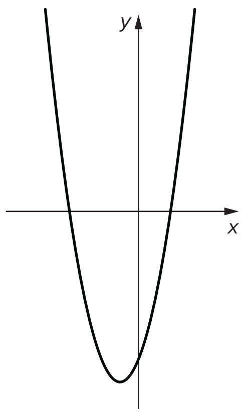


O número de elementos do conjunto solução da equação $|f(x)| = 1$, resolvida em $\mathbb{R}$, é igual a:

a) 6. **b)** 5. **c)** 4. **d)** 3. **e)** 2.

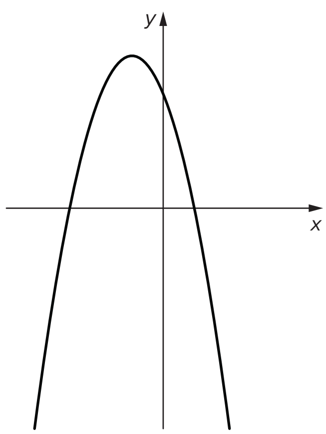
FRENTE 1

7. UFRGS 2013 Se

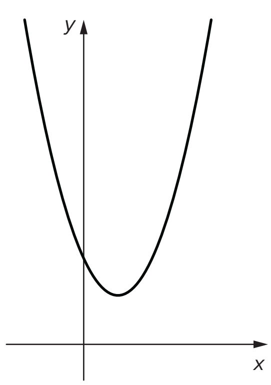


é o gráfico da função *f* definida por $y = f(x)$, então, das alternativas abaixo, a que pode representar o gráfico da função *z*, definida por $z = |f(x)|$, é:

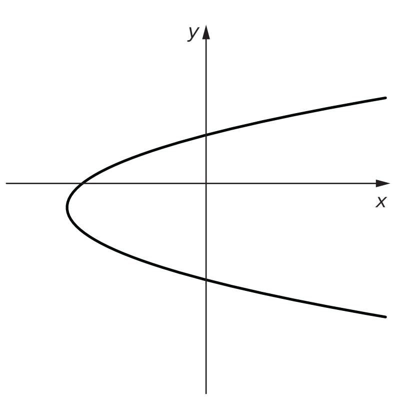
a)



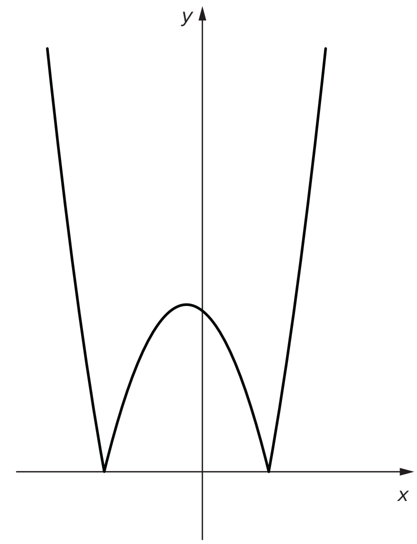
b)



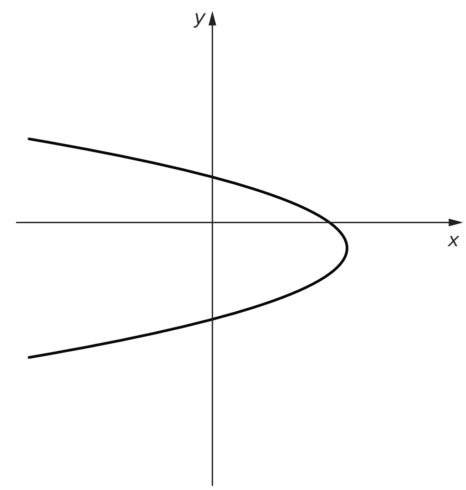
c)



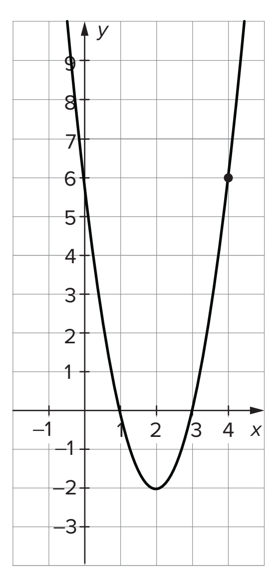
d)



e)

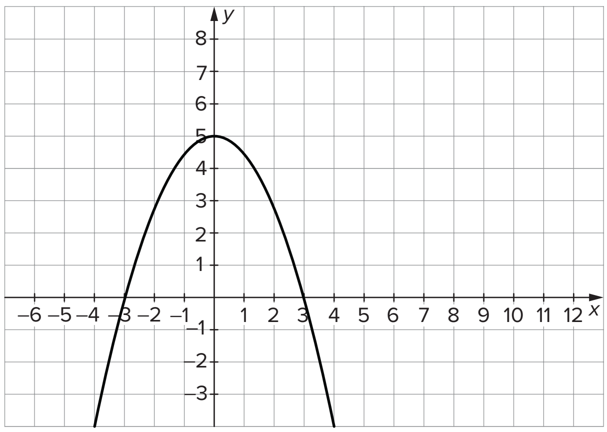


8. Cefet-RJ 2017 Seja *f* uma função real que tem o gráfico a seguir, onde $y = f(x)$. Por exemplo, para $x = 4$, *y* assume o valor 6, como no ponto destacado.

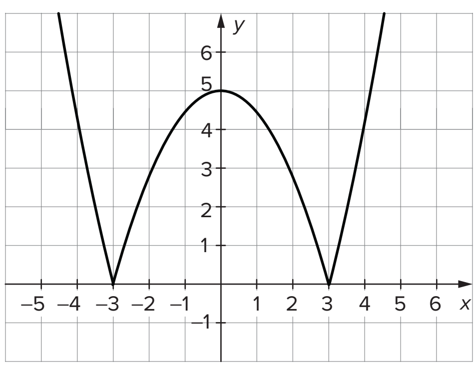


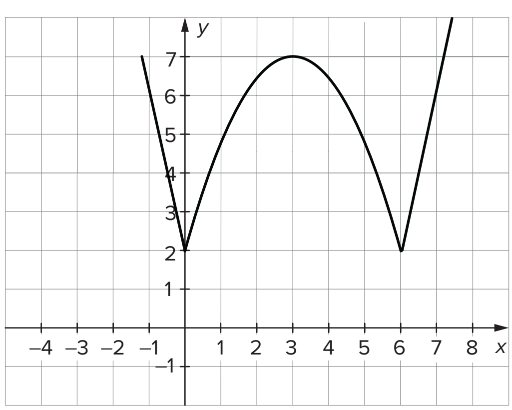
Determine *x*, de modo que a expressão $|y| + 5$ tenha valor mínimo.

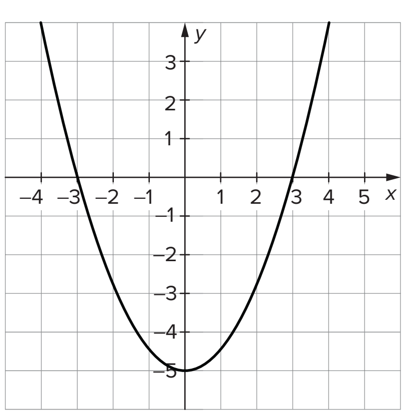
9. UFRGS 2019 O gráfico de $f(x)$ está esboçado na imagem a seguir.

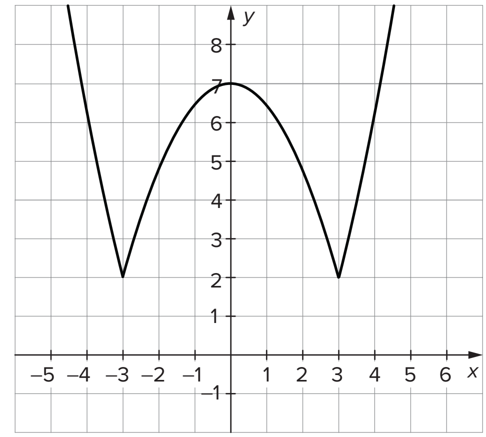


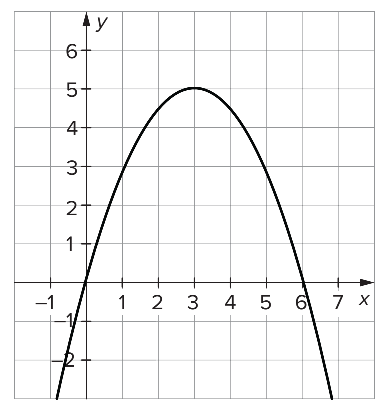
O esboço do gráfico de $|f(x - 3)| + 2$ está representado na alternativa:

a) 

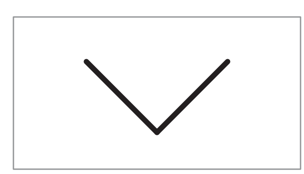
b) 

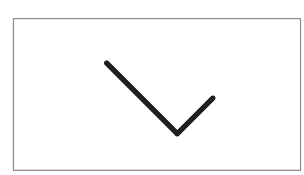
c) 

d) 

e) 

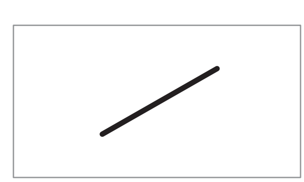
10. UPE Dos gráficos abaixo, o que mais se assemelha ao gráfico da função $f(x) = ||x + 2| - 2|$ no intervalo $-5 < x < 5$ é:

a) 

b) 

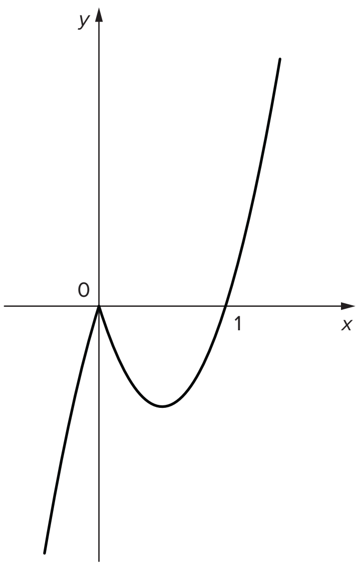
c) 

d) 

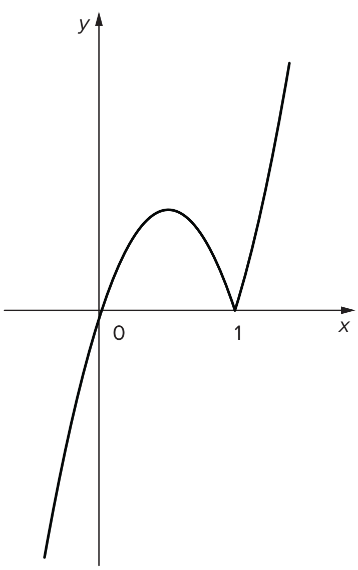
e) 

11. UFMG Considere a função $f(x) = x|1 - x|$.
Assinale a alternativa em que o gráfico dessa função está CORRETO.

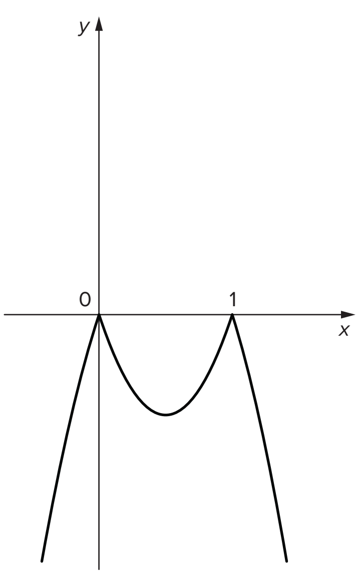
a)



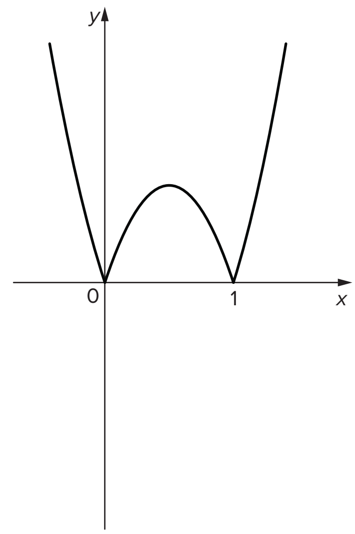
b)



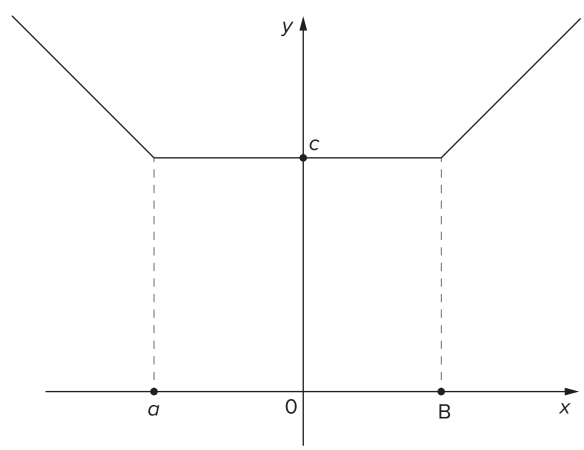
c)



d)



12. EsPCEx-SP 2019 Sabendo que o gráfico a seguir representa a função real $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$, então o valor de $a + b + c$ é igual a:



Desenho ilustrativo fora de escala.

a) -7.
b) -6.
c) 4.
d) 6.
e) 10.

13. UEG-GO Dada a função: $f(x) = |x - 1| + 1, x \in [-1, 2]$,
a) esboce o gráfico da função f;
b) calcule a área da região delimitada pelo gráfico da função f, pelo eixo das abscissas e pelas retas $x = -1$ e $x = 2$.

14. FGV-SP 2012 No plano cartesiano, os pontos (x, y) que satisfazem a equação $|x| + |y| = 2$ determinam um polígono cujo perímetro é:
a) $2\sqrt{2}$.
b) $4 + 2\sqrt{2}$.
c) $4\sqrt{2}$.
d) $8 + 4\sqrt{2}$.
e) $8\sqrt{2}$.

15. Indique se cada identidade a seguir é verdadeira (V) ou falsa (F) e dê um contraexemplo nas identidades falsas.

a) $|x - 1| \equiv x - 1$

b) $|x - 1| \equiv x + 1$

c) $|2(x - 1)| \equiv 2|x - 1|$

d) $\sqrt{x^2} \equiv x$

e) $|x(x + 2)| \equiv |x||x + 2|$

f) $3|2x + 1| \equiv |6x + 3|$

16. O conjunto solução da equação $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$ é:

a) $S = \mathbb{R}$.

b) $S = \mathbb{R}_+$.

c) $S = [1; +\infty[$.

d) $S = \varnothing$.

17. É possível resolver a equação do 2º grau $(x - 3)^2 = 16$ utilizando as propriedades de módulo. Aplique-as e encontre as raízes dessa equação.

18. **EEAR-SP 2017** Seja $f(x) = |x - 3|$ uma função. A soma dos valores de x para os quais a função assume o valor 2 é:

a) 3.

b) 4.

c) 6.

d) 7.

19. **Esc. Naval-RJ 2013** A soma das raízes reais distintas da equação $||x - 2| - 2| = 2$ é igual a:

a) 0.

b) 2.

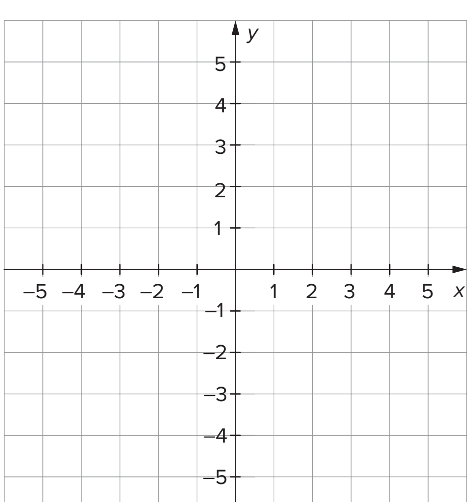
c) 4.

d) 6.

e) 8.

20. **Unicamp-SP 2016** Considere a função $f(x) = |2x - 4| + x - 5$, definida para todo número real x.

a) Esboce o gráfico de $y = f(x)$ no plano cartesiano para $-4 \leqslant x \leqslant 4$.



b) Determine os valores dos números reais a e b para os quais a equação $\log_a(x + b) = f(x)$ admite como soluções $x_1 = -1$ e $x_2 = 6$.

21. **Udesc 2014** A soma das raízes distintas da equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$ é:

a) 10.

b) 7.

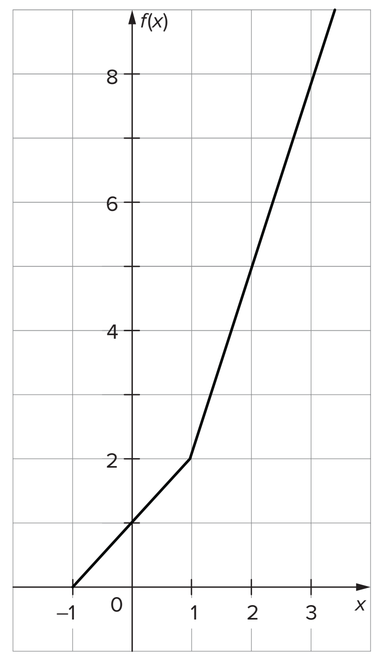
c) 0.

d) 3.

e) 4.

22. **Unicamp-SP 2012** Considere a função $f(x) = 2x + |x + p|$, definida para x real.

a) A figura abaixo mostra o gráfico de $f(x)$ para um valor específico de p. Determine esse valor.



b) Supondo, agora, que $p = -3$, determine os valores de x que satisfazem a equação $f(x) = 12$.

23. **Fuvest-SP 2014** Sobre a equação

$$(x + 3) \cdot 2^{x^2 - 9} \cdot \log|x^2 + x - 1| = 0$$

é correto afirmar que:

a) ela não possui raízes reais.

b) sua única raiz real é -3.

c) duas de suas raízes reais são 3 e -3.

d) suas únicas raízes reais são -3, 0 e 1.

e) ela possui cinco raízes reais distintas.

24. A soma dos valores inteiros de x que satisfazem a inequação $|3x - 12| < -x + 12$ é:

a) 12.

b) 15.

c) 18.

d) 21.

e) 24.

25. A solução da inequação $|2x| \leqslant |x - 3|$ é:

a) $[-3, 1]$. **b)** $[-3, 0]$. **c)** $[0, 1]$. **d)** $[0, +\infty[$.

26. **Cefet-MG 2015** O domínio da função real $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$ é o intervalo:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$

27. **FGV-SP** A soma dos valores inteiros de x que satisfazem simultaneamente as desigualdades $|x - 5| < 3$ e $|x - 4| \geqslant 1$ é:

a) 25.
b) 13.
c) 16.
d) 18.
e) 21.

Texto complementar

Módulo de números reais e de números complexos

Aprendemos neste capítulo que o módulo de um número real é dado por:

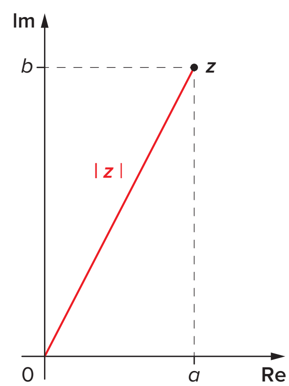
$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Dessa definição, podemos dizer que, ao aplicar a definição de módulo, mantemos o sinal de números positivos e invertemos o sinal de números negativos.

Geometricamente, os números reais podem ser localizados em uma reta numérica, e, assim, o módulo de um número real é a distância dele até a origem da reta.

Já os **números complexos** são dispostos em um plano cartesiano chamado plano de Argand-Gauss. Como os conceitos de número positivo e número negativo não fazem sentido para os números complexos quando a parte imaginária não é nula, para calcularmos o módulo desses números precisamos utilizar o conceito de distância até a origem do plano.

Dado o número $z = a + bi$, a representação no plano é:



Obtemos o módulo desse número aplicando o teorema de Pitágoras:

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

No estudo dos números complexos, você verá que algumas propriedades dos módulos vistas neste capítulo também são válidas para o módulo de números complexos. Por exemplo:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Note que, se a parte imaginária de z for igual a zero (b 5 0), z será um número real z 5 a, e essa fórmula de cálculo pela distância à origem do plano ainda pode ser utilizada.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + 0} = \sqrt{a^2} = |a|$$

Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Módulo de um número real

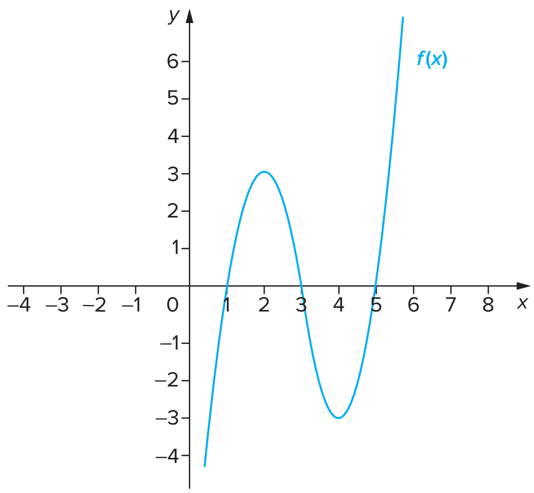
Definição: $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

Função modular

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

Funções com módulos

Gráfico de $g(x) = |f(x)|$: A parte negativa do gráfico de f sofre uma reflexão em relação ao eixo x, ou seja, "rebatemos" para cima essa parte do gráfico.



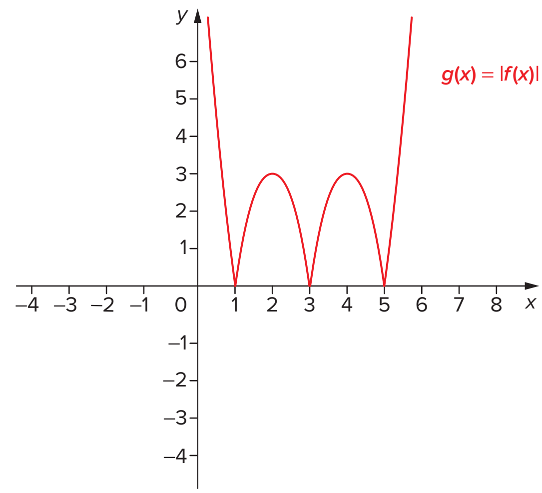
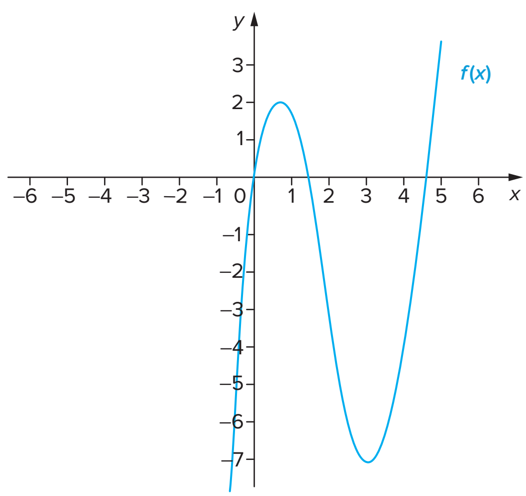
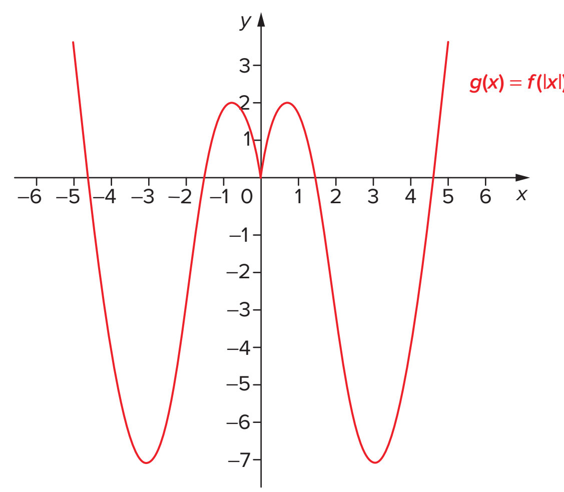


Gráfico de $g(x) = f(|x|)$: Os valores negativos de x "copiam" os valores positivos, como uma reflexão em relação ao eixo y da parte do gráfico de f à direita desse eixo.





Equações modulares

$|f(x)| = k \Rightarrow f(x) = k$ ou $f(x) = -k$, com $k \geqslant 0$

$|f(x)| = g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$, com $g(x) \geqslant 0$

$|f(x)| = |g(x)| \Rightarrow f(x) = g(x)$ ou $f(x) = -g(x)$

Inequações modulares

$|f(x)| > k \Rightarrow f(x) > k$ ou $f(x) < -k$, com $k \geqslant 0$

$|f(x)| < k \Rightarrow -k < f(x) < k$, com $k \geqslant 0$

Quer saber mais?

Site

PORTAL DA OBMEP. *Módulo de um vetor*. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/uploads/material_teorico/d9gl82anirwo0.pdf. Acesso em: 27 set. 2021.

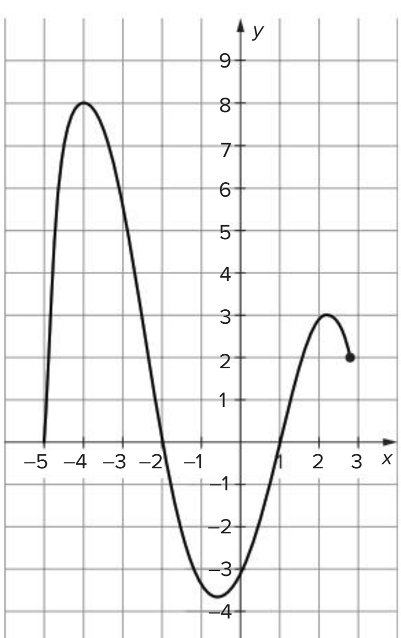
Nesse material teórico, publicado no portal da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), podem ser ampliados os conhecimentos referentes a módulo, estudados neste capítulo, aprendendo sobre módulo de um vetor e produto escalar de dois vetores.

Exercícios complementares

1. **AFA-SP 2017** Durante 16 horas, desde a abertura de certa confeitaria, observou-se que a quantidade $q(t)$ de unidades vendidas do doce "amor em pedaço", entre os instantes $t - 1$ e t, é dada pela lei $q(t) = ||t - 8| + t - 14|$, em que t representa o tempo, em horas, e $t \in \{1, 2, 3, ..., 16\}$.
É correto afirmar que
a) entre todos os instantes foi vendida, pelo menos, uma unidade de "amor em pedaço".
b) a menor quantidade vendida em qualquer instante corresponde a 6 unidades.
c) em nenhum momento vendem-se exatamente 2 unidades.
d) o máximo de unidades vendidas entre todos os instantes foi 10.

2. **Cefet-MG 2017** Seja $f(x)$ uma função real. O gráfico gerado pelo módulo dessa função, $|f(x)|$:
a) nunca passará pela origem.
b) nunca passará pelo 3º ou 4º quadrante.
c) intercepta o eixo x somente se $f(x)$ for do primeiro grau.
d) intercepta o eixo y somente se $f(x)$ for do segundo grau.

3. **Uesc-BA** Para fazer um estudo sobre certo polinômio P(x), um estudante recorreu ao gráfico da função polinomial $y = P(x)$, gerado por um *software* matemático. Na figura, é possível visualizar a parte da curva obtida para valores de x, de -5 até 2,7.



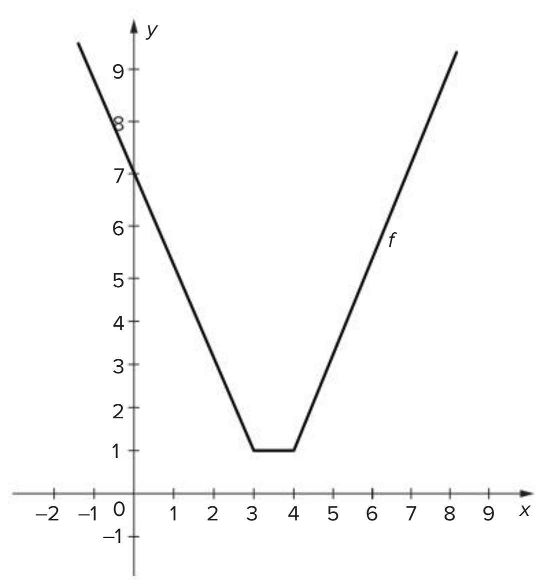
O número de raízes da equação $|P(x)| = 1$, no intervalo $[-5; 2,7]$, é igual a:
a) 2.
b) 3.
c) 4
d) 5
e) 6

4. **UFSJ-MG 2013** Movendo o gráfico da função $y = |x - 5|$ quatro unidades de comprimento (u.c.) para a esquerda e duas u.c. para cima, obtém-se uma nova função. Assinale a alternativa que contém a função obtida.
a) $y = |x - 11|$
b) $y = |x - 7|$
c) $y = |x + 4| - 2$
d) $y = |x - 1| + 2$

5. **Uece** Sobre o conjunto M dos pontos de interseção dos gráficos das funções definidas por $f(x) = |2^x - 1|$ e $g(x) = x + 1$ é possível afirmar, corretamente, que M:
a) é o único conjunto vazio.
b) é um conjunto unitário.
c) possui dois elementos.
d) possui três elementos.

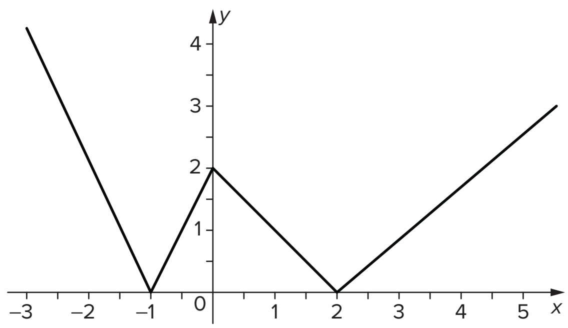
6. **UFPE 2012** Considere a função $f(x) = |x + 1| - |x - 1|$, definida para x real. Analise as afirmações seguintes sobre f.
- f é par.
- f é positiva.
- f é injetora.
- A imagem de f é o intervalo fechado $[-2, 2]$.
- $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para quaisquer x e y reais.

7. **UFMS 2020** Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função modular, representada pelo gráfico a seguir:



A função f pode ser representada por:
a) $|x| + |x + 7|$.
b) $|3 - x| + |x - 4|$.
c) $-|x| + |x - 7|$.
d) $|x + 2| + |x + 5|$.
e) $|x + 9| - |3x + 2|$.

8. UEG-GO 2016 Na figura a seguir, é apresentado o gráfico de uma função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



A função f é dada por:

a) $f(x) = \begin{cases} |2x + 2|, \text{ se } x < 0 \\ |x - 2|, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -|x| + 2, \text{ se } -1 \leq x < 2 \\ |2x - 3|, \text{ se } x < -1 \text{ e } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} |x - 1|, \text{ se } x < 0 \\ |x + 2|, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -|x + 2|, \text{ se } -1 \leq x < 2 \\ |2x| + 1, \text{ se } x < -1 \text{ e } x \geq 2 \end{cases}$

9. UFT-TO Sejam f e g funções reais de uma variável real definidas por:

$$f(x) = |x - 1| \text{ e } g(x) = 5.$$

A área da região limitada pelos gráficos dessas funções é:

a) 10 unidades de área.
c) 50 unidades de área.
b) 30 unidades de área.
d) 25 unidades de área.

10. Udesc 2016 A área da região fechada delimitada pelas funções $f(x) = |x|$, $g(x) = |x - 2|$ e $h(x) = |x - 3|$, em unidades de área, é igual a:

a) 1
c) $\sqrt{2}$
e) $2\sqrt{2}$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
d) 2

11. UFU-MG 2018 Considere a função definida por $y = f(x) = k \cdot |x - 3|$, em que k é um número natural constante, x uma variável assumindo valores reais e $|a|$ representa o módulo do número real a. Representando, no sistema de coordenadas cartesianas, o gráfico de $y = f(x)$, tem-se que esse gráfico e os eixos coordenados delimitam um triângulo de área igual a 72 cm^2. Nas condições apresentadas, o valor de k, em cm, é um número:

a) quadrado perfeito.
c) múltiplo de 3.
b) ímpar.
d) divisível por 5.

12. UFRGS 2013 A interseção dos gráficos das funções f e g, definidas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = 1 - |x|$, os quais são desenhados no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, determina um polígono.

A área desse polígono é:

a) 0,125.
d) 1.
b) 0,25.
e) 2.
c) 0,5.

13. EsPCEx-SP 2020 A área da região compreendida entre o gráfico da função $f(x) = ||x - 4| - 2|$, o eixo das abscissas e as retas $x = 0$ e $x = 6$ é igual a (em unidades de área):

a) 2. b) 4. c) 6. d) 10. e) 12.

14. UFU-MG 2016 Sejam k_1 e k_2 dois números reais positivos com $k_2 = 3k_1$.

Suponha que os gráficos cartesianos das funções reais definidas por $f(x) = |x| + k_1$ e $g(x) = -|x| + k_2$ delimitam um quadrilátero de área 8 unidades de área.

Segundo essas condições, o valor do produto $k_1 \cdot k_2$ é igual a:

a) 9. b) 15. c) 18. d) 12.

15. Efomm-RJ 2016 Determine a imagem da função f, definida por $f(x) = ||x + 2| - |x - 2||$, para todo $x \in \mathbb{R}$, conjunto dos números reais.

a) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$
b) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$
c) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 4\}$
d) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 4\}$
e) $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$

16. ITA-SP 2017 Esboce o gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \left|2^{-|x|} - \frac{1}{2}\right|$.

17. Uece 2017 Se as raízes da equação $x^2 - 5|x| - 6 = 0$ são também raízes de $x^2 - ax - b = 0$, então, os valores dos números reais a e b são respectivamente:

a) -1 e 6.
c) 0 e 36.
b) 5 e 6.
d) 5 e 36.

18. Fuvest-SP Seja $f(x) = |x| - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e considere também a função composta $g(x) = f(f(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Esboce o gráfico da função f, indicando seus pontos de interseção com os eixos coordenados.
b) Esboce o gráfico da função g, indicando seus pontos de interseção com os eixos coordenados.
c) Determine os valores de x para os quais $g(x) = 5$.

19. UEM-PR 2016 Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Assinale o que for correto.

01 Se $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = x$, então $f(x) > g(x)$ para todo número real x.
02 Se f e g são funções modulares definidas por $f(x) = |x + 1|$ e $g(x) = |x - 1|$, então seus gráficos não têm interseção.
04 Se f é a função modular definida por $f(x) = |2x|$ e g é a função constante definida por $g(x) = 10$, então $f(x) \leq g(x)$ quando $-5 \leq x \leq 5$; e $f(x) > g(x)$ se $x > 5$ ou $x < -5$.
08 Se $f(x) = 5 - |x + 1|$, então podemos calcular $\sqrt{f(x)}$ para todo $x \geq 0$.
16 Se f é a função modular definida por $f(x) = |x + 1|$, então o conjunto imagem de f é $\text{Im}(f) = [1, +\infty)$.

Soma:

20. Cefet-MG 2018 Seja $f(x)$ uma função real com três raízes não nulas e $g(x)$ uma função definida por $g(x) = \frac{x}{|f(x)|}$.

O número de raízes reais que $g(x)$ possui é

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

21. UEM-PR 2017 Considerando o módulo de números reais e as funções envolvendo módulo, assinale a(s) alternativa(s) correta(s).

01 $|x| \neq -x, \forall x \in \mathbb{R}$

02 Se f e g estão definidas no mesmo domínio e no mesmo contradomínio, então o gráfico de $f(x) = |x + 2| - 2$ é igual ao gráfico de $g(x) = |x|$, mas deslocado em duas unidades para a esquerda no eixo x e duas unidades para baixo no eixo y.

04 A função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = |x|$, é injetora e sobrejetora.

08 A solução da equação $\left|\cos(x + 4) - \operatorname{sen}(x - 1) + \sqrt{x + 2 - 1}\right| + 5 = 0$ é $k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}^+$.

16 A equação $|x + 1| - |x - 1| = 0$ não possui solução real.

Soma:

22. Col. Naval-RJ 2016 O conjunto solução da equação $x + 1 = \sqrt{x^2 + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}}$ em $\mathbb{R}$, conjunto dos números reais, é

a) $\mathbb{R}$.

b) $[-1, \infty[$.

c) $\mathbb{R} - [-1, \infty[$.

d) $[0, \infty[$.

e) $\left[-\frac{1}{2}, \infty\right[$.

23. UFRGS 2020 Considere as funções $f(x) = |x + 1|$ e $g(x) = -|x| - 1$.

O intervalo tal que $f(x) > g(x)$ é:

a) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

c) $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

d) $(-1, +\infty)$.

e) $(-\infty, +\infty)$.

24. EsPCEx-SP Considerando a função real $f(x) = (x - 1) \cdot |x - 2|$, o intervalo real para o qual $f(x) \geqslant 2$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$.

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}$.

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$.

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1\}$.

25. PUC-Rio 2016 Seja $f(x) = \left|\frac{x^2}{2} - 2\right|$.

a) Para quais valores reais de x temos $f(x) = 1$?

b) Para quais valores reais de x temos $f(x) \leqslant 1$?

26. Efomm-RJ 2020 A inequação $|x| + |2x - 8| \leqslant |x + 8|$ é satisfeita por um número de valores inteiros de x igual a:

a) 5.

b) 6.

c) 7.

d) 8.

e) 9.

27. Fuvest-SP 2012 Determine para quais valores reais de x é verdadeira a desigualdade $|x^2 - 10x + 21| \leqslant |3x - 15|$.

BNCC em foco

EM13MAT301 e EM13MAT404

1. O cálculo do número de pessoas previsto para visitar uma nova lanchonete, que será inaugurada na cidade, em suas duas primeiras semanas de funcionamento, é $f(x) = |x - 4|$, sendo que $x = 0$ corresponde ao dia da inauguração, que aconteceu em um sábado. Em qual dia da semana a lanchonete teve exatamente 7 clientes?

a) Segunda-feira.

b) Terça-feira.

c) Quarta-feira.

d) Quinta-feira.

Use as informações a seguir para responder às questões **2** e **3**.

O lucro mensal de uma loja de sapatos é representado pela função $f(x) = 5 - |x^2 - 20x + 96|$, sendo x o número de pares vendidos (entre 0 e 40) e $f(x)$ o lucro em centenas de reais.

EM13MAT404

2. Dadas as afirmações:

I. Vendendo 11 pares de sapatos no mês, a loja terá lucro.

II. A loja terá prejuízo caso venda menos de 6 pares de sapatos no mês.

III. Vendendo 10 pares de sapatos no mês, o lucro da loja será igual a zero.

Assinale a alternativa correta.

a) Apenas a afirmação I está correta.

b) Apenas as afirmações I e II estão corretas.

c) Apenas as afirmações II e III estão corretas.

d) Apenas a afirmação III está correta.

EM13MAT404

3. Para qual quantidade de pares de sapatos vendidos o lucro dessa loja será máximo? Qual será esse lucro?


Pablo Perez Vidiella/Shutterstock.com

FRENTE 1

CAPÍTULO

9

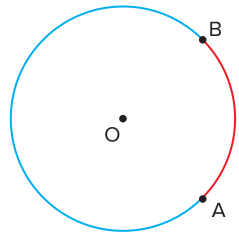
Trigonometria

O ramo da Matemática que estuda as razões entre lados e ângulos de um triângulo é conhecido como Trigonometria (do grego *trigonos*, que quer dizer “triângulos”, e *metria*, que significa “medir”). Sua origem é obscura, mas sabe-se que matemáticos e astrônomos babilônicos e gregos já faziam cálculos notáveis de valores que hoje são conhecidos como seno, cosseno, tangente, cotangente, cossecante e secante.

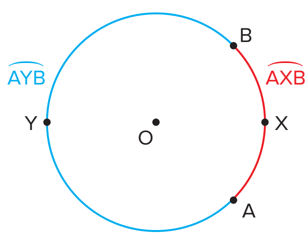
Alguns de seus conceitos são utilizados na prática de medir distâncias, como no uso do teodolito. Além disso, a Trigonometria é usada para calcular o raio da Terra, navegar com mais precisão, criar funções, equacionar experimentos periódicos, aprimorar operações entre números complexos, entre outros.

Arcos e ângulos

Considerando uma circunferência de centro O e dois pontos distintos A e B sobre ela, nós a dividimos em duas partes chamadas de arcos, com extremidades nos pontos A e B.



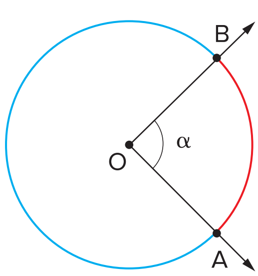
Devemos notar que, para diferenciá-los, podemos utilizar outros dois pontos X e Y, convenientemente escolhidos, notando-os por $\overset{\frown}{AXB}$ e $\overset{\frown}{AYB}$.



Caso não haja dúvida quanto ao arco a que queremos nos referir, utilizamos simplesmente $\overset{\frown}{AB}$.

Unidades de medida

Para medir e comparar arcos, geralmente utilizamos o ângulo central associado ao arco. Por isso, definimos a medida angular de um arco, a partir daqui chamada apenas de medida do arco, como igual à medida do ângulo central determinado pelo arco.



$$\alpha = \text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(\overset{\frown}{AB})$$

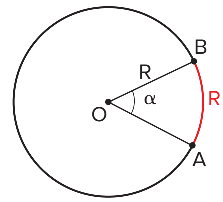
Desse modo, usamos as unidades de medida de ângulo como unidades de medida de arco. As unidades de medida mais utilizadas são o grau e o radiano.

Grau

A unidade de medida de ângulo e de arco mais tradicionalmente utilizada na Geometria é o grau (°), já apresentado no capítulo 2 da frente 3. Se dividirmos uma circunferência em 360 partes iguais, cada uma dessas partes é um arco com medida de 1° (1 grau), e o ângulo central determinado por cada uma dessas partes também tem medida de 1°. Se dividirmos 1° em 60 partes, obtemos 1' (1 minuto), e dividindo esse minuto em outras 60 partes temos 1" (1 segundo). Assim, os ângulos e arcos medidos nessa unidade utilizam o sistema sexagesimal.

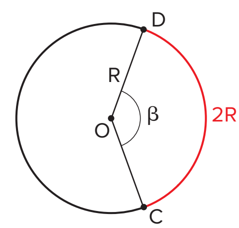
Radiano

O arco de 1 radiano é definido como o arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência à qual o arco pertence. O ângulo central determinado por esse arco tem também medida de 1 rad.



$$\alpha = \text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 1 \text{ rad}$$

Se um arco tiver o comprimento de 2 raios, ele mede 2 radianos.



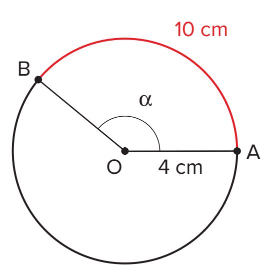
$$\beta = \text{med}(C\hat{O}D) = \text{med}(\overset{\frown}{CD}) = 2 \text{ rad}$$

Observe que, se aumentarmos o raio, o comprimento do arco também aumenta, porém, a medida do ângulo do arco permanece inalterada.

Para obter a medida, em radianos, de um arco ou do ângulo associado a ele, basta calcular "quantos raios tem o arco", isto é, a razão entre o comprimento do arco (L) e o comprimento do raio da circunferência (R) quando ambos estão na mesma medida.

$$\alpha = \frac{L}{R}$$

Por exemplo, veja como calcular o ângulo determinado por um arco de 10 cm em uma circunferência de raio 4 cm:



$$\alpha = \frac{10}{4} \text{ rad} = 2{,}5 \text{ rad}$$

Dando uma volta completa, o arco terá comprimento igual ao comprimento da circunferência, ou seja, $C = 2\pi R$; assim, a medida de uma volta, em radianos, é igual a $\frac{2\pi R}{R}$ rad $= 2\pi$ rad.

Perceba que a medida α de um ângulo em radianos pode ser usada para determinar a medida L de comprimento de um arco, dado o raio *r* da circunferência:

$$L = \alpha \cdot r$$

Conversão de unidades

As unidades grau e radiano são proporcionais. Por isso, podemos montar o quadro abaixo e converter de uma para outra utilizando uma simples regra de três.

	Graus (°)	Radianos (rad)
1 volta	360	2π
$\mathbf{\frac{1}{2}}$ **volta**	180	π
$\mathbf{\frac{1}{4}}$ **volta**	90	$\frac{\pi}{2}$

Exemplos:

a) Converter 60° para radianos:

$$\begin{array}{ccc} \text{Graus (°)} & & \text{Radianos (rad)} \\ 180 & \text{———} & \pi \\ 60 & \text{———} & x \end{array}$$

$$180 \cdot x = 60 \cdot \pi$$
$$x = \frac{60\pi}{180}$$
$$x = \frac{\pi}{3}$$

b) Converter 1 rad para graus:

$$\begin{array}{ccc} \text{Graus (°)} & & \text{Radianos (rad)} \\ 180 & \text{———} & \pi \\ y & \text{———} & 1 \end{array}$$

$$\pi \cdot y = 1 \cdot 180$$
$$y = \frac{180}{\pi}$$
$$y \cong 57$$

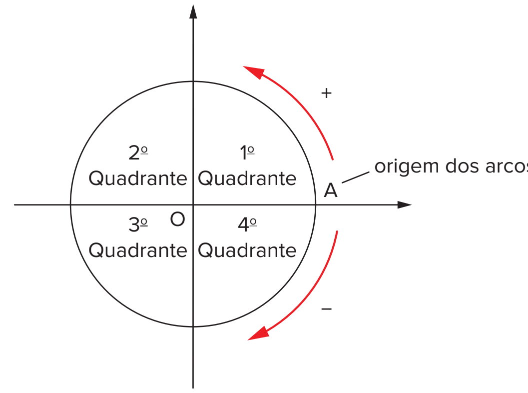
Segue um quadro com as conversões que aparecem com maior frequência na resolução dos exercícios.

Graus	0°	30°	45°	60°
Radianos	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad

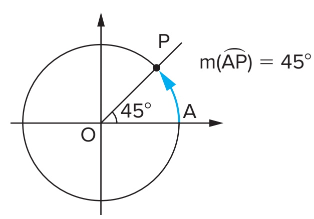
Graus	90°	180°	270°	360°
Radianos	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	2π rad

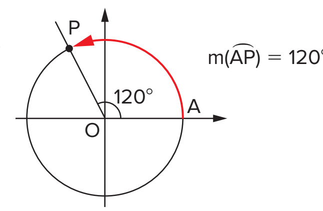
Circunferência trigonométrica

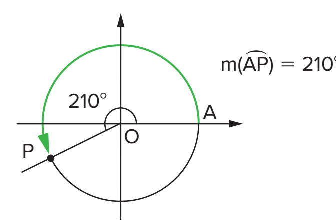
A fim de definirmos os valores de seno, cosseno e tangente para ângulos que não estão no intervalo [0°, 90°], vamos trabalhar com uma circunferência de raio unitário e centro sobre a origem O de um sistema cartesiano ortogonal, chamada circunferência trigonométrica, como mostra a figura a seguir.



Adotando o ponto A da circunferência trigonométrica como origem para todos os arcos e o sentido anti-horário como positivo, para cada ponto P da circunferência fica determinado um arco $\overset{\frown}{AP}$ orientado positivamente de A para P.

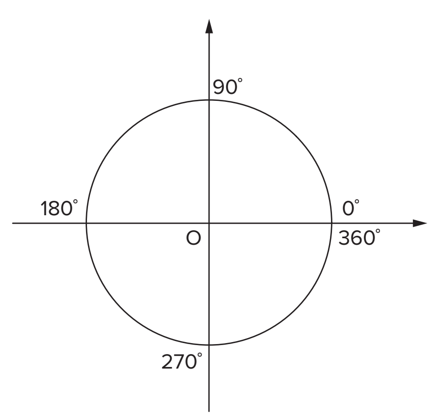






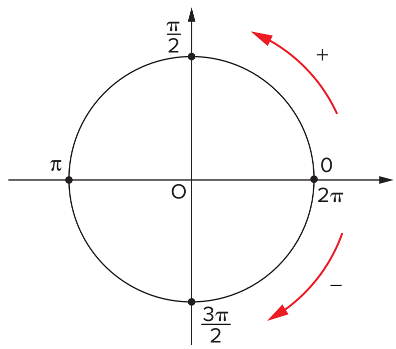
Desse modo, para cada ponto distinto da circunferência trigonométrica está associada uma medida angular no intervalo [0°, 360°[, dada pela medida do arco $\overset{\frown}{AP}$.

Normalmente, para ajudar na identificação dos arcos associados aos pontos da circunferência trigonométrica, colocamos na circunferência as medidas dos arcos associados aos pontos de interseção dela com os eixos ortogonais, como mostrado abaixo.



Para facilitar a visualização, a partir deste ponto não serão traçados os lados dos ângulos, apenas a localização dos pontos da circunferência associados a eles.

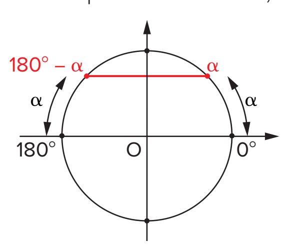
Como mencionado anteriormente, o raio é unitário, assim o comprimentos dos arcos coincidem com os valores dos ângulos em radianos. Com isso, na circunferência, também podemos considerar os arcos com medidas em radianos. As posições e os sentidos (positivo e negativo) permanecem os mesmos.

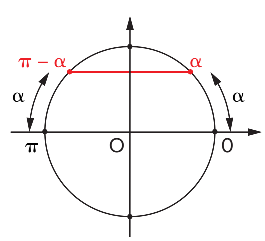


Simetria na circunferência trigonométrica

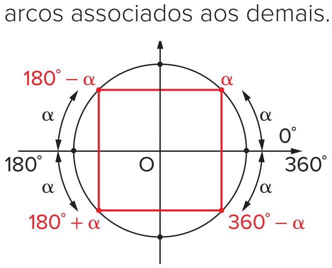
Se traçarmos uma corda horizontal com extremos na circunferência, determinamos arcos de mesma medida α quando medidos a partir do eixo horizontal já estabelecido. Restringindo esses ângulos ao intervalo $0° < \alpha < 360°$ e conhecendo o arco associado a um dos extremos da corda, podemos determinar a medida do arco associado ao outro extremo.

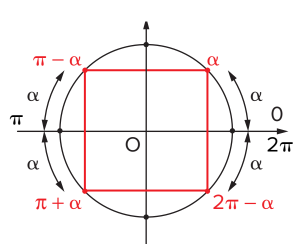
De fato, pela figura, vemos que, se o arco associado ao extremo da direita da corda for α, o arco associado ao extremo da esquerda é $180° - \alpha$, em graus, ou $\pi - \alpha$, em radianos.





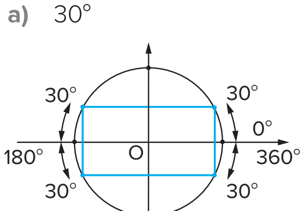
Se traçarmos um retângulo, inscrito na circunferência e com lados paralelos aos eixos, determinamos quatro arcos de mesma medida. Conhecendo a medida do arco associado a um dos vértices, podemos definir as medidas dos arcos associados aos demais.

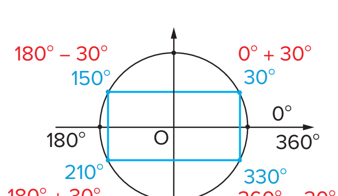




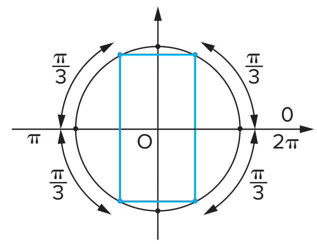
Por meio dos exemplos e conhecendo a variação em todos os quadrantes, a partir de um valor, calculamos a medida dos arcos associados aos outros vértices.

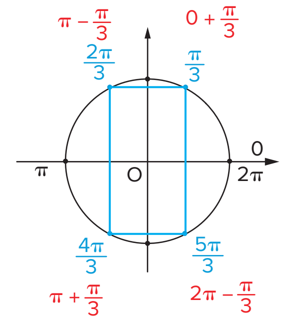
a) 30°





b) $\frac{\pi}{3}$ rad

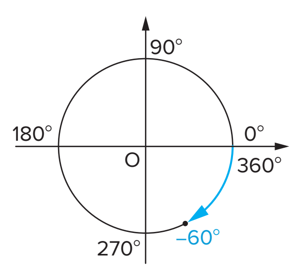


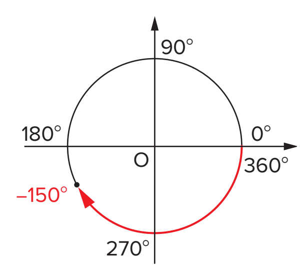


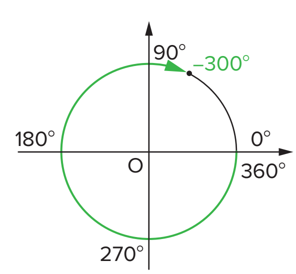
Arcos côngruos

Até aqui, na circunferência trigonométrica associamos uma medida angular em graus no intervalo [0°, 360°[ou em radianos no intervalo [0, 2π[a cada ponto da circunferência (extremidade do arco). Porém, podemos ampliar esse conceito associando outras medidas angulares aos pontos da circunferência trigonométrica, a partir da ideia de arcos orientados no sentido negativo e de múltiplas voltas na circunferência.

Por exemplo, se considerarmos, a partir da origem dos arcos, os arcos no sentido horário, devemos considerá-los com os valores negativos.







Para um arco de 120°, por exemplo, verifique o que acontece ao considerarmos várias voltas no sentido anti-horário (positivo) no ciclo trigonométrico:

Número de voltas (sentido anti-horário)	Arco
0	120°
1	$120° + 1 \cdot 360° = 480°$
2	$120° + 2 \cdot 360° = 840°$
3	$120° + 3 \cdot 360° = 1200°$
4	$120° + 4 \cdot 360° = 1560°$

Todos esses arcos têm as mesmas extremidades, o que os diferencia é o número de voltas completas.

Caso fizéssemos o mesmo no sentido horário (negativo), teríamos:

Número de voltas (sentido horário)	Arco
1	$120° - 1 \cdot 360° = -240°$
2	$120° - 2 \cdot 360° = -600°$
3	$120° - 3 \cdot 360° = -960°$
4	$120° - 4 \cdot 360° = -1320°$

Todos os arcos obtidos são arcos côngruos ao de 120°, dado que todos têm extremo coincidente ao extremo do arco de 120° na circunferência trigonométrica.

Arcos côngruos: são arcos cujos extremos estão localizados no mesmo ponto na circunferência trigonométrica. Diferenciam-se pelo número de voltas (positivas ou negativas) que percorrem na circunferência.

Para conhecermos em que posição se encontra o extremo de um arco (em graus) de mais de uma volta, consideramos o resto da divisão de seu valor por 360°. O quociente corresponde ao número de voltas completas e o resto é o valor desejado.

Exemplos:

a) O arco de 780° é côngruo a qual arco na 1ª volta?

Dividindo 780° por 360° temos:

$$\begin{array}{r|l} 780° & 360° \\ \cline{2-2} 60° & \ \ 2 \end{array}$$

Portanto, o arco de 780° é côngruo ao arco de 60°.

b) O arco de $-1\,470°$ é côngruo a qual arco da 1ª volta?

Dividindo $-1\,470°$ por 360° temos:

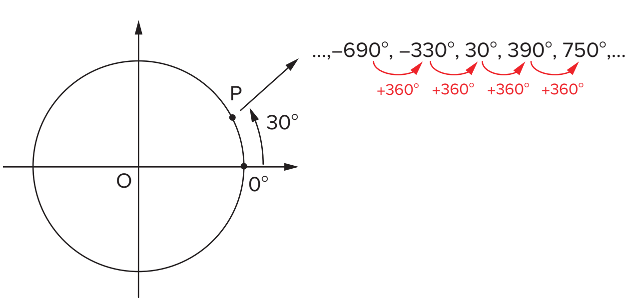
$$\begin{array}{r|l} -1470° & 360° \\ \cline{2-2} -30° & \ -4 \end{array}$$

Portanto, foram 4 voltas no sentido horário e mais 30° nesse sentido, ou seja, um arco de $-1\,470°$ corresponde a um arco de $-30°$ ou a um arco no sentido anti-horário de 330° ($-30° + 360°$).

Expressão geral dos arcos

Como visto, para cada ponto na circunferência trigonométrica temos associado um arco se dermos apenas uma volta, ou infinitos arcos se dermos infinitas voltas.

Veja a posição e as possibilidades de arcos côngruos aos de 30°:



Como representar esses arcos?

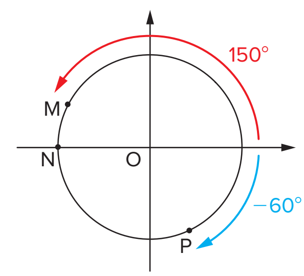
Existe uma variação de múltiplos de 360° (voltas completas) entre eles, logo podemos escrever $k \cdot 360°$, sendo $k \in \mathbb{Z}$. Escolhendo um deles como "posição inicial" (normalmente escolhemos o arco positivo da primeira volta), temos a expressão:

$$\alpha_P = 30° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$$

- para $k = -2$ temos: $\alpha_P = 30° + (-2) \cdot 360° = -690°$
- para $k = -1$ temos: $\alpha_P = 30° + (-1) \cdot 360° = -330°$
- para $k = 0$ temos: $\alpha_P = 30° + 0 \cdot 360° = 30°$
- para $k = 1$ temos: $\alpha_P = 30° + 1 \cdot 360° = 390°$
- para $k = 2$ temos: $\alpha_P = 30° + 2 \cdot 360° = 750°$

Assim, temos uma expressão que representa os infinitos arcos associados ao ponto P.

Como exemplos, vamos determinar as expressões gerais dos arcos associados aos pontos M, N e P, como mostra a figura:



$\alpha_M = 150° + k \cdot 360, k \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_N = 180° + k \cdot 360, k \in \mathbb{Z}$

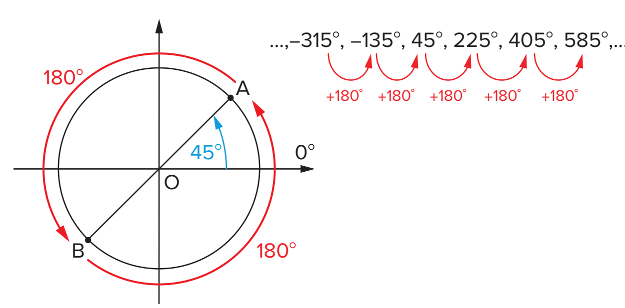
No ponto P temos os arcos ..., $-390°$, $-60°$, 300°, 660°, ... Podemos escolher qualquer um deles para ser a "posição inicial", assim:

$$\alpha_P = -60° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$\alpha_P = 300° + k \cdot 360°, k \in \mathbb{Z}$$

Quando queremos representar dois arcos associados a pontos diametralmente opostos, podemos utilizar uma expressão para representar as duas posições simultaneamente.

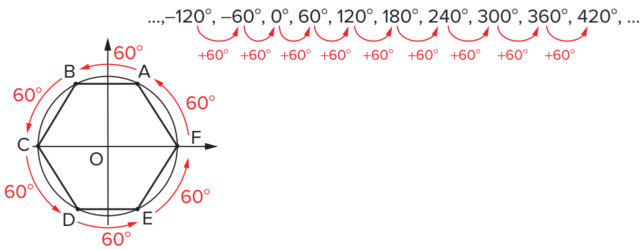


Note que há uma diferença de 180° entre eles e, assim, a expressão para as duas posições é:

$$\alpha_{AB} = 45° + k \cdot 180°, k \in \mathbb{Z}$$

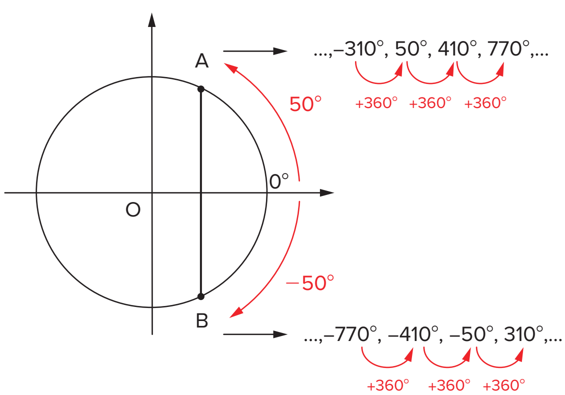
Podemos generalizar essa ideia sempre que dividirmos a circunferência em partes iguais.

Exemplo: Encontrar a expressão que representa os infinitos arcos associados aos vértices do hexágono regular abaixo.



A expressão é $\alpha = 0° + k \cdot 60°$, $k \in \mathbb{Z}$. Note que, se escrevermos $\alpha = 60° + k \cdot 60°$, $k \in \mathbb{Z}$ ou $\alpha = 120° + k \cdot 60°$, $k \in \mathbb{Z}$, vamos obter as mesmas medidas angulares substituindo os infinitos valores de k.

Existe ainda outro caso muito comum com arcos associados a pontos simétricos.



A expressão geral para o ponto A é $\alpha_A = 50° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$ e para o ponto B é $\alpha_B = 310° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$, que também pode ser escrita como $\alpha_B = -50° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$. Daí podemos escrever uma única expressão aproveitando que um dos valores é $+50°$ e o outro $-50°$, $\alpha_{AB} = \pm 50° + k \cdot 360°$, $k \in \mathbb{Z}$.

! Atenção

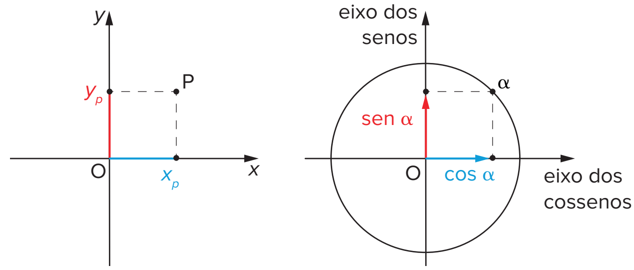
Para melhor entendimento, apresentamos todas as expressões gerais em graus. Nas resoluções em que for necessária a utilização em radianos, basta converter adequadamente:

$$\alpha = 30° + k \cdot 360°,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = 45° + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Seno e cosseno

Os eixos que utilizamos como orientação para localizar os arcos e os respecitvos ângulos associados a eles na circunferência trigonométrica são chamados de **eixo dos senos** e **eixo dos cossenos**. Uma simples comparação com o plano cartesiano facilita bastante seu entendimento.



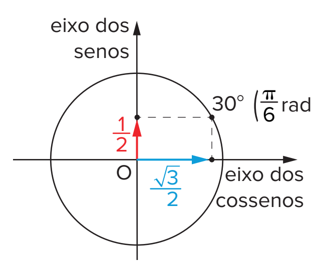
Para definir as coordenadas de um ponto, projetamos esse ponto nos eixos coordenados. De maneira similar devemos proceder para determinar os valores do cosseno e do seno de um ângulo: o seno de um ângulo é a ordenada, no sistema cartesiano da circunferência trigonométrica, do ponto P associado a esse ângulo; de maneira análoga, o cosseno é a abscissa do ponto P.

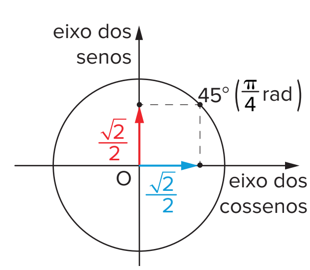
A abscissa de um ponto é positiva no 1º e no 4º quadrantes; o cosseno também é positivo nesses quadrantes.

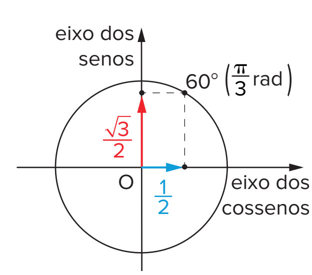
A ordenada de um ponto é negativa no 3º e no 4º quadrantes; o seno também é negativo nesses quadrantes.

Lembrando o quadro com os ângulos notáveis, podemos atribuir valores na circunferência trigonométrica:

	30° $\left(\frac{\pi}{6}\text{ rad}\right)$	**45° $\left(\frac{\pi}{4}\text{ rad}\right)$**	**60° $\left(\frac{\pi}{3}\text{ rad}\right)$**
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$







Saiba mais

O cálculo e o conceito de seno têm sua origem na Astronomia. Matemáticos trabalhavam com "tabelas de cordas" quando, a partir de uma circunferência, uma corda e o ângulo central que ela determina, resolveram dividir a corda em sua metade através do raio perpendicular obtendo o seno da metade do ângulo central.

Os hindus faziam o mesmo calculando semicordas. O seno era chamado de *jya*, uma das grafias para a palavra corda em hindu. Posteriormente os árabes começaram a escrever *jyb*, que depois foi incorretamente lida como *jayb* que significa bolso. Traduzindo do árabe para o latim chegamos em *sinus* e daí chegamos à notação atual de seno. O termo co-seno vem da ideia de combinar o termo "complemento" de seno.

Fonte: KENNEDY, *Edward S. Tópicos da história da Matemática para uso em sala de aula - Trigonometria.* [*S.l.*]: Atual, 1992

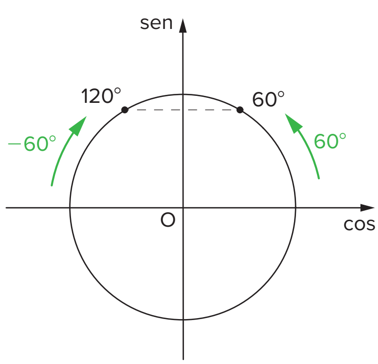
Redução ao 1º quadrante

Por meio da simetria podemos determinar os valores de seno e cosseno de ângulos que não estejam na tabela de ângulos notáveis. Para isso, devemos sempre observar os pontos simétricos no 1º quadrante, comparando os valores encontrados.

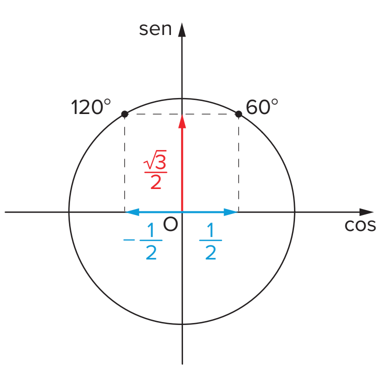
Exemplos:

a) sen 120° e cos 120°

Identificando o ângulo correspondente no 1º quadrante:



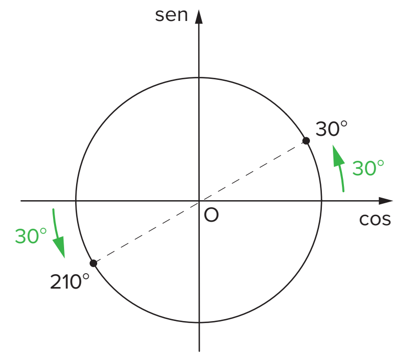
Verificando os valores do seno e do cosseno:



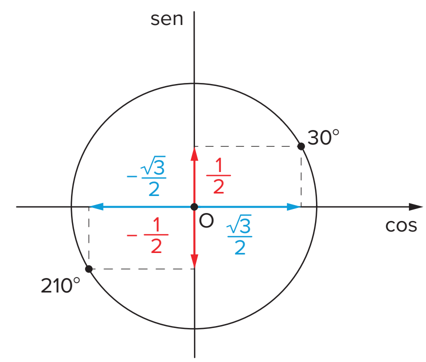
Com isso, verificamos que $\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$.

b) sen 210° e cos 210°

Identificando o ângulo correspondente no 1º quadrante:



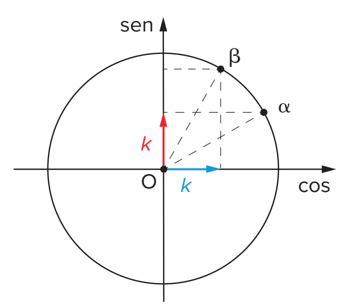
Verificando os valores do seno e do cosseno:

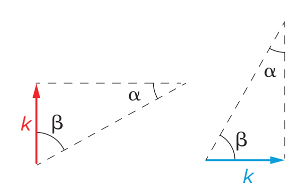


Assim, verificamos que $\text{sen } 210° = -\text{sen } 30° = -\frac{1}{2}$ e $\cos 210° = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ângulos complementares

Marcando dois ângulos complementares no 1º quadrante, obtemos uma figura como a seguinte:





Os triângulos são congruentes.
(ALA)

Verificamos assim que, se $\alpha + \beta = 90°$, então $\text{sen } \alpha = \cos \beta$.

Exemplos: $\begin{cases} \text{sen } 10° = \cos 80° \\ \text{sen } 50° = \cos 40°. \\ \text{sen } 5° = \cos 85° \end{cases}$

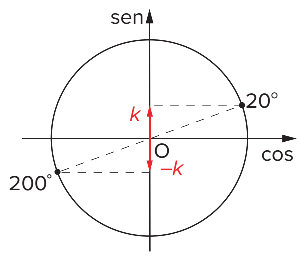
Exercício resolvido

1. Calcule:

a) $\text{sen}\,20° + \text{sen}\,200°$ **b)** $\dfrac{\text{sen}\,20° - \text{sen}\,200°}{\cos 70°}$

Resolução:

a) Observando a figura, verificamos que $\text{sen}\,200° = -\text{sen}\,20°$:



Assim, temos que: $\text{sen}\,20° + \text{sen}\,200° = \text{sen}\,20° + (-\text{sen}\,20°) = 0$.

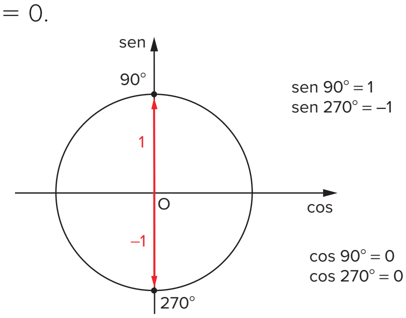
b) Como 70° e 20° são ângulos complementares, temos que $\cos 70° = \text{sen}\,20°$, logo:

$$\frac{\text{sen}\,20° - \text{sen}\,200°}{\cos 70°} = \frac{\text{sen}\,20° - (-\text{sen}\,20°)}{\text{sen}\,20°} = \frac{2\text{sen}\,20°}{\text{sen}\,20°} = 2.$$

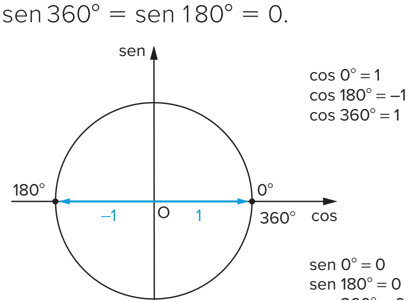
Seno e cosseno de múltiplos de 90°

Pela simples visualização dos extremos dos arcos (ângulos) trigonométricos podemos definir os valores do seno e do cosseno nos limites dos quadrantes.

Como o raio é unitário, verificamos que $\text{sen}\,90° = 1$ e $\text{sen}\,270° = -1$. Em ambos os casos temos que o cosseno desses ângulos é nulo, ou seja, $\cos 90° = 0$ e $\cos 270° = 0$.



Sobre o eixo dos cossenos, nos valores extremos, temos: $\cos 0° = \cos 360° = 1$ e $\cos 180° = -1$. Além disso, nesses extremos temos que o seno é nulo, ou seja, $\text{sen}\,0° = \text{sen}\,360° = \text{sen}\,180° = 0$.



! Atenção

Os valores de seno e cosseno são limitados na circunferência. Seus valores máximos são iguais a 1, e mínimos iguais a -1. Logo, equações do tipo $\text{sen}\,x = 2$ ou $\cos x = -3$, por exemplo, possuem conjunto solução nulo.

Equações imediatas

Algumas equações trigonométricas podem ser resolvidas com a utilização da circunferência trigonométrica. Se, até então, tínhamos que determinar o seno ou o cosseno a partir dos ângulos, também podemos determinar os ângulos a partir dos valores do seno ou do cosseno.

Exercícios resolvidos

2. Resolva as equações a seguir no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

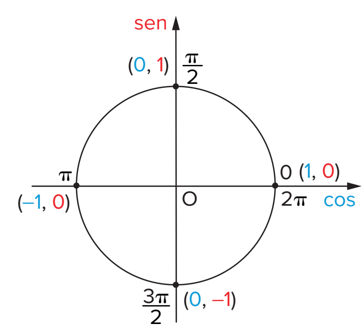
a) $\text{sen}\,x = 1$

b) $\cos x = -1$

c) $\text{sen}\,x = 0$

Resolução:

Fazendo uma circunferência e observando os valores de seno e cosseno, temos:



a) $\text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ $\therefore$ $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$

b) $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi \therefore S = \{\pi\}$

c) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$ $\therefore$ $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

3. Resolva as equações seguintes no universo dos reais.

a) $\text{sen}\,x = 1$

b) $\cos x = -1$

c) $\cos x = 0$

Resolução:

Como o universo agora é $\mathbb{R}$, devemos resolver as equações utilizando a expressão geral dos arcos:

a) $\text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + k \cdot 2\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

c) $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$ ou

$x = \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, logo:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

4. Resolva as equações a seguir no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

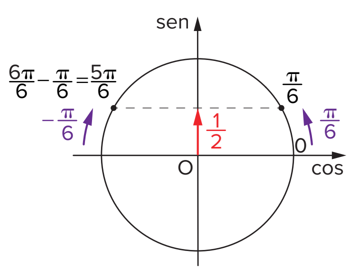
a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

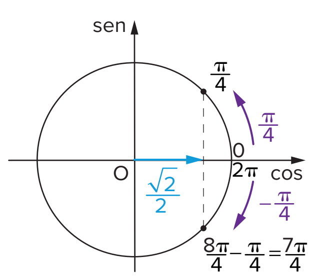
Resolução:

a) Considerando a representação do seno e utilizando a tabela, obtemos os ângulos:



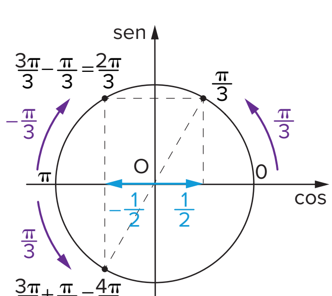
$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} \;\therefore\; S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$$

b) Considerando a representação do cosseno e utilizando a tabela, obtemos:



$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{4} \;\therefore\; S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$$

c) Utilizamos um arco auxiliar para obter as soluções:



$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} \;\therefore\; S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$$

5. Resolva as equações a seguir no universo dos reais.

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

Resolução:

Utilizando a expressão geral dos arcos:

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi$

Como $\dfrac{7\pi}{4}$ pode ser apresentado como $-\dfrac{\pi}{4}$, é possível unificar as expressões em $x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$,

logo: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

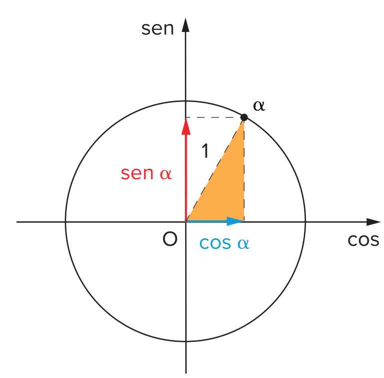
c) $\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$

Também é possível unir as expressões em $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, assim:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \pm\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Relação fundamental

Sendo α um ângulo qualquer no primeiro quadrante da circunferência trigonométrica, podemos obter o triângulo em destaque na figura a seguir.



Com a hipotenusa sendo o raio da circunferência (igual a 1), aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo, temos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

FRENTE 1

É possível demonstrar que essa relação, chamada relação fundamental da Trigonometria, é válida para qualquer ângulo, independentemente da posição do ponto associado a ele.

Essa relação é de grande utilidade em demostrações, na resolução de equações e na simplificação de expressões trigonométricas, e pode ser usada para calcular o cosseno de um ângulo, dado o seno e o quadrante ao qual o ângulo pertence, e vice-versa.

Da relação fundamental, temos que:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha \end{cases}$$

Exercícios resolvidos

6. Classifique cada afirmativa a seguir como verdadeira ou falsa:

a) $\text{sen}^2 30° + \cos^2 30° = 1$

b) $\text{sen}^2 20° + \cos^2 20° = 1$

c) $(\text{sen } 10° + \cos 10°)^2 = 1$

d) $\text{sen}^2 20° + \cos^2 200° = 1$

e) $\text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 70° = 1$

Resolução:

a) Verdadeira, pois a relação fundamental da Trigonometria garante a veracidade. De fato, temos:

$$\text{sen}^2 30° + \cos^2 30° =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

b) Verdadeira, pois a relação fundamental garante a veracidade.

c) Falsa, pois:

$$(\text{sen}\,10° + \cos 10°)^2 =$$
$$= \text{sen}^2 10° + 2\,\text{sen}\,10° \cdot \cos 10° + \cos^2 10° =$$
$$= 1 + 2\,\text{sen}\,10° \cdot \cos 10°$$

Como nem $\text{sen}\,10°$ nem $\cos 10°$ são nulos, a expressão acima necessariamente é diferente de 1.

d) Verdadeira, pois reduzindo os ângulos ao 1º quadrante, nota-se que:

$$\text{sen}^2 20° + \cos^2 200° =$$
$$= \text{sen}^2 20° + (\cos 200°)^2 =$$
$$= \text{sen}^2 20° + (-\cos 20°)^2 =$$
$$= \text{sen}^2 20° + \cos^2 20° = 1$$

e) Verdadeira, pois, como 70° e 20° são ângulos complementares, temos que $\text{sen}\,70° = \cos 20°$, logo: $\text{sen}^2 20° + \text{sen}^2 70° = \text{sen}^2 20° + \cos^2 20° = 1$.

7. Sendo $\text{sen}\,x = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule $\cos x$.

Resolução:

Da relação fundamental, decorre que:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{4}{5}$$

Como $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, o cosseno deve ser negativo, logo $\cos x = -\frac{4}{5}$.

8. Simplifique a expressão $\frac{\cos^2 x}{1 + \text{sen}\,x}$.

Resolução:

$$\frac{\cos^2 x}{1 + \text{sen}\,x} = \frac{1 - \text{sen}^2 x}{1 + \text{sen}\,x} = \frac{(1 - \text{sen}\,x)\cancel{(1 + \text{sen}\,x)}}{\cancel{1 + \text{sen}\,x}} =$$
$$= 1 - \text{sen}\,x$$

9. Resolva a equação $\cos^2 x + 3 \cdot \text{sen}\,x - 3 = 0$ no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Resolução:

$$\cos^2 x + 3 \cdot \text{sen}\,x - 3 = 0$$
$$1 - \text{sen}^2 x + 3 \cdot \text{sen}\,x - 3 = 0$$
$$-\text{sen}^2 x + 3 \cdot \text{sen}\,x - 2 = 0$$
$$\text{sen}^2 x - 3 \cdot \text{sen}\,x + 2 = 0$$

Fazendo $\text{sen}\,x = t$, temos a equação $t^2 - 3t + 2 = 0$. Resolvendo-a, obtemos $t = 1$ ou $t = 2$, porém:

$$\begin{cases} \text{se } t = 1, \text{ então } \text{sen}\,x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \text{se } t = 2, \text{ então } \text{sen}\,x = 2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

Assim, $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

Outras razões trigonométricas

Tangente

Existem outras razões trigonométricas além do seno e do cosseno. Uma das mais utilizadas é a tangente: Dado um ângulo agudo em um triângulo retângulo, a tangente desse ângulo é dada pela razão entre as medidas do cateto oposto e do cateto adjacente a ele. Dessa definição, também é válido que a tangente do ângulo é a razão entre o seno e o cosseno dele.

Assim, sendo α a medida de um ângulo agudo de um triângulo retângulo, temos:

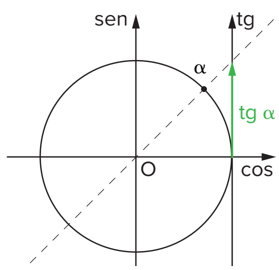
$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

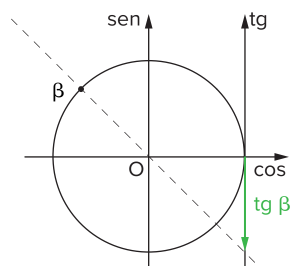
ou

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Também podemos estender o conceito de tangente para outros ângulos não pertencentes ao intervalo (0°, 90°). Para isso, no ciclo trigonométrico, definimos o eixo das tangentes como a reta tangente à circunferência na origem dos arcos (0° ou 0 rad), portanto, paralela ao eixo dos senos, e orientada para cima.

Para determinarmos o valor da tangente de um ângulo α qualquer, devemos considerar uma reta que passe pelo centro da circunferência e pelo ponto da circunferência associado ao ângulo α. A ordenada do ponto de encontro dessa reta com o eixo das tangentes define o valor da tangente de α.

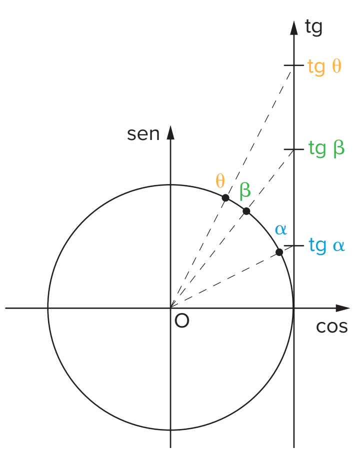




Na parte superior do eixo das tangentes temos os valores positivos (ângulos do 1º e 3º quadrantes), e na parte inferior os negativos (ângulos do 2º e 4º quadrantes).

Da definição, também temos que $\text{tg}\,0° = 0$ e $\text{tg}\,180° = 0$, pois a reta é traçada sobre o eixo dos cossenos, cruzando o eixo das tangentes em (1, 0), de ordenada nula.

No 1º quadrante, nota-se que, quanto maior o ângulo considerado, maior o valor da tangente, e não há limite para esse valor, diferentemente dos valores do seno e do cosseno, que são limitados em $[-1, 1]$.



Note que as tangentes de 90° e 270° não existem, já que a reta que passa pelo centro e também pelos pontos associados a esses ângulos é o próprio eixo dos senos, que é paralelo ao eixo das tangentes, portanto não há interseção.

De forma geral, para todos os arcos na forma $90° + k \cdot 180°$ ou $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$, não haverá valor da tangente. Perceba que esses são os valores para os quais o cosseno é nulo.

Da definição de tangente pela circunferência trigonométrica, também vale a seguinte igualdade.

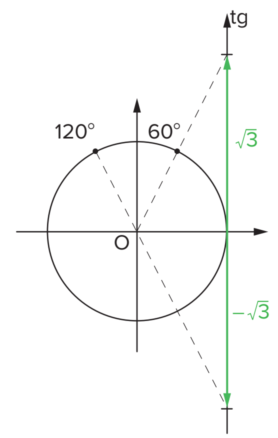
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}, \text{ se } \cos\alpha \neq 0$$

Exercícios resolvidos

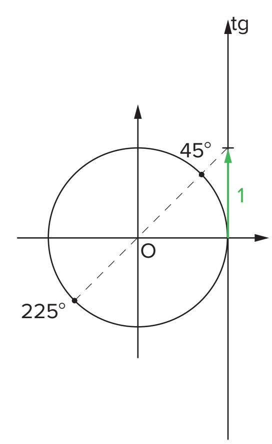
10. Com auxílio da circunferência trigonométrica, determine os valores de tg 120° e de tg 225°.

Resolução:

Fazendo a redução ao primeiro quadrante, temos:



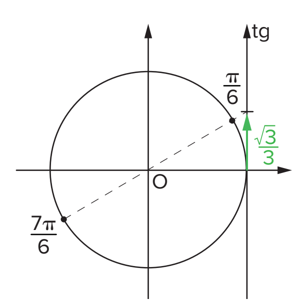
$$\text{tg}\,120° = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$$



$$\text{tg}\,225° = \text{tg}\,45° = 1$$

11. Resolva a equação $\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ no universo dos reais.

Resolução:



$$\text{tg}\,\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6}$$

Utilizando a expressão geral, a solução é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Cotangente, secante e cossecante

Outras razões trigonométricas são geradas a partir das anteriores:

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}, (\text{sen}\,\alpha \neq 0)$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha}, (\text{sen}\,\alpha \neq 0, \cos\alpha \neq 0)$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, (\cos\alpha \neq 0)$$

$$\text{cossec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha}, (\text{sen}\,\alpha \neq 0)$$

Dividindo a relação fundamental por $\cos^2\alpha$ e depois por $\text{sen}^2\alpha$, obtemos duas novas relações:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \text{tg}^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow 1 + \text{cotg}^2\alpha = \text{cossec}^2\alpha$$

Exemplos:

a) $\text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{\text{tg}\,\alpha} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 5 \Rightarrow \text{cotg}\,\alpha = \frac{1}{5}$

b) $\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta} \Rightarrow \cos\beta = -\frac{5}{8} \Rightarrow \sec\beta = -\frac{8}{5}$

c) $\text{cossec}\,\theta = \frac{1}{\text{sen}\,\theta} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \text{cossec}\,\theta = \frac{4}{3}$

Note que a tangente e a cotangente têm os mesmos sinais e o mesmo ocorre com o cosseno e a secante e o seno e a cossecante.

É importante perceber que todas as razões trigonométricas apresentadas até aqui estão interligadas, e, conhecendo o valor de uma delas e o quadrante a que pertence o ângulo, é possível encontrarmos as demais.

Exercício resolvido

12. Se $\text{cotg}\,x = 2$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, encontre as demais razões trigonométricas.

Resolução:

Se $\text{cotg}\,x = 2$, então $\text{tg}\,x = \frac{1}{2}$.

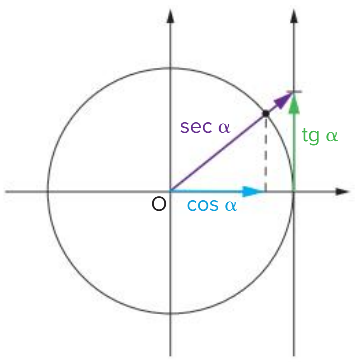
De $1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x$ temos $1 + 2^2 = \text{cossec}^2 x \Rightarrow \text{cossec}\,x = \pm\sqrt{5}$.

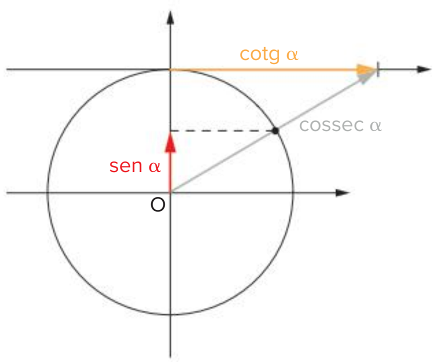
Sendo $\text{cossec}\,x = \pm\sqrt{5}$, então $\text{sen}\,x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ (x pertence ao 3º quadrante), então $\text{sen}\,x = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ e também $\text{cossec}\,x = -\sqrt{5}$.

De $\text{cotg}\,x = \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}$, vem que $2 = \frac{\cos x}{-\frac{\sqrt{5}}{5}} \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e, consequentemente, $\sec x = -\frac{5}{2\sqrt{5}} = -\frac{5\sqrt{5}}{10} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

A secante, a cossecante e a cotangente também podem ser observadas na circunferência trigonométrica, como mostram as figuras abaixo; mas, na prática, geralmente calculamos essas razões trigonométricas a partir do seno, do cosseno e da tangente.





O eixo das cotangentes tem o mesmo comportamento que o eixo das tangentes, mas é paralelo ao eixo dos cossenos. Para encontrar a cotangente também devemos passar uma reta pelo ângulo e pelo centro da circunferência.

A secante corresponde à medida do segmento que contém a extremidade do arco e extremos no centro da circunferência e na interseção com o eixo das tangentes. A cossecante corresponde à medida do segmento que contém a extremidade do arco e extremos no centro da circunferência e na interseção com o eixo das cotangentes.

Aplicando o teorema de Pitágoras ou propriedades da semelhança de triângulos, podemos deduzir todas as relações apresentadas na página anterior.

Ângulos complementares

Como visto anteriormente, se $\alpha + \beta = 90°$ (ângulos complementares), então $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta$.

Estendendo essa propriedade, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta}{\text{sen}\,\beta} = \text{cotg}\,\beta$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\text{sen}\,\beta} = \text{cossec}\,\beta$$

Exemplos:

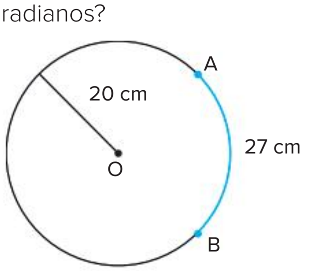
$\text{tg}\,50° = \text{cotg}\,40°$

$\sec 20° = \text{cossec}\,70°$

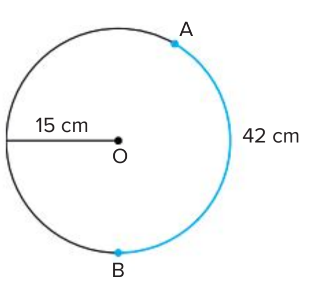
Revisando

1. Em cada item a seguir, qual é a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$, em radianos?

a)



b)



2. Converta as medidas dos ângulos para radianos:

a) 20° **c)** 240° **e)** 342°

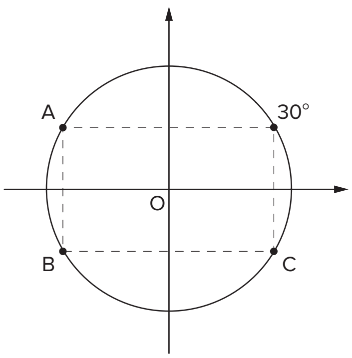
b) 135° **d)** 324°

3. Qual é a medida, em graus, dos ângulos a seguir?

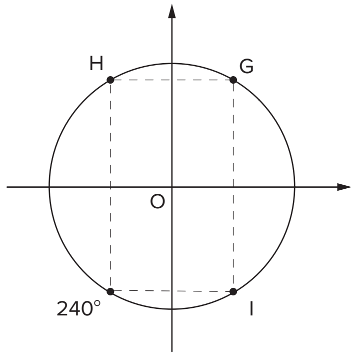
a) $\frac{5\pi}{6}$ rad b) $\frac{4\pi}{3}$ rad c) $\frac{\pi}{9}$ rad d) 1 rad

4. Em cada item, identifique a medida do arco da 1ª volta associado aos pontos indicados na circunferência.

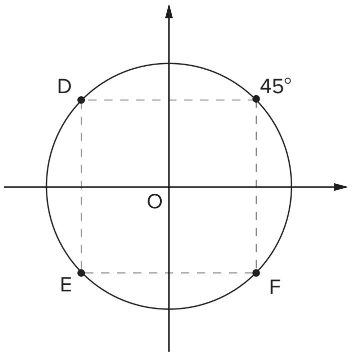
a)



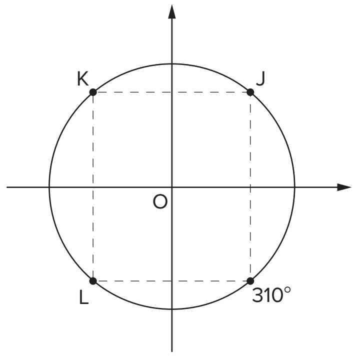
c)



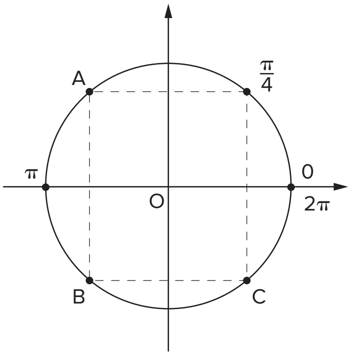
b)

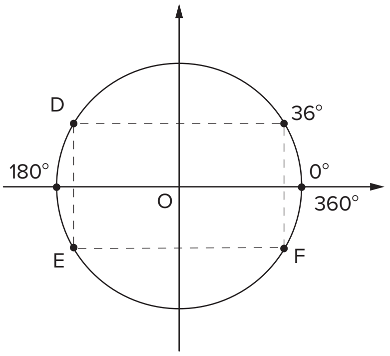


d)

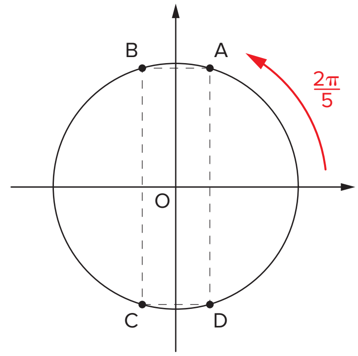


5. Nas circunferências trigonométricas a seguir, identifique as medidas dos arcos da 1ª volta associados aos pontos indicados, na respectiva unidade.



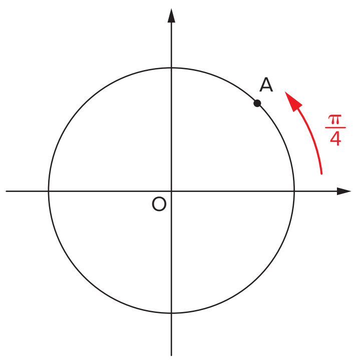


6. Qual é a expressão geral dos arcos representados nos pontos A, B, C e D?

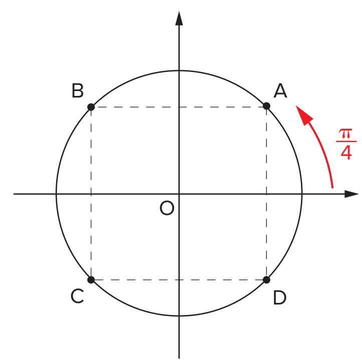


7. Em cada item, escreva uma expressão geral comum a todos os pontos indicados nas circunferências.

a)

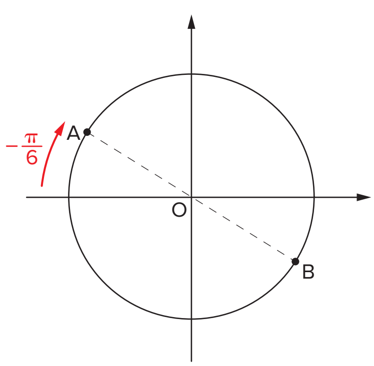


d)

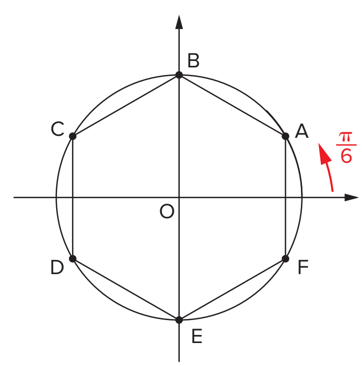


ABCD é um quadrado

b)

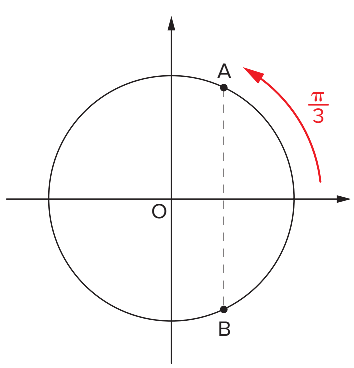


e)



ABCDEF é um hexágono regular

c)



FRENTE 1

8. Determine os valores pedidos:

a) $\operatorname{sen} 150°$
b) $\cos 120°$
c) $\operatorname{sen} 240°$
d) $\operatorname{sen} 210°$
e) $\cos 315°$
f) $\cos 270°$
g) $\operatorname{sen} 180°$
h) $\cos 360°$

9. Calcule os valores pedidos:

a) $\operatorname{sen} 855°$
b) $\cos 570°$
c) $\operatorname{sen} 1050°$

10. Calcule o valor de $\dfrac{\cos 42° + \operatorname{sen} 48°}{\cos 318°}$.

11. Resolva as equações no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$:

a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\operatorname{sen} x = -1$
c) $\operatorname{sen} x = 0$
d) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$
e) $\cos x = \dfrac{1}{2}$
f) $\cos x = 0$
g) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
h) $\cos x = 1$

12. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações a seguir:

a) $\operatorname{sen} x = 1$
b) $\operatorname{sen} x = -1$
c) $\cos x = 0$
d) $\cos x = -1$
e) $\cos x = \dfrac{1}{2}$
f) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

13. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \dfrac{5}{13}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule $\cos x$.

14. Calcule os valores pedidos:

a) $\operatorname{tg} 120°$

b) $\operatorname{tg} 135°$

c) $\operatorname{tg} 180°$

d) $\operatorname{tg} 210°$

e) $\operatorname{tg} 315°$

f) $\operatorname{tg} 360°$

15. Resolva as equações a seguir para $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $\operatorname{tg} x = 1$

b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

c) $\operatorname{tg} x = 0$

d) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

16. Resolva em $\mathbb{R}$ as equações a seguir:

a) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

b) $\operatorname{tg} x = -1$

c) $\operatorname{tg} x = 0$

d) $\operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

17. Determine os valores pedidos:

a) $\operatorname{cotg} 135°$

b) $\sec 240°$

c) $\operatorname{cossec} 330°$

18. Sabendo que $\operatorname{tg} x = 3$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{cotg} x$, $\sec x$ e $\operatorname{cossec} x$.

19. Resolva a equação $\sec^2 x = 2 \cdot \operatorname{tg} x$, para $0 \leqslant x < 2\pi$.

20. **Udesc 2016** Assinale a alternativa que corresponde ao valor da expressão

$$6\cos^2\left(\frac{13\pi}{6}\right) - 4\cos^2\left(\frac{11\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \operatorname{tg}^2\left(\frac{31\pi}{3}\right)$$

a) 6

b) 5

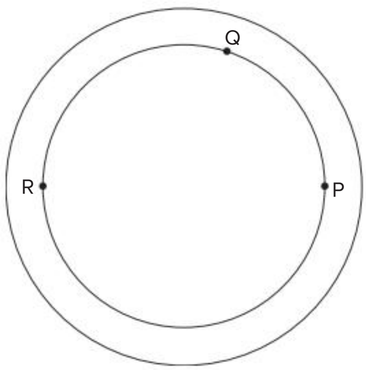
c) $\dfrac{9}{2}$

d) 3

e) $\dfrac{23}{4}$

Exercícios propostos

1. **Enem PPL 2019** Uma pista circular delimitada por duas circunferências concêntricas foi construída. Na circunferência interna dessa pista, de raio 0,3 km, serão colocados aparelhos de ginástica localizados nos pontos P, Q e R, conforme a figura.



O segmento $\overline{RP}$ é um diâmetro dessa circunferência interna, e o ângulo $P\hat{R}Q$ tem medida igual a $\frac{\pi}{5}$ radianos.
Para uma pessoa ir do ponto P ao ponto Q andando pela circunferência interna no sentido anti-horário, ela percorrerá uma distância, em quilômetro, igual a

a) $0{,}009\pi$
b) $0{,}03\pi$
c) $0{,}06\pi$
d) $0{,}12\pi$
e) $0{,}18\pi$

2. **EEAR-SP 2019** Gabriel verificou que a medida de um ângulo é $\frac{3\pi}{10}$ rad. Essa medida é igual a

a) 48°
b) 54°
c) 66°
d) 72°

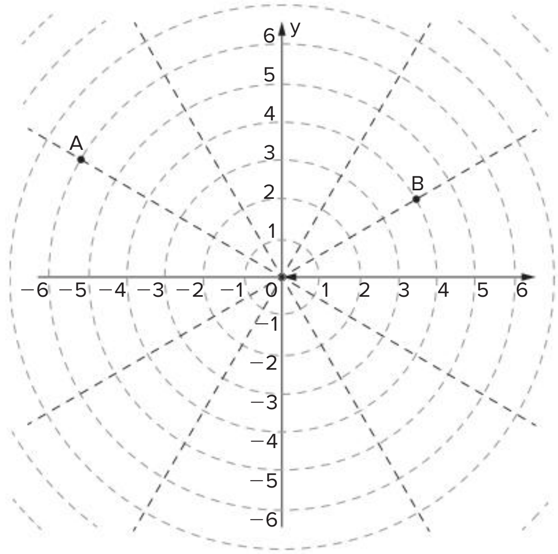
3. **IFSP 2013** Considere uma circunferência de centro O e raio 6 cm. Sendo A e B pontos distintos dessa circunferência, sabe-se que o comprimento de um arco $\overset{\frown}{AB}$ é 5π cm. A medida do ângulo central $A\hat{O}B$, correspondente ao arco $\overset{\frown}{AB}$ considerado, é

a) 120°.
b) 150°.
c) 180°.
d) 210°.
e) 240°.

4. **UEG-GO 2016** Na competição de *skate* a rampa em forma de U tem o nome de *vert*, onde os atletas fazem diversas manobras radicais. Cada uma dessas manobras recebe um nome distinto de acordo com o total de giros realizados pelo skatista e pelo *skate*, uma delas é a “180 *allie frontside*”, que consiste num giro de meia volta. Sabendo-se que 540° e 900° são côngruos a 180°, um atleta que faz as manobras 540 *Mc Tuist* e 900 realizou giros completos de

a) 1,5 e 2,5 voltas respectivamente.
b) 0,5 e 2,5 voltas respectivamente.
c) 1,5 e 3,0 voltas respectivamente.
d) 3,0 e 5,0 voltas respectivamente.
e) 1,5 e 4,0 voltas respectivamente.

5. **Enem 2018** Sobre um sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem (0, 0).
Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.
Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto B até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a

a) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 1}{3} + 8$
b) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 2}{3} + 6$
c) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 3}{3} + 4$
d) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 4}{3} + 2$
e) $\frac{2 \cdot \pi \cdot 5}{3} + 2$

6. **UEG-GO** Duas importantes cidades estão localizadas sobre a linha do Equador: uma é a capital do Amapá e a outra é a capital do Equador, ambas na América do Sul. Suas longitudes são, respectivamente, 78° Oeste e 52° Oeste. Considerando que a Terra é uma esfera de raio 6 400 km, qual é a distância entre essas duas cidades?

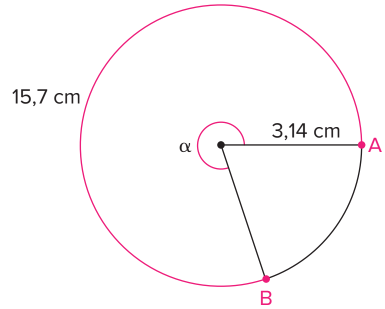
7. **UEG-GO 2012** Considerando 1° como a distância média entre dois meridianos, e que na linha do Equador corresponde a uma distância média de 111,322 km, e tomando-se esses valores como referência, pode-se inferir que o comprimento do círculo da Terra, na linha do Equador, é de, aproximadamente,

a) 52 035 km
b) 48 028 km
c) 44 195 km
d) 40 076 km

8. Enem Nos *X-Games Brasil*, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade *skate* vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

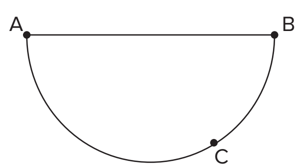
a) uma volta completa.
b) uma volta e meia.
c) duas voltas completas.
d) duas voltas e meias.
e) cinco voltas completas.

9. Uerj 2019 Observe no esquema um círculo de raio igual a 3,14 cm. Seu maior arco, $\overset{\frown}{AB}$, correspondente ao ângulo central α, tem comprimento de 15,7 cm.



Calcule, em graus, a medida do ângulo α.

10. Udesc 2019 A figura abaixo apresenta uma semicircunferência de diâmetro AB, com raio igual a $\sqrt{3}$ cm e com o ponto C sobre a semicircunferência.

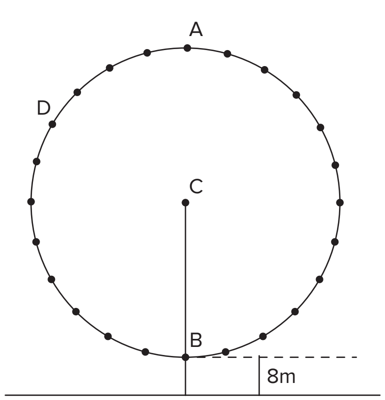


Semicircunferência com diâmetro AB

Sabendo-se que o segmento $\overline{AC}$ mede 3 cm, o comprimento do arco $\overset{\frown}{AC}$ é:

a) $\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}$ cm
b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ cm
c) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ cm
d) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$ cm
e) 3π cm

11. Cefet-RJ 2019 O esquema a seguir representa uma roda-gigante em construção que terá 120 m de diâmetro. Cada ponto representa uma das 24 cabines igualmente espaçadas entre si.



O ponto C representa o centro da roda-gigante e os pontos A e B são, respectivamente, os pontos mais alto e mais baixo da roda-gigante.
(Utilize, se necessário, a aproximação $\pi = 3{,}1$)

a) Qual o comprimento, em metros, do arco $\overset{\frown}{AD}$?
b) Qual a altura, em metros, do ponto D em relação ao chão?

FRENTE 1

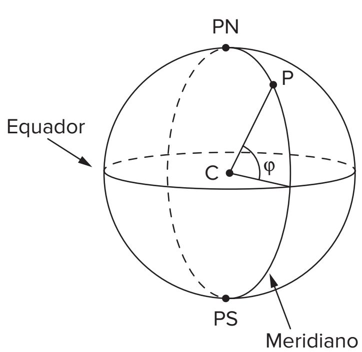
12. Fuvest-SP 2021 Suponha, para simplificar, que a Terra é perfeitamente esférica e que a linha do Equador mede 40 000 km. O trajeto que sai do Polo Norte, segue até a linha do Equador pelo meridiano de Greenwich, depois se desloca ao longo da linha do Equador até o meridiano 45°L e então retorna ao Polo Norte por esse meridiano tem comprimento total de

a) 15 000 km.
b) 20 000 km.
c) 25 000 km.
d) 30 000 km.
e) 35 000 km.

13. Enem PPL 2019 As coordenadas usualmente utilizadas na localização de um ponto sobre a superfície terrestre são a latitude e a longitude. Para tal, considera-se que a Terra tem a forma de uma esfera.

Um meridiano é uma circunferência sobre a superfície da Terra que passa pelos polos Norte e Sul, representados na figura por PN e PS. O comprimento da semicircunferência que une os pontos PN e PS tem comprimento igual a 20 016 km. A linha do Equador também é uma circunferência sobre a superfície da Terra, com raio igual ao da Terra, sendo que o plano que a contém é perpendicular ao que contém qualquer meridiano.

Seja P um ponto na superfície da Terra, C o centro da Terra e o segmento $\overline{PC}$ um raio, conforme mostra a figura. Seja φ o ângulo que o segmento $\overline{PC}$ faz com o plano que contém a linha do Equador. A medida em graus de φ é a medida da latitude de P.



Suponha que a partir da linha do Equador um navio viaja subindo em direção ao Polo Norte, percorrendo um meridiano, até um ponto P com 30 graus de latitude. Quantos quilômetros são percorridos pelo navio?

a) 1 668
b) 3 336
c) 5 004
d) 6 672
e) 10 008

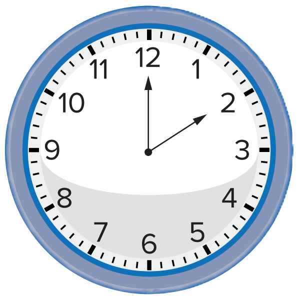
14. Unesp 2019 Os pontos P e Q sobre a superfície da Terra possuem as seguintes coordenadas geográficas:

	Latitude	Longitude
P	30° N	45° L
Q	30° N	15° O

Considerando a Terra uma esfera de raio 6 300 km, a medida do menor arco $\overset{\frown}{PQ}$ sobre a linha do paralelo 30° N é igual a

a) $1150\pi\sqrt{3}$ km
b) $1250\pi\sqrt{3}$ km
c) $1050\pi\sqrt{3}$ km
d) $1320\pi\sqrt{3}$ km
e) $1350\pi\sqrt{3}$ km

15. IFPE 2019 O relógio abaixo está marcando 2 horas em ponto. O ponteiro dos minutos começa a se locomover e anda 240°.



Disponível em: https://escolakids.uol.com.br/quantas-horas-por-favor.htm. Acesso em: 23 set. 2018.

Após esses 240° percorridos pelo ponteiro dos minutos, que horas o relógio estará marcando?

a) 2h45
b) 2h20
c) 2h30
d) 2h40
e) 2h24

16. Uece 2019 Em um relógio analógico circular usual, no momento em que está registrando 10 horas e trinta e cinco minutos, a medida do menor ângulo entre os ponteiros indicadores de horas e minutos é

a) 108 graus.
b) 107 graus e trinta minutos.
c) 109 graus.
d) 108 graus e trinta minutos.

17. UFMS 2020 Às 12 horas, os ponteiros dos minutos e das horas se superpõem, e às 13 horas eles fazem um ângulo de 30°. Seguindo esse raciocínio, o valor da soma dos ângulos formados às 15h30min e às 18h40min é:

a) 150°.
b) 115°.
c) 75°.
d) 40°.
e) 35°.

18. Uece 2020 Um relógio de ponteiros atrasa 30 segundos a cada hora. Se hoje às 12 horas ele indica a hora exata, a medida, em graus, do menor ângulo entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos depois de três dias é

a) 176.
b) 162.
c) 194.
d) 156.

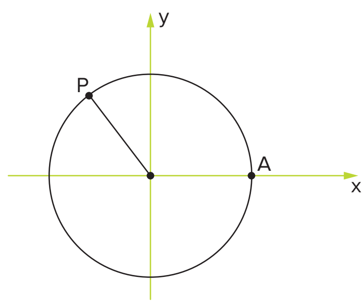
19. Unemat-MT Quanto ao arco 4 555°, é correto afirmar.

a) Pertence ao segundo quadrante e tem como côngruo o ângulo de 55°.
b) Pertence ao primeiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 75°.
c) Pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 195°.
d) Pertence ao quarto quadrante e tem como côngruo o ângulo de 3 115°.
e) Pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 4 195°.

20. UEL-PR Se sen$x = \frac{1}{2}$ e x é um arco do 2º quadrante, então cos $2x$ é igual a

a) 1 b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $-\frac{3}{4}$

21. Uerj 2019 O círculo a seguir tem o centro na origem do plano cartesiano *xy* e raio igual a 1. Nele, AP determina um arco de 120°.



As coordenadas de P são:

a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
b) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
c) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

22. O valor da expressão $\frac{\text{sen}\,40° + \text{sen}\,140° + \cos 50°}{\text{sen}\,220°}$ é:

a) −3
b) −2
c) 0
d) 1
e) 2

23. IFCE O valor de cos 2 280° é

a) $-\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

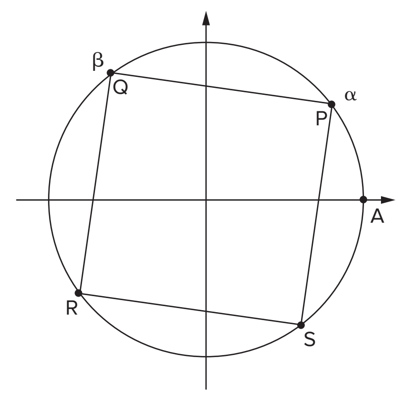
24. UFRGS 2018 Se *a* e *b* são ângulos agudos e complementares, o valor da expressão $\text{sen}^2(a + b) - \cos^2(a + b)$ é

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) $\sqrt{2}$.
e) $\sqrt{3}$.

25. Classifique as igualdades a seguir em verdadeira ou falsa:

☐ $\cos(-25°) = \cos 25°$
☐ $\text{sen}(-37°) = \text{sen}\,37°$
☐ $\text{sen}(-254°) = -\text{sen}\,254°$
☐ $\cos(x - \pi) = -\cos(\pi - x)$
☐ $\text{sen}(x - 30°) = -\text{sen}(30° - x)$
☐ $\cos(a - b) = \cos(b - a)$

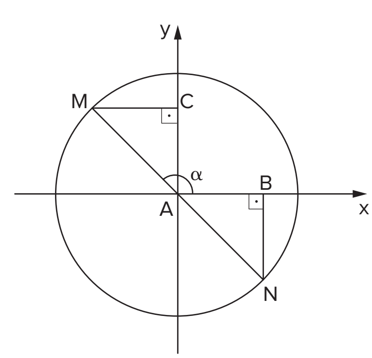
26. Insper-SP 2014 Na figura abaixo, em que o quadrado PQRS está inscrito na circunferência trigonométrica, os arcos $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{AQ}$ têm medidas iguais a α e β, respectivamente, com $0 < \alpha < \beta < \pi$.



Sabendo que $\cos\alpha = 0{,}8$, pode-se concluir que o valor de $\cos\beta$ é

a) −0,8
b) 0,8
c) −0,6
d) 0,6
e) −0,2

27. Cefet-MG 2012 A figura abaixo representa uma circunferência trigonométrica em que MN é diâmetro e o ângulo α mede $\frac{5\pi}{6}$ radianos.

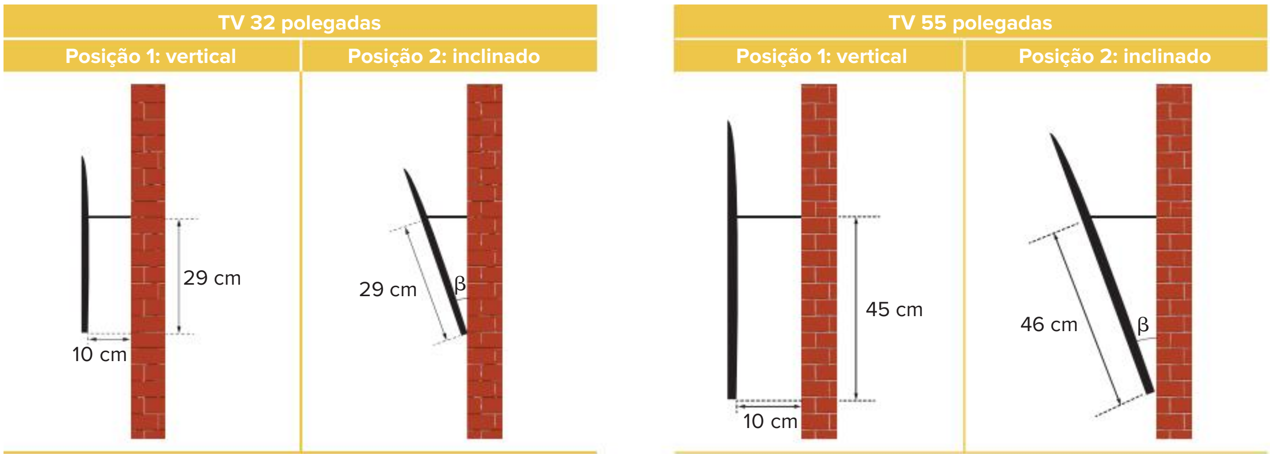


A razão entre as medidas dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é

a) $26\sqrt{3}$.
b) $\sqrt{3}$.
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

FRENTE 1

28. FICSAE-SP 2019 Uma empresa desenvolveu um suporte para fixação de televisores (TVs) em paredes. O suporte pode ser utilizado em TVs de 32 até 55 polegadas e permite que o aparelho fique na vertical ou inclinado, conforme a ilustração, em que β refere-se ao ângulo máximo de inclinação.



Considere os seguintes valores aproximados para seno, cosseno e tangente:

β	sen β	cos β	tg β
10°	0,174	0,985	0,176
11°	0,191	0982	0,194
12°	0,208	0,978	0,213
13°	0,225	0,974	0,230
14°	0,242	0,970	0,250
15°	0,259	0,966	0,268

β	sen β	cos β	tg β
16°	0,276	0,961	0,287
17°	0,292	0,956	0,306
18°	0,309	0,951	0,325
19°	0,326	0,946	0,344
20°	0,342	0,940	0,364
21°	0,358	0,934	0,384

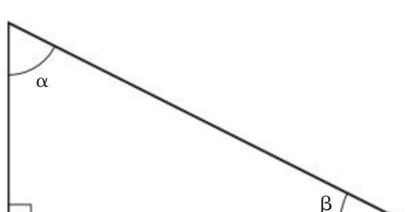
A diferença entre o ângulo máximo de inclinação da TV de 32 polegadas e da TV de 55 polegadas é um valor entre

a) 1° e 3°.
b) 9° e 11°.
c) 7° e 9°.
d) 3° e 5°.
e) 5° e 7°.

29. Fuvest-SP Sabe-se que $x = 1$ é raiz da equação

$$(\cos^2 \alpha)x^2 - (4\cos\alpha \,\mathrm{sen}\,\beta)x + \frac{3}{2}\mathrm{sen}\,\beta = 0,$$

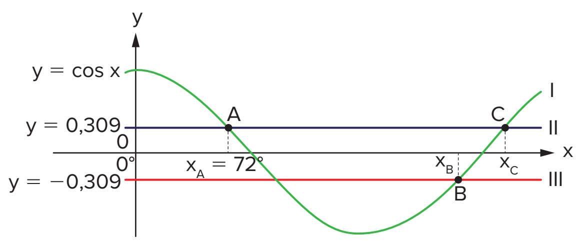
sendo α e β os ângulos agudos indicados no triângulo retângulo da figura a seguir.



Pode-se então afirmar que as medidas de α e β são, respectivamente,

a) $\frac{\pi}{8}$ e $\frac{3\pi}{8}$
b) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{6}$
e) $\frac{3\pi}{8}$ e $\frac{\pi}{8}$

30. **Unesp 2018** A figura indica os gráficos das funções I, II e III. Os pontos A(72°; 0,309), B(x_B; −0,309) e C(x_C; 0,309) são alguns dos pontos de interseção dos gráficos.



Nas condições dadas, $x_B + x_C$ é igual a

a) 538°
b) 488°
c) 540°
d) 432°
e) 460°

31. **EEAR-SP 2019** Se $0° \leqslant x \leqslant 90°$ e se $\text{sen}\,4x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, um dos possíveis valores de x é:

a) 30°
b) 45°
c) 75°
d) 85°

32. **EsPCEx-SP 2019** O número de raízes reais da equação $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ no intervalo$]0, 2\pi[$ é

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

33. **Uece 2014** Se p e q são duas soluções da equação $2\text{sen}^2 x - 3\text{sen}\,x + 1 = 0$ tais que $\text{sen}\,p \neq \text{sen}\,q$, então o valor da expressão $\text{sen}^2 p - \cos^2 q$ é igual a

a) 0.
b) 0,25.
c) 0,50.
d) 1.

34. **Esc. Naval-RJ 2012** A soma dos quadrados das raízes da equação $|\text{sen}\,x| = 1 - 2\text{sen}^2 x$, quando $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ vale

a) $\frac{49}{36}\pi^2$
b) $\frac{49}{9}\pi^2$
c) $\frac{7}{3}\pi^2$
d) $\frac{14}{9}\pi^2$
e) $\frac{49}{6}\pi^2$

35. **UFJF/Pism-MG 2015** No processo de calcular o ângulo x formado entre duas avenidas transversais, um engenheiro obteve a seguinte equação $\text{sen}\,x = \text{sen}^3 x$. Sabendo que x não excede 180°, é CORRETO afirmar que:

a) $x = -1$
b) $x = 0$
c) $x = 1$
d) $x = \frac{\pi}{2}$
e) $x = \frac{3\pi}{2}$

36. **EsPCEx-SP 2015** A soma de todas as soluções da equação

$$2\cos^3(x) - \cos^2(x) - 2\cos(x) + 1 = 0,$$

que estão contidas no intervalo $[0, 2\pi]$ é igual a

a) 2π.
b) 3π.
c) 4π.
d) 5π.
e) 6π.

37. **UFJF/Pism-MG 2018** Determine o conjunto solução para a equação

$$6\text{sen}^2(x) - 9\text{sen}(x) + 3 = 0.$$

a) $\left\{x \in \mathbb{R};\, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R};\, x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R};\, x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R};\, x = \frac{\pi}{4} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3}\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R};\, x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4}\right\}$

38. Sendo $\cos\theta = \frac{1}{4}$ e $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, calcule o valor de $\text{sen}\,\theta$.

39. Calcule o valor de k sabendo que $\text{sen}\,\beta = \frac{\sqrt{k+1}}{k}$ e $\cos\beta = \frac{1+k}{k}$.

40. Simplifique a expressão $\frac{\text{sen}^2\alpha}{1 - \cos\alpha}$ para $\cos\alpha \neq 1$.

41. **Ifal 2016** O valor do determinante $\begin{vmatrix} \cos x & -\text{sen}\,x \\ \text{sen}\,x & \cos x \end{vmatrix}$ é:

a) 1
b) $\cos^2 x$
c) $\text{sen}^2 x$
d) $\text{tg}^2 x$
e) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$

42. Para qualquer valor real de x,

$$(\text{sen}\,x + \cos x)^2 + (\text{sen}\,x - \cos x)^2$$

é igual a:

a) −1
b) 0
c) 1
d) 2
e) 3

43. **Unisc-RS 2017** Seja $\text{sen}(x) + \cos(x) = a$ e $\cos(x)\,\text{sen}(x) = b$. Podemos então afirmar que

a) $a + b = 1$
b) $a^2 + b = 1$
c) $a + b^2 = 1$
d) $a^2 - 2b = 1$
e) $a^2 + 2b = 1$

44. Unisinos-RS 2017 As funções seno e cosseno de qualquer ângulo x satisfazem a seguinte identidade: $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Se $\cos x = 0{,}5$, quais são os possíveis valores do seno deste ângulo x?

Dado: Lembre que $\text{sen}^2 x = (\text{sen} x)^2$.

a) $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}}{2}$
b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$
d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $-\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{4}$

45. As raízes da equação $2x^2 - px - 1 = 0$ são $\text{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$, sendo $\theta \in \mathbb{R}$. O valor de p é:
a) zero
b) 2
c) 4
d) 5
e) 6

46. Acafe-SC 2021 O número de soluções da equação $2\cos^2(x) - \text{sen}(x) = 1$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é
a) 2
b) 3
c) 1
d) nenhum

47. Sendo $x \in [0, 2\pi]$ e $2\text{sen}^2 x - 3\cos x = 0$, então o maior valor de x vale
a) $\frac{\pi}{3}$
b) $\frac{2\pi}{3}$
c) $\frac{2\pi}{5}$
d) $\frac{3\pi}{4}$
e) $\frac{5\pi}{3}$

48. Unicamp-SP 2020 Seja a função $f(x) = \frac{2 + \text{sen} x}{2 + \cos x}$, definida para todo número real x.
a) Mostre que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi)f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
b) Seja θ um número real tal que $f(\theta) = 2$. Determine os possíveis valores para $\text{sen}\,\theta$.

49. Unicamp-SP 2019 Sejam k e θ números reais tais que $\text{sen}\,\theta$ e $\cos\theta$ são soluções da equação quadrática $2x^2 + x + k = 0$. Então, k é um número
a) irracional.
b) racional não inteiro.
c) inteiro positivo.
d) inteiro negativo.

50. Ifal 2016 O valor da expressão $\frac{\text{sen}\,30° + \text{tg}\,225°}{\cos\frac{\pi}{2} - \text{sen}(-60°)}$ é
a) 1.
b) $\frac{1}{2}$.
c) $-\sqrt{3}$.
d) $\sqrt{3}$.
e) $-\frac{1}{2}$.

51. Sendo $\text{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\text{sen} x$, $\cos x$, $\text{cotg} x$, $\sec x$ e $\text{cossec} x$.

52. Sabendo-se que $\text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$ e $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, pode-se afirmar que $\text{tg}\,\alpha$ vale
a) $\frac{3}{5}$
b) 1
c) $\frac{3}{4}$
d) $\frac{4}{3}$

53. UPE 2015 Num triângulo retângulo, temos que $\text{tg} x = 3$. Se x é um dos ângulos agudos desse triângulo, qual o valor de $\cos x$?
a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{5}}{10}$
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
d) $\frac{1}{4}$
e) $\frac{\sqrt{10}}{10}$

54. IFCE 2019 Para $x = \frac{\pi}{3}$, o valor da expressão $\frac{2\cos(x) + 1}{\sec(3x) + \sec(2x)}$ é
a) $\frac{1}{3}$.
b) $\frac{3}{2}$.
c) $-\frac{1}{2}$.
d) $-\frac{2}{3}$.
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

55. UFSJ-MG 2013 Considerando os valores de θ, para os quais a expressão $\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{cossec}\,\theta} + \frac{\cos\theta}{\sec\theta}$ é definida, é CORRETO afirmar que ela será sempre igual a
a) 1.
b) 2.
c) $\text{sen}\,\theta$.
d) $\cos\theta$.

56. EEAR-SP 2017 (Adapt.) Seja $M = \frac{\text{cossec} x + \sec x}{\text{cotg} x + 1}$, com $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Utilizando-se as identidades trigonométricas, pode-se considerar M igual a
a) $\text{sen} x$
b) $\cos x$
c) $\sec x$
d) $\text{cossec} x$

57. UEPG 2014 Sendo x um arco do 1º quadrante e sabendo que $\text{sen} x = \frac{a}{a+1}$ e $\sec x = \frac{a+1}{\sqrt{a+2}}$, assinale o que for correto.

01 $\cos 2x = \text{sen} x$

02 $\text{cotg} x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{6}$

04 $\text{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

08 $\text{cossec} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

16 $\text{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Soma:

58. Uece 2020 Se u é um número real tal que os valores trigonométricos da $\sec(u)$ e $\operatorname{cossec}(u)$ estão definidos, então, o valor numérico da expressão $\dfrac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2b^2}$, para $a=\sec(u)$ e $b=\operatorname{cossec}(u)$, é igual a

a) 2. **b)** 0. **c)** 4. **d)** 1.

59. Ibmec-RJ O valor de m para que exista um ângulo x com $\cos x=\dfrac{2}{m-1}$ e $\operatorname{tg}x=\sqrt{m-2}$ é dado por:

a) um número par.
b) um número ímpar.
c) um número negativo.
d) um número natural maior que 10.
e) um número irracional.

60. EsPCEx-SP O valor numérico da expressão $\dfrac{\sec 1320°}{2}-2\cdot\cos\left(\dfrac{53\pi}{3}\right)+(\operatorname{tg}2220°)^2$ é:

a) -1 **c)** $\dfrac{1}{2}$ **e)** $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) 0 **d)** 1

61. UFPR 2020 Seja x um arco no primeiro quadrante.

a) Encontre o valor de $\operatorname{sen}(x)$, sabendo que $\cos(x)=\dfrac{3}{8}$.
b) Encontre o valor de $\operatorname{sen}(x)$, sabendo que $8\operatorname{tg}(x) = 3\cos(x)$.

62. EsPCEx-SP 2021 Se θ é um arco do 4º quadrante tal que $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$, então $\sqrt{2\sec\theta+3\operatorname{tg}\theta}$ é igual a

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **c)** $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **e)** $\dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

b) $\dfrac{1}{2}$. **d)** $\dfrac{3}{2}$.

63. Unicamp-SP 2014 Seja x real tal que $\cos x=\operatorname{tg}x$. O valor de $\operatorname{sen}x$ é

a) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.
b) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$.
c) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
d) $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

64. Udesc 2017 A expressão

$\dfrac{\sec^2(x)-1}{\operatorname{tg}^2(x)+1}+\dfrac{\operatorname{cossec}^2(x)+1}{\operatorname{cotg}^2(x)+1}$ é igual a:

a) $1-2\cos^2(x)$ **d)** 1
b) $3+2\cos^2(x)$ **e)** $1+2\operatorname{sen}^2(x)$
c) $3+2\operatorname{sen}^2(x)$

65. IFSul-RS Sabendo-se que $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{1}{2}$ e que $\alpha\in$ 2º quadrante, o valor da expressão $y=\dfrac{\operatorname{sen}(90°-\alpha)\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sec(180°+\alpha)}$ é

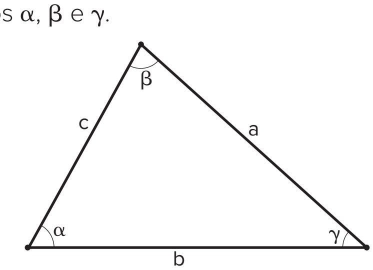
a) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ **c)** $-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **d)** $-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

66. Insper-SP Considere dois ângulos agudos cujas medidas a e b, em graus, são tais que $a+b=90°$ e $4\operatorname{sen}(a)-10\operatorname{sen}(b)=0$. Nessas condições é correto concluir que

a) $\operatorname{tg}(a)=1$ e $\operatorname{tg}(b)=1$.
b) $\operatorname{tg}(a)=4$ e $\operatorname{tg}(b)=\dfrac{1}{4}$.
c) $\operatorname{tg}(a)=\dfrac{1}{4}$ e $\operatorname{tg}(b)=4$.
d) $\operatorname{tg}(a)=\dfrac{2}{5}$ e $\operatorname{tg}(b)=\dfrac{5}{2}$.
e) $\operatorname{tg}(a)=\dfrac{5}{2}$ e $\operatorname{tg}(b)=\dfrac{2}{5}$.

67. Unicamp-SP 2016 Considere o triângulo exibido na figura abaixo, com lados de comprimentos a, b, e c e ângulos α, β e γ.



a) Suponha que a sequência (α, β, γ) é uma progressão aritmética (PA). Determine a medida do ângulo β.
b) Suponha que a sequência (a, b, c) é uma progressão geométrica (PG) de razão $q=\sqrt{2}$. Determine o valor de $\operatorname{tg}\beta$.

68. UFRGS 2016 Considere as funções f e g definidas por $f(x)=\operatorname{sen}x$ e $g(x)=\cos x$.
O número de raízes da equação $f(x)=g(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ é

a) 3. **c)** 5. **e)** 7.
b) 4. **d)** 6.

69. UFSJ-MG 2012 Sendo x um arco tal que $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ e $\sqrt{3}\cdot(\operatorname{tg}x)=2\cdot\operatorname{sen}x$, é CORRETO afirmar que

a) a soma das soluções dessa equação é igual a π.
b) as extremidades de todos os arcos x que são solução dessa equação estão no terceiro quadrante.
c) nesse intervalo, a equação tem dois arcos distintos como soluções.
d) para qualquer solução dessa equação, $\operatorname{tg}x=\operatorname{sen}x$.

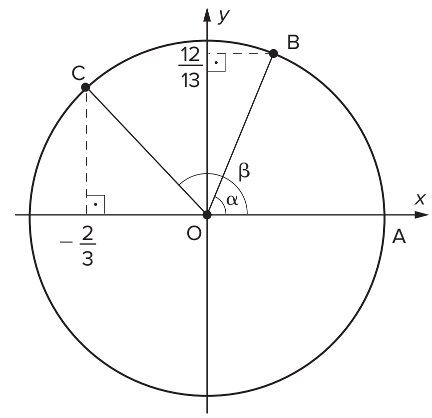
70. Udesc 2018 A soma de todas as raízes reais da função $f(x) = \operatorname{cotg}^2(x) - \dfrac{5}{4\operatorname{sen}^2(x)} + 2$ pertencentes ao intervalo $\left[\dfrac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ é igual a:

a) 4π
b) $\dfrac{53\pi}{6}$
c) 9π
d) $\dfrac{35\pi}{6}$
e) $\dfrac{73\pi}{6}$

71. Fuvest-SP 2013 Sejam α e β números reais com $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ e $0 < \beta < \pi$. Se o sistema de equações, dado em notação matricial, $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \operatorname{tg}\alpha \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$, for satisfeito, então $\alpha + \beta$ é igual a

a) $-\dfrac{\pi}{3}$
b) $-\dfrac{\pi}{6}$
c) 0
d) $\dfrac{\pi}{6}$
e) $\dfrac{\pi}{3}$

72. UFJF/Pism 2020 No ciclo trigonométrico dado a seguir, as medidas dos ângulos centrais AÔB e AÔC estão representadas por α e β, respectivamente.



Determine o valor de $\operatorname{tg}\alpha - \sec\beta$.

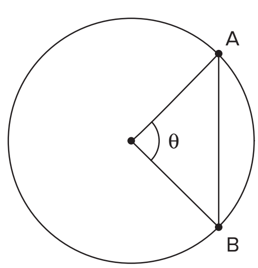
Texto complementar

Origens da Trigonometria

As primeiras noções de Trigonometria, segundo registros históricos, aparecem por volta do século V a.C. com a observação de sombras em diferentes horas do dia, épocas do ano e localizações no planeta.

Muito tempo se passou até que na Grécia antiga alguns matemáticos começaram a tentar relacionar o comprimento de cordas numa circunferência e os ângulos que elas determinam. A partir de tabelas construídas, foi possível calcular medidas em triângulos, auxiliando a Astronomia, a Agrimensura e as navegações.

A chamada "função corda", por exemplo, relaciona o comprimento de $\overline{AB}$ e o $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$:



Hipsícles (180 a.C.), Hiparco (150 a.C.), Menelau (100 d.C.) e Ptolomeu (150 d.C.) são alguns dos matemáticos gregos precursores da atual Trigonometria.

Hiparco, conhecido como "o pai da Trigonometria", criou a primeira tabela trigonométrica já registrada. Acredita-se também que a divisão do círculo em 360 partes e o nome "grau" tenham sido inicialmente pensados por ele.

Já Ptolomeu escreveu a mais importante obra de Trigonometria da Antiguidade, *Syntaxis Mathematica* (ou Almagesto). A Tábua de Cordas de Ptolomeu, que tabela valores de medidas angulares e os respectivos comprimentos das cordas associadas a elas, é mais completa que a de Hiparco, abrangendo ângulos de 0° a 180°, com variações de 0,5° entre eles.

Ptolomeu também foi quem primeiramente chegou às fórmulas do seno da soma de arcos, assim como o seno da diferença. A tábua de Ptolomeu, assim como suas fórmulas, foram utilizadas posteriormente por Nicolau Copérnico, já no século XV, para introduzir o modelo heliocêntrico na Astronomia.

Texto elaborado para fins didáticos.

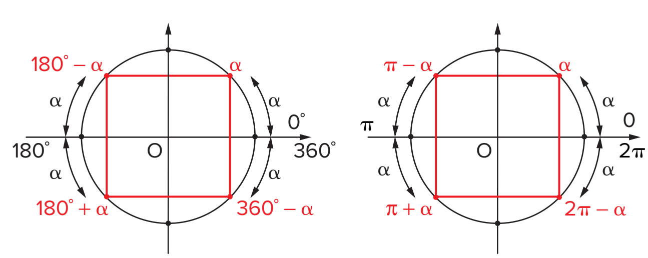
Resumindo

Unidades de ângulos

	Graus (°)	Radianos (rad)
1 volta	360	2π
$\dfrac{1}{2}$ **volta**	180	π
$\dfrac{1}{4}$ **de volta**	90	$\dfrac{\pi}{2}$

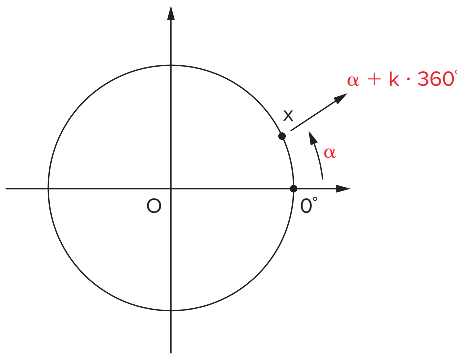
$$\alpha\,[\text{rad}] = \frac{\text{comprimento do arco}}{\text{comprimento do raio}}$$

Simetria (1ª volta)

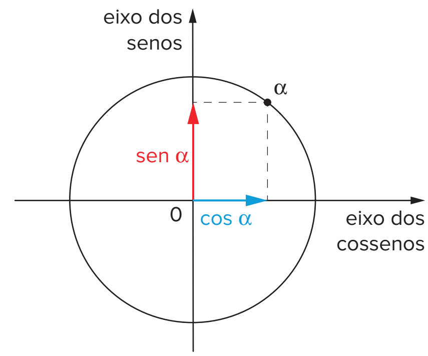


Expressão geral dos arcos

$$x = \alpha + k \cdot 360°, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$



Seno e cosseno



Relação fundamental

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos^2 \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha \end{cases}$$

Outras razões e relações trigonométricas

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} (\cos\alpha \neq 0) \quad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} (\cos\alpha \neq 0)$$

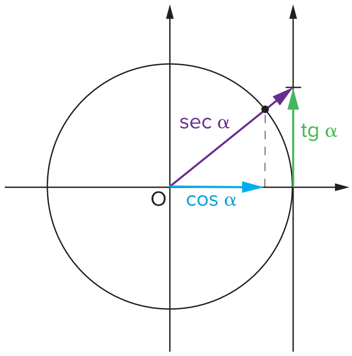
$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} (\operatorname{sen}\alpha \neq 0) \quad \operatorname{cossec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} (\operatorname{sen}\alpha = 0)$$

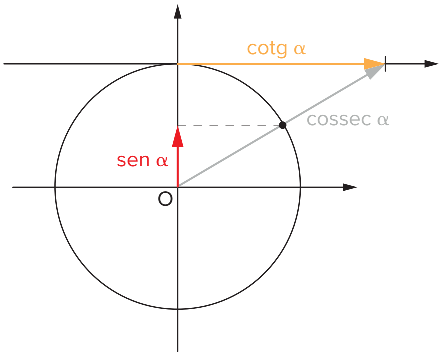
$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \qquad \operatorname{cossec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha$$

Ângulos complementares

$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \cos\beta \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta \\ \sec\alpha = \operatorname{cossec}\beta \end{cases}$$

Circunferência trigonométrica





Quer saber mais?

Site

Aplicações clássicas da Trigonometria. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/trigapl.html. Acesso em: 23 nov. 2021.

Nesse *site*, você conhecerá três exemplos de uso da Trigonometria em contextos variados, como Topografia e Geodésia.

Exercícios complementares

1. **UEL-PR 2013** Uma família viaja para Belém (PA) em seu automóvel. Em um dado instante, o GPS do veículo indica que ele se localiza nas seguintes coordenadas: latitude 21°20' Sul e longitude 48°30' Oeste. O motorista solicita a um dos passageiros que acesse a Internet em seu celular e obtenha o raio médio da Terra, que é de 6 730 km, e as coordenadas geográficas de Belém, que são latitude 1°20' Sul e longitude 48°30' Oeste. A partir desses dados, supondo que a superfície da Terra é esférica, o motorista calcula a distância D, do veículo a Belém, sobre o meridiano 48°30' Oeste.
Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor da distância D, em km.

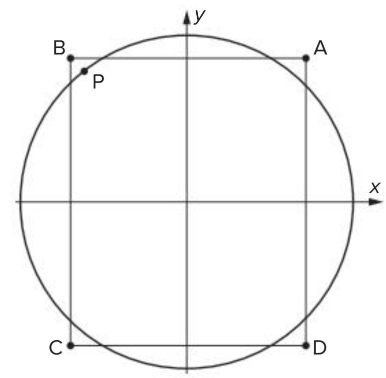
a) $D = \frac{\pi}{9}6730$
b) $D = \frac{\pi}{18}(6\,730)^2$
c) $D = \frac{\pi}{9}\sqrt{6730}$
d) $D = \frac{\pi}{36}6730$
e) $D = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 6730$

2. **UFG-GO 2013** As cidades de Goiânia e Curitiba têm, aproximadamente, a mesma longitude. Goiânia fica a uma latitude de 16°40', enquanto a latitude de Curitiba é de 25°25'. Considerando-se que a Terra seja aproximadamente esférica, com a linha do Equador medindo, aproximadamente, 40 000 km, a distância entre as duas cidades, em quilômetros, ao longo de um meridiano,
a) é menor que 700.
b) fica entre 700 e 800.
c) fica entre 800 e 900.
d) fica entre 900 e 1 000.
e) é maior que 1 000.

3. **EsPCEx-SP 2015** O valor de $(\cos 165° + \text{sen}\,155° + \cos 145° - \text{sen}\,25° + \cos 35° + \cos 15°)$ é
a) $\sqrt{2}$.
b) -1.
c) 0.
d) 1.
e) $\frac{1}{2}$.

4. **Insper-SP 2012** O professor de Matemática de Artur e Bia pediu aos alunos que colocassem suas calculadoras científicas no modo “radianos” e calculassem o valor de $\text{sen}\frac{\pi}{2}$. Tomando um valor aproximado, Artur digitou em sua calculadora o número 1,6 e, em seguida, calculou o seu seno, encontrando o valor A. Já Bia calculou o seno de 1,5, obtendo o valor B. Considerando que $\frac{\pi}{2}$ vale aproximadamente 1,5708, assinale a alternativa que traz a correta ordenação dos valores A, B e $\text{sen}\frac{\pi}{2}$.
a) $\text{sen}\frac{\pi}{2} < A < B$
b) $A < \text{sen}\frac{\pi}{2} < B$
c) $A < B < \text{sen}\frac{\pi}{2}$
d) $B < \text{sen}\frac{\pi}{2} < A$
e) $B < A < \text{sen}\frac{\pi}{2}$

5. **Insper-SP 2016** Na figura, em que está representada a circunferência trigonométrica, P é a extremidade de um arco trigonométrico da 1ª volta cuja medida, em radianos, é igual a α. Observe que P é um ponto do 2º quadrante localizado no interior do retângulo ABCD.



As coordenadas dos vértices do retângulo são dadas por:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Assim, é necessariamente verdadeira a desigualdade
a) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$
b) $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$
c) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$
d) $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi$
e) $\pi < \alpha < \frac{7\pi}{6}$

6. **Insper-SP 2014** Considere o produto abaixo, cujos fatores são os cossenos de todos os arcos trigonométricos cujas medidas, em graus, são números inteiros pertencentes ao intervalo [91, 269].

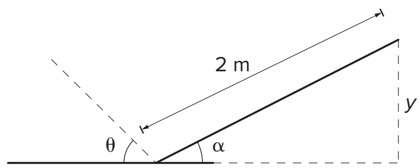
$P = \cos 91° \cdot \cos 92° \cdot \cos 93° \cdot ... \cdot \cos 268° \cdot \cos 269°$

Nessas condições, é correto afirmar que
a) $-1 < P < -\frac{1}{4}$.
b) $-\frac{1}{4} < P < 0$.
c) $P = 0$.
d) $0 < P < \frac{1}{4}$.
e) $\frac{1}{4} < P < 1$.

7. Ifal 2012 Considerando-se o arco trigonométrico $\alpha = \frac{23\pi}{3}$ rad, assinale a alternativa falsa.

a) $\alpha = 1\,380°$.
b) α dá três voltas e para no 4º quadrante.
c) $\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}60°$.
d) $\cos\alpha = \cos 60°$.
e) α dá três voltas e para no 1º quadrante.

8. Unifor-CE 2014 Uma cama de hospital, equipada com um ajustador hidráulico, move-se de acordo com um controle manual de subir e descer.



A altura y que a cama varia em função de θ é de:

a) $y = 2\operatorname{sen}\theta$
b) $y = 2\operatorname{sen}\theta + 2$
c) $y = \operatorname{tg}\theta + 2$
d) $y = 2\cos\theta$
e) $y = 2\cos\theta + 2$

9. Uece 2019 Considerando a progressão aritmética (x_n), cujo primeiro termo x_1 é igual a $\frac{\pi}{4}$ e a razão é igual a $\frac{\pi}{2}$, pode-se definir, para cada inteiro positivo n, a soma $S_n = \operatorname{sen}(x_1) + \operatorname{sen}(x_2) + \operatorname{sen}(x_3) + ... + \operatorname{sen}(x_n)$.
Nessas condições, S_{2019} é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
b) $\sqrt{2}$.
c) 0.
d) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

10. Uece 2018 O valor da soma $\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(x + \pi) + \operatorname{sen}(x + 2\pi) + \operatorname{sen}(x + 3\pi) + ... + \operatorname{sen}(x + n\pi)$, onde n é um número natural par e menor do que 100 é

a) $\operatorname{sen}(x)$.
b) $\cos(x)$.
c) 0.
d) 1.

11. EBMSP-BA 2018

Figura 1

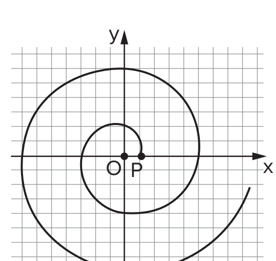


Figura 2

Furacões formam-se no mar e avançam sobre a costa em movimentos rotatórios, em forma de espiral, como ilustrado na figura 1. Uma espiral é uma curva plana que dá voltas em torno de um ponto fixo afastando-se ou aproximando-se, cada vez mais, desse ponto.
Cada ponto da espiral representada na figura 2 é resultante da rotação do ponto P, no sentido anti-horário, em torno do ponto fixo O, podendo ser identificado pelo par (r, θ), em que r é a medida de sua distância ao ponto fixo e θ é a medida do ângulo de rotação.
Sabe-se que a curva da figura 2

- é definida pela equação $r = a + b\theta$, sendo a e b constantes positivas e θ medido em radianos;
- passa pelo ponto Q, cuja distância ao ponto fixo é igual a 8,5 u.c.

Com base nessa informação e nos dados da figura, determine os valores de a e b e as coordenadas cartesianas de Q.

12. UEG-GO 2019 Resolvendo-se a equação $\operatorname{sen}2x = 1$, encontramos a 1ª determinação positiva de x igual a

a) $\frac{\pi}{2}$
b) $\frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi}{6}$
e) $\frac{\pi}{12}$

13. UEG-GO 2016 Sabendo-se que $\operatorname{sen}(x) = \frac{1}{2}$ e que x é um ângulo do 1º quadrante, o valor da expressão $\operatorname{sen}(4x) - \cos(4x)$ é

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
d) 2

14. FGV-SP No intervalo $[0, \pi]$, a equação $8^{\operatorname{sen}^2 x} = 4^{\operatorname{sen}x - \frac{1}{8}}$ admite o seguinte número de raízes:

a) 5
b) 4
c) 3
d) 2
e) 1

15. Uece 2017 O número de soluções da equação $|\operatorname{sen}(x)| = |\cos(x)|$ no intervalo fechado $[-2\pi, 2\pi]$ é igual a

a) 4.
b) 10.
c) 8.
d) 6.

16. Uece 2017 A soma dos elementos do conjunto formado por todas as soluções, no intervalo $[0, 2\pi]$, da equação $2\operatorname{sen}^4(x) - 3\operatorname{sen}^2(x) + 1 = 0$ é igual a

a) 3π.
b) 4π.
c) 5π.
d) 6π.

17. FGV-SP 2012 No intervalo $[0, 4\pi]$ a equação $\operatorname{sen}^3 x - 2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen}x + 6 = 0$ tem raízes cuja soma é:

a) 2
b) -2
c) 6
d) $\frac{\pi}{2}$
e) 3π

18. UFBA Sendo x a medida de um arco, em radianos, determine as soluções da equação

$$4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos x\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(x+7\pi)+$$
$$+\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{2}\right)=0$$ que pertencem ao intervalo $[-6, 8]$.

19. Unicamp-SP 2018 Seja x um número real tal que $\operatorname{sen} x+\cos x=0{,}2$. Logo, $|\operatorname{sen} x-\cos x|$ é igual a

a) 0,5. **b)** 0,8. **c)** 1,1. **d)** 1,4.

20. Determine o conjunto solução da equação do 2º grau $x^2-(\cos^2\theta)x-\operatorname{sen}^2\theta=0$, para $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

21. UFPE Quantas soluções a equação trigonométrica

$$\operatorname{sen} x=\sqrt{1-\cos x}$$

admite, no intervalo $[0, 80\pi]$?

22. UFPR 2018 Faça o que se pede.

a) Seja $\alpha\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha=0{,}6$, calcule $\cos\alpha$ e o determinante da matriz $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

b) Encontre todos os valores de $\theta\in\mathbb{R}$ para os quais a matriz $B=\begin{pmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0\\ 1 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$ tem determinante $\det(B)=1$.

23. UPF-RS 2015 A quantidade de soluções que a equação trigonométrica $\operatorname{sen}^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$ admite no intervalo $[0, 3\pi]$ é:

a) 0 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6 **e)** 8

24. UFTM-MG Dado um triângulo isósceles de lados congruentes medindo 20 cm, e o ângulo α formado por esses dois lados, tal que $4\operatorname{sen}\alpha=3\cos\alpha$, determine:

a) O valor numérico de $\operatorname{sen}\alpha$.
b) O perímetro desse triângulo.

25. Uece O número de soluções da equação $3\operatorname{sen}^2 x-3|\operatorname{sen} x|+\cos^2 x=0$ que estão no intervalo $[0, 2\pi]$ é

a) 2. **b)** 8. **c)** 4. **d)** 6.

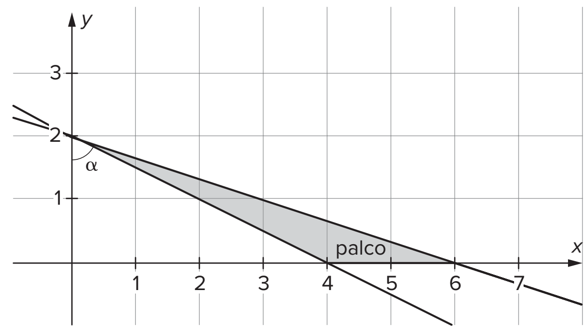
26. FGV-SP Resolvendo a equação $\log_2(\operatorname{sen} x)=$ $=\log_4(\cos x)$ no intervalo $0°<x<90°$ o valor de x é tal que:

a) $45°<x<60°$
b) $30°<x<45°$
c) $0°<x<30°$
d) $75°<x<90°$
e) $60°<x<75°$

27. Ufam Quando simplificamos a expressão $\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}+\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}$, vamos obter:

a) $2\sec x$
b) $2\operatorname{cossec} x$
c) $2\sec^2 x$
d) $2\cos x$
e) $\cos x$

28. Insper-SP 2016 A equipe que está preparando os efeitos de iluminação de um *show* a ser feito em um estádio precisa instalar um canhão de luz num ponto a 20 metros de altura em relação ao chão, no qual está posicionado um palco de 20 metros de comprimento onde o cantor irá se apresentar. Para definir o ângulo de movimentação do canhão de luz de modo que ele possa acompanhar o cantor por todo o palco, a equipe modelou o problema utilizando o plano cartesiano abaixo, no qual cada unidade equivale a 10 metros.



Se necessário, utilize os dados da tabela abaixo.

α	$\operatorname{tg}\alpha$ (valores aproximados)
126°	−1,4
135°	−1,0
144°	−0,7
153°	−0,5
162°	−0,3
171°	−0,2
180°	0,0

Para que o canhão de luz possa ser posicionado apontado para o cantor em sua movimentação ao longo de toda a plataforma, o valor aproximado do ângulo α, formado pelo canhão e pelo eixo y, deve estar sempre entre

a) 18° e 27°.
b) 27° e 36°.
c) 36° e 54°.
d) 54° e 63°.
e) 63° e 72°.

29. IFSC 2012 Se $\cos(x)=\frac{-12}{13}$, $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ e $x\in$ (3º quadrante), então é CORRETO afirmar que o valor de $\operatorname{tg}(x)$ é:

a) $-\frac{5}{13}$.
b) $-\frac{5}{12}$.
c) $\frac{5}{13}$.
d) $\frac{5}{12}$.
e) 0,334.

30. FEI-SP O valor de $\dfrac{3-\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} - 2\text{cotg}^2 x$, com $x \neq k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ é:

a) 3
b) 2
c) -3
d) -2
e) 1

31. Acafe-SC 2018 Se $x \in \left]\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ e $\text{sen}\,x + \cos x = 5^{-1}$, então o valor da expressão

$$\frac{75}{11} \cdot (\sec x + \text{cossec}\,x - \text{sen}\,x)$$

é:

a) $\dfrac{4}{5}$
b) $-\dfrac{3}{5}$
c) $\dfrac{5}{4}$
d) $\dfrac{11}{60}$

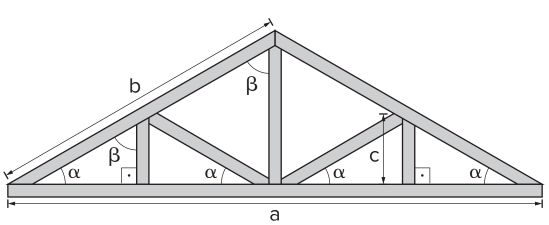
32. Fuvest-SP Se α está no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz $\text{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = \dfrac{1}{4}$, o valor de tangente de α é:

a) $\sqrt{\dfrac{3}{5}}$
b) $\sqrt{\dfrac{5}{3}}$
c) $\sqrt{\dfrac{3}{7}}$
d) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$
e) $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$

33. FGV-SP Se $\cos x + \sec(-x) = t$, então, $\cos^2 x + \sec^2 x$ é igual a:

a) 1
b) $t^2 + 2$
c) t^2
d) $t^2 - 2$
e) $t^2 + 1$

34. Unicamp-SP (Adapt.) Na execução da cobertura de uma casa, optou-se pela construção de uma estrutura, composta por barras de madeira, com o formato indicado na figura abaixo.



Desprezando a espessura das barras de madeira, e supondo que $\alpha = 15°$, podemos dizer que:

a) $b = a \cdot \cos(15°)$ e $c = \dfrac{a \cdot \text{sen}(15°)}{4}$.

b) $b = a \cdot \text{sen}(15°)$ e $c = \dfrac{a}{4\text{tg}(15°)}$.

c) $b = \dfrac{a}{2\cos(345°)}$ e $c = \dfrac{a \cdot \text{tg}(195°)}{4}$.

d) $b = \dfrac{a}{2\cos(345°)}$ e $c = \dfrac{a \cdot \text{sen}(165°)}{4}$.

35. Esc. Naval-RJ 2013 Sabendo que

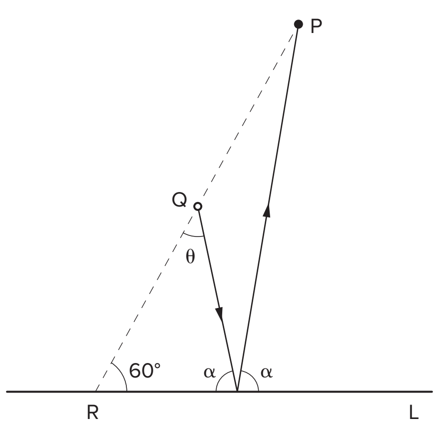
$b = \sec^3\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{12} + ...\right)$ então, o valor de $\log_2|b|$ é

a) 8
b) 4
c) 3
d) 1
e) 0

36. Unicamp-SP 2019 Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$.

a) Determine todos os valores de a e b para os quais $A^TA = AA^T$, em que A^T é a transposta da matriz A.
b) Para $a = b = 2$, sejam k e θ números reais tais que $A\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \end{bmatrix}$. Determine os possíveis valores de $\text{tg}\,\theta$.

37. Fuvest-SP 2014 Uma bola branca está posicionada no ponto Q de uma mesa de bilhar retangular, e uma bola vermelha, no ponto P, conforme a figura abaixo.



A reta determinada por P e Q intersecta o lado L da mesa no ponto R. Além disso, Q é o ponto médio do segmento $\overline{PR}$, e o ângulo agudo formado por $\overline{PR}$ e L mede 60°. A bola branca atinge a vermelha, após ser refletida pelo lado L. Sua trajetória, ao partir de Q, forma um ângulo agudo θ com o segmento PR e o mesmo ângulo agudo α com o lado L antes e depois da reflexão. Determine a tangente de α e o seno de θ.

38. UPF 2014 Entre as equações abaixo, assinale aquela que tem **uma única** solução em $]-\pi, \pi]$.

a) $\text{tg}\,\alpha = 1$
b) $\text{sen}\,\alpha = 0$
c) $\cos\alpha = -1$
d) $\text{tg}\,\alpha = 0$
e) $\cos\alpha = -2$

39. EPCar-MG 2019 Seja a equação trigonométrica

$$\mathrm{tg}^3 x - 2\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\,x + 2 = 0,$$

com $x \in \left([0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}\right)$.

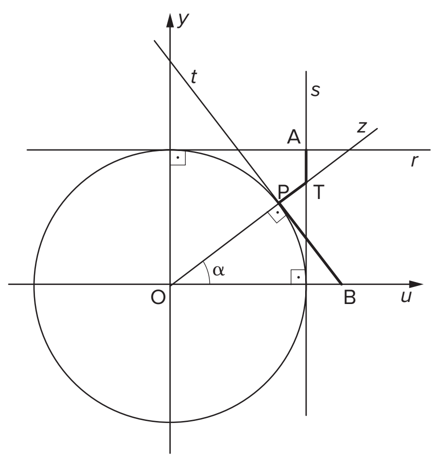
Sobre a quantidade de elementos distintos do conjunto solução dessa equação, é correto afirmar que são, exatamente,

a) três.
b) quatro.
c) cinco.
d) seis.

40. ITA-SP 2017 O número de soluções da equação $(1 + \sec\theta)(1 + \mathrm{cossec}\,\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

a) 0.
b) 1.
c) 2.
d) 3.
e) 4.

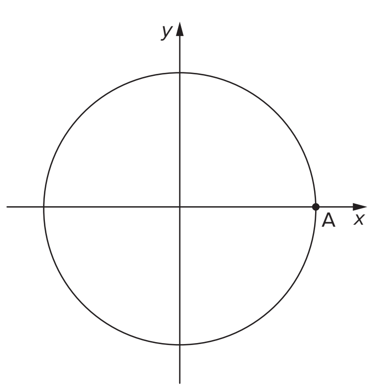
41. EPCar-MG 2014 No ciclo trigonométrico da figura abaixo acrescentou-se as retas r, s, t e z.



Nestas condições, a soma das medidas dos três segmentos em destaque, $\overline{AT}$, $\overline{TP}$ e $\overline{PB}$, pode ser calculado, como função de α, por

a) $\sec\alpha$
b) $\mathrm{cossec}\,\alpha$
c) $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{cotg}\,\alpha$
d) $\mathrm{cossec}\,\alpha + \sec\alpha$

42. EBMSP-BA 2017



O círculo, na figura, representa, no sistema de coordenadas cartesianas, uma pista onde uma pessoa P costuma correr, visando os benefícios à saúde que essa prática traz.

Um determinado dia, P parte do ponto representado por A(120, 0), de onde começa a correr no sentido anti-horário, mantendo uma velocidade de 4 metros por segundo.

Considerando-se $\pi = 3$, pode-se afirmar que após 32 minutos de corrida P estará no ponto de coordenadas x e y, tais que

a) $y = -\sqrt{3}x$
b) $y = -\sqrt{2}x$
c) $y = \sqrt{2}x$
d) $y = \sqrt{3}x$
e) $y = 2\sqrt{3}x$

43. UFSC 2017 Em relação às proposições abaixo, é correto afirmar que:

01 O menor ângulo formado pelos ponteiros do relógio às 3h25min é 47,5°.

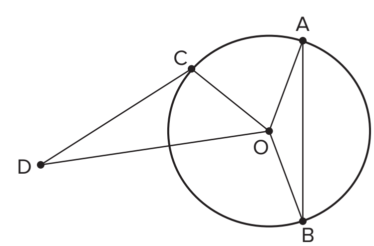
02 Dado qualquer número real $t \neq 0$, a função real de variável real definida por $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{t}\right)$ satisfaz à identidade $f(x + t) = f(x)$.

04 Se $x \neq \frac{k\pi}{2}$, sendo k um número inteiro, então $\sec^2 x + \mathrm{cossec}^2 x = \sec^2 x \cdot \mathrm{cossec}^2 x$.

08 A equação $\sec x = \sqrt{2}$ apresenta duas soluções no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 4\pi$.

Soma:

44. Efomm-RJ 2016 Determine o comprimento do menor arco $\overset{\frown}{AB}$ na circunferência de centro O, representada na figura a seguir, sabendo que o segmento $\overline{OD}$ mede 12 cm, os ângulos $C\hat{O}D = 30°$ e $O\hat{A}B = 15°$ e que a área do triângulo CDO é igual a 18 cm^2.



a) 5π cm
b) 12 cm
c) 5 cm
d) 12π cm
e) 10π cm

45. Uece 2014 Usando a expressão clássica do desenvolvimento da potência $(a + b)^n$, onde a e b são números reais e n é um número natural, pode-se resolver facilmente a equação $\mathrm{sen}^4 x - 4\mathrm{sen}^3 x + 6\mathrm{sen}^2 x - 4\mathrm{sen}\,x + 1 = 0$. Então, para os valores de x encontrados, teremos que $\cos x$ é igual a

a) 1.
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
d) 0.

46. UFBA Dadas as funções reais

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{sen}\,x, & 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \\ 1 + \cos x, & \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right), & -\dfrac{\pi}{2} \le x < 0 \\ 1 + f\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right), & 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases},$$

determine x, pertencente ao intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, tal que $\left[f(x)\right]^2 + g(x) - \dfrac{7}{4} = 0$.

47. UFSCar-SP O conjunto solução da equação

$$\text{sen}\left(\frac{8\pi}{9} + \frac{8\pi}{27} + \frac{8\pi}{81}...\right) = \cos x,$$

com $x \in [0, 2\pi[$, é

a) $\left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

b) $\left\{\dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$.

c) $\left\{\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}$.

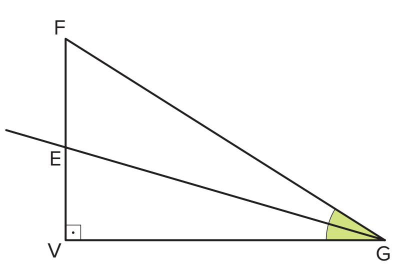
d) $\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

e) $\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

48. Quando resolvida no intervalo $[0, 2\pi]$, o número de quadrantes nos quais a equação $4\text{sen}^2 x = 3$ apresenta soluções é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

49. FGV-SP 2021 A figura indica o triângulo FGV, com ângulo reto em V e medida do ângulo $F\hat{G}V$, em graus, igual a 2α. A bissetriz do ângulo $F\hat{G}V$ intersecta $\overline{FV}$ em E.



Sabendo-se que GE = 6 cm e FE = 3 cm, a medida de $\overline{FG}$, em cm, é igual a

a) $3\sqrt{5 - 4\cos\alpha}$

b) $\sqrt{9 - 6\cos\alpha}$

c) $\sqrt{9 - 6\cos(90° + \alpha)}$

d) $3\sqrt{5 + 4\cos(90° + \alpha)}$

e) $3\sqrt{5 - 4\cos(90° + \alpha)}$

50. O valor entre 0 e 2π radianos tal que

$$\begin{cases} \text{sen}\, x - \dfrac{1}{2} = 0 \\ \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases}$$

é:

a) $\dfrac{\pi}{6}$

b) $\dfrac{5\pi}{6}$

c) $\dfrac{7\pi}{6}$

d) $\dfrac{11\pi}{6}$

51. IME-RJ 2019 Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, ..., \theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \dfrac{\pi}{4}$. O valor de $\text{sen}\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right)$ é:

a) -1

b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

52. Acafe-SC 2019 Analise as afirmações a seguir.

I. Considere o feixe de retas paralelas r: $3x - 4y + c = 0$ e a circunferência $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 9 = 0$. Se r é secante à circunferência, então $c \in (a, b)$ e $a + b = -36$.

II. Se $\text{tg}\,\theta = 2$ e $\theta \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, então $\text{cossec}\,\theta - \sec\theta$ é um número irracional.

III. Se a e b são números reais positivos e diferentes de 1, então $\log_a(a \cdot b) - \log_{\frac{1}{a}}\left(\dfrac{1}{b}\right) = -1$.

Assinale a alternativa **correta**.

a) Apenas as afirmativas II e III estão corretas.

b) Apenas a afirmativa II está correta.

c) Apenas as afirmativas I e II estão corretas.

d) Apenas as afirmativas I e III estão corretas.

53. IME-RJ 2017 Calcule o valor de $\dfrac{\text{sen}^4\,\alpha + \cos^4\,\alpha}{\text{sen}^6\,\alpha + \cos^6\,\alpha}$, sabendo-se que $\text{sen}\,\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1}{5}$.

a) $\dfrac{22}{21}$

b) $\dfrac{26}{25}$

c) $\dfrac{25}{23}$

d) $\dfrac{13}{12}$

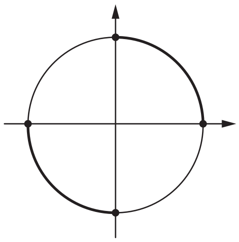
e) $\dfrac{26}{25}$

54. EPCar-MG 2019 Considere as matrizes

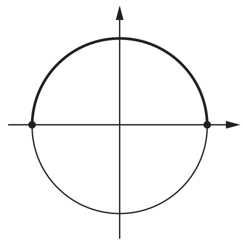
$$A = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & -1 \\ -1 & \operatorname{sen} x \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} x \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Se o determinante do produto matricial AB é um número real positivo ou nulo, então os valores de x, no ciclo trigonométrico, que satisfazem essa condição estão representados em

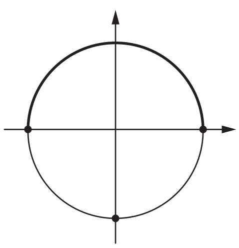
a)



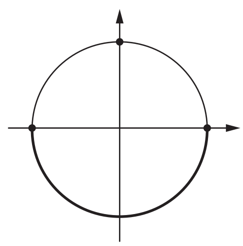
c)



b)



d)



55. Unirio-RJ Ao ser indagado sobre o valor de $\operatorname{sen} 45°$, um estudante pensou assim:

$$45° = \frac{30° + 60°}{2} \qquad \operatorname{sen} 45° = \frac{\operatorname{sen} 30° + \operatorname{sen} 60°}{2}$$

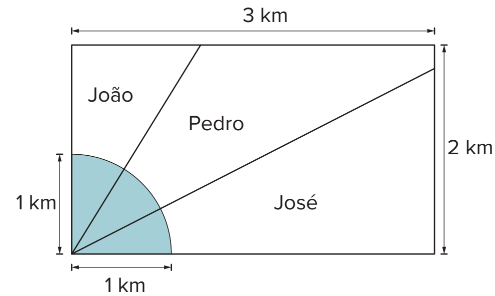
Continuando esse raciocínio, o estudante encontrou como resposta:

a) um valor menor que o correto, diferente da metade do correto.
b) o valor correto.
c) a metade do valor correto.
d) o dobro do valor correto.
e) um valor maior que o correto, diferente do dobro do correto.

56. UFSCar-SP O valor de x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, tal que $4(1 - \operatorname{sen}^2 x)(\sec^2 x - 1) = 3$ é

a) $\frac{\pi}{2}$.
b) $\frac{\pi}{3}$.
c) $\frac{\pi}{4}$.
d) $\frac{\pi}{6}$.
e) 0.

57. Enem Ao morrer, o pai de João, Pedro e José deixou como herança um terreno retangular de 3 km × 2 km que contém uma área de extração de ouro delimitada por um quarto de círculo de raio 1 km a partir do canto inferior esquerdo da propriedade. Dado o maior valor da área de extração de ouro, os irmãos acordaram em repartir a propriedade de modo que cada um ficasse com a terça parte da área de extração, conforme mostra a figura.



Em relação à partilha proposta, constata-se que a porcentagem da área do terreno que coube a João corresponde, aproximadamente, a

Considere: $\frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$

a) 50%.
b) 43%.
c) 37%.
d) 33%.
e) 19%.

58. ITA-SP 2015 Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2\operatorname{sen} x - \cos x = 1$ são

a) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e π.
b) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e π.
c) $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π.
d) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π.
e) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e π.

59. ITA-SP 2015 Sejam α e β números reais tais que α, β, $\alpha + \beta \in]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \cos^2 \frac{\beta}{3} = \frac{4}{7}\cos^4 \frac{\beta}{3} + \frac{3}{7}.$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é igual a

a) -1.
b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
d) $-\frac{1}{2}$.
e) 0.

60. ITA-SP 2013 Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x + 4\operatorname{sen}^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;
II. Se $a = \frac{1}{2}$, então $n = 8$;
III. Se $a = 1$, então $n = 7$;
IV. Se $a = 3$, então $n = 2$;

é (são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas III.
c) apenas I e III.
d) apenas II e IV.
e) todas.

61. IME-RJ 2012 Os ângulos de um triângulo obtusângulo são 105°, α e β. Sabendo que $m \in \mathbb{R}$ (real), determine:

a) as raízes da equação
$3\sec x + m\left(\sqrt{3}\cos x - 3\operatorname{sen} x\right) = 3\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x$
em função de m;
b) o valor de m para que α e β sejam raízes dessa equação.

62. UFSC 2019 É correto afirmar que:

01 A igualdade $\mathrm{tg}^3 x = \mathrm{tg}\,x \cdot \sec^2 x - \mathrm{tg}\,x$ é válida para todo $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$.

02 Um supermercado anuncia certo tipo de queijo em duas opções de preço. Na primeira, o pacote de 150 g custa R$ 3,00, enquanto que na segunda opção o pacote de 400 g custa R$ 7,20. Nessas condições, a segunda opção é mais vantajosa para o cliente.

04 Em maio de 2018, os jornais noticiaram uma forte manifestação dos caminhoneiros em todo o Brasil. Dias antes do início do movimento, os postos de combustíveis A e B vendiam o litro de gasolina a R$ 3,70 e R$ 4,00, respectivamente. Alguns dias depois do término da manifestação, esses preços alcançaram os valores, na devida ordem, de R$ 4,43 e R$ 4,80. Admitindo que o PROCON (Programa de Proteção e Defesa do Consumidor) considere que aumentos acima de 20% são abusivos, então os dois postos cometeram práticas abusivas.

08 O valor numérico da expressão $\dfrac{a^2 - b^2}{\dfrac{a^2}{2} + ab + \dfrac{b^2}{2}}$ para $a = 5\,184$ e $b = 3\,888$ é $\dfrac{1}{14}$.

Soma:

63. Em um triângulo isósceles KLM, com KL = KM = 4, o ângulo do vértice mede a metade dos ângulos da base. Se $\mathrm{sen}\,36° = \sqrt{1 - k^2}$, então a medida de $\overline{LM}$ em função de k é igual a

a) $16\sqrt{1 - k}$

b) $4\sqrt{2(1 + k)}$

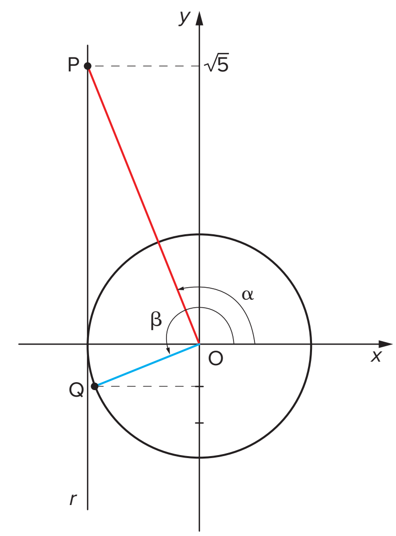
c) $2\sqrt{2(1 - k)}$

d) $4\sqrt{1 - k}$

e) $4\sqrt{2(1 - k)}$

64. UPF-RS 2018 Na figura a seguir, estão representados o círculo trigonométrico e a reta r. Nela, observa-se que:

- A equação da reta r é $x = -1$.
- α é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e como lado final o segmento $\overline{OP}$.
- β é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e como lado final o segmento $\overline{OQ}$.
- O ponto P pertence à reta r e a sua ordenada é $\sqrt{5}$.
- O ponto Q pertence ao círculo trigonométrico e a sua ordenada é $-\dfrac{1}{3}$.



O valor de $\mathrm{tg}(-\alpha) + \cos\beta$ é

a) $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

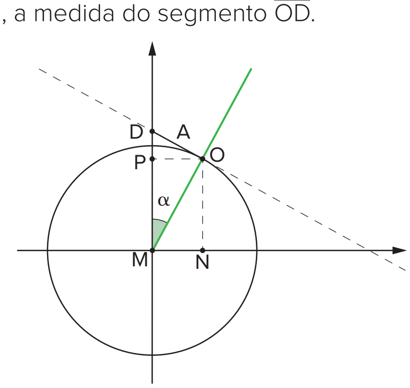
b) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \sqrt{5}$

c) $\dfrac{3\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{5} + 2\sqrt{2}}{3}$

65. UEL-PR 2015 Considere, na figura a seguir, uma circunferência trigonométrica de 1 cm de raio, na qual se exibe um ângulo α e uma medida A = OD em que OD é a distância em cm do ponto O até o ponto D, ou, ainda, a medida do segmento $\overline{OD}$.



Sabe-se que a reta que contém o segmento $\overline{OD}$ tangencia a circunferência no ponto O.

Com base nas informações apresentadas na figura, determine as medidas dos segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{MP}$ em função da medida A. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados.

66. UFRN A equação $(\mathrm{sen}\,x)^2 - 5(\mathrm{sen}\,x) + 6 = 0$

a) admite mais de duas raízes.

b) admite exatamente duas raízes.

c) admite uma única raiz.

d) não admite raízes.

67. IME-RJ 2022 Sabendo-se que

$\dfrac{\mathrm{sen}^4\alpha}{a} + \dfrac{\cos^4\alpha}{b} = \dfrac{1}{a + b}$ com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $a + b \neq 0$,

determine $\dfrac{\mathrm{sen}^8\alpha}{a^3} + \dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}$ em função de a e b somente.

68. ITA-SP Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a

a) $\frac{23}{11}\pi$.
b) $\frac{13}{6}\pi$.
c) $\frac{24}{11}\pi$.
d) $\frac{25}{11}\pi$.
e) $\frac{7}{3}\pi$.

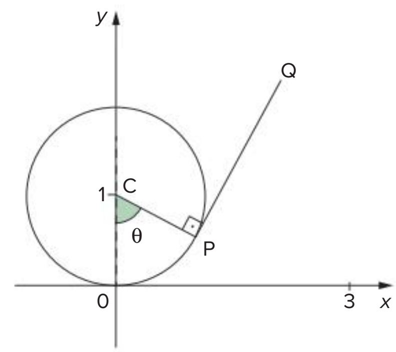
69. ITA-SP Assinale a opção que indica a soma dos elementos de A ∪ B, sendo:

$$A = \left\{ x_k = \text{sen}^2\left(\frac{k^2\pi}{24}\right) : k = 1, 2 \right\} \text{ e}$$

$$B = \left\{ y_k + \text{sen}^2\left(\frac{(3k+5)\pi}{24}\right) : k = 1, 2 \right\}.$$

a) 0
b) 1
c) 2
d) $\frac{\left(2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)}{3}$
e) $\frac{\left(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)}{3}$

70. Fuvest-SP 2017 (Adapt.) O centro de um disco de raio 1 é colocado no ponto C(0, 1) do plano cartesiano Oxy. Uma das extremidades de um fio de espessura desprezível e comprimento 3 é fixada na origem O e a outra extremidade está inicialmente no ponto (3, 0). Mantendo o fio sempre esticado e com mesmo comprimento, enrola-se, no sentido anti-horário, parte dele em torno do disco, de modo que a parte enrolada do fio seja um arco $\overset{\frown}{OP}$ da circunferência que delimita o disco. A medida do ângulo $O\hat{C}P$, em radianos, é denotada por θ. A parte não enrolada do fio é um segmento retilíneo $\overline{PQ}$ que tangencia o disco no ponto P.
A figura ilustra a situação descrita.



a) Determine as coordenadas do ponto Q quando o segmento $\overline{PQ}$ for paralelo ao eixo *y*.
b) Determine as coordenadas do ponto Q quando o segmento $\overline{PQ}$ for paralelo à reta de equação $y = x$.

71. ITA-SP Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77}\,\text{sen}\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap]-\infty, 0[$ e n é o menor elemento de $B \cap]0, +\infty[$, então $m + n$ é igual a

a) $\frac{2\pi}{15}$ b) $\frac{\pi}{15}$ c) $-\frac{\pi}{30}$ d) $-\frac{\pi}{15}$ e) $-\frac{2\pi}{15}$

72. ITA-SP O conjunto de todos os valores de α, $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tais que as soluções da equação (em x) $x^4 - \sqrt[4]{48}x^2 + \text{tg}\,\alpha = 0$ são todas reais, é

a) $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$
b) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
c) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$
d) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
e) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$

BNCC em foco

EM13MAT306

1. Um *drone* circunda uma área dando uma volta de 800°. Se uma pessoa só acompanhou a posição inicial e a final do *drone*, pode pensar que ele se deslocou apenas:
   a) 30°
   b) 50°
   c) 80°
   d) 90°

EM13MAT306

2. Um aluno, ao fazer um determinado exercício, concluiu que $\text{sen}\,\theta = \frac{1}{3}$ e $\cos\theta = \frac{1}{4}$. O que podemos afirmar em relação aos resultados do aluno?

EM13MAT306

3. Sendo $\text{cotg}\,x = -3$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine os valores de sen x e cos x.

ChiccoDodiFC/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

4

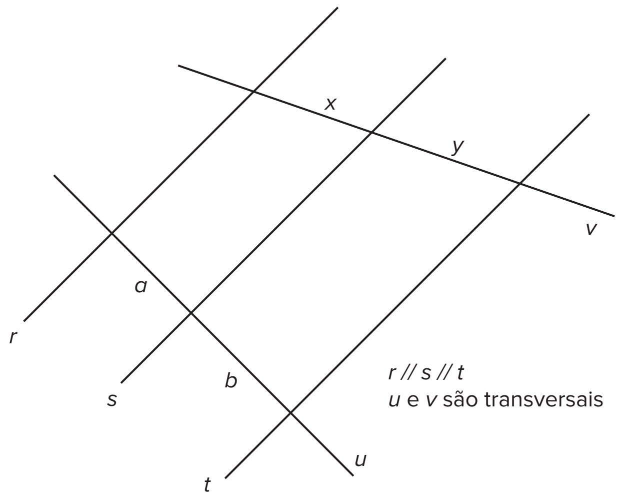
Análise de grandezas proporcionais

Quando são comparadas entre si duas quantidades da mesma espécie ou de espécies diferentes, o quociente que mostra a relação entre elas estabelece uma proporcionalidade.

Palavras específicas como “dobro”, “triplo”, “metade”, “terço”, e expressões do tipo “o quíntuplo de” ou “a quinta parte de”, “de dois para um”, “de três para dois” ou, genericamente, “de *a* para *b*”, informam proporções entre duas grandezas quaisquer.

Grandezas proporcionais

O princípio da proporcionalidade está entre os primeiros teoremas da Geometria euclidiana tradicional, enunciado no século VII a.C. pelo matemático Tales de Mileto. Seu mais famoso teorema diz que *"se um feixe de retas paralelas for cortado por duas transversais r e s, então os segmentos determinados em r terão comprimentos diretamente proporcionais aos dos segmentos determinados em s pelas mesmas retas paralelas"*.



$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

Mas foi provavelmente na época da escola pitagórica que foram identificadas as relações de proporcionalidade entre diferentes grandezas, físicas, químicas e geométricas.

Uma história relata que Pitágoras passava em frente a uma oficina de ferreiros e parou para prestar atenção aos sons percutidos pelos martelos batendo nas bigornas, tentando identificar as notas musicais produzidas. Depois selecionou alguns dos martelos e mediu a massa de cada um, percebendo que as notas produzidas por um par de martelos soavam harmônicas quando as razões entre as massas dos martelos eram expressas por frações como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$, por exemplo. Já quando essas frações eram expressas de forma irredutível por termos maiores, como $\frac{22}{7}$ ou $\frac{355}{113}$, as notas produzidas pelos martelos soavam desarmônicas. Pitágoras já sabia que isso ocorria com os comprimentos de cordas de mesma espessura esticadas sob uma mesma tensão, de modo que a relação de proporcionalidade entre as massas de martelos de ferro e comprimentos de cordas esticadas estabeleceu os princípios da teoria musical ocidental (século VI a.C.).

Alguns séculos depois, o astrônomo Eudoxo de Cnido estabeleceu grande parte dos processos aritméticos que usamos até hoje para o tratamento de valores numéricos proporcionais entre si, como a regra de três simples (século III a.C.).

Revisando razões e proporções

No estudo da Álgebra, toda relação de igualdade entre duas razões é denominada proporção.

Sentenças do tipo $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, com b e d não nulos, são proporções que podem ser lidas como "a está para b assim como c está para d". A principal propriedade de uma proporção é a do produto cruzado:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Um importante problema aritmético que deve ser dominado pelo estudante é encontrar a quarta proporcional a partir de três números. Isso consiste em determinar o valor de x na expressão $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, tendo os valores de a, b e c.

O processo de resolução desse problema é conhecido como regra de três:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$
$$a \cdot x = b \cdot c$$
$$x = \frac{b \cdot c}{a}$$

Proporções podem ser simplificadas dividindo-se ambos os numeradores ou ambos os denominadores das frações que a compõem por um mesmo número real não nulo.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, n \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a : n}{b} = \frac{c : n}{d}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, n \neq 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b : n} = \frac{c}{d : n}$$

Por exemplo, dividindo por 13 os numeradores da proporção $\frac{52}{15} = \frac{65}{x}$ obtém-se a proporção $\frac{4}{15} = \frac{5}{x}$, que é mais simples para se encaminhar o restante da resolução.

Veja também que na proporção $\frac{5}{72} = \frac{7}{8x}$ ambos os denominadores podem ser divididos por 8, obtendo-se a proporção $\frac{5}{9} = \frac{7}{x}$.

Outras propriedades das proporções

No processo de resolução de uma equação expressa pela igualdade de duas frações, os numeradores dessas frações podem ser somados aos seus denominadores, obtendo-se uma equação equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a + b} = \frac{c}{c + d}$$

Analogamente, os denominadores das frações podem ser somados aos seus numeradores, obtendo-se outra equação equivalente:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

Além disso, somando-se ambos os numeradores e ambos os denominadores das frações de uma proporção, obtém-se uma fração equivalente às originais:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Proporção direta

Dizemos que duas grandezas são **diretamente proporcionais** entre si quando há entre elas uma relação do tipo quociente constante, o que significa que, quando os valores de uma delas são divididos pelos valores correspondentes da outra, obtêm-se sempre o mesmo resultado. Esse resultado constante pode ser uma razão simples ou composta.

Sendo x e y duas grandezas diretamente proporcionais, então deve existir um número real não nulo k satisfazendo a relação:

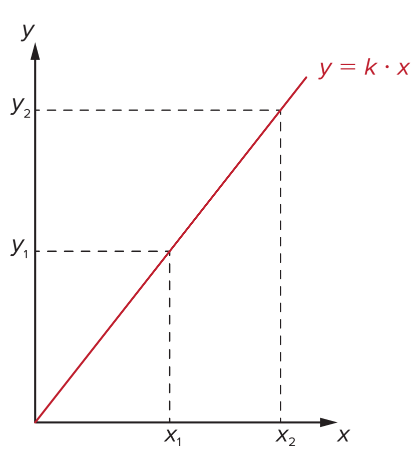
$$\frac{y}{x} = k$$

Essa mesma relação pode ser expressa como função $y = f(x)$ por:

$$y = k \cdot x$$

Relações expressas dessa forma são denominadas funções lineares, sendo o coeficiente real k denominado constante de proporcionalidade.

A representação gráfica de uma função linear, em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, tem a forma de uma reta que passa pela origem do sistema, mas, no caso de as grandezas x e y serem estritamente positivas, os gráficos assumem formas de semirretas, contidas no primeiro quadrante, com extremidade na origem do sistema cartesiano.



De gráficos como esse é correto assumir que:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

Exercício resolvido

1. A reta que representa o gráfico da função $y = f(x)$ passa pelos pontos (0, 0) e (50, 40); determine o valor de x quando $y = 20$.

Resolução:

Como a reta passa pela origem do sistema cartesiano, podemos concluir que as grandezas x e y são diretamente proporcionais.

Assim: $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Rightarrow \frac{40}{50} = \frac{20}{x}$.

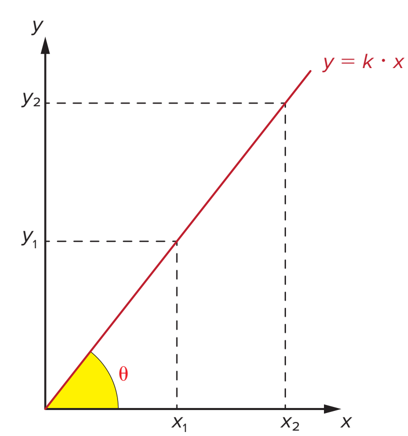
A proporção pode ser simplificada, dividindo por 20 ambos os numeradores das frações, obtendo:

$$\frac{40}{50} = \frac{20}{x} \Rightarrow \frac{2}{50} = \frac{1}{x}$$

Agora, do produto cruzado, $2x = 50 \Rightarrow x = 25$.

Saiba mais

Se as grandezas x e y forem realmente comprimentos e ambos os eixos estiverem na mesma escala de comprimentos, então pode-se afirmar que a constante de proporcionalidade é equivalente à tangente do ângulo de inclinação da reta que representa o gráfico da função, em relação ao eixo das abscissas.



$$k = \text{tg}\,(\theta)$$

Também existem certas variações da estrutura de proporcionalidade em que uma grandeza y é diretamente proporcional a uma determinada função da grandeza x, e não à grandeza x em si. Em alguns desses casos, o gráfico da relação não será uma reta ou semirreta.

Exemplos:

- Dizemos que a grandeza y é diretamente proporcional ao **quadrado** da grandeza x quando existir um número real não nulo k tal que:

$$y = k \cdot x^2$$

FRENTE 2

- Dizemos que a grandeza y é diretamente proporcional ao **logaritmo decimal** da grandeza x quando existir um número real não nulo k tal que:

$$y = k \cdot \log(x)$$

- Dizemos que a grandeza y é diretamente proporcional ao **inverso** da grandeza x quando existir um número real não nulo k tal que:

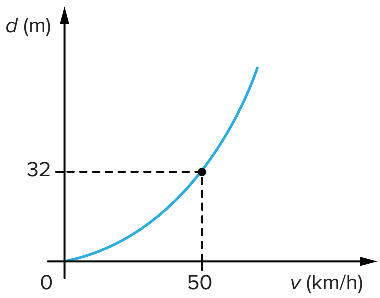
$$y = k \cdot \frac{1}{x}$$

Nesse último caso, também se pode dizer que as grandezas x e y são inversamente proporcionais.

Exercício resolvido

2. Uerj 2012 Distância de frenagem é aquela percorrida por um carro do instante em que seu freio é acionado até o momento em que ele para. Essa distância é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade que o carro está desenvolvendo no instante em que o freio é acionado.

O gráfico abaixo indica a distância de frenagem d, em metros, percorrida por um carro, em função de sua velocidade v, em quilômetros por hora.



Admita que o freio desse carro seja acionado quando ele alcançar a velocidade de 100 km/h. Calcule sua distância de frenagem, em metros.

Resolução:

Conforme o enunciado, temos $d = k \cdot v^2$. Assim, de acordo com o gráfico, $32 = k \cdot 50^2 \Rightarrow k = \frac{32}{2500} = 0{,}0128$.

Então, para uma velocidade de 100 km/h, a distância de frenagem, em metros, será de:

$$d = 0{,}0128 \cdot 100^2 = 0{,}0128 \cdot 10\,000 = 128$$

Proporção inversa

Dizemos que duas grandezas são **inversamente proporcionais** entre si quando há entre elas uma relação do tipo produto constante. Isso significa que, quando os valores de uma delas são multiplicados pelos valores correspondentes da outra, obtém-se o mesmo resultado sempre.

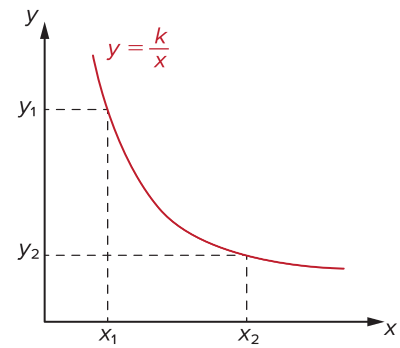
Sendo x e y duas grandezas inversamente proporcionais, então deve existir um número real não nulo k satisfazendo a seguinte relação:

$$x \cdot y = k$$

Essa mesma relação pode ser expressa como uma função $y = f(x)$ por:

$$y = \frac{k}{x}$$

Relações expressas dessa forma são funções cujos gráficos são representados por arcos de hipérboles equiláteras cujas retas assíntotas são os próprios eixos coordenados.



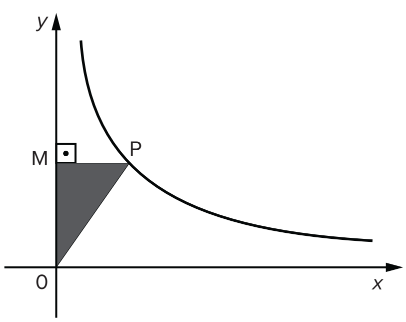
De gráficos como esse é correto assumir que:

$$\boxed{x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2}$$

Exercício resolvido

3. Mackenzie-SP 2012 Na figura, P é um ponto do gráfico da função $y = f(x)$, com x e y inversamente proporcionais.

Se (3, 90) é um outro ponto da curva, então a área do triângulo OMP é



a) 135
b) 90
c) 180
d) 45
e) 270

Resolução:

Como x e y são inversamente proporcionais, temos que $x_P \cdot y_P = 3 \cdot 90 = 270$.

Portanto, a área A do triângulo OMP é:

$$A = \frac{270}{2} = 135$$

Portanto, A = 135 u.a.

Alternativa: A.

Divisão em partes proporcionais

Todo valor numérico pode ser repartido em parcelas de formas diferentes. É possível dividir quantias em partes iguais ou proporcionais de acordo com o que se deseja. Mas, qualquer que seja o tipo de divisão, é necessário que a soma das partes resulte sempre no valor dividido.

Assim, se um valor V for dividido em duas partes x e y, teremos que:

$$x + y = V$$

Se for dividido em três partes x, y e z, então teremos que:

$$x + y + z = V$$

De forma genérica, se o valor V for dividido em n partes $x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n$, então teremos que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + ... + x_n = V$$

Divisão em partes diretamente proporcionais

Para dividir um número N em duas partes x e y, diretamente proporcionais aos números a e b, é necessário resolver o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x + y = N \\ \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} \end{cases}$.

Apresentamos duas maneiras de se resolver um sistema como esse. Uma delas consiste em usar a constante de proporcionalidade k e expressar x e y em função de a e b. Assim, da segunda equação, vem:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = k \Rightarrow \begin{cases} x = a \cdot k \\ y = b \cdot k \end{cases}$$

Substituindo essas expressões na primeira equação do sistema, tem-se:

$$\begin{aligned} x + y &= N \\ ak + bk &= N \\ (a + b)k &= N \\ k &= \frac{N}{a + b} \end{aligned}$$

Assim, tem-se que:

$$x = \frac{a \cdot N}{a + b} \quad \text{e} \quad y = \frac{b \cdot N}{a + b}$$

Outra maneira de resolver esse sistema é usando a propriedade das proporções, que permite somar os numeradores e os denominadores das frações que compõem a proporção, obtendo uma nova fração equivalente às originais. Assim:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x + y}{a + b}$$

Então, como $x + y = N$, tem-se:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{N}{a + b} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a \cdot N}{a + b} \\ y = \dfrac{b \cdot N}{a + b} \end{cases}$$

Para dividir um número N em três partes x, y e z diretamente proporcionais aos números a, b e c, é necessário resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y + z = N \\ \dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \end{cases}$$

Aplicando o primeiro método apresentado:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow \begin{cases} x = a \cdot k \\ y = b \cdot k \\ z = c \cdot k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x + y + z &= N \\ a \cdot k + b \cdot k + c \cdot k &= N \\ (a + b + c) \cdot k &= N \end{aligned}$$

$$k = \frac{N}{a + b + c}$$

Logo:

$$x = \frac{a \cdot N}{a + b + c} \qquad y = \frac{b \cdot N}{a + b + c} \qquad z = \frac{c \cdot N}{a + b + c}$$

Exercício resolvido

4. Três amigos, Artur, Bruno e Cláudio, fizeram um jogo de R$ 60,00 na loteria esportiva e ganharam um prêmio de R$ 126 000,00. Como Artur contribuiu com apenas R$ 15,00 e Bruno com R$ 25,00, eles decidiram repartir o prêmio em partes diretamente proporcionais aos valores gastos na aposta. Quanto deverá receber cada um?

Resolução:

Os valores pagos pelos amigos foram:

Artur: R$ 15,00
Bruno: R$ 25,00
Cláudio: R$ 60,00 – R$ 15,00 – R$ 25,00 = R$ 20,00

Os valores são diretamente proporcionais aos números 3, 5 e 4. Então podemos usar esses 3 números para resolver o problema. Sendo A, B e C as parcelas, em reais, do prêmio que cada um deve receber, existe uma constante de proporcionalidade k tal que:

$$\frac{A}{3} = \frac{B}{5} = \frac{C}{4} = k \qquad \text{(I)}$$

Além disso, a soma dos valores recebidos pelos amigos deve ser igual ao valor total do prêmio:

$$A + B + C = \text{R\$ } 126\,000{,}00 \qquad \text{(II)}$$

Da equação (I), temos: $\begin{cases} A = 3 \cdot k \\ B = 5 \cdot k \\ C = 4 \cdot k \end{cases}$.

Substituindo essas expressões na equação (II), obtemos:

$$\begin{aligned} 3 \cdot k + 5 \cdot k + 4 \cdot k &= \text{R\$ } 126\,000{,}00 \\ 12 \cdot k &= \text{R\$ } 126\,000{,}00 \\ k &= \frac{\text{R\$ } 126\,000{,}00}{12} \\ k &= \text{R\$ } 10\,500{,}00 \end{aligned}$$

Portanto: $\begin{cases} A = 3 \cdot \text{R\$ } 10\,500{,}00 = \text{R\$ } 31\,500{,}00 \\ B = 5 \cdot \text{R\$ } 10\,500{,}00 = \text{R\$ } 52\,500{,}00 \\ C = 4 \cdot \text{R\$ } 10\,500{,}00 = \text{R\$ } 42\,000{,}00 \end{cases}$.

Divisão em partes inversamente proporcionais

Para dividir um número N em duas partes x e y inversamente proporcionais aos números a e b, é necessário resolver o seguinte sistema de equações: $\begin{cases} x + y = \text{N} \\ a \cdot x = b \cdot y \end{cases}$.

Usando a constante de proporcionalidade k, podemos expressar x e y em função de a e b. Para isso, da segunda equação, vem: $ax = by = k \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k}{a} \\ y = \dfrac{k}{b} \end{cases}$.

Substituindo essas expressões na primeira equação do sistema, tem-se:

$$x + y = \text{N}$$

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{b} = \text{N}$$

$$\frac{b \cdot k + a \cdot k}{a \cdot b} = \text{N}$$

$$\frac{(b + a) \cdot k}{a \cdot b} = \text{N}$$

$$k = \frac{a \cdot b \cdot \text{N}}{a + b}$$

Assim, tem-se que:

$$x = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{a \cdot b \cdot \text{N}}{a + b}\right) = \frac{b \cdot \text{N}}{a + b}$$

e

$$y = \frac{1}{b} \cdot \left(\frac{a \cdot b \cdot \text{N}}{a + b}\right) = \frac{a \cdot \text{N}}{a + b}$$

Para dividir um número N em três partes x, y e z inversamente proporcionais aos números a, b e c, é necessário resolver o seguinte sistema de equações $\begin{cases} x + y + z = \text{N} \\ a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z \end{cases}$

Aplicando o mesmo método:

$$a \cdot x = b \cdot y = c \cdot z = k \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{k}{a} \\ y = \dfrac{k}{b} \\ z = \dfrac{k}{c} \end{cases}$$

$$x + y + z = \text{N}$$

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = \text{N}$$

$$\frac{b \cdot c \cdot k + a \cdot c \cdot k + a \cdot b \cdot k}{a \cdot b \cdot c} = \text{N}$$

$$\frac{(b \cdot c + a \cdot c + a \cdot b) \cdot k}{a \cdot b \cdot c} = \text{N}$$

$$k = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \text{N}}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c}$$

Portanto:

$$x = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{a \cdot b \cdot c \cdot \text{N}}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c}\right) = \frac{b \cdot c \cdot \text{N}}{a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c}.$$

Dividindo o numerador e o denominador dessa fração por $b \cdot c$, obtém-se:

$$x = \frac{\text{N}}{\dfrac{a}{c} + \dfrac{a}{b} + 1}$$

Analogamente, obtêm-se:

$$y = \frac{\text{N}}{\dfrac{b}{c} + \dfrac{b}{a} + 1} \quad \text{e} \quad z = \frac{\text{N}}{\dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b} + 1}$$

Exercício resolvido

5. Paulo faleceu em dezembro de 2021 e deixou para seus três filhos uma herança de R\$ 130 000,00 que, segundo o testamento, deveria ser dividida em partes inversamente proporcionais às suas idades.
Sabendo que o filho mais velho de Paulo nasceu em abril de 1997, o segundo filho nasceu em junho de 2003 e a filha caçula em fevereiro 2009, determine a quantia que cada um recebeu.

Resolução:

As idades dos filhos de Paulo em 2021 eram:

$$\begin{cases} \text{Mais velho} \rightarrow 2021 - 1997 = 24 \text{ anos} \\ \text{Segundo filho} \rightarrow 2021 - 2003 = 18 \text{ anos} \\ \text{Filha caçula} \rightarrow 2021 - 2009 = 12 \text{ anos} \end{cases}$$

Assim, sendo x, y e z as parcelas, em reais, da herança que cada um deve receber, do mais velho para o mais novo, respectivamente, temos:

$$\begin{cases} 24x = 18y = 12z = k & \text{(I)} \\ x + y + z = \text{R\$ } 130\,000{,}00 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação (I), temos $x = \dfrac{k}{24}$, $y = \dfrac{k}{18}$ e $z = \dfrac{k}{12}$, expressões que, substituídas na equação (II), fornecem:

$$\frac{k}{24} + \frac{k}{18} + \frac{k}{12} = \text{R\$ } 130\,000{,}00$$

Como o mmc$(24, 18, 12) = 72$, tem-se:

$$\frac{3k + 4k + 6k}{72} = \text{R\$ } 130\,000{,}00 \Rightarrow \frac{13k}{72} = \text{R\$ } 130\,000{,}00$$

Dividindo ambos os membros da equação por 13:

$$\frac{k}{72} = \text{R\$ } 10\,000{,}00 \Rightarrow k = \text{R\$ } 720\,000{,}00$$

$$\text{Assim: } \begin{cases} x = \dfrac{\text{R\$ } 720\,000{,}00}{24} = \text{R\$ } 30\,000{,}00 \\ y = \dfrac{\text{R\$ } 720\,000{,}00}{18} = \text{R\$ } 40\,000{,}00 \\ z = \dfrac{\text{R\$ } 720\,000{,}00}{12} = \text{R\$ } 60\,000{,}00 \end{cases}$$

Portanto, o filho mais velho recebeu R\$ 30 000,00, o do meio, R\$ 40 000,00 e a caçula, R\$ 60 000,00.

Deduzindo uma relação de proporcionalidade

Duas grandezas não são diretamente proporcionais simplesmente porque uma delas aumenta quando a outra também aumenta. Crescimento simultâneo não significa crescimento proporcional.

Para garantir essa relação de proporcionalidade, deve-se verificar se, quando o valor de uma das grandezas duplica, por exemplo, o valor da outra grandeza também duplica. Quando uma triplica, a outra também triplica, e assim por diante.

Dollydoll29/Shutterstock.com

Observe que as idades de uma mãe e sua filha aumentam simultaneamente ao longo dos anos, mas o período necessário para que a idade de uma criança duplique não é o suficiente para que a idade de sua mãe também duplique. Assim, as idades de uma mãe e sua filha não são grandezas proporcionais.

Agora, quando medidas de segmentos de reta são comparadas em diferentes unidades de comprimento, como, por exemplo, metro e polegada, os valores obtidos sempre terão relação de proporcionalidade direta.

Da mesma forma, duas grandezas não são ditas inversamente proporcionais simplesmente porque o crescimento de uma delas acarreta o decrescimento no valor da outra.

Para garantir essa relação de proporcionalidade, deve-se verificar se quando o valor de uma das grandezas duplica, por exemplo, o valor da outra grandeza cai pela metade. Quando uma triplica, a outra cai para sua terça parte, e assim por diante.

No estudo físico da energia de um corpo em queda livre, por exemplo, quando a energia cinética aumenta, a energia potencial do mesmo corpo diminui, mas não ocorre de uma delas duplicar sempre que a outra cai pela metade. Assim, as energias cinética e potencial de um corpo em queda livre não são grandezas proporcionais.

Agora, em uma compra parcelada sem juros, por exemplo, quando se compara a quantidade de parcelas ao valor de cada parcela, pode-se perceber que, quando o número de parcelas cai pela metade, o valor de cada parcela deve duplicar. Assim, a quantidade de parcelas e o valor de cada parcela são grandezas inversamente proporcionais.

! Atenção

Em exercícios, as relações de proporcionalidade podem ser:

- Declaradas pelo enunciado.
- Deduzidas de valores apresentados em quadros ou tabelas.
- Deduzidas pelo contexto do problema.

Exercícios resolvidos

6. A frequência sonora da nota musical obtida fazendo-se soar uma corda esticada é diretamente proporcional à tensão, mas inversamente proporcional à área de sua secção transversal e ao seu comprimento. Observe o quadro com as frequências das notas de certa escala diatônica ocidental:

Nota	Frequência (Hz)
Lá	440
Si	495
Dó	536
Ré	578
Mi	660
Fá	715
Sol	770
Lá	880

Considere uma corda com 56 cm de comprimento que, em certa tensão, emite a nota Si (495 Hz). Se reduzirmos o comprimento dessa corda para 42 cm e a mantivermos sob a mesma tensão, qual será a nota que esta corda passará a emitir?

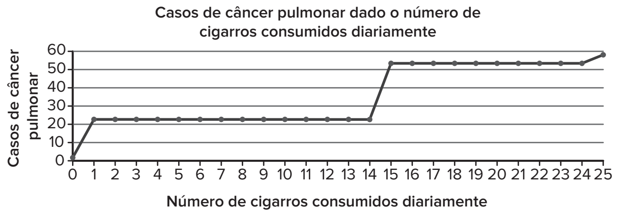
a) Lá
b) Ré
c) Fá
d) Sol
e) Mi

Resolução:

Diminuindo-se o comprimento de uma corda em 25%, ela fica com $\frac{3}{4}$ do seu comprimento original; como a frequência da nota emitida é inversamente proporcional ao comprimento da corda, temos que a frequência passa a ser igual a $\frac{4}{3}$ de 495 Hz, que são 660 Hz, que é a frequência da nota Mi.
Alternativa: E.

FRENTE 2

7. Enem A suspeita de que haveria uma relação causal entre tabagismo e câncer de pulmão foi levantada pela primeira vez a partir de observações clínicas. Para testar essa possível associação, foram conduzidos inúmeros estudos epidemiológicos. Dentre esses, houve o estudo do número de casos de câncer em relação ao número de cigarros consumidos por dia, cujos resultados são mostrados no gráfico a seguir.



Fonte: Centers for Disease Control and Prevention CDC - EIS Summer Course, 1992. (Adapt.)

De acordo com as informações do gráfico:

a) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas inversamente proporcionais.

b) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que não se relacionam.

c) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas diretamente proporcionais.

d) uma pessoa não fumante certamente nunca será diagnosticada com câncer de pulmão.

e) o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.

Resolução:

De acordo com o gráfico, quando o número de cigarros consumidos diariamente duplica, temos que o número de casos de câncer pulmonar não duplica nem cai pela metade. Portanto, o consumo diário de cigarros e o número de casos de câncer de pulmão são grandezas que estão relacionadas, mas sem proporcionalidade.
Alternativa: E.

8. PUC-Minas Na tabela abaixo, y é inversamente proporcional ao quadrado de x ($x > 0$).

x	1	2	m
y	2	p	8

Com base nessas informações, é correto afirmar que os valores de p e m são:

a) $p = \frac{1}{8}$ e $m = \frac{1}{4}$

b) $p = \frac{1}{4}$ e $m = \frac{1}{8}$

c) $p = \frac{1}{2}$ e $m = \frac{1}{4}$

d) $p = \frac{1}{2}$ e $m = \frac{1}{2}$

Resolução:

De acordo com o enunciado, temos que:

$$\begin{cases} 2^2 \cdot p = 1^2 \cdot 2 \Rightarrow p = \frac{1}{2} \\ m^2 \cdot 8 = 1^2 \cdot 2, \text{ com } m > 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Alternativa: D.

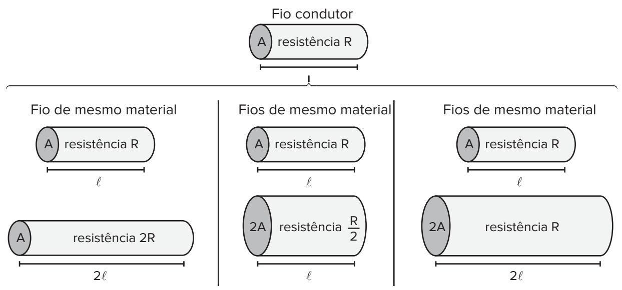
9. Enem

A resistência elétrica e as dimensões do condutor

A relação da resistência elétrica com as dimensões do condutor foi estudada por um grupo de cientistas por meio de vários experimentos de eletricidade. Eles verificaram que existe proporcionalidade entre:

- resistência (R) e comprimento (ℓ), dada a mesma secção transversal (A);
- resistência (R) e área da secção transversal (A), dado o mesmo comprimento (ℓ) e
- comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A), dada a mesma resistência (R).

Considerando os resistores como fios, pode-se exemplificar o estudo das grandezas que influem na resistência elétrica utilizando as seguintes figuras.



Disponível em: www.efeitojoule.com. Acesso em: abr. 2010. (Adapt.)

As figuras mostram que as proporcionalidades existentes entre resistência (R) e comprimento (ℓ), resistência (R) e área da secção transversal (A), e entre comprimento (ℓ) e área da secção transversal (A) são, respectivamente,

a) direta, direta e direta.

b) direta, direta e inversa.

c) direta, inversa e direta.

d) inversa, direta e direta.

e) inversa, direta e inversa.

Resolução:

Verificamos pelas figuras que, dobrando o comprimento (ℓ) e mantendo a área (A), dobramos a resistência (R); dobrando a área (A) e mantendo o comprimento (ℓ), dividimos a resistência (R) por 2; e dobrando a área (A), devemos dobrar o comprimento (ℓ) para manter a mesma resistência (R).
Logo, teremos proporcionalidades direta, inversa e direta, respectivamente.
Alternativa: C.

Composição de proporções

Já vimos que, se uma grandeza A é diretamente proporcional a uma grandeza B, para obtermos os valores de A, basta multiplicarmos os valores de B por uma constante real não nula.

$$A = k_1 \cdot B$$

Além disso, vimos que, se uma grandeza A é inversamente proporcional a uma grandeza C, para obtermos os valores de A, basta dividirmos os valores da constante real não nula pela grandeza C.

$$A = \frac{k_2}{C}$$

Agora, se a grandeza A é diretamente proporcional à grandeza B e, simultaneamente, inversamente proporcional à grandeza C, então haverá uma terceira constante real não nula que, multiplicada pela fração cujo numerador possui os valores da grandeza B e o denominador possui os valores da grandeza C, resulta nos valores de A. Uma vez conhecida essa constante, teremos:

$$A = k_3 \cdot \frac{B}{C}$$

Seguindo esse padrão, se uma grandeza Y é diretamente proporcional às grandezas M e N, então existe uma constante real não nula tal que:

$$Y = k_4 \cdot M \cdot N$$

Se uma grandeza Y é diretamente proporcional às grandezas L, M e N, então existe uma constante real não nula tal que:

$$Y = k_5 \cdot L \cdot M \cdot N$$

Se uma grandeza Y é inversamente proporcional às grandezas P e Q, então existe uma constante real não nula tal que:

$$Y = \frac{k_6}{P \cdot Q}$$

Se uma grandeza Y é inversamente proporcional às grandezas P, Q e R, então existe uma constante real não nula tal que:

$$Y = \frac{k_7}{P \cdot Q \cdot R}$$

Generalizando, se uma grandeza Y for diretamente proporcional a algumas grandezas (L, M, N, ...) e, ao mesmo tempo, for inversamente proporcional a outras grandezas (P, Q, R, ...), por exemplo, podemos expressar Y em função dessas grandezas proporcionais encontrando uma constante k, real e não nula, tal que:

$$Y = k \cdot \frac{L \cdot M \cdot N \cdot ...}{P \cdot Q \cdot R \cdot ...}$$

! Atenção

Note que, para expressar uma grandeza Y em função de suas grandezas proporcionais, a constante de proporcionalidade k sempre multiplica uma fração cujo numerador é o produto das grandezas que são diretamente proporcionais a Y, e o denominador é o produto das grandezas inversamente proporcionais a Y.

Encontrando constantes de proporcionalidade

Considere um experimento feito em laboratório que avalia três grandezas R, S e T envolvidas num mesmo fenômeno. Quando as medições de seus valores indicam a existência de relações de proporcionalidade, é possível determinar uma constante adequada a partir de alguns dos valores observados. Imagine que o quadro a seguir apresente alguns dos valores das grandezas R, S e T:

	R	S	T
Linha 1	8	10	16
Linha 2	4	20	16
Linha 3	8	20	32

Observando os valores do quadro, é possível perceber que:

I. As grandezas R e S são **inversamente** proporcionais, pois da linha 1 para a linha 2 nota-se que a grandeza T = 16 se mantém constante, a grandeza S duplica de valor passando de 10 para 20, enquanto a grandeza R cai pela metade, passando de 8 para 4. Portanto, aqui o produto dessas grandezas é constante:

$$R \cdot S = 10 \cdot 8 = 20 \cdot 4$$

II. As grandezas S e T são **diretamente** proporcionais, pois da linha 1 para a linha 3 nota-se que a grandeza R = 8 se mantém constante e as grandezas S e T duplicam de valor, uma passando de 10 para 20 e a outra de 16 para 32. Portanto, aqui o quociente dessas grandezas é constante:

$$\frac{S}{T} = \frac{10}{16} = \frac{20}{32}$$

III. As grandezas R e T são **diretamente** proporcionais, pois da linha 2 para a linha 3 nota-se que a grandeza S = 20 se mantém constante e as grandezas R e T duplicam de valor, uma passando de 4 para 8 e a outra de 16 para 32. Portanto, aqui o quociente dessas grandezas é constante:

$$\frac{R}{T} = \frac{4}{16} = \frac{8}{32}$$

Assim, de acordo com as duas primeiras classificações de proporcionalidade, deve existir uma constante real não nula k, tal que:

$$S = k \cdot \frac{T}{R}$$

Note que:

- A grandeza T ocupa o numerador da fração porque é diretamente proporcional à grandeza S;
- A grandeza R ocupa o denominador da fração porque é inversamente proporcional à grandeza S.

Nesse momento, as informações contidas em qualquer linha do quadro podem ser usadas para se determinar o valor de k. Assim, usando os valores da linha 1, por exemplo, tem-se:

$$S = k \cdot \frac{T}{R} \Rightarrow 8 = k \cdot \frac{16}{10}$$

Finalmente, resolvendo essa equação encontra-se $k = 5$.

Portanto, uma fórmula que permite expressar a grandeza S em função das grandezas T e R é:

$$S = 5 \cdot \frac{T}{R}$$

Se tivéssemos usado as duas últimas classificações de proporcionalidade feitas com os valores do quadro, deveríamos admitir a existência de outra constante de proporcionalidade k', tal que:

$$T = k' \cdot \frac{R \cdot S}{1}$$

Note que:

- A grandeza R ocupa o numerador da fração porque é diretamente proporcional à grandeza T;
- A grandeza S também ocupa o numerador da fração porque é diretamente proporcional à grandeza T.
- Como não há grandeza inversamente proporcional à grandeza T, o denominador da fração fica ocupado pelo número 1.

Novamente as informações contidas em qualquer linha do quadro podem ser usadas para se determinar o valor de k'. Então, usando os valores da segunda linha, por exemplo, tem-se:

$$T = k' \cdot R \cdot S \Rightarrow 16 = k' \cdot 4 \cdot 20$$

Finalmente, resolvendo essa equação encontra-se $k' = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Portanto, uma fórmula que permite expressar a grandeza T em função das grandezas R e S é:

$$T = 0{,}2 \cdot R \cdot S$$

Portanto, $k' = \frac{1}{k}$.

Atenção

Em todo problema desse tipo, há duas possibilidades para o valor da constante de proporcionalidade k ou k'. Tudo depende da grandeza escolhida para ser expressa em função das outras.
É importante observar que os valores de k e k' são recíprocos, ou seja: $k \cdot k' = 1$.

Portanto: $k' = \frac{1}{k}$

Veja agora como lidar com uma quarta grandeza Y que estabelece relações de proporcionalidade com as demais grandezas R, S e T do exemplo anterior. Para isso vamos dispor do seguinte quadro:

	R	S	T	Y
Linha 1	8	10	16	12
Linha 2	4	20	16	12
Linha 3	8	20	32	12
Linha 4	4	10	16	6
Linha 5	8	20	64	6

Para encontrar uma expressão que forneça os valores de Y em função das grandezas R, S e T é necessário observar no quadro que:

I. Nas linhas 1 e 4, as grandezas S = 10 e T = 16 não variam. Isso permite afirmar que Y é uma grandeza diretamente proporcional a R, pois, da linha 1 para a linha 4, ambos os valores de Y e R caem pela metade, um passando de 12 para 6 enquanto o outro passa de 8 para 4. Portanto, aqui o quociente dessas grandezas é constante:

$$\frac{Y}{R} = \frac{12}{8} = \frac{6}{4}$$

II. Nas linhas 2 e 4, as grandezas R = 4 e T = 16 não variam. Isso permite afirmar que Y é uma grandeza diretamente proporcional a S, pois, da linha 2 para a linha 4, ambos os valores de Y e S caem pela metade, um passando de 12 para 6 enquanto o outro passa de 20 para 10. Portanto, aqui o quociente dessas grandezas é constante:

$$\frac{Y}{S} = \frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

III. Nas linhas 3 e 5, as grandezas R = 8 e S = 20 não variam. Isso permite afirmar que Y é uma grandeza inversamente proporcional a T, pois, da linha 3 para a linha 5, a grandeza Y cai pela metade, passando de 12 para 6, enquanto a grandeza T duplica, passando de 32 para 64. Portanto, aqui o produto dessas grandezas é constante:

$$Y \cdot T = 12 \cdot 32 = 6 \cdot 64$$

As outras relações de proporcionalidade entre R, S e T também podem ser obtidas como no exemplo anterior, mas, dispondo-se apenas das relações que já foram encontradas, já é possível expressar uma função para Y. Resumindo, tem-se que:

- Y é grandeza diretamente proporcional a R e S;
- Y é grandeza inversamente proporcional a T.

Sendo assim, existe uma constante não nula k, tal que:

$$Y = k \cdot \frac{R \cdot S}{T}$$

Mais uma vez, as informações contidas em qualquer linha do quadro podem ser usadas na determinação do valor de k. Assim, usando os valores da linha 4, por exemplo, tem-se:

$$Y = k \cdot \frac{R \cdot S}{T} \Rightarrow 6 = k \cdot \frac{4 \cdot 10}{16}$$

Finalmente, resolvendo essa equação encontra-se $k = 2{,}4$.

Portanto, uma fórmula que permite expressar a grandeza Y em função das grandezas R, S e T é:

$$Y = 2{,}4 \cdot \frac{R \cdot S}{T}$$

Exercício resolvido

10. Se 3 pedreiros constroem 200 metros de muro com 2,5 metros de altura em 5 dias, trabalhando 10 horas por dia, quantos dias são necessários para que 2 pedreiros construam 180 metros de muro com 2 metros de altura, trabalhando 6 horas por dia?

Considere que todos os pedreiros sejam igualmente eficientes, que o rendimento de trabalho diário seja o mesmo a qualquer hora do dia e que a dificuldade de construção do metro quadrado de cada muro não dependa de suas dimensões.

Resolução:

Do enunciado, temos o seguinte quadro de grandezas:

Dias de trabalho (D)	Nº de pedreiros (P)	Área do muro (A)	Horas diárias de trabalho (H)
5	3	$200 \cdot 2{,}5 = 500$	10
x	2	$180 \cdot 2 = 360$	6

Como a grandeza D pode ser considerada diretamente proporcional à grandeza A, mas deve ser considerada inversamente proporcional às grandezas P e H, existe $k > 0$ tal que $D = k \cdot \frac{A}{P \cdot H}$.

Assim, da primeira linha do quadro, temos:

$$5 = k \cdot \frac{500}{3 \cdot 10} \Rightarrow k = \frac{3}{10}$$

Portanto, da segunda linha do quadro:

$$x = \frac{3}{10} \cdot \frac{360}{2 \cdot 6} \Rightarrow x = 9$$

Variação de grandezas

Calcula-se a variação de uma grandeza subtraindo seu valor inicial de seu valor final. Essa diferença costuma ser representada pela letra grega Δ (delta maiúscula), escrita junto à grandeza que varia.

Assim, quando uma grandeza x varia de um valor inicial x_1 para um valor final x_2, indicamos a variação da grandeza x por:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Grandezas de variação diretamente proporcional

Dizemos que duas grandezas x e y têm **variação diretamente proporcional** quando existe uma constante real não nula k tal que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

Essa mesma relação pode ser expressa como $\Delta y = k \cdot \Delta x$.

Assim, representando por x_0 e y_0 um par qualquer de valores correspondentes das grandezas x e y, da expressão anterior, tem-se que:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$$

No estudo da Geometria Analítica, uma relação expressa dessa forma é denominada equação da reta, pois seus gráficos cartesianos possuem esse formato específico. Nesse estudo, a constante de proporcionalidade k é também chamada de coeficiente angular e costuma ser representada pela letra m. Assim, a equação da reta fica:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$

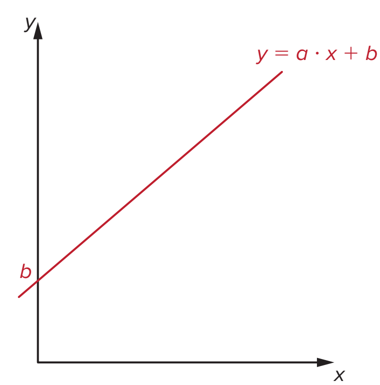
Continuando o desenvolvimento algébrico dessa sentença, tem-se:

$$y - y_0 = m \cdot x - m \cdot x_0$$
$$y = m \cdot x - m \cdot x_0 + y_0$$
$$y = m \cdot x + (y_0 - m \cdot x_0)$$

Assim, fazendo $a = m$ e $b = y_0 - m \cdot x_0$, a mesma relação pode ser expressa como uma função polinomial do 1º grau (função afim):

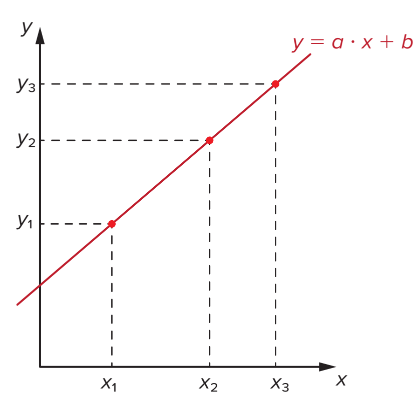
$$y = a \cdot x + b$$

No estudo da Álgebra, os parâmetros a e b desse tipo de função são denominados coeficiente principal (a) e termo independente (b). O parâmetro b de uma função afim também é chamado de coeficiente linear. Seu valor indica a ordenada do ponto onde a reta que representa o gráfico da função intercepta o eixo das ordenadas.



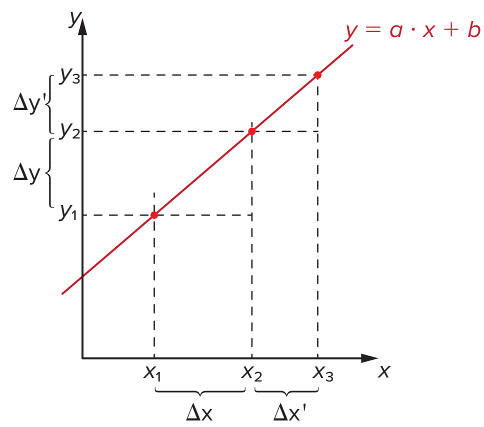
Em gráficos desse tipo é correto assumir a validade da regra de três direta, desde que aplicada às variações das grandezas x e y.

Para isso, é necessário identificar as coordenadas de três pontos da reta.



A partir dos pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3) calculam-se duas variações de cada grandeza, como:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$\Delta x' = x_3 - x_2$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$\Delta y' = y_3 - y_2$$



Assim, é possível expressar algebricamente a relação de proporcionalidade entre as variações das grandezas x e y:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} \Leftrightarrow \Delta x \cdot \Delta y' = \Delta x' \cdot \Delta y$$

Exercício resolvido

11. Sabendo que a variação do comprimento de uma barra metálica é diretamente proporcional à variação da temperatura, qual deve ser o comprimento, em centímetros, que atinge uma dessas barras quando aquecida a uma temperatura de 76 °C, se a 25 °C ela mede 0,65 m e a 55 °C ela passa a medir 0,7 m?

a) 73,5
b) 77,5
c) 81,5
d) 85,5
e) 89,5

Resolução:

Sendo T a temperatura, em graus Celsius, e L o comprimento, em centímetros, da barra metálica em questão, tem-se o seguinte quadro:

T	L
25	65
55	70
76	x

As variações de temperatura são $\begin{cases} \Delta T_1 = 55 - 25 = 30 \\ \Delta T_2 = 76 - 55 = 21 \end{cases}$.

As variações no comprimento são $\begin{cases} \Delta L_1 = 70 - 65 = 5 \\ \Delta L_2 = x - 70 \end{cases}$.

Como essas variações são diretamente proporcionais, da regra de três simples, temos:

$$\Delta T_1 \cdot \Delta L_2 = \Delta T_2 \cdot \Delta L_1$$

$$30 \cdot (x - 70) = 21 \cdot 5$$

$$30x - 2\,100 = 105$$

$$30x = 105 + 2\,100$$

$$x = \frac{2\,205}{30}$$

$$x = 73{,}5$$

Alternativa: A.

Aplicações da estrutura de proporcionalidade

O modelo matemático da análise de grandezas proporcionais ou de variações proporcionais, estudado neste capítulo, é de fato um dos mais aplicados por outras ciências envolvidas nos processos de exames pré-vestibulares. Tanto pelas ciências exatas, como a Física ou a Química, quanto por algumas das ciências humanas, como a Geografia, por exemplo. Este modelo também é bastante útil em situações mais prosaicas, como a criação de galinhas.

Consideremos que o dono de uma pequena granja deva comprar ração periodicamente para alimentar suas galinhas adultas. O número de galinhas adultas em uma granja é variável, podendo aumentar, pois em algum momento as jovens galinhas tornam-se adultas, mas podendo também diminuir, uma vez que as galinhas adultas serão abatidas ou vendidas.

Além disso, a quantidade de ração comprada também pode variar em cada pedido, de acordo com a vontade do granjeiro ou a disponibilidade para entrega de seus fornecedores. Assim, o tempo entre uma compra e outra deve oscilar de acordo com as variações das quantidades de galinhas e ração comprada.

Embora seja bastante comum supor que as grandezas envolvidas nessa situação tenham relação de proporcionalidade, o método científico recomenda que essa suposição seja verificada antes da aplicação do modelo matemático. Assim, imagine agora que o dono dessa granja construiu um quadro comparando as três grandezas envolvidas para testar a hipótese da proporcionalidade:

Número de galinhas adultas	Quantidade de ração comprada	Tempo de duração da ração comprada
60	120 kg	24 dias
60	180 kg	36 dias
60	80 kg	16 dias
90	120 kg	16 dias
90	60 kg	8 dias
45	60 kg	16 dias

Já vimos que, para verificar a relação de proporcionalidade entre duas dessas três grandezas, basta observar um par de linhas do quadro que apresentem o mesmo valor para a terceira grandeza envolvida.

As duas primeiras linhas desse quadro mostram que, com o mesmo número de galinhas, as quantidades de ração comprada e seus respectivos tempos de duração são diretamente proporcionais, pois tanto os números 120 e 180 quanto os números 24 e 36 estão na razão de 2 para 3:

$$\frac{120}{180} = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

Essa mesma relação de proporcionalidade pode ser observada comparando-se a quarta e a quinta linha do quadro, pois elas mostram que, com um mesmo número de galinhas, o tempo de duração da ração comprada cai pela metade quando a quantidade de ração comprada também cai pela metade.

Já as duas últimas linhas do quadro mostram que o número de galinhas adultas na criação e o tempo de duração da ração comprada são grandezas inversamente proporcionais, pois, com a mesma quantidade de ração comprada, o tempo de duração da ração comprada duplica quando o número de galinhas cai pela metade.

Assim, sendo:

- N: número de galinhas adultas na criação
- R: quantidade de ração comprada
- Δt: tempo de duração da ração comprada

É correto afirmar que:

- Δt e N são grandezas inversamente proporcionais.
- Δt e R são grandezas diretamente proporcionais.

Então, existe uma constante de proporcionalidade k positiva tal que:

$$\Delta t = k \cdot \frac{R}{N}$$

Agora, basta escolher uma linha qualquer do quadro para se obter o valor de k. Assim, dos valores apresentados pela primeira linha do quadro, temos que $24 = k \cdot \frac{120}{60} \Rightarrow k = 12$.

Feito isso, o dono da granja obtém a relação:

$$\Delta t = 12 \cdot \frac{R}{N}$$

Essa relação, que pode ser verificada em cada linha do quadro, serve para prever com relativa precisão qual o tempo de duração da ração comprada de acordo com a quantidade e o número de galinhas adultas na granja. Assim, se houver, por exemplo, 50 galinhas adultas na granja (N = 50) e apenas 100 kg de ração disponível no estoque (R = 100), essa ração se esgotará em:

$$\Delta t = 12 \cdot \frac{R}{N} = 12 \cdot \frac{100}{50} = 12 \cdot 2 = 24, \text{ ou seja, 24 dias}$$

Com as previsões fornecidas por essa relação, o granjeiro pode preparar-se melhor, do ponto de vista financeiro, para suas próximas compras.

Exemplos na Física

A expressão para calcular a velocidade média de um corpo em movimento é $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$.

Nessa expressão temos a constante de proporcionalidade $k = 1$, mas isso acontece apenas se a unidade de medida da velocidade média está de acordo com as unidades em que foram medidos a variação de tempo e o deslocamento. Assim, por exemplo, podemos usar a expressão para obter a velocidade em metros por segundo (m/s) apenas se o deslocamento for medido em metros (m) e a variação de tempo, em segundos (s).

Agora, se quiséssemos obter a velocidade média em quilômetros por hora (km/h), a partir do deslocamento em metros e do tempo em segundos, a expressão correta deveria ser escrita com uma constante de proporcionalidade de igual a $\frac{36}{10}$, que possui uma unidade bastante estranha, o "quilômetro segundo por metro hora" (km · s/m · h).

Toda constante física ou química tem uma unidade adequada para relacionar as grandezas que verificam alguma relação de proporcionalidade, mas o estudo dessas unidades é próprio da Física e da Química.

Neste ponto, o estudo da Matemática preocupa-se apenas com a obtenção do numeral que indica corretamente a medida de uma grandeza. Para expressar as relações aritméticas entre os numerais que indicam os valores de grandezas proporcionais, sem nos preocupar com a adequação de suas unidades, existe uma notação particular que usa de palavras ou abreviações escritas entre colchetes.

Com essa notação, os números que indicam a velocidade média, em quilômetros por hora, podem ser obtidos do deslocamento em metros e da variação de tempo em segundos pela expressão:

$$[\text{Velocidade média}] = 3{,}6 \cdot \frac{[\text{deslocamento}]}{[\text{variação de tempo}]}$$

A força eletromagnética entre duas cargas elétricas Q_1 e Q_2 é uma grandeza diretamente proporcional aos módulos dessas cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Assim, tem-se a expressão:

$$F = k \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{d^2}$$

Nessa relação, para que a força seja expressa em newton a partir das cargas medidas em coulomb e da distância em metros, deve-se adotar $k = 9 \cdot 10^9$.

Entre as leis de Kepler para o movimento celeste, a terceira lei afirma que, para todos os planetas que orbitam em torno de uma mesma estrela, o quadrado do período de revolução do planeta é diretamente proporcional ao cubo da distância média entre o planeta e a estrela. Assim, sendo T o período de rotação e D a distância média, tem-se que:

$$T^2 = k \cdot D^3$$

Nessa relação, a constante de proporcionalidade depende não só das unidades escolhidas para se medir o período e a distância, mas também da massa da estrela em que os planetas orbitam.

Exercício resolvido

12. A energia associada a um corpo em movimento é chamada de energia cinética E_C, cuja unidade é o joule (J). A grandeza da energia cinética é diretamente proporcional à grandeza da massa (em kg) do corpo e é diretamente proporcional ao quadrado da grandeza de sua velocidade (em m/s).
Com base nesse texto, faça o que se pede em cada item:

a) Escreva uma relação que expresse a energia cinética em função da massa *m* e da velocidade *v* de um corpo, usando a letra *k* para indicar a constante de proporcionalidade.

b) Determine o valor numérico da constante de proporcionalidade indicada na relação encontrada no item anterior, sabendo que um corpo com massa igual a 20 kg, que está a uma velocidade de 3 m/s, tem energia cinética de 90 J.

c) Reescreva a relação que expressa a energia cinética, em joules, em função da massa em quilogramas, e da velocidade, em metros por segundo, usando a constante de proporcionalidade encontrada no item anterior.

d) Determine a energia cinética de um corpo com 90 kg que está a uma velocidade de 20 m/s.

e) Determine a massa de um corpo que, a uma velocidade de 10 m/s, tem uma energia cinética de 50 J.

f) Determine a velocidade absoluta de um corpo cuja energia cinética é de 100 J e sua massa é de 8 kg.

Resolução:

a) Como o quadrado da velocidade e a massa são diretamente proporcionais à energia cinética, então uma possível relação, com *k* positivo, é $E_C = k \cdot m \cdot v^2$.

b) Do enunciado e do item anterior, temos:
$90 = k \cdot 20 \cdot 3^2 \Rightarrow 90 = k \cdot 180 \therefore k = 0{,}5$

c) Substituindo o valor encontrado no item anterior na expressão, temos $E_C = 0{,}5 \cdot m \cdot v^2$.

d) $E_C = 0{,}5 \cdot 90 \cdot 20^2 = 45 \cdot 400 = 18\,000 \therefore E_C = 18\,000$ J

e) $50 = 0{,}5 \cdot m \cdot 10^2 \Rightarrow 50 = 50 \cdot m \Rightarrow m = 1 \therefore m = 1$ kg

f) $100 = 0{,}5 \cdot 8 \cdot v^2 \Rightarrow 100 = 4 \cdot v^2 \Rightarrow 25 = v^2 \Rightarrow v = 5 \therefore v = 5$ m/s

Exemplos na Geometria

O comprimento de uma circunferência é diretamente proporcional ao comprimento de seu diâmetro. A constante que estabelece essa relação de proporcionalidade é indicada pela letra π e vale, aproximadamente, 3,1416.

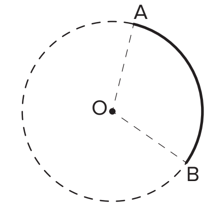
Assim, estando o comprimento C da circunferência e o diâmetro numa mesma unidade de medida, temos:

$$[\text{comprimento da circunferência}] = \pi \cdot [\text{diâmetro}]$$

Como o comprimento do diâmetro de uma circunferência mede o dobro da medida do seu raio *r*, essa relação pode ser expressa por:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Já o comprimento de um arco de circunferência é diretamente proporcional a duas outras grandezas: a medida do ângulo central e o comprimento do raio da circunferência que contém o arco. Sendo assim:



$$\left[\text{comp}\left(\overset{\frown}{AB}\right)\right] = k \cdot \left[\text{med}\left(A\hat{O}B\right)\right] \cdot [\text{raio}]$$

Se tanto o comprimento do arco quanto o comprimento do raio estiverem na mesma unidade, e a medida do ângulo estiver expressa em radianos, temos $k = 1$, mas, se a medida do ângulo estiver em graus, teremos $k = \frac{\pi}{180°}$ (aproximadamente 0,0175).

Assim, o comprimento em metros de um arco de 40° em uma circunferência de raio 6 m é, numericamente, expresso por:

$$C = \frac{\pi}{180°} \cdot 40° \cdot 6 = \frac{4\pi}{3} \cong 4{,}2$$

Outro exemplo envolvendo a mesma figura é o da área. A do círculo, que é diretamente proporcional ao quadrado do comprimento do raio *r*, situação em que a constante de proporcionalidade é igual a π. Assim:

$$A = \pi \cdot r^2$$

Já o volume V de uma esfera é uma grandeza diretamente proporcional ao cubo do raio *r*. Nesse caso, a constante de proporcionalidade da relação é igual a $\frac{4\pi}{3}$. Assim:

$$V = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3$$

Exemplo na Química

Uma importante relação de proporcionalidade entre as grandezas associadas aos gases ideais: a pressão que um gás exerce no recipiente que o contém é diretamente proporcional à sua temperatura absoluta e à quantidade de gás (em mols) dentro do recipiente, mas é inversamente proporcional ao volume que ele ocupa. Sendo assim, temos:

$$[\text{pressão}] = k \cdot \frac{[\text{quantidade de gás}] \cdot [\text{temperatura}]}{[\text{volume}]}$$

Se a pressão (P) for medida em atmosferas, a temperatura (T) em graus Kelvin, o volume (V) em litros e a quantidade de gás (*n*) em número de mols, teremos $k \cong 0{,}082$, número conhecido como constante de Rutherford, que os químicos costumam indicar pela letra R. Assim:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Exercício resolvido

13. São dados dois recipientes A e B, tais que o volume do recipiente B é o triplo do volume do recipiente A. Se a quantidade de gás no recipiente B é dobro da quantidade de gás no recipiente A, qual deve ser a razão entre as temperaturas absolutas dos gases nesses recipientes para que as pressões exercidas em ambos os recipientes seja a mesma?

Resolução:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T = \begin{cases} P_A \cdot V_A = n_A \cdot R \cdot T_A & \text{(I)} \\ P_B \cdot V_B = n_B \cdot R \cdot T_B & \text{(II)} \end{cases}$$

Do enunciado: $\begin{cases} V_B = 3 \cdot V_A \\ n_B = 2 \cdot n_A \\ P_A = P_B \end{cases}$.

Assim, a segunda equação do sistema pode ser expressa por:

$$P_A \cdot 3 \cdot V_A = 2 \cdot n_A \cdot R \cdot T_B \qquad \text{(III)}$$

Então, dividindo-se a equação (I) pela equação (III), temos:

$$\frac{P_A \cdot V_A}{P_A \cdot 3 \cdot V_A} = \frac{n_A \cdot R \cdot T_A}{2 \cdot n_A \cdot R \cdot T_B} \Rightarrow \frac{T_B}{T_A} = \frac{3}{2}$$

Exemplo na Geografia

No estudo da Geografia há uma grandeza denominada **densidade demográfica**, que é diretamente proporcional ao número de habitantes de determinada região e inversamente proporcional à área dessa região, que é, geralmente, expressa em quilômetros quadrados; nesse caso, a constante de proporcionalidade é $k = 1$.

A densidade demográfica não representa nenhuma taxa periódica, uma vez que é relativa ao espaço e não ao tempo. Trata-se de uma razão composta que transmite uma noção de concentração populacional.

A expressão matemática que relaciona as grandezas densidade demográfica D, população P e área S de uma mesma região é:

$$D = \frac{P}{S}$$

Exercícios resolvidos

14. Considere dois países que tenham a mesma população, mas tais que um deles tenha o triplo da densidade demográfica do outro. Então, se o mais denso tem 175 000 km^2 de área, qual deve ser a área do outro país?

Resolução:

Do enunciado, temos:

	País 1	País 2
População	P	P
Área (em milhares de km^2)	175	x

Como as densidades demográficas são tais que $D_1 = 3 \cdot D_2$, temos:

$$D_1 = 3 \cdot D_2 \Rightarrow \frac{P}{175} = \frac{3 \cdot P}{x} \Rightarrow \frac{1}{175} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 3 \cdot 175 = 525$$

Note que a simplificação dos antecedentes foi feita dividindo-os pelo valor de P, que representa a população de ambos os países e, portanto, é diferente de zero.

Sendo x a área do segundo país em milhares de km^2, temos que essa área é de 525 000 km^2.

15. Em 2010 um projeto previa que o Governo Federal repartisse uma verba de R$ 135 milhões entre os três estados da região Sul do país, e que a repartição seria proporcional ou ao número de municípios ou à participação no PIB regional de cada um, baseando-se nos dados da seguinte tabela:

	Paraná	Santa Catarina	Rio Grande do Sul
Capital	Curitiba	Florianópolis	Porto Alegre
Extensão territorial	199 316 694 km²	95 703 487 km²	268 781 896 km²
Quantidade de municípios	399	293	496
População	10 444 526 habitantes	6 248 436 habitantes	10 693 929 habitantes
População urbana	85,3%	84%	85,1%
Densidade demográfica	52,4 hab./km²	65,3 hab./km²	39,8 hab./km²
Participação no PIB regional	36,5%	23,6%	39,9%

Fonte: IBGE

Faça uma estimativa do valor que cada estado receberia em cada uma das duas possibilidades.

Resolução:

Sendo C_1, C_2 e C_3 as cotas, respectivamente, do Paraná, Santa Catarina e Rio Grande do Sul, temos que:

$$C_1 + C_2 + C_3 = \text{R\$ } 135\,000\,000{,}00$$

A quantidade de municípios é representada pelos números 399, 293 e 496, que são bastante próximos dos números 400, 300 e 500, bem mais simples de serem usados para fazer uma estimativa, pois são diretamente proporcionais aos números 4, 3 e 5. Assim:

$$\frac{C_1}{4} = \frac{C_2}{3} = \frac{C_3}{5} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{4 + 3 + 5} = \frac{\text{R\$ } 135\,000\,000{,}00}{12} = \text{R\$ } 11\,250\,000{,}00$$

Portanto, as cotas seriam, aproximadamente, de: $\begin{cases} \text{PR: } C_1 = 4 \cdot \text{R\$ } 11\,250\,000{,}00 = \text{R\$ } 45\,000\,000{,}00 \\ \text{SC: } C_2 = 3 \cdot \text{R\$ } 11\,250\,000{,}00 = \text{R\$ } 33\,750\,000{,}00 \\ \text{RS: } C_3 = 5 \cdot \text{R\$ } 11\,250\,000{,}00 = \text{R\$ } 56\,250\,000{,}00 \end{cases}$.

Agora, se as cotas fossem proporcionais às participações de cada estado no PIB da região, nossa estimativa poderia ser feita aproximando-se os percentuais de 36,5% para o Paraná, 23,6% para Santa Catarina e 39,9% para o Rio Grande do Sul para, respectivamente, 36%, 24% e 40%. Em seguida, devemos escrever esses números na proporção como taxas unitárias, aproveitando o fato de que a soma dessas taxas é igual a 1.

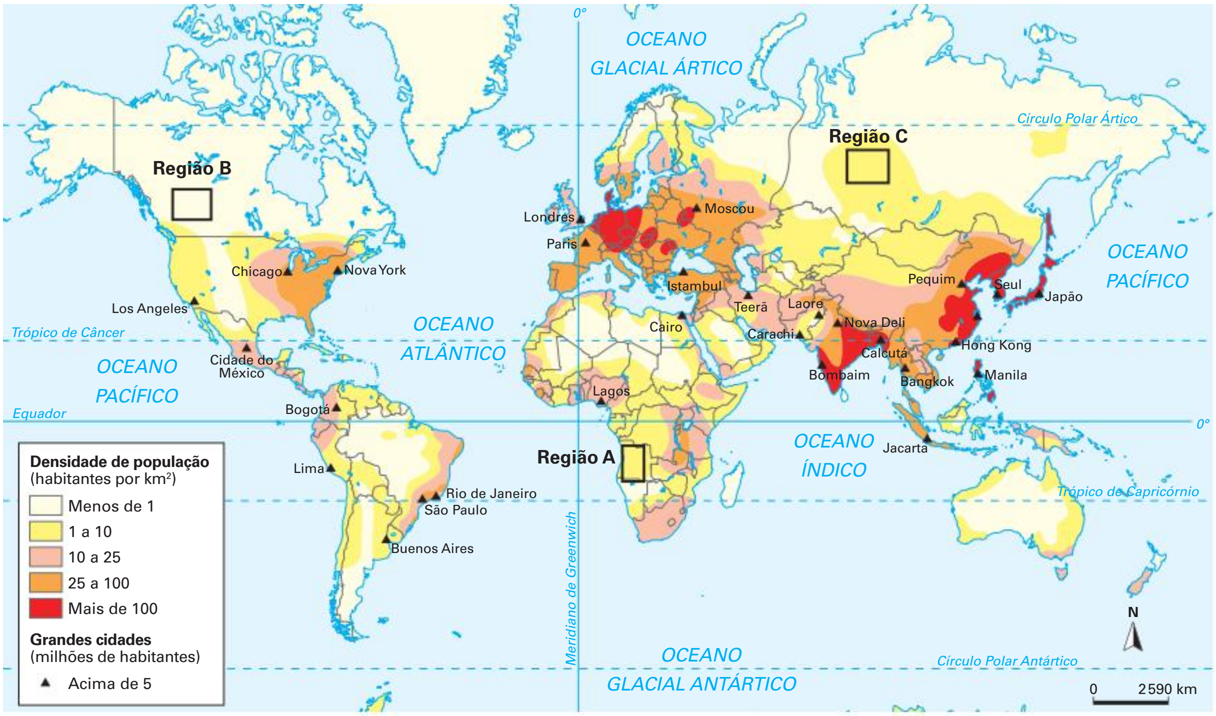
$$\frac{C_1}{0{,}36} = \frac{C_2}{0{,}24} = \frac{C_3}{0{,}40} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{0{,}36 + 0{,}24 + 0{,}40} = \frac{\text{R\$ } 135\,000\,000{,}00}{1{,}00} = \text{R\$ } 135\,000\,000{,}00$$

Nesse caso, as cotas seriam:

$$\begin{cases} \text{PR: } \dfrac{C_1}{0{,}36} = \text{R\$ } 135\,000\,000{,}00 \Rightarrow C_1 = 0{,}36 \cdot \text{R\$ } 135\,000\,000{,}00 = \text{R\$ } 48\,600\,000{,}00 \\ \text{SC: } \dfrac{C_2}{0{,}24} = \text{R\$ } 135\,000\,000{,}00 \Rightarrow C_2 = 0{,}24 \cdot \text{R\$ } 135\,000\,000{,}00 = \text{R\$ } 32\,400\,000{,}00 \\ \text{RS: } \dfrac{C_3}{0{,}40} = \text{R\$ } 135\,000\,000{,}00 \Rightarrow C_3 = 0{,}40 \cdot \text{R\$ } 135\,000\,000{,}00 = \text{R\$ } 54\,000\,000{,}00 \end{cases}$$

16. O mapa a seguir mostra a distribuição da população mundial em meados dos anos 1970, de forma que, quanto mais escura é a região do mapa, maior é a concentração de indivíduos no local.

Mundo: densidade demográfica – 1976 (hab./km^2)



Elaborado com base em *Population density, 1976, Our World in Data*. Disponível em: https://ourworldindata.org/grapher/population-density?time=1976&country=CIV~COD~DNK~DJI~DMA~DOM~Early-demographic+dividend~Late-demographic+dividend~Least+developed+countries%3A+UN+classification~Post-demographic+dividend~Pre-demographic+dividend~SXM. Acesso em: 26 nov. 2021.

Nesse mapa estão destacadas três regiões:

- Região A: corresponde ao território de Angola, país com uma área territorial de 1 246 700 km^2 e cuja população, à época, tinha acabado de ultrapassar os 6 milhões de habitantes;
- Regiões B e C: situadas na América do Norte e na Ásia, respectivamente, têm a mesma área, igual ao dobro da área da região A.

Com base nas informações contidas no mapa e no enunciado, assinale a alternativa **incorreta** a respeito das medidas demográficas dessas regiões naquela época:

a) O número de habitantes da região B era menor do que o número de habitantes da região C.
b) A densidade demográfica de Angola era, naquela época, de aproximadamente 5 habitantes por km^2.
c) Em meados dos anos 1970 a região A tinha uma população menor que a população da região B.
d) É possível que a região A tenha uma população maior que a população da região C.
e) Se as regiões A e C têm a mesma densidade demográfica, então a população da região C é de, aproximadamente, 12 milhões de pessoas.

Resolução:

Nessa representação da superfície do planeta há:

- Regiões de mesma área, mas em cores diferentes, como B e C.
- Regiões com a mesma cor, mas cujas áreas são diferentes, como A e C.
- Regiões com cores e áreas diferentes, como A e B.

Sejam D_x, P_x e S_x, respectivamente, a densidade demográfica, a população e a área da região X.

Alternativa A: correta. Do gabarito de cores do mapa, temos: $D_B < 1$ e $1 < D_C < 10$, portanto, $D_B < D_C$. Então, como $S_B = S_C > 0$ e $P = D \cdot S$, temos que $D_B \cdot S_B < D_C \cdot S_C \Rightarrow P_B < P_C$.

Alternativa B: correta. O texto informa que Angola tem uma área de 1 246 700 km^2; porém, como a informação da população P_A = 6 milhões foi dada de forma aproximada, podemos também usar S_A = 1 200 000 km^2 como aproximação da área e, assim, concluir que $D_A = \frac{P_A}{S_A} = \frac{6\,000\,000 \text{ habitantes}}{1\,200\,000 \text{ km}^2} = 5 \text{ habitantes por km}^2$.

Alternativa C: incorreta. Do gabarito de cores do mapa temos $D_B < 1$. Do texto temos que $S_B = 2 \cdot S_A$, logo, $S_B = 2\,493\,400$ km^2. Portanto, temos que $\frac{P_B}{2\,493\,400} < 1 \Rightarrow P_B < 2\,493\,400$ habitantes, que é menor que os 6 000 000 de habitantes de A.

Alternativa D: correta. O texto informa que $S_C = 2 \cdot S_A$, portanto, $S_C = 2\,493\,400$ km^2. Do gabarito de cores do mapa temos que: $1 < D_C < 10$. Então $D_C = 2$ é uma possibilidade válida e, nesse caso, temos:

$$D_C = \frac{P_C}{S_C} \Rightarrow 2 = \frac{P_C}{2\,493\,400} \Rightarrow P_C = 4\,986\,800 \text{ habitantes (menor que os 6 000 000 de habitantes de A)}$$

Alternativa E: correta. Da hipótese $D_A = D_C$, ou seja, $\frac{P_A}{S_A} = \frac{P_C}{S_C}$, como $S_A = 2 \cdot S_C$ e $P_A = 6$ milhões (aproximadamente), temos que $\frac{6 \text{ milhões}}{S_A} = \frac{P_C}{2 \cdot S_A}$. Assim, simplificando a grandeza S_A nos denominadores das frações, e resolvendo a equação, temos, nessa hipótese, que $P_C = 12$ milhões de habitantes (aproximadamente).

Alternativa: C.

Revisando

1. Enem 2019 Três sócios resolveram fundar uma fábrica. O investimento inicial foi de R$ 1000000,00. E, independentemente do valor que cada um investiu nesse primeiro momento, resolveram considerar que cada um deles contribuiu com um terço do investimento inicial.

Algum tempo depois, um quarto sócio entrou para a sociedade, e os quatro, juntos, investiram mais R$ 800000,00 na fábrica. Cada um deles contribuiu com um quarto desse valor. Quando venderam a fábrica, nenhum outro investimento havia sido feito. Os sócios decidiram então dividir o montante de R$ 1800000,00 obtido com a venda, de modo proporcional à quantia total investida por cada sócio.

Quais os valores mais próximos, em porcentagens, correspondentes às parcelas financeiras que cada um dos três sócios iniciais e o quarto sócio, respectivamente, receberam?

a) 29,60 e 11,11.
b) 28,70 e 13,89.
c) 25,00 e 25,00.
d) 18,52 e 11,11.
e) 12,96 e 13,89.

2. Enem 2013 Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m^3 de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m^3, na carga de concreto trazido pela betoneira?

a) 1,75
b) 2,00
c) 2,33
d) 4,00
e) 8,00

3. Uerj 2018 Uma herança foi dividida em exatamente duas partes: *x*, que é inversamente proporcional a 2, e *y*, que é inversamente proporcional a 3.

A parte *x* é igual a uma fração da herança que equivale a:

a) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{2}{5}$
c) $\frac{1}{6}$
d) $\frac{5}{6}$

4. Enem 2018 Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações.

Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

a) 20
b) 24
c) 29
d) 40
e) 58

5. A pressão é uma medida de força por unidade de área que, no estudo da mecânica dos fluidos, costuma ser separada em dois tipos: a pressão estática P_{est}, e a pressão dinâmica P_{din}. A pressão dinâmica exercida por um líquido é diretamente proporcional tanto à densidade ρ do líquido quanto ao quadrado de sua velocidade *v*.
Sendo assim, deve existir uma constante de proporcionalidade *k* tal que:
a) $P_{din} = k \cdot \dfrac{\rho}{v^2}$
b) $P_{din} = k^2 \cdot \rho \cdot v$
c) $P_{din} = k \cdot \dfrac{\rho^2}{v}$
d) $P_{din} = k \cdot \rho \cdot v^2$
e) $P_{din} = k^2 \cdot \dfrac{v^2}{\rho}$

6. **UPE 2017** Um grupo com 50 escoteiros vai acampar durante 28 dias. Eles precisam comprar uma quantidade de açúcar suficiente para esses dias e já sabem que a média de consumo por semana, para 10 pessoas é de 3 500 gramas de açúcar. Quantos quilogramas de açúcar são necessários para os 28 dias de acampamento desse grupo?
a) 15,5
b) 17,5
c) 35
d) 50,5
e) 70

7. **Unicamp-SP 2021** Duas impressoras funcionando simultaneamente imprimem certa quantidade de páginas em 36 segundos. Sozinha, uma delas imprime a mesma quantidade de páginas em 90 segundos. Funcionando sozinha, para imprimir a mesma quantidade de páginas, a outra impressora gastaria
a) 48 segundos.
b) 54 segundos.
c) 60 segundos.
d) 72 segundos.

8. **PUC-Rio 2018** Sabemos que 5 gatos comem 20 kg de ração em 20 dias. Considere as seguintes afirmações:
I. 2 gatos comem 2 kg de ração em 2 dias.
II. 5 gatos comem 5 kg de ração em 5 dias.
III. 4 gatos comem 16 kg de ração em 16 dias.
Quais destas afirmativas são verdadeiras?
a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Nenhuma delas.
e) Todas as três.

9. **Uece 2017** Um fazendeiro tem reserva de ração suficiente para alimentar suas 16 vacas durante 62 dias. Após 14 dias, o fazendeiro vendeu 4 vacas e continuou a alimentar as restantes seguindo o mesmo padrão inicial. Quantos dias, no total, durou sua reserva de ração?

a) 80.
b) 78.
c) 82.
d) 76.

10. **Enem 2017** Às 17h15min começa uma forte chuva, que cai com intensidade constante. Uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, que se encontrava inicialmente vazia, começa a acumular a água da chuva e, às 18 horas, o nível da água em seu interior alcança 20 cm de altura. Nesse instante, é aberto o registro que libera o escoamento da água por um ralo localizado no fundo dessa piscina, cuja vazão é constante. Às 18h40min a chuva cessa e, nesse exato instante, o nível da água na piscina baixou para 15 cm.

O instante em que a água dessa piscina terminar de escoar completamente está compreendido entre

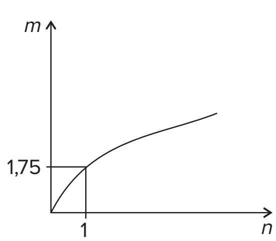
a) 19h30min e 20h10min.
b) 19h20min e 19h30min.
c) 19h10min e 19h20min.
d) 19h e 19h10min.
e) 18h40min e 19h.

Exercícios propostos

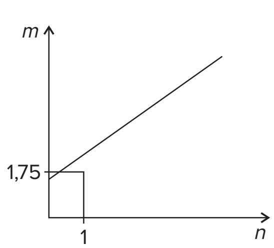
1. **Enem** As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

Dos gráficos a seguir, o que representa o preço *m* pago em reais pela compra de *n* quilogramas desse produto é

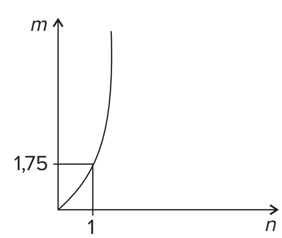
a)



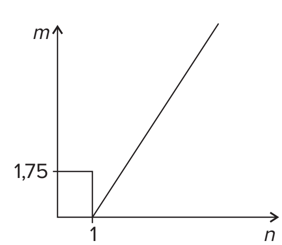
b)



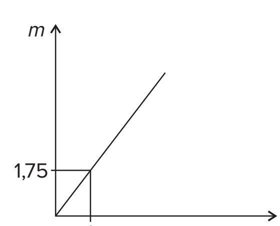
c)



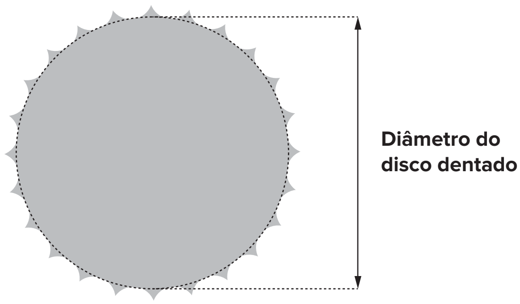
d)



e)



2. Enem 2019 Um ciclista quer montar um sistema de marchas usando dois discos dentados na parte traseira de sua bicicleta, chamados catracas. A coroa é o disco dentado que é movimentado pelos pedais da bicicleta, sendo que a corrente transmite esse movimento às catracas, que ficam posicionadas na roda traseira da bicicleta. As diferentes marchas ficam definidas pelos diferentes diâmetros das catracas, que são medidos conforme indicação na figura.

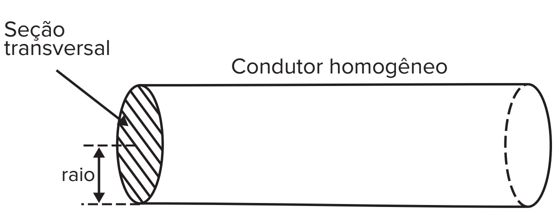


O ciclista já dispõe de uma catraca com 7 cm de diâmetro e pretende incluir uma segunda catraca, de modo que, à medida que a corrente passe por ela, a bicicleta avance 50% a mais do que avançaria se a corrente passasse pela primeira catraca, a cada volta completa dos pedais.

O valor mais próximo da medida do diâmetro da segunda catraca, em centímetro e com uma casa decimal, é

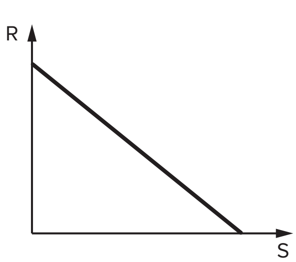
a) 2,3.
b) 3,5.
c) 4,7.
d) 5,3.
e) 10,5.

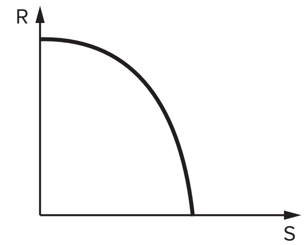
3. Enem PPL 2018 A resistência elétrica R de um condutor homogêneo é inversamente proporcional à área S de sua seção transversal.

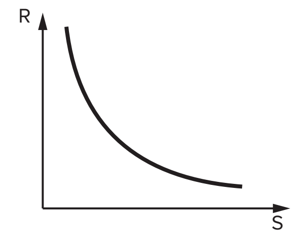


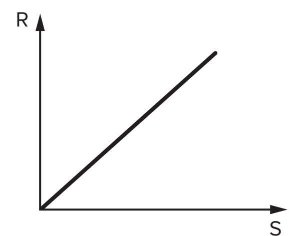
Disponível em: http://efisica.if.usp.br. Acesso em: 2 ago. 2012.

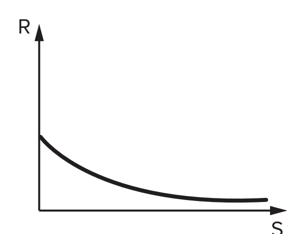
O gráfico que representa a variação da resistência R do condutor em função da área S de sua seção transversal é

a)


b)


c)


d)


e)


4. UEG-GO 2021 A potência P de um chuveiro elétrico é dada pela fórmula $P = Ri^2$, sendo R sua resistência elétrica e *i* a corrente elétrica que circula por ele. Sabendo-se que o consumo de energia elétrica E é diretamente proporcional à potência do aparelho, a função que relaciona a energia consumida pelo chuveiro elétrico e a corrente elétrica que circula por ele é

a) linear decrescente
b) linear crescente
c) quadrática decrescente
d) quadrática crescente
e) exponencial crescente

5. FMP-RJ 2016 Considere a soma 0,75 + 1,25 + 1 = 3. Os números 0,75; 1,25 e 1 configuram a decomposição do número 3 em parcelas diretamente proporcionais a

a) 20; 12 e 15
b) $\frac{5}{75}; \frac{5}{120}$ e $\frac{1}{50}$
c) 3; 5 e 4
d) $\frac{4}{3}; \frac{4}{5}$ e 1
e) $\frac{1}{3}; \frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$

FRENTE 2

6. **Enem 2019** Para contratar três máquinas que farão o reparo de vias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:

- Cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital;
- O total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$ 31 000,00;
- O valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com 2, 3 e 5 anos de idade de uso.
Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

a) R$ 3 100,00
b) R$ 6 000,00
c) R$ 6 200,00
d) R$ 15 000,00
e) R$ 15 500,00

7. **UPE 2013** As famílias Tatu, Pinguim e Pardal realizaram uma viagem juntas, cada uma em seu carro. Cada família sabe muito bem o quanto o seu carro consome de gasolina. O quadro a seguir mostra o carro de cada uma das famílias, com os respectivos consumos médios.

Família	Carro	Consumo
Tatu	Penault	20 km/L
Pinguim	Pevrolet	15 km/L
Pardal	Piat	12 km/L

Nessa viagem, eles sempre pagaram a gasolina com o mesmo cartão de crédito. Ao final da viagem, eles perceberam que consumiram 1200 litros de gasolina e gastaram 3 mil reais com esses abastecimentos.
Como eles decidiram dividir a despesa de forma proporcional ao que cada família consumiu, quanto deverá pagar a família Pardal?

a) R$ 750,00
b) R$ 1 000,00
c) R$ 1 050,00
d) R$ 1 250,00
e) R$ 1 800,00

8. **Uece 2015** Duas grandezas positivas x e y são inversamente proporcionais se existe uma correspondência bijetiva entre os valores de x e os valores de y e um número constante positivo k tal que, se o valor y é o correspondente do valor x então $y \cdot x = k$. Nestas condições, se o valor $y = 6$ é o correspondente ao valor $x = 25$, então o valor y que corresponde ao valor $x = 15$ é

a) 8.
b) 10.
c) 12.
d) 14.

9. **IFCE 2016** Três números naturais são diretamente proporcionais a 2, 3 e 5. Se a soma dos quadrados desses números é 342, então os três números são

a) 6, 9 e 15.
b) 10, 30 e 50.
c) 4, 6 e 10.
d) 5, 8 e 12.
e) 8, 12 e 20.

10. **Urca-CE 2021** Um balão está no local cuja temperatura ambiente é T_0, com volume V_0 e pressão P_0. Ele é transferido para um ambiente cuja temperatura é $\frac{T_0}{16}$ e a pressão é $0{,}8P_0$. O volume que o balão assume nesse novo ambiente é:

a) $V = V_0$
b) $V = \frac{V_0}{2}$
c) $V = \frac{V_0}{12{,}8}$
d) $V = 16V_0$
e) $V = 0{,}8V_0$

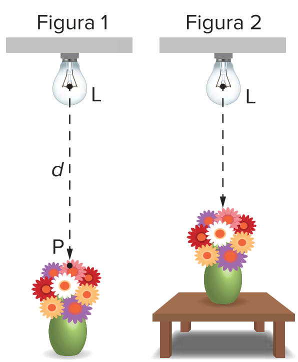
11. **Enem 2017** Uma indústria tem um setor totalmente automatizado. São quatro máquinas iguais, que trabalham simultânea e ininterruptamente durante uma jornada de 6 horas. Após esse período, as máquinas são desligadas por 30 minutos para manutenção. Se alguma máquina precisar de mais manutenção, ficará parada até a próxima manutenção.
Certo dia, era necessário que as quatro máquinas produzissem um total de 9 000 itens. O trabalho começou a ser feito às 8 horas. Durante uma jornada de 6 horas, produziram 6 000 itens, mas na manutenção observou-se que uma máquina precisava ficar parada. Quando o serviço foi finalizado, as três máquinas que continuaram operando passaram por uma nova manutenção, chamada manutenção de esgotamento. Em que horário começou a manutenção de esgotamento?

a) 16h45min
b) 18h30min
c) 19h50min
d) 21h15min
e) 22h30min

12. A vazão de um líquido passando por uma tubulação cilíndrica é uma grandeza V diretamente proporcional ao quadrado do raio da tubulação e diretamente proporcional à velocidade de escoamento do líquido.
Assim, sendo r a medida do raio da tubulação, v a velocidade de escoamento do líquido e k a constante de proporcionalidade adequada a essa situação, pode-se concluir que:

a) $V = k \cdot v \cdot r$
b) $V = k \cdot v^2 \cdot r$
c) $V = k \cdot r^2 \cdot v$
d) $V = \frac{k^2 \cdot r}{v}$
e) $V = \frac{k \cdot r^2}{v}$

13. Uma lâmpada comum pode ser considerada uma fonte de luz puntiforme quando suas dimensões são inferiores a um quinto da distância entre a lâmpada e o objeto iluminado. A intensidade da luz num ponto P oriunda de uma fonte de luz puntiforme situada num ponto L é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os pontos P e L. Essa relação pode ser modelada pela expressão $I = \frac{k}{d^2}$ em que I é a intensidade da luz, em watts por metro quadrado, *d* é a distância, em metros, e *k* é uma constante.



A figura 1 mostra um vaso de flores no piso de uma sala, iluminado por uma lâmpada que está a 3 metros de altura. Se esse vaso for colocado sobre uma mesa com meio metro de altura, como mostra a figura 2, então a intensidade da luz no vaso aumentará em:

a) 40%
b) 44%
c) 50%
d) 55%
e) 60%

14. **Enem 2013** Muitos processos fisiológicos e bioquímicos, tais como batimentos cardíacos e taxa de respiração, apresentam escalas construídas a partir da relação entre superfície e massa (ou volume) do animal. Uma dessas escalas, por exemplo, considera que "o cubo da área S da superfície de um mamífero é proporcional ao quadrado de sua massa M".

HUGHES-HALLETT, D. et al. Cálculo e aplicações. São Paulo: Edgard Blücher, 1999 (adaptado).

Isso é equivalente a dizer que, para uma constante $k > 0$, a área S pode ser escrita em função de M por meio da expressão:

a) $S = k \cdot M$
b) $S = k \cdot M^{\frac{1}{3}}$
c) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{1}{3}}$
d) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^{\frac{2}{3}}$
e) $S = k^{\frac{1}{3}} \cdot M^2$

15. **Uece 2015** Se um pacote de biscoito contém 10 biscoitos e pesa 95 gramas, e se 15 gramas de biscoito correspondem a 90 calorias, quantas calorias tem cada biscoito?

a) 53 calorias.
b) 55 calorias.
c) 57 calorias.
d) 59 calorias.

16. **FGV-SP 2021** Em 8 horas diárias de trabalho, 20 caminhões carregam 160 m^3 de terra em 15 dias. Se o empreiteiro da obra deseja aumentar a frota em 4 caminhões para realizar o mesmo serviço em 6 dias, o número diário de horas que os caminhões terão que trabalhar para cumprir o novo prazo é de

a) 16 horas e 40 minutos.
b) 16 horas e 33 minutos.
c) 15 horas e 50 minutos.
d) 15 horas e 45 minutos.
e) 15 horas e 30 minutos.

17. **IFSC 2016** Em uma fábrica, quatro máquinas empacotam 10 000 balas por hora. Se quisermos empacotar 50 000 balas em meia hora, é **CORRETO** afirmar que o número de máquinas necessárias para executar esse trabalho será exatamente

a) 30. b) 20. c) 40. d) 60. e) 18.

18. **Enem 2013** Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.
A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a

a) 2. b) 4. c) 5. d) 8. e) 9

19. Três amigos investiram 50, 60 e 90 mil reais na construção de uma casa, mas, quando ela ficou pronta, o local de construção havia se desvalorizado, e eles só conseguiram vendê-la por R$ 170 000,00. Então, dividiram o dinheiro da venda em partes diretamente proporcionais aos valores investidos. A maior dessas partes foi de:

a) R$ 765 000,00
b) R$ 85 000,00
c) R$ 76 500,00
d) R$ 8 500,00
e) R$ 7 650,00

20. **PUC-PR 2018** Considere as informações a seguir.
Uma máquina automática produz um único tipo de peças, idênticas, de um determinado produto, operando sempre, por motivos de segurança, apenas e exatamente 12 horas a cada dia, ininterruptamente, todos os dias da semana, inclusive aos sábados, domingos e feriados. Essa máquina será substituída por outra, mais moderna, que tem a capacidade de produzir o quádruplo da quantidade de peças (do mesmo tipo) que produz a atual, em um mesmo período de tempo. A nova máquina vai operar, ininterruptamente, por 21 horas a cada dia, todos os dias da semana.
Durante quantos dias, no mínimo, a nova máquina precisará operar para produzir o triplo do que a antiga produz em uma semana?

a) 1 dia.
b) 3 dias.
c) 4 dias.
d) 5 dias.
e) 6 dias.

FRENTE 2

Texto complementar

A regra da falsa posição

Há aproximadamente 3 600 anos o faraó do Egito tinha um súdito cujo nome chegou até os nossos dias: *Aahmesu*. Aahmesu, cujo nome significa “filho da lua”, era uma pessoa muito simples, provavelmente um escriba. Atualmente ele é conhecido com o nome de *Ahmes*, autor do *Papiro Ahmes*, mais famoso como *Papiro de Rhind*.

O Papiro de Rhind é um antigo manual de Matemática, contendo oitenta problemas de Álgebra, cada um deles com a sua solução.

[...]

Este problema está no Papiro de Rhind. Mudamos um pouco os números apenas para tornar mais clara a explicação. Naturalmente, isto não altera em nada a ideia central.

“*Um montão, seus dois terços, sua metade, todos ao juntar-se fazem treze. Qual é a quantidade?*”

O problema se reduz à equação:

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13 \Rightarrow 6 \cdot \left(x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x\right) = 6 \cdot 13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x + 4x + 3x = 78 \Rightarrow 13x = 78 \Rightarrow x = \frac{78}{13} \Rightarrow x = 6$$

Mas os antigos matemáticos egípcios não podiam resolver o problema desta forma. As suas equações vinham expressas totalmente em palavras. A Álgebra puramente simbólica estava muito distante de ser inventada. Encontravam a solução deste tipo de equação através de um método chamado *regra da falsa posição:*

- atribuíam um valor falso a montão, por exemplo, 12:

$$12 + \frac{2}{3}(12) + \frac{1}{2}(12) = 12 + 8 + 6 = 26$$

- uma regra de três simples indicava o valor verdadeiro de *montão*:

  “o valor falso 12 está para 26 assim como
  o valor verdadeiro (*montão*) está para 13.”

Portanto:

$$\text{valor verdadeiro: } \frac{12 \times 13}{26} = 6 \Rightarrow \text{montão} = 6$$

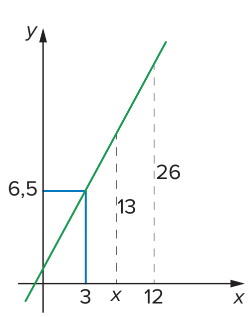
O moderno sistema de numeração decimal levaria ainda muito tempo para ser criado. Por isso os matemáticos da Antiguidade efetuavam todos os seus cálculos em instrumentos auxiliares chamados tabuleiros de cálculos.

Mas por que uma regra de três simples dá o valor verdadeiro de x? Uma simples coincidência ou existe uma razão clara e precisa por trás dela? Observe com atenção: podemos interpretar o enunciado “resolver a equação $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 13$” através da ideia moderna de função:

“Se f é uma função cujos valores são dados pela fórmula $f(x) = x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x$, para que valor de x temos $f(x) = 13$?”

Traçamos em primeiro lugar o gráfico de f:

x	***f*(*x*)**
v	0
3	6,5



Substituímos o “valor falso” 12:

$$f(x) = x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x$$

$$f(x) = 12 + \frac{2}{3}(12) + \frac{1}{2}(12)$$

$$f(12) = 26; \qquad (12,\ 26)$$

Se representamos o “valor verdadeiro” por x por semelhança de triângulos podemos escrever:

$$\frac{12}{26} = \frac{x}{13}$$

ou seja:

12 está para 26 assim como x está para 13

[...]

Sobre o papiro de Rhind (Ahmes)

O papiro de Rhind foi encontrado nos meados do século passado, presumivelmente nas proximidades do templo de Ramsés II, na antiga cidade de Tebas, no Egito. Em 1858 foi comprado, no local, pelo antiquário escocês A. H. Rhind.

O papiro é um rolo com cerca de 30 cm de altura e 5 m de comprimento e encontra-se hoje, salvo alguns fragmentos, no Museu Britânico.

Os egípcios tinham um processo estranho para representar frações: as de numerador 1, como $\frac{1}{n}$, eram representadas por n ou h, mas todas as outras frações $\left(\text{salvo } \frac{2}{3} \text{ e, algumas vezes, } \frac{n}{n+1}\right)$ eram escritas como soma de frações com numerador 1. Assim, por exemplo,

$$\frac{3}{5} \text{ era } \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15};\ \frac{2}{7} \text{ era } \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

O problema “achar um número que somado com sua sétima parte dá 19” $\left(x + \frac{x}{7} = 19\right)$ é resolvido, no papiro, em três passagens:

1) Elimina-se a fração, colocando-se 7 no lugar de x (7 é o valor falso):

$$7 + \frac{1}{7} \cdot 7 = 8$$

2) Acha-se o número que multiplicado por 8 dá 19 $\left(\text{pela regra da falsa posição } \frac{x}{7} = \frac{19}{8}\right)$:

$$8 \cdot \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 16 + 2 + 1 = 19$$

3) Para se obter a solução, multiplica-se $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ por 7 $\left(x = 7 \cdot \frac{19}{8}\right)$:

$$x = 7 \cdot \left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Curioso é o fato de — embora os chineses tivessem, já antes de Cristo, regras eficientes para representar frações e operá-las – os gregos terem adotado a representação egípcia, e esta ter permanecido em uso na Europa por mais de 1 000 anos.

Regra da “dupla falsa posição”

Usando a regra da falsa posição, pode-se resolver a equação $ax = b$. Se, porém, um problema exigir a solução da equação $ax + b = c$, a regra não funciona.

Supostamente, já antes de Cristo, os babilônios e os chineses usavam, neste caso, a regra da “dupla falsa posição”, que ensina o seguinte:

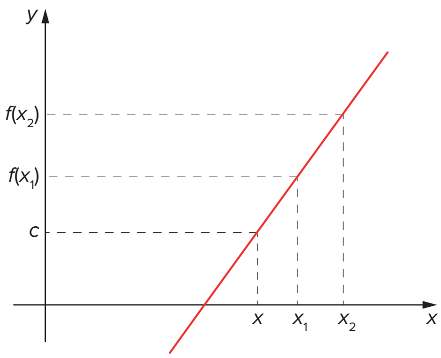
Para achar x tal que $ax + b = c$, atribua a x dois valores "falsos" x_1 e x_2 e calcule $ax_1 + b$ e $ax_2 + b$.

Se $d_1 = ax_1 + b - c$ e $d_2 = ax_2 + b - c$, a proporção

$$\frac{d_1}{x_1 - x} = \frac{d_2}{x_2 - x} \Rightarrow x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}$$

dá o número procurado.

A regra, em linguagem de hoje, é ilustrada na figura abaixo.



Se $f(x) = ax + b$, $\dfrac{f(x_1) - c}{x_1 - x} = \dfrac{f(x_2) - c}{x_2 - x}$.

Uma outra versão da mesma regra ensina o equivalente a

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad (*)$$

Tanto uma versão como a outra, quando aplicadas a equações do 1º grau, dão o valor exato de x. Para problemas não lineares, a regra poderá dar soluções aproximadas.

Um problema não linear, aparentemente resolvido pela regra da dupla falsa posição, foi encontrado já entre os escritos dos antigos babilônios. Lá perguntava-se em quantos anos duplica um capital de 1 *gur*, a juros de 20% ao ano. Em notação de hoje:

Após 3 anos o capital ficará multiplicado por $(1{,}2)^3$;

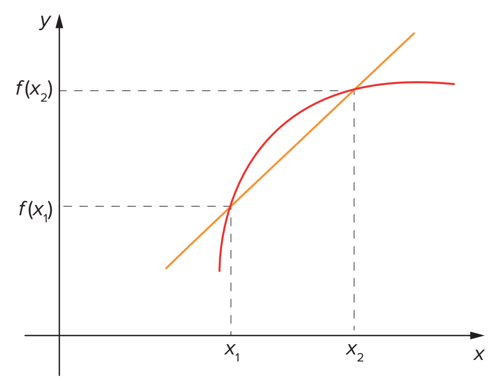
Após 4 anos o capital ficará multiplicado por $(1{,}2)^4$.

A resposta dada — "de 4 anos deve-se subtrair 2,5 meses" — é a mesma que obteríamos se usássemos a fórmula (*) para a equação

$$(1{,}2)^x = 2,\ x_1 = 3 \text{ e } x_2 = 4$$

Escritos árabes (séc. X) dizem explicitamente que a regra resolve problemas onde só aparecem adições, subtrações, multiplicações e divisões e que não se resolvem com ela problemas em que apareçam raízes quadradas ou cúbicas. Já Cardano (séc. XVI) usa a regra da dupla falsa posição, repetidas vezes em um mesmo problema, a fim de obter melhores aproximações para a solução.

Hoje em dia, reconhecemos a regra da dupla falsa posição como um processo de aproximação, em que o arco de uma curva é substituído por um segmento de reta secante e exige, no caso não linear, cuidados especiais para que a solução obtida seja realmente uma "solução aproximada". É o que chamamos de processo da interpolação.



GUELLI, Oscar. A regra da falsa posição. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo, n. 15. Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/15/4.htm. Acesso em: 22 out. 2021.

Resumindo

Proporção direta

Duas grandezas x e y são diretamente proporcionais se, e somente se, houver uma constante real não nula k tal que:

$$\frac{y}{x} = k$$

A relação entre duas grandezas diretamente proporcionais é representada graficamente pelos pontos de uma reta que passa pela origem do sistema cartesiano.

Proporção inversa

Duas grandezas x e y são inversamente proporcionais se, e somente se, houver uma constante real não nula k tal que:

$$x \cdot y = k$$

A relação entre duas grandezas inversamente proporcionais é representada graficamente pelos pontos de uma hipérbole.

Regra de três composta

Se uma grandeza Y for diretamente proporcional às grandezas M e N, por exemplo, então existe uma constante real não nula k tal que:

$$Y = k \cdot M \cdot N$$

Se essa mesma grandeza Y for inversamente proporcional às grandezas P, Q e R, por exemplo, então existe outra constante real não nula k tal que:

$$Y = \frac{k}{P \cdot Q \cdot R}$$

De modo geral, para expressar uma grandeza Y que é diretamente proporcional às grandezas M, N,... e inversamente proporcional às grandezas P, Q, R,... deve-se obter uma constante real não nula k tal que:

$$Y = k \cdot \frac{M \cdot N \cdot ...}{P \cdot Q \cdot R \cdot ...}$$

Quer saber mais?

Sites

IBGE. Densidade demográfica 2010. Disponível em: https://geoftp.ibge.gov.br/cartas_e_mapas/mapas_do_brasil/sociedade_e_economia/mapas_murais/densidade_populacional_2010.pdf. Acesso em: 20 out. 2021.

Confira nesse mapa do IBGE a distribuição de densidade demográfica no território brasileiro, com base nos dados do Censo 2010.

IBGE. Cidades e Estados. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados. Acesso em: 20 out. 2021.

Neste portal do IBGE, você pode ver a evolução da densidade demográfica do Brasil entre 1972 e 2010. Além disso, também é possível pesquisar a densidade demográfica e outras informações de todos os estados e municípios do Brasil.

Vídeo

MANUAL do Mundo. *Como encher bexiga dentro da garrafa sem assoprar*. YouTube, 20 dez. 2010. Disponível em: https://youtube/qipY5qVCtCA. Acesso em: 20 out. 2021.

Nesse vídeo, você verá como a relação de proporcionalidade em gases ideais pode ser utilizada para encher um balão sem assoprar.

Exercícios complementares

1. Se x, y e z são três números reais diretamente proporcionais aos números 2, 3 e 5, então podemos afirmar que esses mesmos números x, y e z são, nesta ordem, inversamente proporcionais aos números

a) 25, 15 e 10
b) 12, 18 e 30
c) 15, 10 e 6
d) 16, 18 e 20
e) 50, 30 e 20

2. Uncisal 2020 Após percorrer uma distância de 400 km em seu automóvel, João constatou que, nesse percurso, o consumo de gasolina foi de 25 L. Considerando isso, João planejou realizar uma nova viagem no mesmo automóvel, na qual percorrerá 640 km de um trecho em que o combustível é vendido ao preço fixo de R$ 3,50.

Para realizar a viagem planejada, João gastará, em combustível,

a) menos de R$ 86,00.
b) mais de R$ 86,00 e menos de R$ 113,00.
c) mais de R$ 113,00 e menos de R$ 139,00.
d) mais de R$ 139,00 e menos de R$ 180,00.
e) mais de R$ 180,00.

3. Uerj 2018 Quatro balões esféricos são preenchidos isotermicamente com igual número de mols de um gás ideal. A temperatura do gás é a mesma nos balões, que apresentam as seguintes medidas de raio:

Balão	Raio
I	R
II	R/2
III	2R
IV	2R/3

A pressão do gás é maior no balão de número:

a) I
b) II
c) III
d) IV

4. ESPM-SP 2015 Sabe-se que uma grandeza A é inversamente proporcional ao quadrado de uma grandeza B e que, quando A vale 1, B vale 6. Pode-se afirmar que, quando A vale 4, a grandeza B vale:

a) 1 **b)** 1,5 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 4,5

5. Enem 2012 José, Carlos e Paulo devem transportar em suas bicicletas uma certa quantidade de laranjas. Decidiram dividir o trajeto a ser percorrido em duas partes, sendo que ao final da primeira parte eles redistribuiriam a quantidade de laranjas que cada um carregava dependendo do cansaço de cada um. Na primeira parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 6 : 5 : 4, respectivamente. Na segunda parte do trajeto, José, Carlos e Paulo dividiram as laranjas na proporção 4 : 4 : 2, respectivamente.

Sabendo-se que um deles levou 50 laranjas a mais no segundo trajeto, qual a quantidade de laranjas que José, Carlos e Paulo, nessa ordem, transportaram na segunda parte do trajeto?

a) 600, 550, 350
b) 300, 300, 150
c) 300, 250, 200
d) 200, 200, 100
e) 100, 100, 50

6. Enem 2019 Em um jogo *on-line*, cada jogador procura subir de nível e aumentar sua experiência, que são dois parâmetros importantes no jogo, dos quais dependem as forças de defesa e de ataque do participante. A força de defesa de cada jogador é diretamente proporcional ao seu nível e ao quadrado de sua experiência, enquanto sua força de ataque é diretamente proporcional à sua experiência e ao quadrado do seu nível. Nenhum jogador sabe o nível ou a experiência dos demais. Os jogadores iniciam o jogo no nível 1 com experiência 1 e possuem força de ataque 2 e de defesa 1. Nesse jogo, cada participante se movimenta em uma cidade em busca de tesouros para aumentar sua experiência. Quando dois deles se

encontram, um deles pode desafiar o outro para um confronto, sendo o desafiante considerado o atacante. Compara-se então a força de ataque do desafiante com a força de defesa do desafiado e vence o confronto aquele cuja força for maior. O vencedor do desafio aumenta seu nível em uma unidade. Caso haja empate no confronto, ambos os jogadores aumentam seus níveis em uma unidade.
Durante um jogo, o jogador J_1, de nível 4 e experiência 5, irá atacar o jogador J_2, de nível 2 e experiência 6. O jogador J_1 venceu esse confronto porque a diferença entre sua força de ataque e a força de defesa de seu oponente era

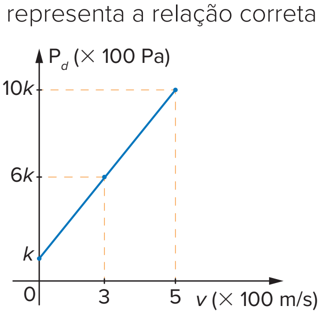
a) 112. **b)** 88. **c)** 60. **d)** 28. **e)** 24.

7. **UFVJM-MG 2020** Uma empresa conseguiu arrecadar R$ 205 000,00 em uma campanha para ajudar 90 famílias de baixa renda em uma região periférica da cidade, cadastradas em um projeto social. A divisão do valor arrecadado será feita de forma diretamente proporcional ao número de membros de cada uma das famílias. Dentre essas 90 famílias, 10 são compostas de 3 pessoas; 20 são compostas de 4 pessoas e 60 são compostas de 5 pessoas.
Sabendo que Pedro é de uma das famílias compostas de 4 pessoas, pode-se afirmar que sua família vai receber:

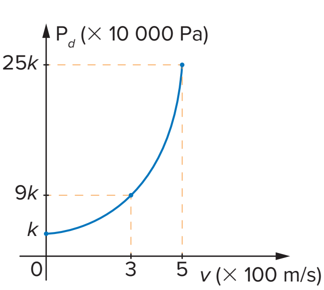
a) R$ 500,00
b) R$ 1 500,00
c) R$ 2 000,00
d) R$ 2 500,00

8. **Unesp 2021** Quando a velocidade de um avião aumenta, o deslocamento das moléculas da atmosfera provoca um aumento da chamada pressão dinâmica (P_d) sobre o avião. Se a altitude de voo é mantida constante, a pressão dinâmica, dada em Pa, pode ser calculada por $P_d = k \cdot v^2$, sendo v o módulo da velocidade do avião em relação ao ar, em m/s, e k uma constante positiva, que depende da altitude. O gráfico que representa a relação correta entre P_d e v é:

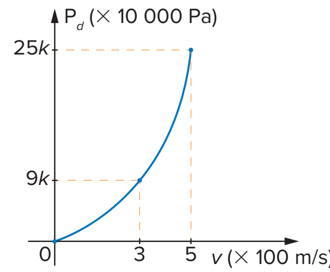
a)



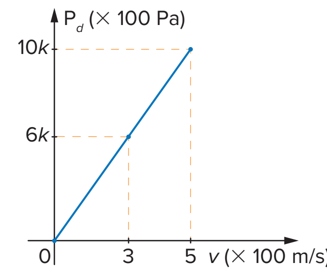
b)



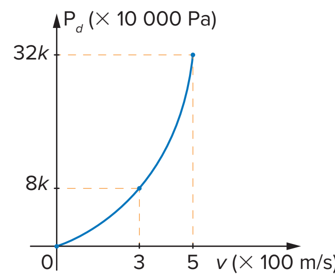
c)



d)



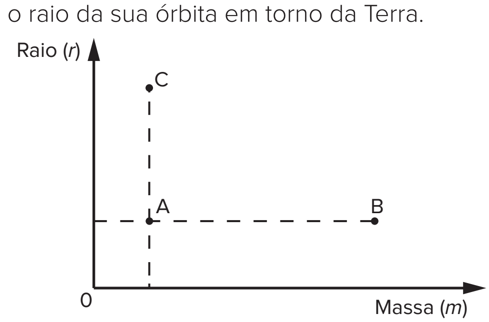
e)



9. **Enem 2018** De acordo com a Lei Universal da Gravitação, proposta por Isaac Newton, a intensidade da força gravitacional F que a Terra exerce sobre um satélite em órbita circular é proporcional à massa m do satélite e inversamente proporcional ao quadrado do raio r da órbita, ou seja,

$$F = \frac{K \cdot m}{r^2}$$

No plano cartesiano, três satélites, A, B e C, estão representados, cada um, por um ponto (m, r) cujas coordenadas são, respectivamente, a massa do satélite e o raio da sua órbita em torno da Terra.



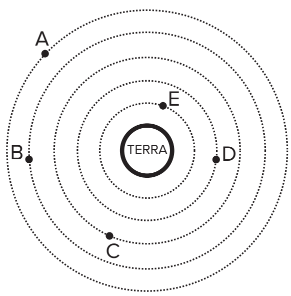
Com base nas posições relativas dos pontos no gráfico, deseja-se comparar as intensidades F_A, F_B e F_C da força gravitacional que a Terra exerce sobre os satélites A, B e C, respectivamente.
As intensidades F_A, F_B e F_C expressas no gráfico satisfazem a relação

a) $F_C = F_A < F_B$
b) $F_A = F_B < F_C$
c) $F_A < F_B < F_C$
d) $F_A < F_C < F_B$
e) $F_C < F_A < F_B$

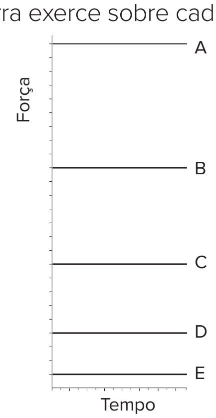
10. Enem 2013 A Lei da Gravitação Universal, de Isaac Newton, estabelece a intensidade da força de atração entre duas massas. Ela é representada pela expressão:

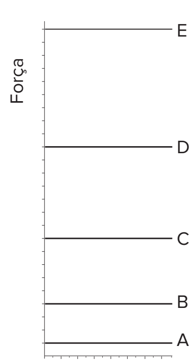
$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2}$$

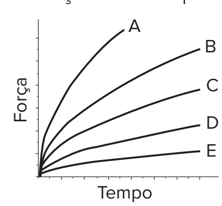
onde m_1 e m_2 correspondem às massas dos corpos, d à distância entre eles, G à constante universal da gravitação e F à força que um corpo exerce sobre o outro. O esquema representa as trajetórias circulares de cinco satélites, de mesma massa, orbitando a Terra.

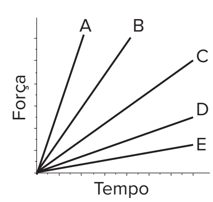


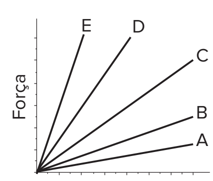
Qual gráfico expressa as intensidades das forças que a Terra exerce sobre cada satélite em função do tempo?

a)


b)


c)


d)


e)


11. Enem 2016 Para a construção de isolamento acústico numa parede cuja área mede 9 m², sabe-se que, se a fonte sonora estiver a 3 m do plano da parede, o custo é de R$ 500,00. Nesse tipo de isolamento, a espessura do material que reveste a parede é inversamente proporcional ao quadrado da distância até a fonte sonora, e o custo é diretamente proporcional ao volume do material do revestimento.

Uma expressão que fornece o custo para revestir uma parede de área A (em metro quadrado), situada a D metros da fonte sonora, é

a) $\frac{500 \cdot 81}{A \cdot D^2}$

b) $\frac{500 \cdot A}{D^2}$

c) $\frac{500 \cdot D^2}{A}$

d) $\frac{500 \cdot A \cdot D^2}{81}$

e) $\frac{500 \cdot 3 \cdot D^2}{A}$

12. Enem 2012 Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área A da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa m pela fórmula $A = k \cdot m^{\frac{2}{3}}$, em que k é uma constante positiva.
Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

a) $\sqrt[3]{16}$
b) 4
c) $\sqrt{24}$
d) 8
e) 64

13. Fatec-SP 2015 Uma caixa de suco de manga tem o formato de um bloco retangular com base quadrada de lado 0,7 dm. O suco contido nela é feito com a polpa de quatro mangas. Sabe-se que a polpa obtida de cada manga rende 0,245 litros de suco.

Bill Waterson. Calvin e Haroldo.
Disponível em: <http://tinyurl.com/*lwnyz*8j>.Acesso em: 25.07.2014.

- Libra e onça, bem como quilograma, são unidades de medida de massa.

- A relação lida por Calvin no 1º quadrinho está correta.
- 1,0 kg é aproximadamente igual a 2,2 libras.

Considere que cada litro do suco de manga mencionado tem massa igual a 1,1 kg.

Em uma caixa de suco que ainda não foi aberta, a massa total de suco, em onças, é aproximadamente igual a

a) 37,95.
b) 36,72.
c) 35,24.
d) 34,93.
e) 33,86.

14. FGV-SP 2013 Um poço cilíndrico circular reto, de profundidade 15 m e diâmetro 6 m, foi escavado por 18 trabalhadores em 25 dias. Admitindo-se sempre proporcionalidade direta ou inversa entre duas das três grandezas envolvidas no problema (volume escavado, número de trabalhadores e dias necessários para o serviço), para aumentar o diâmetro do poço já escavado em mais 2 m, e com 4 trabalhadores a menos, serão necessários e suficientes mais:

a) 20 dias
b) 21 dias
c) 23 dias
d) 24 dias
e) 25 dias

Texto para as as questões **15** e **16**.

No estudo da Física, a relação P = U · *i* envolve as seguintes grandezas:

- A potência elétrica, representada pela letra P e medida em watts.
- A diferença de potencial, ou voltagem, representada pela letra U e medida em volts.
- A intensidade da corrente elétrica, ou amperagem, representada pela letra *i* e medida em amperes.

15. Sobre a voltagem e a intensidade da corrente elétrica, é correto afirmar que são grandezas:

a) diretamente proporcionais.
b) inversamente proporcionais.
c) idênticas, numericamente.
d) sem nenhuma relação de proporção.
e) com relação de proporção, mas indefinida.

16. Se um aparelho elétrico bivolt, de potência constante, ligado em uma tomada de 110 volts, gera uma corrente elétrica de 6 amperes, o valor da intensidade da corrente elétrica que este mesmo aparelho produzirá se for ligado em uma tomada de 220 volts será:

a) 3 amperes.
b) 6 amperes.
c) 8 amperes.
d) 10 amperes.
e) 12 amperes.

17. Uma embarcação que partiu da Inglaterra com destino à África do Sul percorreu sua trajetória numa média de 10 léguas a cada 3 dias.

Sabendo que uma légua equivale a 6,6 km, determine:

a) A velocidade média desta embarcação em quilômetros por hora.
b) A constante de proporcionalidade capaz de transformar os numerais que representam velocidades em léguas diárias nos numerais que representam velocidades em quilômetros por hora.

18. Uncisal 2020 Os amigos João, Mateus e Carlos realizaram um empreendimento, em sociedade, investindo os recursos financeiros de que dispunham nos períodos de sua permanência no empreendimento, conforme especificado no quadro a seguir.

Nome do sócio	Quantia investida (em reais)	Período de permanência (em meses)
João	30 000	12
Mateus	40 000	6
Carlos	50 000	12

Ao final de 12 meses, o empreendimento obteve um lucro de R$ 60 mil, que foi dividido entre os sócios em quantias diretamente proporcionais às investidas por cada um e ao tempo em que cada um permaneceu no negócio.

Se o lucro de João, Mateus e Carlos foi de R$ 18 mil, R$ 12 mil e R$ 30 mil, respectivamente, então a constante de proporcionalidade da divisão do lucro do empreendimento é igual a

a) 0,05.
b) 0,06.
c) 0,3.
d) 0,5.
e) 0,6.

19. UEPG-PR 2016 Em uma fábrica, 7 máquinas operando 3 horas por dia, durante 8 dias, produzem 60 peças. Nesse contexto, assinale o que for correto.

01 Duplicando o número de máquinas e o número de horas trabalhadas por dia, a produção das mesmas 60 peças será realizada em 2 dias.
02 Para duplicar o número de peças produzidas, mantendo o mesmo tempo de operação, é necessário duplicar o número de máquinas.
04 Trabalhando com 3 máquinas a menos e operando 6 horas por dia, durante 7 dias, o número de peças produzidas será o mesmo.
08 Dez máquinas, operando 7 horas por dia, durante 4 dias, produzem o dobro do número de peças.

Soma:

20. Unesulbahia 2021 Um preceptor, integrante do corpo docente das Faculdades Integradas do Extremo Sul da Bahia, responsável pedagógico do programa de residência médica, analisa 20 projetos em 3 dias de 4 horas de trabalho por dia. Outro analisa 15 projetos, do mesmo tipo, em 8 dias de 2 horas de trabalho por dia. Trabalhando juntos, no ritmo de 6 horas de trabalho por dia, esses preceptores analisarão 250 projetos em

a) 20 dias.
b) 18 dias.
c) 16 dias.
d) 14 dias.
e) 12 dias.

EM13MAT101

1. Em tipografia, uma fonte tipográfica é dita monoespaçada se seus caracteres possuem todos a mesma largura. O exemplo abaixo mostra a comparação de uma fonte tipográfica monoespaçada e uma não monoespaçada.

matemática

`matemática`

Uma utilidade das fontes monoespaçadas é o fato de que a largura de uma sequência qualquer de caracteres é dependente apenas da quantidade de caracteres, e não de quais são os caracteres, como é mostrado abaixo.

`referência`

`matemática`

referência

matemática

Uma gráfica, para testar uma impressora nova, aplica um procedimento no qual a impressora deve imprimir uma quantidade fixa de caracteres aleatórios em fonte tipográfica monoespaçada. Nas configurações atuais desse teste, são impressas 90 páginas inteiramente repletas de caracteres, com cada página contendo 52 linhas e cada linha contendo 64 caracteres.
Para economizar papel nesse teste, a gráfica decidiu utilizar 13 linhas a mais em cada página e 16 caracteres a mais em cada linha, mas mantendo o tamanho original dos caracteres e a quantidade total de caracteres impressos durante o teste. Nessas condições, quantas páginas são economizadas, em comparação à versão inicial do teste?

a) 30
b) 32
c) 34
d) 36

EM13MAT101 e EM13MAT314

Use as informações a seguir para responder às questões **2** e **3**.

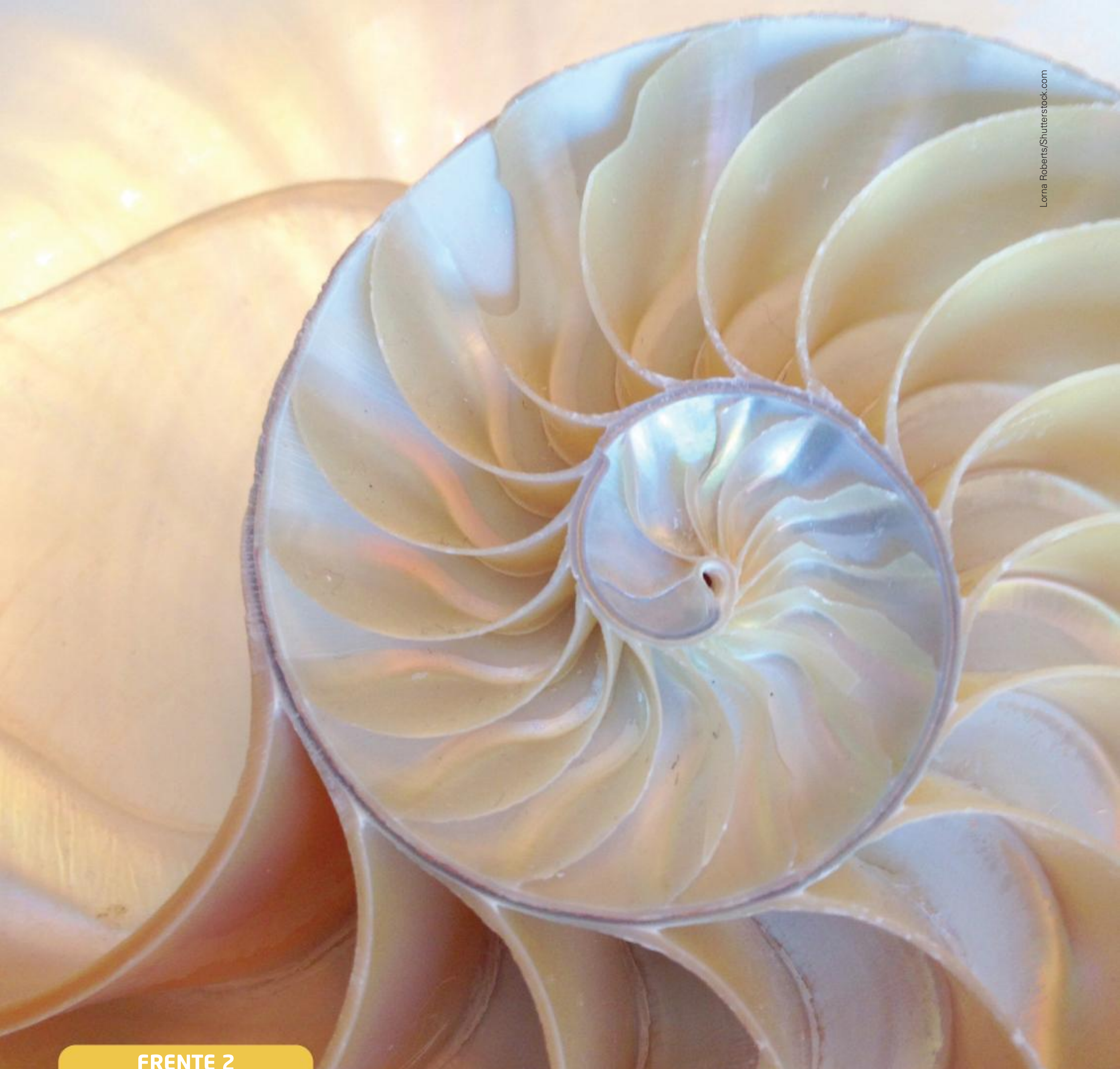
Dizemos que um corpo está em queda livre se esse corpo está em movimento apenas sob a influência da aceleração da gravidade. Por exemplo, desconsiderando a resistência do ar, um corpo que parte do repouso (isto é, tem velocidade inicial nula) e cai livremente está em queda livre.
No caso em que o corpo parte do repouso, a distância percorrida pelo corpo é diretamente proporcional ao quadrado do tempo decorrido desde o início do movimento. Já a velocidade instantânea do corpo é diretamente proporcional ao tempo decorrido.

2. Nessas condições, podemos afirmar que a velocidade instantânea do corpo é

a) diretamente proporcional à distância percorrida.
b) inversamente proporcional à distância percorrida.
c) diretamente proporcional à raiz quadrada da distância percorrida.
d) diretamente proporcional ao quadrado da distância percorrida.

3. Após cair 5 metros desde o início de uma queda livre iniciada em repouso, um corpo encontra-se com velocidade instantânea de 10 m/s. Quantos metros esse corpo ainda precisa cair para que sua velocidade duplique?

a) 5 m
b) 10 m
c) 15 m
d) 20 m



Lorna Roberts/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

5

Sequências numéricas

As sequências numéricas e as progressões estão presentes em inúmeros fenômenos da natureza, das ciências, da economia e de outras áreas. Por exemplo, as progressões geométricas são frequentes no estudo do desenvolvimento de colônias bacterianas, nas reações nucleares, no cálculo de juros compostos e no crescimento da capacidade de processamento de computadores.

Entre as sequências mais famosas e estudadas está a sequência de Fibonacci, que é gerada por uma simples regra, mas que pode dar origem a figuras complexas, como as espirais características das conchas de alguns moluscos.

Por isso, neste capítulo, estudaremos alguns tópicos relacionados a essas sequências.

Sequências e progressões

Há inúmeras situações na Matemática, nas Ciências da Natureza, nas Ciências Humanas, no cotidiano, nas quais lidamos com conjuntos ordenados, finitos ou infinitos. Esses conjuntos são chamados sequências.

Observe os seguintes exemplos:

- sequência de números primos positivos: (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...);
- sequência dos quadrados dos números naturais não nulos: (1, 4, 9, 16, 25, 36, ...);
- sequência dos anos em que ocorreram as Copas do Mundo: (1930, 1934, 1938, 1950, 1954, 1958, 1962, 1966, 1970, 1974, 1978, 1982, 1986, 1990, 1994, 1998, 2002, 2006, 2010, 2014, 2018);
- sequência de cotação diária do dólar em um mês.

De maneira mais formal, podemos definir sequência como uma *n*-upla ordenada cujos elementos são as imagens de uma função aplicada a cada um dos números naturais não nulos, ou seja:

$$(f(1), f(2), f(3), \ldots),\ f: \mathbb{N}^* \to A$$

É comum adotarmos a notação $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $a_k = f(k)$, $k \in \mathbb{N}^*$, onde a_k é o valor do termo da sequência que ocupa a posição k.

Podemos apresentar ou definir uma sequência basicamente de três maneiras: por enumeração, pela fórmula do termo geral ou por recorrência. Veremos a seguir como são essas formas.

Enumeração

Consiste em apresentar a sequência termo a termo. Essa forma é utilizada, normalmente, quando não há uma expressão definida para calcularmos os termos da sequência. Por exemplo:

- Sequência de resultados no lançamento de um dado comum (processo aleatório):

  (2, 6, 1, 1, 2, 3, 5, 5, 5, 4, 6, ...)

- Sequência de números primos positivos:

  (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...).

(No caso dos números primos, não há fórmula que os gere, apenas há a definição)

Termo geral de uma sequência

Nesse caso, a função que permite calcular cada termo a partir de sua posição na sequência está bem definida a partir de uma sentença matemática fechada.

Por exemplo, na sequência dada por $a_n = f(n) = n^2 - n$, tem-se:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1^2 - 1 = 0 \\ a_2 &= 2^2 - 2 = 2 \\ a_3 &= 3^2 - 3 = 6 \\ a_4 &= 4^2 - 4 = 12 \\ a_5 &= 5^2 - 5 = 20 \\ a_6 &= 6^2 - 6 = 30 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Assim, temos a sequência (0, 2, 6, 12, 20, 30, ...).

Já na sequência dada por $b_n = \text{tg}\left(n \cdot \frac{\pi}{12}\right)$, temos:

$$b_1 = \text{tg}\left(1 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}$$

$$b_2 = \text{tg}\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$b_3 = \text{tg}\left(3 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$b_4 = \text{tg}\left(4 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$b_5 = \text{tg}\left(5 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = \text{tg}\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2 + \sqrt{3}$$

$$\ldots$$

Assim, temos a sequência:

$$\left(2 - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}, \ldots\right)$$

Sequência dada por recorrência ou recursão

Quando o cálculo de um termo da sequência depende de um ou mais termos anteriores, dizemos que a sequência é recursiva, ou dada por recursão.

Por exemplo, considere a sequência dada por:

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = \dfrac{(a_{n-1})^2}{2}, \text{ se } n \geqslant 2 \end{cases}$$

Os 4 primeiros termos dessa sequência são:

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = \frac{(a_{2-1})^2}{2} = \frac{(a_1)^2}{2} = \frac{(4)^2}{2} = 8$$

$$a_3 = \frac{(a_{3-1})^2}{2} = \frac{(a_2)^2}{2} = \frac{(8)^2}{2} = 32$$

$$a_4 = \frac{(a_{4-1})^2}{2} = \frac{(a_3)^2}{2} = \frac{(32)^2}{2} = 512$$

Assim, a sequência é (4, 8, 32, 512, ...).

Como cada termo depende do termo imediatamente anterior, dizemos que a sequência é uma recursão de 1ª ordem.

Outro exemplo é a sequência de Fibonacci, definida recursivamente da seguinte maneira:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ se } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Seus primeiros termos são:

$$\begin{aligned} &f_1 = f_2 = 1 \\ &f_3 = f_{3-1} + f_{3-2} = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2 \\ &f_4 = f_{4-1} + f_{4-2} = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3 \\ &f_5 = f_{5-1} + f_{5-2} = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5 \\ &f_6 = f_{6-1} + f_{6-2} = f_5 + f_4 = 5 + 3 = 8 \\ &\ldots \end{aligned}$$

A sequência de Fibonacci é, portanto, (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...). Como cada termo dela depende dos dois termos imediatamente anteriores, ela é uma recursão de 2ª ordem.

Progressão aritmética

Uma progressão aritmética (PA), é uma sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é obtido adicionando-se uma constante ao termo anterior, que é chamada de razão da PA. Isso implica que a diferença entre dois termos consecutivos de uma PA é sempre constante.

São exemplos de progressões aritméticas:

a) (2, 5, 8, 11, 14, 17, ...) é uma PA de razão $r = 3$. É uma PA crescente, ou seja, $a_{n+1} > a_n$, para $n \geqslant 1$;

b) (12, 10, 8, 6, 4, 2, 0, ...) é uma PA de razão $r = -2$. É uma PA decrescente, ou seja, $a_{n+1} < a_n$, para $n \geqslant 1$;

c) (3, 3, 3, 3, ...) é uma PA de razão $r = 0$. É uma PA constante, ou seja, $a_{n+1} = a_n$, para $n \geqslant 1$.

Podemos formalizar a definição de progressão aritmética do seguinte modo: uma PA de razão r, é uma sequência a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, dada por:

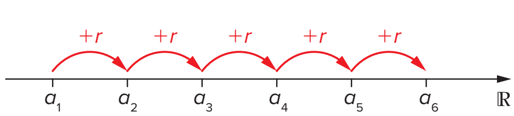
$$a_{n+1} = a_n + r$$

As progressões aritméticas podem ser classificadas em:

- Crescentes: $r > 0$
- Decrescentes: $r < 0$
- Constantes: $r = 0$

Termo geral de uma progressão aritmética

Uma abordagem interessante para entender uma progressão aritmética de termos reais é imaginar seus termos na reta dos números reais. Eles estarão igualmente espaçados e a distância entre dois termos consecutivos é igual ao módulo da razão. Podemos imaginar, então, que para obter-se um termo em função de outro termo realizam-se deslocamentos múltiplos da razão (como se a razão fosse o tamanho de um passo ou uma espécie de unidade de deslocamento), como ilustrado abaixo:



Observe que:

$$\begin{array}{ll} a_2 = a_1 + r & a_{10} = a_1 + 9r \\ a_3 = a_1 + 2r & a_{10} = a_6 + 4r \\ a_4 = a_1 + 3r & a_8 = a_3 + 5r \Rightarrow a_3 = a_8 - 5r \\ a_6 = a_3 + 3r & a_7 = a_4 + 3r \Rightarrow a_4 = a_7 - 3r \end{array}$$

Os exemplos sugerem que para determinarmos um termo a_n a partir de um termo a_p, com $n > p$, devemos adicionar a a_p o número de razões igual à diferença de suas posições, ou seja:

$$a_n = a_p + (n - p) \cdot r$$

Em particular, se p igual a 1:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \quad \text{(I)}$$

Vamos enunciar e demonstrar isso de maneira mais formal.

Seja a PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão r e termo geral dado por $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$. De maneira geral, temos:

$$a_n = a_p + (n - p) \cdot r \quad \text{(II)}$$

Demonstração:

Para demonstrar a expressão (II), primeiro demonstraremos a expressão (I) para $n \in \mathbb{N}^*$ pelo princípio da indução finita.

Base: A expressão (I) é válida para $n = 1$, já que $a_1 = a_1 + (1 - 1) \cdot r$.

Passo indutivo: Admita-se, por hipótese de indução, que, para algum k natural, $k \geqslant 1$, vale:

$$a_k = a_1 + (k - 1) \cdot r$$

Pela definição de PA tem-se:

$$a_{k+1} = a_k + r$$
$$a_{k+1} = a_1 + (k - 1) \cdot r + r \quad \text{(pela hipótese de indução)}$$
$$a_{k+1} = a_1 + (k - 1 + 1) \cdot r$$
$$a_{k+1} = a_1 + [(k + 1) - 1] \cdot r$$

Logo, está provado o passo indutivo.

Portanto, pelo princípio da indução finita, para qualquer n natural, $n \geqslant 1$ tem-se:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Dessa expressão, temos, para $n > p$:

$$a_n - a_p = (a_1 + (n - 1) \cdot r) - (a_1 + (p - 1) \cdot r)$$
$$a_n - a_p = (a_1 - a_1 + [(n - 1) - (p - 1)] \cdot r)$$
$$a_n - a_p = (n - p) \cdot r$$
$$a_n = a_p + (n - p) \cdot r$$

O termo geral da PA tem diversas utilizações, tais como: calcular um termo da PA conhecida sua posição, determinar a razão conhecendo dois termos e suas posições ou determinar o número de termos da PA. Vejamos exemplos dessas aplicações na forma de exercícios.

Exercícios resolvidos

1. Dada uma progressão aritmética com $a_1 = 2$ e razão igual a 3, determine o trigésimo primeiro termo dessa sequência.

Resolução:

Seja $r = 3$ a razão da PA e a_{31} o termo desejado. Do termo geral temos:

$$a_{31} = a_1 + (31 - 1) \cdot r = 2 + 30 \cdot 3 = 92$$

Assim, o trigésimo primeiro termo da PA é 92.

2. Em uma progressão aritmética de razão 4, o quinto termo é igual a -3. Determine o primeiro e o vigésimo termo dessa progressão.

Resolução:

Do enunciado temos que $r = 4$ e que $a_5 = -3$. Assim:

$a_1 = a_5 + (1 - 5) \cdot r = -3 + (-4) \cdot 4 = -3 - 16 = -19$

$a_{20} = a_5 + (20 - 5) \cdot r = -3 + 15 \cdot 4 = -3 + 60 = 57$

Então, o primeiro e o quinto termos são, respectivamente, -19 e 57.

3. Em uma progressão aritmética, o primeiro termo é 10 e o vigésimo primeiro termo é 14. Determine a razão dessa PA.

Resolução:

Utilizando a fórmula do termo geral:

$$a_{21} = a_1 + (21 - 1) \cdot r$$
$$14 = 10 + 20 \cdot r$$
$$14 - 10 = 20 \cdot r$$
$$r = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

A razão dessa PA é $\frac{1}{5}$.

4. Determine o número de múltiplos de 3 entre 100 e 400.

Resolução:

A sequência de múltiplos de 3 entre 100 e 400 é (102, 105, 108, ..., 399). É uma PA de n termos onde $a_1 = 102$, $a_n = 399$ e $r = 3$. Do termo geral podemos determinar o valor de n:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$
$$399 = 102 + (n - 1) \cdot 3$$
$$n - 1 = \frac{399 - 102}{3}$$
$$n - 1 = 99$$
$$n = 100$$

Logo, existem 100 múltiplos de 3 entre 100 e 400.

5. Determine x de modo que $(x, 3x + 1, 4x + 5)$ seja uma progressão aritmética.

Resolução:

Na PA $(x, 3x + 1, 4x + 5)$ tem-se $a_1 = x$, $a_2 = 3x + 1$ e $a_3 = 4x + 5$. Assim:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = r$$
$$(3x + 1) - x = (4x + 5) - (3x + 1)$$
$$3x + 1 - x = 4x + 5 - 3x - 1$$
$$2x + 1 = x + 4$$
$$2x - x = 4 - 1$$
$$x = 3$$

A PA em questão é $(3, 3 \cdot 3 + 1, 4 \cdot 3 + 5) = (3, 10, 17)$, com razão igual a 7.

6. Determine a PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$, na qual: $\begin{cases} a_3 + a_6 = 14 \\ a_5 + a_7 = 18 \end{cases}$.

Resolução:

Temos:

$$\begin{cases} a_3 + a_6 = 14 \\ a_5 + a_7 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1 + 2r) + (a_1 + 5r) = 14 \\ (a_1 + 4r) + (a_1 + 6r) = 18 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 7r = 14 & \text{(I)} \\ 2a_1 + 10r = 18 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da diferença (II) − (I) vem que: $3r = 4 \Rightarrow r = \frac{4}{3}$.

Substituindo em (I):

$$2a_1 + 7 \cdot \frac{4}{3} = 14 \Rightarrow 2a_1 = 14 - \frac{28}{3} \Rightarrow 2a_1 = \frac{14}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{7}{3}$$

Portanto, a PA em questão tem $a_1 = \frac{7}{3}$ e $r = \frac{4}{3}$, sendo igual a $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{15}{3}, ...\right)$.

Saiba mais

Toda função afim de domínio real, quando restrita a valores de x naturais não nulos, é equivalente a uma PA não constante de razão igual ao coeficiente angular da função. Por exemplo, dada a função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 3$, a sequência $(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), ...)$ é uma PA de termo inicial $f(1) = -1$ e razão 2. De fato:

$$(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), ...) = (-1, 1, 3, 5, 7, ...)$$

Além disso, para toda PA não constante, existe uma função afim tal que a PA pode ser obtida pela restrição da função a valores de x naturais não nulos. Isto é, dada uma PA $(a_1, a_2, a_3, ...)$, com $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, existe uma função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, com $m \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{R}$, tal que:

$$f(k) = mk + n = a_k$$

Por exemplo, dada a PA $(12, 7, 2, -3, -8, ...)$, a função afim que a gera é $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 17 - 5x$. De fato, temos:

$$f(1) = 17 - 5 \cdot 1 = 12 = a_1$$
$$f(2) = 17 - 5 \cdot 2 = 7 = a_2$$
$$f(3) = 17 - 5 \cdot 3 = 2 = a_3$$
$$\dots$$

Propriedades das progressões aritméticas

Propriedade 1

Em algumas situações podemos escrever as progressões aritméticas utilizando representações simétricas em relação ao termo central. Dessa maneira, facilitamos a solução de inúmeros problemas. As representações mais usuais são as seguintes:

- PA de 3 termos: $(x - r, x, x + r)$.
- PA de 5 termos: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$.
- PA de 4 termos: $(x - 3s, x - s, x + s, x + 3s)$, com $2s = r$.

Propriedade 2

Em uma PA de três termos, o termo do meio é a média aritmética dos outros dois. Em símbolos:

$$(a, b, c) \text{ é uma PA } \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

Demonstração:

Se (a, b, c) é uma PA, então:

$$b - a = c - b \Rightarrow 2b = a + c \Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

Observe nas progressões a seguir:

$$(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20) \Rightarrow 5 = \frac{2+8}{2}, 11 = \frac{8+14}{2}, 17 = \frac{14+20}{2}, \ldots$$

$$\left(2-\sqrt{2}, 2, 2+\sqrt{2}\right) \Rightarrow 2 = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)+\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$$

Uma PA com número ímpar de termos possui termo central, ou seja, um termo cujo número de termos antes e depois dele é o mesmo. As distâncias entre esse termo e o último e entre esse termo e o primeiro são iguais, pois o número de razões entre o primeiro termo e o central é igual ao número de razões entre o central e o último.

Assim, se $(a_1, a_2, ..., a_n)$ é uma PA com quantidade n ímpar de termos, então a posição central é $k = \frac{1+n}{2}$ e vale $a_k = \frac{a_1 + a_n}{2}$.

Como exemplo, seja a PA (1, 4, 7, ..., 91), de razão $r = 3$ e $\frac{91-1}{3} + 1 = 31$ termos. Assim, o termo central dessa PA tem posição $\frac{1+31}{2} = 16$ e vale $a_{16} = \frac{1+91}{2} = 46$

Propriedade 3

Em uma PA finita, a soma dos termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Analisando de maneira informal, se tivermos dois termos equidistantes do primeiro e do último termo da PA, o número de razões que acrescentamos ao primeiro termo para obter um dos termos equidistantes é igual ao número de razões que subtraímos do último termo para obter o outro termo equidistante, de maneira que a soma dos dois termos é igual à soma dos extremos.

Uma demonstração mais formal seria:

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma PA de n termos e sejam a_{1+k} e a_{n-k} termos equidistantes de a_1 e a_n, respectivamente. Dessa maneira, tem-se:

$$a_{1+k} + a_{n-k} = [a_1 + (1 + k - 1) \cdot r] + [a_n - (n - (n - k) \cdot r)] =$$
$$= [a_1 + k \cdot r] + [a_n - k \cdot r] = a_1 + a_n + k \cdot r - k \cdot r = a_1 + a_n$$

Observe os seguintes exemplos:

a) Na PA (2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30), tem-se:
$6 + 26 = 2 + 30 = 32$
$10 + 22 = 2 + 30 = 32$
$14 + 18 = 2 + 30 = 32$

b) Na PA (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23), tem-se:
$8 + 20 = 5 + 23 = 28$
$11 + 17 = 5 + 23 = 28$
$14 + 14 = 5 + 23 = 28$

Note que, em progressões aritméticas com número ímpar de termos, o termo central equidista dos dois extremos, devendo ser somado a ele mesmo para o resultado ser igual à soma dos extremos.

Exercícios resolvidos

7. A sequência $(a, 10, 2b + 1, 20)$ é uma PA. Determine os valores de a e b.

Resolução:

Como $(a, 10, 2b + 1, 20)$ é uma PA, utilizando a propriedade da média aritmética tem-se:

$$2b + 1 = \frac{10+20}{2} \Rightarrow 2b + 1 = 15 \Rightarrow 2b = 14 \Rightarrow b = 7$$

$$10 = \frac{a + (2b+1)}{2} \Rightarrow 10 = \frac{a + (2 \cdot 7 + 1)}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10 = \frac{a + 15}{2} \Rightarrow a + 15 = 20 \Rightarrow a = 5$$

8. Obtenha uma PA de três termos cuja soma dos três termos seja 24 e cujo produto seja 440.

Resolução:

Seja $(x - r, x, x + r)$ a PA. Do enunciado:

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 24 & \text{(I)} \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 440 & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I): $(x - r) + x + (x + r) = 24 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$

Substituindo em (II):

$$(8 - r) \cdot 8 \cdot (8 + r) = 440 \Rightarrow (8 - r) \cdot (8 + r) = 55 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 64 - r^2 = 55 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

Assim, temos duas progressões aritméticas como resposta: $\begin{cases} \text{se } r = 3\text{, a PA será } (5, 8, 11) \\ \text{se } r = -3\text{, a PA será } (11, 8, 5) \end{cases}$.

9. Em uma PA de 4 termos, a soma deles é 14, enquanto o produto entre o primeiro e o último é −44. Escreva essa PA.

Resolução:

Seja a PA $(x - 3s, x - s, x + s, x + 3s)$, na qual $r = 2s$. Das condições do problema temos:

1) $(x - 3s) + (x - s) + (x + s) + (x + 3s) = 14 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x = 14 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

2) $(x - 3s) \cdot (x + 3s) = -44 \Rightarrow x^2 - 9s^2 = -44 \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 9s^2 = -44 \Rightarrow 9s^2 = \frac{49}{4} + 44 \Rightarrow$
$\Rightarrow 9s^2 = \frac{49 + 176}{4} \Rightarrow 9s^2 = \frac{225}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow s^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow s = \pm\frac{5}{2}$

Temos duas progressões aritméticas satisfazendo o problema, uma com razão $r = 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$ e primeiro termo $(x - 3s) = \frac{7}{2} - 3 \cdot \frac{5}{2} = -4$, e outra com razão $r = 2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -5$ e primeiro termo $(x - 3s) = \frac{7}{2} - 3 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = 11$.

Portanto, as progressões são $(-4, 1, 6, 11)$ e $(11, 6, 1, -4)$.

Soma dos *n* primeiros termos de uma PA

Conta-se uma história divertida a respeito do grande matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855), conhecido como o Príncipe da Matemática.

Ainda criança, talvez com 7 ou 8 anos, seu professor, para manter os alunos ocupados, mandou que adicionassem todos os números de 1 a 100. Para surpresa do professor, em poucos instantes, o pequeno Gauss apresentou a resposta correta, 5 050.

Como pôde ter feito a conta tão rápido?

Provavelmente se valeu da propriedade da soma de termos equidistantes dos extremos de uma PA, em uma ideia similar à seguinte:

$$\begin{array}{rl} & S_{100} = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 \\ + & S_{100} = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline & 2S_{100} = 101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

$$2S_{100} = 101 \cdot 100 \Rightarrow S_{100} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = 5\,050$$

Vamos utilizar o mesmo procedimento para a PA (3, 7, 11, 15, 19, 23, 27), que tem 7 termos:

$$S_7 = 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27$$

$$S_7 = 27 + 23 + 19 + 15 + 11 + 7 + 3$$

Adicionando termo a termo, temos:

$$2S_7 = 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30$$

$$2S_7 = 30 \cdot 7 \Rightarrow S_7 = \frac{210}{2} = 105$$

Generalizando para a PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, an)$:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \quad \text{(I)}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1 \quad \text{(II)}$$

Somando (I) e (II):

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n$$

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n}$$

Portanto, a soma dos n primeiros termos da PA $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é igual à metade do produto do número de termos pela soma do primeiro e último termos.

Exercícios resolvidos

10. Calcule a soma dos 20 primeiros termos da PA (2, 5, 8, 11, ...).

Resolução:

Temos $a_1 = 2$, $r = 3$ e $a_{20} = a_1 + 19r$, logo:

$$a_{20} = 2 + 19 \cdot 3 \Rightarrow a_{20} = 2 + 57 = 59$$

A soma dos 20 primeiros termos é dada por:

$$S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} = \frac{(2 + 59) \cdot 20}{2} = \frac{61 \cdot 20}{2} = 610$$

11. Calcule:

a) A soma dos n primeiros inteiros positivos.

b) A soma dos n primeiros ímpares positivos.

c) A soma dos n primeiros pares positivos.

Resolução:

a) A sequência dos n primeiros inteiros positivos $(1, 2, 3, 4, 5, \dots, n)$ consiste em uma PA de primeiro termo e razão 1. A soma dos n primeiros termos é dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(1 + n) \cdot n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$.

b) A sequência dos n primeiros ímpares positivos (1, 3, 5, 7, 9, ...) consiste em uma PA de razão 2, $a_1 = 1$ e $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$. A soma dos n primeiros termos é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{\big(1 + (2n - 1)\big) \cdot n}{2} = \frac{(2n) \cdot n}{2} = n^2$$

Observe os exemplos: $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$, ...

c) A sequência dos n primeiros pares positivos (2, 4, 6, 8, ...) consiste em uma PA de razão 2, $a_1 = 2$ e $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2 + 2n - 2 = 2n$.
A soma dos n primeiros termos é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{(2 + 2n) \cdot n}{2} = \frac{2 \cdot (n + 1) \cdot n}{2} = n^2 + n$$

12. Determine a soma dos múltiplos de 3 ou múltiplos de 4 entre 1 e 1000.

Resolução:

Como os múltiplos de 12 são também múltiplos de 3 e de 4, devemos somar o valor da soma dos múltiplos de 3 com o valor da soma dos múltiplos de 4 e descontar o valor da soma dos múltiplos de 12 (pois se repetirão).
Múltiplos de 3:
Como $1000 = 3\,333 + 1$, a sequência (3, 6, 9, ..., 999) tem 333 termos e soma $\frac{(3 + 999) \cdot 333}{2} = 166\,833$.

Múltiplos de 4:
Como $1000 = 4 \cdot 250$, a sequência (4, 8, 12, ..., 1000) tem 250 termos e soma $\frac{(4 + 1000) \cdot 250}{2} = 125\,500$.

Múltiplos de 12:
Como $1000 = 12 \cdot 83 + 4 = 996 + 4$, a sequência (12, 24, ..., 996) tem 83 termos e soma $\frac{(12 + 996) \cdot 83}{2} = 41\,832$.

Assim, a soma S pedida é igual a:

$$S = 166\,833 + 125\,500 - 41\,832 = 250\,501$$

13. Uma PA tem soma dos n primeiros termos dadas por $S_n = 3n^2 - 2n$. Determine a PA.

Resolução:

Tem-se:

$$\begin{cases} S_1 = a_1 = 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 \\ S_2 = a_1 + a_2 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 1 + a_2 \Rightarrow a_2 = 7 \end{cases}$$

Assim, $r = a_2 - a_1 = 7 - 1 = 6$ e a PA é (1, 7, 13, 19, ...).

14. Prove que em uma PA com número ímpar de termos o termo central é a média aritmética de todos os termos.

Resolução:

Para n ímpar, seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma PA. Seu termo central tem posição $\frac{n+1}{2}$ e satisfaz $a_{\frac{n+1}{2}} = \frac{a_1 + a_n}{2}$.

A média aritmética M dos n termos da PA é dada por:

$$M = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n} = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} =$$

$$= \frac{a_1 + a_n}{2} = a_{\frac{n+1}{2}}$$

Progressão geométrica

Uma progressão geométrica (PG), é uma sequência na qual cada termo, a partir do segundo, é obtido pelo produto do termo anterior e uma constante, chamada de razão da PG, em geral representada pela letra q. Isso implica que, em uma PG, a razão entre dois termos consecutivos é constante.

São exemplos de progressões geométricas:

a) (2, 4, 8, 16, 32, 64, ...) é uma PG com 1º termo igual a 2 e razão $q = 2$. É uma PG crescente.

b) (192, 96, 48, 24, 12, 6, 3, ...) é uma PG com 1º termo igual a 192 e razão $q = \frac{1}{2}$. É uma PG decrescente.

c) $(-1, -3, -9, -27, -81, ...)$ é uma PG com 1º termo igual a -1 e razão $q = 3$. É uma PG decrescente.

d) $(-16, -8, -4, -2, -1, ...)$ é uma PG com 1º termo igual a -16 e razão $q = \frac{1}{2}$. É uma PG crescente.

e) $(1, -2, 4, -8, 16, -32, 64, ...)$ é uma PG com 1º termo igual a 1 e razão $q = -2$. É uma PG oscilante ou alternante.

f) (3, 3, 3, 3, 3, ...) é uma PG de razão $q = 1$. É uma PG constante.

g) (3, 0, 0, 0, ...) é uma PG de razão $q = 0$. É chamada de PG degenerada.

Podemos formalizar a definição de PG da seguinte maneira: uma progressão geométrica de razão q é uma sequência a_n, $n \in \mathbb{N}^*$, dada por:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

! Atenção

Podemos classificar as progressões geométricas em:
- Crescentes: ($a_1 > 0$ e $q > 1$) ou ($a_1 < 0$ e $0 < q < 1$).
- Decrescentes: ($a_1 > 0$ e $0 < q < 1$) ou ($a_1 < 0$ e $q > 1$).
- Alternantes ou oscilantes: $q < 0$ e $a_1 \neq 0$.
- Constantes: $q = 1$ ou $a_1 = 0$.
- Degeneradas: $q = 0$ e $a_1 \neq 0$.

Termo geral de uma progressão geométrica

Para uma PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão q, o deslocamento de um termo a outro se dá mediante sucessivas multiplicações ou divisões pela razão q. Observe os exemplos a seguir.

$$a_2 = a_1 \cdot q$$
$$a_3 = a_1 \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^2$$
$$a_4 = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q = a_1 \cdot q^3$$
$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$
$$a_6 = a_3 \cdot q \cdot q \cdot q = a_3 \cdot q^3$$
$$a_{10} = a_6 \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q = a_6 \cdot q^4$$
$$a_7 = a_4 \cdot q \cdot q \cdot q = a \cdot q^3 \Rightarrow a_4 = \frac{a_7}{q^3} \Rightarrow a_4 = a_7 \cdot q^{-3}$$

Os exemplos sugerem que para determinarmos um termo a_n a partir de um termo a_p, com $n > p$, devemos multiplicar a_p por um número de razões igual à diferença de suas posições, ou seja:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$

Em particular, se p igual a 1:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{(I)}$$

Vamos enunciar e demonstrar isso de maneira mais formal:

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, seu termo geral é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

De maneira geral:

$$a_n = a_p \cdot q^{n-p} \quad \text{(II)}$$

FRENTE 2

Demonstração:

Para demonstrar a expressão (II), primeiro demonstraremos a expressão (I) para $n \in \mathbb{N}^*$ pelo princípio da indução finita, analogamente ao que foi feito com as PAs.

- Base: A expressão (I) é válida para $n = 1$, já que $a_1 = a_1 \cdot q^{(1-1)}$.
- Passo indutivo: Admita-se, por hipótese de indução, que, para algum k natural, $k \geqslant 1$, vale:

$$a_k = a_1 \cdot q^{k-1}$$

Pela definição de PG tem-se:

$a_{k+1} = a_k \cdot q$

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{k-1} \cdot q$ (pela hipótese de indução)

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{k-1+1}$

$a_{k+1} = a_1 \cdot q^{(k+1)-1}$

Então está provado o passo indutivo.

Portanto, pelo princípio da indução finita, para qualquer n natural, $n \geqslant 1$, tem-se:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Dessa expressão, temos, para $n > p$:

$$a_n : a_p = (a_1 \cdot q^{n-1}) : (a_1 \cdot q^{p-1})$$
$$a_n : a_p = q^{(n-1)-(p-1)}$$
$$a_n : a_p = q^{n-p}$$
$$a_n = a_p \cdot q^{n-p}$$

O termo geral da PG tem diversas utilizações, tais como calcular um termo da PG conhecida sua posição, determinar a razão conhecendo dois termos e suas posições, determinar o número de termos da PG.

Vejamos exemplos dessas aplicações na forma de exercícios resolvidos.

Exercícios resolvidos

15. A sequência $(x + 1, x + 3, x + 4, ...)$ é uma PG. Determine o $4^{\underline{o}}$ termo dessa PG.

Resolução:

Se $(x + 1, x + 3, x + 4, ...)$ é uma PG, então:

$$\frac{x+3}{x+1} = \frac{x+4}{x+3} \Rightarrow (x+3)^2 = (x+1) \cdot (x+4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 5x + 4 \Rightarrow x = -5$$

Assim a PG é (−4, −2, −1, ..), de razão $\frac{1}{2}$, e seu $4^{\underline{o}}$ termo é $(-1) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

16. Obtenha o $6^{\underline{o}}$ e o $12^{\underline{o}}$ termos da PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, ...\right)$.

Resolução:

Na PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, ...\right)$ o $1^{\underline{o}}$ termo vale $\frac{1}{4}$ e a razão é $q = 2$. Assim:

$$a_6 = a_1 \cdot q^{6-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^5 = \frac{1}{4} \cdot 32 = 8$$
$$a_{12} = a_1 \cdot q^{12-1} = \frac{1}{4} \cdot 2^{11} = \frac{1}{2^2} \cdot 2^{11} = 2^9 = 512 \text{ ou}$$
$$a_{12} = a_6 \cdot q^{12-6} = 8 \cdot 2^6 = 2^3 \cdot 2^6 = 2^9 = 512$$

17. Em uma PG de razão positiva, $a_5 = 5$ e $a_9 = 20$. Calcule o $13^{\underline{o}}$ termo dessa PG.

Resolução:

Sendo $q > 0$ a razão da PG, temos:

$$a_9 = a_5 \cdot q^{9-5} \Rightarrow 20 = 5 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{20}{5} = 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Desse modo:

$$a_{13} = a_9 \cdot q^{13-9} = 20 \cdot (\sqrt{2})^4 = 20 \cdot 4 = 80$$

18. Determine a(s) PG(s) em que o $1^{\underline{o}}$ termo vale 243 e o $5^{\underline{o}}$ termo vale 48.

Resolução:

Seja q a razão da PG procurada. Tem-se:

$$a_5 = a_1 \cdot q^{5-1} \Rightarrow 48 = 243 \cdot q^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q^4 = \frac{48}{243} = \frac{16}{81} \Rightarrow q = \pm\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \pm\frac{2}{3}$$

Assim, existem duas PGs satisfazendo as condições do problema, que são:

$$(243, 162, 108, 72, 48, ...), \text{ se } q = \frac{2}{3} \text{ e}$$
$$(243, -162, 108, -72, 48, ...), \text{ se } q = -\frac{2}{3}$$

Saiba mais

Toda função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de lei $f(x) = a \cdot b^x$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*_+$, quando restrita a valores de x naturais não nulos, é equivalente a uma PG crescente ou decrescente de razão igual a b. Por exemplo, dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3 \cdot 2^x$, a sequência $(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), ...)$ é uma PG de termo inicial $f(1) = -6$ e razão 2. Observe:

$$(f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), ...) = (-6, -12, -24, -48, -96, ...)$$

Além disso, para toda PG crescente ou decrescente, existe uma função real da forma $f(x) = a \cdot b^x$ tal que a PG pode ser obtida pela restrição de f a valores de x naturais não nulos. Isto é, dada uma PG crescente ou decrescente $(a_1, a_2, a_3, ...)$, com $a_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, existe uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a \cdot b^x$, com $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}^*_+$, tal que:

$$f(k) = a \cdot b^k = a_k$$

Por exemplo, dada a PG $\left(12, 6, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, ...\right)$, uma função que a gera é $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. De fato, temos:

$$f(1) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 12 = a_1 \qquad f(4) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} = a_4$$
$$f(2) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 = a_2 \qquad f(5) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{3}{4} = a_5$$
$$f(3) = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 3 = a_3 \qquad ...$$

Propriedades das progressões geométricas

Propriedade 1

De maneira similar ao que foi feito para as PAs, fica mais fácil resolver alguns problemas se escrevermos as PGs de forma simétrica em relação ao termo central. Assim, temos as seguintes representações especiais mais frequentemente utilizadas:

- PG de 3 termos: $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$.
- PG de 5 termos: $\left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, x \cdot q, x \cdot q^2\right)$.
- PG de 4 termos: $\left(\frac{x}{a^3}, \frac{x}{a}, x \cdot a, x \cdot a^3\right), q = a^2$.

Propriedade 2

Se três termos formam uma PG, então, o quadrado do termo do meio é o produto dos outros dois.

Demonstração:

$$(a, b, c) \text{ é PG } \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot c$$

Se os três termos são positivos, o termo central é a média geométrica dos outros dois, ou seja:

$$b = \sqrt{a \cdot c}$$

Em progressões geométricas que têm número ímpar de termos, o primeiro termo, o termo central e o último termo formam, por sua vez, outra PG. Assim:

$$\left(a_{\frac{1+n}{2}}\right)^2 = a_1 \cdot a_n$$

Propriedade 3

Em uma PG finita, o produto dos termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos.

Demonstração:

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma PG de n termos e sejam a_{1+k} e a_{n-k} termos equidistantes de a_1 e a_n, respectivamente. Dessa maneira, tem-se:

$$a_{1+k} \cdot a_{n-k} = (a_1 \cdot q^{1+k-1}) \cdot (a_n \cdot q^{(n-k)-n}) =$$
$$= a_1 \cdot a_n \cdot q^k \cdot q^{-k} = a_1 \cdot a_n \cdot q^{k-k} = a_1 \cdot a_n \cdot q^0 = a_1 \cdot a_n$$

Veja os exemplos a seguir:

a) Na PG $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16\right)$, tem-se:

$$\frac{1}{4} \cdot 16 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4$$

b) Na PG $\left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}, 1, -3, 9, -27, 81, -243\right)$, tem-se:

$$\frac{1}{9} \cdot (-243) = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 81 = 1 \cdot (-27) = (-3) \cdot 9 = -27$$

Exercícios resolvidos

19. A soma de três números que formam uma PA crescente é 36. Determine esses números, sabendo que se somarmos 6 unidades ao último eles passam a formar uma PG.

Resolução:

Sejam os números que formam a PA $(x - r, x, x + r)$, temos:

$$(x - r) + x + (x + r) = 36 \Rightarrow x - r + x + x + r = 36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12$$

Assim, sendo $(12 - r, 12, 12 + r)$ a PA, temos que $(12 - r, 12, 12 + r + 6) = (12 - r, 12, 18 + r)$ é uma PG, logo:

$$12^2 = (12 - r) \cdot (18 + r) \Rightarrow 144 = 216 - 6r - r^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r^2 + 6r - 72 = 0 \Rightarrow r = 6 \text{ ou } r = -12$$

Como $r > 0$, temos $r = 6$ e os números são 6, 12 e 18.

20. Determine três números em PG, sabendo que o produto vale 27 e a soma $\frac{21}{2}$.

Resolução:

Podemos escrever a PG como $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$. Assim, nas condições do enunciado:

$$\frac{x}{q} \cdot x \cdot (x \cdot q) = 27 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = 3$$

Assim:

$$\frac{3}{q} + 3 + 3q = \frac{21}{2} \Rightarrow \frac{6 + 6q + 6q^2}{2q} = \frac{21q}{2q} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6q^2 - 15q + 6 = 0 \Rightarrow q = 2 \text{ ou } q = \frac{1}{2}$$

Temos então duas PGs possíveis:

$$\begin{cases} \text{se } q = 2, \text{ então } \left(\frac{3}{2}, 3, 6\right) \\ \text{se } q = \frac{1}{2}, \text{ então } \left(6, 3, \frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

21. Obtenha a PG de 4 termos em que a soma dos dois primeiros termos é 12 e a soma dos dois últimos é 300.

Resolução:

Do enunciado temos:

$$a_3 + a_4 = 300 \Rightarrow a_1 \cdot q^2 + a_2 \cdot q^2 = 300 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q^2 \cdot (a_1 + a_2) = 300 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow q^2 \cdot 12 = 300 \Rightarrow q^2 = 25 \Rightarrow q = \pm 5$$
$$a_1 + a_2 = 12 \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot q = 12 \Rightarrow a_1 \cdot (1 + q) = 12 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } q = 5, \text{ então } a_1 \cdot (1 + 5) = 12 \Rightarrow a_1 = 2 \\ \text{se } q = -5, \text{ então } a_1 \cdot (1 - 5) = 12 \Rightarrow a_1 = -3 \end{cases}$$

Assim, teremos duas respostas possíveis:

$$\begin{cases} \text{se } a_1 = 2 \text{ e } q = 5, \text{ então } (2, 10, 50, 250) \\ \text{se } a_1 = -3 \text{ e } q = -5, \text{ então } (-3, 15, -75, 375) \end{cases}$$

Produto dos *n* primeiros termos de uma PG

Seja a PG $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q. Se P_n é o produto dos n primeiros termos da PG, então tem-se:

$$(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Demonstração:

a) $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot a_n$ (I)

$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdot ... \cdot a_3 \cdot a_2 \cdot a_1$ (II)

Multiplicando (I) por (II):

$(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot ... \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot (a_1 \cdot a_n)$

$(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot ... \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n)$

$(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$

b) $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot ... \cdot a_n$

$P_n = a_1 \cdot (a_1 \cdot q) \cdot (a_1 \cdot q^2) \cdot (a_1 \cdot q^3) \cdot ... \cdot (a_1 \cdot q^{n-1})$

$P_n = a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot ... \cdot a_1 \cdot q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot ... \cdot q^{n-1}$

$P_n = a_1{}^n \cdot q^{1+2+3+...+n-1}$

$P_n = a_1{}^n \cdot q^{\frac{(1+n-1)\cdot(n-1)}{2}}$

$P_n = a_1{}^n \cdot q^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}$

Observe, por exemplo, como calcular o produto dos 12 primeiros termos da PG $\left(1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, ...\right)$.

A PG dada tem primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $q = \sqrt{2}$, logo:

$$P_{12} = a_1^{12} \cdot q^{\frac{12\cdot(12-1)}{2}} = 1^{12} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{66} = 1 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{66} = 2^{33}$$

Soma dos *n* primeiros termos de uma PG

Considere a progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão $q \neq 1$. Se S_n é a soma dos n primeiros termos da PG, então tem-se:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Se $q = 1$, tem-se que $S_n = n \cdot a_1$.

Demonstração:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$

$q \cdot S_n = q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n)$

$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$

Mas como $a_1 \cdot q = a_2$, $a_2 \cdot q = a_3$, $a_3 \cdot q = a_4$, ..., $a_{n-1} \cdot q = a_n$ e $a_n \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 \cdot q^n$, tem-se que:

$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n + a_1 \cdot q^n$

$q \cdot S_n = -a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n) + a_1 \cdot q^n$

$q \cdot S_n = -a_1 + S_n + a_1 \cdot q^n$

$q \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot q^n - a_1$

$S_n \cdot (q - 1) = a_1 \cdot (q^n - 1)$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Para $q = 1$ tem-se que $a_k = a_1 \cdot q^{k-1} = a_1 \cdot 1^{k-1} = a_1$, assim:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + ... + a_1 + a_1 = n \cdot a_1$

Observe, por exemplo, como calcular a soma dos 8 primeiros termos da PG (2, 6, 18, 54, ...).

Temos primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $q = 3$, então:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot (q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{2 \cdot (3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{2 \cdot (6\,561 - 1)}{2} = 6\,560$$

Soma dos termos de uma PG infinita

Vamos inicialmente entender o que vem a ser uma soma de infinitos termos.

Como exemplo, considere a PG infinita $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right)$.

Efetuando-se a soma de alguns de seus termos, obtém-se:

$S_1 = a_1 = 1$ $\quad (2 - 1 = 1)$

$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\quad \left(2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\right)$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ $\quad \left(2 - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}\right)$

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$ $\quad \left(2 - \frac{15}{8} = \frac{1}{8}\right)$

Observa-se que, à medida que o número de termos da soma aumenta, o resultado da soma aproxima-se cada vez mais de 2. Nesse sentido, entende-se o resultado de uma soma infinita como o valor do qual a soma se aproxima (limite), à medida que aumentamos o número de termos. No exemplo anterior:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = \lim_{n \to \infty} S_n = 2$$

Algumas somas infinitas convergem para valores finitos, outras não se aproximam de nenhum valor (podem aumentar ou diminuir o valor indefinidamente, ou mesmo oscilar). Chamamos as somas que convergem para valores finitos de **convergentes**. As que não convergem, de **divergentes**. Por exemplo, considere a soma S = 1 + 2 + 4 + 8 + ... O valor da soma S cresce à medida que o número de termos aumenta, sempre superando qualquer limite preestabelecido. Assim, se utilizarmos um número infinito de parcelas, o valor da soma tende a infinito.

Podemos entender de maneira menos formal o que acontece com a convergência de séries da forma q^n. Se $-1 < q < 1$, temos que $\lim |q|^n = \infty$ (q^n tende a 0).

Se $q < -1$ ou $q \geqslant 1$, a série não converge, pois $\lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \infty$ (o módulo de q^n aumenta indefinidamente). Se $q = -1$ a série q^n oscila. Veja os seguintes exemplos:

a) $q = \frac{1}{2} : \left(\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \left(\frac{1}{2}\right)^4, ...\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$

Os valores da série tendem a zero.

b) $q = -\frac{1}{2} : \left(-\frac{1}{2}, \left(-\frac{1}{2}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^3, \left(-\frac{1}{2}\right)^4, ...\right) =$
$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...\right)$

Os valores da série tendem a zero.

c) $q = 2 : (2, 2^2, 2^3, 2^4, ...) = (2, 4, 8, 16, ...)$

Os valores da série aumentam ilimitadamente.

d) $q = -2 : (-2, (-2)^2, (-2)^3, (-2)^4, ...) = (-2, 4, -8, 16, ...)$.

Os valores da série aumentam, em módulo, ilimitadamente.

e) $q = -1 : (-1, (-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, ...) = (-1, 1, -1, 1, ...)$

Os valores da série oscilam.

Voltando à soma dos termos de uma PG infinita, utilizando as análises anteriores, para PGs com razão entre -1 e 1 ($-1 < q < 1$), segue que:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... = \lim_{n\to\infty} S_n =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q},$$

pois $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ quando $-1 < q < 1$

Dessa maneira, verificamos que a soma S dos infinitos termos de uma PG de razão $-1 < q < 1$, converge para:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... = \frac{a_1}{1 - q}$$

Para progressões geométricas com razão q, tal que $|q| \geqslant 1$, a soma infinita não converge e não está definida.

Observe alguns exemplos de somas infinitas de progressões geométricas:

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + ... = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

c) $2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + ... = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} =$
$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 2 + \sqrt{2}$

d) A soma $1 + 2 + 4 + 8 + ...$ não converge, pois $q = 2$ e $|q| = 2 > 1$.

e) A soma $1 - 3 + 9 - 27 + ...$ não converge, pois $q = -3$ e $|q| = 3 > 1$.

Exercícios resolvidos

22. Considere a expressão a seguir.

$$S = \log_2 2a + \log_2 4a + \log_2 8a + ... + \log_2 2^{10}a$$

a) Simplifique essa expressão.

b) Determine a se $S = 75$.

Resolução:

a) $S = \log_2 2a + \log_2 4a + \log_2 8a + ... + \log_2 2^{10}a$

$S = \log_2(2a \cdot 4a \cdot 8a \cdot ... \cdot 2^{10}a)$

$S = \log_2\left[(2a)^{10} \cdot 2^{\frac{10\cdot(10-1)}{2}}\right]$

$S = \log_2\left[a^{10} \cdot 2^{10+45}\right]$

$S = \log_2 a^{10} + \log_2 2^{55}$

$S = 10 \cdot \log_2 a + 55$

b) $S = 75 \Rightarrow 10 \cdot \log_2 a + 55 = 75 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 a = \frac{75 - 55}{10} \Rightarrow \log_2 a = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = 2^2 = 4$

23. Em uma PG, o 1º termo é 1 e o 10º termo é 32. Calcule o produto dos dez primeiros termos dessa PG.

Resolução:

Se $a_1 = 1$ e $a_{10} = 32 = 2^5$, o produto será:

$$(P_{10})^2 = (a_1 \cdot a_{10})^{10} \Rightarrow (P_{10})^2 = (1 \cdot 2^5)^{10} = 2^{50} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_{10} = \sqrt{2^{50}} \Rightarrow P_{10} = 2^{25}$$

24. Determinar 11 números em PG tais que a soma dos dez primeiros é 3 069 e a soma dos dez últimos é 6 138.

Resolução:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_9 + a_{10} = 3069 \\ a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{10} + a_{11} = 6138 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_9 + a_{10} = 3069 \\ a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + ... + a_9 \cdot q + a_{10} \cdot q = 6138 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_9 + a_{10} = 3069 \\ q \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_9 + a_{10}) = 6138 \end{cases}$$

$$q \cdot 3069 = 6138$$
$$q = \frac{6138}{3069} = 2$$

Como a soma dos dez primeiros termos da PG é 3 069, temos:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3069 \Rightarrow \frac{a_1 \cdot 1023}{1} = 3069 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 = \frac{3069}{1023} = 3$$

Portanto, os 11 termos da PG são: (3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1 536, 3 072).

25. Os extremos de uma progressão geométrica crescente são 1 e 243. Se a soma dos termos dessa progressão é 364, determine a razão e o número de termos dessa PG.

Resolução:

Se $a_1 = 1$ e $a_n = 243$, tem-se:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 243 = 1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 243 = \frac{q^n}{q^1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^n = 243q \quad \text{(I)}$$

Sendo a soma dos termos dessa progressão igual a 364, então:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q-1} \Rightarrow 364 = \frac{1 \cdot (243q - 1)}{q-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 364q - 364 = 243q - 1 \Rightarrow 121q = 363 \Rightarrow q = 3$$

Substituindo $q = 3$ em (I):

$$3^n = 243 \cdot 3 \Rightarrow 3^n = 729 \Rightarrow 3^n = 3^6 \Rightarrow n = 6$$

Portanto, a razão da PG é 3 e seu número de termos é 6.

26. Um quadrado tem lados de medida a. Tomando os pontos médios dos lados, constrói-se outro quadrado. Repetindo-se o processo, constrói-se uma sequência de quadrados. Calcule a soma das áreas dos dez primeiros quadrados em função de a.

Resolução:

Ao tomarmos os pontos médios, construímos um quadrado com lados cuja razão com o lado do quadrado original é $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, a razão entre as áreas desses quadrados é $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ e as áreas formam uma PG de razão $\frac{1}{2}$: $\left(a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \frac{a^2}{8}, ...\right)$.

Assim a soma das áreas dos dez primeiros quadrados é:

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{a^2 \cdot \left(\frac{1}{2^{10}} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{a^2 \cdot \left(\frac{1 - 2^{10}}{2^{10}}\right)}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{a^2 \cdot \left(\frac{2^{10} - 1}{2^{10}}\right)}{\frac{1}{2}} = a^2 \cdot \left(\frac{2^{10} - 1}{2^{10}}\right) \cdot \frac{2}{1} = a^2 \cdot \left(\frac{2^{10} - 1}{2^9}\right) = \frac{1023}{512}a^2$$

27. Determine x na soma: $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{9} + \frac{x}{27} + ... = 30$

Resolução:

No primeiro membro da equação, tem-se a soma de uma PG infinita de razão $\frac{1}{3}$, logo, a soma da PG converge e é dada por $\frac{x}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{x}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}x$. A equação dada é equivalente a: $\frac{3}{2}x = 30 \Rightarrow x = 20$.

28. Determine a fração geratriz da dízima 0,232323....

Resolução:

$$0{,}23232323... = 0{,}23 + 0{,}0023 + 0{,}000023 +$$

$$+ 0{,}00000023 + ... = \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000} +$$

$$+ \frac{23}{100\,000\,000} + ...$$

A expressão corresponde à soma dos termos de uma PG infinita de primeiro termo $a_1 = \frac{23}{100}$ e razão $\frac{1}{100}$.

Assim: $S = \frac{23}{100} + \frac{23}{10\,000} + \frac{23}{1\,000\,000} + \frac{23}{100\,000\,000} +$

$$+ ... = \frac{\frac{23}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{23}{100} \cdot \frac{100}{99} = \frac{23}{99}.$$

Portanto, a fração geratriz da dízima 0,23232323... é $\frac{23}{99}$.

29. A soma dos termos de ordem ímpar de uma PG infinita é 90 e a soma dos termos de ordem par é 60. Calcule o 1º termo.

Resolução:

Seja a PG $(a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^3, a_1 \cdot q^4, a_1 \cdot q^5, ...)$, de razão q, com $-1 < q < 1$. A sequência formada pelos termos ímpares $(a_1, a_1 \cdot q^2, a_1 \cdot q^4, ...)$ e a formada pelos termos pares $(a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^3, a_1 \cdot q^5, ...)$ são duas PGs infinitas de razão q^2. Do enunciado, sabe-se que:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^4 + ... = 90 \\ a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 + a_1 \cdot q^5 + ... = 60 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a_1}{1 - q^2} = 90 & \text{(I)} \\ \frac{a_1 \cdot q}{1 - q^2} = 60 & \text{(II)} \end{cases}$$

Dividindo-se (II) por (I) tem-se:

$$\frac{\frac{a_1 \cdot q}{1 - q^2}}{\frac{a_1}{1 - q^2}} = \frac{60}{90} \Rightarrow \frac{a_1 \cdot q}{1 - q^2} \cdot \frac{1 - q^2}{a_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{3}$$

Substituindo o valor de q em (I) tem-se:

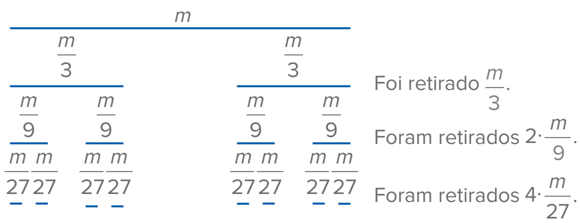
$$\frac{a_1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 90 \Rightarrow \frac{a_1}{1 - \frac{4}{9}} = 90 \Rightarrow \frac{a_1}{\frac{5}{9}} = 90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{5}{9} \cdot 90 = 50$$

30. Divide-se um segmento de comprimento m em três partes iguais e retira-se a parte central; para cada um dos segmentos repete-se o processo, retirando-se suas partes centrais e assim sucessivamente. Calcular a soma dos comprimentos retirados.

Resolução:

Do enunciado, podemos representar a situação como aparece na figura a seguir:



A sequência de comprimentos retirados forma a PG $\left(\frac{m}{3}, \frac{2m}{9}, \frac{4m}{27}, \ldots\right)$ de razão $q = \frac{2}{3}$.

A soma de todos os comprimentos retirados é dada por:

$$S = \frac{m}{3} + \frac{2m}{9} + \frac{4m}{27} + \ldots = \frac{\frac{m}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow S = \frac{\frac{m}{3}}{\frac{1}{3}} \Rightarrow S = m$$

31. Em um triângulo de perímetro $2p$ e área S, tomam-se os pontos médios dos lados e forma-se um novo triângulo. Repete-se o processo sucessivamente, criando-se uma sequência infinita de triângulos. Calcule:

a) a soma de todos os perímetros.

b) a soma de todas as áreas.

Resolução:

a) Cada novo triângulo da sequência tem como lados as bases médias do triângulo anterior, sendo, portanto, semelhante ao triângulo anterior, com razão de semelhança igual a $\frac{1}{2}$. Assim, os perímetros formam a PG $\left(2p, p, \frac{p}{2}, \ldots\right)$ de razão $q = \frac{1}{2}$ e a soma desses perímetros é dada por:

$$2p + p + \frac{p}{2} + \ldots = \frac{2p}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2p}{\frac{1}{2}} = 4p$$

b) A razão entre as áreas dos triângulos é $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Logo, a soma das áreas é dada por:

$$S + \frac{S}{4} + \frac{S}{16} + \ldots = \frac{S}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{S}{\frac{3}{4}} = \frac{4S}{3}$$

32. Em um plano cartesiano, um ponto material ocupa a posição (0, 2) e move-se 256 unidades de comprimento paralelamente ao eixo Ox, no sentido das abscissas positivas. A seguir, gira 90° no sentido anti-horário, deslocando-se $\frac{3}{4}$ do deslocamento anterior, ou seja, $\frac{3}{4} \cdot 256 = 192$ unidades de comprimento. O processo repete-se indefinidamente, ou seja, ao fim de cada deslocamento, o móvel gira 90° no sentido anti-horário e desloca-se $\frac{3}{4}$ do deslocamento anterior. Continuando o processo infinitamente, calcule para quais coordenadas o ponto converge.

Resolução:

Na direção do eixo Ox, a variação do valor das abscissas segue a sequência (256, −144, 81, ...) que é uma PG de razão $q = -\frac{9}{16}$. Assim, o valor para o qual a abscissa converge é:

$$0 + 256 - 144 + 81 - \ldots = 0 + \frac{256}{1 - \left(-\frac{9}{16}\right)} =$$

$$= \frac{256}{\frac{25}{16}} = 256 \cdot \frac{16}{25} = \frac{4096}{25} = 163{,}84$$

Na direção do eixo Oy, a variação do valor das ordenadas segue a sequência $\left(-192, 108, -\frac{243}{4}, \ldots\right)$, que é uma PG de razão $q = -\frac{9}{16}$. Assim, o valor para o qual a ordenada converge é:

$$2 - 192 + 108 - \frac{243}{4} + \ldots = 2 + \frac{-192}{1 - \left(-\frac{9}{16}\right)} = 2 + \frac{(-192)}{\frac{25}{16}} =$$

$$= 2 - 192 \cdot \frac{16}{25} = 2 - \frac{3072}{25} = 2 - 122{,}88 = -120{,}88$$

Logo, o móvel converge para a posição (163,84; 120,88).

Outras sequências

PA de ordem *k*

O termo geral de uma progressão aritmética é um polinômio do 1º grau em n. Veja:

$$a_n = a_1 + (n - 1)\,r = rn + (a_1 - r)$$

Podemos generalizar essa ideia, chamando de PA de ordem k uma sequência que tem como termo geral um polinômio de grau k.

Por exemplo, a sequência de termo geral $a_n = n^2 + n$, cujos 6 primeiros termos estão listados abaixo, é uma PA de ordem 2, pois o termo geral é um polinômio do 2º grau.

$$a_1 = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$
$$a_2 = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$
$$a_3 = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$$
$$a_4 = 4^2 + 4 = 16 + 4 = 20$$
$$a_5 = 5^2 + 5 = 25 + 5 = 30$$
$$a_6 = 6^2 + 6 = 36 + 6 = 42$$
$$\ldots$$

Assim, $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots) = (2, 6, 12, 20, 30, 42, \ldots)$.

Uma característica importante das PAs de ordem k é o fato de que a sequência formada pela diferença entre termos consecutivos de uma PA de ordem k é uma PA de ordem $k - 1$. Por exemplo, considerando a PA de ordem 2 listada acima, a sequência dada por $b_n = a_{n+1} - a_n$ é uma PA de ordem 2 − 1 = 1.

$$b_1 = a_{1+1} - a_1 = a_2 - a_1 = 6 - 2 = 4$$
$$b_2 = a_{2+1} - a_2 = a_3 - a_2 = 12 - 6 = 6$$
$$b_3 = a_{3+1} - a_3 = a_4 - a_3 = 20 - 12 = 8$$
$$b_4 = a_{4+1} - a_4 = a_5 - a_4 = 30 - 20 = 10$$
$$b_5 = a_{5+1} - a_5 = a_6 - a_5 = 42 - 30 = 12$$
$$\ldots$$

FRENTE 2

De fato, $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, ...) = (4, 6, 8, 10, 12, ...)$ é uma PA de termo inicial 4 e razão 2.

Podemos usar essa propriedade para calcular algumas expressões. Por exemplo, suponha que desejamos obter uma expressão que fornece a soma dos n primeiros quadrados de números naturais, dada por $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$. Para isso, considere a sequência $(S_1, S_2, S_3, ...)$.

Note que essa sequência satisfaz $S_{n+1} - S_n = (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, que é um polinômio do 2º grau em n. Logo, a sequência $(S_2 - S_1, S_3 - S_2, S_4 - S_3, ...)$ é uma PA de ordem 2 e, por isso, a sequência $(S_1, S_2, S_3, ...)$ é uma PA de ordem 3. Portanto, o termo geral S_n da sequência $(S_1, S_2, S_3, ...)$ é um polinômio do 3º grau em n, isto é, $S_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$.

Para deduzir os coeficientes A, B, C e D desse polinômio, podemos montar um sistema, considerando os valores de S_1, S_2, S_3 e S_4:

$$S_1 = 1^2 = 1$$
$$S_2 = 1^2 + 2^2 = 5$$
$$S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$
$$S_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$$

Desse modo, temos:

$$\begin{cases} A\cdot 1^3 + B\cdot 1^2 + C\cdot 1 + D = 1 \\ A\cdot 2^3 + B\cdot 2^2 + C\cdot 2 + D = 5 \\ A\cdot 3^3 + B\cdot 3^2 + C\cdot 3 + D = 14 \\ A\cdot 4^3 + B\cdot 4^2 + C\cdot 4 + D = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B + C + D = 1 \\ 8A + 4B + 2C + D = 5 \\ 27A + 9B + 3C + D = 14 \\ 64A + 16B + 4C + D = 30 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos:

$$A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{6} \text{ e } D = 0$$

Portanto:

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

Progressões aritmético-geométrica (PAG)

As progressões aritmético-geométricas são sequências da forma $c_n = a_n \cdot b_n$, onde a_n é uma PA e b_n é uma PG. Por exemplo, a sequência $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{11}{32}, ...\right)$ é formada pela multiplicação de cada elemento a_i da PA (3, 5, 7, 9, 11, ...) pelo respectivo elemento b_i da PG $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...\right)$.

Um problema típico de PAG é o do cálculo da soma de seus termos. Uma técnica interessante para resolver esse problema consiste em multiplicar a soma pela razão da PG e, em seguida, subtrair da soma o produto obtido.

Observe, como exemplo, o cálculo da soma da PAG dada acima, ou seja, $S = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + \frac{11}{32} + ...$.

Tem-se $S = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + \frac{11}{32} + ...$ e o produto de S pela razão da PG será $\frac{1}{2}S = \frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + \frac{11}{64} + ...$. A diferença entre essas somas é igual a:

$$S - \frac{1}{2}S = \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \frac{9}{16} + ...\right) - \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{8} + \frac{7}{16} + \frac{9}{32} + ...\right)$$

$$\frac{2S - S}{2} = \frac{3}{2} + \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{7}{8} - \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{9}{16} - \frac{7}{16}\right) + \left(\frac{11}{32} - \frac{9}{32}\right) + ...$$

$$\frac{S}{2} = \frac{3}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \frac{2}{16} + \frac{2}{32} + ... = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$$

$$\frac{S}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow S = 5$$

Sequência de Fibonacci

Como vimos no início deste capítulo, a sequência de Fibonacci é um exemplo de sequência recursiva. Essa sequência recebeu o nome do matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, que a utilizou para descrever, no ano de 1202, o crescimento de uma população de coelhos. Tal sequência já era, no entanto, conhecida na antiguidade. Pode-se definir a sequência de Fibonacci da seguinte maneira:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_k = f_{k-1} + f_{k-2}, k \geqslant 3 \end{cases}$$

Seus primeiros elementos são (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...).

A série de Fibonacci aparece em muitos problemas da Matemática e tem aplicações em outras ciências. A frequência com que aparece em fenômenos naturais lhe rendeu uma certa fama. Boa parte dessa fama está relacionada ao seguinte fenômeno: a razão entre dois termos consecutivos se aproxima da razão áurea $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61803399\right)$ à medida que cresce o valor de n. Veja os seguintes exemplos:

$$\frac{f_8}{f_7} = \frac{21}{13} \cong 1{,}61538461$$
$$\frac{f_9}{f_8} = \frac{34}{21} \cong 1{,}61904762$$
$$\frac{f_{10}}{f_9} = \frac{55}{34} \cong 1{,}61764706$$
$$\frac{f_{11}}{f_{10}} = \frac{89}{55} \cong 1{,}61818182$$
$$\frac{f_{12}}{f_{11}} = \frac{144}{89} \cong 1{,}61797753$$
$$\frac{f_{13}}{f_{12}} = \frac{233}{144} \cong 1{,}61805556$$

Admitindo que a razão $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ converge, ou seja, que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = r$, com $r \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \Rightarrow \frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}}$$

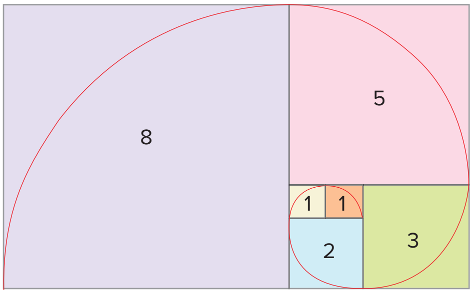
Quando $n \to \infty$ verifica-se que a conjectura é confirmada:

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} \Rightarrow r = 1 + \frac{1}{r} \Rightarrow r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Estabelecendo relações

Uma aplicação interessante da sequência de Fibonacci é a espiral de Fibonacci, representada na figura a seguir.



Observe que a partir dos dois quadrados de lado 1, cada novo quadrado tem lado igual à soma dos lados dos dois anteriores. Assim, as medidas dos lados do quadrado formam a sequência de Fibonacci. Os ramos da espiral são arcos de um quarto de circunferência, centrados no canto de cada quadrado. A razão entre um raio de arco e o raio anterior tende à razão áurea. A espiral de Fibonacci aparece em várias situações na natureza, como conchas ou padrões de pétalas.

andersphoto/Shutterstock.com

Revisando

1. Determine o 31º termo da PA de primeiro termo $\frac{3}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$.

2. **Enem 2018** A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1380 metros da praça.
Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8 000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é
   a) R$ 512 000,00.
   b) R$ 520 000,00.
   c) R$ 528 000,00.
   d) R$ 552 000,00.
   e) R$ 584 000,00.

FRENTE 2

3. Uma concessionária vende um carro financiado em dois anos, com parcelas mensais assim definidas: a primeira de R$ 1000,00 e as demais decrescerão R$ 20,00 ao mês. Ao final do financiamento esse carro terá custado ao comprador

a) R$ 18 480,00.
b) R$ 18 240,00.
c) R$ 18 000,00.
d) R$ 17 760,00.
e) R$ 17 520,00.

4. De uma progressão aritmética a_n de razão r, sabe-se que $a_8 = 16$ e $a_{14} = 4$. Sendo S_n a soma dos n primeiros termos de a_n, o menor valor de n, de modo que $S_n = 220$, é

a) 12
b) 11
c) 14
d) 16
e) 18

5. **FMP-RJ 2019** Uma progressão geométrica tem o seu primeiro termo e sua razão iguais a $\frac{1}{2}$. O quinto termo dessa progressão é uma fração que, se escrita em forma percentual, será

a) 6,25%.
b) 31,25%.
c) 3,125%.
d) 32%.
e) 2,5%.

6. **FMP-RJ 2018** Para $n \geqslant 1$ a expressão $a_n = 3n + 5$ é o termo geral de uma progressão aritmética. Para $n \geqslant 1$, considere a sequência cujo termo geral é dado por $b_n = 2^{a_n}$. A sequência de termo geral b_n é uma progressão geométrica cuja razão é

a) 256
b) 16
c) 3
d) 6
e) 8

7. **Famerp-SP 2017** Em 1996, 25% da energia produzida por um país era obtida de usinas hidrelétricas. Em 2016, essa produção passou a ser de 40%. Admitindo-se que de 25%, em 1996, para 40%, em 2016, o crescimento anual da porcentagem foi geométrico, é correto afirmar que o fator constante de crescimento anual foi igual a

a) $\sqrt[20]{6{,}25}$ **b)** $\log_{1,6}20$ **c)** $\log_{20}6{,}25$ **d)** $\log_{20}1{,}6$ **e)** $\sqrt[20]{1{,}6}$

8. **UEG-GO 2021** Na PG $\left(\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots\right)$, o 11º termo será

a) 32 **b)** 64 **c)** 128 **d)** 256 **e)** 512

9. **Mackenzie-SP 2019** Se o quarto termo de uma progressão geométrica é 2, então o produto dos seus 7 primeiros termos é igual a

a) 108. **b)** 128. **c)** 148. **d)** 168. **e)** 188.

10. **Unifenas-MG 2021** Considerando a sequência $(-1; +2; -4; \ldots)$, encontre a soma dos 10 primeiros termos.

a) 341. **b)** 300. **c)** 298. **d)** 279. **e)** 267.

Exercícios propostos

1. **Ifal 2018** Determine o 2 017º termo da progressão aritmética cujo 1º termo é 4 e cuja razão é 2.
   a) 4 032.
   b) 4 034.
   c) 4 036.
   d) 4 038.
   e) 4 040.

2. **Enem Libras 2017** A figura ilustra uma sequência de formas geométricas formadas por palitos, segundo uma certa regra.

Continuando a sequência, segundo essa mesma regra, quantos palitos serão necessários para construir o décimo termo da sequência?
   a) 30
   b) 39
   c) 40
   d) 43
   e) 57

3. **IFCE 2016** Numa progressão aritmética de razão 3, o sexto termo vale 54. O septuagésimo sexto termo dessa sequência é o número
   a) 284.
   b) 264.
   c) 318.
   d) 162.
   e) 228.

4. **Unesp 2017** A figura indica o empilhamento de três cadeiras idênticas e perfeitamente encaixadas umas nas outras, sendo h a altura da pilha em relação ao chão.

(www.habto.com. Adaptado.)

A altura, em relação ao chão, de uma pilha de n cadeiras perfeitamente encaixadas umas nas outras, será igual a 1,4 m se n for igual a
   a) 14.
   b) 17.
   c) 13.
   d) 15.
   e) 18.

5. **Cederj 2021** A sequência $(2x + 3, 3x + 4, 4x + 5, ...)$ é uma progressão aritmética de razão 6. O quarto termo dessa progressão é
   a) 31.
   b) 33.
   c) 35.
   d) 37

6. **Uerj 2017** Considere a matriz $A_{n \times 9}$ de nove colunas com números inteiros consecutivos, escrita a seguir.

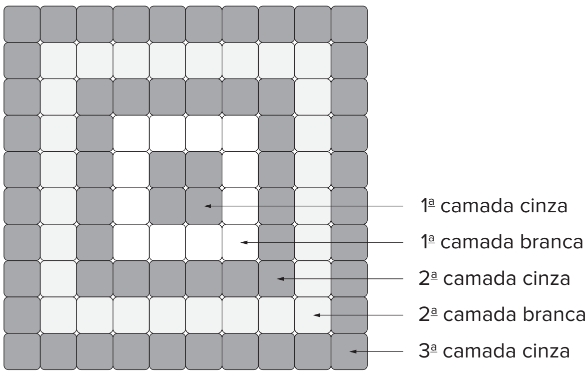
$$A_{n\times 9} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Se o número 18 109 é um elemento da última linha, linha de ordem n, o número de linhas dessa matriz é:
   a) 2011
   b) 2012
   c) 2013
   d) 2014

7. **UPF-RS 2017** Seja a_n uma sequência de números reais cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{4} - n$, $n \in \mathbb{N}$. Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?
   a) a_n é uma progressão aritmética de razão -1.
   b) a_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.
   c) a_n é uma progressão geométrica de razão 4.
   d) a_n não é uma progressão (nem geométrica, nem aritmética).
   e) a_n é simultaneamente uma progressão aritmética e geométrica.

8. **FICSAE-SP 2016** Suponha que, em certo país, observou-se que o número de exames por imagem, em milhões por ano, havia crescido segundo os termos de uma progressão aritmética de razão 6, chegando a 94 milhões/ano, ao final de 10 anos. Nessas condições, o aumento percentual do número de tais exames, desde o ano da observação até ao final do período considerado, foi de
   a) 130%.
   b) 135%.
   c) 136%.
   d) 138%.

9. Unicamp-SP No centro de um mosaico formado apenas por pequenos ladrilhos, um artista colocou 4 ladrilhos cinza. Em torno dos ladrilhos centrais, o artista colocou uma camada de ladrilhos brancos, seguida por uma camada de ladrilhos cinza, e assim sucessivamente, alternando camadas de ladrilhos brancos e cinza, como ilustra a figura a seguir, que mostra apenas a parte central do mosaico. Observando a figura, podemos concluir que a 10ª camada de ladrilhos cinza contém



a) 76 ladrilhos.
b) 156 ladrilhos.
c) 112 ladrilhos.
d) 148 ladrilhos.

10. Unicamp-SP 2020 Considere que (a, b, 3, c) é uma progressão aritmética de números reais, e que a soma de seus elementos é igual a 8. O produto dos elementos dessa progressão é igual a
a) 30.
b) 10.
c) -15.
d) -20.

11. Unicamp-SP 2014 O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a
a) 1,5 m^2.
b) 3,0 m^2.
c) 2,0 m^2.
d) 3,5 m^2.

12. Mackenzie-SP 2018 Se A, B, C e D são termos consecutivos de uma progressão aritmética e $C^2 - B^2 \neq 0$, então o valor de $\dfrac{D^2 - A^2}{C^2 - B^2}$ é
a) 0
b) 1
c) 3
d) 5
e) 7

13. EEAR-SP 2017 Considere esses quatro valores x, y, $3x$ e $2y$ em PA crescente. Se a soma dos extremos é 20, então o terceiro termo é
a) 9
b) 12
c) 5
d) 18

14. PUC-Rio 2017 Os números 10, x, y, z, 70 estão em progressão aritmética (nesta ordem). Quanto vale a soma $x + y + z$?
a) 80
b) 90
c) 100
d) 110
e) 120

15. Unicamp-SP 2015 Se (α_1, α_2, ..., α_{13}) é uma progressão aritmética (PA) cuja soma dos termos é 78, então α_7 é igual a
a) 6.
b) 7.
c) 8.
d) 9.

16. Uece 2019 Se a_1, a_2, a_3, ..., a_7 são os ângulos internos de um heptágono convexo e se as medidas destes ângulos formam, nesta ordem, uma progressão aritmética, então, a medida, em graus, do ângulo a_4 é um número
a) menor do que 128.
b) entre 128 e 129.
c) entre 129 e 130.
d) maior do que 130.

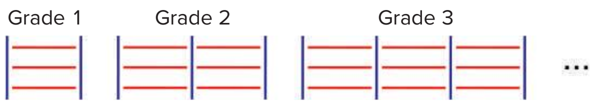
17. Unifor-CE 2020 Após recuperar-se de uma cirurgia, o treinador da corredora Andrea estipulou um plano de treinamento diário: correr 500 metros no primeiro dia e aumentar 200 metros por dia, a partir do segundo, até que ela atinja 10 km. Andrea pretende correr 10 km na maratona do Rio de Janeiro, no início do próximo ano. Em quantos dias de treinamento Andrea atingirá 10 km?
a) 35
b) 39
c) 43
d) 49
e) 52

18. Uerj 2017 Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia – corrida de 6 km;
- dias subsequentes – acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.
O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:
a) 414
b) 438
c) 456
d) 484

19. Unesp 2016 A figura indica o padrão de uma sequência de grades, feitas com vigas idênticas, que estão dispostas em posição horizontal e vertical. Cada viga tem 0,5 m de comprimento. O padrão da sequência se mantém até a última grade, que é feita com o total de 136,5 metros lineares de vigas.



O comprimento do total de vigas necessárias para fazer a sequência completa de grades, em metros, foi de

a) 4 877.
b) 4 640.
c) 4 726.
d) 5 195.
e) 5 162.

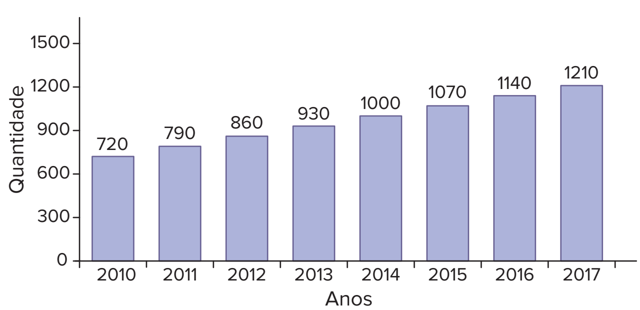
20. Unesp 2013 A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é dada por $3n^2 - 2n$, onde n é um número natural. Para essa progressão, o primeiro termo e a razão são, respectivamente,

a) 7 e 1.
b) 1 e 6.
c) 6 e 1.
d) 1 e 7.
e) 6 e 7.

21. EsPCEx-SP 2018 Uma fábrica de tratores agrícolas, que começou a produzir em 2010, estabeleceu como meta produzir 20 000 tratores até o final do ano de 2025. O gráfico abaixo mostra as quantidades de tratores produzidos no período 2010-2017.

Fábrica Boa Safra

Quantidade Anual de Tratores Fabricados



Desenho ilustrativo fora de escala

Admitindo que a quantidade de tratores produzidos evolua nos anos seguintes segundo a mesma razão de crescimento do período 2010-2017, é possível concluir que a meta prevista

a) deverá ser atingida, sendo superada em 80 tratores.
b) deverá ser atingida, sendo superada em 150 tratores.
c) não deverá ser atingida, pois serão produzidos 1 850 tratores a menos.
d) não deverá ser atingida, pois serão produzidos 150 tratores a menos.
e) não deverá ser atingida, pois serão produzidos 80 tratores a menos.

22. UEPG/PSS-PR 2019 A função $f(n+1) = \dfrac{3f(n)+2}{3}$, para $n \geq 1$, está definida de forma recursiva. Considerando que $f(1) = 7$, assinale o que for correto.

01 O valor de $f(121)$ é 87.
02 $(f(1), f(2), f(3), f(4), ...)$ definem uma progressão aritmética de razão não inteira.
04 $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(37) = 703$.
08 A soma dos algarismos de $f(901)$ é um número primo.

Soma:

23. FGV-SP 2018 Os termos de uma sequência são definidos recursivamente por $\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 2 + a_{n-1} \end{cases}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Sendo assim, a soma dos n primeiros termos dessa sequência será dada pela expressão

a) $7n - 2$.
b) $3{,}5n^2 - 3{,}5n + 5$.
c) $n^2 - 17n + 60$.
d) $n^2 + 4n$.
e) $2n + 3$.

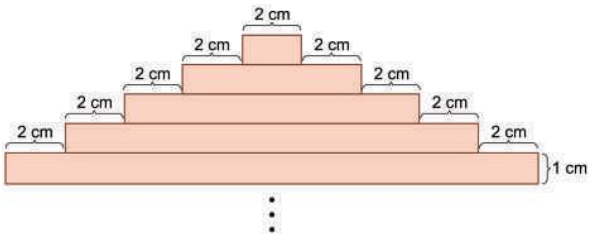
24. Mackenzie-SP 2019 Se $1 + 4 + 7 + 10 + ... + N = 925$, então o valor de N é igual a

a) 69
b) 71
c) 73
d) 75
e) 77

25. AFA-SP 2021 O jogo árabe chamado *Quirkat* ou *Al-Quirg* é semelhante ao jogo de damas moderno, no qual há um tabuleiro de 25 casas (5 × 5).
Esse jogo foi mencionado na obra *Kitab Al-Aghani* do século X. O *Al-Quirg* era também o nome para o jogo que atualmente é conhecido como trilha.
Certo dia, um caixeiro viajante apresentou esse jogo a um rei que ficou encantado com ele e decidiu que iria comprá-lo.
Pediu ao viajante que colocasse preço no produto.
O caixeiro disse:
"–Vossa Majestade, posso lhe vender o jogo por uma simples barganha! Basta me dar 1 grão de milho para a 1ª casa do jogo, 2 grãos de milho para a 2ª casa do jogo, 4 grãos de milho para a 3ª casa do jogo, 8 grãos de milho para a 4ª casa do jogo e assim por diante até a 25ª casa do tabuleiro!"
O rei, imediatamente, ordenou o pagamento para o caixeiro viajante em troca do jogo que tanto lhe agradou.
Levando em consideração que o peso médio de um grão de milho seja de 0,3 g pode-se afirmar que

a) pelo pagamento referente à 13ª casa, considerando o peso médio do grão do milho, o caixeiro recebeu 1,2288 kg.
b) até a décima casa do tabuleiro, se considerado o peso médio do grão de milho, o viajante tinha recebido um total de 307,2 g.
c) a quantidade de grãos recebido pelo caixeiro viajante é um número terminado em 7.
d) a quantidade de grãos recebido pelo viajante é um número múltiplo de 2.

26. **Unesp 2018** A figura mostra cinco retângulos justapostos de uma sequência. Todos os retângulos possuem mesma altura, igual a 1 cm.



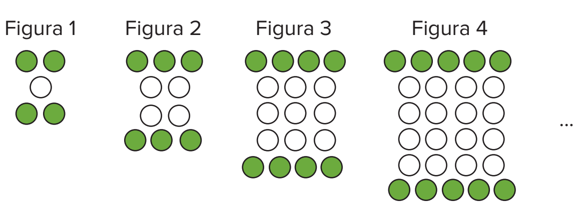
Sabendo que 1 m^2 equivale a 10 000 cm^2 e que a sequência é constituída por 100 retângulos, a figura formada tem área igual a

a) 2,5 m^2.
b) 4 m^2.
c) 5 m^2.
d) 2 m^2.
e) 4,5 m^2.

27. **FICSAE-SP 2017** Dois estatísticos estão em uma sala e a média de suas idades é 37 anos. Um terceiro estatístico entra na sala e a média das idades dessas três pessoas passa a ser 39 anos. Um quarto estatístico entra na sala e a média passa a ser 41 anos. Esse processo continua e a cada estatístico que entra na sala, a média das idades de todos eles aumenta em 2 anos. O número de estatísticos que agora estão na sala, sabendo que o último a entrar tem 83 anos, é

a) 13.
b) 15.
c) 17.
d) 19.

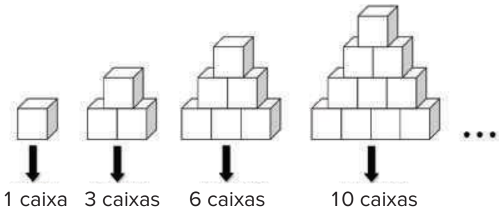
28. **Famerp-SP 2020** Observe o padrão da sequência de figuras.



Mantido o padrão, a figura que terá a quantidade de bolas brancas superando a de bolas verdes em 286 será a de número

a) 13.
b) 18.
c) 14.
d) 16.
e) 21.

29. **Acafe-SC 2018** Uma famosa rede de supermercados resolve fazer uma grande promoção de determinado produto. Para tanto, resolve organizar os produtos de maneira a formar pilhas em uma sequência, conforme indica a figura a seguir. Cada cubo, na figura, corresponde a um produto.



Pretende-se continuar construindo a sequência até a vigésima quarta pilha de produtos. Quantos produtos serão necessários para formar a **última** pilha de produtos dessa sequência?

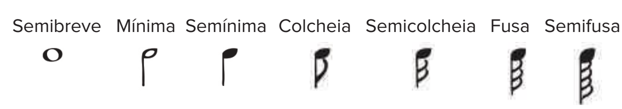
a) 360
b) 240
c) 320
d) 300

30. **Enem PPL 2018** Na música, usam-se sinais gráficos chamados figuras de duração para indicar por quanto tempo se deve emitir determinado som.

As figuras de duração usadas atualmente são: semibreve, mínima, semínima, colcheia, semicolcheia, fusa e semifusa.

Essas figuras não possuem um valor (tempo) fixo. Elas são proporcionais entre si. A duração de uma semibreve é equivalente à de duas mínimas, a duração de uma mínima é equivalente à de duas semínimas, a duração de uma semínima equivale à de duas colcheias e assim por diante, seguindo a ordem dada.

Considere que a semibreve tem a duração de tempo de uma unidade.



Disponível em: www.portaledumusicalcp2.mus.br. Acesso em: 11 nov. 2013 (adaptado).

A sequência que indica a duração de tempo de uma mínima, de uma semínima, de uma colcheia, de uma semicolcheia, de uma fusa e de uma semifusa é

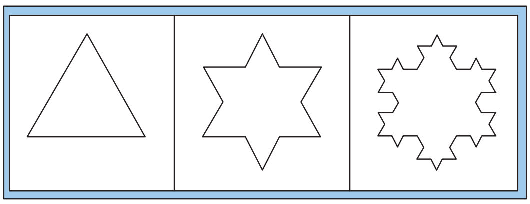
a) 2, 4, 8, 16, 32, 64
b) 1, 2, 4, 8, 16, 32
c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$
d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \frac{31}{32}, \frac{63}{64}$
e) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$

31. **UPE 2018** A população inicial de uma colônia de bactérias, que cresce 40% a cada hora, é de $8 \cdot 10^5$ bactérias. Qual é o número aproximado de bactérias dessa colônia ao final de 16 horas?

Considere: $(1,4)^{16} = 218$.

a) $1,7 \cdot 10^8$
b) $2,2 \cdot 10^5$
c) $1,8 \cdot 10^6$
d) $3,4 \cdot 10^8$
e) $4,6 \cdot 10^5$

32. UFJF-MG 2018 O fractal denominado floco de neve de Koch é obtido partindo-se de um triângulo equilátero. Divide-se cada lado desse triângulo em 3 segmentos de mesmo comprimento, desenha-se um novo triângulo equilátero a partir do segmento do meio e retira-se a sua base, conforme figura abaixo. Esse processo ocorre indefinidamente para obter o floco de neve.



Fonte: disponível em goo.gl/MfBH7V.

Qual o número de lados da sétima figura, isto é, após ocorrer 6 vezes esse processo?

a) 1 024
b) 3 072
c) 4 096
d) 7 048
e) 12 288

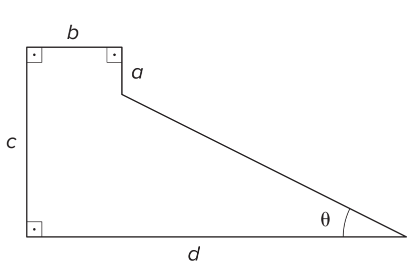
33. Enem 2018 Torneios de tênis, em geral, são disputados em sistema de eliminatória simples. Nesse sistema, são disputadas partidas entre dois competidores, com a eliminação do perdedor e promoção do vencedor para a fase seguinte. Dessa forma, se na 1ª fase o torneio conta com $2n$ competidores, então na 2ª fase restarão n competidores, e assim sucessivamente até a partida final.

Em um torneio de tênis, disputado nesse sistema, participam 128 tenistas.

Para se definir o campeão desse torneio, o número de partidas necessárias é dado por

a) 2×128
b) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
c) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$
d) $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2$
e) $64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$

34. Unicamp-SP 2019 A figura a seguir exibe um pentágono em que quatro lados consecutivos têm comprimentos a, b, c e d.

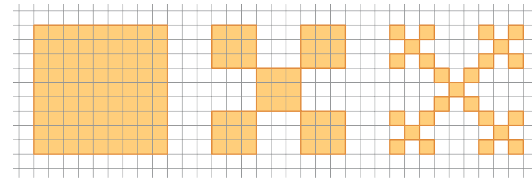


Se a sequência (a, b, c, d) é uma progressão geométrica de razão $q > 1$, então $\operatorname{tg}\theta$ é igual a

a) $\dfrac{1}{q}$.
b) q.
c) q^2.
d) $\sqrt{q}$.

35. Unesp 2018 A sequência de figuras, desenhadas em uma malha quadriculada, indica as três primeiras etapas de formação de um fractal. Cada quadradinho dessa malha tem área de 1 cm^2.

Figura 1 Figura 2 Figura 3



...

Dado que as áreas das figuras, seguindo o padrão descrito por esse fractal, formam uma progressão geométrica, a área da figura 5, em cm^2, será igual a

a) $\dfrac{625}{81}$
b) $\dfrac{640}{81}$
c) $\dfrac{125}{27}$
d) $\dfrac{605}{81}$
e) $\dfrac{215}{27}$

36. Fuvest-SP 2019 Forma-se uma pilha de folhas de papel, em que cada folha tem 0,1 mm de espessura. A pilha é formada da seguinte maneira: coloca-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houverem sido colocadas anteriormente. Depois de 33 dessas operações, a altura da pilha terá a ordem de grandeza

a) da altura de um poste.
b) da altura de um prédio de 30 andares.
c) do comprimento da Av. Paulista.
d) da distância da cidade de São Paulo (SP) à cidade do Rio de Janeiro (RJ).
e) do diâmetro da Terra.

37. Unicamp-SP 2012 Para construir uma curva "floco de neve", divide-se um segmento de reta (Figura 1) em três partes iguais. Em seguida, o segmento central sofre uma rotação de 60°, e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na Figura 2. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas Figuras 3 e 4.

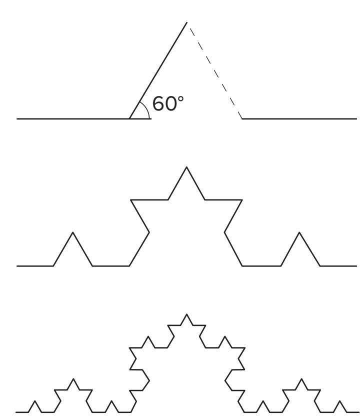
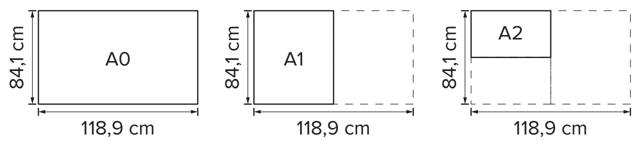


Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4

Se o segmento inicial mede 1 cm, o comprimento da curva obtida na sexta figura é igual a

a) $\left(\dfrac{6!}{4!3!}\right)$ cm
b) $\left(\dfrac{5!}{4!3!}\right)$ cm
c) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^5$ cm
d) $\left(\dfrac{4}{3}\right)^6$ cm

38. Enem PPL 2016 O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países, com exceção dos EUA e Canadá. O formato-base é uma folha retangular de papel, chamada de A0, cujas dimensões são 84,1 cm × 118,9 cm. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, obtendo os demais formatos, conforme o número de dobraduras. Observe a figura: A1 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 tem o formato da folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente.



Disponível em: http://pt.wikipedia.org. Acesso em: 4 abr. 2012 (adaptado).

Quantas folhas de tamanho A8 são obtidas a partir de uma folha A0?

a) 8 b) 16 c) 64 d) 128 e) 256

39. Unesp 2012 O artigo *Uma estrada, muitas florestas* relata parte do trabalho de reflorestamento necessário após a construção do trecho sul do Rodoanel da cidade de São Paulo.

O engenheiro agrônomo Maycon de Oliveira mostra uma das árvores, um fumo-bravo, que ele e sua equipe plantaram em novembro de 2009. Nesse tempo, a árvore cresceu – está com quase 2,5 metros –, floresceu, frutificou e lançou sementes que germinaram e formaram descendentes [...] perto da árvore principal. O fumo-bravo [...] é uma espécie de árvore pioneira, que cresce rapidamente, fazendo sombra para as espécies de árvores de crescimento mais lento, mas de vida mais longa.

(Pesquisa FAPESP, janeiro de 2012. Adaptado.)

(*w*3.ufsm.br/herbarioflorestal)

Considerando que a referida árvore foi plantada em 1º de novembro de 2009 com uma altura de 1 dm e que em 31 de outubro de 2011 sua altura era de 2,5 m e admitindo ainda que suas alturas, ao final de cada ano de plantio, nesta fase de crescimento, formem uma progressão geométrica, a razão deste crescimento, no período de dois anos, foi de

a) 0,5. c) 5. e) 50.
b) $5 \times 10^{-1/2}$. d) $5 \times 10^{1/2}$.

40. Enem Libras 2017 Atualmente, a massa de uma mulher é 100 kg. Ela deseja diminuir, a cada mês, 3% da massa que possuía no mês anterior. Suponha que ela cumpra sua meta.
A sua massa, em quilograma, daqui a dois meses será

a) 91,00. d) 94,33.
b) 94,00. e) 96,91.
c) 94,09.

41. Unicamp-SP 2018 Dois anos atrás certo carro valia R$ 50 000,00 e atualmente vale R$ 32 000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a

a) R$ 25 600,00. c) R$ 23 000,00.
b) R$ 24 400,00. d) R$ 18 000,00.

42. FGV-SP 2017 Certo capital foi aplicado em regime de juros compostos. Nos quatro primeiros meses, a taxa foi de 1% ao mês e, nos quatro meses seguintes, a taxa foi de 2% ao mês. Sabendo-se que, após os oito meses de aplicação, o montante resgatado foi de R$ 65 536,00, então o capital aplicado, em reais, foi aproximadamente igual a

Dado: $65\,5536 = 2^{16}$.

a) $3{,}66^8$. d) $3{,}88^8$.
b) $3{,}72^8$. e) $3{,}96^8$.
c) $3{,}78^8$.

43. Unicamp-SP 2020 Tendo em vista que a e b são números reais positivos, $a \neq b$, considere a função $f(x) = ab^x$, definida para todo número real x. Logo, $f(2)$ é igual a

a) $\sqrt{f(1)f(3)}$. c) $f(0)f(1)$.
b) $\dfrac{f(3)}{f(0)}$. d) $f(0)^3$.

44. FGV-SP 2013 Se uma pessoa faz hoje uma aplicação financeira a juros compostos, daqui a 10 anos o montante M será o dobro do capital aplicado C.
Utilize a tabela abaixo.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
2^x	1	1,0718	1,1487	1,2311	1,3195

Qual é a taxa anual de juros?

a) 6,88% d) 7,18%
b) 6,98% e) 7,28%
c) 7,08%

45. FGV-SP 2016 Três números formam uma progressão geométrica. A média aritmética dos dois primeiros é 6, e a do segundo com o terceiro é 18. Sendo assim, a soma dos termos dessa progressão é igual a

a) 18. d) 42.
b) 36. e) 48.
c) 39.

46. Fuvest-SP 2015 Dadas as sequências $a_n = n^2 + 4n + 4$, $b_n = 2^{n^2}$, $c_n = a_{n+1} - a_n$ e $d_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, definidas para valores inteiros positivos de n, considere as seguintes afirmações:

I. a_n é uma progressão geométrica;
II. b_n é uma progressão geométrica;
III. c_n é uma progressão aritmética;
IV. d_n é uma progressão geométrica.

São verdadeiras apenas

a) I, II e III.
b) I, II e IV.
c) I e III.
d) II e IV.
e) III e IV.

47. UEG-GO 2017 A sequência numérica c_n é definida como $c_n = a_n \cdot b_n$, com $n \in \mathbb{N}$, em que a_n e b_n são progressões aritmética e geométrica, respectivamente. Sabendo-se que $a_5 = b_5 = 10$ e as razões de a_n e b_n são iguais a 3, o termo c_8 é igual a

a) 100
b) 520
c) 1 350
d) 3 800
e) 5 130

48. Mackenzie-SP 2015 Se os números 3, A e B, nessa ordem, estão em progressão aritmética e os números 3, A − 6 e B, nessa ordem, estão em progressão geométrica, então o valor de A é

a) 12
b) 15
c) 18
d) 21
e) 24

49. AFA-SP 2022 Um professor escreveu uma progressão aritmética crescente de 8 termos começando pelo número 3 e composta apenas de números naturais.
Ele notou, então, que o segundo, o quarto e o oitavo termos dessa progressão aritmética formavam, nessa ordem, uma progressão geométrica.
O professor observou também que a soma dos termos dessa progressão geométrica era igual a

a) 42
b) 36
c) 18
d) 9

50. UFRR 2020 Se $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é uma progressão aritmética de razão 2 então podemos dizer que $(2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, \ldots)$ é

a) uma progressão aritmética de razão 2.
b) uma progressão geométrica de razão 2.
c) uma progressão aritmética de razão 4.
d) uma progressão geométrica de razão 4.
e) uma progressão geométrica de razão 8.

51. Unicamp-SP 2021 Considere que as medidas dos lados de um triângulo retângulo estão em progressão geométrica. Sendo a a medida do menor lado e A a área desse triângulo, é correto afirmar que

a) $A = a^2 \dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{4}$.
b) $A = a^2 \dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{4}$.
c) $A = a^2 \dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}$.
d) $A = a^2 \dfrac{\sqrt{2\sqrt{5}-2}}{2}$.

52. Fuvest-SP Sabe-se sobre a progressão geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que $a_1 > 0$ e $a_6 = -9\sqrt{3}$. Além disso, a progressão geométrica $a_1, a_5, a_9, \ldots$ tem razão igual a 9. Nessas condições, o produto $a_2 \cdot a_7$ vale

a) $-27\sqrt{3}$
b) $-3\sqrt{3}$
c) $-\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $27\sqrt{3}$

53. USF-SP 2018 Considere uma progressão aritmética crescente de cinco termos, na qual o produto do primeiro com o quinto termo é 45, e a soma dos outros três termos é 27. Dado que o segundo e quarto termos dessa progressão aritmética são, respectivamente, o primeiro e o segundo termos de uma progressão geométrica, é possível afirmar, corretamente, que o décimo termo da progressão geométrica assim definida vale

a) 12 288.
b) 30.
c) 6 144.
d) 60.
e) 3 072.

54. Uece 2017 O produto dos termos da progressão geométrica cujo primeiro termo, a razão e o último termo são respectivamente iguais a −1, −2 e 32 é igual a

a) −32 768.
b) −1 024.
c) −64 328.
d) −6 432.

55. UEL-PR 2018 Em uma população totalmente suscetível a uma doença infecciosa, o número de novas infecções C(n), no instante de tempo n, cresce em progressão geométrica de razão $q > 0$. Isto é, $C(n) = c_0 \cdot q^n$, onde n é expresso em uma certa unidade de medida e C_0 é a quantidade de infectados no instante inicial $n = 0$. A seguir, é apresentada uma tabela com exemplos.

Doença	q	Unidade de medida
Sarampo	15	4
Difteria	6	4
SARS	5	10
Influenza (cepa pandêmica de 1918)	3	7
Ebola (surto de 2014)	2	2

(Adaptado de: https://en.wikipedia.org/wiki/Basic_reproduction_number. Acesso em: 25 maio 2017.)

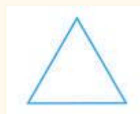
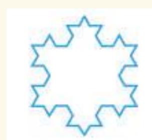
Suponha que uma cidade totalmente suscetível, na Europa medieval, tenha sido tomada pela Peste Negra, que se iniciou com $C_0 = 15$ infectados.
Considerando que, em 8 dias, a soma de infectados desde o início da infestação totalizou 195 pessoas e que a unidade de medida seja de 4 dias, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a razão q.

a) 2
b) 3
c) 5
d) 6
e) 10

56. ESPM-SP 2017 Na progressão geométrica (1, 2, 4, 8, ...), sendo a_n o *n*-ésimo termo e S_n a soma dos *n* primeiros termos, podemos concluir que:

a) $S_n = 2 \cdot a_n$
b) $S_n = a_n + 1$
c) $S_n = a_{n+1} + 1$
d) $S_n = a_{n+1} - 1$
e) $S_n = 2 \cdot a_{n+1}$

57. Fuvest-SP 2020 O *Floco de Neve de Kock* (ou *Estrela de Koch*) é uma construção geométrica recursiva cujos primeiros passos se desenvolvem da seguinte forma:

Passo 0: começa-se com um triângulo equilátero de lados de medida 1.	
Passo 1: divide-se cada lado do triângulo do Passo 0 em 3 segmentos iguais e constrói-se um triângulo equilátero com base em cada segmento do meio.	
Passo 3: repete-se o procedimento descrito no Passo 1 em cada lado da figura obtida no passo anterior.	

Os passos seguintes (Passo 3, Passo 4, Passo 5, ...) seguem o mesmo procedimento descrito no Passo 1, em cada lado da figura obtida no passo anterior. Considerando os passos descritos e os próximos passos, responda:

a) Qual é o número de lados da figura no Passo 3?
b) Qual é o perímetro da figura no Passo 5?
c) A partir de qual Passo o número de lados da figura supera 6 000 000 000 000 (seis trilhões)?

Note e adote: $\log_{10} 2 \cong 0{,}301$.

58. UEG-GO 2020 Sejam $(a_1, a_2, a_3, ...)$ uma progressão aritmética de razão $r = 3$ e $(b_1, b_2, b_3, ...)$ uma progressão geométrica de razão $q = r^2 - 7$ e, ainda, $b_1 = a_1 + 2$, $b_2 = a_2 + 1$ e $b_3 = a_3 + 2$. A soma dos 7 primeiros termos dessa progressão geométrica é:

a) 254 **b)** 18 **c)** 128 **d)** 63 **e)** 455

59. PUC-PR 2017 Leia o texto a seguir.

A lenda do jogo de xadrez

A lenda conta que um rei hindu teve o conhecimento de um jogo que é composto de 32 peças, no qual o objetivo é capturar a peça mais importante, o rei do adversário, através de um sábio brâmane, chamado Sessa, que queria lhe tirar da depressão que o abatera depois da morte de seu filho. Após algumas partidas jogadas, a satisfação do rei foi tamanha que deu o direito ao brâmane de escolher o que ele quisesse no reino como premiação. Sessa fez então um pedido inusitado: um tabuleiro com grãos de trigo que, na primeira casa tivesse um grão, na segunda, dois, na terceira, quatro, dobrando sempre até a casa de número 64 e somando todos os valores encontrados ao final. O rei mandou então os algebristas de seu reino fazerem os cálculos.

A respeito dessa situação, julgue os itens a seguir.

I. A sequência proposta por Sessa: 1 grão na primeira casa, na segunda dois, na terceira quatro etc. É uma progressão aritmética de razão 2.
II. A sequência proposta por Sessa: 1 grão na primeira casa, na segunda dois, na terceira quatro etc. É uma progressão geométrica de razão 2.
III. A soma dos termos da progressão vale 2^{64}.
IV. A soma dos termos da progressão vale 2 080.

Assinale a alternativa **CORRETA**.

a) Somente I é correta.
b) Somente III é correta.
c) Somente IV é correta.
d) Somente II é correta.
e) Todas estão corretas.

60. AFA-SP 2021 A organização de um festival de *Rock n'Roll* decidiu que os ingressos seriam disponibilizados para venda em quantidades sequencialmente estabelecidas.
No 1º dia, foram vendidas 30 caixas com 400 ingressos em cada uma.
Do 2º dia de venda em diante, foram disponibilizadas 3 caixas a mais em cada dia, porém, em cada caixa, do total de caixas do dia, havia 10 ingressos a menos.
O quadro apresenta a sequência até o 4º dia.

Dia de venda	Quantidade de caixas	Quantidade de ingressos por caixa
1º	30	400
2º	33	390
3º	36	380
4º	39	370

A disponibilização diária de ingressos para venda seguiu a sequência acima até o 38º dia, último dia de vendas.
Dia a dia, o total de ingressos disponibilizados era integralmente vendido a R$ 50,00, cada unidade.
Sendo assim, o maior valor apurado em um único dia de venda dos ingressos foi, em reais, de

a) 924 000
b) 931 500
c) 937 500
d) 938 100

61. Udesc 2019 O objetivo de um concurso era criar o ser vivo matemático mais curioso. O vencedor, batizado por seus criadores de *Punctorum Grande*, possuía as seguintes características: no seu nascimento ele era composto apenas por um ponto, e após 40 minutos duas hastes saíam deste ponto com um novo ponto em cada extremidade. Após mais 40 minutos, outras duas hastes, com um novo ponto em cada, saíam de cada um dos pontos existentes e assim sucessivamente a cada 40 minutos.
O número de pontos que esse ser vivo tinha após cinco horas e vinte minutos do seu nascimento, era:

a) 6 561
b) 255
c) 2 187
d) 4 347
e) 64

62. IFBA 2018 Numa avaliação com 100 questões, a pontuação de cada questão foi atribuída de acordo com uma progressão geométrica de razão 2 da seguinte forma: a primeira questão valia 1 ponto, a segunda questão valia 2 pontos, a terceira questão valia 4, a quarta questão valia 8 pontos e assim por diante. A nota máxima com a qual um aluno pode ficar é o somatório dos pontos de todas as questões. Uma pessoa, ao fazer esta avaliação, verificou que acertou todas as questões de numeração múltiplos de três maiores que 20 e menores que 40 e também acertou as questões de numeração múltiplos de cinco maiores que 31 e menores que 51. Que pontuação este estudante fez na prova?

a) $\dfrac{2^{34}(2^{20}-1)}{2^5-1}$

b) $\dfrac{2^{20}(2^{21}-1)}{2^3-1}$

c) $\dfrac{2^{20}(2^{21}-1)}{2^3}+\dfrac{2^{34}(2^{20}-1)}{2^5}$

d) $\dfrac{2^{20}(2^{21}-1)}{2^3-1}+\dfrac{2^{34}(2^{20}-1)}{2^5-1}$

e) $\dfrac{2^{20}(2^{21}-1)}{2^3-1}-\dfrac{2^{34}(2^{20}-1)}{2^5-1}$

63. Unesp Após o nascimento do filho, o pai comprometeu-se a depositar mensalmente, em uma caderneta de poupança, os valores de R\$ 1,00, R\$ 2,00, R\$ 4,00 e assim sucessivamente, até o mês em que o valor do depósito atingisse R\$ 2 048,00. No mês seguinte o pai recomeçaria os depósitos como de início e assim o faria até o 21º aniversário do filho. Não tendo ocorrido falha de depósito ao longo do período, e sabendo-se que $2^{10} = 1\,024$, o montante total dos depósitos, em reais, feitos em caderneta de poupança foi de

a) 42 947,50.
b) 49 142,00.
c) 57 330,00.
d) 85 995,00.
e) 114 660,00.

64. Unioeste-PR 2018 A Figura 1 apresenta uma sequência de figuras de bonecos com corpo e pernas no formato retangular e cabeça circular. As dimensões do primeiro boneco são apresentadas na Figura 2 (Na Figura 2, r é o raio do círculo). Sabe-se que cada uma das medidas do n-ésimo boneco é igual à metade da medida correspondente do $(n-1)$-ésimo boneco.

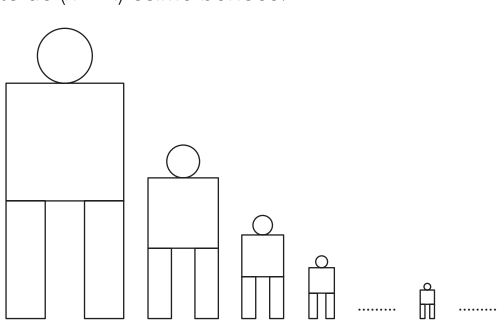


Figura 1

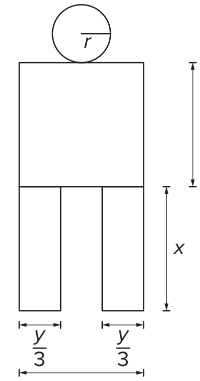


Figura 2

Assim, se A_1 é a área do primeiro boneco, então é CORRETO afirmar que a soma das áreas dos 30 primeiros bonecos é

a) $\dfrac{A_1}{3}\left(\dfrac{4^{30}-1}{4^{29}}\right)$.

b) $A_1\left(\dfrac{4^{30}-1}{4^{29}}\right)$.

c) $\dfrac{A_1}{4}\left(\dfrac{2^{30}-1}{2^{29}}\right)$.

d) $\dfrac{A_1}{2}\left(\dfrac{4^{30}-1}{4^{29}}\right)$.

e) $A_1\left(\dfrac{2^{30}-1}{2^{29}}\right)$.

65. Unicamp-SP 2021 Seja x um número real tal que os primeiros três termos de uma progressão geométrica infinita são 1, $2x$, $-3x + 1$, nesta ordem. Sabendo que todos os termos da progressão são positivos, a soma de todos eles é igual a

a) $\dfrac{3}{2}$.
b) 2.
c) $\dfrac{5}{2}$.
d) 3.

66. Urca-CE 2020 Na sequência finita abaixo

$$(2, 5, 4, -5, 8, -15, 16, -25, \ldots, 512),$$

os termos de ordem ímpar formam uma progressão geométrica e os termos de ordem par formam uma progressão aritmética. Qual é o valor da soma de todos os termos dessa sequência?

a) 745
b) 782
c) 807
d) 1 022
e) 1 097

67. FGV-SP 2012 As raízes da equação $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \dfrac{9}{8}$ têm soma igual a:

a) -3
b) -2
c) -1
d) 0
e) 1

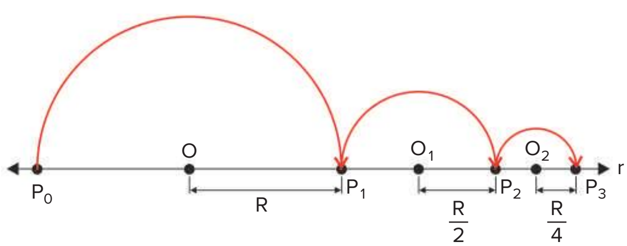
68. Urca-CE 2021 Quantos números entre 100 e 500 são múltiplos de 7 e 3?

a) 57
b) 56
c) 18
d) 19
e) 23

69. Uece 2020 Para a progressão geométrica decrescente $x_1, x_2, x_3, \ldots$, cujo primeiro termo é igual ao dobro da razão, e a soma dos três primeiros termos é igual a sete vezes o quadrado da razão, a soma infinita de seus termos $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$, é igual a

a) 4.
b) 2.
c) 8.
d) 1.

70. Unesp 2013 Uma partícula em movimento descreve sua trajetória sobre semicircunferências traçadas a partir de um ponto P_0, localizado em uma reta horizontal *r*, com deslocamento sempre no sentido horário. A figura mostra a trajetória da partícula, até o ponto P_3, em *r*. Na figura, O, O_1 e O_2 são os centros das três primeiras semicircunferências traçadas e R, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{4}$ seus respectivos raios.



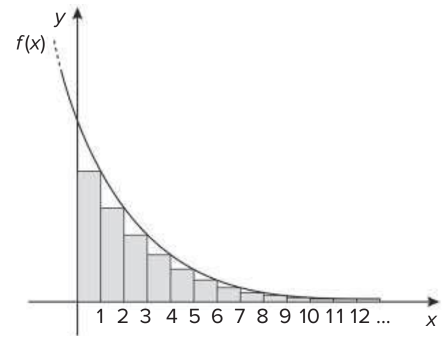
A trajetória resultante do movimento da partícula será obtida repetindo-se esse comportamento indefinidamente, sendo o centro e o raio da *n*-ésima semicircunferência dados por O_n e $R_n = \frac{R}{2^n}$, respectivamente, até o ponto P_n, também em *r*. Nessas condições, o comprimento da trajetória descrita pela partícula, em função do raio R, quando *n* tender ao infinito, será igual a

a) $2^2 \cdot \pi \cdot R$.
b) $2^3 \cdot \pi \cdot R$.
c) $2^n \cdot \pi \cdot R$.
d) $\left(\frac{7}{4}\right) \cdot \pi \cdot R$.
e) $2 \cdot \pi \cdot R$.

71. Urca-CE 2020 Seja (Q_1, Q_2, Q_3, ...) uma sequência de infinitos quadrados. Supondo que a área de cada quadrado seja expressa pela fórmula $\text{Área}(Q_n) = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$, a soma dos perímetros desses infinitos quadrados é

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 16

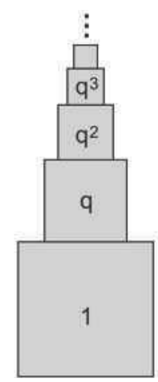
72. ESPM-SP 2017 A figura a seguir representa parte do gráfico da função $f(x) = \frac{16}{2^x}$, fora de escala.



A soma das áreas dos infinitos retângulos assinalados é igual a:

a) 16
b) 8
c) 24
d) 32
e) 12

73. Uefs-BA 2016



Se infinitos quadrados, cujas áreas formam uma progressão geométrica decrescente de razão *q*, pudessem ser empilhados, como na figura, e o quadrado da base tivesse uma área de 1 m^2, a altura da pilha, em m, seria

a) $\frac{1}{1-q}$
b) $\frac{1-q}{1-\sqrt{q}}$
c) $\frac{1-\sqrt{q}}{1-q}$
d) $\frac{1+\sqrt{q}}{1-q}$
e) infinita

74. IFSP Observe a sequência de figuras

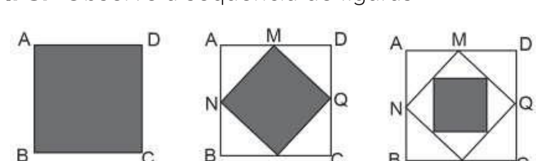


fig. 1 fig. 2 fig. 3

ABCD é um quadrado, cujo lado mede *x* cm. Ligando os pontos médios dos lados desse quadrado, obtém-se o quadrado MNPQ. Realizando esse procedimento indefinidamente, a soma das áreas de todos os quadrados sombreados dessa sequência é igual a $64\sqrt{2}$ cm^2. A área do quadrado sombreado da décima figura dessa sequência, em centímetros quadrados, é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}}{16}$.
b) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
c) $\sqrt{2}$.
d) $4\sqrt{2}$.
e) $8\sqrt{2}$.

FRENTE 2

75. **Uece 2017** Para $x = 0$, $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$, a soma infinita $1 + \text{tg}\,x + \text{tg}^2 x + \text{tg}^3 x + ... + ...$ é igual a

a) $\frac{\text{sen}\,x}{\cos x - \text{sen}\,x}$.

b) $\frac{\cos x}{\cos x + \text{sen}\,x}$.

c) $\frac{\text{sen}\,x}{\cos x + \text{sen}\,x}$.

d) $\frac{\cos x}{\cos x - \text{sen}\,x}$.

76. **Uece 2019** Considerando a progressão geométrica $(x_n)_{n\,=\,1,\,2,\,3,\,...}$, cujo primeiro termo é igual a sen(t) e a razão igual a $\cos^2(t)$, sendo $0 < t < \frac{\pi}{2}$, é correto afirmar que a soma (infinita) de todos os termos dessa progressão é igual a

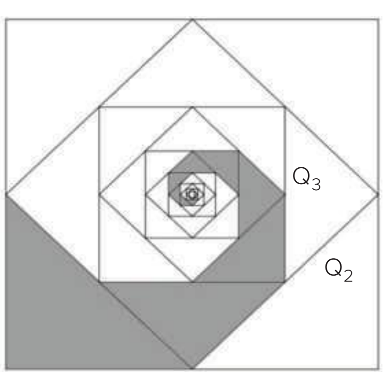
a) cossec(t).

b) sen(t).

c) tg(t).

d) cotg(t).

77. **UFRGS 2017** Na figura a seguir, encontram-se representados quadrados de maneira que o maior quadrado (Q_1) tem lado 1. O quadrado Q_2 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q_1; o quadrado Q_3 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q_2 e, assim, sucessiva e infinitamente.



A soma das áreas da sequência infinita de triângulos sombreados na figura é

a) $\frac{1}{2}$.

b) $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{8}$.

d) $\frac{1}{16}$.

e) $\frac{1}{32}$.

78. **Unifenas-MG 2020** Dada a sequência $\left(1; -\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; ...\right)$, encontre a soma de seus infinitos termos.

a) $\frac{4}{3}$.

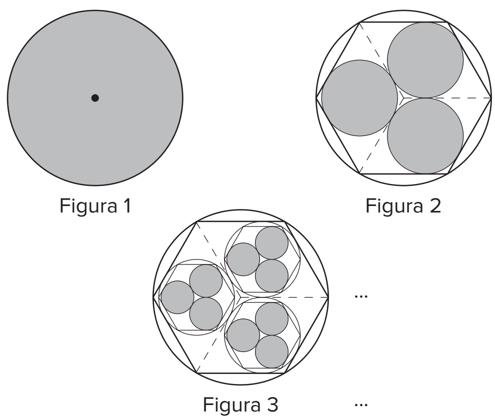
b) $\frac{3}{5}$.

c) $\frac{3}{4}$.

d) $\frac{6}{7}$.

e) $\frac{7}{6}$.

79. **PUC-PR 2018** Considere, a seguir, os esboços das três primeiras figuras de uma sequência com infinitas construções geométricas.



O círculo da Figura 1 tem 7 dm^2 de área. Cada um dos três círculos destacados na Figura 2 está inscrito em um dos losangos congruentes que compõem o hexágono regular que, por sua vez, é circunscrito por um círculo equivalente ao da figura anterior. A partir desses três círculos destacados na Figura 2, e exatamente da mesma forma com que foram construídos, foram obtidos os círculos em destaque na Figura 3.
Seguindo indefinidamente com esse padrão de construção, o limite da soma de todas as áreas sombreadas nas infinitas figuras dessa sequência será, em decímetros quadrados, igual a

a) 13,15.
b) 14.
c) 16.
d) 14π.
e) 21π.

80. **PUC-PR 2017** Determine o valor de E sendo $E = \sum_{0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n}$.

a) 5
b) 5,5
c) 6,0
d) 6,5
e) 7

Texto complementar

O Princípio da Indução

Introdução

O Princípio da Indução é um eficiente instrumento para a demonstração de fatos referentes aos números naturais. Por isso deve-se adquirir prática em sua utilização. Por outro lado, é importante também conhecer seu significado e sua posição dentro do arcabouço da Matemática. Entender o Princípio da Indução é praticamente o mesmo que entender os números naturais. [...]

O Princípio da Indução diz o seguinte:

Princípio da Indução: Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se 1 goza de P e se, além disso, o fato de o número natural n gozar de P implica que seu sucessor $s(n)$ também goza, então todos os números naturais gozam da propriedade P. [...]

Nas demonstrações por indução, a hipótese de que a propriedade P é válida para o número natural n (da qual deve decorrer que P vale também para $s(n)$) chama-se hipótese de indução. [...]

Teorema 1: (Princípio da Indução Generalizado.) Seja P uma propriedade referente a números naturais, cumprindo as seguintes condições:

(1) O número natural a goza da propriedade P;

(2) Se um número natural n goza da propriedade P então seu sucessor $n + 1$ também goza de P.

Então todos os números naturais maiores do que ou iguais a a gozam da propriedade P.

Exemplo 1. Vejamos uma situação simples onde se emprega o Princípio da Indução Generalizado. Trata-se de provar que $2n + 1 < 2^n$, para todo $n \geqslant 3$. Esta afirmação, (que é falsa para $n = 1$ ou $n = 2$), vale quando $n = 3$. Supondo-a válida para um certo $n \geqslant 3$, mostremos que daí decorre sua validez para $n + 1$. Com efeito, $2(n + 1) + 1 = (2n + 1) + 2 < 2^n + 2 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. (Na primeira desigualdade, usamos a hipótese de indução.)

Exemplo 2. Usando a desigualdade $2n + 1 < 2^n$, que acabamos de provar para $n \geqslant 3$, podemos demonstrar que $n^2 < 2^n$ para todo $n \geqslant 5$, empregando novamente o Princípio da Indução Generalizado. Com efeito, vale $5^2 < 2^5$ pois $25 < 32$. Supondo válida a desigualdade $n^2 < 2^n$ para um certo valor de $n \geqslant 5$, daí segue-se que $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 < 2^n + {}$ ${}+ 2n + 1$ (pela hipótese de indução) $< 2^n + 2^n$ (pelo exemplo anterior) $=$ $= 2^{n+1}$. Portanto $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$. Pelo Princípio de Indução Generalizado, segue-se que $P(n)$ vale para todo $n \geqslant 5$. Evidentemente, a desigualdade $n^2 < 2^n$ é falsa para $n = 1, 2, 3, 4$. [...]

Segundo Princípio da Indução

Em algumas situações, ao tentarmos fazer uma demonstração por indução, na passagem de n para $n + 1$, sentimos necessidade de admitir que a proposição valha não apenas para n e sim para todos os números naturais menores do que ou iguais a n. A justificativa de um raciocínio desse tipo se encontra no

Teorema 2: (Segundo Princípio da Indução.) Seja $X \subset \mathbb{N}$ um conjunto com a seguinte propriedade:

(I) Dado $n \in \mathbb{N}$, se todos os números naturais menores do que n pertencem a X, então $n \in X$.

O segundo Princípio da Indução afirma que um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ com a propriedade (I) coincide com $\mathbb{N}$.

Demonstração: Com efeito, supondo, por absurdo, que $X \neq \mathbb{N}$, isto é, que $\mathbb{N} - X \neq \varnothing$, seja n o menor elemento do conjunto $\mathbb{N} - X$, ou seja, o menor número natural que não pertence a X. Isto quer dizer que todos os números naturais menores do que n pertencem a X. Mas então, pela propriedade (I), n pertence a X, uma contradição. Segue-se que $\mathbb{N} - X = \varnothing$ e $X = \mathbb{N}$.

Obs.: Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ goza da propriedade (I), para que um número natural n não pertencesse a X seria necessário que existisse algum número natural $r < n$ tal que $r \notin X$. Em particular, se $n = 1$, como não existe número natural menor do que 1, a hipótese $1 \notin X$ não pode ser cumprida. Noutras palavras, (I) já contém implicitamente a afirmação de que $1 \in X$. Assim, ao utilizar o Segundo Princípio da Indução, não é preciso estipular que X contém o número 1.

Toda propriedade P que se refira a números naturais define um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$, a saber, o conjunto dos números naturais que gozam da propriedade P. (E reciprocamente, todo conjunto $X \subset \mathbb{N}$ define uma propriedade referente a números naturais, a saber, a propriedade de pertencer a X.) Deste modo, “propriedade” e “conjunto” são noções equivalentes. Por isso, é natural que o Segundo Princípio da Indução possua a formulação seguinte, onde ele aparece como o

Teorema 3: (Segundo método de demonstração por indução.) Seja P uma propriedade referente a números naturais. Dado $n \in \mathbb{N}$, se a validade de P para todo número natural menor do que n implicar que P é verdadeira para n, então P é verdadeira para todos os números naturais.

Demonstração: Com efeito, nas condições do enunciado, o conjunto X dos números naturais que gozam da propriedade P satisfaz a condição (I) do Segundo Princípio da Indução, logo $X = \mathbb{N}$ e P vale para todos os números naturais.

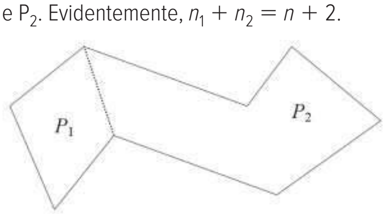
Aplicaremos agora o Segundo Princípio da Indução para demonstrar um fato geométrico. No exemplo a seguir, usamos os números naturais como instrumento de contagem, isto é, como números cardinais, pois empregamos expressões do tipo um polígono de n lados”. [...]

Sabe-se que, traçando diagonais internas que não se cortam, pode-se decompor qualquer polígono em triângulos justapostos. Isto é evidente quando o polígono é convexo: basta fixar um vértice e traçar as diagonais a partir dele. Se o polígono não é convexo, a prova requer mais cuidados. [...]

O leitor pode experimentar com um polígono não-convexo e verificar que há muitas maneiras diferentes de decompô-lo em triângulos justapostos mediante diagonais internas. Mas vale o resultado seguinte, no qual usaremos o Segundo Princípio da Indução.

Exemplo 3. Qualquer que seja a maneira de decompor um polígono P, de n lados, em triângulos justapostos por meio de diagonais internas que não se intersectam, o número de diagonais utilizadas é sempre $n - 3$.

Com efeito, dado n, suponhamos que a proposição acima seja verdadeira para todo polígono com menos de n lados. Seja então dada uma decomposição do polígono P, de n lados, em triângulos justapostos, mediante diagonais internas. Fixemos uma dessas diagonais. Ela decompõe P como reunião de dois polígonos justapostos P_1, de n_1 lados, e P_2, de n_2 lados, onde $n_1 < n$ e $n_2 < n$, logo a proposição vale para os polígonos P_1 e P_2. Evidentemente, $n_1 + n_2 = n + 2$.



As d diagonais que efetuam a decomposição de P se agrupam assim: $n_1 - 3$ delas decompõem P_1, $n_2 - 3$ decompõem P_2 e uma foi usada para separar P_1 de P_2. Portanto $d = n_1 - 3 + n_2 - 3 + 1 = = n_1 + n_2 - 5$. Como $n_1 + n_2 = n + 2$, resulta que $d = n - 3$. Isto completa a demonstração. [...]

LAGES, Elon. O princípio da indução. *Eureka!* Rio de Janeiro, n. 3, p. 26, 29-30, 35-38, 1998. Disponível em: www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/*eureka*3.pdf. Acesso em: 26 out. 2021.

FRENTE 2

Resumindo

Progressão aritmética (PA)

Definição: $a_{n+1} = a_n + r$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Termo geral: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \begin{cases} a_n \text{ - termo qualquer} \\ a_1 \text{ - primeiro termo} \\ r \text{ - razão} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Propriedades:

1. Representações especiais

PA de 3 termos: $(x - r, x, x + r)$

PA de 5 termos: $(x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r)$

PA de 4 termos: $(x - 3s, x - s, x + s, x + 3s)$, onde $2s = r$

2. Se (a, b, c) é uma PA, então $b = \dfrac{a + c}{2}$.

3. Em uma PA finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, a soma de termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, ou seja, $a_{1+k} + a_{n-k} = a_1 + a_n$.

Soma dos *n* primeiros termos: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$

Progressão geométrica (PG)

Definição: $a_{n+1} = a_n \cdot q$, com $n \in \mathbb{N}^*$

Termo geral: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \begin{cases} a_n \text{ - termo qualquer} \\ a_1 \text{ - primeiro termo} \\ q \text{ - razão} \\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Propriedades:

1. Representações especiais

PG de 3 termos: $\left(\dfrac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$

PG de 5 termos: $\left(\dfrac{x}{q^2}, \dfrac{x}{q}, x, x \cdot q, x \cdot q^2\right)$

PG de 4 termos: $\left(\dfrac{x}{a^3}, \dfrac{x}{a}, x \cdot a, x \cdot a^3\right)$, onde $a^2 = q$

2. Se (a, b, c) é uma PG, então $\dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a \cdot c$.

3. Em uma PG finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$, o produto de termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos, ou seja, $a_{1+k} \cdot a_{n-k} = a_1 \cdot a_n$.

Produto dos *n* primeiros termos:

$$(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n)^n \text{ ou } P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Soma dos *n* primeiros termos: $S_n = \dfrac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$

Soma dos termos de uma PG infinita (convergente):

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - q}, \text{ com } |q| < 1$$

Quer saber mais?

Sites

SHINE, Yuzo Carlos. A torre de Hanói. *Eureka!*, n. 11, p. 17. Disponível em: www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka11.pdf

Conheça um dos quebra-cabeças matemáticos mais famosos do mundo, a torre de Hanói, e veja como as sequências são usadas para identificar a quantidade mínima de movimentos para resolvê-lo.

POLLMAN, Héctor Souza. Equações de recorrência. *Eureka!*, n. 9, p. 33. Disponível em: www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka9.pdf

Leia sobre equações de recorrência e sua relação com sequências, com aplicações como a sequência de Fibonacci.

Exercícios complementares

1. PUC-RS 2017 A distribuição de pontos em cada uma das figuras abaixo segue um padrão de construção.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

Seguindo esse mesmo padrão, a soma dos pontos distribuídos em todas as figuras até a Figura 30 será igual a

a) 61
b) 183
c) 210
d) 930
e) 960

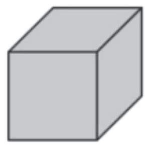
2. Esc. Naval-RJ 2014 O quinto termo da progressão aritmética $3 - x; -x; \sqrt{9 - x}; ..., x \in \mathbb{R}$ é

a) 7
b) 10
c) -2
d) $-\sqrt{14}$
e) -18

3. UPF-RS 2017 A quantidade de números inteiros situados entre 1 e 48 000 inclusive que não são divisíveis por 2, nem por 3, nem por 5, é igual a

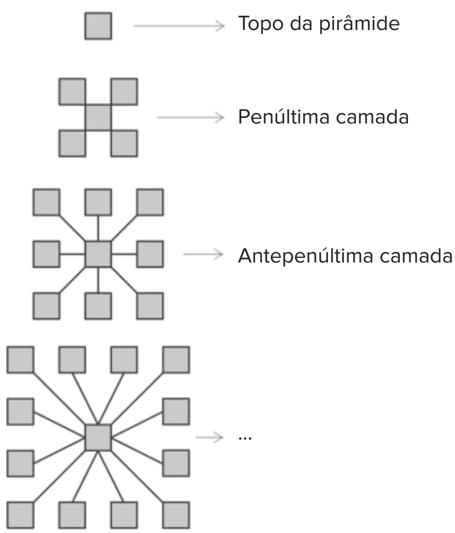
a) 4 800
b) 9 600
c) 12 800
d) 16 000
e) 18 200

4. EPCar-MG 2018 Constrói-se um monumento em formato de pirâmide utilizando-se blocos cúbicos:



Para a formação piramidal os blocos são dispostos em uma sequência de camadas, sendo que na última camada, no topo da pirâmide, haverá um único bloco, como mostra a figura a seguir.

Sequência de camadas
(vista de cima)



Na disposição total, foram utilizados 378 blocos, do topo à base da pirâmide.
Havendo necessidade de acrescentar uma nova camada de blocos abaixo da base da pirâmide, obedecendo à sequência já estabelecida, serão gastos x blocos nesta camada.
A quantidade total de divisores positivos do número x é igual a

a) 2 **b)** 3 **c)** 4 **d)** 5

5. Uece 2019 Considerando a progressão aritmética (x_n), cujo primeiro termo x_1 é igual a $\frac{\pi}{4}$ e a razão é igual a $\frac{\pi}{2}$, pode-se definir, para cada inteiro positivo n, a soma $S_n = \text{sen}(x_1) + \text{sen}(x_2) + \text{sen}(x_3) + \ldots + \text{sen}(x_n)$. Nessas condições, S_{2019} é igual a

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **b)** $\sqrt{2}$. **c)** 0. **d)** $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

6. UFJF-MG 2021 Em uma progressão aritmética, a soma dos dez primeiros termos é 400 e a soma do décimo primeiro ao vigésimo termo é 1000. Calcule o primeiro termo e a razão.

a) primeiro termo igual a 11 e razão igual a 7
b) primeiro termo igual a 12 e razão igual a 8
c) primeiro termo igual a 10 e razão igual a 9
d) primeiro termo igual a 15 e razão igual a 10
e) primeiro termo igual a 13 e razão igual a 6

7. Unicamp-SP 2017 Sabendo que a e b são números reais, considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

a) Mostre que, se r é uma raiz de $p(x)$, então $\frac{1}{r}$ é uma raiz do polinômio $q(x) = x^3 + bx^2 + ax + 1$.
b) Determine os valores de a e b para os quais a sequência $[p(-1), p(0), p(1)]$ é uma progressão aritmética (PA), cuja razão é igual a $p(2)$.

8. EsPCEx-SP 2016 João e Maria iniciam juntos uma corrida, partindo de um mesmo ponto. João corre uniformemente 8 km por hora e Maria corre 6 km na primeira hora e acelera o passo de modo a correr mais $\frac{1}{2}$ km cada hora que se segue. Assinale a alternativa correspondente ao número de horas corridas para que Maria alcance João.

a) 3 **b)** 5 **c)** 9 **d)** 10 **e)** 11

9. FGV-RJ 2016 A famosa "pane dos seis minutos", ocorrida no jogo Alemanha 7 × 1 Brasil, é descrita a seguir:
O segundo gol foi aos 23 minutos, o terceiro aos 24 minutos, o quarto aos 26 minutos e o quinto aos 29 minutos.
Se essa pane tivesse se estendido até o final da partida (90 minutos no total) mantendo o padrão observado de aumentar sempre um minuto, a partir do segundo gol, nos intervalos entre gols consecutivos, o número de gols que a Alemanha teria marcado no Brasil seria igual a

a) 13. **b)** 25. **c)** 7. **d)** 11. **e)** 45.

10. FGV-SP 2017 Na tabela de 8 colunas e infinitas linhas numeradas, indicada na figura, podemos formar infinitos quadrados coloridos 3 × 3, como mostra um exemplo.

		COLUNAS							
LINHAS	1	1	2	3	4	5	6	7	8
	2	9	10	11	12	13	14	15	16
	3	17	18	19	20	21	22	23	24
	4	25	26	27	28	29	30	31	32
	5	33	34	35	36	37	38	39	40
	6	41	42	43	44	45	46	47	48
	7	49	50	51	52	53	54	55	56
	8	57	58	59	60	61	62	63	64
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Nessa tabela, o quadrado colorido 3 × 3 cuja soma dos 9 elementos é igual a 4806 ocupa três linhas, sendo uma delas a linha

a) 71. **b)** 67. **c)** 53. **d)** 49. **e)** 41.

11. Unicamp-SP 2021 Sejam a, b números reais positivos. Considere a sequência de polígonos P_1, P_2, ..., P_n, ... construídos da seguinte forma:

- P_1 é um retângulo de lados a e b, como mostra a figura 1;
- P_2 é obtido de P_1, retirando dele um retângulo de lados medindo $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$, como mostra a figura 2;
- P_3 é obtido de P_1, retirando dele 3 retângulos de lados medindo $\frac{a}{3}$ e $\frac{b}{3}$, como mostra a figura 3;
- P_4 é obtido de P_1, retirando dele 6 retângulos de lados medindo $\frac{a}{4}$ e $\frac{b}{4}$, como mostra a figura 4;
- E assim, sucessivamente, P_n é obtido de P_1, como mostra a figura 5.

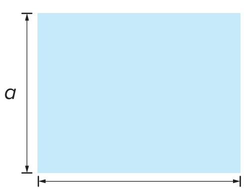


Figura 1: P_1

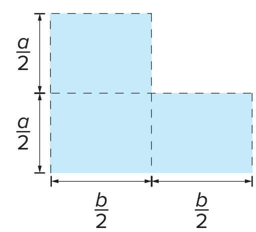


Figura 2: P_2

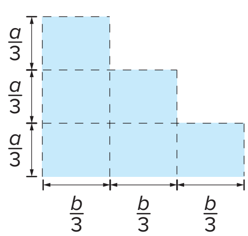


Figura 3: P_3

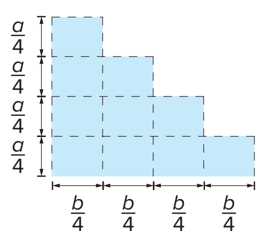


Figura 4: P_4

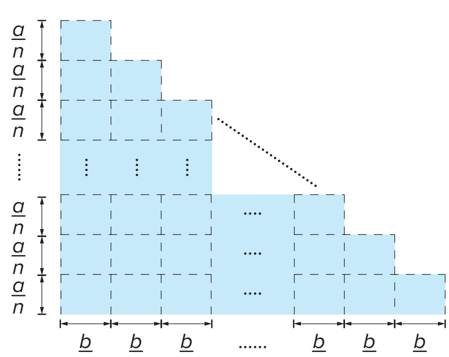


Figura 5: P_n

a) Determine o perímetro e o número de lados de P_{2021}.

b) Seja A_n a área do polígono P_n, e seja A a área do triângulo retângulo de catetos com medidas a e b. Encontre a razão $R_n = \frac{A_n}{A}$, para n arbitrário.

12. Unicamp-SP Considere a sucessão de figuras apresentada a seguir. Observe que cada figura é formada por um conjunto de palitos de fósforo.

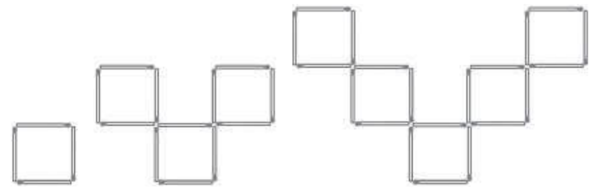


Figura 1 Figura 2 Figura 3

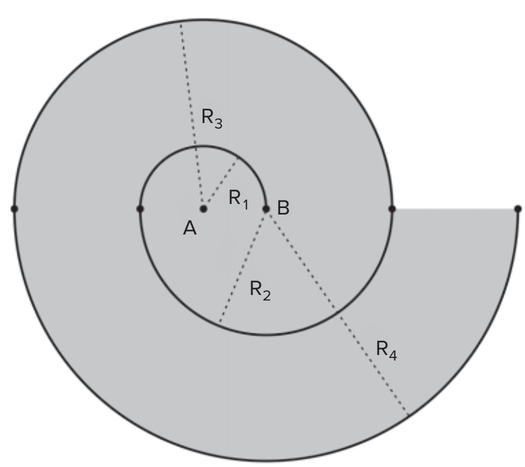
a) Suponha que essas figuras representam os três primeiros termos de uma sucessão de figuras que seguem a mesma lei de formação. Suponha também que F_1, F_2 e F_3 indiquem, respectivamente, o número de palitos usados para produzir as figuras 1, 2 e 3, e que o número de fósforos utilizados para formar a figura n seja F_n. Calcule F_{10} e escreva a expressão geral de F_n.

b) Determine o número de fósforos necessários para que seja possível exibir concomitantemente todas as primeiras 50 figuras.

13. IFCE 2016 O valor da soma $1 + 1^2 + 2 + 2^2 + 3 + 3^2 + ... + 50 + 50^2$ é

a) 44 200.
b) 40 200.
c) 42 440.
d) 44 020.
e) 42 040.

14. Unicamp-SP 2012 Uma curva em formato espiral, composta por arcos de circunferência, pode ser construída a partir de dois pontos A e B, que se alternam como centros dos arcos. Esses arcos, por sua vez, são semicircunferências que concordam sequencialmente nos pontos de transição, como ilustra a figura a seguir, na qual supomos que a distância entre A e B mede 1 cm.



a) Determine a área da região destacada na figura.

b) Determine o comprimento da curva composta pelos primeiros 20 arcos de circunferência.

15. UPE 2020 Qual o valor do 18º termo de uma progressão aritmética, se a soma dos n primeiros termos dessa progressão é dada por $S_n = n^2 + 3n$?

a) 38
b) 36
c) 32
d) 28
e) 24

16. Fuvest-SP 2012 Considere uma progressão aritmética cujos três primeiros termos são dados por $a_1 = 1 + x$, $a_2 = 6x$ e $a_3 = 2x^2 + 4$, em que x é um número real.

a) Determine os possíveis valores de x.

b) Calcule a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética correspondente ao menor valor de x encontrado no item **a**.

17. IME-RJ 2020 Considere a progressão geométrica a_1, a_2, ..., a_n, ... e a progressão aritmética b_1, b_2, ..., b_n, ... com as condições:

$$a_1 > 0$$
$$\frac{a_2}{a_1} > 1; \text{ e}$$
$$b_2 - b_1 > 0$$

Para que $[\log_a(a_n) - b_n]$ não dependa de n, o valor de a deverá ser:

a) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2}}$ **c)** $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2 - b_1}}$ **e)** $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2 b_1}}$

b) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}$ **d)** $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1 - b_2}}$

18. Esc. Naval-RJ 2020 Seja $S_n = n^2 + n + 1$ a soma dos termos de uma sequência numérica ($n \in \mathbb{N}$). Sobre essa sequência assinale a opção correta.

a) Essa sequência numérica não é uma progressão aritmética.

b) A diferença entre o quinto e o quarto termo é 3.

c) Sua razão é 4.

d) S_n é um número múltiplo de 7.

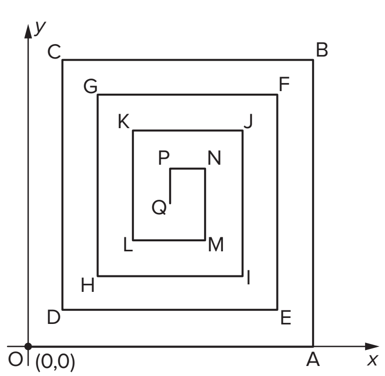
e) Seu sétimo termo é 32.

19. Efomm-RJ 2021 Observe as progressões aritméticas a seguir e assinale a alternativa que representa o sexagésimo primeiro número a se repetir em ambas as progressões.

$$-1, 3, 7, 11, 15, \ldots$$
$$1, 4, 7, 10, \ldots$$

a) 301 **b)** 399 **c)** 619 **d)** 727 **e)** 799

20. EPCar-MG 2019 Considere, no plano cartesiano, a figura abaixo, em que os segmentos horizontais são paralelos ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ e os segmentos verticais são paralelos ao eixo $\overleftrightarrow{Oy}$.



Sabe-se que:

- os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem O(0, 0) e termina em Q, formam uma progressão aritmética decrescente de razão r e primeiro termo a_1, em que $\left(-\frac{1}{15} < r < 0\right)$;
- dois comprimentos consecutivos da poligonal são sempre perpendiculares;
- $\overline{OA} = a_1$, $\overline{AB} = a_2$, $\overline{BC} = a_3$, e, assim sucessivamente, até $\overline{PQ} = a_{16}$.

Suponha que uma formiga parta da origem O(0, 0), e percorra a trajetória descrita pela poligonal até chegar ao ponto Q.

Com base nas informações acima, analise as proposições abaixo.

I. Se $a_1 = 1$ e $r = -\frac{1}{16}$, então a distância d percorrida pela formiga até chegar ao ponto Q é tal que $d = \frac{17}{2}a_1$.

II. Quando a formiga estiver na posição do ponto L(x, y) então $x = -6r$.

III. Se $a_1 = 1$, então de A até C, a formiga percorrerá a distância $d = 2 + 3r$.

Quanto a veracidade das proposições, tem-se

a) apenas uma delas é verdadeira.

b) apenas duas são verdadeiras.

c) todas são verdadeiras.

d) nenhuma delas é verdadeira.

21. UEPG-PR 2017 Um agricultor plantou vários limoeiros, formando uma fila, em linha reta, com 87 metros de comprimento e distando 3 metros um do outro. Alinhado exatamente com os limoeiros, havia um galpão que será utilizado como depósito, situado a 20 metros de distância do primeiro limoeiro. Para fazer a colheita, o agricultor partiu do galpão e, margeando sempre os limoeiros, colheu os frutos do primeiro e levou-os, ao galpão; em seguida, colheu os frutos do segundo, levando-os para o galpão; e, assim, sucessivamente, até colher e armazenar os frutos do último limoeiro. Pelo que foi exposto e considerando que o agricultor anda 60 metros por minuto, gasta 10 minutos para colher os frutos de cada limoeiro, e mais 6 minutos para armazená-los no galpão, assinale o que for correto.

01 O agricultor plantou o 12º limoeiro a 56 metros do galpão.

02 O agricultor, para realizar toda a tarefa de colheita e armazenamento, gastou pouco mais que 9 horas.

04 O agricultor plantou 29 pés de limão.

08 Quando o agricultor fez a colheita dos frutos do 10º limoeiro, tinha passado oito vezes pelo 5º limoeiro.

16 O agricultor, ao completar a tarefa de colheita e armazenamento dos frutos de todos os limoeiros, tinha andado 3 810 metros.

Soma: ______

FRENTE 2

22. Uece 2019 Considere a soma dos números inteiros ímpares positivos agrupados do seguinte modo:

$1 + (3 + 5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) +$
$+ (21 + 23 + 25 + 27 + 29) + ...$

O grupo de ordem n é formado pela soma de n inteiros positivos ímpares e consecutivos. Assim, pode-se afirmar corretamente que a soma dos números que compõem o décimo primeiro grupo é igual a

a) 1 223. **b)** 1 331. **c)** 1 113. **d)** 1 431.

23. FGV-RJ 2017 Os números naturais, a partir do 1, foram escritos em ordem e arrumados em duas colunas, A e B, como no quadro a seguir:

	A	B
Linha 1	1	2
Linha 2	3, 4	5, 6
Linha 3	7, 8, 9	10, 11, 12
Linha 4	13, 14, 15, 16	17, 18, 19, 20
Linha 5	21, 22, 23, 24, 25	26, 27, 28, 29, 30
Linha ..	–	–

Na linha n, o conjunto dos elementos da coluna A será representado por L_{nA}, e o da coluna B, por L_{nB}.

a) Mostre que o último elemento de L_{nA} é um quadrado perfeito.

b) Calcule a soma dos elementos de L_{10B}.

24. EsPCEx-SP 2014 Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro

1ª linha	1					
2ª linha	3	5				
3ª linha	7	9	11			
4ª linha	13	15	17	19		
5ª linha	21	23	25	27	29	
...	...	...	...	...	...	...

O primeiro elemento da 43ª linha, na horizontal, é:

a) 807
b) 1 007
c) 1 307
d) 1 507
e) 1 807

25. Unicamp-SP 2014 Dizemos que uma sequência de números reais não nulos $(a_1, a_2, a_3, a_4,...)$ é uma progressão harmônica se a sequência dos inversos $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, ...\right)$ é uma progressão aritmética (PA).

a) Dada a progressão harmônica $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2},...\right)$, encontre o seu sexto termo.

b) Sejam a, b e c termos consecutivos de uma progressão harmônica. Verifique que $b = \frac{2ac}{a + c}$.

26. UFSC 2020

01 Uma sequência é definida de modo que cada termo a_n é igual ao número de divisores inteiros de n, sendo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \geqslant 1$. Se S_n indica a soma dos n primeiros termos dessa sequência, então $S_6 = 28$.

02 Interpolando $(k + 2)$ meios aritméticos entre 9 e k^2 obtém-se a progressão aritmética $(9, ..., k^2)$ cuja razão é dada por $r = k - 3$.

04 A soma dos infinitos termos da progressão geométrica $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, ...\right)$ é maior do que $\frac{5}{2}$.

08 Se as medidas do lado, da diagonal e da área de um quadrado formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então sua área é numericamente maior do que quatro.

16 A população de determinada localidade foi contabilizada ao fim de cada ano. Em 2006 foram contabilizados 3 000 habitantes. Já em 2014, a população atingiu o total de 27 000 habitantes. Se seu crescimento se deu conforme uma progressão geométrica, ano a ano, em 2010 o número de habitantes superou 10 000 habitantes.

Soma:

27. UEM/PAS-PR 2020 Dadas duas sequências infinitas de números reais, (a_n) e (b_n), sendo $a_n = f(n)$ e $b_n = g(n)$ com $n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$, assinale o que for **correto**.

01 Se (b_n) for a sequência dos múltiplos de 6, então existem exatamente 84 termos dessa sequência, tais que $3500 \leqslant b_n \leqslant 4000$.

02 Se (a_n) for a sequência dos números naturais ímpares e (b_n) for a sequência dos pares não nulos, então a sequência (c_n), em que $c_n = a_n + b_n$ é definida por $c_n = 3 + 4(n - 1)$.

04 Se (a_n) e (b_n) forem duas progressões geométricas (PG), em que $a_4 = 16$, $a_8 = 81$ e $b_n = g(n) = 3^{n-1}$, então $a_1 \cdot b_4 = 128$.

08 Se $a_n = f(n) = 2n - 1$, então (a_n) é uma progressão aritmética (PA) de razão 1.

16 Se (a_n) e (b_n) forem duas progressões geométricas (PG) de razão p e q, respectivamente, então a sequência (c_n) em que $c_n = a_n \cdot b_n$ também é uma PG de razão $p \cdot q$.

Soma:

28. Unesp 2013 A sequência dos números $n_1, n_2, n_3, ..., n_i, ...$ está definida por $\begin{cases} n_1 = 3 \\ n_{i+1} = \frac{n_i - 1}{n_i + 2} \end{cases}$, para cada inteiro positivo i.

Determine o valor de n_{2013}.

29. Fuvest-SP 2018 Considere a sequência $a_1 = 6$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$ e $a_n = a_{n-4}$, para $n \geqslant 5$.

Defina $S_n^k = a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+k}$ para $k \geqslant 0$ isto é, S_n^k é a soma de $k + 1$ termos consecutivos da sequência começando do n-ésimo, por exemplo, $S_2^1 = 4 + 1 = 5$.

a) Encontre n e k tal que $S_n^k = 20$.

b) Para cada inteiro j, $1 \leqslant j \leqslant 12$, encontre n e k tal que $S_n^k = j$.

c) Mostre que, para qualquer inteiro j, $j \geqslant 1$, existem inteiros $n \geqslant 1$ e $k \geqslant 0$ tais que $S_n^k = j$.

30. ITA-SP 2021 O primeiro termo de uma progressão geométrica de números reais é 1 e a soma de seus primeiros 79 termos é igual ao produto de seus primeiros 13 termos. Determine:

a) a soma dos 40 primeiros termos;

b) o produto dos 7 primeiros termos.

31. ITA-SP 2012 Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a

a) -60. b) -30. c) 0. d) 30. e) 60.

32. IME-RJ 2015 A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

33. IME-RJ 2014 Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2.

Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1 \cdot x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$.

A razão desta PA é

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) 1

34. ITA-SP 2020 Sejam a, b e c números reais, $a \neq 0$, tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se a, b e c formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão k, então o produto P e a soma S de todos os possíveis valores para k são iguais a

a) $P = 1$ e $S = 0$.

b) $P = -1$ e $S = 1$.

c) $P = -1$ e $S = -1$.

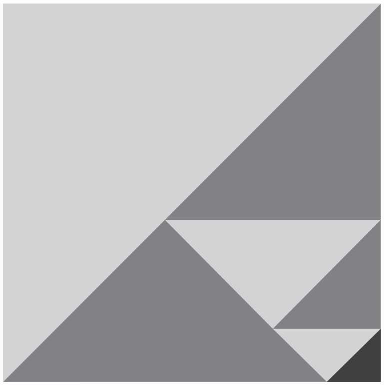
d) $P = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S = 0$.

e) $P = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{2}$ e $S = 0$.

35. IME-RJ 2020 Uma progressão geométrica é formada com os números naturais A, B e C, nessa ordem. O log(A) possui a mesma mantissa, M, do log(B) e C é a característica do log(A). Sabe-se que M = log(C) e que C possui o maior valor possível. O valor da mantissa do log(ABC) é:

a) M b) 2M c) 3M d) 3M − 2 e) 3M − 3

36. Enem 2018 Um quebra-cabeça consiste em recobrir um quadrado com triângulos retângulos isósceles, como ilustra a figura.



Uma artesã confecciona um quebra-cabeça como o descrito, de tal modo que a menor das peças é um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2 cm. O quebra-cabeça, quando montado, resultará em um quadrado cuja medida do lado, em centímetro, é

a) 14

b) 12

c) $7\sqrt{2}$

d) $6 + 4\sqrt{2}$

e) $6 + 2\sqrt{2}$

37. ESPM-RJ 2018 A sequência S = (sen 60°, 1 + sen 30°, 3cos 30°) é:

a) uma PA de razão tg 30°.

b) uma PG de razão sen 60°.

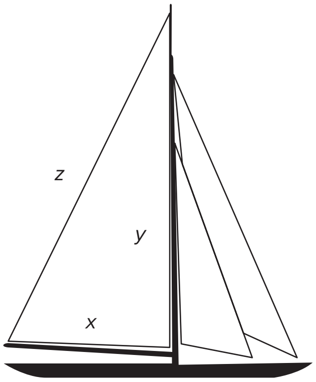
c) uma PA de razão tg 45°.

d) uma PA de razão 1 + sen 60°.

e) uma PG de razão tg 60°.

38. PUC-PR 2018 Considere os dados a seguir.

Mirosmar Egeu adora construir veleiros em miniatura de madeira, ele fez um esboço de seu barco e definiu as medidas de uma das velas que tem a forma de um triângulo retângulo, cujos lados estão em progressão geométrica com razão $q > 1$, conforme a figura. O cateto menor mede $x = \sqrt{\sqrt{5} - 1}$ metros, o cateto maior mede y e a hipotenusa, z. O valor de y em metros é



a) $\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{3}$.

c) $\sqrt{5}$.

d) $\sqrt{5} - 1$.

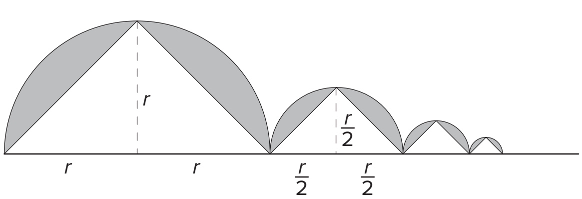
e) $\sqrt{5} + 1$.

FRENTE 2

39. USF-SP 2018 Considere uma progressão aritmética crescente de cinco termos, na qual o produto do primeiro com o quinto termo é 45, e a soma dos outros três termos é 27. Dado que o segundo e quarto termos dessa progressão aritmética são, respectivamente, o primeiro e o segundo termos de uma progressão geométrica, é possível afirmar, corretamente, que o décimo termo da progressão geométrica assim definida vale

a) 12 288.
b) 30.
c) 6 144.
d) 60.
e) 3 072.

40. Unioeste-PR 2013 A figura abaixo é uma construção geométrica feita da seguinte forma: considere r um número real positivo qualquer. Usando a reta de apoio, a primeira semicircunferência foi construída com raio r, o triângulo inscrito nesta semicircunferência possui base $2r$ e altura r. A área da região entre a primeira semicircunferência e o triângulo inscrito chamaremos de A_1. A segunda semicircunferência foi construída de modo a ter um ponto em comum com a primeira semicircunferência e este ponto pertence a reta de apoio. O raio da segunda semicircunferência é $\frac{r}{2}$. O triângulo inscrito na segunda semicircunferência possui base $\frac{2r}{2}$ e altura $\frac{r}{2}$. A área da região entre a segunda semicircunferência e o triângulo inscrito chamaremos de A_2. As próximas construções seguem o mesmo padrão, ou seja, o raio de uma semicircunferência é sempre a metade do raio da anterior e todas as semicircunferências possuem um triângulo inscrito conforme a construção acima. Denotamos por A_n a área entre a n-ésima semicircunferência e o respectivo triângulo inscrito. Com base na figura e nas informações acima, é correto afirmar que



a) $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.

b) $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$ é uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$.

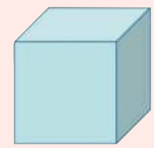
c) A sequência $(A_1, A_2, A_3, ..., A_n)$ não é uma progressão geométrica e também não é uma progressão aritmética.

d) $A_n = \dfrac{\pi r^2}{2^{2n-1}}$.

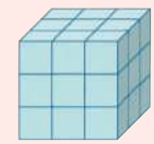
e) $A_n = \dfrac{(\pi - 2)r^2}{2^{2n-1}}$.

41. UPF-RS 2017 A Esponja de Menger é construída a partir de um cubo, por meio do seguinte processo recursivo:

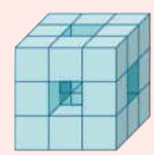
1. Tome um cubo qualquer.



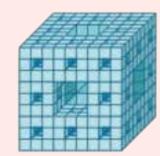
2. Divida cada face do cubo em 9 quadrados. Desse modo, o cubo inicial fica subdividido em cubos menores.



3. Remova o cubo localizado no meio de cada face e o cubo central. Esse é o primeiro nível da Esponja de Menger.



4. Repita os passos 2 e 3 para cada um dos cubos restantes do nível anterior. Assim, obtém-se o segundo nível da Esponja.



5. A Esponja de Menger é o limite desse processo depois de um número infinito de iterações.

(imagem disponível em: www.epsilones.com/paginas/curvas/curvas-035-esponja-menger.html. Acesso em 10 abr. 2017)

Sobre a Esponja de Menger e seu contexto, considere as seguintes afirmações.

I. Se n é o número de iterações realizadas no cubo inicial, o número de cubos restantes na enésima interação é 20^n.

II. O número de cubos obtidos em cada etapa do processo de construção da Esponja de Menger é $20n$, sendo n o número de interações.

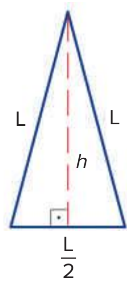
III. A área da Esponja de Menger é obtida por meio de um processo recursivo, sendo que, em cada face, a área de cada quadrado é $\frac{1}{9}$ da área do quadrado obtido no nível anterior.

IV. O fato de que o processo de construção da Esponja de Menger é recursivo e dispõe de um número infinito de procedimentos a serem executados faz com que o volume dela seja zero.

Está correto apenas o que se afirma em

a) I e III.
b) II e III.
c) II e IV.
d) I, III e IV.
e) II, III e IV.

42. Unesp Considere um triângulo isósceles de lados medindo L, $\frac{L}{2}$ e L centímetros. Seja h a medida da altura relativa ao lado de medida $\frac{L}{2}$. Se L, h e a área desse triângulo formam, nessa ordem, uma progressão geométrica, determine a medida do lado L do triângulo.



43. UEPG-PR 2018 Sobre progressão aritmética e geométrica, assinale o que for correto.

01 Sendo $(3x - 2, x - 1, 2x + 3)$ uma PA, então $x = -\frac{3}{7}$.

02 Em uma PG, o 1º termo vale $\frac{3}{125}$, o último termo vale 1 875 e a razão é 5. Então, essa PG tem 8 termos.

04 A equação $x + 4x + 16x + ... + 1\,024x = 1\,365$ tem como solução $x = 1$.

08 Em uma PA, o 5º termo vale 10 e o 10º termo vale 5. Então o 1º termo é 14 e a razão é −1.

Soma:

44. Udesc 2017 O número de termos da PG $\left(a, b, \frac{10}{27}, c, \frac{2}{9}, ..., \frac{2}{25}, d, e\right)$ é igual a:

a) 9 b) 10 c) 8 d) 11 e) 12

45. UEPG-PR 2020 Seja $(a_1, a_2, a_3, ...)$ uma progressão geométrica de sete termos, com $a_1 = 3$ e razão $q = \frac{1}{3}$. Considerando que $S = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + ... + \log_3 a_7$ e que $m = -\frac{S}{7}$ e $n = a_4^{-1}$, assinale o que for correto.

01 A função $h(x) = mx + n$ é decrescente.

02 A função $f(x) = |x - n|$ é crescente para $x > 9$.

04 A parábola que representa a função $g(x) = mx^2 + x$ tem vértice no ponto $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right)$.

08 $m + n$ é um número primo.

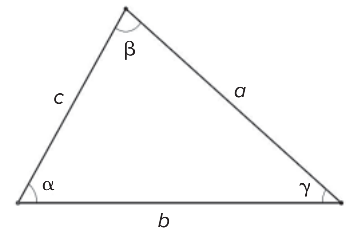
Soma:

46. Unifesp 2017 Em um experimento, uma população inicial de 100 bactérias dobra a cada 3 horas. Sendo y o número de bactérias após x horas, segue que $y = 100 \cdot 2^{\frac{x}{3}}$.

a) Depois de um certo número de horas a partir do início do experimento, a população de bactérias atingiu 1 677 721 600. Calcule esse número de horas. (dado: $1\,677\,721\,600 = 256^3$)

b) Sabendo-se que da 45ª para a 48ª hora o número de bactérias aumentou de $100 \cdot 2^k$, calcule o valor de k.

47. Unicamp-SP 2016 Considere o triângulo exibido na figura abaixo, com lados de comprimentos a, b e c e ângulos α, β e γ.



a) Suponha que a sequência (α, β, γ) é uma progressão aritmética (PA). Determine a medida do ângulo β.

b) Suponha que a sequência (a, b, c) é uma progressão geométrica (PG) de razão $q = \sqrt{2}$. Determine o valor de $\operatorname{tg}\beta$.

48. Unicamp-SP 2015 Seja (a, b, c, d) uma progressão geométrica (PG) de números reais, com razão $q \neq 0$ e $a \neq 0$.

a) Mostre que $x = -\frac{1}{q}$ é uma raiz do polinômio cúbico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

b) Sejam e e f números reais quaisquer e considere o sistema linear nas variáveis x e y, $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Determine para que valores da razão q esse tem solução única.

49. Unifesp 2013 A sequência $(12, a, b)$, denominada S_1, e a sequência (c, d, e), denominada S_2, são progressões aritméticas formadas por números reais.

a) Somando 1 ao segundo termo e 5 ao terceiro termo de S_1, a nova sequência de três números reais passa a ser uma progressão geométrica crescente. Calcule a razão dessa PG.

b) Aplicando a função trigonométrica seno aos três termos de S_2, a nova sequência que se forma tem soma dos três termos igual a zero, e termo do meio diferente de zero. Determine a razão r de S_2, para o caso em que $\frac{\pi}{2} < r < \pi$.

50. Fuvest-SP A soma dos cinco primeiros termos de uma PG, de razão negativa, é $\frac{1}{2}$. Além disso, a diferença entre o sétimo termo e o segundo termo da PG é igual a 3. Nessas condições, determine:

a) A razão da PG.

b) A soma dos três primeiros termos da PG.

51. Uerj 2017 Em uma atividade nas olimpíadas de matemática de uma escola, os alunos largaram, no sentido do solo, uma pequena bola de uma altura de 12 m. Eles observaram que, cada vez que a bola toca o solo, ela sobe e atinge 50% da altura máxima da queda imediatamente anterior.
Calcule a distância total, em metros, percorrida na vertical pela bola ao tocar o solo pela oitava vez.

52. IME-RJ 2021 Uma sequência é gerada pelo produto dos termos correspondentes de duas progressões aritméticas de números inteiros. Os três primeiros termos dessa sequência são 3053, 3840 e 4389. O sétimo termo da sequência é:

a) 3035
b) 4205
c) 4398
d) 4608
e) 5063

53. Unicamp-SP No mês corrente, uma empresa registrou uma receita de R$ 600 mil e uma despesa de R$ 800 mil. A empresa estuda, agora, alternativas para voltar a ter lucro.

a) Primeiramente, assuma que a receita não variará nos próximos meses, e que as despesas serão reduzidas, mensalmente, em exatos R$ 45 mil. Escreva a expressão do termo geral da progressão aritmética que fornece o valor da despesa em função de n, o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente. Calcule em quantos meses a despesa será menor que a receita.

b) Suponha, agora, que a receita aumentará 10% a cada mês, ou seja, que a receita obedecerá a uma progressão geométrica (PG) de razão $\frac{11}{10}$. Nesse caso, escreva a expressão do termo geral dessa PG em função de n, o número de meses transcorridos, considerando como mês inicial o corrente. Determine qual será a receita acumulada em 10 meses. Se necessário, use $1{,}1^2 = 1{,}21$; $1{,}1^3 \cong 1{,}33$ e $1{,}1^5 \cong 1{,}61$.

54. Fuvest-SP 2019 Resolva os três itens abaixo.

a) O primeiro termo de uma progressão geométrica de razão positiva é 5, e o terceiro termo é 45. Calcule a soma dos 6 primeiros termos dessa progressão.

b) Calcule a soma dos números inteiros positivos menores do que 112 e não divisíveis por 4.

c) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é $n(2n + 1)$, qualquer que seja $n \geqslant 1$. Encontre o vigésimo termo dessa progressão.

55. Unicamp-SP 2018 Considere a sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica e (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão w.

a) Determine a sequência no caso em que $a_3 = 3$ e $w = 2$.

b) Determine todas as sequências tais que $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$.

56. UFJF-MG 2018 Sejam a_1, a_2, a_3, a_4 os quatros primeiros termos de uma progressão geométrica de termos positivos, tais que a_3, a_4 e $a_4 - 7a_3 + 16a_2$ são os três primeiros termos de uma progressão aritmética, respectivamente.

a) Sabendo-se que $a_1 + a_3 + a_4 = 91$, calcule a razão e os quatros primeiros termos da progressão geométrica.

b) Calcule a soma do sexto até o décimo termo da progressão geométrica.

57. Fuvest-SP 2015 Um "alfabeto minimalista" é constituído por apenas dois símbolos, representados por * e #. Uma palavra de comprimento n, $n \geqslant 1$, é formada por n escolhas sucessivas de um desses dois símbolos. Por exemplo, # é uma palavra de comprimento 1 e #**# é uma palavra de comprimento 4.

Usando esse alfabeto minimalista,

a) quantas palavras de comprimento menor do que 6 podem ser formadas?

b) qual é o menor valor de N para o qual é possível formar 1 000 000 de palavras de tamanho menor ou igual a N?

58. IME-RJ 2020 Sejam a e b raízes da equação $x^2 - 4x + {}$ $+ M = 0$, c e d raízes da equação $x^2 - 36x + N = 0$. Sabendo-se que a, b, c e d formam uma progressão geométrica crescente, determine o valor de $M + N$.

59. FGV-SP 2014

a) Um sábio da Antiguidade propôs o seguinte problema aos seus discípulos:
"Uma rã parte da borda de uma lagoa circular de 7,5 metros de raio e se movimenta saltando em linha reta até o centro. Em cada salto, avança a metade do que avançou no salto anterior. No primeiro salto avança 4 metros. Em quantos saltos chega ao centro?"

b) O mesmo sábio faz a seguinte afirmação em relação à situação do item **a**:
"Se o primeiro salto da rã é de 3 metros, ela não chega ao centro."
Justifique a afirmação.

60. EPCar-MG 2016 Considere as expressões:

$A = 26^2 - 24^2 + 23^2 - 21^2 + 20^2 - 18^2 + \ldots + 5^2 - 3^2$ e

$B = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \ldots$

O valor de $\frac{A}{B}$ é um número compreendido entre

a) 117 e 120
b) 114 e 117
c) 111 e 114
d) 108 e 111

61. Unesp 2015 Para cada n natural, seja o número

$$K_n = \underbrace{\sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot \sqrt{3 \cdot (\ldots) \cdot \sqrt{3}}}}}_{n \text{ vezes}} - \underbrace{\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot (\ldots) \cdot \sqrt{2}}}}}_{n \text{ vezes}}.$$

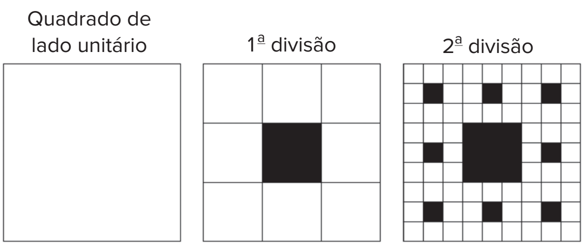
Se $n \to +\infty$, para que valor se aproxima K_n?

62. IME-RJ 2017 Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots)$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots)$ de termos inteiros, de razão r e razão q, respectivamente, onde r e q são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3$, $a_4 + b_3 = 26$. O valor de b_1 é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

63. Unesp Divide-se, inicialmente, um quadrado de lado com medida unitária em 9 quadrados iguais, traçando-se dois pares de retas paralelas aos lados. Em seguida, remove-se o quadrado central. Repete-se este processo de divisão, para os quadrados restantes, n vezes.

Observe o processo para as duas primeiras divisões:



Quantos quadrados restarão após as n divisões sucessivas do quadrado inicial e qual a soma das áreas dos quadrados removidos, quando n cresce indefinidamente?

64. EsPCEx-SP 2017 A sequência $(a_1, a_2, ..., a_{10})$, onde $a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{5}{2}, a_3 = \frac{9}{2}, ..., a_{10} = \frac{1025}{2}$ é de tal forma que para cada $n \in \{1, 2, ..., 10\}$ temos que $a_n = b_n + c_n$, onde $(b_1, b_2, ..., b_{10})$ é uma PG com $b_1 \neq 0$ e de razão $q \neq \pm 1$ e $(c_1, c_2, ..., c_{10})$ é uma PA constante.

Podemos afirmar que $a_1 + a_2 + ... + a_{10}$ é igual a

a) 98 **b)** 172 **c)** 260 **d)** 516 **e)** 1 028

65. Esc. Naval-RJ 2015 A soma dos três primeiros termos de uma PG crescente vale 13 e a soma dos seus quadrados 91. Justapondo-se esses termos, obtém-se um número de três algarismos. Pode-se afirmar que o resto da divisão desse número pelo inteiro 23 vale

a) 1
b) 4
c) 8
d) 9
e) 11

66. ITA-SP 2017 Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que a, b, c, d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, d - 140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d - b$ é

a) -140.
b) -120.
c) 0.
d) 120.
e) 140.

67. ITA-SP 2015 Seja $(a_1, a_2, a_3, ...)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geqslant 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é um número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) I, II e III.

68. IME-RJ 2013 Entre os números 3 e 192 insere-se igual número de termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica com razão r e q, respectivamente, onde r e q são números inteiros. O número 3 e o número 192 participam destas duas progressões. Sabe-se que o terceiro termo de $\left(1 + \frac{1}{q}\right)^8$, em potências crescentes de $\frac{1}{q}$, é $\frac{r}{9q}$.

O segundo termo da progressão aritmética é

a) 12
b) 48
c) 66
d) 99
e) 129

69. IME-RJ 2016 Sabendo-se que os números reais positivos a, b e c formam uma progressão geométrica e $\log\left(\frac{5c}{a}\right)$, $\log\left(\frac{3b}{5c}\right)$ e $\log\left(\frac{a}{3b}\right)$ formam uma progressão aritmética, ambas nessa ordem, então se pode afirmar que a, b e c

a) formam os lados de um triângulo obtusângulo.
b) formam os lados de um triângulo acutângulo não equilátero.
c) formam os lados de um triângulo equilátero.
d) formam os lados de um triângulo retângulo.
e) não podem formar os lados de um triângulo.

70. ITA-SP Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3} (x - a_k)^{4-k} = 0$.

Sabendo que $x = 0$ é uma das raízes e que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que

a) a soma de todas as raízes é 5.
b) o produto de todas as raízes é 21.
c) a única raiz real é maior que zero.
d) a soma das raízes não reais é 10.
e) todas as raízes são reais.

71. Uece 2021 No conjunto dos números reais positivos, sejam $(x_1, x_2, x_3, ...)$ uma progressão geométrica cuja razão é o número real q e $(y_1, y_2, y_3, ...)$ uma progressão aritmética cuja razão é r, com $y_1 = 3$ e $y_5 = 7$. Se para cada número inteiro positivo n, tivermos $y_n = \log_2(x_n)$, então, é correto afirmar que o valor da soma $x_1 + q + r$ é

a) 11.
b) 13.
c) 12.
d) 14.

72. ITA-SP 2017 Sejam $A = \{1, 2, ..., 29, 30\}$ o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e (a_1, a_2, a_3) uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q > 1$.

a) Determine todas as progressões geométricas (a_1, a_2, a_3) de razão $q = \frac{3}{2}$.

b) Escreva $q = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $\text{mdc}(m, n) = 1$. Determine o maior valor possível para n.

73. ITA-SP 2015 Sabe-se que 1, B, C, D e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I. B, C, D, E são dois a dois distintos;

II. os números 1, B, C, e os números 1, C, E, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

III. os números B, C, D, E, estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E.

74. ITA-SP A progressão geométrica infinita (a_1, a_2, ..., a_n, ...) tem razão $r < 0$. Sabe-se que a progressão infinita (a_1, a_6, ..., a_{5n+1}, ...) tem soma 8 e a progressão infinita (a_5, a_{10}, ..., a_{5n}, ...) tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita (a_1, a_2, ..., a_n, ...).

75. IME-RJ 2016 Os inteiros a_1, a_2, a_3, ..., a_{25} estão em PA com razão não nula. Os termos a_1, a_2 e a_{10} estão em PG, assim como a_6, a_j e a_{25}. Determine j.

76. IME-RJ 2019 Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

77. IME-RJ 2018 Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces deste octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

78. IME-RJ 2014 Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\text{ algarismos}} - \underbrace{11\ldots1}_{30\text{ algs"1"}}\underbrace{00\ldots0}_{30\text{ algs"0"}}}$$

Obs.: algs = algarismos

79. IME-RJ 2012 O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma progressão aritmética (PA) de números inteiros, de razão r, formam, nesta ordem, uma progressão geométrica (PG), de razão q, com q e $r \in \mathbb{N}^*$ (natural diferente de zero). Determine:

a) o menor valor possível para a razão r;

b) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item **a**.

BNCC em foco

EM13MAT507

1. Um atleta de alta performance tem se preparado para disputar uma prova de ciclismo, composta por um percurso de 250 km. Para isso, ele começou percorrendo 35 km no primeiro dia, e, a cada dia, ele percorreu 5 km a mais em relação ao dia anterior. A distância total percorrida por esse atleta durante uma semana de treino é de:

a) 350 km
b) 245 km
c) 280 km
d) 420 km
e) 250 km

EM13MAT508

2. No dia 21 de setembro de 2019, data que antecede o início da primavera, uma muda de quaresmeira foi plantada com objetivo de conscientização a respeito da importância da arborização urbana.

A muda media 2 dm e após exatamente 2 anos, sua altura é de 3,2 m. Admitindo ainda que sua altura ao final de cada ano de plantio, nessa fase de crescimento, forme uma progressão geométrica, a razão desse crescimento é de

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

EM13MAT508

3. Considere a seguinte sequência infinita de sólidos geométricos.

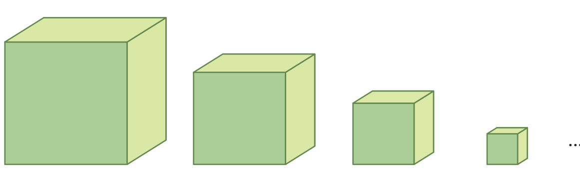


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 ...

Cada um desses sólidos é um cubo, e cada cubo, a partir do segundo, tem medida de aresta igual à metade da medida da aresta do cubo da figura anterior.

Sendo L a medida da aresta do cubo da Figura 1, qual é o volume total de todos os cubos dessa sequência?

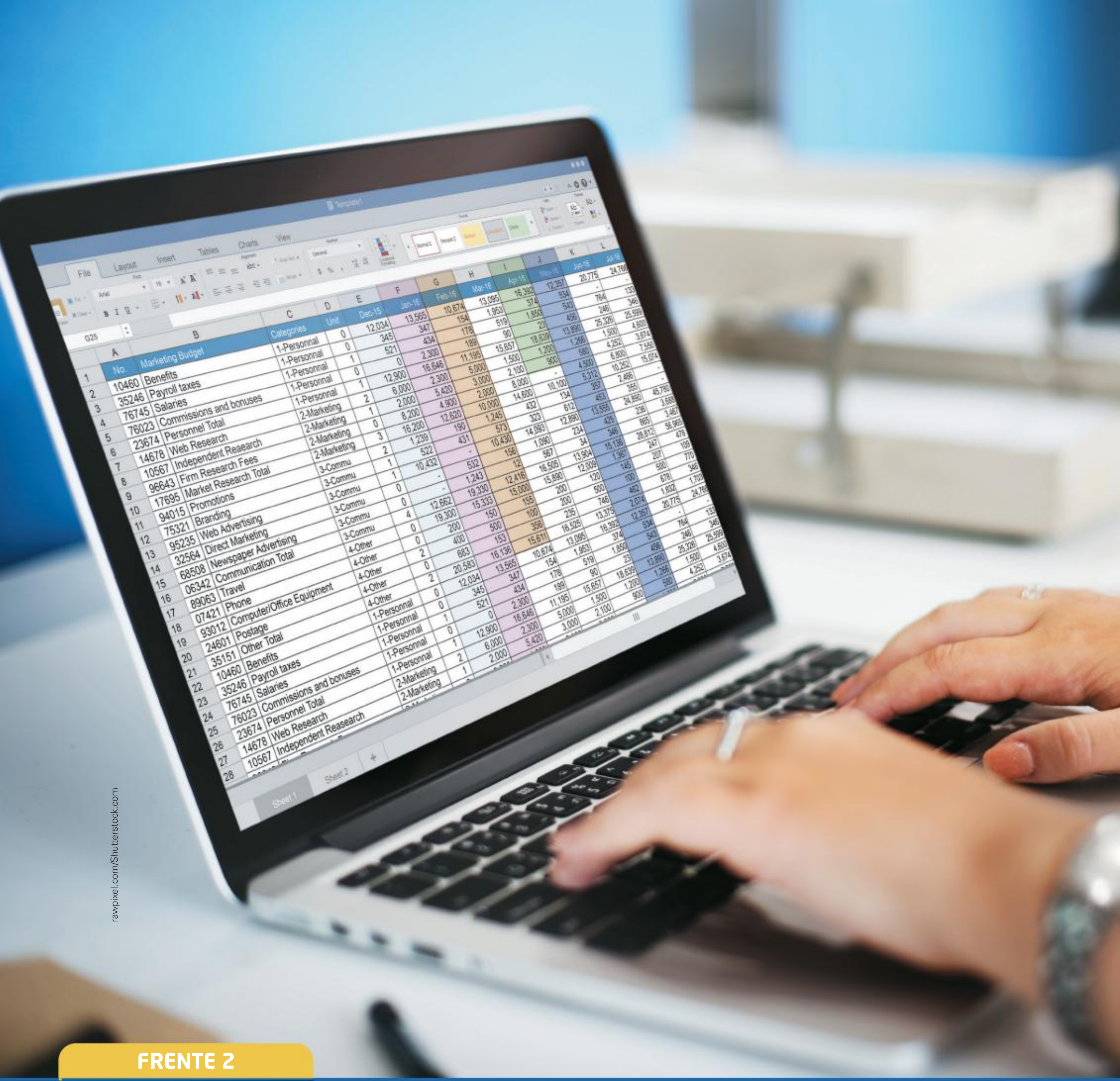
a) L^3

b) $\frac{8}{7}L^3$

c) $\frac{73}{64}L^3$

d) $\frac{585}{512}L^3$

e) $2L^3$



rawpixel.com/Shutterstock.com

FRENTE 2

CAPÍTULO

6

Introdução à Álgebra Linear

O conceito matemático de linearidade possui hipóteses relativamente simples, mas bastante rígidas. Os modelos de otimização proporcionados por esse estudo têm aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento científico. Engenheiros, administradores, programadores, químicos, estatísticos, cientistas sociais, médicos e demais profissionais das ciências biológicas utilizam diariamente as ferramentas matemáticas decorrentes dos princípios de linearidade, para tomar decisões que interferem na realidade de nossas vidas.

Os fundamentos da ciência conhecida como Álgebra Linear, no meio universitário, serão gradativamente estruturados ao longo deste capítulo.

Função linear

Duas grandezas X e Y são diretamente proporcionais se, quando uma delas duplica, por exemplo, a outra também duplica. Quando uma triplica, a outra também triplica, e assim por diante. De modo geral, se uma delas é multiplicada por um fator qualquer, então a outra também fica multiplicada pelo mesmo fator.

Nesse caso, deve existir um número real k não nulo tal que a função $y = f(x)$ fique expressa por:

$$f(x) = k \cdot x$$

As funções desse tipo são denominadas funções lineares, e o número k é denominado constante de proporcionalidade. As funções lineares admitem as seguintes propriedades algébricas:

$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x) \qquad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

Combinação linear

Considere agora uma série de funções lineares de diferentes variáveis: $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$, etc.

Considere também que as constantes de proporcionalidade dessas funções sejam, respectivamente, os números reais: a, b, c, etc.

$$f(x) = a \cdot x$$
$$g(y) = b \cdot y$$
$$h(z) = c \cdot z$$

A soma de todas ou de algumas dessas funções lineares é o que chamamos de combinação linear das variáveis x, y e z:

$$f(x) + g(y) + h(z) + \dots = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + \dots$$

O conceito de combinação linear pode ser aplicado a qualquer sucessão de termos (x, y, z, ...) mesmo que eles não sejam apenas numéricos.

Assim, para criar uma combinação linear ℓ de uma série com n termos $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, basta que seja escolhida uma série de n constantes reais $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ que não sejam todas nulas, tal que: $\ell = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \dots + a_n \cdot x_n$, com $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \dots + (a_n)^2 \neq 0$. O fato de a soma dos quadrados das constantes reais não ser igual a zero garante que elas não sejam todas nulas.

Um entendimento menos abstrato do conceito de combinação linear pode ser adquirido observando alguns exemplos de aplicação.

Imagine uma barraca de frutas que venda apenas abacaxis, bananas, caquis e damascos, sendo cada tipo de fruta de uma mesma espécie como bananas nanicas, por exemplo.

5 second Studio/Shutterstock.com
Mazur Travel/Shutterstock.com
Ho Su A Bi/Shutterstock.com
Ozgur Coskun/Shutterstock.com

Se alguém vai a essa barraca com uma sacola e efetua uma compra qualquer, essa pessoa levará em sua sacola uma combinação linear das frutas disponíveis. Exemplos:

Se uma pessoa comprou meio abacaxi, 3 dúzias de bananas, meia dúzia de caquis e 2 damascos, então sua sacola carrega a seguinte combinação linear:

$$\ell_1 = \frac{1}{2} \text{ abacaxi} + 36 \text{ bananas} + 6 \text{ caquis} + 2 \text{ damascos}$$

Aqui há uma série de quatro termos não numéricos:

$$v = (\text{abacaxi, banana, caqui, damasco})$$

E uma série de números reais que indicam as quantidades de cada termo da série v:

$$u_1 = \left(\frac{1}{2}, 36, 6, 2\right)$$

Se outra pessoa comprou apenas 4 abacaxis e uma dúzia de caquis, sua sacola carrega outra combinação linear:

$$\ell_2 = 4 \text{ abacaxis} + 12 \text{ caquis}$$

Aqui também se pode considerar a mesma série de quatro termos não numéricos:

$$v = (\text{abacaxi, banana, caqui, damasco})$$

Mas a série de números reais que indicam as quantidades de cada fruta será outra:

$$u_2 = (4, 0, 12, 0)$$

Considerando sempre que as quantidades de frutas compradas sejam ordenadas de acordo com a série não numérica v, as combinações lineares, que indicam os conteúdos das sacolas de meia dúzia de compradores dessa barraca, podem ser apresentadas como tabela de duas formas diferentes.

Podem-se escrever as séries u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 e u_6 uma abaixo da outra formando 6 linhas:

$$\begin{array}{c} u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \\ u_3 \rightarrow \\ u_4 \rightarrow \\ u_5 \rightarrow \\ u_6 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 36 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 6 & 48 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nessa tabela:

As duas primeiras linhas representam as compras dos primeiros clientes do exemplo;

A 3ª linha representa uma compra de apenas duas dúzias de bananas;

A 4ª linha representa a compra de um abacaxi e meio mais uma dezena de damascos;

A 5ª linha representa a compra de meia dúzia de bananas, quatro dúzias de caquis e 1 damasco.

A última linha representa um cliente que levou uma fruta de cada tipo.

Observe que o fato de um número estar escrito na terceira coluna é suficiente para identificar que representa uma quantidade de caquis, por exemplo.

Também se podem escrever os termos das séries $u_1 \dots u_6$, de cima para baixo formando 6 colunas, uma ao lado da outra:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 4 & 0 & 1{,}5 & 0 & 1 \\ 36 & 0 & 24 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 48 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nessa tabela, a quarta coluna representa a compra de um abacaxi e meio, mais uma dezena de damascos, por exemplo.

Essa representação com as séries numéricas em colunas parece mais adequada quando se quer indicar também a série v, dos tipos de frutas à venda na barraca:

$$\begin{array}{r} \text{Abacaxi} \rightarrow \\ \text{Banana} \rightarrow \\ \text{Caqui} \rightarrow \\ \text{Damasco} \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 4 & 0 & 1{,}5 & 0 & 1 \\ 36 & 0 & 24 & 0 & 6 & 1 \\ 6 & 12 & 0 & 0 & 48 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Produto interno

Considere agora a tabela de preços das frutas vendidas na barraca:

Abacaxi	R$ 9,90 a unidade
Banana	R$ 7,20 a dúzia
Caqui	R$ 15,00 a dúzia
Damasco	R$ 2,50 a unidade

Usando unidades monetárias, a série v = (abacaxi, banana, caqui, damasco) de termos não numéricos pode ser substituída pela série dos preços unitários de cada tipo de fruta, apresentada a seguir na forma de coluna.

$$v = \begin{pmatrix} 9{,}90 \\ 0{,}60 \\ 1{,}25 \\ 2{,}50 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Abacaxi} \\ \text{Banana} \\ \text{Caqui} \\ \text{Damasco} \end{array}$$

Com essa nova série v, cada combinação linear ℓ das frutas da barraca fica associada a um único valor numérico denominado produto interno.

! Atenção

Quando usado no contexto de séries numéricas e tabelas, o termo matemático "produto" não deve ser confundido com o resultado da operação usual de multiplicação, mas entendido como resultado de sucessivas e alternadas operações de multiplicação e de adição.

Saiba mais

No estudo da Geometria Analítica, séries de até três números reais representam vetores no plano ou no espaço cartesiano. Nesse contexto, o produto interno de duas dessas séries é também chamado de produto escalar.

O produto interno de duas séries numéricas u e v, com o mesmo número de termos, é indicado simbolicamente por $\langle u, v\rangle$. Assim:

$u = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ uma série de n números reais, com $n \in \mathbb{N}$

$v = (b_1, b_2, b_3, ..., b_m)$ uma série com m números reais, com $m \in \mathbb{N}$

Quando $n = m$ tem-se:

$$\langle u, v\rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 + ... + a_n \cdot b_n$$

Um algoritmo em duas etapas para obter o produto interno de duas séries numéricas consiste em efetuar ordenadamente todas as multiplicações: o 1º termo da série u pelo 1º termo da série v, o 2º termo de u pelo 2º termo de v, e assim por diante, até o último da série u pelo último da série v. Depois de feitas as multiplicações, todos os resultados devem ser somados para gerar o produto interno.

Uma forma de executar esse processo é escrever ambas as séries como colunas uma ao lado da outra, como no exemplo a seguir:

$$\begin{cases} u = (5, 4, 7, 0, 1) \\ v = (2, 3, 6, 9, 8) \end{cases} \qquad \begin{array}{ccccl} u & & v & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 5 & \times & 2 & = & 10 \\ 4 & \times & 3 & = & 12 \; + \\ 7 & \times & 6 & = & 42 \; + \\ 0 & \times & 9 & = & 0 \; + \\ 1 & \times & 8 & = & 8 \; + \\ & \langle u, v\rangle & & = & 72 \end{array}$$

Voltando ao exemplo da barraca de frutas, havia, entre outras, a combinação linear:

$$\ell_1 = \frac{1}{2} \text{ abacaxi} + 36 \text{ bananas} + 6 \text{ caquis} + 2 \text{ damascos}$$

Como não é possível somar abacaxis com bananas nem com as demais frutas, a expressão ℓ_1 não representa um simples valor numérico. Agora, se os preços unitários das frutas forem usados como representantes de seus valores, em uma mesma unidade monetária, a combinação linear ℓ_1 fica associada a um produto interno de duas séries numéricas: a série das quantidades de frutas e a série dos preços dessas mesmas frutas.

Nesse caso, o produto interno representa o total a ser pago pela compra de todas as frutas de ℓ_1.

$$\begin{array}{ccccl} u_1 & & v & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 0{,}5 & \times & 9{,}90 & = & 4{,}95 \\ 36 & \times & 0{,}60 & = & 21{,}60 \; + \\ 6 & \times & 1{,}25 & = & 7{,}50 \; + \\ 2 & \times & 2{,}50 & = & \underline{5{,}00} \; + \\ & & \langle u_1, v\rangle & = & 39{,}05 \end{array}$$

Logo, a pessoa que comprou a combinação ℓ_1 de frutas deverá pagar a quantia de R$ 39,05 por elas.

Retomando então as tabelas com as quantidades de frutas de cada compra naquela barraca e a dos seus respectivos preços unitários, podem-se calcular os produtos internos que representam os valores devidos para cada combinação de frutas:

$$\begin{array}{l} u_1 \rightarrow \\ u_2 \rightarrow \\ u_3 \rightarrow \\ u_4 \rightarrow \\ u_5 \rightarrow \\ u_6 \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0{,}5 & 36 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 6 & 48 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 9{,}90 \\ 0{,}60 \\ 1{,}25 \\ 2{,}50 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{Abacaxi} \\ \text{Banana} \\ \text{Caqui} \\ \text{Damasco} \end{array}$$

$$\langle u_1, v \rangle = 0{,}5 \cdot 9{,}90 + 36 \cdot 0{,}60 + 6 \cdot 1{,}25 + 2 \cdot 2{,}50 = 4{,}95 + 21{,}60 + 7{,}50 + 5{,}00 = 39{,}05$$
$$\langle u_2, v \rangle = 4 \cdot 9{,}90 + 0 \cdot 0{,}60 + 12 \cdot 1{,}25 + 0 \cdot 2{,}50 = 39{,}60 + 0 + 15{,}00 + 0 = 54{,}60$$
$$\langle u_3, v \rangle = 0 \cdot 9{,}90 + 24 \cdot 0{,}60 + 0 \cdot 1{,}25 + 0 \cdot 2{,}50 = 0 + 14{,}40 + 0 + 0 = 14{,}40$$
$$\langle u_4, v \rangle = 1{,}5 \cdot 9{,}90 + 0 \cdot 0{,}60 + 0 \cdot 1{,}25 + 10 \cdot 2{,}50 = 14{,}85 + 0 + 0 + 25{,}00 = 39{,}85$$
$$\langle u_5, v \rangle = 0 \cdot 9{,}90 + 6 \cdot 0{,}60 + 48 \cdot 1{,}25 + 1 \cdot 2{,}50 = 0 + 3{,}60 + 60{,}00 + 2{,}50 = 66{,}10$$
$$\langle u_6, v \rangle = 1 \cdot 9{,}90 + 1 \cdot 0{,}60 + 1 \cdot 1{,}25 + 1 \cdot 2{,}50 = 9{,}90 + 0{,}60 + 1{,}25 + 2{,}50 = 14{,}25$$

! Atenção

Perceba que, para efetuar produtos internos, basta que sejam tomadas duas séries numéricas com a mesma quantidade de termos, não importando se as séries estão dispostas como linhas ou colunas.

Exercícios resolvidos

1. Dadas as séries $u = (5, 2)$, $v = (1, -3)$ e $w = (-4, 10)$, calcule os seguintes produtos internos:

a) $\langle u, v \rangle$ **b)** $\langle u, w \rangle$ **c)** $\langle w, v \rangle$ **d)** $\langle u, u \rangle$

Resolução:

a) $\langle u, v \rangle = 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = 5 - 6 = -1$

b) $\langle u, w \rangle = 5 \cdot (-4) + 2 \cdot 10 = -20 + 20 = 0$

c) $\langle w, v \rangle = (-4) \cdot 1 + 10 \cdot (-3) = -4 - 30 = -34$

d) $\langle u, u \rangle = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 25 + 4 = 29$

2. UFPR 2014 Um criador de cães observou que as rações das marcas A, B, C e D contêm diferentes quantidades de três nutrientes, medidos em miligramas por quilograma, como indicado na primeira matriz abaixo. O criador decidiu misturar os quatro tipos de ração para proporcionar um alimento adequado para seus cães. A segunda matriz abaixo dá os percentuais de cada tipo de ração nessa mistura.

$$\begin{array}{r} \\ \text{nutriente 1} \\ \text{nutriente 2} \\ \text{nutriente 3} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} & \text{D} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 210 & 370 & 450 & 290 \\ 340 & 520 & 305 & 485 \\ 145 & 225 & 190 & 260 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Percentuais de mistura} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \begin{bmatrix} 35\% \\ 25\% \\ 30\% \\ 10\% \end{bmatrix} \end{array}$$

Quantos miligramas do nutriente 2 estão presentes em um quilograma da mistura de rações?

a) 389 mg.
b) 330 mg.
c) 280 mg.
d) 210 mg.
e) 190 mg.

Resolução:

Efetuando o produto interno da segunda linha da primeira tabela pela única coluna da segunda tabela, tem-se:

$$\begin{array}{rcrcr} 340\text{ mg} & \cdot & 35\% & = & 119{,}0\text{ mg} \\ 520\text{ mg} & \cdot & 25\% & = & 130{,}0\text{ mg} + \\ 305\text{ mg} & \cdot & 30\% & = & 91{,}5\text{ mg} + \\ 485\text{ mg} & \cdot & 10\% & = & \underline{48{,}5\text{ mg}} + \\ \multicolumn{3}{r}{\langle \text{Nutriente 2, Percentuais} \rangle} & = & 389{,}0\text{ mg} \end{array}$$

Alternativa: A.

3. A nota final de uma matéria é a média ponderada das notas de cada bimestre com os pesos propostos pelo professor. As séries n e p, a seguir, apresentam as notas de uma estudante nos 4 bimestres letivos e os pesos propostos.

$$n = (5 \quad 6{,}5 \quad 7{,}5 \quad 8)$$
$$p = (0{,}2 \quad 0{,}2 \quad 0{,}3 \quad 0{,}3)$$

Calcule a nota final dessa estudante.

Resolução:

A nota final da estudante é o produto escalar das séries n e p:

$$\langle n, p\rangle = 5 \cdot 0{,}2 + 6{,}5 \cdot 0{,}2 + 7{,}5 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}3$$
$$\langle n, p\rangle = 1 + 1{,}3 + 2{,}25 + 2{,}4 = 6{,}95$$

Saiba mais

Quanto ao produto interno, podemos destacar as propriedades:

- O produto interno é uma operação comutativa:
$$\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$$
- O produto interno de duas séries iguais de números reais nunca é negativo:
$$\langle a, a\rangle \geqslant 0$$
- Se o produto interno de duas séries iguais é nulo, então as séries são triviais.
$$\langle a, a\rangle = 0 \Rightarrow a = (0, 0, 0, 0, \ldots)$$

Equação linear

Sendo $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ uma série de n variáveis reais e $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma série de n constantes reais, que não são todas nulas, define-se equação linear a partir do produto interno dessas séries como sendo a igualdade $\langle a, x\rangle = b$ em que b é também uma constante real:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$$

com $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \ldots + (a_n)^2 \neq 0$.

A série $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é denominada série dos coeficientes da equação.

A constante b é denominada termo independente da equação.

Exemplos:

- $\langle(2, 3), (x, y)\rangle = 4 \Rightarrow 2x + 3y = 4$ é uma equação linear de duas variáveis em que (2, 3) é a série dos coeficientes e 4 é o termo independente.
- $\langle(5, -2, 1), (x, y, z)\rangle = 10 \Rightarrow 5x - 2y + z = 10$ é uma equação linear de três variáveis em que (5, −2, 1) é a série dos coeficientes e 10 é o termo independente.
- $\langle(1, 1, 1, 2), (x, y, z, w)\rangle = 8 \Rightarrow x + y + z + 2w = 8$ é uma equação linear de quatro variáveis em que (1, 1, 1, 2) é a série dos coeficientes e 8 é o termo independente. Toda equação linear com mais de uma variável ($n > 1$) possui uma infinidade de soluções reais. Cada solução de uma equação linear é formada por uma série de n valores reais, que tornam verdadeira a sentença da equação ao serem inseridos nos lugares de suas variáveis.

São soluções da equação $2x + 3y = 4$ as séries (2, 0), $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e (8, −4), por exemplo, pois:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4 + 0 = 4$$
$$2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = 1 + 3 = 4$$
$$2 \cdot 8 + 3 \cdot (-4) = 16 - 12 = 4$$

Não são soluções da equação $2x + 3y = 4$ as séries (3, 1), (–3, 2), por exemplo, pois:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9 \neq 4$$
$$2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -6 + 6 = 0 \neq 4$$

São soluções da equação $5x - 2y + z = 10$ as séries (2, 0, 0) e (1, 2, 9), por exemplo, pois:

$$5 \cdot 2 - 2 \cdot 0 + 0 = 10 - 0 + 0 = 10$$
$$5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 9 = 5 - 4 + 9 = 10$$

Não é solução da equação $5x - 2y + z = 10$ a série (3, 4, 5), por exemplo, pois:

$$5 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 5 = 15 - 8 + 5 = 12 \neq 10$$

É solução da equação $x + v + z + 2w = 8$ a série (3, 4, 5, –2), por exemplo, pois:

$$3 + 4 + 5 + 2 \cdot (-2) = 3 + 4 + 5 - 4 = 8$$

Atenção

Não são consideradas equações lineares de variáveis x, y, etc.:

- As equações do 2º grau, ou qualquer grau maior.
$$x^2 + y = 7 \qquad 2x + y^3 = 3 \qquad 3x + 4y^2 + 5z^4 = 6$$
- Equações em que há multiplicação entre duas ou mais variáveis.
$$4x + 5yz = 6 \qquad 7xy + z = 8 \qquad xyz = 1$$
- Equações com variáveis no denominador de alguma fração.
$$\frac{2}{x} + 3y + 4z = 5 \qquad 4x + 3y + \frac{2}{z} + \frac{1}{w} = 0 \qquad x + 3y^{-1} = 4$$

Exercícios resolvidos

4. Qual das equações a seguir é linear?

a) $2x - 7yz + 14z - 5 = 0$

b) $x + 3y + 4z + 5w = \frac{1}{x}$

c) $x(2 - y) + 2(z + x - 5) + 7 = 3x - 2$

d) $2(x + 1) - 5y + 3(x - z) = 7y - 5 + \frac{x}{2}$

e) $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 147 = 0$

Resolução:

A equação da alternativa a não é linear, pois o termo $-7yz$ apresenta produto entre variáveis.

A equação da alternativa b não é linear, pois o termo $\frac{1}{x}$ idêntico a x^{-1} não é do 1º grau.

A equação da alternativa c não é linear, pois desenvolvendo $x(2 - y)$ encontramos o termo $-xy$, que apresenta produto entre variáveis.

A equação da alternativa d é linear e pode ser escrita como $\frac{9}{2}x - 12y - 3n = -7$.

A equação da alternativa e não é linear, pois os termos x^2 e $2y^2$ são do 2º grau.

Alternativa: D.

5. Escreva algumas soluções da equação linear $3x + 2y = 7$ que estejam de acordo com as relações apresentadas em cada item:

a) $x > 0$ e $y > 0$

b) $x < 0$

c) $y < 0$

d) $x \cdot y = 0$

Resolução:

a) Há infinitas soluções para esse caso, entre elas: $(1, 2)$, $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$, $\left(2, \frac{1}{2}\right)$, etc.

b) Também há infinitas soluções para esse caso, entre elas: $(-1, 5)$, $\left(-2, \frac{13}{2}\right)$, $(-3, 8)$, etc.

c) Novamente há infinitas soluções para esse caso, entre elas: $(3, -1)$, $\left(\frac{11}{3}, -2\right)$, $(5, -4)$, etc.

d) Nesse caso há apenas duas soluções: $\left(0, \frac{7}{2}\right)$ e $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$.

Equação linear homogênea

As equações lineares $\langle a, x\rangle = b$ cujo termo independente b é nulo ($b = 0$) são denominadas equações homogêneas:

$$\langle a, x\rangle = 0 \Rightarrow a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \ldots + a_n \cdot x_n = 0$$

com $(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2 + \ldots + (a_n)^2 \neq 0$.

Exemplos:

$\langle(2, 3), (x, y)\rangle = 0 \Rightarrow 2x + 3y = 0$ é uma equação linear homogênea de duas variáveis.

$\langle(5, -2, 1)\rangle, (x, y, z)\rangle = 0 \Rightarrow 5x - 2y + z = 0$ é uma equação linear homogênea de três variáveis.

Toda equação linear homogênea possui alguma série nula entre suas infinitas soluções. Essas séries numéricas formadas por n zeros são denominadas soluções triviais da equação homogênea.

A série $(0, 0)$ é solução trivial da equação $2x + 3y = 0$:

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 + 0 = 0$$

As séries $(-3, 2)$ e $(9, -6)$, por exemplo, são soluções não triviais da equação $2x + 3y = 0$:

$$2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -6 + 6 = 0$$
$$2 \cdot 9 + 3 \cdot (-6) = 18 - 18 = 0$$

As séries $(3, 1)$, $(-1, 0)$, por exemplo, não são soluções da equação $2x + 3y = 0$:

$$2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 6 + 3 = 9 \neq 0$$
$$2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -2 + 0 = -2 \neq 0$$

A série $(0, 0, 0)$ é a solução trivial de $5x - 2y + z = 0$:

$$5 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 0 = 0 - 0 + 0 = 0$$

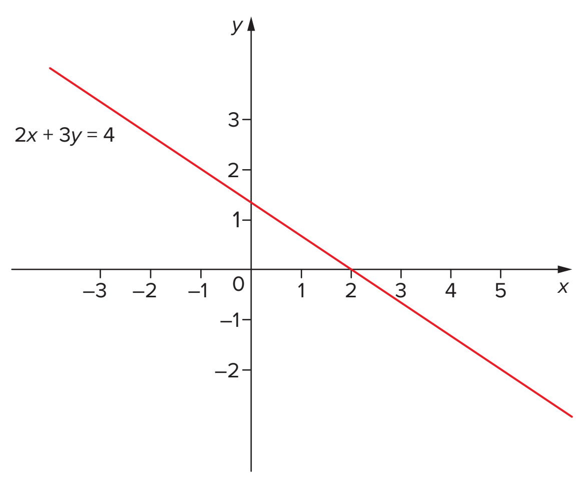
A série $(2, 5, 0)$, por exemplo, é solução não trivial da equação $5x - 2y + z = 0$:

$$5 \cdot 2 - 2 \cdot 5 + 0 = 10 - 10 + 0 = 0$$

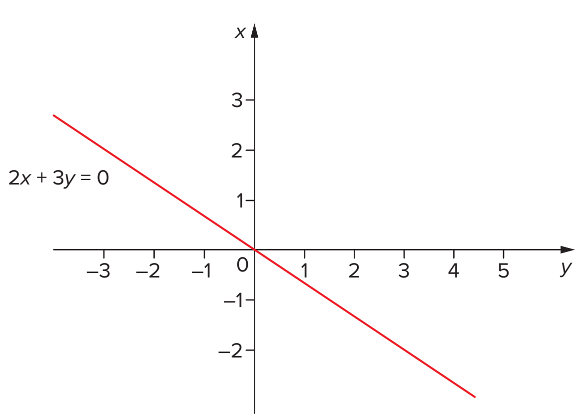
A série $(0, 0, 0, 0)$ é a solução trivial da equação $x + y + z + 2w = 0$:

$$0 + 0 + 0 + 2 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

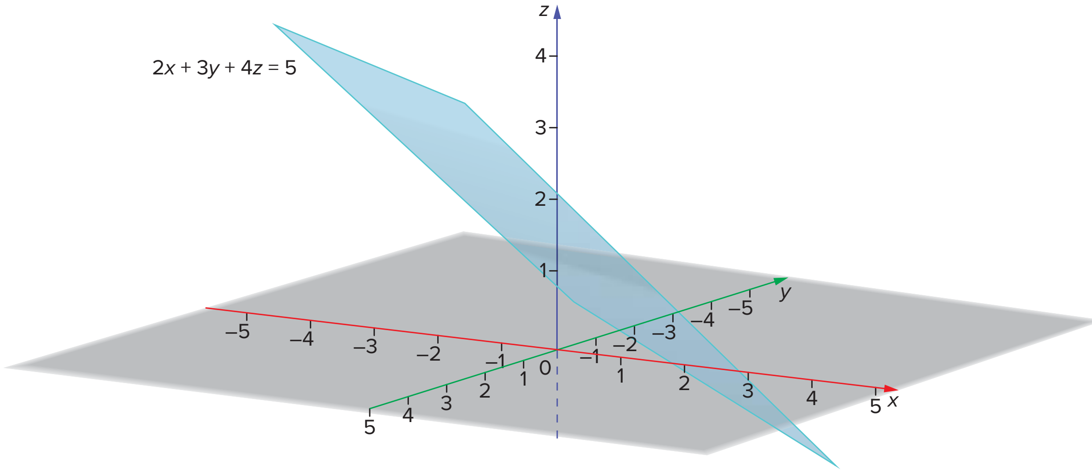
No plano cartesiano, a representação gráfica de uma equação linear com até duas variáveis tem a forma de uma reta.



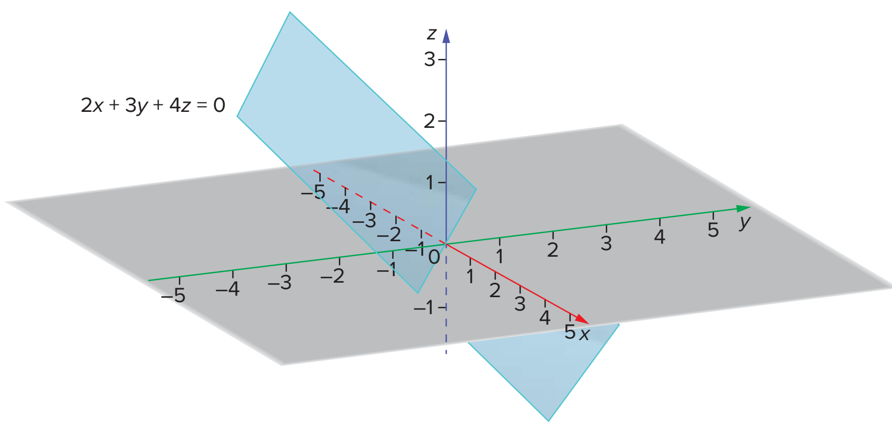
As retas que representam os gráficos das equações homogêneas sempre contêm a origem do plano cartesiano.



No espaço cartesiano, a representação gráfica de uma equação linear com até três variáveis tem a forma de um plano.



Os planos que representam os gráficos das equações homogêneas sempre contêm a origem do espaço cartesiano.



Sistemas lineares

São denominados sistemas lineares todos os sistemas de equações formados apenas por equações lineares. Basta que uma das equações do sistema não seja linear para invalidar a maioria dos métodos que serão estudados neste capítulo.

As primeiras características que devem ser observadas em um sistema linear são: o número de equações (m) e o número de variáveis (n). Veja alguns exemplos:

	$m = 2$	$m = 3$
$n = 2$	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$
$n = 3$	$\begin{cases} x + y - x = 8 \\ 2x - 3y + 2x = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + y - z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 3 \end{cases}$
$n = 4$	$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 2x - 3z + 2w = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 2x - 3z + 2w = 0 \\ x - y - 4z + w = 7 \end{cases}$

Observe duas particularidades do padrão em que esses sistemas lineares foram apresentados:

- as equações de cada sistema apresentam suas variáveis sempre na mesma ordem;
- o termo independente de cada equação fica sempre no segundo membro.

Levando em consideração esta forma padronizada de apresentação dos sistemas lineares, surge a possibilidade de representação do sistema como uma simples tabela em que são escritos apenas os coeficientes das variáveis e os termos independentes. Exemplo:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Observe na tabela deste exemplo que:

- as linhas são formadas pelas séries dos coeficientes das equações seguidas de seus respectivos termos independentes;
- a primeira coluna contém apenas os coeficientes da variável x;
- a segunda coluna contém apenas os coeficientes da variável y;
- a última coluna contém apenas os termos independentes.

Uma tabela desse tipo é denominada matriz completa do sistema. É costume colocar uma linha pontilhada separando a última coluna da matriz evidenciando os termos independentes das equações. Assim:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Veja as matrizes completas associadas aos outros exemplos de sistemas lineares:

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 3x - 2y - 4z = 3 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 2x - 3z + 2w = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 2x - 3z + 2w = 0 \\ x - y - 4z + w = 7 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

As soluções de um sistema linear são as séries de n números reais que satisfazem todas as m equações do sistema.

A série (2, 1) é a única solução do sistema $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$, pois, com $x = 2$ e $y = 1$, tem-se:

$$\begin{cases} x + 3y = 2 + 3 \cdot 1 = 5 & \rightarrow \text{Equação I satisfeita.} \\ 2x - y = 2 \cdot 2 - 1 = 3 & \rightarrow \text{Equação II satisfeita.} \end{cases}$$

A série (−4, 3) não é solução do sistema $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$, pois, com $x = -4$ e $y = 3$, tem-se:

$$\begin{cases} x + 3y = -4 + 3 \cdot 3 = -4 + 9 = 5 & \rightarrow \text{Equação I satisfeita.} \\ 2x - y = 2 \cdot (-4) - 3 = -8 - 3 = -11 \neq 3 & \rightarrow \text{Equação II não satisfeita.} \end{cases}$$

Assim, mesmo que uma série numérica satisfaça uma ou mais equações de um sistema, ela não será solução do sistema se houver alguma equação em que isso não ocorra. O fato de esse sistema possuir solução única será discutido posteriormente.

A série (4, 0, −4) é uma das infinitas soluções do sistema $\begin{cases} x + y - z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$, pois, com $x = 4$, $y = 0$ e $z = -4$, tem-se:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 + 0 - (-4) = 8 & \rightarrow \text{Equação I satisfeita.} \\ 2x - 3y + 2z = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot (-4) = 8 - 0 - 8 = 0 & \rightarrow \text{Equação II satisfeita.} \end{cases}$$

A série (5, 4, 1) é outra das infinitas soluções do sistema $\begin{cases} x + y - z = 8 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$, pois, com $x = 5$, $y = 4$ e $z = 1$, tem-se:

$$\begin{cases} x + y - z = 5 + 4 - 1 = 8 & \rightarrow \text{Equação I satisfeita.} \\ 2x - 3y + 2z = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 10 - 12 + 2 = 0 & \rightarrow \text{Equação II satisfeita.} \end{cases}$$

A série (–9, –7, 0, 9) é uma das infinitas soluções do sistema $\begin{cases} 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 2x - 3z + 2w = 0 \\ x - y - 4z + w = 7 \end{cases}$, pois, com $x = -9$, $y = -7$, $z = 0$ e $w = 9$, tem-se:

$$\begin{cases} 2x + y + 4z + 5w = 2 \cdot (-9) + 3 \cdot (-7) + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 9 = -18 - 21 + 0 + 45 = 6 & \rightarrow \text{ Equação I satisfeita.} \\ 2x - 3z + 2w = 2 \cdot (-9) + 0 \cdot (-7) - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 9 = -18 + 0 + 0 + 18 = 0 & \rightarrow \text{ Equação II satisfeita.} \\ x - y - 4z + w = -9 - (-7) - 4 \cdot 0 + 9 = -9 + 7 - 0 + 9 = 7 & \rightarrow \text{ Equação III satisfeita.} \end{cases}$$

O fato de cada um dos dois últimos sistemas possuírem infinitas soluções também será discutido posteriormente, bem como a existência de sistemas lineares que não possuem solução alguma, como o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$$

Usam-se numerais romanos para fazer referência às equações de um sistema linear. Assim, no sistema anterior, $2x + 3y = 5$ é a equação I e $4x + 6y = 7$ é a equação II.

Neste momento vamos nos concentrar em revisar os métodos básicos para a resolução dos sistemas formados por apenas duas equações com duas incógnitas.

Resolução de sistemas lineares 2 × 2

Há muitas técnicas eficientes de se resolver os sistemas desse tipo, sendo que três delas costumam ser estudadas no Ensino Fundamental – Anos Finais. Para revisá-las, considere o sistema:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ -4x + 3y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & 1 \\ -4 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

Método da substituição

Escolher uma das equações do sistema. Por exemplo: $5x - 2y = 1$.

Escolher uma das variáveis da equação. Por exemplo: y.

Isolar a variável escolhida escrevendo-a como uma função da outra:

$$5x - 2y = 1$$
$$-2y = -5x + 1$$
$$2y = 5x - 1$$
$$y = \frac{5x - 1}{2}$$

Substituir a função obtida no lugar da variável escolhida presente na outra equação:

$$-4x + 3y = 9$$
$$\downarrow$$
$$-4x + 3 \cdot \left(\frac{5x - 1}{2}\right) = 9$$

Resolver a equação de primeiro grau obtida:

$$-4x + 3 \cdot \left(\frac{5x - 1}{2}\right) = 9$$
$$-4x + \frac{15x - 3}{2} = 9$$
$$\frac{-8x + 15x - 3}{2} = \frac{18}{2}$$
$$7x = 18 + 3$$
$$x = \frac{21}{7}$$
$$x = 3$$

Substituir o valor encontrado em $y = \frac{5x - 1}{2}$: $y = \frac{5 \cdot 3 - 1}{2} = \frac{15 - 1}{2} = \frac{14}{2} = 7$.

Como as equações de primeiro grau possuem soluções únicas, o par ordenado (3, 7) é a única série (x, y) que satisfaz ambas as equações do sistema e, portanto, o conjunto solução é:

$$S = \{(3, 7)\}$$

FRENTE 2

Método da comparação

Escolher uma das variáveis das equações. Por exemplo: x.

Isolar a variável escolhida escrevendo-a como função da outra em cada equação.

Na equação I:

$$5x - 2y = 1$$
$$5x = 1 + 2y$$
$$x = \frac{1 + 2y}{5}$$

Na equação II:

$$-4x + 3y = 9$$
$$-4x = -3y + 9$$
$$4x = 3y - 9$$
$$x = \frac{3y - 9}{4}$$

Comparar as funções obtidas por meio de uma relação de igualdade:

$$\frac{1 + 2y}{5} = \frac{3y - 9}{4}$$

Efetuar o produto cruzado e resolver a equação de primeiro grau obtida:

$$4(1 + 2y) = 5(3y - 9)$$
$$4 + 8y = 15y - 45$$
$$8y - 15y = -45 - 4$$
$$-7y = -49$$
$$y = \frac{49}{7}$$
$$y = 7$$

Substituir o valor encontrado em alguma das funções. Por exemplo, em: $x = \frac{3y - 9}{4}$

$$x = \frac{3 \cdot 7 - 9}{4} = \frac{21 - 9}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

Portanto: $(x, y) = (3, 7)$.

$$S = \{(3, 7)\}$$

Método da subtração

Escolher uma das variáveis e observar quais são os seus coeficientes em cada equação do sistema. Por exemplo:

- o coeficiente da variável x na equação I é o número 5;
- o coeficiente da variável x na equação II é o número -4.

Multiplicar todos os termos da equação I pelo coeficiente de x na equação II:

$$-4 \cdot (5x - 2y = 1) \Rightarrow -20x + 8y = -4$$

Multiplicar todos os termos da equação II pelo coeficiente de x na equação I:

$$5 \cdot (-4x + 3y = 9) \Rightarrow -20x + 15y = 45$$

Subtrair, termo a termo, as duas novas equações obtidas:

$$\begin{array}{rl} & -20x + 8y = -4 \\ - & \underline{-20x + 15y = 45} \\ & 0x - 7y = -49 \Rightarrow y = 7 \end{array}$$

O mesmo processo pode ser feito com a outra variável.

- o coeficiente da variável y na equação I é o número -2;
- o coeficiente da variável y na equação II é o número 3.

Multiplicar todos os termos da equação I pelo coeficiente de y na equação II:

$$3 \cdot (5x - 2y = 1) \Rightarrow 15x - 6y = 3$$

Multiplicar todos os termos da equação II pelo coeficiente de y na equação I:

$$-2 \cdot (-4x + 3y = 9) \Rightarrow 8x - 6y = -18$$

Subtrair, termo a termo, as duas novas equações obtidas:

$$\begin{array}{rl} & 15x - 6y = 3 \\ - & \underline{8x - 6y = -18} \\ & 7x - 0y = 21 \Rightarrow x = 3 \end{array}$$

Portanto:

$$S = \{(3, 7)\}$$

Atenção

Embora eficientes, os dois primeiros métodos apresentados (substituição e comparação) mostram-se consideravelmente longos quando aplicados a sistemas maiores, ou seja, formados por equações com três ou mais variáveis. Já este terceiro método é o que mais se aproxima das técnicas matriciais que estudaremos para resolver sistemas lineares com mais equações e variáveis.

Sistemas lineares genéricos

Os sistemas de equações são formas de se expressar, em linguagem algébrica, perguntas que têm uma série de números reais como resposta. Nessa linguagem, é comum que:

- As últimas letras do alfabeto (*z*, *y*, *x*,...) sejam usadas para representar os números da série incógnita, ou seja, os números que estão sendo procurados.
- As primeiras letras do alfabeto (*a*, *b*, *c*,...) sejam usadas para representar os parâmetros do sistema, ou seja, os valores que são conhecidos: os coeficientes das variáveis e os termos independentes de cada equação.

Assim, um sistema linear 2 × 2 genérico, por exemplo, pode ser representado por:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Classificação dos sistemas lineares

Os sistemas lineares também podem ser classificados de acordo com o número de elementos de seu conjunto solução.

De modo geral dizemos que um sistema linear é possível ou compatível quando ele admite ao menos uma solução, e que é impossível ou incompatível quando não admite solução alguma.

Os sistemas possíveis podem ser determinados ou indeterminados. Veja o quadro a seguir:

Tipo	Sigla	Conjunto solução
Sistema possível e determinado	SPD	Unitário
Sistema possível e indeterminado	SPI	Infinito
Sistema impossível	SI	Vazio

Sistema possível e determinado

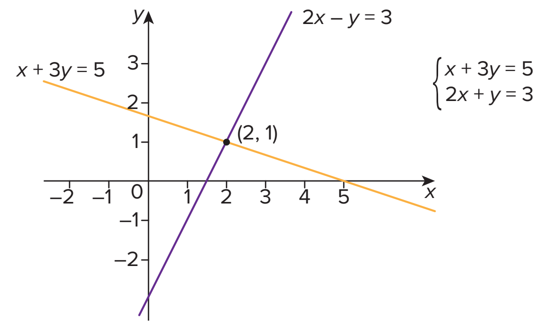
Um sistema linear $m \times n$ é possível e determinado quando existe **apenas uma** série de *n* números reais que satisfaça todas as *m* equações que compõem o sistema.

No caso de sistemas 2 × 2, como $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, isso ocorre apenas quando a série (a, b) de coeficientes da primeira equação não é diretamente proporcional à série (c, d) de coeficientes da segunda, ou seja:

$$a \cdot d \neq b \cdot c$$

Saiba mais

Se um sistema linear 2 × 2 é possível e determinado, então as retas que representam suas equações são concorrentes entre si.



Neste caso, a série de coordenadas do ponto de interseção das retas é única solução do sistema de equações.

Sistema possível e indeterminado

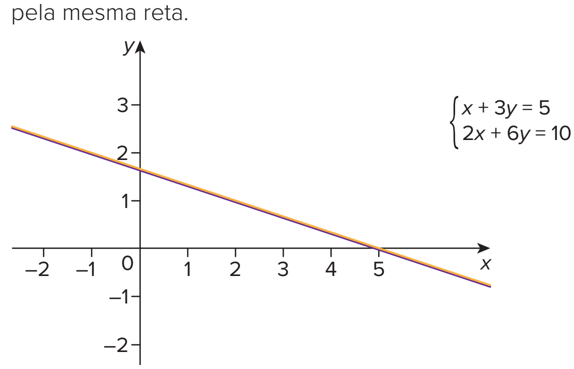
Um sistema linear $m \times n$ é possível e indeterminado quando existirem infinitas séries de *n* números reais que satisfazem todas as *m* equações do sistema.

No caso dos sistemas 2 × 2, como $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, isso ocorre quando a série (a, b, e) de parâmetros da primeira equação é diretamente proporcional à série (c, d, f) de parâmetros da segunda equação, ou seja:

$$a \cdot d = b \cdot c \qquad a \cdot f = e \cdot c \qquad b \cdot f = e \cdot d$$

Saiba mais

Se um sistema linear 2 × 2 é possível e indeterminado, então as duas equações do sistema são representadas pela mesma reta.



Neste caso, as séries de coordenadas de todos os pontos da reta são soluções do sistema.

Sistema impossível

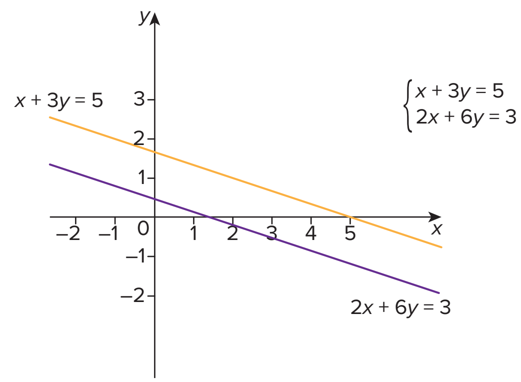
Um sistema linear $m \times n$ é impossível quando não existe nenhuma série de *n* números reais que satisfaça todas as *m* equações do sistema.

No caso dos sistemas 2 × 2, como $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$, isso ocorre quando as séries (a, b) e (c, d) são diretamente proporcionais, mas as séries (a, b, e) e (c, d, f) não são, ou seja:

$$a \cdot d = b \cdot c \qquad a \cdot f \neq e \cdot c \qquad b \cdot f \neq e \cdot d$$

Saiba mais

Se um sistema linear 2×2 é impossível, então as retas que representam suas equações são paralelas e distintas. Exemplo:



Neste caso, não há ponto de interseção entre as retas.

Exercício resolvido

6. Resolva e classifique os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - \dfrac{y}{2} = -1 \end{cases}$

Resolução:

Da segunda equação, $x = \dfrac{y}{2} - 1$. Substituindo essa expressão na primeira equação:

$$2 \cdot \left(\frac{y}{2} - 1\right) + 3y = 6$$
$$y - 2 + 3y = 6$$
$$4y = 8$$
$$y = 2$$

Então: $x = \dfrac{2}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$.

Portanto, o sistema é possível e determinado e seu conjunto solução é $S = \{(0, 2)\}$.

b) $\begin{cases} 2 - x = 3y \\ x + 5y = 2(y + 5) \end{cases}$

Resolução:

Da primeira equação, $x = 2 - 3y$. Substituindo essa expressão na segunda equação:

$$2 - 3y + 5y = 2y + 10$$
$$2 + 2y = 2y + 10$$
$$2 = 10$$

Como se trata de uma sentença fechada e falsa, o sistema é impossível e seu conjunto solução é $S = \varnothing$.

c) $\begin{cases} 2x - 5y = -6 \\ -x + y = 3 - \dfrac{y}{2} \end{cases}$

Resolução:

Da segunda equação, $x = \dfrac{3y}{2} - 3$. Substituindo essa expressão na primeira equação:

$$2 \cdot \left(\frac{3y}{2} - 3\right) - 5y = -6$$
$$3y - 6 - 5y = -6$$
$$-2y = 0$$
$$y = 0$$

Então: $x = \dfrac{3 \cdot 0}{2} - 3 = 0 - 3 = -3$.

Portanto, o sistema é possível e determinado e seu conjunto solução é $S = \{(-3, 0)\}$.

Sistema homogêneo

Os sistemas lineares formados apenas por equações homogêneas são denominados sistemas homogêneos.

Todo sistema $m \times n$ homogêneo é possível, pois admite pelo menos a solução trivial, que é a série nula formada cujos termos são todos iguais a zero: (0, 0, 0, ...). Sendo assim, não existe sistema homogêneo que seja impossível.

O sistema homogêneo 2×2, como $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$, é:

- Determinado, quando as séries (a, b) e (c, d) não são proporcionais: $a \cdot d \neq b \cdot c$.
- Indeterminado, quando as séries (a, b) e (c, d) são proporcionais: $a \cdot d = b \cdot c$.

Fórmula resolutiva de um sistema 2×2

Considere um sistema linear 2×2 genérico:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Se $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ então, tem-se que:

$$x = \frac{e \cdot d - b \cdot f}{a \cdot d - b \cdot c} \qquad y = \frac{a \cdot f - e \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Demonstração:

Multiplicando todos os termos de uma equação pelo coeficiente de y da outra equação:

$$d \cdot (ax + by = e) \Rightarrow adx + bdy = ed$$
$$b \cdot (cx \cdot dy = f) \Rightarrow bcx + bdy = bf$$

Subtraindo, termo a termo, as duas novas equações obtidas:

$$\begin{array}{r} adx + bdy = ed \\ - \quad bcx + bdy = bf \\ \hline adx - bcx + 0y = ed - bf \end{array} \Rightarrow (ad - bc)x = ed - bf$$

Então, se $ad - bc \neq 0$, tem-se que $x = \dfrac{e \cdot d - b \cdot f}{a \cdot d - b \cdot c}$.

Multiplicando todos os termos de uma equação pelo coeficiente de x da outra equação:

$$a \cdot (cx + dy = f) \Rightarrow acx + ady = af$$

$$c \cdot (ax + by = e) \Rightarrow acx + bcy = ec$$

Subtraindo, termo a termo, as duas novas equações obtidas:

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} acx + ady = af \\ acx + bcy = ec \end{array} \\ \hline 0x + ady - bcy = af - ec \end{array} \Rightarrow (ad - bc)y = af - ec$$

Novamente, se $ad - bc \neq 0$, tem-se que $y = \dfrac{a \cdot f - e \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c}$.

Escritas na linguagem algébrica tradicional das equações e funções, as fórmulas resolutivas dos sistemas lineares vistas aqui não parecem mesmo muito fáceis de se entender ou memorizar. Torna-se necessário, então, o uso de uma nova linguagem matemática, que chamamos de Álgebra Linear, proposta para simplificar o entendimento e os processos resolutivos dos sistemas lineares, até o ponto de torná-los computacionais.

A Álgebra Linear introduz novas estruturas matemáticas, como as matrizes, novos conceitos, como o de combinação linear, e novas operações, como o produto interno e os determinantes.

Matrizes

Desde o início do capítulo algumas ideias matemáticas têm sido fundamentadas sobre o conceito intuitivo de série numérica ordenada, como os pares ordenados (x, y) e as trincas ordenadas (x, y, z), por exemplo. Muitas referências foram feitas às séries de n números reais:

$$s = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

Toda série finita, como essa, representa a imagem de alguma função de domínio ordinal $f: \mathrm{N} \rightarrow \mathbb{R}$ com $\mathrm{N} = \{1, 2, 3, ..., n\}$, tal que: $x = f(n)$.

Em muitos casos, há alguma expressão algébrica para essa função. Exemplos:

$$x = n + 3, n \in \{1, 2\} \Rightarrow s = (4, 5)$$

$$x = 2n, n \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow s = (2, 4, 6)$$

$$x = n^2, n \in \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow s = (1, 4, 9, 16)$$

As matrizes são entidades matemáticas capazes de representar, de forma bidimensional, as imagens de funções também de domínio ordinal, mas com duas variáveis.

Indicamos a maioria das matrizes com letras maiúsculas, como A, B ou C, por exemplo, deixando as formas minúsculas dessas letras para representar suas entradas. Os elementos ou entradas das matrizes ficam organizados em linhas e colunas e, para isso, os valores dessas entradas dependem de dois índices ordinais: um para indicar o número da linha e outro para indicar o número da coluna. Desta forma, a_{ij} representa a entrada localizada na linha i e coluna j de uma matriz A.

Matrizes são apresentadas em sua forma explícita como uma tabela de números compreendidos entre parênteses, colchetes ou barras verticais duplas. Veja o exemplo de uma matriz A com 4 linhas e 3 colunas.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{Vmatrix}$$

! Atenção

Toda entrada de uma matriz deve ser acompanhada de dois índices ordinais, assim, a entrada a_{32} de uma matriz A, por exemplo, não deve ser "a trinta e dois" e sim "a três dois", pois a_{32} indica que essa entrada localiza-se na 3ª linha e 2ª coluna da matriz.

Por isso, não é necessário separar os índices da linha e da coluna por uma vírgula ou qualquer outro tipo de pontuação. A não ser que a matriz estudada possua mais de 10 linhas ou colunas.

No caso de uma matriz com mais do que 10 linhas e colunas, uma entrada indicada por a_{112} teria sua localização expressa de forma ambígua, podendo estar tanto na 1ª linha e 12ª coluna quanto na 11ª linha e 2ª coluna. Em situações como essa os índices podem ser separados por uma vírgula. Assim:

- $a_{1,\,12}$ indica a entrada localizada na 1ª linha e 12ª coluna da matriz;
- $a_{11,\,2}$ indica a entrada localizada na 11ª linha e 2ª coluna da matriz.

Para formalizar as matrizes como entes algébricos deve-se, primeiramente, considerar as suas quantidades de linhas e colunas. Essas quantidades determinam o formato, também chamado de tamanho ou dimensão de uma matriz.

A representação $m \times n$ indica o tamanho de uma matriz A que possui m linhas e n colunas.

Agora, consideram-se dois subconjuntos ordinais de $\mathbb{N}$:

$$\mathrm{I} = \{1, 2, 3, ..., m\} \text{ será o conjunto dos índices das linhas da matriz A.}$$

$$\mathrm{J} = \{1, 2, 3, ..., n\} \text{ será o conjunto dos índices das linhas da matriz A.}$$

As entradas da matriz A apresentam a imagem de alguma função ordinal f, que tem o produto cartesiano dos conjuntos I e J como domínio e o conjunto $\mathbb{R}$ como contradomínio:

$$f: \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{R}$$

Para indicar os elementos dos conjuntos I e J, considera-se também, um par de índices ordinais i e j, tais que: $i \in \mathrm{I}$ e $j \in \mathrm{J}$.

$$i \in \{1, 2, 3, ..., m\} \Rightarrow 1 \leqslant i \leqslant m$$

$$j \in \{1, 2, 3, ..., n\} \Rightarrow 1 \leqslant j \leqslant n$$

Finalmente, dispondo-se da função f e dos valores de m e n, é possível declarar a matriz A através da seguinte sentença:

$$\mathrm{A} = (a_{ij})_{m \times n} \text{ tal que } a_{ij} = f(i, j)$$

Veja o que designa cada letra nesta sentença:

A	Uma matriz
a	Cada entrada da matriz
i	Linha da entrada
j	Coluna da entrada
m	Quantidade de linhas da matriz
n	Quantidade de colunas da matriz
f	Função que estabelece a lei de formação das entradas da matriz

Em sua forma explícita, a matriz pode ser representada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ quando } m < n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \text{ quando } m = n$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ quando } m > n$$

A existência de uma matriz também pode ser declarada sem que os valores de suas entradas sejam fornecidos. Nesses casos basta informar o tamanho da matriz como índice da letra escolhida para designar a matriz. Assim, uma matriz A, com *m* linhas e *n* colunas, fica representada simplesmente por:

$$A_{m \times n}$$

O número de entradas de uma matriz $A_{m \times n}$ é igual a $m \cdot n$. Uma matriz $A_{5 \times 3}$, por exemplo, possui um total de $5 \cdot 3 = 15$ entradas.

Lei de formação

As funções de duas variáveis ordinais $f(i, j)$ que estabelecem as relações entre os valores das entradas da matriz e os índices *i* e *j* de sua localização são denominadas leis de formação da matriz. Em muitos casos, essas funções podem ser expressas algebricamente. Exemplos:

A matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$ em que $a_{ij} = i - j$ é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-2 & 1-3 \\ 2-1 & 2-2 & 2-3 \\ 3-1 & 3-2 & 3-3 \\ 4-1 & 4-2 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz $B = (b_{ij})_{2 \times 4}$ em que $b_{ij} = i \cdot j^2$ é:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1^2 & 1 \cdot 2^2 & 1 \cdot 3^2 & 1 \cdot 4^2 \\ 2 \cdot 1^2 & 2 \cdot 2^2 & 2 \cdot 3^2 & 2 \cdot 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 8 & 18 & 32 \end{pmatrix}$$

A matriz $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ em que $c_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i < j \\ i \cdot j, \text{ se } i \geq j \end{cases}$ é:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1+2 & 1+3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 2 & 2+3 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercício resolvido

7. Escreva explicitamente a matriz $A_{3 \times 4}$ em que $a_{ij} = i^2 - j$.

Resolução:

Do tamanho 3×4 da matriz tem-se que $1 \leq i \leq 3$ e que $1 \leq j \leq 4$.

Por fim, para cada combinação possível de valores de *i* e de *j*, encontramos o valor de a_{ij}:

$a_{11} = 1^2 - 1 = 0$ $\quad a_{12} = 1^2 - 2 = -1$ $\quad a_{13} = 1^2 - 3 = -2$ $\quad a_{14} = 1^2 - 4 = -3$

$a_{21} = 2^2 - 1 = 3$ $\quad a_{22} = 2^2 - 2 = 2$ $\quad a_{23} = 2^2 - 3 = 1$ $\quad a_{24} = 2^2 - 4 = 0$

$a_{31} = 3^2 - 1 = 8$ $\quad a_{32} = 3^2 - 2 = 7$ $\quad a_{33} = 3^2 - 3 = 6$ $\quad a_{34} = 3^2 - 4 = 5$

Finalmente, organizamos o resultado em uma matriz 3×4:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Filas de uma matriz

As filas de uma matriz são suas linhas e colunas. As diagonais de uma matriz não são consideradas filas, de modo que uma matriz A de tamanho $m \times n$ possui exatamente $m + n$ filas.

As matrizes $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 8 & 18 & 32 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, usadas como exemplos no tópico anterior, possuem 6 filas cada, sendo que em B há 2 linhas e 4 colunas e em C há 3 linhas e 3 colunas.

Toda entrada de uma matriz pertence a duas filas da matriz, sendo localizada na interseção de uma linha com uma coluna.

! Atenção

É norma da Álgebra Linear que em toda referência ao tamanho de uma matriz ou à posição de alguma de suas entradas, deve-se obedecer à ordem: linha antes, coluna depois.

Exercício resolvido

8. PUC-RS No projeto Sobremesa Musical, o Instituto de Cultura da PUCRS realiza apresentações semanais gratuitas para a comunidade universitária.
O número de músicos que atuaram na apresentação de número j do i-ésimo mês da primeira temporada de 2009 está registrado como o elemento a_{ij} da matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} 43 & 12 & 6 & 6 & 5 \\ 43 & 5 & 5 & 12 & 12 \\ 43 & 13 & 20 & 13 & 0 \\ 3 & 5 & 54 & 43 & 43 \end{bmatrix}$$

A apresentação na qual atuou o maior número de músicos ocorreu na _______ semana do _______ mês.

a) quinta segundo
b) quarta quarto
c) quarta terceiro
d) terceira quarto
e) primeira terceiro

Resolução:

A maior entrada da matriz é o número 54, localizado na interseção da 4ª linha com a 3ª coluna. Logo, $i = 4$ e $j = 3$. Como i indica o mês e j o número da apresentação, esses 54 músicos fizeram a **terceira** apresentação semanal do **quarto** mês.
Alternativa: D.

Tipos de matrizes

As matrizes são classificadas sob muitos aspectos diferentes. Podem ser de acordo com:

- o formato ou tamanho da matriz;
- os valores de suas entradas;
- suas propriedades algébricas.

Matriz linha e matriz coluna

Toda matriz de tamanho $m \times n$ pode ser chamada de:

- Matriz linha quando $m = 1$ e $n > 1$;
- Matriz coluna quando $n = 1$ e $m > 1$.

Tanto as matrizes linhas quanto as matrizes colunas podem ser chamadas de vetores e designadas por letras minúsculas, mesmo que não haja conotação geométrica em sua interpretação. Exemplos:

$u = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad a_{14}]$ é uma matriz linha de quatro entradas.

$v = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix}$ é um vetor coluna de três entradas.

Matriz retangular e matriz quadrada

Toda matriz de tamanho $m \times n$ pode ser chamada de:

- Matriz retangular quando $m \neq n$;
- Matriz quadrada quando $m = n$.

Quando uma matriz é quadrada, seu tamanho é do tipo $n \times n$ e o valor de n é chamado de ordem da matriz. Assim:

$A = [a_{11}]$ é uma matriz quadrada de primeira ordem ou de ordem 1.

$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de segunda ordem ou de ordem 2.

$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de terceira ordem ou de ordem 3.

A ordem de uma matriz quadrada também pode ser apresentada no lugar do formato, como índice da letra escolhida para designar a matriz. Assim, uma matriz quadrada A de ordem n pode ser representada por A_n.

$$A_n = A_{n \times n}$$

Em toda matriz quadrada A de ordem $n > 1$, além das filas (linhas e colunas), há duas outras séries de entradas a_{ij} com nomes específicos.

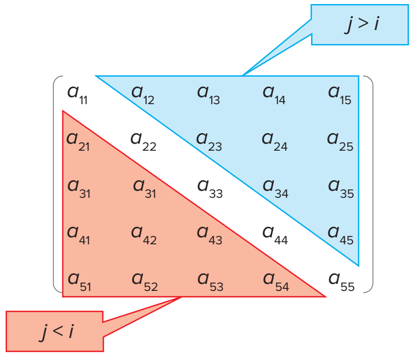
A série em que $i = j$ chama-se diagonal principal e esses elementos estão em destaque no exemplo a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

A série em que $i + j = n + 1$ chama-se diagonal secundária e esses elementos estão em destaque no exemplo a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

É importante observar também que nas entradas a_{ij} localizadas acima da diagonal principal temos que $j > i$, e nas localizadas abaixo desta diagonal tem-se $j < i$. Note no exemplo:



Matrizes triangulares e matriz diagonal

As matrizes quadradas cujas entradas situadas acima ou abaixo da diagonal principal são todas nulas também podem ser chamadas de matrizes triangulares. Assim, há dois casos a serem considerados:

- Se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$ tem-se uma matriz triangular superior.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

- Se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$ tem-se uma matriz triangular inferior.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

As matrizes quadradas cujas entradas situadas acima e abaixo da diagonal principal são todas nulas também podem ser chamadas de matrizes diagonais.

Se $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ tem-se uma matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}$$

Saiba mais

As relações entre os índices i e j das entradas a_{ij} localizadas nas diagonais paralelas à diagonal principal podem ser apresentadas na forma de uma diferença constante. Assim, a relação $i - j = 0$ localiza as entradas da diagonal principal e:

- $i - j = -1$ localiza a diagonal logo acima da principal;
- $i - j = 1$ localiza a diagonal logo abaixo da principal;
- $i - j = -2$ localiza a segunda diagonal acima da principal;
- $i - j = 2$ localiza a segunda diagonal abaixo da principal;
- $i - j = -3$ localiza a terceira diagonal acima da principal;
- $i - j = 3$ localiza a terceira diagonal abaixo da principal.

Saiba mais

Além disso, as relações desses índices nas diagonais paralelas à diagonal secundária podem ser apresentadas na forma de uma soma constante. Assim, em uma matriz quadrada de ordem 5, por exemplo, tem-se que:

⋮

$i + j = 4$ localiza a segunda diagonal acima da secundária;

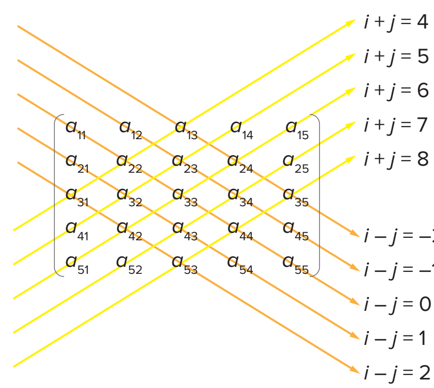
$i + j = 5$ localiza a diagonal logo acima da secundária;

$i + j = 6$ localiza a diagonal secundária;

$i + j = 7$ localiza a diagonal logo abaixo da secundária;

$i + j = 8$ localiza a diagonal logo abaixo da secundária;

⋮



Matriz nula

É chamada de matriz nula qualquer matriz cujas entradas sejam todas iguais a zero. As matrizes nulas costumam ser indicadas pela letra O acompanhada do seu respectivo tamanho:

$$O = (a_{ij})_{m \times n} \text{ tal que } a_{ij} = 0$$

Exemplos:

$$O_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad O_{2 \times 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matriz identidade

Toda matriz diagonal cujas entradas não nulas valem 1 é chamada de matriz identidade. As matrizes identidades costumam ser indicadas pela letra I acompanhada de sua respectiva ordem.

$$I = (a_{ij})_{n \times n} \text{ tal que } \begin{cases} a_{ij} = 1 \text{ se } i = j \\ a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Exemplos:

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz identidade de 2ª ordem.

FRENTE 2

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ é a matriz identidade de 3ª ordem.

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ é a matriz identidade de 4ª ordem.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes são consideradas iguais quando tiverem:

- o mesmo tamanho;
- as mesmas entradas em cada posição.

Sendo A e B duas matrizes de tamanhos $m \times n$ e $p \times q$:

$$A_{m \times n} = B_{p \times q} \Rightarrow \begin{cases} p = m \\ q = n \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

Exercício resolvido

9. Considere os números reais x, y e z que satisfazem a igualdade matricial a seguir:

$$\begin{bmatrix} x^2 & y \\ y + 1 & -4 \\ 7 & -5x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & z + 1 \\ 4 & -4 \\ 7 & x^2 \end{bmatrix}$$

O valor de $x + y + z$ é

a) 0

b) 1

c) -1

d) 2

e) -2

Resolução:

Sendo a_{ij} e b_{ij} as respectivas entradas dessas matrizes:

$a_{11} = b_{11} \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x \in \{5, -5\}$

$a_{32} = b_{32} \Rightarrow -5x = x^2 \Rightarrow x \in \{0, -5\}$

Como x deve satisfazer ambas as equações, tem-se: $x = -5$.

$a_{21} = b_{21} \Rightarrow y + 1 = 4 \Rightarrow y = 3$

$a_{12} = b_{12} \Rightarrow y = z + 1 \Rightarrow z = 2$

Portanto: $x + y + z = -5 + 3 + 2 = 0$

Alternativa: A.

Matriz transposta

Duas matrizes são consideradas transpostas uma da outra quando as séries das linhas de uma são iguais às séries de colunas da outra, na mesma ordem, ou seja:

- a primeira linha de uma matriz é igual à primeira coluna da outra.
- a segunda linha de uma matriz é igual à segunda coluna da outra.

Transpor uma matriz é uma operação em que as linhas da matriz transformam-se, ordenadamente, em colunas.

Indicamos por A^T (ou A^t) a matriz transposta de uma matriz A. Assim, sendo A e B matrizes de tamanhos $m \times n$ e $p \times q$:

$$(A_{m \times n})^T = B_{p \times q} \Rightarrow \begin{cases} p = n \\ q = m \\ a_{ij} = b_{ij} \end{cases}$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 20 \\ -2 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & -3 & 1 & 40 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 20 & 30 & 40 \end{pmatrix}$$

A transposta de uma matriz linha é uma matriz coluna e vice-versa.

$$(x \quad y \quad z)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

A transposição de matrizes é uma operação dual. Isso significa que duas aplicações sucessivas dessa mesma operação resultam na matriz original, ou seja, é uma operação que anula a si mesma.

$$(A^T)^T = A$$

Na operação de transposição de uma matriz quadrada, as entradas da diagonal principal permanecem em suas mesmas posições.

Para transpor uma matriz quadrada de segunda ordem, basta permutar (trocar de posição) as entradas da diagonal secundária:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Exercício resolvido

10. UFSCar-SP Seja a matriz M = $(m_{ij})_{2 \times 3}$ tal que $m_{ij} = j^2 - i^2$.

a) Escreva M na forma matricial explícita.

b) Escreva M^T, a transposta da matriz M.

Resolução:

a) As entradas da primeira coluna ($j = 1$) são:

$m_{11} = 1^2 - 1^2 = 1 - 1 = 0$

$m_{21} = 1^2 - 2^2 = 1 - 4 = -3$

As entradas da segunda coluna ($j = 2$) são:

$m_{12} = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$

$m_{22} = 2^2 - 2^2 = 4 - 4 = 0$

As entradas da terceira coluna ($j = 3$) são:

$m_{13} = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$

$m_{23} = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

Logo: $M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 8 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) A matriz transposta de M é a matriz $M^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$.

Saiba mais

As matrizes que permanecem iguais após a operação de transposição são denominadas matrizes **simétricas**. São matrizes simétricas apenas as matrizes quadradas tais que:

$$A^T = A$$

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{pmatrix}$$

Particularmente, as matrizes identidades são matrizes simétricas, assim como todas as matrizes nulas que forem quadradas.

Adição de matrizes

Dadas duas matrizes A e B de tamanhos $m \times n$ e $p \times q$, se $m = p$ e $n = q$, então existe uma matriz C tal que C = A + B, cujas entradas são iguais às somas das entradas de A e B de mesmas posições.

$$A_{m \times n} + B_{p \times q} = C_{r \times s} \Rightarrow \begin{cases} r = p = m \\ s = q = n \\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \end{cases}$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 6+4 & 1+9 & 6+1 \\ 1+2 & 2+8 & 1+8 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 10 & 7 \\ 3 & 10 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+2 & -1+1 & -2+3 \\ 1+0 & 0+3 & -1-1 \\ 2-3 & 1+0 & 0+5 \\ 3+8 & 2+4 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 11 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição de matrizes

A adição de matrizes só está definida quando elas têm o mesmo tamanho. Além disso, o resultado dessa operação deve ter o mesmo tamanho que o das matrizes somadas.

A adição de matrizes possui as seguintes propriedades:

- Propriedade associativa: (A + B) + C = A + (B + C)
- Propriedade comutativa: A + B = B + A
- As matrizes nulas são os elementos neutros da adição de matrizes: A + O = A
- A matriz transposta da soma é igual à soma das matrizes transpostas: $(A + B)^T = A^T + B^T$

Exercício resolvido

11. AFA-SP Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$. Se A^t e B^t são as matrizes transpostas de A e B, respectivamente, então $A^t + B^t$ é igual a

a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Resolução:

Como $A^t + B^t = (A + B)^t$, há duas possibilidades para a resolução desta questão:

Solução 1

Efetuar primeiro as transposições e depois a adição:

$$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^t + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solução 2

Efetuar primeiro a adição e depois a transposição da soma.

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Alternativa: A.

Multiplicação de matriz por número real

A soma de matrizes iguais pode ser abreviada como a multiplicação de uma matriz por um número natural. Por exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+0 \\ -2+(-2) & x+x \\ 3+3 & y+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2x \\ 6 & 2y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x \\ 3 & y \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\begin{aligned} &A + A = 2 \cdot A \\ &A + A + A = 3 \cdot A \\ &\vdots \\ &\underbrace{A + A + A + \ldots + A}_{n} = n \cdot A \end{aligned}$$

A multiplicação de uma matriz por um número real é uma extensão desse conceito:

$$B_{p \times q} = \lambda \cdot A_{m \times n} \Rightarrow \begin{cases} p = m \\ q = n \\ b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemplos:

$$-5 \cdot \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot (-5) & -2 \cdot (-5) \\ 2 \cdot (-5) & 3 \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ -10 & -15 \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} \\ 3 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \sqrt{2} & 0 \cdot \sqrt{2} \\ -2 \cdot \sqrt{2} & \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ 3 \cdot \sqrt{2} & \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2 \\ 3\sqrt{2} & \sqrt{6} \end{pmatrix}$$

Em contrapartida, se todas as entradas de uma matriz forem múltiplos de um mesmo número real λ, esse número pode ser colocado em evidência do lado de fora da matriz.

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 400 & -200 \\ 600 & 1000 \end{pmatrix} = 200 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\pi & \frac{\pi}{3} \\ \pi & -\frac{\pi}{2} & -\pi \\ -2\pi & 0 & 0 \\ 3\pi & \frac{\pi}{6} & \pi \end{pmatrix} = \pi \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{6} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda x \\ \lambda b & \lambda y \\ \lambda c & \lambda z \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{pmatrix}$$

Propriedades da multiplicação de matriz por número real

Considerando os números reais α e β além de duas matrizes de mesmo tamanho A e B, a operação de multiplicação entre uma matriz e um número real obedece às seguintes propriedades:

- Propriedade comutativa: $\alpha \cdot A = A \cdot \alpha$.
- Propriedade associativa: $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$.
- O número 1 é o elemento neutro dessa operação: $1 \cdot A = A$.

Há também duas propriedades distributivas a serem observadas:

- Em relação à adição de números reais: $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$.
- Em relação à adição de matrizes: $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$.
- Essa operação não é afetada pela transposição de matrizes: $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$.
- Se uma matriz for multiplicada por zero, o resultado será uma matriz nula: $0 \cdot A = O$.

Matriz oposta e subtração de matrizes

Quando duas matrizes são somadas e o resultado obtido é uma matriz nula, essas matrizes são denominadas opostas. Indica-se por $-A$ a matriz oposta de uma matriz A:

$$-A + A = O$$

Pode-se obter a matriz oposta de uma matriz A, multiplicando todas as entradas dessa matriz pelo número -1. Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

A operação de subtração de matrizes pode ser substituída pela soma da primeira matriz com a oposta da segunda matriz:

$$A - B = A + (-B)$$

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 \\ 2 & 8 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ -2 & -8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 6-4 & 1-9 \\ 1-2 & 2-8 & 1+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -8 \\ -1 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3 \\ -2-4 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Saiba mais

As matrizes que após a operação de transposição ficam iguais às suas matrizes opostas são denominadas matrizes **antissimétricas**.

São matrizes antissimétricas apenas as matrizes quadradas tais que:

$$A + A^T = 0$$

$$a_{ij} + a_{ji} = 0$$

As entradas da diagonal principal de uma matriz antissimétrica devem ser todas nulas.

Exemplos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 5 \\ 4 & 0 & -6 \\ -5 & 6 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 6 \\ 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercícios resolvidos

12. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, determine a matriz $M = A - B^t + 2C$.

Resolução:

Como as matrizes B^t e $2C$ são, respectivamente $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$, temos que a matriz M é:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 18 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

13. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, determine a matriz $M = A + B - 3C + 5D^T$.

Resolução:

Como as matrizes $-3C$ e $5D^T$ são, respectivamente $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 5 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2-3+0 & 2+0-3+10 \\ 0+1-3+5 & 3+2-6+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$$

14. UFSC Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, determine as matrizes X e Y que são soluções do sistema:

$$\begin{cases} 2X + Y = A \\ 3X + 2Y = B \end{cases}$$

Resolução:

Para resolver um sistema como esse, recomenda-se primeiro obter expressões literais para as matrizes X e Y em função das matrizes A e B para, depois disso, substituir as matrizes A e B pelas suas formas explícitas.

Então, isolando a matriz Y na primeira equação, tem-se:

$$2X + Y = A \Leftrightarrow Y = A - 2X$$

Substituindo a expressão obtida na segunda equação, tem-se:

$$3X + 2(A - 2X) = B$$

$$3X + 2A - 4X = B$$

$$-X = B - 2A$$

$$X = -B + 2A$$

Agora, substiuindo as formas explícitas de A e B nessa última expressão, tem-se:

$$X = -\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 & -3+2 \\ -5+10 & -9+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

E, finalmente, substituindo as formas explícitas de A e X na expressão com a matriz Y isolada, tem-se:

$$Y = A - 2X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 & 1+2 \\ 5-10 & 3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

15. A é a matriz quadrada de terceira ordem cujas entradas são tais que $a_{ij} = i - 2j$. Determine a matriz X que é solução da equação matricial $(X - 3 \cdot I)^t + A = O$ em que I e O são, respectivamente, a matriz identidade e a matriz nula, ambas de terceira ordem.

Resolução:

De $a_{ij} = i - 2j$ tem-se que a matriz quadrada A na sua forma explícita é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\cdot1 & 1-2\cdot2 & 1-2\cdot3 \\ 2-2\cdot1 & 2-2\cdot2 & 2-2\cdot3 \\ 3-2\cdot1 & 3-2\cdot2 & 3-2\cdot3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Antes de substituir a forma explícita na equação matricial $(X - 3 \cdot I)^t + A = O$ recomenda-se isolar a matriz X. Assim, somando a matriz oposta de A em ambos os membros da equação:

$$(X - 3 \cdot I)^t + A - A = O - A$$
$$(X - 3 \cdot I)^t + O = O - A$$

Então, como O é elemento neutro da adição de matrizes:

$$(X - 3 \cdot I)^t = -A$$

Transpondo ambos os membros da última equação:

$$((X - 3 \cdot I)^t)^t = (-A)^t$$
$$X - 3 \cdot I = -A^t$$

Agora, somando a matriz $3 \cdot I$ em ambos os membros:

$$X - 3 \cdot I + 3 \cdot I = -A^t + 3 \cdot I$$
$$X + O = -A^t + 3 \cdot I$$
$$X = -A^t + 3 \cdot I$$

Finalmente, substituindo as matrizes A e I pelas suas formas explícitas, tem-se:

$$X = -\begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}^t + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^t + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

16. Chamamos de antissimétricas as matrizes quadradas A tais que $A^t = -A$. Sabe-se que M é antissimétrica:

$$M = \begin{pmatrix} x+1 & a & b \\ x & y+3 & c \\ y & z & 6-3z \end{pmatrix}$$

Os termos a, *b* e *c*, de M, valem, respectivamente:

a) –1, –3 e 2
b) 1, 3 e –2
c) 1, –3 e –2
d) –3, 1 e 2
e) –1, 2 e –3

FRENTE 2

Resolução:

$$M^t = -M \Rightarrow \begin{pmatrix} x+1 & x & y \\ a & y+3 & z \\ b & c & 6-3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-1 & -a & -b \\ -x & -y-3 & -c \\ -y & -z & -6+3z \end{pmatrix}$$

Da diagonal principal, temos: $x = -1$, $y = -3$ e $z = 2$.
Do restante das entradas, temos que $a = -x$, $b = -y$ e $z = -c$, logo, $a = 1$, $b = 3$ e $c = -2$.
Alternativa: B.

Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes não é uma operação tão intuitiva quanto a adição ou a multiplicação de matriz por um número real. Não se trata então de multiplicar as entradas que ocupam a mesma posição em duas matrizes de mesmo tamanho, mas sim de efetuar uma série de produtos internos entre as séries que são linhas de uma matriz e as séries que são colunas da outra.

O primeiro aspecto que deve ser observado em uma multiplicação de matrizes é a relação entre os tamanhos das matrizes multiplicadas e o tamanho da matriz resultante dessa operação.

Dadas duas matrizes A e B de tamanhos $m \times n$ e $p \times q$, apenas quando $n = p$ é que existe uma matriz C de tamanho $m \times q$ tal que $A \cdot B = C$. Caso contrário, o produto das matrizes A e B é inexistente.

$$A_{m \times n} \cdot B_{p \times q} = C_{r \times s} \Rightarrow \begin{cases} n = p \\ m = r \\ q = s \end{cases}$$

Pode ser mais fácil entender a relação entre os tamanhos das matrizes observando um exemplo prático.

A seguinte matriz apresenta quanto comem dois amigos, sempre que vão juntos a alguma lanchonete.

	Hambúrguer	Batata frita	Refrigerante	Torta de maçã
Adriana	1	0	2	1
Roberto	2	1	0	3

O tamanho 2×4 dessa matriz A é devido tanto ao número de pessoas quanto ao número de opções de alimento. Assim, pode-se entender A como uma matriz de pessoas por alimentos:

$$A_{\text{pessoas} \times \text{alimentos}}$$

A próxima matriz apresenta os preços unitários dos mesmos alimentos em diferentes lanchonetes.

	Mc'Ronalds	Burguer-Ring	Rob's
Hambúrguer	R$ 8,00	R$ 10,00	R$ 9,00
Batata frita	R$ 5,00	R$ 4,00	R$ 4,50
Refrigerante	R$ 4,00	R$ 4,50	R$ 4,00
Torta de maçã	R$ 5,00	R$ 4,00	R$ 3,00

Analogamente, o tamanho 4×3 dessa matriz B é devido tanto ao número de alimentos quanto ao número de lanchonetes. Assim, pode-se entender B como uma matriz de alimentos por lanchonetes:

$$B_{\text{alimentos} \times \text{lanchonetes}}$$

A multiplicação das matrizes A e B deve produzir uma matriz C que apresente o custo da refeição de cada amigo em cada lanchonete, ou seja, C é uma matriz de pessoas por lanchonetes.

$$A_{\text{pessoas} \times \underline{\text{alimentos}}} \cdot B_{\underline{\text{alimentos}} \times \text{lanchonetes}} = C_{\text{pessoas} \times \text{lanchonetes}}$$
$$\nwarrow = \nearrow$$

Como há 2 pessoas e 3 lanchonetes, o produto A · B = C deve ter tamanho 2 × 3.

$$A_{2 \times 4} \cdot B_{4 \times 3} = C_{2 \times 3}$$

	Mc'Ronalds	Burguer-Ring	Rob's
Adriana	c_{11}	c_{12}	c_{13}
Roberto	c_{21}	c_{22}	c_{23}

Cada entrada c_{ij} da nova matriz deve ser obtida efetuando-se o produto interno da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B:

$$c_{11} = \langle \text{Adriana, Mc'Ronalds} \rangle = 1 \cdot 8{,}00 + 0 \cdot 5{,}00 + 2 \cdot 4{,}00 + 1 \cdot 5{,}00 = 21{,}00$$
$$c_{21} = \langle \text{Roberto, Mc'Ronalds} \rangle = 2 \cdot 8{,}00 + 1 \cdot 5{,}00 + 0 \cdot 4{,}00 + 3 \cdot 5{,}00 = 36{,}00$$
$$c_{12} = \langle \text{Adriana, Burger-Ring} \rangle = 1 \cdot 10{,}00 + 0 \cdot 4{,}00 + 2 \cdot 4{,}50 + 1 \cdot 4{,}00 = 23{,}00$$
$$c_{22} = \langle \text{Roberto, Burger-Ring} \rangle = 2 \cdot 10{,}00 + 1 \cdot 4{,}00 + 0 \cdot 4{,}50 + 3 \cdot 4{,}00 = 36{,}00$$
$$c_{13} = \langle \text{Adriana, Rob's} \rangle = 1 \cdot 9{,}00 + 0 \cdot 4{,}50 + 2 \cdot 4{,}00 + 1 \cdot 3{,}00 = 20{,}00$$
$$c_{23} = \langle \text{Roberto, Rob's} \rangle = 2 \cdot 9{,}00 + 1 \cdot 4{,}50 + 0 \cdot 4{,}00 + 3 \cdot 3{,}00 = 31{,}50$$

Preenchendo corretamente as entradas da matriz C, tem-se:

	Mc'Ronalds	Burguer-Ring	Rob's
Adriana	R$ 21,00	R$ 23,00	R$ 20,00
Roberto	R$ 36,00	R$ 36,00	R$ 31,50

Observe que, para haver o produto de duas matrizes, é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda. Nesse caso, o produto terá o mesmo número de linhas da primeira matriz e o mesmo número de colunas da segunda.

Assim, dadas duas matrizes A e B de tamanhos $m \times n$ e $n \times p$:

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p} \Leftrightarrow c_{ij} = \langle \text{linha } i \text{ de A, coluna } j \text{ de B} \rangle$$

Exercícios resolvidos

17. Considere as matrizes: $A_{3 \times 2}$, $B_{2 \times 3}$ e $C_{3 \times 3}$. Assinale a alternativa que apresenta um produto inexistente:

a) A · B
b) B · A
c) C · A
d) $A^T \cdot C$
e) $B^T \cdot C$

Resolução:

Transpondo a matriz $B_{2 \times 3}$ obtém-se $(B^T)_{3 \times 2}$, cujo número de colunas (2) não coincide com o número de linhas (3) da matriz C.
Portanto, não existe o produto $B^T \cdot C$.
Alternativa: E.

18. Dadas duas matrizes $A_{3 \times 4}$ e $B_{3 \times 5}$, considere outras matrizes X e Y tais que A · X · B = Y.
Nessas condições pode-se afirmar que:

a) o produto X · Y resulta numa matriz 4 × 5.
b) o produto Y · X resulta numa matriz 3 × 4.
c) o produto X · Y resulta numa matriz 5 × 3.
d) o produto Y · X resulta numa matriz 3 × 3.
e) não existe o produto X · Y.

Resolução:

Sendo $m \times n$ o formato da matriz X, para que exista o produto $A_{3 \times 4} \cdot X_{m \times n}$, é necessário que m seja igual a 4 e, como a multiplicação de matrizes é associativa, para que exista o produto $X_{m \times n} \cdot B_{3 \times 5}$, é necessário que n seja igual a 3. Portanto, temos que o formato da matriz X é 4×3.
Como a matriz Y resulta do produto $A \cdot X \cdot B$, concluímos que Y tem o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B, ou seja, o formato da matriz Y é 3×5.
Sendo assim, não existe o produto $Y \cdot X$, e o produto $X \cdot Y$ tem formato 4×5.
Alternativa: A.

19. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, calcule o produto $A \cdot B$.

Resolução:

Observando os tamanhos das matrizes $A_{3 \times 4}$ e $B_{4 \times 2}$ conclui-se que o produto $A \cdot B$ existe e deve ser uma matriz $C_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$. Então, calculando suas entradas:

$$c_{11} = \langle \text{linha 1 de A, coluna 1 de B} \rangle = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 5 + 8 + 9 + 8 = 30$$
$$c_{12} = \langle \text{linha 1 de A, coluna 2 de B} \rangle = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 = 3 + 4 - 3 + 0 = 4$$
$$c_{21} = \langle \text{linha 2 de A, coluna 1 de B} \rangle = 3 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 15 + 0 + 6 + 10 = 31$$
$$c_{22} = \langle \text{linha 2 de A, coluna 2 de B} \rangle = 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 = 9 + 0 - 2 + 0 = 7$$
$$c_{31} = \langle \text{linha 3 de A, coluna 1 de B} \rangle = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 10 + 12 + 0 + 4 = 26$$
$$c_{32} = \langle \text{linha 3 de A, coluna 2 de B} \rangle = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = 6 + 6 + 0 + 0 = 12$$

Logo: $C = \begin{pmatrix} 30 & 4 \\ 31 & 7 \\ 26 & 12 \end{pmatrix}$.

Propriedades da multiplicação de matrizes

Depois de assimilar as relações entre os tamanhos de duas matrizes que permitem sua multiplicação e a relação deles com o tamanho da matriz resultante, algumas propriedades podem ser enunciadas sem que seja necessário ficar indicando o tamanho de cada matriz.

A multiplicação de matrizes é uma operação associativa:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

Embora haja exceções, como matrizes nulas, identidades e outras, a multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa. Assim, via de regra, tem-se que:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

As matrizes identidades são os elementos neutros dessa operação:

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Se uma matriz for multiplicada por uma matriz nula, o resultado também será uma matriz nula de tamanho adequado:

$$O \cdot A = A \cdot O = O$$

A matriz transposta do produto é igual ao produto das matrizes transpostas em ordem contrária:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

O produto de matrizes comuta com a multiplicação por número real:

$$\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$$

! Atenção

Na álgebra dos números reais, se um produto é igual a zero, então um dos fatores também tem de ser igual a zero:

$$x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 0$$

Mas a álgebra das matrizes admite a existência de matrizes não nulas A e B tais que $A \cdot B = O$.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) & 8 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) \\ 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) & 6 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 8 & 8 - 8 \\ 6 - 6 & 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercícios resolvidos

20. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determine o produto $A \cdot B \cdot C$.

Resolução:

Da propriedade associativa $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, assim:

$$B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 12 + 12 \\ 8 + 30 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 47 \end{pmatrix}$$

21. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, determine os seguintes produtos:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

c) $A^T \cdot B^T$

d) $B^T \cdot A^T$

Resolução:

a) $$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 & 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & -4 & -5 \\ 6 & 11 & 16 \end{pmatrix}$$

b) $$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 3 & 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}$$

c) $$A^T \cdot B^T = (B \cdot A)^T = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 21 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 21 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

d) $$B^T \cdot A^T = (A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -3 & -4 & -5 \\ 6 & 11 & 16 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 6 & -4 & 11 \\ 9 & -5 & 16 \end{pmatrix}$$

22. ESPM-SP 2012 Sendo $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de ordem 2, a soma de todos os elementos da matriz $M = A \cdot A^T$ é dada por:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

b) $(a + b + c + d)^2$

c) $(a + b)^2 + (c + d)^2$

d) $(a + d)^2 + (b + c)^2$

e) $(a + c)^2 + (b + d)^2$

Resolução:

$$A \cdot A^T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{bmatrix}$$

A soma das entradas dessa matriz é:

$$a^2 + b^2 + ac + bd + ac + bd + c^2 + d^2 = a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2$$

Fatorando os trinômios quadrados perfeitos, obtém-se:

$$(a + c)^2 + (b + d)^2$$

Alternativa: E.

Matrizes comutativas

Quando duas matrizes A e B, não nulas, são tais que $A \cdot B = B \cdot A$, dizemos que essas matrizes comutam entre si.

Apenas pares de matrizes quadradas de mesma ordem podem ser comutativas.

Algumas matrizes comutam com qualquer outra matriz de mesmo tamanho, como as matrizes nulas e as matrizes identidades:

$$A \cdot O = O \cdot A = O \qquad\qquad A \cdot I = I \cdot A = A$$

Algumas matrizes comutam apenas com um pequeno grupo de outras matrizes. Veja o que ocorre com as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, por exemplo:

- A e B formam um par de matrizes que comutam entre si, pois $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 & -2 - 3 \\ 0 + 0 & 0 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 0 & -1 - 4 \\ 0 + 0 & 0 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

- A e C formam um par de matrizes que não comutam entre si, pois $A \cdot C = C \cdot A$.

$$A \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 \\ 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 1 & 2 - 3 \\ 0 + 2 & 0 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 & 0 + 4 \\ 1 + 0 & -1 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Exercício resolvido

23. Calcule o valor de $x + y - z$ sabendo que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ comutam entre si.

a) 0 **b)** 1 **c)** -1 **d)** 2 **e)** -2

Resolução:

Como ambas as matrizes são quadradas de 2ª ordem, os dois produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$ também serão matrizes quadradas de 2ª ordem:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot y & 1 \cdot x + 2 \cdot z \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot y & 0 \cdot x + 3 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2y & x + 2z \\ 3y & 3z \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + x \cdot 0 & 1 \cdot 2 + x \cdot 3 \\ y \cdot 1 + z \cdot 0 & y \cdot 2 + z \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 3x \\ y & 2y + 3z \end{pmatrix}$$

Como essas matrizes comutam entre si:

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 + 2y & x + 2z \\ 3y & 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 + 3x \\ y & 2y + 3z \end{pmatrix}$$

Da primeira coluna dessas matrizes, tem-se: $\begin{cases} 1 + 2y = 1 \\ 3y = y \end{cases} \Rightarrow y = 0.$

Da segunda coluna dessas matrizes, tem-se: $\begin{cases} x + 2z = 2 + 3x \\ 3z = 2y + 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 2 \Rightarrow x - z = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$

Portanto: $x + y - z = x - z + y = -1 + 0 = -1$.

Alternativa: C.

Matriz inversa

Duas matrizes quadradas de mesma ordem são consideradas inversas uma da outra, quando seu produto resulta em uma matriz identidade.

Indicamos por A^{-1} a matriz inversa de uma matriz A. Assim:

$$A^{-1} \cdot A = I$$

Nem toda matriz quadrada A possui matriz inversa A^{-1}, mas quando possui, a matriz inversa e a matriz original comutam entre si:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Matrizes que possuem inversa são chamadas de matrizes invertíveis ou matrizes inversíveis.

Exemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Verificação do exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) & 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) & 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 & -1 + 1 \\ 12 - 12 & -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 6 & 2 \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 \\ (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 6 & (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 3 & 2 - 2 \\ -6 + 6 & -3 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

As matrizes que não possuem inversas são chamadas de matrizes singulares.

A inversão de matrizes também é uma operação dual.

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

A matriz inversa de uma matriz transposta é igual à matriz transposta de uma matriz inversa.

$$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$$

A matriz inversa de um produto de matrizes é igual ao produto das matrizes inversas dos fatores, mas em ordem contrária.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Exercícios resolvidos

24. Determine a matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Como a matriz inversa possui o mesmo tamanho da matriz original, seja $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Assim, tem-se que: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Dos produtos internos da 1ª linha da matriz inversa, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \langle \text{linha 1, coluna 1} \rangle = 2x + y = 1 \\ \langle \text{linha 1, coluna 2} \rangle = 7x + 4y = 0 \end{cases}$$

Da 1ª equação do sistema: $y = 1 - 2x$

Substituindo na 2ª equação: $7x + 4 \cdot (1 - 2x) = 0 \Rightarrow 7x + 4 - 8x = 0 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4$

De volta à 1ª equação: $2 \cdot 4 + y = 1 \Rightarrow y = -7$

Dos produtos internos da 2ª linha da matriz inversa, tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \langle \text{linha 2, coluna 1} \rangle = 2z + w = 0 \\ \langle \text{linha 2, coluna 2} \rangle = 7z + 4w = 1 \end{cases}$$

Da 1ª equação do sistema: $w = -2z$

Substituindo na 2ª equação: $7z + 4 \cdot (-2z) = 1 \Rightarrow 7z - 8z = 1 \Rightarrow -z = 1 \Rightarrow z = -1$

De volta à 1ª equação: $2 \cdot (-1) + w = 0 \Rightarrow w = 2$

Portanto, a matriz inversa de $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ é: $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

25. Unicamp-SP Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, tal que $a_{ij} = 0$ para todo elemento em que $j > i$, e que $a_{ij} = i - j + 1$ para os elementos em que $j \leqslant i$. Calcule a sua inversa: A^{-1}.

Resolução:

Os elementos tais que $j > i$, ou seja, que situam-se acima da diagonal principal são todos nulos:

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$$

Os demais elementos desta matriz são:

$$a_{11} = 1 - 1 + 1 = 1 \qquad a_{22} = 2 - 2 + 1 = 1$$
$$a_{21} = 2 - 1 + 1 = 2 \qquad a_{32} = 3 - 2 + 1 = 2$$
$$a_{31} = 3 - 1 + 1 = 3 \qquad a_{33} = 3 - 3 + 1 = 1$$

Logo, temos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Como $A^{-1} \cdot A = I$, sendo $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{pmatrix}$, tem-se: $\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Os produtos internos da primeira linha de A^{-1} formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ y + 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0,\ y = 0 \text{ e } x = 1$$

Os produtos internos da segunda linha de A^{-1} formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ b + 2c = 1 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow c = 0,\ b = 1 \text{ e } a = -2$$

Os produtos internos da terceira linha de A^{-1} formam o seguinte sistema:

$$\begin{cases} r + 2s + 3t = 0 \\ s + 2t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow t = 1,\ s = -2 \text{ e } r = 1$$

Logo, a inversa da matriz A é a matriz $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Saiba mais

Toda matriz quadrada que possui matriz inversa igual à matriz transposta é denominada matriz **ortogonal**. Assim, se A é uma matriz ortogonal, tem-se que:

$$A^{-1} = A^{T}$$

26. Unicamp-SP Uma matriz real quadrada P é dita ortogonal se $P^T = P^{-1}$, ou seja, se sua transposta é igual a sua inversa.

Considere a matriz $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & a & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & b & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ e determine os valores de a e b para que P seja uma matriz ortogonal.

Resolução:

Como $P^T = P^{-1}$ e $P^{-1} \cdot P = I$, temos que $P^T \cdot P = I$, portanto:

$$P^T \cdot P = I \Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & a & b \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & a & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & b & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do produto interno da 1ª linha de P^T pela 2ª coluna de P tem-se:

$$\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot a + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot b = 0 \Rightarrow \frac{2}{9} - \frac{2a}{3} - \frac{2b}{3} = 0 \Rightarrow \frac{2 - 6a - 6b}{9} = \frac{0}{9} \Rightarrow a + b = \frac{1}{3}$$

Do produto interno da 2ª linha de P^T pela 3ª coluna de P tem-se:

$$\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + b \cdot \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \frac{4}{9} - \frac{a}{3} + \frac{2b}{3} = 0 \Rightarrow \frac{4 - 3a + 6b}{9} = \frac{0}{9} \Rightarrow a - 2b = \frac{4}{3}$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = \frac{1}{3} \\ a - 2b = \frac{4}{3} \end{cases}$ obtemos $a = \frac{2}{3}$ e $b = -\frac{1}{3}$.

Matriz inversa de 2ª ordem

Existe um algoritmo prático que, em apenas quatro passos, é capaz de exprimir a inversa de uma matriz quadrada não singular de segunda ordem.

Para efetuar esse algoritmo, considere $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

1º passo

Calcular a diferença Δ do produto das entradas da diagonal principal para o produto das entradas da diagonal secundária:

$$\Delta = a \cdot d - b \cdot c$$

No caso das matrizes quadradas de 2ª ordem, essa diferença é chamada de determinante da matriz.
Quando $\Delta = 0$, então a matriz é singular, ou seja, não admite inversa.
Quando $\Delta \neq 0$, pode-se dar prosseguimento ao algoritmo.

2º passo

Permutar (trocar de posição) as entradas da diagonal principal.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

3º passo

Mudar os sinais das entradas da diagonal secundária.

$$\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

4º passo

Dividir por Δ todas as entradas da matriz obtida no terceiro passo:

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{d}{\Delta} & -\frac{b}{\Delta} \\ -\frac{c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Assim, se $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$, tem-se que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Veja a aplicação desse algoritmo na inversão da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, por exemplo:

1º passo: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \Delta = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 6 = 8 - 6 = 2$

2º e 3º passos: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

4º passo: $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-6}{2} & \frac{2}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

A inversa da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercício resolvido

27. UFPE 2013 Seja $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$. Indique $|a| + |b| + |c| + |d|$.

Resolução:

Usando o algoritmo para inverter uma matriz de 2ª ordem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{12 - 11} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}$$

Assim, tem-se que: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 4, b = -1, c = -11$ e $d = 3$.

A soma dos módulos desses números é:

$$|a| + |b| + |c| + |d| = |4| + |-1| + |-11| + |3| = 4 + 1 + 11 + 3 = 19$$

Equações matriciais

Dada uma matriz quadrada A não singular e uma matriz B não necessariamente quadrada, considere as seguintes equações em que X e Y são matrizes incógnitas:

$$A \cdot X = B \text{ e } Y \cdot A = B$$

Como a multiplicação de matrizes não é uma operação comutativa, deve-se supor que as equações consideradas tenham respostas diferentes.

$$X \neq Y$$

Sabendo-se que não há como definir uma operação de divisão matricial, contornamos esse problema com o uso da matriz inversa.

Assim, a equação $A \cdot X = B$ pode ser resolvida multiplicando, pela esquerda, ambos os membros da equação por A^{-1}:

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$\underbrace{I \cdot X} = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Já a equação $Y \cdot A = B$ pode ser resolvida multiplicando, pela direita, ambos os membros da equação por A^{-1}:

$$Y \cdot \underbrace{A \cdot A^{-1}} = B \cdot A^{-1}$$

$$\underbrace{Y \cdot I} = B \cdot A^{-1}$$

$$Y = B \cdot A^{-1}$$

Assim, de modo geral, sendo A uma matriz não singular, tem-se que:

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$
$$Y \cdot A = B \Rightarrow Y = B \cdot A^{-1}$$

Exercícios resolvidos

28. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 50 & 25 \end{pmatrix}$, resolva as seguintes equações matriciais:

a) $A \cdot X = B$

b) $X \cdot A = B$

Resolução:

Uma maneira de resolver essas equações matriciais consiste em calcular primeiro a matriz inversa de A:

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 4 - 3 \cdot 1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

a) Como $A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 50 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 10 & 24 - 5 \\ -6 + 20 & -18 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 19 \\ 14 & -8 \end{pmatrix}$$

b) Como $X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$:

$$X = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 50 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 18 & -2 + 12 \\ 40 - 15 & -10 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 25 & 0 \end{pmatrix}$$

29. Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 0 \\ 8 & 16 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, determine a matriz X tal que $A \cdot X = B$.

Resolução:

A matriz inversa de A é: $A^{-1} = \dfrac{1}{2 \cdot 3 - 1 \cdot 4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Como $A \cdot X = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B$, temos:

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 0 \\ 8 & 16 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -17 & -34 & 1 & 0 \\ 11 & 22 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8{,}5 & -17 & 0{,}5 & 0 \\ 5{,}5 & 11 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$

Potências ordinais de uma matriz quadrada

O produto de duas ou mais matrizes quadradas iguais pode ser abreviado usando-se a notação tradicional de potenciação com expoente natural:

$$A \cdot A = A^2$$
$$A \cdot A \cdot A = A^3$$
$$\vdots$$
$$\underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n} = A^n$$

Particularmente, adota-se que $A^0 = I$ e $A^1 = A$.

Algumas propriedades da potenciação de bases reais e positivas também são válidas na álgebra matricial.

Sendo p e q números naturais:

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q} \qquad (A^p)^q = A^{p \cdot q}$$

Já a propriedade $(A \cdot B)^p = A^p \cdot B^p$ é válida se, e somente se, A e B forem matrizes comutativas entre si.

Saiba mais

Chamam-se **idempotentes** as matrizes quadradas que permanecem inalteradas quando elevadas a algum expoente natural.

$$A = A^2 = A^3 = A^4 = \ldots$$

Exemplo: Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, tem-se:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2-4 & -1-2+4 & 1+2-4 \\ -2-4+8 & 2+4-8 & -2-4+8 \\ -4-8+16 & 4+8-16 & -4-8+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} = A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$$
$$\vdots$$

Exercícios resolvidos

30. Unicamp-SP 2013 Considere a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\dfrac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix}$ que depende do parâmetro real $\alpha > 0$, e calcule a matriz $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2$.

Resolução:

$$A_{\alpha} + A_{2\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\dfrac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2\alpha \\ -\dfrac{1}{2\alpha} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\dfrac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A_{\alpha} + A_{2\alpha})^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\dfrac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3\alpha \\ -\dfrac{3}{2\alpha} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 - \dfrac{9}{2} & 6\alpha - 6\alpha \\ -\dfrac{3}{\alpha} + \dfrac{3}{\alpha} & -\dfrac{9}{2} + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

31. Unesp 2012 Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e definindo-se $A^0 = I$, $A^1 = A$ e $A^K = A \cdot A \cdot A \cdot ... \cdot A$ com k fatores, em que I é uma matriz identidade de ordem 2, $k \in \mathbb{N}$ e $k \geqslant 2$, a matriz A^{15} será dada por:

a) I **b)** A **c)** A^2 **d)** A^T **e)** O

Resolução:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como $A \cdot A = I$, tem-se que:

$$A^3 = A \cdot A^2 = A \cdot I = A$$
$$A^4 = A^3 \cdot A = A \cdot A = I$$
$$A^5 = A \cdot A^4 = A \cdot I = A$$
$$A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A = I$$

Assim, é possível perceber que:

- se n for um número par, então $A^n = I$;
- se n for um número ímpar, então $A^n = A$.

Como 15 é um número ímpar, tem-se que $A^{15} = A$.

Alternativa: B.

Determinantes

Trata-se de uma função com domínio no conjunto das matrizes quadradas de entradas reais ou complexas e imagem no conjunto dos números reais ou dos números complexos, de acordo com os valores das entradas da matriz.

Indicamos a função determinante pela abreviação **det**. Assim, o determinante de uma matriz A pode ser representado por **det(A)**.

Para entender o que a função determinante pretende expressar é preciso observar alguns padrões específicos dos sistemas lineares que possuem os mesmos números de equações e de variáveis.

Um sistema com apenas uma equação com uma variável pode ser representado por:

$$\{ax = b$$

Nesse caso, se $a \neq 0$ então, tem-se como única solução: $x = \dfrac{b}{a}$.

Um sistema com 2 equações e 2 variáveis cada pode ser representado por: $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

Nesse caso, se $a \cdot d - b \cdot c \neq 0$, então, a única solução (x, y) é tal que:

$$x = \frac{e \cdot d - b \cdot f}{a \cdot d - b \cdot c}$$

$$y = \frac{a \cdot f - e \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Observe que, em ambos os casos, há uma condição para garantir a existência e unicidade da solução do sistema:

$a \neq 0$ no sistema $\{ax = b$;

$$ad - bc \neq 0 \text{ no sistema } \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}.$$

As expressões algébricas "a" e "$ad - bc$" devem ser diferentes de zero porque ocupam os denominadores das frações que representam as soluções dos sistemas.

Observe agora as representações matriciais desses sistemas:

$$\{ax = b \Leftrightarrow (a \,\vdots\, b)$$

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right)$$

A linha pontilhada vertical separa sempre a última coluna dessas matrizes, que são denominadas matrizes completas ou estendidas do sistema. Eliminada a última coluna da matriz estendida de um sistema, as entradas que sobram formam a matriz principal do sistema.

Sistema	Matriz estendida	Matriz principal
$\{ax = b$	$[a \,\vdots\, b]$	$[a]$
$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$	$\left[\begin{array}{cc\|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array}\right]$	$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
$\begin{cases} ax + by + cz = j \\ dx + ey + fz = k \\ gx + hy + iz = l \end{cases}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \end{array}\right]$	$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

A função determinante associa a matriz principal de um sistema ao valor dos denominadores das frações que expressam as soluções do sistema. Assim:

$$\det[a] = a$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

As definições nos ajudarão a compreender como calcular determinantes de matrizes quadradas de 3ª ordem, 4ª ordem, ou de ordem maior, a partir dos valores das entradas da matriz.

Produto elementar das entradas de uma matriz quadrada

Se A é uma matriz quadrada de ordem n, então A possui n^2 entradas a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Um produto elementar ou fundamental das entradas da matriz A é o resultado da multiplicação de algumas de suas n^2 entradas.

Considerando A como o conjunto de todas as entradas da matriz, aquelas que podem ser multiplicadas para gerar um produto elementar compõem um subconjunto de A.

Os subconjuntos de entradas escolhidos para compor os produtos elementares devem ser tomados de acordo com alguns critérios.

Cada subconjunto deve possuir exatamente:

a. n entradas da matriz.

b. 1 entrada de cada linha.

c. 1 entrada de cada coluna.

Assim, entre os fatores de um produto elementar não pode haver duas entradas da mesma linha, nem da mesma coluna da matriz.

Disso tudo decorre que uma matriz quadrada de ordem n possui exatamente $n!$ produtos elementares.

Indicaremos cada produto elementar com a sigla *pel* acompanhada de um índice ordinal, assim pode-se definir a seguinte série de produtos elementares:

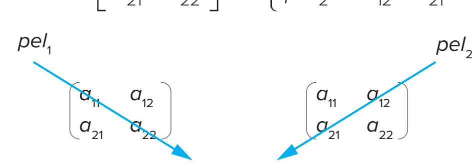
$$pel_1, pel_2, pel_3, \ldots, pel_k, \ldots, pel_{n!}$$

As matrizes quadradas de 1ª ordem possuem apenas $1! = 1$ produto elementar que equivale ao valor de sua única entrada:

$$A_1 = [a_{11}] \to pel_1 = a_{11}$$

As matrizes quadradas de 2ª ordem possuem apenas $2! = 2$ produtos elementares, sendo que os fatores do primeiro são as entradas da diagonal principal e os fatores do segundo são as entradas da diagonal secundária:

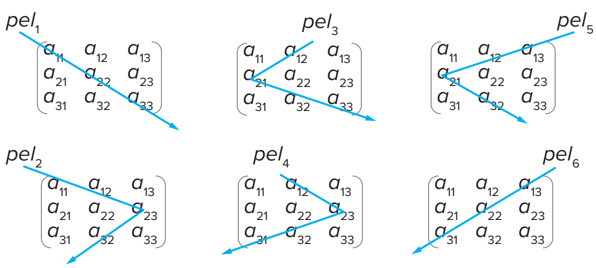
$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \to \begin{cases} pel_1 = a_{11} \cdot a_{22} \\ pel_2 = a_{12} \cdot a_{21} \end{cases}$$



As matrizes quadradas de 3ª ordem possuem $3! = 6$ produtos elementares, sendo que os fatores do primeiro são as entradas da diagonal principal e os fatores do último são as entradas da diagonal secundária:

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} pel_1 = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ pel_2 = a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} \\ pel_3 = a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \\ pel_4 = a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ pel_5 = a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \\ pel_6 = a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \end{cases}$$

Note que os produtos elementares dessa matriz foram ordenados de acordo com a ordem crescente dos índices das entradas da matriz A_3.

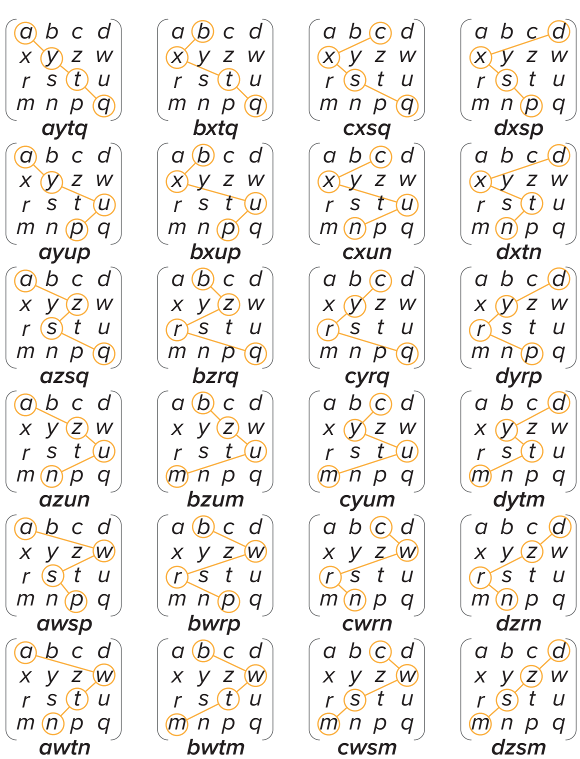


Observando o padrão das setas que representam os produtos elementares na ordem crescente em que são tomados, é possível ter uma compreensão visual dessa estrutura sem que seja necessário anotar os índices de todas as entradas. Veja, a seguir, como esse padrão evolui para as matrizes quadradas de 4ª ordem.

As matrizes quadradas de 4ª ordem possuem $4! = 24$ produtos elementares:

$$A_4 = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ x & y & z & w \\ r & s & t & u \\ m & n & p & q \end{bmatrix}$$

A tabela a seguir mostra cada um deles ordenados em 4 colunas:



Série das linhas e das colunas de um produto elementar

De cada produto elementar das entradas de uma matriz quadrada de ordem $n > 1$, pode-se extrair duas séries de n números naturais:

- A série dos índices que indicam as linhas ocupadas pelas entradas da matriz:
$$Lin = (i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$$
- A série dos índices que indicam as colunas das mesmas entradas:
$$Col = (j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$$

Veja o exemplo do produto elementar ***dxtn*** da matriz A_4 em destaque na tabela anterior.

- O fator d é a entrada da linha $i = 1$ e coluna $j = 4$
- O fator x é a entrada da linha $i = 2$ e coluna $j = 1$
- O fator t é a entrada da linha $i = 3$ e coluna $j = 3$
- O fator n é a entrada da linha $i = 4$ e coluna $j = 2$

Assim, as séries de linhas i e colunas j desse produto elementar são:

- $Lin = (1, 2, 3, 4)$
- $Col = (4, 1, 3, 2)$

Paridade de uma permutação

O fato de as séries das linhas e colunas, de um produto elementar, terem exatamente os mesmos números, caracteriza essas séries como permutações uma da outra.

A partir de uma série com n números, podem ser criadas $n!$ permutações incluindo a própria série que chamaremos de permutação original. Para criar uma permutação, basta que seja efetuada alguma troca entre dois termos da série original.

Uma série de 4 termos como (1, 2, 3, 4), por exemplo, pode ser tomada como ponto de partida para a criação de $4! = 24$ permutações possíveis.

A troca dos dois primeiros termos dessa série gera a série (2, 1, 3, 4), por exemplo, que é uma permutação ímpar da série original, pois foi obtida com apenas uma troca entre seus termos, e $t = 1$ é número ímpar.

Após essa troca, uma nova troca dos termos extremos da permutação obtida deve gerar a série (4, 1, 3, 2), por exemplo, que é uma permutação par da série original, pois foi obtida após duas trocas de posições entre seus termos, e $t = 2$ é número par.

(1, 2, 3, 4)
$t = 1$
(2, 1, 3, 4)
$t = 2$
(4, 1, 3, 2)

A permutação (4, 1, 3, 2) também pode ser obtida a partir da série original (1, 2, 3, 4) efetuando-se mais trocas entre 2 de seus termos. Mas, em todos os casos, esse número de trocas será par. Veja outra possibilidade:

(1, 2, 3, 4)
$t = 1$
(1, 2, 4, 3)
$t = 2$
(1, 4, 2, 3)
$t = 3$
(4, 1, 2, 3)
$t = 4$
(4, 1, 3, 2)

Qualquer que seja o número de trocas com as quais se obtém uma determinada permutação, a partir da mesma série original, tem-se a mesma paridade. Por esse motivo, tentamos sempre contar o mínimo de trocas necessárias.

A paridade de cada série *Col* em relação à *Lin* do mesmo produto elementar é usada para se atribuir um sinal a esse produto elementar. Uma vez atribuído esse sinal, obtém-se um produto elementar assinalado.

Sendo t o número de trocas necessárias para se obter a série *Col* de um produto elementar a partir de sua série *Lin*, a atribuição do sinal é feita multiplicando o produto elementar por $(-1)^t$. Assim:

- Quanto t for um número par, $(-1)^t = +1$.
- Quanto t for um número ímpar, $(-1)^t = -1$.

A tabela a seguir apresenta as características dos produtos elementares da matriz quadrada de segunda ordem: $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

k	Produto elementar	Séries		Trocas	Paridade	Produto assinalado
		Lin	*Col*			
pel_1	*ad*	(1, 2)	(1, 2)	$t = 0$	Par	$+ad$
pel_2	*bc*	(1, 2)	(2, 1)	$t = 1$	Ímpar	$-bc$

O determinante de uma matriz quadrada é igual à somatória de todos os seus produtos elementares assinalados.

No caso da matriz $A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ há apenas duas parcelas nessa somatória. Elas podem ser observadas na última coluna da tabela anterior. Assim:

$$\det(A_2) = +ad - bc$$

A próxima tabela apresenta as características de todos os produtos fundamentais da matriz quadrada de terceira ordem: $A_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix}$.

k	Produto elementar	Séries		Trocas	Paridade	Produto assinalado
		Lin	*Col*			
pel_1	*ayt*	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	$t = 0$	Par	$+ayt$
pel_2	*azs*	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	$t = 1$	Ímpar	$-azs$
pel_3	*bxt*	(1, 2, 3)	(2, 1, 3)	$t = 1$	Ímpar	$-bxt$
pel_4	*bzr*	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)	$t = 2$	Par	$+bzr$
pel_5	*cxs*	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	$t = 2$	Par	$+cxs$
pel_6	*cyr*	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)	$t = 1$	Ímpar	$-cyr$

Então, somando todas as expressões da última coluna da tabela:

$$\det(A_3) = +ayt - azs - bxt + bzr + cxs - cyr$$

Cálculo de determinantes pela definição

A expressão que define a função determinante a partir dos conceitos de produto elementar e paridade de uma permutação é:

$$\det(A_n) = \sum_{k=1}^{n!} (-1)^t \cdot pel_k$$

Os determinantes das matrizes quadradas também podem ser indicados cercando as entradas da matriz com barras verticais no lugar dos parênteses ou colchetes usados para indicar as matrizes. Isso não é recomendado para matrizes de

1ª ordem, pois pode ser confundido com a função módulo, mas nos outros casos essa representação torna desnecessário o uso da sigla det.

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Considere os produtos elementares da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

pel	***Lin***	***Col***	**Trocas**	**$(-1)^t \cdot pel$**
$pel_1 = 4 \cdot 7 = 28$	(1, 2)	(1, 2)	$t = 0$	+28
$pel_2 = 6 \cdot 5 = 30$	(1, 2)	(2, 1)	$t = 1$	–30

O determinante dessa matriz é a soma dos valores na última coluna da tabela:

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 28 - 30 = -2$$

Considere agora os produtos elementares da matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$.

pel	***Lin***	***Col***	**Trocas**	**$(-1)^t \cdot pel$**
$2 \cdot 5 \cdot 6 = 60$	(1, 2, 3)	(1, 2, 3)	$t = 0$	+60
$2 \cdot 0 \cdot 8 = 0$	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	$t = 1$	–0
$0 \cdot 3 \cdot 6 = 0$	(1, 2, 3)	(2, 1, 3)	$t = 1$	–0
$0 \cdot 0 \cdot 1 = 0$	(1, 2, 3)	(2, 3, 1)	$t = 2$	+0
$4 \cdot 3 \cdot 8 = 96$	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	$t = 2$	+96
$4 \cdot 5 \cdot 1 = 20$	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)	$t = 1$	−20

Somando os valores da última coluna:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 60 + 96 - 20 = 136$$

Perceba que só é necessário preocupar-se em assinalar os produtos elementares não nulos, uma vez que o número zero é o elemento neutro da adição.

Esse método de cálculo para um determinante pode parecer longo e exaustivo, mas no caso das matrizes com muitas entradas nulas ele é bastante eficiente, pois cada entrada nula de uma matriz quadrada de ordem n implica haver n produtos elementares iguais a zero.

Considere agora apenas os produtos elementares não nulos da matriz $C = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$.

pel	***Lin***	***Col***	**Trocas**	**$(-1)^t \cdot pel$**
$1 \cdot 8 \cdot (-3) = -24$	(1, 2, 3)	(2, 1, 3)	$t = 1$	+24
$5 \cdot 8 \cdot 2 = 80$	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	$t = 2$	+80

Somando os valores da última coluna:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 5 \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 24 + 80 = 104$$

Como próximo exemplo, considere os produtos elementares não nulos da matriz de 4ª ordem:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

pel	***Lin***	***Col***	**Trocas**	$(-1)^t \cdot pel$
$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$	(1, 2, 3, 4)	(1, 3, 2, 4)	$t = 1$	–8
$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 24$	(1, 2, 3, 4)	(2, 3, 1, 4)	$t = 2$	+24
$3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 18$	(1, 2, 3, 4)	(3, 2, 1, 4)	$t = 3$	–18
$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = 27$	(1, 2, 3, 4)	(3, 4, 1, 2)	$t = 2$	+27
$4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 = 24$	(1, 2, 3, 4)	(4, 3, 1, 2)	$t = 3$	–24

Portanto: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 24 - 18 + 27 - 24 = 1.$

Antes de estudar outras técnicas para o cálculo dos determinantes, vamos encarar a seguinte matriz de 5ª ordem:

$$N = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 8 & 3 & 1 & -6 & 7 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Repare haver nessa matriz apenas um produto elementar não nulo:

$$pel = 2 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot (-2) \cdot 4 = 48$$

A série de linhas das entradas é: $Lin = (1, 2, 3, 4, 5)$.
A série de colunas é: $Col = (4, 5, 2, 1, 3)$.
O número mínimo de trocas de uma série para a outra é $t = 3$.

(1, 2, 3, 4, 5)
$t = 1$
(4, 2, 3, 1, 5)
$t = 2$
(4, 5, 3, 1, 2)
$t = 3$
(4, 5, 2, 1, 3)

Portanto, $\det(N) = (-1)^3 \cdot 48 = -48$.

Exercícios resolvidos

32. Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} -5 \end{bmatrix}$ **b)** $B = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ **c)** $C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

Resolução:

a) Há apenas $1! = 1$ produto elementar na matriz $A = [-5]$ e ele coincide com o valor da única entrada da matriz. Então, como não há trocas a serem consideradas, $\det(A) = -5$.

b) Há $2! = 2$ produtos elementares na matriz $B = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$.

pel	*Lin*	*Col*	Trocas	$(-1)^t \cdot$ *pel*
$8 \cdot 4 = 32$	(1, 2)	(1, 2)	$t = 0$	+32
$7 \cdot 9 = 63$	(1, 2)	(2, 1)	$t = 1$	−63

Portanto: $\det(B) = 32 - 63 = -31$.

c) Há $3! = 6$ produtos elementares na matriz $C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 5 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}$, mas 3 deles são nulos.

Os produtos elementares não nulos são:

pel	*Lin*	*Col*	Trocas	$(-1)^t \cdot$ *pel*
$6 \cdot 2 \cdot 8 = 96$	(1, 2, 3)	(1, 3, 2)	$t = 1$	−96
$10 \cdot 5 \cdot 8 = 400$	(1, 2, 3)	(3, 1, 2)	$t = 2$	+400
$10 \cdot 4 \cdot 7 = 280$	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)	$t = 1$	−280

Portanto: $\det(C) = -96 + 400 - 280 = 24$.

33. PUC-Minas O valor do determinante da matriz $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é

a) -4. **b)** -3. **c)** -1. **d)** 2. **e)** 3.

Resolução:

Embora haja $4! = 24$ produtos elementares na matriz dada, 21 deles são nulos.
Os 3 produtos elementares não nulos são:

pel	*Lin*	*Col*	Trocas	$(-1)^t \cdot$ *pel*
$-2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 4 = 8$	(1, 2, 3, 4)	(2, 1, 4, 3)	$t = 2$	+8
$-2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1 = 6$	(1, 2, 3, 4)	(2, 3, 1, 4)	$t = 2$	+6
$-2 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 3 = 18$	(1, 2, 3, 4)	(2, 3, 4, 1)	$t = 3$	−18

Portanto, o valor do determinante da matriz dada é $(8 + 6 - 18) = -4$.
Alternativa: A.

Saiba mais

Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) de números reais são diretamente proporcionais quando a razão de suas abscissas for igual à razão de suas ordenadas, ou seja, se:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

Efetuando o produto cruzado, a proporção fica expressa por:

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Escrevendo ambos os termos no primeiro membro da igualdade, tem-se:

$$a \cdot d - b \cdot c = 0$$

Assim, é correto afirmar que, se o par (a, b) for diretamente proporcional ao par (c, d), então a diferença dos termos do produto cruzado é igual a zero.

Por outro lado, pares ordenados (a, b) e (c, d) de números reais que não possuem relação de proporcionalidade direta implicam na diferença dos termos do produto cruzado ser diferente de zero:

$$a \cdot d - b \cdot c \neq 0$$

O valor dessa diferença, que pode ser próxima ou distante de zero, possui um significado importante para o estudo da Matemática, estabelecendo uma escala de afastamento da relação de proporcionalidade. Esse afastamento estabelece outro tipo de relação entre os números dos pares (a, b) e (c, d), chamada de relação de linearidade.

Indicando por Δ o valor dessa diferença, tem-se:

$$\Delta = a \cdot d - b \cdot c$$

Veja que o valor de Δ é exatamente o que se obtém calculando o determinante da matriz quadrada de 2ª ordem $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ cujas linhas são os pares ordenados (a, b) e (c, d).

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Regra de Sarrus para determinantes de 3ª ordem

Em 1842 o matemático francês Pierre Frédéric Sarrus publicou um tratado em que sugere um algoritmo alternativo para o cálculo dos determinantes de 3ª ordem, que ficou conhecido como regra de Sarrus.

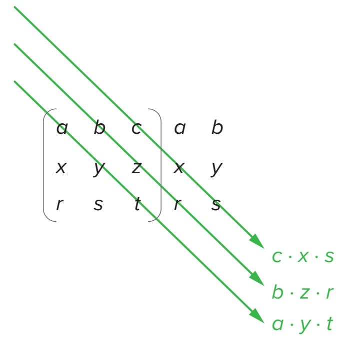
1º passo: Escrever o determinante da matriz na forma explícita:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix}$$

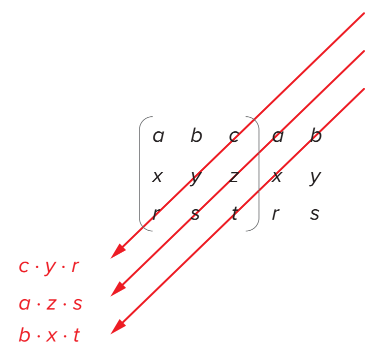
2º passo: Repetir as duas primeiras colunas do lado direito da matriz:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix} \begin{matrix} a & b \\ x & y \\ r & s \end{matrix}$$

3º passo: Multiplicar as três entradas da diagonal principal e das duas diagonais paralelas que surgem com a repetição das colunas.



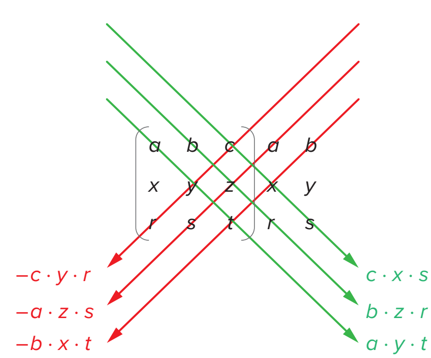
4º passo: Multiplicar as três entradas da diagonal secundária e das duas diagonais paralelas.



Até aqui, todos os 6 produtos elementares da matriz já foram efetuados, sendo que:

- Os 3 que são pares foram obtidos no 3º passo;
- Os 3 que são ímpares foram obtidos no 4º passo.

5º passo: Assinalar os produtos elementares de acordo com sua paridade:



6º passo: Efetuar a somatória dos produtos elementares assinalados:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = ayt + bzr + cxs - cyr - azs - bxt$$

A regra de Sarrus deve ser aplicada apenas aos determinantes de 3ª ordem, não sendo válida em matrizes de 2ª ordem, 4ª ordem ou ordem superior.

Exercício resolvido

34. Calcule o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Aplicando a regra de Sarrus:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\det(M) = -3\cdot1\cdot2 - 1\cdot2\cdot3 - 2\cdot3\cdot1 + 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot2 + 3\cdot3\cdot3$$

$\det(M) = -6 - 6 - 6 + 1 + 8 + 27$

$\det(M) = 18$

Aplicações geométricas dos determinantes de 3ª ordem

No estudo da Geometria Analítica Plana, os determinantes de 3ª ordem se prestam como ferramentas bastante úteis, sendo aplicados em diversos tipos de cálculo.

Área

Os determinantes podem ser usados para calcular áreas de paralelogramos, triângulos e outros polígonos, a partir das coordenadas cartesianas de seus vértices.

Sendo $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ as coordenadas de três vértices de um paralelogramo, a área desse paralelogramo será igual ao módulo do seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Substituir as coordenadas de algum dos vértices A, B ou C do paralelogramo, pelas coordenadas do seu quarto vértice, pode até alterar o sinal do determinante, mas não seu valor absoluto.

Desse fato decorre que a área S do triângulo ABC equivale à metade do módulo do mesmo determinante:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

Equação da reta

Levando em consideração que três pontos colineares A, B e C não formam triângulo, conclui-se que o determinante usado para calcular a área do triângulo deve ser nulo. ($D = 0$)

Esse fato pode ser usado para se obter a equação geral da reta que passa por dois pontos fixos A e B, e um ponto genérico $P(x, y)$.

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercício resolvido

35. Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos A(2, 5) e B(7, 4).

Resolução:

Sendo $P(x, y)$ um ponto qualquer dessa reta, tem-se que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando a regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \\ x & y \end{matrix} = 0$$

$$-4x - 2y - 35 + 8 + 5x + 7y = 0 \Rightarrow x + 5y - 27 = 0$$

Saiba mais

Na Geometria Analítica espacial, os determinantes de 3ª ordem permitem que sejam calculados os volumes de alguns poliedros que tenham um de seus vértices na origem do espaço tridimensional.

Considere $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ e $C(x_C, y_C, z_C)$ as coordenadas de três dos vértices de um paralelepípedo com arestas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ e $\overline{OC}$ em que O representa a origem do espaço cartesiano.

O volume desse paralelepípedo será igual ao módulo do seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \end{vmatrix}$$

Desse fato decorre que:

O volume de cada prisma triangular que pode ser obtido por alguma seção diagonal do paralelepípedo é dado por:

$$V = \frac{1}{2} \cdot |D|$$

O volume de cada pirâmide quadrangular inscrita no paralelepípedo é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot |D|$$

O volume do tetraedro OABC é dado por:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |D|$$

Cofator

No cálculo de um determinante cada entrada da matriz quadrada de ordem $n > 1$ fica multiplicada por uma ou mais entradas da mesma matriz, além de um sinal $(+1)$ ou (-1).

Sendo M uma matriz quadrada, o número ou expressão algébrica que multiplica cada entrada m_{ij} da matriz, durante o cálculo de seu determinante, é o cofator de m_{ij}.

Indicamos cofatores por "Cof", que funciona como uma função da entrada da matriz, ou pela letra Δ indexada com a mesma posição (linha – coluna) da sua respectiva entrada.

$$\text{Cof}(m_{ij}) = \Delta_{ij}$$

O determinante de uma matriz M de 1ª ordem é igual ao valor de sua única entrada: m_{11}. Assim, nesse caso, o único cofator é simplesmente igual a $(+1)$.

$$\text{Cof}(m_{11}) = \Delta_{11} = +1$$

No caso das matrizes de 2ª ordem, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, 4 cofatores podem ser observados:

$$\text{Cof (a)} = \Delta_{11} = +d$$

$$\text{Cof }(b) = \Delta_{12} = -c$$

$$\text{Cof }(c) = \Delta_{21} = -b$$

$$\text{Cof (d)} = \Delta_{22} = +a$$

Repare que as entradas que participam do cálculo de um cofator Δ_{ij} não podem pertencer à linha i, nem pertencer à coluna j. Por isso, para calcular um cofator Δ_{ij} recomenda-se reescrever a matriz eliminando sua linha i e sua coluna j.

O cálculo dos cofatores em matrizes de 3ª ordem é mais delicado, pois cada entrada da matriz participa de dois produtos elementares. Sendo assim, são necessárias algumas fatorações.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = ayt + bzr + cxs - cyr - azs - bxt$$

Os produtos elementares em que a entrada $\boldsymbol{a}$ participa são: $(+ayt)$ e $(-azs)$.

Então, colocando esse fator comum $\boldsymbol{a}$ em evidência, tem-se a expressão: $\boldsymbol{a} \cdot (yt - zs)$.

Portanto: $\text{Cof}(a) = \Delta_{11} = yt - zs$.

Os produtos elementares em que a entrada $\boldsymbol{x}$ participa são: $(+cxs)$ e $(-bxt)$.

Então, colocando esse fator comum $\boldsymbol{x}$ em evidência, tem-se a expressão: $\boldsymbol{x} \cdot (cs - bt)$.

Portanto: $\text{Cof}(x) = \Delta_{21} = cs - bt$.

Note que ambos os cofatores usados como exemplos podem ser expressos na forma de determinantes:

$$\Delta_{11} = yt - zs = \begin{vmatrix} y & z \\ s & t \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{21} = cs - bt = \begin{vmatrix} c & b \\ t & s \end{vmatrix}$$

No caso do cofator Δ_{11}, observe que as entradas do determinante $\begin{vmatrix} y & z \\ s & t \end{vmatrix}$ estão na mesma ordem que na matriz original. Por isso, eliminando a linha 1 e a coluna 1 da matriz original, obtém-se uma matriz de ordem menor cujo determinante é o próprio cofator Δ_{11}.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a} & \cancel{b} & \cancel{c} \\ \cancel{x} & y & z \\ \cancel{r} & s & t \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} y & z \\ s & t \end{vmatrix} = y \cdot t - z \cdot s = \Delta_{11}$$

Mas, no caso do cofator Δ_{21}, as entradas do determinante $\begin{vmatrix} c & b \\ t & s \end{vmatrix}$ estão na ordem contrária à da matriz original.

Por isso, eliminando a linha 2 e a coluna 1 da matriz original, obtém-se uma matriz de ordem menor cujo determinante é o cofator Δ_{21} com sinal trocado.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a} & b & c \\ \cancel{x} & \cancel{y} & \cancel{z} \\ \cancel{r} & s & t \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} b & c \\ s & t \end{vmatrix} = b \cdot t - c \cdot s = -\Delta_{21}$$

As matrizes menores obtidas pela eliminação de linhas e colunas da matriz original são denominadas matrizes complementares.

O determinante das matrizes complementares é igual a:

- Δ_{ij} sempre que a soma $i + j$ for um número par.
- $-\Delta_{ij}$ sempre que a soma $i + j$ for um número ímpar.

Assim, o valor dos cofatores pode ser obtido multiplicando $(-1)^{i+j}$ pelo determinante da matriz menor complementar.

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{bmatrix} \text{Matriz original} \\ \text{sem a linha } i \text{ e} \\ \text{sem a coluna } j \end{bmatrix}$$

Exercícios resolvidos

36. Dada a matriz $A = (aij)_{3 \times 3}$, tal que $a_{ij} = 3 \cdot i - 2 \cdot j$, determine:

a) A matriz menor complementar da entrada a_{23}.

b) O cofator da entrada a_{23}.

Resolução:

a) Eliminando a 2ª linha e a 3ª coluna de $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, obtém-se a matriz complementar da entrada a_{23}:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calculando as entradas que restaram:

$a_{11} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$ $\qquad$ $a_{12} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1$

$a_{31} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 7$ $\qquad$ $a_{32} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5$

Portanto, a matriz menor complementar pedida é $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

b) $\text{cof}(a_{23}) = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [1 \cdot 5 - (-1) \cdot 7] = (-1) \cdot [5 + 7] = -12$

37. Calcule os cofatores de todas as entradas não nulas posicionadas na 3ª linha da matriz M.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Seja Δ_{ij} o cofator de uma entrada da matriz M.

Na 3ª linha de M tem-se $i = 3$ e $1 \leq j \leq 4$.

Como, nessa matriz, $a_{33} = 0$ e $a_{34} = 0$ são entradas nulas, os cofatores que precisam ser calculados são:

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det\begin{pmatrix} \vdots & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & 1 & 2 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante pela regra de Sarrus:

$$\Delta_{31} = 1 \cdot [8 + 9 + 0 - 8 - 0 - 6] = 1 \cdot 3 = 3$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & \vdots & 3 & 4 \\ 0 & \vdots & 2 & 3 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & 2 \end{pmatrix} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante pela regra de Sarrus:

$$\Delta_{32} = (-1)^5 \cdot [4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0] = -1 \cdot 4 = -4$$

38. Escreva a série dos cofatores das entradas da primeira coluna da matriz M.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Resolução:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det\begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 5 & 0 \\ \vdots & 8 & 6 \end{pmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot [30 - 0] = 30$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det\begin{pmatrix} \vdots & 0 & 4 \\ \vdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 8 & 6 \end{pmatrix} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = -1 \cdot [0 - 32] = 32$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det\begin{pmatrix} \vdots & 0 & 4 \\ \vdots & 5 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [0 - 20] = -20$$

Portanto: $(\Delta_{11}, \Delta_{21}, \Delta_{31}) = (30, 32, -20)$.

Matriz dos cofatores e matriz adjunta

Considere uma matriz quadrada M de entradas m_{ij} e uma matriz quadrada C, de mesma ordem n, mas cujas entradas Δ_{ij} são exatamente os cofatores de m_{ij}.

Nesse caso, dizemos que C é a matriz dos cofatores de M. Essa matriz dos cofatores será indicada por C(M) ou por M_{COF}.

Com $n = 2$:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow C(M) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Com $n = 3$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{pmatrix} \Rightarrow C(M) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} y & z \\ s & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x & z \\ r & t \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} x & y \\ r & s \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ s & t \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & c \\ r & t \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ r & s \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Chamamos de matriz adjunta de uma matriz original M o resultado da transposição da matriz dos cofatores de M. A matriz adjunta é indicada por *adj*. Assim:

$$adj(M) = (M_{COF})^T$$

Exercícios resolvidos

39. Encontre a matriz dos cofatores e a matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Resolução:

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 7 = 7$

$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 5 = -5$

$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 6 = -6$

$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 4 = 4$

Portanto, a matriz dos cofatores é $C(A) = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$.

Da relação $adj(A) = C(A)^T$ tem-se que a matriz adjunta é $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$.

40. Encontre a matriz dos cofatores e a matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Os cofatores da 1ª coluna ($j = 1$) são:
$$\begin{cases} \Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot [30 - 0] = 1 \cdot 30 = 30 \\ \Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [0 - 32] = (-1) \cdot [-32] = 32 \\ \Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [0 - 20] = 1 \cdot [-20] = -20 \end{cases}$$

Os cofatores da 2ª coluna ($j = 2$) são:
$$\begin{cases} \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot [18 - 0] = (-1) \cdot 18 = -18 \\ \Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [12 - 4] = 1 \cdot 8 = 8 \\ \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [0 - 12] = (-1) \cdot [-12] = 12 \end{cases}$$

Os cofatores da 3ª coluna ($j = 3$) são:

$$\begin{cases} \Delta_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot [24 - 5] = 1 \cdot 19 = 19 \\ \Delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot [16 - 0] = (-1) \cdot 16 = -16 \\ \Delta_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot [10 - 0] = 1 \cdot 10 = 10 \end{cases}$$

Portanto, a matriz dos cofatores de A é $C(A) = \begin{bmatrix} 30 & -18 & 19 \\ 32 & 8 & -16 \\ -20 & 12 & 10 \end{bmatrix}$.

Da relação $adj(A) = C(A)^T$ tem-se que a matriz adjunta é:

$$\begin{bmatrix} 30 & -18 & 19 \\ 32 & 8 & -16 \\ -20 & 12 & 10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 30 & 32 & -20 \\ -18 & 8 & 12 \\ 19 & -16 & 10 \end{bmatrix}$$

Teorema de Laplace

"O determinante de uma matriz é igual ao produto interno de qualquer fila da matriz pela fila correspondente na matriz de seus cofatores."

$$\det(M) = \langle \text{fila de M, mesma fila de } M_{COF} \rangle$$

Lembrando que as filas de uma matriz são tanto as suas linhas quanto as suas colunas, mas não suas diagonais, o teorema é formulado de dois modos distintos:

Para cada linha i da matriz quadrada M de ordem n, tem-se:

$$\det(M) = \left\langle (m_{i1} \quad m_{i2} \quad m_{i3} \ldots m_{in}), (\Delta_{i1} \quad \Delta_{i2} \quad \Delta_{i3} \ldots \Delta_{in}) \right\rangle$$

$$\det(M) = \sum_{p=1}^{n} m_{ip} \cdot \Delta_{ip}$$

$$\det(M) = m_{i1} \cdot \Delta_{i1} + m_{i2} \cdot \Delta_{i2} + m_{i3} \cdot \Delta_{i3} + \ldots + m_{in} \cdot \Delta_{in}$$

E, para cada coluna j de M, tem-se:

$$\det(M) = \left\langle \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ m_{3j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Delta_{1j} \\ \Delta_{2j} \\ \Delta_{3j} \\ \vdots \\ \Delta_{nj} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\det(M) = \sum_{p=1}^{n} m_{pj} \cdot \Delta_{pj}$$

$$\det(M) = m_{1j} \cdot \Delta_{1j} + m_{2j} \cdot \Delta_{2j} + m_{3j} \cdot \Delta_{3j} + \ldots + m_{nj} \cdot \Delta_{nj}$$

O teorema de Laplace estabelece um algoritmo alternativo para calcular determinantes de matrizes com qualquer tamanho, fortemente recomendado para as matrizes quadradas de ordem $n > 3$, uma vez que a regra de Sarrus não funciona nessas matrizes.

Uma vantagem do uso do teorema de Laplace para calcular determinantes de matrizes quadradas é a multiplicidade de opções que ele proporciona, podendo ser aplicado a qualquer fila da matriz.

Matrizes quadradas de ordem n possuem $2n$ filas, e a mais recomendada para se aplicar o teorema de Laplace é a fila que possui a maior quantidade de termos nulos (zeros).

Exercícios resolvidos

41. **PUC-Minas** O valor do determinante da matriz $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ é

a) -4
b) -3
c) -1
d) 2
e) 3

Resolução:

A fila com a maior quantidade de zeros é a 1ª linha (com 3 zeros).
Aplicando o teorema de Laplace nessa fila:

$$\det(\text{M}) = m_{11} \cdot \Delta_{11} + m_{12} \cdot \Delta_{12} + m_{13} \cdot \Delta_{13} + m_{14} \cdot \Delta_{14}$$

Substituindo as entradas da matriz:

$$\det(\text{M}) = 0 \cdot \Delta_{11} - 2 \cdot \Delta_{12} + 0 \cdot \Delta_{13} + 0 \cdot \Delta_{14} = -2 \cdot \Delta_{12}$$

Calculando o cofator restante:

$$\det(\text{M}) = -2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \det \begin{pmatrix} \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \vdots & 3 & 0 \\ -1 & \vdots & 0 & -1 \\ 3 & \vdots & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando a regra de Sarrus para o determinante menor complementar:

$$\det(\text{M}) = -2 \cdot (-1)^3 \cdot [0 + 4 + 3 + 0 - 9 + 0] = -2 \cdot (-1) \cdot [-2] = -4$$

Alternativa: A.

42. Calcule o determinante da matriz $\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Há 3 filas com a maior quantidade de zeros: a 3ª linha, a 1ª coluna e a 3ª coluna (com 2 zeros).

Solução 1

Aplicando o teorema de Laplace na 3ª linha da matriz A:

$$\det(\text{A}) = a_{31} \cdot \Delta_{31} + a_{32} \cdot \Delta_{32} + a_{33} \cdot \Delta_{33} + a_{34} \cdot \Delta_{34}$$

Substituindo as entradas da matriz:

$$\det(\text{A}) = 3 \cdot \Delta_{31} + 2 \cdot \Delta_{32} + 0 \cdot \Delta_{33} + 0 \cdot \Delta_{34} = 3 \cdot \Delta_{31} + 2 \cdot \Delta_{32}$$

Calculando os cofatores restantes:

$$\det(\text{A}) = 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & 1 & 2 & 3 \\ \cdots\vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & \vdots & 3 & 4 \\ 0 & \vdots & 2 & 3 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Usando a regra de Sarrus para os determinantes das matrizes complementares:

$$\det(\text{A}) = 3 \cdot (-1)^4 \cdot [-8 - 0 - 6 + 8 + 9 + 0] + 2 \cdot (-1)^5 \cdot [-0 - 0 - 0 + 4 + 0 + 0]$$

$$\det(\text{A}) = 3 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 4 = 9 - 8 = 1$$

Solução 2

Aplicando o teorema de Laplace na 1ª coluna de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = a_{11} \cdot \Delta_{11} + a_{21} \cdot \Delta_{21} + a_{31} \cdot \Delta_{31} + a_{41} \cdot \Delta_{41}$$

Substituindo as entradas da matriz:

$$\det(A) = 1 \cdot \Delta_{11} + 0 \cdot \Delta_{21} + 3 \cdot \Delta_{31} + 0 \cdot \Delta_{41} = 1 \cdot \Delta_{11} + 3 \cdot \Delta_{31}$$

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 1 & 2 & 3 \\ \vdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \det \begin{pmatrix} \vdots & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & 1 & 2 & 3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Usando a regra de Sarrus para os determinantes das matrizes complementares:

$$\det(A) = 1 \cdot (-1)^2 \cdot [0 - 0 - 8 + 0 + 0 + 0] + 3 \cdot (-1)^4 \cdot [-8 - 0 - 6 + 8 + 9 + 0]$$
$$\det(A) = 1 \cdot 1 \cdot [-8] + 3 \cdot 1 \cdot 3 = -8 + 9 = 1$$

Solução 3

Aplicando o teorema de Laplace na 3ª coluna de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = a_{13} \cdot \Delta_{13} + a_{23} \cdot \Delta_{23} + a_{33} \cdot \Delta_{33} + a_{43} \cdot \Delta_{43}$$

Substituindo as entradas da matriz:

$$\det(A) = 3 \cdot \Delta_{13} + 2 \cdot \Delta_{23} + 0 \cdot \Delta_{33} + 0 \cdot \Delta_{43} = 3 \cdot \Delta_{13} + 2 \cdot \Delta_{23}$$

$$\det(A) = 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \det \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & \vdots & 4 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 3 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix}$$

Usando a regra de Sarrus para os determinantes das matrizes complementares:

$$\det(A) = 3 \cdot (-1)^4 \cdot [-0 - 0 - 6 + 0 + 0 + 9] + 2 \cdot (-1)^5 \cdot [-0 - 0 - 12 + 4 + 0 + 12]$$
$$\det(A) = 3 \cdot 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \cdot 4 = 9 - 8 = 1$$

43. Se $\begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 2$, $\begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} = 3$ e $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10$, então se pode concluir que $\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix}$ é igual a

a) 0
b) 5
c) 15
d) –5
e) –15

Resolução:

Aplicando o teorema de Laplace na 3ª linha do determinante de 3ª ordem:

$$1 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 10$$

$$1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} + 1 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 10$$

$$1 \cdot \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} = 10$$

Substituindo os valores dos determinantes dados no enunciado, temos:

$$1 \cdot 3 - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} + 1 \cdot 2 = 10$$

$$-\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} = 10 - 3 - 2$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} = -5$$

Alternativa: D.

Teorema de Cauchy

"O produto interno de qualquer fila de uma matriz M por uma fila paralela da matriz de seus cofatores é igual a zero."

$$\langle \text{fila de M, fila paralela de } M_{COF} \rangle = 0$$

Por ter resultado constante, o teorema de Cauchy é bastante útil para verificar se os cofatores das entradas de uma matriz foram calculados corretamente.

Veja o exemplo do exercício resolvido 38, em que foi pedida a série dos cofatores da 1ª coluna da matriz M.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Na resolução do exercício, a série encontrada foi $(\Delta_{11}, \Delta_{21}, \Delta_{31}) = (30, 32, -20)$.

Aqui o teorema de Cauchy pode ser aplicado para verificar os resultados. Para isso, devem ser efetuados os produtos internos entre a série encontrada e cada fila paralela à 1ª coluna.

$$\langle 2^{\underline{a}} \text{ coluna de M, cofatores da } 1^{\underline{a}} \text{ coluna} \rangle = 0 \cdot 30 + 5 \cdot 32 + 8 \cdot (-20) = 0 + 160 - 160 = 0$$

$$\langle 3^{\underline{a}} \text{ coluna de M, cofatores da } 1^{\underline{a}} \text{ coluna} \rangle = 4 \cdot 30 + 0 \cdot 32 + 6 \cdot (-20) = 120 + 0 - 120 = 0$$

Isso garante que a série dos cofatores encontrada está correta.

Matriz inversa de qualquer ordem

Toda matriz quadrada M e sua respectiva matriz adjunta *adj*(M) formam um par de matrizes comutativo. O produto desse par de matrizes, em qualquer ordem, resulta em uma matriz diagonal cujas entradas não nulas são iguais ao determinante da matriz original. Assim:

$$M \cdot adj(M) = \begin{bmatrix} \det(M) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(M) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \det(M) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det(M) \end{bmatrix}$$

O exercício resolvido 40, por exemplo, pede que se encontre a matriz adjunta de $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ e tem como resposta $adj(A) = \begin{bmatrix} 30 & 32 & -20 \\ -18 & 8 & 12 \\ 19 & -16 & 10 \end{bmatrix}$.

Assim, efetuando-se o produto A · *adj*(A), obtém-se:

$$A \cdot adj(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 30 & 32 & -20 \\ -18 & 8 & 12 \\ 19 & -16 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 30 + 0 \cdot (-18) + 4 \cdot 19 & 2 \cdot 32 + 0 \cdot 8 + 4 \cdot (-16) & 2 \cdot (-20) + 0 \cdot 12 + 4 \cdot 10 \\ 3 \cdot 30 + 5 \cdot (-18) + 0 \cdot 19 & 3 \cdot 32 + 5 \cdot 8 + 0 \cdot (-16) & 3 \cdot (-20) + 5 \cdot 12 + 0 \cdot 10 \\ 1 \cdot 30 + 8 \cdot (-18) + 6 \cdot 19 & 1 \cdot 32 + 8 \cdot 8 + 6 \cdot (-16) & 1 \cdot (-20) + 8 \cdot 12 + 6 \cdot 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 60 + 0 + 76 & 64 + 0 - 64 & -40 + 0 + 40 \\ 90 - 90 + 0 & 96 + 40 + 0 & -60 + 60 + 0 \\ 30 - 144 + 114 & 32 + 64 - 96 & -20 + 96 + 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 136 & 0 & 0 \\ 0 & 136 & 0 \\ 0 & 0 & 136 \end{bmatrix}$$

Colocando em evidência o determinante, tem-se que um produto do tipo M · *adj*(M) é sempre igual a uma matriz identidade de tamanho adequado, multiplicada pelo valor do determinante da matriz original:

$$M \cdot adj(M) = \det(M) \cdot I$$

No exemplo da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ tem-se:

$$A \cdot adj(A) = 136 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, det(A) = 136.

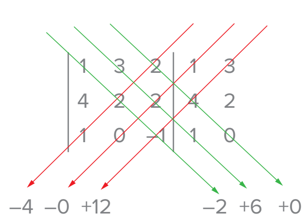
Exercício resolvido

44. Considere a matriz quadrada de terceira ordem $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e obtenha:

a) O valor de seu determinante.
b) A matriz M_{COF} dos cofatores de M.
c) A matriz resultante do produto $M \cdot (M_{COF})^T$.

Resolução:

a) Da regra de Sarrus:



$\det(M) = -4 + 0 + 12 - 2 + 6 + 0 = 12$

b) Os cofatores da 1ª coluna ($j = 1$) são:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [-2 - 0] = 1 \cdot [-2] = -2$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [-3 - 0] = (-1) \cdot [-3] = 3$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [6 - 4] = 1 \cdot 2 = 2$$

Os cofatores da 2ª coluna $(j = 2)$ são:

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [-4 - 2] = (-1) \cdot [-6] = 6$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [-1 - 2] = 1 \cdot [-3] = -3$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [2 - 8] = (-1) \cdot [-6] = 6$$

Os cofatores da 3ª coluna $(j = 3)$ são:

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [0 - 2] = 1 \cdot [-2] = -2$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [0 - 3] = (-1) \cdot [-3] = 3$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [2 - 12] = 1 \cdot [-10] = -10$$

Portanto, $M_{COF} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -10 \end{bmatrix}$

c) $(M_{COF})^T = \begin{bmatrix} -2 & 6 & -2 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & -10 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & -10 \end{bmatrix}$

$$M \cdot (M_{COF})^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & -3 & 6 \\ -2 & 3 & -10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-10) \\ 4 \cdot (-2) + 2 \cdot 6 + 2 \cdot (-2) & 4 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 3 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot (-10) \\ 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot (-2) & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 6 + (-1) \cdot (-10) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 18 - 4 & 3 - 9 + 6 & 2 + 18 - 20 \\ -8 + 12 - 4 & 12 - 6 + 6 & 8 + 12 - 20 \\ -2 + 0 + 2 & 3 + 0 - 3 & 2 + 0 + 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

Se M não for uma matriz singular, ou seja, se $\det(M) \neq 0$, dividindo os membros da relação $M \cdot adj(M) = \det(M) \cdot I$ pelo determinante de M, obtém-se:

$$M \cdot \frac{adj(M)}{\det(M)} = I$$

Então, como a matriz identidade I é tal que $I = M \cdot M^{-1}$, qualquer que seja a matriz não singular M, conclui-se que dividir todas as entradas da matriz adjunta pelo determinante da matriz original é uma forma de se obter a matriz inversa.

$$M^{-1} = \frac{adj(M)}{\det(M)}$$

A mesma propriedade enunciada a partir da matriz dos cofatores fica expressa por:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \cdot (M_{COF})^T$$

Ambas as expressões apresentam uma condição de existência que é $\det(M) \neq 0$. As matrizes nessas condições são chamadas de matrizes invertíveis ou inversíveis.

- $\det(M) \neq 0 \iff$ M é uma matriz inversível;
- $\det(M) = 0 \iff$ M não é uma matriz inversível.

Exercício resolvido

45. Encontre a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Primeiro vamos calcular o determinante da matriz, pela regra de Sarrus:

$$\det(A) = -3 - 0 - 6 + 1 + 0 + 4 = -4$$

Agora vamos encontrar a matriz dos cofatores:

Os cofatores da 1ª coluna ($j = 1$) são:

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 - 0] = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [3 - 2] = (-1) \cdot 1 = -1$$

$$\Delta_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot [0 - 1] = 1 \cdot [-1] = -1$$

Os cofatores da 2ª coluna ($j = 2$) são:

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [2 - 0] = (-1) \cdot 2 = -2$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 - 3] = 1 \cdot [-2] = -2$$

$$\Delta_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [0 - 2] = (-1) \cdot [-2] = 2$$

Os cofatores da 3ª coluna ($j = 3$) são:

$$\Delta_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot [4 - 3] = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot [2 - 9] = (-1) \cdot [-7] = 7$$

$$\Delta_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot [1 - 6] = 1 \cdot [-5] = -5$$

Assim, $A_{COF} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$.

Por fim, vamos aplicar a fórmula $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \cdot (A_{COF})^T$.

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{7}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

FRENTE 2

Combinação linear das filas de uma matriz

O conceito de combinação linear também pode ser aplicado às séries numéricas finitas, como as filas de uma determinada matriz.

Sendo A uma matriz de tamanho $m \times n$, considere a série das linhas dessa matriz:

$$(lin\ 1, lin\ 2, lin\ 3, ..., lin\ m)$$

Para criar uma combinação linear ℓ dessa série de linhas, basta que seja escolhida uma série de m constantes reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_m)$, que não sejam todas nulas, e efetuar o produto interno dessas séries:

$$\ell = \alpha_1 \cdot (lin\ 1) + \alpha_2 \cdot (lin\ 2) + \alpha_3 \cdot (lin\ 3) + ... \alpha_m \cdot (lin\ m)$$

Toda combinação linear da série de linhas de $A_{m \times n}$ é uma matriz linha (ou vetor) com exatamente n entradas.

Considere agora a série das colunas da mesma matriz:

$$(col\ 1, col\ 2, col\ 3, ..., col\ n)$$

Analogamente, para criar uma combinação linear C dessa série de colunas, basta que seja escolhida uma série de n constantes reais $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., a_n)$, que não sejam todas nulas, e efetuar o produto interno dessas séries:

$$C = \alpha_1 \cdot (col\ 1) + \alpha_2 \cdot (col\ 2) + \alpha_3 \cdot (col\ 3) + ... \alpha_n \cdot (col\ n)$$

Toda combinação linear da série de colunas de $A_{m \times n}$ é uma matriz coluna (ou vetor) com exatamente m entradas.

Veja, por exemplo, algumas combinações lineares de filas da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Como a matriz possui 4 linhas para $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$ e $\alpha_4 = 1$, tem-se:

$$\ell = 3 \cdot (lin\ 1) + 0 \cdot (lin\ 2) - 1 \cdot (lin\ 3) + 1 \cdot (lin\ 4)$$

$$\ell = 3 \cdot (2 \quad 1 \quad 3) + 0 \cdot (0 \quad 3 \quad -1) - 1 \cdot (-3 \quad 0 \quad 5) + 1 \cdot (8 \quad 4 \quad -3)$$

$$\ell = (6 \quad 3 \quad 9) + (0 \quad 0 \quad 0) + (3 \quad 0 \quad -5) + (8 \quad 4 \quad -3)$$

$$\ell = (17 \quad 7 \quad 1)$$

Como a matriz possui 3 colunas $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = -2$, tem-se:

$$c = 5 \cdot (col\ 1) + 4 \cdot (col\ 2) - 2 \cdot (col\ 3)$$

$$c = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -15 \\ 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 14 \\ -25 \\ 62 \end{pmatrix}$$

Propriedades dos determinantes

Os determinantes admitem muitas propriedades algébricas que podem facilitar consideravelmente o trabalho de seus cálculos. Algumas dessas propriedades permitem que o determinante de uma matriz, de grande tamanho, seja percebido sem a necessidade de cálculo algum, como as propriedades que implicam determinantes nulos.

Sendo M uma matriz quadrada de ordem n, tem-se det(M) = 0 sempre que:

- Todas as entradas de uma fila de M forem nulos. No exemplo, a segunda coluna é nula:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

- Duas filas paralelas de M forem iguais. No exemplo, as duas últimas linhas são iguais: $(lin\ 2) = (lin\ 3)$.

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

- Duas filas paralelas de M forem diretamente proporcionais. No exemplo, as duas primeiras linhas são proporcionais: $(lin\ 1) = 2 \cdot (lin\ 2)$.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

- Uma fila de M for combinação linear de suas filas paralelas. No exemplo, a 1ª coluna é igual à soma da 3ª com o dobro da 2ª: (*col* 1) = 2 · (*col* 2) + 1 · (*col* 3).

$$\det\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 2 \\ 13 & 5 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

Exercício resolvido

46. FGV-SP Uma matriz 4 × 4 que admite inversa é

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 & 16 \\ 2 & 6 & 8 & 20 \\ 5 & 6 & 11 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & -6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & -11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & -16 \end{bmatrix}$

Resolução:

A matriz da alternativa **a** não é inversível, pois a primeira e a terceira linhas são proporcionais, logo, seu determinante é nulo.

$$(lin\ 3) = 2 \cdot (lin\ 1)$$

A matriz da alternativa **b** não é inversível, pois a terceira linha é igual à soma da primeira com a segunda, logo, seu determinante é nulo.

$$(lin\ 3) = (lin\ 1) + (lin\ 2)$$

A matriz da alternativa **c** não é inversível, pois há colunas iguais, consequentemente, o determinante é nulo.

$$(col\ 1) = (col\ 2)$$

A matriz da alternativa **d** não é inversível, pois a 2ª linha é proporcional à soma da primeira com a terceira; logo, também tem determinante igual a zero.

$$(lin\ 1) + (lin\ 3) = 2 \cdot (lin\ 2)$$

Alternativa: E.

Há outras propriedades que reduzem bastante a quantidade de cálculos:

Se duas filas paralelas de uma matriz quadrada forem trocadas de posição entre si, o determinante da matriz apenas muda de sinal. Exemplo:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ r & s & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & z & y \\ a & c & b \\ r & t & s \end{vmatrix}$$

lin 1 ⇌ *lin* 2   *col* 2 ⇌ *col* 3

- O determinante das matrizes triangulares é igual ao produto das entradas de sua diagonal principal. Exemplo:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70$$

Dessa propriedade decorre que as matrizes identidades têm determinantes unitários:

$$\det(I_n) = 1$$

FRENTE 2

Multiplicação de determinante por número real

Dada uma matriz quadrada M, se todas as entradas de uma mesma fila forem multiplicadas por um número real λ, então a matriz obtida terá determinante igual a $\lambda \cdot \det(M)$, qualquer que seja a fila multiplicada.

Assim, se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ x & y \end{pmatrix}$, por exemplo, então:

$$\begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ x & y \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det(M) \qquad \begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda x & y \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det(M)$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \lambda x & \lambda y \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det(M) \qquad \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ x & \lambda y \end{vmatrix} = \lambda \cdot \det(M)$$

Em contrapartida, essa propriedade permite colocar em evidência qualquer fator que seja comum a todas as entradas de uma mesma fila antes de calcular seu determinante. Exemplo:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \cdot 1 & 4 \\ 0 & 3 \cdot 3 & 6 \\ 0 & 3 \cdot 2 & 7 \end{pmatrix} = 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Multiplicar uma matriz por um número real λ difere de multiplicar um determinante pelo mesmo número, pois, no caso das matrizes, todas as entradas devem ser multiplicadas por λ e, no caso dos determinantes, apenas as entradas de uma única fila é que devem ser multiplicadas por λ.

Assim, quando uma matriz quadrada é multiplicada por um número real λ, seu determinante fica multiplicado por λ elevado ao número de linhas da matriz. Assim, sendo M uma matriz quadrada de ordem n:

$$\det(\lambda \cdot M) = \lambda^n \cdot \det(M)$$

Exercício resolvido

47. Se $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{bmatrix}$ é uma matriz tal que $\det(M) = k$, calcule:

a) $\begin{vmatrix} a & x & r \\ b & y & s \\ c & z & t \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} r & s & t \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 6a & 3b & 3c \\ 2x & y & z \\ 2r & s & t \end{vmatrix}$

d) $\det(k \cdot M)$

Resolução:

a) $\begin{vmatrix} a & x & r \\ b & y & s \\ c & z & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = k$

b) $\begin{vmatrix} r & s & t \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = -k$

c) $\begin{vmatrix} 6a & 3b & 3c \\ 2x & y & z \\ 2r & s & t \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 2a & b & c \\ 2x & y & z \\ 2r & s & t \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ r & s & t \end{vmatrix} = 6k$

d) $\det(k \cdot M) = k^3 \cdot \det(M) = k^3 \cdot k = k^4$

Teorema de Binet

Na multiplicação de matrizes quadradas, o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes das matrizes, que são os fatores da multiplicação.

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\det(A \cdot B \cdot C) = \det(A) \cdot \det(B) \cdot \det(C)$$

$$\vdots$$

Particularmente, quando uma matriz quadrada M é elevada a um expoente natural *k*:

$$\det(M^k) = [\det(M)]^k$$

Exercício resolvido

48. Duas matrizes quadradas A e B de 3ª ordem são tais que det(A · B) = det(2A). Se ambas as matrizes são inversíveis, então o determinante da matriz B é igual a

a) 0
b) 1
c) 2
d) 4
e) 8

Resolução:

Do teorema de Binet vem que:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Como A é matriz de 3ª ordem:

$$\det(2 \cdot A) = 2^3 \cdot \det(A) = 8 \cdot \det(A)$$

Comparando as duas expressões:

$\det(A) \cdot \det(B) = 8 \cdot \det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$ ou $\det(B) = 8$

Como A é inversível, $\det(A) \neq 0$, portanto $\det(B) = 8$.

Alternativa: E.

Determinante das matrizes associadas

Dada uma matriz M, diversas matrizes associadas a M são importantes para o estudo da Álgebra Linear. Entre as mais importantes estão a transposta, a inversa, a dos cofatores e a adjunta.

Toda matriz quadrada e sua transposta possuem o mesmo determinante.

$$\det(M^T) = \det(M)$$

Essa propriedade decorre do fato de a matriz inversa ter exatamente os mesmos produtos elementares da matriz original.

O determinante da matriz inversa é o inverso do determinante da matriz original.

$$\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$$

Essa propriedade decorre do teorema de Binet:

$$M \cdot M^{-1} = I$$

$$\det(M \cdot M^{-1}) = \det(I)$$

$$\det(M) \cdot \det(M^{-1}) = 1$$

O teorema de Binet também permite deduzir uma expressão para os determinantes das matrizes adjunta e dos cofatores.

Dada uma matriz quadrada M de ordem *n*, sendo $A = adj(M)$ e $\Delta = \det(M)$:

$$M \cdot A = \Delta \cdot I$$

$$\det(M \cdot A) = \det(\Delta \cdot I)$$

$$\det(M) \cdot \det(A) = \Delta^n \cdot \det(I)$$

$$\Delta \cdot \det(A) = \Delta^n \cdot 1$$

Então, se M não for uma matriz singular:

$$\det(A) = \det(M)^{n-1}$$

Por fim, como a transposição de uma matriz não altera seu determinante:

$$\det(M_{COF}) = \det(M)^{n-1}$$

Teorema de Jacobi

Substituindo qualquer fila de uma matriz quadrada pela soma dela com alguma combinação linear de suas filas paralelas, obtém-se uma nova matriz com o mesmo determinante da matriz original.

Para simplificar esse processo de substituição, as séries escolhidas para formar a combinação linear costumam ter a maior quantidade de zeros possível.

Exemplo com substituição de linha:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aqui, a 3ª linha da matriz foi substituída pela soma dela mesma com a 1ª linha multiplicada por (−2). Assim, a nova 3ª linha é:

$\ell = -2 \cdot (lin\ 1) + 0 \cdot (lin\ 2) + 1 \cdot (lin\ 3)$

$\ell = -2 \cdot (1 \quad 2 \quad 3) + 0 \cdot (1 \quad 2 \quad 3) + 1 \cdot (7 \quad 8 \quad 9)$

$\ell = (-2 \quad -4 \quad -6) + (0 \quad 0 \quad 0) + (7 \quad 8 \quad 9)$

$\ell = (5 \quad 4 \quad 3)$

Exemplo com substituição de coluna:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 5 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

FRENTE 2

Aqui, a 2ª coluna foi substituída pela soma dela mesma com a 1ª coluna. Assim, a nova coluna 2 é:

$$c = 1 \cdot (col\,1) + 1 \cdot (col\,2) + 0 \cdot (col\,3)$$

$$c = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}3\\6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\5\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\\9\end{pmatrix}$$

Observe, nas combinações lineares, que a fila substituída deve sempre ser multiplicada por 1, e também que não multiplicamos todas as filas paralelas por zero, para que a matriz não continue a mesma.

Quando o teorema de Jacobi é usado dessa forma, suas aplicações podem ser representadas por meio de setas, como na seguinte ilustração:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix} \times(-2) = \begin{array}{c}\times 1\\ \begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\5&4&3\end{vmatrix}\end{array} = \begin{vmatrix}1&3&3\\4&9&6\\7&9&9\end{vmatrix}$$

Muitos cálculos de determinantes podem ser simplificados quando se aplica o teorema de Jacobi, de modo a anular algumas entradas da matriz. Exemplo:

$$\begin{array}{c}\times(-1)\\ \begin{vmatrix}1&3&3\\4&9&6\\7&9&9\end{vmatrix}\end{array} = \begin{vmatrix}1&2&0\\4&5&-3\\5&4&0\end{vmatrix}$$

Regra da dissociação

Foi visto que a função determinante é distributiva em relação ao produto matricial (teorema de Binet), mas essa função não possui propriedade distributiva em relação à adição de matrizes.

Assim, sendo A e B duas matrizes quadradas de mesma ordem, via de regra:

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n pode ser expresso como a soma de dois determinantes, se eles possuírem $n - 1$ filas paralelas idênticas.

$$\begin{vmatrix}a+b&c&d\\x+y&z&w\\r+s&t&u\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a&c&d\\x&z&w\\r&t&u\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}b&c&d\\y&z&w\\s&t&u\end{vmatrix}$$

Nesse caso, a soma das filas paralelas diferentes dos determinantes somados deve ser igual à fila correspondente na matriz original.

Calculando determinantes com os teoremas de Jacobi e Laplace

Calcular determinantes de matrizes quadradas, com ordem $n > 3$, que não apresentam entradas nulas é um processo relativamente longo, tanto pela definição dos produtos elementares quanto pela aplicação direta do teorema de Laplace.

Por esse motivo, recomenda-se aplicar o teorema de Jacobi, no sentido de anular algumas entradas da matriz, antes de usar o teorema de Laplace.

Em um determinante de ordem n com uma entrada unitária, é sempre possível obter uma fila com $n - 1$ entradas nulas.

Considere, por exemplo, a matriz $M = \begin{pmatrix}5&12&3\\2&5&1\\10&12&4\end{pmatrix}$ cuja única entrada unitária está localizada na 2ª linha e 3ª coluna: $m_{23} = 1$.

$$\begin{vmatrix}5&12&3\\2&5&1\\10&12&4\end{vmatrix} \times(-3) = \begin{vmatrix}-1&-3&0\\2&5&1\\10&12&4\end{vmatrix} \times(-4) = \begin{vmatrix}-1&-3&0\\2&5&1\\2&-8&0\end{vmatrix}$$

Após esse procedimento, o cálculo do determinante da matriz obtida se reduz ao cálculo de um único cofator:

$$\det(M) = \begin{vmatrix}-1&-3&0\\2&5&1\\2&-8&0\end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix}-1&-3\\2&-8\end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot [\,8 + 6\,] = -14$$

Exercícios resolvidos

49. Calcule o determinante da matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolução:

Aplicando o teorema de Jacobi da primeira para a segunda linha:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \times(-1) = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Assim, do teorema de Laplace na 2ª linha:

$$\det(M) = 1 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante menor complementar pela regra de Sarrus:

$$\det(M) = 1 \cdot (-1)^5 \cdot [-2 - 4 - 4 + 8 + 4 + 1]$$

$$\det(M) = 1 \cdot (-1) \cdot 3 = -3$$

50. Unicamp-SP Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x-1 & x-1 & x-1 \\ x-1 & 1 & 2 \\ x-1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, encontre o conjunto solução da equação $\det(A) = 0$.

Resolução:

Colocando em evidência a expressão $(x - 1)$ que é fator comum da 1ª coluna, tem-se:

$$\det(A) = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x-1 & x-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Jacobi da 2ª para a 3ª linha:

$$\det(A) = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x-1 & x-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \times(-1) = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x-1 & x-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace na 3ª linha:

$$\det(A) = (x-1) \cdot (-4) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (x-1) \cdot (-4) \cdot (-1)^6 \cdot [1 - (x-1)]$$

$$\det(A) = (x-1) \cdot (-4) \cdot 1 \cdot [2 - x]$$

$$\det(A) = -4 \cdot (x-1) \cdot [2 - x]$$

Assim, $\det(A) = 0$ implica $x = 1$ ou $x = 2$, logo, $S = \{1, 2\}$.

Regra de Chió

Trata-se de outro algoritmo alternativo para calcular determinantes, que pode ser aplicado a toda matriz quadrada A cuja entrada a_{11} seja igual a 1.

De acordo com a regra, o determinante de uma matriz A, de ordem, n nessas condições, equivale ao de uma matriz B de ordem $n - 1$ tal que:

$$b_{i,j} = a_{1+i,\,1+j} - a_{1,1+j} \cdot a_{1+i,\,1}$$

Assim, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ z & a & c \\ w & b & d \end{pmatrix}$, por exemplo, tem-se que det(A) = det(B) com $B = \begin{pmatrix} a - x \cdot z & c - y \cdot z \\ b - x \cdot w & d - y \cdot w \end{pmatrix}$.

Exercício resolvido

51. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 10 & 22 & 12 \\ 10 & 14 & 36 & 46 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Como $a_{11} = 1$, pela regra de Chió, temos:

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 6 - 2 \cdot 5 & 7 - 3 \cdot 5 & 8 - 4 \cdot 5 \\ 10 - 2 \cdot 4 & 22 - 3 \cdot 4 & 12 - 4 \cdot 4 \\ 14 - 2 \cdot 10 & 36 - 3 \cdot 10 & 46 - 4 \cdot 10 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 6 - 10 & 7 - 15 & 8 - 20 \\ 10 - 8 & 22 - 12 & 12 - 16 \\ 14 - 20 & 36 - 30 & 46 - 40 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 \\ 2 & 10 & -4 \\ -6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Colocando-se em evidência os fatores comuns (−4) da 1ª linha, (+2) da 2ª linha e (+6) da 3ª linha, tem-se:

$$\det(A) = (-4) \cdot (+2) \cdot (+6) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Então, aplicando a regra de Sarrus:

$$\det(A) = (-4) \cdot (+2) \cdot (+6) \cdot [15 + 2 - 2 + 5 + 4 + 3]$$

$$\det(A) = (-48) \cdot [27] = -1296$$

Métodos matriciais para resolução de sistemas lineares

Uma vez fundamentada a teoria das matrizes e de seus determinantes, os conceitos estabelecidos permitiram a criação de algoritmos computacionais extremamente eficientes na resolução dos sistemas de equações lineares.

Chamamos de sistema linear qualquer conjunto de equações lineares que contenham as mesmas variáveis. Um sistema linear com m equações com n variáveis costuma ser representado por:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 + \ldots + a_{3n} \cdot x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + a_{m3} \cdot x_3 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m \end{cases}$$

A primeira providência a ser tomada para resolver um sistema usando algum método matricial é escrevê-lo na forma de uma equação matricial. Para isso, são definidas 3 matrizes associadas ao sistema.

A matriz principal do sistema é aquela cujas entradas são os coeficientes das variáveis de cada equação:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se um sistema possui m equações com n variáveis cada, então sua matriz principal terá tamanho $m \times n$.

As outras matrizes associadas ao sistema são matrizes colunas que também podem ser chamadas de vetores. São eles:

O vetor de variáveis ou vetor de incógnitas: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

O vetor dos termos independentes: $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Essas matrizes permitem representar o sistema linear da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Usando os representantes algébricos de cada matriz ou vetor, todo sistema linear corresponde a uma equação matricial do tipo:

$$A \cdot X = B$$

Uma quarta matriz pode ser usada para representar o sistema todo. Trata-se da matriz estendida do sistema, designada por (A|B). Essa matriz é formada pela matriz principal acrescida de uma coluna a sua direita, contendo as entradas do vetor de termos independentes. Essa coluna a mais costuma ficar separada do restante da matriz por uma barra vertical. Assim:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Usando a matriz inversa

Se a matriz principal A do sistema for quadrada e tal que $\det(A) \neq 0$, então essa matriz é inversível. Assim, multiplicando-se à esquerda, ambos os membros da equação matricial, pela inversa da matriz A, obtém-se o vetor de incógnitas.

$$A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Para resolver o sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 7x + 10y = 9 \end{cases}$, por exemplo, primeiro deve-se representá-lo como uma equação matricial. Assim:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Em seguida, calcula-se o determinante da matriz principal do sistema:

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} = 3 \cdot 10 - 4 \cdot 7 = 30 - 28 = 2$$

Como o determinante não é nulo, o próximo passo é encontrar a inversa da matriz principal:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Por fim, basta multiplicar a matriz inversa pelo vetor dos termos independentes do sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 \cdot 5 + (-4) \cdot 9 \\ (-7) \cdot 5 + 3 \cdot 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Portanto, $x = 7$ e $y = -4$, logo, $S = \{(7, -4)\}$.

Sistemas equivalentes

Dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem exatamente o mesmo conjunto solução.

O sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 11 \end{cases}$ é equivalente ao sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 7x + 10y = 9 \end{cases}$, por exemplo, pois o par ordenado $(7, -4)$ é solução única de ambos.

Sendo assim, para resolver um sistema, podem-se trocar as equações dadas por outras equações, desde que o sistema formado pelas novas equações seja equivalente ao sistema original.

O símbolo $\sim$ é usado para indicar que dois sistemas lineares são equivalentes. Assim:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 7x + 10y = 9 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 11 \end{cases}$$

Esse símbolo também pode ser usado entre as matrizes estendidas do sistema. Assim:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 5 \\ 7 & 10 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 11 \end{array}\right)$$

Algumas operações podem ser efetuadas com as equações de um sistema, para se obter um sistema equivalente:

- trocar a ordem das equações de um sistema;
- multiplicar ou dividir uma equação por uma constante real não nula;
- acrescentar uma equação que seja combinação linear das outras equações do sistema.

Combinação linear das equações de um sistema

Dado um sistema linear com uma série de m equações (e_1, e_2, e_3, ..., e_m), para construir uma equação que seja combinação linear das equações dadas, basta tomar uma série de números reais (α_1, α_2, α_3, ..., α_m), que não sejam todos nulos, e efetuar o produto interno dessas séries. Procedendo dessa maneira, obtém-se uma nova equação, que admite as mesmas soluções das equações que não foram multiplicadas por zero.

$$\alpha_1 \cdot (e_1) + \alpha_2 \cdot (e_2) + \alpha_3 \cdot (e_3) + \ldots + \alpha_m \cdot (e_m)$$

Considere o sistema $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 7x + 10y = 9 \end{cases}$, e veja como obter uma combinação linear de suas equações.

Nesse sistema, tem-se:

$$e_1 \rightarrow 3x + 4y = 5$$
$$e_2 \rightarrow 7x + 10y = 9$$

Multiplicando e_1 pelo número $\alpha_1 = 4$, por exemplo, obtém-se:

$$4e_1 \rightarrow 12x + 16y = 20$$

Multiplicando e_2 pelo número $\alpha_1 = -2$, por exemplo, obtém-se:

$$-2e_1 \rightarrow -14x - 20y = -18$$

Somando as equações obtidas, tem-se uma combinação linear das equações do sistema:

$$4e_1 - 2e_1 \rightarrow -2x - 4y = 2$$

O escalonamento

Também conhecido como método da eliminação gaussiana, o escalonamento de sistemas lineares consiste na obtenção de um sistema equivalente em que a matriz dos coeficientes seja triangular.

Um sistema está na forma escalonada se sua matriz de coeficientes satisfizer as seguintes condições:

- Se a matriz principal do sistema tiver uma ou mais linhas nulas, essas linhas devem ficar abaixo das linhas não nulas.
- A primeira entrada não nula de cada linha da matriz deve ser igual a 1. Essa entrada é chamada de pivô da linha.
- O pivô de cada linha deve localizar-se à direita dos pivôs de linhas anteriores.

Essas condições garantem que cada equação do sistema tenha, no mínimo, uma variável a menos do que a equação anterior, de modo que, havendo equações suficientes, a última equação deverá fornecer o valor de alguma variável.

Uma vez encontrado o valor dessa variável, um processo simples de retro-substituição nas equações anteriores fornece o valor das demais variáveis.

Os sistemas a seguir estão todos na forma escalonada:

Sistema escalonado	Matriz principal
$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y = 4 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x + 5y + 7z = 9 \\ y + 2z = 5 \\ z = 2 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{cases} x - 7y + 5z + 3w = 2 \\ y + 3z - 2w = 4 \\ z + 6w = 4 \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Observe que as entradas das diagonais principais das matrizes triangulares associadas aos sistemas escalonados só podem ser iguais a 0 ou 1.

Veja como resolver o sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ pelo método do escalonamento:

Primeiro, deve-se considerar a matriz aumentada do sistema:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Como o pivô da primeira linha já é unitário, prossegue-se anulando a entrada logo abaixo desse pivô, multiplicando a 1ª linha por -3 e somando seus resultados na 2ª linha, como se estivéssemos aplicando o teorema de Jacobi.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}\right] \times(-3) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \end{array}\right]$$

Uma vez que a matriz principal do sistema ficou triangular, para tornar unitário o pivô da última linha, basta dividir as entradas dessa linha por -4:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \end{array}\right] :(-4) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Assim, o sistema escalonado equivalente ao sistema dado é:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \quad\ \ y = 2 \end{cases}$$

Então, substituindo o valor de y na 1ª equação, obtém-se:

$$x + 2 = 3 \Rightarrow x = 1$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é $S = \{(1, 2)\}$.

Veja agora como resolver o sistema $\begin{cases} 2y + z = -8 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$ pelo método do escalonamento:

A matriz aumentada desse sistema é

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

Primeiro deve-se reordenar as linhas dessa matriz, para que a 1ª linha tenha um pivô unitário e que a 3ª linha comece por zero. Assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & -8 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

Como o pivô da primeira linha já é unitário, para anular a entrada logo abaixo desse pivô, basta multiplicar a 1ª linha por 1 e somar seus resultados na 2ª linha. Assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \times (1) \\ \hookleftarrow \\ \ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

Agora, para tornar o pivô da 2ª linha unitário, basta multiplicar essa linha por -1. Assim:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \ \\ \times (-1) \\ \ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

O próximo passo é anular a entrada abaixo do pivô da 2ª linha. Para isso, deve-se multiplicar a 2ª linha por -2 e somar os resultados na 3ª linha.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \begin{array}{c} \ \\ \times (-2) \\ \hookleftarrow \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

Novamente, para tornar o pivô da 3ª linha unitário, basta multiplicar a linha por -1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \ \\ \ \\ \times (-1) \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Assim, o sistema escalonado equivalente ao sistema dado é:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ \qquad\ y + \ z = -3 \\ \qquad\qquad z = 2 \end{cases}$$

Então, substituindo o valor de z na 2ª equação, obtém-se:

$$y + 2 = -3 \Rightarrow y = -5$$

E, substituindo os valores de y e z na 1ª equação, obtém-se:

$$x - 2 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow x = -4$$

Portanto, o conjunto solução do sistema dado é $S = \{(-4, -5, 2)\}$.

O algoritmo do escalonamento também permite classificar os sistemas lineares em relação ao seu conjunto solução de uma maneira bastante segura.

É possível classificar um sistema observando as entradas da última linha da matriz estendida de um sistema escalonado.

Sistemas possíveis e determinados

São os sistemas em que o conjunto solução é unitário, ou seja, cada variável assume um único valor para tornar verdadeiras todas as equações do sistema.

Os sistemas $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2y + z = -8 \\ x - 2y - 3z = 0 \\ -x + y + 2z = 3 \end{cases}$ resolvidos nos exemplos de escalonamento são ambos possíveis e determinados.

Se a última entrada da última linha da matriz principal de um sistema escalonado for diferente de zero, então esse sistema é possível e determinado.

Sistemas possíveis e indeterminados

São os sistemas em que o conjunto solução possui mais do que uma série ordenada, de modo que suas variáveis, não necessariamente todas, assumem infinitos valores diferentes que tornam verdadeiras todas as equações do sistema.

Se todas as entradas da última linha da matriz estendida de um sistema escalonado forem iguais a zero, então esse sistema é possível e indeterminado.

Os sistemas $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$ e $\begin{cases} x - 2y - 3z = 2 \\ x + 3y + z = 8 \\ 2x + y - 2z = 10 \end{cases}$ são possíveis e indeterminados. Veja como eles ficam em suas formas escalonadas:

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -9 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 3 \\ 3 & -6 & | & -9 \end{bmatrix} \times (3) \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Observando que qualquer par de números reais (x, y) torna verdadeira a 2ª equação do sistema escalonado equivalente, pode-se concluir que há infinitas soluções para o sistema.

Para que um par ordenado (x, y) seja solução desse sistema, basta que ele satisfaça a 1ª equação. Exemplos: (1, 2), (3, 3), (5, 4), etc.

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 2 \\ x + 3y + z = 8 \\ 2x + y - 2z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 2 \\ 1 & 3 & 1 & | & 8 \\ 2 & 1 & -2 & | & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 2 \\ 1 & 3 & 1 & | & 8 \\ 2 & 1 & -2 & | & 10 \end{bmatrix} \times (-1) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 5 & 4 & | & 6 \\ 2 & 1 & -2 & | & 10 \end{bmatrix} \times (-2) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 5 & 4 & | & 6 \\ 0 & 5 & 4 & | & 6 \end{bmatrix} \times (-1) \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 5 & 4 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} : (5) \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}8 & | & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{cases} x - 2y - 3z = 2 \\ 0x + y + 0{,}8z = 1{,}2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Observando novamente que qualquer trinca de números reais (x, y, z) torna verdadeira a 3ª equação do sistema escalonado equivalente, pode-se concluir que há infinitas soluções para o sistema.

Para que uma trinca ordenada (x, y, z) seja solução desse sistema, basta que ela satisfaça a 1ª e a 2ª equações. Exemplos: (3, 2, −1), (10, −2, 4), (−4, 6, −6), etc.

Conjunto solução de um sistema indeterminado

Quando um sistema possui uma infinidade de soluções, não há como representar seu conjunto solução escrevendo de forma discreta uma solução após a outra.

Os conjuntos solução dos sistemas lineares indeterminados são expressos de forma paramétrica. Isso pode ser feito escolhendo-se uma das variáveis para representar o parâmetro e escrevendo todas as outras em função desse parâmetro.

No sistema $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 3x - 6y = -9 \end{cases}$, que escalonado equivale a $\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$, por exemplo, a variável y pode ser escolhida como parâmetro. Assim: $y = \lambda$.

Então, substituindo o parâmetro na 1ª equação, tem-se:

$$-x + 2\lambda = 3 \Rightarrow x = 2\lambda - 3$$

Dessa forma, o conjunto solução do sistema fica expresso por: $S = \{(2\lambda - 3, \lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$.

No sistema $\begin{cases} x - 2y - 3z = 2 \\ x + 3y + z = 8 \\ 2x + y - 2z = 10 \end{cases}$, que escalonado equivale $\begin{cases} x - 2y - 3z = 2 \\ 0x + y + 0{,}8z = 1{,}2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$, por exemplo, a variável z pode ser escolhida como parâmetro. Assim: $z = \lambda$.

Substituindo o parâmetro na 2ª equação do sistema escalonado, tem-se:

$$y + 0{,}8 \cdot \lambda = 1{,}2 \Rightarrow y = 1{,}2 - 0{,}8\lambda$$

Agora, substituindo as expressões de y e z na 1ª equação do sistema, tem-se:

$$x + 2 \cdot (1{,}2 - 0{,}8\lambda) - 3\lambda = 2 \Rightarrow x = 4{,}6\lambda - 0{,}4$$

Como escrever números decimais em séries ordenadas pode gerar ambiguidades, recomenda-se o uso das formas fracionárias. Assim, temos que $y = \dfrac{6 - 4\lambda}{5}$ e $x = \dfrac{23\lambda - 2}{5}$.

Dessa forma, o conjunto solução do sistema fica expresso por:

$$S = \left\{\left(\frac{23\lambda - 2}{5}, \frac{6 - 4\lambda}{5}, \lambda\right), \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Sistemas impossíveis

São os sistemas em que o conjunto solução é vazio, de modo que não exista série ordenada que satisfaça todas as equações de sistema.

Se a última entrada da última linha da matriz estendida de um sistema escalonado for diferente de zero e todas as outras entradas dessa linha forem iguais a zero, então esse sistema é impossível.

Os sistemas $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$ e $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 4y + 3z = 7 \end{cases}$ são impossíveis. Veja como eles ficam em suas formas escalonadas:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{array}\right] \times(-2) \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \sim \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 0x + 0y = -3 \end{cases}$$

Observando que não existe par de números reais (x, y) capaz de tornar verdadeira a 2ª equação do sistema escalonado equivalente, pode-se concluir que este sistema não admite solução: S = ∅.

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + z = 4 \\ 3x + 4y + 3z = 7 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right] \times(-1) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right] \times(-3) \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \times(-1) \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 0x + y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = -3 \end{cases}$$

Observando que não existe trinca de números reais (x, y, z) capaz de tornar verdadeira a 3ª equação do sistema escalonado equivalente, conclui-se que este sistema não admite solução: S = ∅.

Escalonamento por combinações lineares

Um sistema linear também pode ser escalonado substituindo-se cada equação por uma combinação linear dela com as demais equações do sistema. Se cada nova equação tiver menos variáveis do que as usadas na combinação e isso não alterar o conjunto solução do sistema, chega-se à sua solução de uma maneira bem eficiente.

Em sistemas de 3 equações com 3 variáveis cada, recomenda-se encontrar 2 combinações lineares de 2 equações que eliminem a mesma variável. Para que isso não altere a solução do sistema, a equação que não for usada em uma das combinações lineares deve ser usada na outra.

Usando os algarismos romanos para numerar as equações do sistema $\begin{cases} x + y + z = 9 & \text{I} \\ x + 2y - z = 4 & \text{II} \\ 2x - y + z = 5 & \text{III} \end{cases}$, considere as seguintes combinações:

$$(\text{IV} = \text{II} - \text{I}) \rightarrow y - 2z = -5$$

$$(\text{V} = \text{III} - 2 \cdot \text{I}) \rightarrow -3y - z = -13$$

Observe que as duas combinações lineares eliminaram a mesma variável (x). Além disso, como a equação III não participa da 1ª combinação, ela teve que participar da 2ª, obrigatoriamente.

Essas equações formam um sistema menor $\begin{cases} y - 2z = -5 \\ -3y - z = -13 \end{cases}$, que pode ser resolvido de muitas formas, mas continuando com o mesmo processo, considere uma última combinação linear das equações do sistema menor:

$$(\text{VI} = 3 \cdot \text{IV} + \text{V}) \rightarrow -7z = -28 \Rightarrow z = 4$$

Substituindo z na equação IV, tem-se:

$$y - 2 \cdot 4 = -5 \Rightarrow y = 3$$

Então, substituindo y e z na equação I, tem-se:

$$x + 3 + 4 = 9 \Rightarrow x = 2$$

Portanto, o conjunto solução do sistema é S = {(2, 3, 4)}.

Todo sistema linear pode ser submetido a esse processo até gerar uma equação do tipo $\alpha \cdot v = b$, sendo v a variável restante na última combinação linear (x, y ou z). Assim, uma vez conhecidos os valores do coeficiente α e do termo independente b dessa última equação, podemos classificar o sistema de acordo com a tabela a seguir:

Coeficiente da variável	Termo independente	Classificação do sistema
$\alpha \neq 0$	Não importa	SPD
$\alpha = 0$	$b = 0$	SPI
$\alpha = 0$	$b \neq 0$	SI

Exercícios resolvidos

52. UFRGS 2013 O sistema de equações $\begin{cases} 5x + 4y + 2 = 0 \\ 3x - 4y - 18 = 0 \end{cases}$ possui

a) nenhuma solução.
b) uma solução.
c) duas soluções.
d) três soluções.
e) infinitas soluções.

Resolução:

Somando-se as equações do sistema, temos: $8x - 16 = 0 \Rightarrow x = 2$.
Substituindo-se $x = 2$ na primeira equação, temos: $10 + 4y + 2 = 0 \Rightarrow y = -3$.
Portanto $(2, -3)$ é a solução única do sistema.
Alternativa: B.

53. Resolva e classifique o seguinte sistema linear $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 6y - z = 2 \\ 2x + 4y + z = 2 \end{cases}$.

Resolução:

Chamando de I, II e III, respectivamente, a primeira, a segunda e a terceira equações, temos:
$(\text{IV} = \text{III} - 2 \cdot \text{I}) \quad \rightarrow \quad -5z = -6$
$(\text{V} = 3 \cdot \text{I} - \text{II}) \quad \rightarrow \quad 10z = 10$
$(\text{VI} = 2 \cdot \text{VI} + \text{V}) \quad \rightarrow \quad 0z = -2$
Portanto, $S = \varnothing$ e o sistema é impossível.

54. UFV-MG Seja (x_0, y_0, z_0) a solução do sistema linear $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x - 3y + z = -2 \\ 3x - y + z = 8 \end{cases}$. Os números x_0, y_0 e z_0 formam, nessa ordem, uma progressão:

a) geométrica de razão 2.
b) aritmética de razão 2.
c) geométrica de razão 3.
d) aritmética de razão 3.

Resolução:

Escalonado o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 & \times(-2) \\ 2x - 3y + z = -2 & \\ 3x - y + z = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 4 & \times(-3) \\ -7y + 3z = -10 & \\ 3x - y + z = 8 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -7y + 3z = -10 & \times(-1) \\ -7y + 4z = -4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ -7y + 3z = -2 \\ z = 6 \end{cases}$$

Substituindo o valor de z encontrado, temos: $-7y + 4 \cdot 6 = -4 \Rightarrow -7y + 24 = -4 \Rightarrow -7y = -28 \Rightarrow y = 4$.
Substituindo os valores de z e y encontrados, temos: $x + 2 \cdot 4 - 6 = 4 \Rightarrow x + 8 - 6 = 4 \Rightarrow x = 2$.
Logo, $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 6)$ é uma progressão aritmética de razão 2.
Alternativa: B.

A regra de Cramer

Trata-se de um algoritmo que só pode ser aplicado na resolução de sistemas lineares cujo número de equações seja igual ao número de variáveis.

Como esse processo de resolução envolve cálculos de determinantes, deve-se considerar sempre um sistema de n equações com n variáveis cada:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1i} \cdot x_i + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{2i} \cdot x_i + \ldots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \ldots + a_{2i} \cdot x_i + \ldots + a_{3n} \cdot x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ii} \cdot x_i + \ldots + a_{in} \cdot x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \ldots + a_{ni} \cdot x_i + \ldots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Dessa forma, na representação do sistema como uma equação matricial do tipo A · X = B, a matriz principal do sistema é uma matriz quadrada de ordem n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Além disso, os vetores das variáveis e o dos termos independentes têm n entradas cada um:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

O primeiro passo para deduzir a regra de Cramer é calcular o determinante D da matriz principal do sistema.

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Depois, multiplicam-se os membros da expressão D = det(A) por uma das variáveis x_i do sistema:

$$x_i \cdot D = x_i \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Como, no segundo membro dessa expressão, a variável x_i pode multiplicar qualquer fila do determinante, deve-se escolher a coluna i dos coeficientes da variável multiplicada:

$$x_i \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \cdot x_i & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \cdot x_i & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{ii} \cdot xx_i & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} \cdot x_i & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Agora, aplica-se sucessivamente o teorema de Jacobi, multiplicando cada uma das outras colunas j do determinante pela respectiva variável x_j e somam-se todos os resultados obtidos na coluna i.

$$x_i \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & (a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1i} \cdot x_i + \dots + a_{1n} \cdot x_n) & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & (a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2i} \cdot x_i + \dots + a_{2n} \cdot x_n) & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \dots & (a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{ii} \cdot x_i + \dots + a_{in} \cdot x_n) & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \dots + a_{ni} \cdot x_i + \dots + a_{nn} \cdot x_n) & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Então, como cada entrada da coluna i apresenta o primeiro membro da i-ésima equação do sistema, pode-se substituir essa coluna pelo vetor b dos termos independentes:

$$x_i \cdot D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \dots & b_i & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Indicando por D_i, o determinante obtido após a substituição do vetor B chega-se à expressão que representa a regra de Cramer:

$$x_i \cdot D = D_i$$

E, quando D = 0, essa expressão implica:

$$x_i = \frac{D_i}{D}$$

Procedendo dessa forma com todas as demais variáveis do sistema, obtém-se a solução da equação matricial $A \cdot X = B$. Portanto, quando o sistema é possível e determinado, pela regra de Cramer a solução do sistema é:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1/D \\ D_2/D \\ \vdots \\ D_i/D \\ \vdots \\ D_n/D \end{pmatrix}$$

Sistemas de 2ª ordem

A regra de Cramer associa o sistema $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ aos seguintes determinantes:

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (Determinante principal)

$D_x = \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$ (Determinante da variável x)

$D_y = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}$ (Determinante da variável y)

Assim, quando $D \neq 0$, tem-se:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{d \cdot e - b \cdot f}{a \cdot d - b \cdot c} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a \cdot f - c \cdot e}{a \cdot d - b \cdot c}$$

Exercício resolvido

55. Assinale a alternativa que apresenta o valor da variável y no sistema $\begin{cases}(\sqrt{5}+1)\cdot x+\sqrt{3}\cdot y=\sqrt{5}\\ \sqrt{3}\cdot x+(\sqrt{5}-1)\cdot y=\sqrt{3}\end{cases}$.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{15}$ d) 5 e) 3

Resolução:

Da regra de Cramer, o determinante do sistema é:

$$D=\begin{vmatrix}\sqrt{5}+1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & \sqrt{5}-1\end{vmatrix}=(\sqrt{5}+1)\cdot(\sqrt{5}-1)-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=5-1-3=1$$

O determinante da variável y é:

$$D_y=\begin{vmatrix}\sqrt{5}+1 & \sqrt{5}\\ \sqrt{3} & \sqrt{3}\end{vmatrix}=(\sqrt{5}+1)\cdot\sqrt{3}-\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{15}+\sqrt{3}-\sqrt{15}=\sqrt{3}$$

Logo, $y=\frac{D_y}{D}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$.

Alternativa: A.

Sistemas de 3ª ordem

A regra de Cramer associa o sistema $\begin{cases}a_1\cdot x+b_1\cdot y+c_1\cdot z=r_1\\ a_2\cdot x+b_2\cdot y+c_2\cdot z=r_2\\ a_3\cdot x+b_3\cdot y+c_3\cdot z=r_3\end{cases}$ aos seguintes determinantes:

- $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ (Determinante principal)
- $D_y=\begin{vmatrix}a_1 & r_1 & c_1\\ a_2 & r_2 & c_2\\ a_3 & r_3 & c_3\end{vmatrix}$ (Determinante da variável y)
- $D_x=\begin{vmatrix}r_1 & b_1 & c_1\\ r_2 & b_2 & c_2\\ r_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$ (Determinante da variável x)
- $D_z=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & r_1\\ a_2 & b_2 & r_2\\ a_3 & b_3 & r_3\end{vmatrix}$ (Determinante da variável z)

Assim, quando $D\neq 0$, tem-se: $x=\frac{D_x}{D}$, $y=\frac{D_y}{D}$ e $z=\frac{D_z}{D}$.

Discussão de um sistema linear

Em um sistema linear, quando algum coeficiente ou termo independente é desconhecido, ele costuma ser representado por um parâmetro algébrico.

Neste caso, tanto a solução quanto a classificação do sistema depende desse parâmetro ou dos parâmetros desconhecidos. Por isso, as três possibilidades de classificação (SPD, SPI ou SI) devem ser exploradas na resolução do sistema. Ao fazer isso, estamos efetuando a discussão do sistema linear.

Combinando os principais algoritmos estudados neste capítulo (a regra de Cramer e o escalonamento), a discussão do sistema pode ser padronizada.

Primeiro, calcula-se o determinante D da matriz principal do sistema e:

- se $D\neq 0$ então o sistema é possível e determinado (SPD).
- se $D=0$, então o sistema é possível e indeterminado ou impossível (SPI ou SI).

No segundo caso, para decidir entre as classificações SPI e SI, recomenda-se o uso do escalonamento.

Saiba mais

No caso específico de sistemas de 2ª ordem é possível desenvolver toda a discussão sem o uso do escalonamento, pois nesse caso:

- Se $D\neq 0$, então o sistema é possível e determinado (SPD).
- Se $D=0$ e $D_x=D_y=0$, então o sistema é possível e indeterminado (SPI).
- Se $D=0$ e D_x ou D_y forem diferentes de zero então o sistema é impossível (SI).

Esse processo não é seguro em sistemas maiores.

Exercício resolvido

56. UFMG 2013 Considere o seguinte sistema linear nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 6x + ay = 3 \end{cases}$$

Observando-se que o coeficiente de y na segunda equação é um parâmetro **a**, determine

a) para quais valores de **a** o sistema tem solução.

b) as soluções x e y em função do parâmetro **a**, caso o sistema tenha solução.

Resolução:

a) O determinante principal do sistema é $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & a \end{vmatrix} = 2a - 18$.

Pela regra de Cramer, se $2a - 18 \neq 0 \Rightarrow a \neq 9$, então o sistema tem solução única.

Com $a = 9$, o sistema fica: $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 6x + 9y = 3 \quad :(3) \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = 2$. Assim, para $a = 9$, o sistema é impossível.

Logo, o sistema só admite solução quando $a \neq 9$.

b) $D_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 9$ e $D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 12 = -6$.

Portanto, se $a \neq 9$, temos: $x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2a - 9}{2a - 18}$ e $y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-6}{2a - 18} = \dfrac{3}{9 - a}$.

Atenção

Existem sistemas de 3ª ordem impossíveis, em que todos os determinantes associados pela regra de Cramer são nulos.

$$D = D_x = D_y = D_z = 0$$

Veja que isso ocorre, por exemplo, no sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 & \text{(I)} \\ x + y + z = 2 & \text{(II)} \\ x + y + z = 3 & \text{(III)} \end{cases}$ que claramente é impossível, pois subtraindo as equações (I) e (II) obtém-se a sentença fechada e falsa: $0 = -1$.

Além disso, é fácil perceber que os determinantes associados são nulos, pois todos eles possuem duas colunas iguais:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Exercício resolvido

57. UFBA Determine os valores de k para que o sistema de equações $\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 2 \\ 3x + 4y + (k - 1)z = 4 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}$ seja:

a) possível e determinado.

b) possível e indeterminado.

c) impossível.

Resolução:

Da regra de Cramer, o determinante do sistema é:

$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & k - 1 \\ 1 & k & 3 \end{vmatrix} = -8 - 2k(k - 1) - 18 + 24 + 2(k - 1) - 6k = -2k^2 - 2k + 12 = -2(k^2 + k - 6)$, função quadrática de variável k, cujas raízes são 2 e -3.

Dividindo-se por 2 a primeira equação do sistema original e substituindo-se k por 2, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 4y + z = 4 \\ x + 2y + 3z = 2 \end{cases}$$

Escalonando-se esse sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 & \times(-3) \\ 3x + 4y + z = 4 & \\ x + 2y + 3z = 2 & \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 & \times(-1) \\ y + 4z = 1 & \\ x + 2y + 3z = 2 & \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 & \\ y + 4z = 1 & \times(-1) \\ y + 4z = 1 & \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

O sistema é possível e indeterminado (SPI).

Dividindo-se por 2 a primeira equação do sistema original e substituindo-se k por -3, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 4z = 4 \\ x - 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

Escalonando-se esse sistema, temos:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 & \times(-3) \\ 3x + 4y - 4z = 4 & \\ x - 3y + 3z = 2 & \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 & \times(-1) \\ y - z = 1 & \\ x - 3y + 3z = 2 & \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 & \\ y - z = 1 & \times(4) \\ -4y + 4z = 1 & \end{cases} \sim \begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + 4z = 1 \\ 0 = 5 \end{cases}$$

O sistema é impossível (SI).

a) O sistema é possível e determinado se $k \neq -3$ e $k \neq 2$.

b) O sistema é possível e indeterminado se $k = 2$.

c) O sistema é impossível se $k = -3$.

Sistema linear homogêneo

Discutir um sistema linear homogêneo é tarefa bem mais simples, pois é fato que todo sistema desse tipo possui a solução trivial. Sendo assim, ele não pode ser classificado como sendo impossível.

Por esse motivo, há apenas duas possibilidades (SPD ou SPI) a serem exploradas na discussão do sistema, bastando a regra de Cramer para esse fim:

- Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado (SPD).
- Se $D = 0$, o sistema é possível e indeterminado (SPI).

Exercício resolvido

58. Discutir, quanto ao parâmetro real m, a solução do sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + 3y + z = 0 \\ 9x + 4y + mz = 0 \end{cases}$.

Resolução:

O determinante principal do sistema é:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 9 & 4 & m \end{vmatrix} = 3m + 18 + 60 - 81 - 4 - 10m = -7m - 7$$

Assim, $D \neq 0$ implica $m \neq -1$ e como sistemas homogêneos são sempre possíveis, temos que:

- $m \neq -1 \Rightarrow$ SPD
- $m = -1 \Rightarrow$ SPI

Revisando

1. Escreva a forma explícita das matrizes a seguir:

a) $A_{3 \times 2}$ tal que $a_{ij} = 3^i - 2^j$

b) $B_{2 \times 4}$ tal que $b_{ij} = i + j - 1$

c) C_3 tal que $c_{ij} = i \cdot j$

d) D_2 tal que $d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i < j \\ 0, \text{ se } i = j \\ -1, \text{ se } i > j \end{cases}$

2. Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, determine $M = A + B - 3 \cdot C + D^T$.

3. Um sistema de controle de qualidade de uma empresa atribui pontos positivos e negativos aos seus produtos de acordo com determinados testes. As matrizes $A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$, $B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ e $C_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ apresentam alguns dos resultados desses testes. Calcule, se existir, os seguintes produtos entre essas matrizes:

a) $A \cdot B$ **c)** $B \cdot A$ **e)** $C \cdot A$

b) $A \cdot C$ **d)** $B \cdot C$ **f)** $C \cdot B$

4. No sistema de equações a seguir, m e n são constantes reais e x, y e z são variáveis reais:

$$\begin{cases} mx - y + z = 2 \\ x + y + 4z = 3 \\ 2x + nz = 7 \end{cases}$$

Sabendo que a terna ordenada $(1, 6, -1)$ é a solução desse sistema podemos concluir que $m + n$ é igual a:

a) 9 **b)** -5 **c)** 6 **d)** 4 **e)** 0

5. Calcule $\begin{vmatrix} 8 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & -2 & 4 \\ 2 & 18 & -3 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

6. Sendo A, B e C matrizes quadradas de 2ª ordem tais que $A^{-1} = 3 \cdot B$ e $C = A \cdot B$. Então, se o determinante de B é igual a 6, o determinante de C deve ser igual a:

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** $\frac{1}{8}$ **e)** $\frac{1}{9}$

7. Resolva e classifique os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases}$

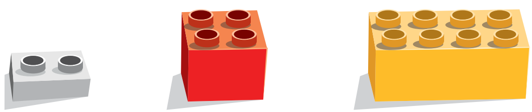
b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$

8. Resolver o seguinte sistema linear $\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 6y - z = 2 \\ 2x + 4y + z = 2 \end{cases}$.

9. Um brinquedo infantil de montar contém peças de apenas três tipos:

Tipo X Tipo Y Tipo Z



O brinquedo é vendido em *kits* com quantidades diferentes de cada tipo de peça. A tabela a seguir apresenta o preço e as respectivas quantidades de peças de cada tipo:

	Peças tipo X	Peças tipo Y	Peças tipo Z	Preço
***Kit* Master**	100	100	10	R$ 99,00
***Kit* Plus**	90	70	10	R$ 78,00
***Kit* Básico**	70	50	10	R$ 60,00

A empresa vai lançar no mercado um novo *kit* “Mega” contendo 200 peças do tipo X, 200 peças tipo Y e 50 peças tipo Z e quer que o preço esteja de acordo com os preços dos *kits* já disponíveis no mercado, considerando-se apenas a quantidade de peças de cada tipo nos *kits* e desprezando-se outros fatores, como os custos de suas embalagens, por exemplo.
Nessas condições o *kit* “Mega” deverá custar:

a) R$ 150,00
b) R$ 175,00
c) R$ 200,00
d) R$ 225,00
e) R$ 250,00

10. Discutir, em função do parâmetro real k, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ kx + y + 2z = 0 \\ x + y + kz = 0 \end{cases}$$

Exercícios propostos

1. Enem 2014 O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte.

Taxa de doação de sangue, por região, em 2010

Região	Doadores	Número de habitantes	Doadores/ habitantes
Nordeste	820 959	53 081 950	1,5%
Norte	232 079	15 864 454	1,5%
Sudeste	1 521 766	80 364 410	1,9%
Centro-Oeste	362 334	14 058 094	2,6%
Sul	690 391	27 386 891	2,5%
Total	3 627 529	190 755 99	1,9%

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

Disponível em: http://bvsms.saude.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2013 (adaptado).

As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são

a) Norte, Centro-Oeste e Sul.
b) Norte, Nordeste e Sudeste.
c) Nordeste, Norte e Sul.
d) Nordeste, Sudeste e Sul.
e) Centro-Oeste, Sul e Sudeste.

2. Enem 2020 Uma pessoa precisa comprar 15 sacos de cimento para uma reforma em sua casa. Faz pesquisa de preço em cinco depósitos que vendem o cimento de sua preferência e cobram frete para entrega do material, conforme a distância do depósito à sua casa. As informações sobre preço do cimento, valor do frete e distância do depósito até a casa dessa pessoa estão apresentadas no quadro.

Depósito	Valor do saco de cimento	Valor do frete para cada quilômetro	Distância entre a casa e o depósito
	(R$)	(R$)	(km)
A	23,00	1,00	10
B	21,50	3,00	12
C	22,00	1,50	14
D	21,00	3,50	18
E	24,00	2,50	2

A pessoa escolherá um desses depósitos para realizar sua compra, considerando os preços do cimento e do frete oferecidos em cada opção. Se a pessoa decidir pela opção mais econômica, o depósito escolhido para a realização dessa compra será o

a) A. **b)** B. **c)** C. **d)** D. **e)** E.

3. Enem 2020 O proprietário de um apartamento decidiu instalar porcelanato no piso da sala. Essa sala tem formato retangular com 3,2 m de largura e 3,6 m de comprimento. As peças do porcelanato têm formato de um quadrado com lado medindo 80 cm. Esse porcelanato é vendido em dois tipos de caixas, com os preços indicados a seguir.

Caixas do tipo A: 4 unidades de piso, R$ 35,00;

Caixas do tipo B: 3 unidades de piso, R$ 27,00.

Na instalação do porcelanato, as peças podem ser recortadas e devem ser assentadas sem espaçamento entre elas, aproveitando-se ao máximo os recortes feitos.

A compra que atende às necessidades do proprietário, proporciona a menor sobra de pisos e resulta no menor preço é

a) 5 caixas do tipo A.

b) 1 caixa do tipo A e 4 caixas do tipo B.

c) 3 caixas do tipo A e 2 caixas do tipo B.

d) 5 caixas do tipo A e 1 caixa do tipo B.

e) 6 caixas do tipo B.

4. Enem 2020 Para chegar à universidade, um estudante utiliza um metrô e, depois, tem duas opções:

- seguir num ônibus, percorrendo 2,0 km;
- alugar uma bicicleta, ao lado da estação do metrô, seguindo 3,0 km pela ciclovia.

O quadro fornece as velocidades médias do ônibus e da bicicleta, em km/h, no trajeto metrô-universidade.

Dia da semana	Velocidade média	
	Ônibus (km/h)	Bicicleta (km/h)
Segunda-feira	9	15
Terça-feira	20	22
Quarta-feira	15	24
Quinta-feira	12	15
Sexta-feira	10	18
Sábado	30	16

A fim de poupar tempo no deslocamento para a universidade, em quais dias o aluno deve seguir pela ciclovia?

a) Às segundas, quintas e sextas-feiras.

b) Às terças e quintas-feiras e aos sábados.

c) Às segundas, quartas e sextas-feiras.

d) Às terças, quartas e sextas-feiras.

e) Às terças e quartas-feiras e aos sábados.

5. Unicamp-SP 2016 Em uma matriz, chamam-se elementos internos aqueles que não pertencem à primeira nem à última linha ou coluna. O número de elementos internos em uma matriz com 5 linhas e 6 colunas é igual a

a) 12. **b)** 15. **c)** 16. **d)** 20.

6. UEL-PR 2014 Conforme dados da Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC), no Brasil, existem 720 aeródromos públicos e 1814 aeródromos privados certificados. Os programas computacionais utilizados para gerenciar o tráfego aéreo representam a malha aérea por meio de matrizes. Considere a malha aérea entre quatro cidades com aeroportos por meio de uma matriz. Sejam as cidades A, B, C e D indexadas nas linhas e colunas da matriz 4×4 dada a seguir. Coloca-se 1 na posição X e Y da matriz 4×4 se as cidades X e Y possuem conexão aérea direta, caso contrário coloca-se 0. A diagonal principal, que corresponde à posição X = Y, foi preenchida com 1.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Considerando que, no trajeto, o avião não pode pousar duas ou mais vezes em uma mesma cidade nem voltar para a cidade de origem, assinale a alternativa correta.

a) Pode-se ir da cidade A até B passando por outras cidades.

b) Pode-se ir da cidade D até B passando por outras cidades.

c) Pode-se ir diretamente da cidade D até C.

d) Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e B.

e) Existem dois diferentes caminhos entre as cidades A e C.

7. Um *site* educacional faz postagens semanais divulgando propostas pedagógicas alternativas para o Ensino Médio. Os elementos m_{ij} da matriz M a seguir registram o número de comentários feitos pelos usuários em cada proposta postada na semana de número j do mês de número i, desde que o *site* está na rede.

$$M = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 62 & 16 & 51 \\ 23 & 54 & 52 & 72 & 61 \\ 48 & 73 & 20 & 13 & 23 \\ 31 & 15 & 58 & 45 & 25 \end{pmatrix}$$

Se o *site* entrou na rede em janeiro deste ano, então a proposta pedagógica mais comentada neste *site* foi postada:

a) na segunda semana de março.

b) na segunda semana de abril.

c) na quarta semana de fevereiro.

d) na terceira semana de fevereiro.

e) na terceira semana de maio.

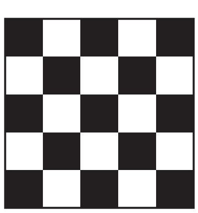
8. UFPel-RS 2021 Em 1910, a Fábrica de Fiação e Tecidos Pelotense insere-se no contexto pelotense, quando entra pela primeira vez em funcionamento. Ela surgiu devido a um fator econômico, sendo uma das mais destacadas no setor têxtil. A economia de Pelotas era praticamente toda voltada para o charque, os navios os levavam de Pelotas ao nordeste brasileiro, porém retornavam, tornando os custos muito elevados. A solução encontrada para resolver esse problema foi a construção de uma fábrica de fiação e tecelagem de algodão na cidade, devido a abundância desse produto no nordeste brasileiro. A fábrica contava com uma enorme força de trabalho feminina. De acordo com o livro de registro de Sócios do Sindicato de Empregados das Indústrias de Fiação e Tecelagem de Pelotas o ano de 1946 eram cerca de 464 mulheres e 164 homens trabalhando na fábrica, e no ano de 1953, eram 511 mulheres e 266 homens. Naquela época fabricavam tecidos com fios diferentes.

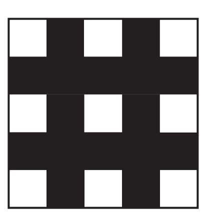
A matriz, $N = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ representa quantos rolos de fio j eram utilizados para fabricar uma peça de tecido tipo i.

Mariana foi funcionária na Fábrica de Fiação e Tecidos Pelotense. Para fabricar 6 peças de tecido tipo 1; 3 peças de tecido tipo 2 e 2 peças de tecido tipo 3, em um mês de trabalho, ela utilizou

a) 31 rolos de fio 2.
b) 38 rolos de fio 2.
c) 40 rolos de fio 2.
d) 41 rolos de fio 2.
e) 85 rolos de fio 2.
f) I.R.

9. Um programa de computador processa os dados numéricos de uma matriz quadrada e apresenta, na tela, um mosaico quadriculado da seguinte maneira: se o elemento x_{ij} for par, então o quadrado da linha i e da coluna j do mosaico será preto, mas, se for ímpar, será branco.
Assim, os mosaicos que representam as matrizes quadradas A e B de quinta ordem, cujos elementos estão definidos por $a_{ij} = i + j$ e $b_{ij} = i \cdot j$, são, respectivamente:

A = 

B = 

Quantos quadrados pretos deve haver no mosaico que este programa faria para representar a matriz M de quinta ordem, cujos elementos são $m_{ij} = \text{mdc}\,(i, j)$?

a) 5 **b)** 4 **c)** 3 **d)** 2 **e)** 1

10. Os **quadrados mágicos** são matrizes quadradas cuja soma dos elementos de cada linha, cada coluna e das diagonais principal e secundária é constante. Na Idade Média os quadrados mágicos tornaram-se muito populares e eram usados em Talismãs, pois se acreditava que eles tinham o poder de atrair proteção astral para seus detentores.
Os algarismos de 1 a 9 podem ser distribuídos em matrizes 3 × 3 para formar **quadrados mágicos** de diversas maneiras. Em todas elas, a soma dos elementos de cada linha, coluna e diagonal é igual a 15.
Veja o exemplo da matriz Q:

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

João quer fazer um quadrado mágico com os mesmos algarismos da matriz Q e já posicionou os algarismos 5, 8 e 9 em uma matriz J:

$$J = \begin{bmatrix} 8 & & x \\ y & 5 & \\ & 9 & \end{bmatrix}$$

Se João continuar preenchendo corretamente os outros elementos da matriz J com os demais algarismos da matriz Q, a soma dos valores que ocuparão as posições indicadas por x e y na matriz J será igual a:

a) 3
b) 6
c) 9
d) 12
e) 15

11. **Ufla-MG 2020** O produto de matrizes é definido por uma regra bastante elaborada. Para:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

O produto é:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

A matriz B é dita matriz inversa de uma matriz A, se $AB = I$, em que $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

A matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ é dada por:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

12. **IFPR 2020** As coordenadas de um ponto P, no plano cartesiano, são $(a, b) = (1, 1)$. $M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ é uma matriz de rotação, $P' = M \times P$. Assinale a alternativa que apresenta as coordenadas de P', para $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

a) $\left(\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right)$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

d) $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

13. Uma empresa de aluguel de automóveis oferece opções de serviços diferentes para clientes físicos e corporativos e trabalha com três modelos da fabricante Renault: Logan, Stepway e Sandero. As matrizes F e C a seguir informam o número de carros, separados por cor, alugados para cada tipo de cliente.

$$F = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Logan} & \text{Stepway} & \text{Sandero} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 36 & 14 & 30 \\ 41 & 22 & 44 \\ 55 & 27 & 71 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Azul} \\ \text{Branco} \\ \text{Prata} \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Logan} & \text{Stepway} & \text{Sandero} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 48 & 68 & 22 \\ 53 & 78 & 36 \\ 65 & 91 & 49 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Azul} \\ \text{Branco} \\ \text{Prata} \end{array}$$

Encontre os números médios de cada tipo de carro alugado pela empresa.

14. Unicamp-SP 2014 (Adapt.) Considere a matriz

$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$ em que a, b e c são números reais.

Encontre os valores de a, b e c de modo que $A^T = -A$.

15. Os grupos da primeira fase de um torneio de futsal são formados por quatro times de modo que cada um deles jogue contra todos os outros uma única vez. A tabela a seguir é uma matriz quadrada em que cada elemento m_{ij} (da linha i e coluna j) representa o número de gols marcados pelo time da linha i sobre o time da coluna j:

	Time A	Time B	Time C	Time D
Time A	0	2	1	2
Time B	1	0	1	4
Time C	3	1	0	3
Time D	2	2	0	0

Cada vitória marca dois pontos para o vencedor, cada empate marca um ponto para cada time e classificam-se os dois times com o maior número de pontos. No caso de dois times ficarem com o mesmo número de pontos, classifica o que tiver o maior saldo de gols.
Então, de acordo com a tabela e as regras mencionadas, os times classificados em primeiro e segundo lugar no grupo foram, respectivamente:

a) A e B
b) B e C
c) C e B
d) C e A
e) B e A

Texto para as questões **16** e **17**.

Uma fábrica de eletrodomésticos produz dois tipos de aparelho X e Y que contêm três componentes distintos A, B e C. A tabela a seguir apresenta o número de componentes necessários para a fabricação de cada aparelho, bem como o número de resistores, capacitores e transistores contidos em cada um desses componentes.

Componente	A	B	C
Aparelho X	2	1	2
Aparelho Y	1	2	3
Resistores	5	8	7
Capacitores	6	10	5
Transistores	3	2	4

16. No início deste ano, a fábrica recebeu um pedido de 2 000 aparelhos do tipo X e 1 500 aparelhos do tipo Y. Se os únicos componentes dos aparelhos X e Y que contêm resistores, capacitores e transistores são os componentes A, B e C então, sendo n o número total de capacitores necessários para atender esse pedido, pode-se concluir que:

a) $n < 10^2$
b) $10^2 < n < 10^3$
c) $10^3 < n < 10^4$
d) $10^4 < n < 10^5$
e) $n > 10^5$

17. Considere a matriz M formada pelas duas primeiras linhas de informações numéricas apresentadas pela tabela e a matriz N formada pelas três últimas.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 6 & 10 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Sabendo que M^T e N^T designam as respectivas matrizes transpostas de M e N, assinale a alternativa que apresenta um produto entre matrizes suficiente para se obter os valores numéricos de uma tabela em que a primeira, a segunda e a terceira linha apresentem respectivamente o número de resistores, capacitores e transistores necessários para a produção de cada tipo de aparelho.

a) $N \cdot M^T$
b) $M^T \cdot N$
c) $N^T \cdot M^T$
d) $N^T \cdot M$
e) $M^T \cdot N^T$

Texto para as questões **18** e **19**.

André, Beto e Carlos trabalham numa mesma empresa e resolveram almoçar juntos numa lanchonete do tipo *fast food*. Todos os três costumam comer hambúrgueres, batatas fritas, tomar refrigerantes e comer tortas de frutas como sobremesa.
A tabela a seguir apresenta as intenções dos pedidos de cada um:

	Hambúrguer	Fritas	Refrigerante	Torta
André	2	2	2	1
Beto	1	3	1	2
Carlos	2	1	1	3

Perto da empresa em que trabalham há três opções de lanchonetes do agrado de todos e a próxima tabela fornece o preço unitário de cada produto nas lanchonetes consideradas:

	Mc'Ronalds	Burguer-Ring	Rob's
Hambúrguer	R$ 5,00	R$ 7,00	R$ 4,00
Fritas	R$ 3,00	R$ 2,50	R$ 2,50
Refrigerante	R$ 2,00	R$ 1,50	R$ 2,00
Torta	R$ 4,00	R$ 4,00	R$ 5,00

18. Cada um dos três considerou quanto gastaria em cada lanchonete para comer exatamente o que desejava e um deles afirmou que gastaria, no máximo, R$ 30,00. Quem poderia ter feito tal afirmação?

a) Somente Carlos.
b) Somente Beto.
c) Somente André.
d) André ou Beto.
e) Beto ou Carlos.

19. Depois de muita discussão, os três resolveram ir a uma dessas três lanchonetes em que apenas um deles gastou a quantia de R$ 24,00. Assim, se todos fizeram o pedido que desejavam, pode-se concluir que

a) eles comeram no Mc'Ronalds.
b) eles comeram no Burguer-Ring.
c) eles comeram no Rob's.
d) eles não comeram no Mc'Ronalds.
e) eles não comeram no Burguer-Ring.

20. UEPG-PR 2020 Considerando as matrizes $A = (a_{ij})_{3\times3}$, com $a_{ij} = 2i - j$ e $B = (b_{ij})_{3\times3}$, com $b_{ij} = ij$, assinale o que for correto.

01 $A^T + B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 10 \\ 2 & 7 & 12 \end{bmatrix}$

02 $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 9 & 4 & 1 \\ 25 & 16 & 9 \end{bmatrix}$

04 $\det(A + B) \neq 0$.

08 $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 10 \\ 1 & 7 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

16 $A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 10 & 20 & 30 \\ 22 & 44 & 66 \end{bmatrix}$

Soma:

21. Uece 2020 Se M é uma matriz quadrada, define-se, para cada número natural n maior do que um, as seguintes matrizes: $M^2 = M \cdot M$, $M^3 = M^2 \cdot M$, ... , $M^n = M^{n-1} \cdot M$.

Para a matriz $M = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, o valor do determinante da matriz M^{2021} é igual a

a) 2021.
b) -1.
c) 1.
d) -2021.

22. Unicamp-SP 2017 Sendo a um número real, considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Então, A^{2017} é igual a

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 1 & a^{2017} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

23. Unicamp-SP 2015 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$, onde a e b são números reais. Se $A^2 = A$ e A é invertível, então

a) $a = 1$ e $b = 1$.
b) $a = 1$ e $b = 0$.
c) $a = 0$ e $b = 0$.
d) $a = 0$ e $b = 1$.

24. FGV-SP 2021 A matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ admite inversa $M^{-1} = (m_{ij})$. Sabendo-se que $m_{21} = 2m_{11} = 2m_{12} = m_{22} + 1$, o valor de $\dfrac{m_{11} + m_{12}}{m_{21} + m_{22}}$ é

a) -1
b) $-\frac{1}{2}$
c) 1
d) $\frac{3}{2}$
e) 2

25. Unicamp-SP 2018 Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = a \cdot A + b \cdot I$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, o produto ab é igual a

a) -2.
b) -1.
c) 1.
d) 2.

FRENTE 2

26. Unesp 2016 Um ponto P, de coordenadas (x, y) do plano cartesiano ortogonal, é representado pela matriz coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ assim como a matriz coluna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ representa, no plano cartesiano ortogonal, o ponto P de coordenadas (x, y).

Sendo assim, o resultado da multiplicação matricial $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna que, no plano cartesiano ortogonal, necessariamente representa um ponto que é

a) uma rotação de P em 180° no sentido horário, e com centro em (0, 0).
b) uma rotação de P em 90° no sentido anti-horário, e com centro em (0, 0).
c) simétrico de P em relação ao eixo horizontal x.
d) simétrico de P em relação ao eixo vertical y.
e) uma rotação de P em 90° no sentido horário, e com centro em (0, 0).

27. EEAR-SP 2021 Seja A = (a_{ij}) uma matriz de ordem 2 × 2, com $\begin{cases} 2^{i+j}, i = j \\ (-1)^i, i \neq j \end{cases}$. Considere $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz inversa de A. Então, a soma dos elementos $a + b$ é:

a) 18
b) $\frac{17}{65}$
c) $\frac{19}{20}$
d) $\frac{12}{17}$

28. Unicamp-SP 2020 Sabendo que p é um número real, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ e sua transposta A^T.

Se $A = A^T$ é singular (não invertível), então

a) $p = 0$.
b) $|p| = 1$.
c) $|p| = 2$.
d) $p = 3$.

29. IFSul-RS 2015 Uma empresa de informática constatou que o custo total C(x), em reais, para produzir seus equipamentos é dado pela função $C(x) = \det A + \det B - 10x + 2$, na qual x é o número de equipamentos produzidos, com $A = \begin{bmatrix} x^2 & 2x \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -x^2 - 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & x & 2x \end{bmatrix}$.

A quantidade de unidades que devem ser fabricadas para que o custo seja mínimo é

a) 1 unidade.
b) 2 unidades.
c) 3 unidades.
d) 4 unidades.

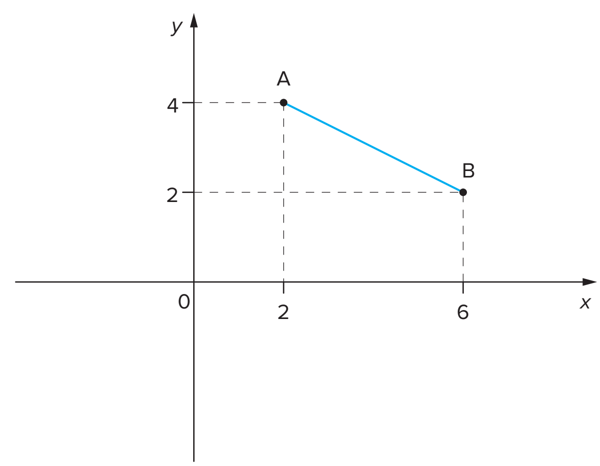
30. Uern 2015 Considere a seguinte matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \log_2 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & \log_2 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela regra de Sarrus, o determinante dessa matriz é

a) 8.
b) 9.
c) 15.
d) 24.

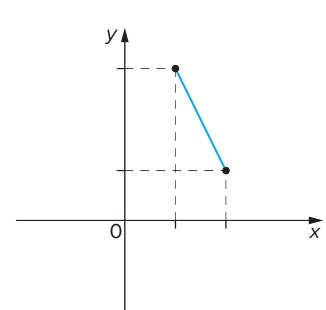
31. Muito usadas nos sistemas de computação gráfica, as transformações lineares seguem as normas do produto matricial para obter as coordenadas dos pontos que localizam determinadas figuras geométricas no plano cartesiano. As tabelas a seguir apresentam, em duas linhas e duas colunas, a matriz M com as coordenadas cartesianas (x, y) dos vértices do segmento $\overline{AB}$ situado no primeiro quadrante, e uma matriz de transformação linear T.



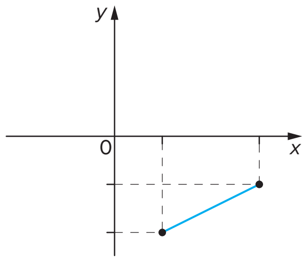
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} A & B \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{array} = M \qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T$$

Observando que as coordenadas dos pontos A e B ocupam as colunas da matriz M, assinale a alternativa que apresenta o esboço do segmento que une os pontos cujas coordenadas ocupam as colunas da matriz resultante do produto T · M.

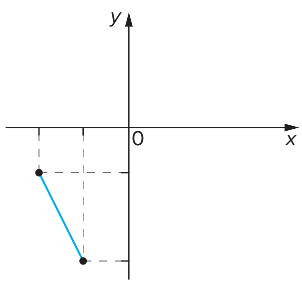
a)



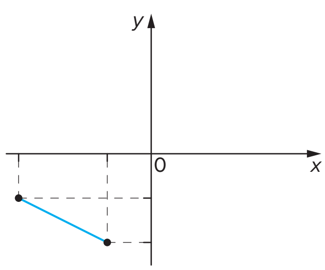
b)



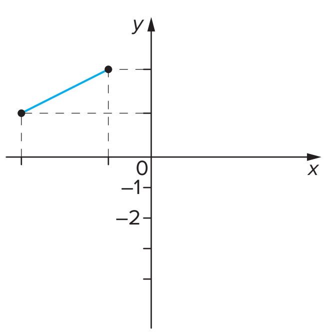
c)



d)



e)



32. Ufam 2020 Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 2x & x^2 \\ 4 & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & 4x \\ 2 & 2x \end{bmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}$. Os valores de x que tornam verdadeira a igualdade $\det A = 2\det B$ são:

a) $x = 0$ ou $x = \dfrac{3}{8}$

b) $x = 0$ ou $x = -\dfrac{8}{3}$

c) $x = 0$ ou $x = \dfrac{8}{3}$

d) $x = 1$ ou $x = -\dfrac{3}{8}$

e) $x = 1$ ou $x = \dfrac{3}{8}$

33. Unicamp-SP 2014 Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$

onde a e b são números reais distintos. Podemos afirmar que:

a) a matriz M não é invertível.

b) o determinante de M é igual a $a^2 - b^2$.

c) a matriz M é igual à sua transposta.

d) o determinante de M é positivo.

34. Unicamp-SP 2016 Considere a matriz quadrada de ordem 3, $A = \begin{bmatrix} \cos x & 0 & -\operatorname{sen} x \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$ onde x é um número real.

Podemos afirmar que

a) A não é invertível para nenhum valor de x.

b) A é invertível para um único valor de x.

c) A é invertível para exatamente dois valores de x.

d) A é invertível para todos os valores de x.

35. Unesp 2020 Considere os polinômios $p(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 2 & x & -1 \\ m & x & x \end{vmatrix}$ e $q(x) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix}$. Para que $p(x)$ seja divisível por $q(x)$, é necessário que m seja igual a

a) 30.

b) 12.

c) -12.

d) -3.

e) -30.

36. Cecierj 2020 O determinante $\begin{vmatrix} \operatorname{sen} 30^\circ & \log(0{,}1) \\ x + 4 & 2x \end{vmatrix}$ é nulo para o seguinte valor de x:

a) 1

b) 2

c) -1

d) -2

37. Uesb-BA 2020 O determinante de uma matriz quadrada depende, dentre outras coisas, dos índices dos elementos dessa matriz. Para matrizes de ordens 2 e 3 se conhecem as regras práticas para obtenção do número real resultante dessa dependência. Além dos procedimentos de cálculos, os determinantes possuem propriedades interessantes que permitem avançar etapas de cálculo para a obtenção do determinante de uma matriz gerada a partir de outra.

Sendo assim, considere a matriz dada por

$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ cujo determinante é igual a -10.

De acordo com as propriedades dos determinantes, pode-se afirmar que o determinante da matriz

$B = \begin{vmatrix} a & 4c & b \\ 2d & 8f & 2e \\ -3g & -12i & -3h \end{vmatrix}$ é igual a

a) 120

b) -120

c) 240

d) -240

e) 0

FRENTE 2

38. Unicamp-SP 2019 Sabendo que a e b são números reais, considere a matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 2 & b & 2 \end{pmatrix}$$

Se a soma dos elementos em cada linha da matriz A tem sempre o mesmo valor, então o determinante de A é igual a

a) 0.
b) 2.
c) 5.
d) 10.

39. Udesc 2015 Considerando que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e inversível, se $\det(3A) = \det(A^2)$ então $\det(A)$ é igual a:

a) 9
b) 0
c) 3
d) 6
e) 27

40. Um terreno no interior do estado de Santa Catarina é quadrangular e tem seus vértices nos pontos A, B, C e D tais que:

- O ponto B está a 5 km ao leste e a 2 km ao norte do ponto A.
- O ponto C está a 4 km ao leste e a 5 km ao norte do ponto A.
- O ponto D está a 1 km ao leste e a 4 km ao norte do ponto A.
- O preço médio dos terrenos rurais nessa região do país é de R$ 2 500,00 por hectare, mas o dono desse terreno quer vendê-lo rapidamente e, por isso, vai oferecê-lo por um valor 10% inferior ao preço médio praticado na região.

Então, sabendo que um hectare equivale a 10 000 m^2, o dono do terreno deverá oferecer o terreno por um valor total de:

a) R$ 3 150 000,00
b) R$ 3 500 000,00
c) R$ 5 600 000,00
d) R$ 6 300 000,00
e) R$ 7 000 000,00

41. IFMG 2020 Considere as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Assinale a alternativa **CORRETA**.

a) A matriz B é a matriz inversa da A.
b) O determinante da matriz A é igual a zero.
c) A matriz produto AB é igual a $\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.
d) O determinante da matriz produto A · B é igual a zero.
e) A matriz resultante da operação A + 2B é igual a $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

42. Unicamp-SP 2021 Para qual valor de a a equação matricial

$$\begin{pmatrix} a & -1 \\ a-2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ a-4 \end{pmatrix}$$

não admite solução?

a) 1.
b) 0.
c) −1.
d) −2.

43. Urca-CE 2021 Considere a equação matricial $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos da matriz X é:

a) $\frac{17}{2}$
b) $\frac{15}{2}$
c) 4
d) $\frac{13}{3}$
e) 5

44. Em um posto de gasolina, o litro da gasolina comum custa R$ 2,20 e o da gasolina aditivada custa R$ 2,80. Uma pessoa entra nesse posto dispondo de exatamente R$ 112,00 para encher o tanque de gasolina de seu carro, cuja capacidade é de 50 litros. Sabendo que o carro chegou ao posto com 4 litros de gasolina no tanque, determine com quantos litros de gasolina comum a mais do que a aditivada essa pessoa deve abastecer seu carro para que o tanque fique cheio gastando os R$ 112,00.

a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

45. Enem PPL 2020 Para aumentar a arrecadação de seu restaurante que cobra por quilograma, o proprietário contratou um cantor e passou a cobrar dos clientes um valor fixo de *couvert* artístico, além do valor da comida. Depois, analisando as planilhas do restaurante, verificou-se em um dia que 30 clientes consumiram um total de 10 kg de comida em um período de 1 hora, sendo que dois desses clientes pagaram R$ 50,00 e R$ 34,00 e consumiram 500 g e 300 g, respectivamente. Qual foi a arrecadação obtida pelo restaurante nesse período de 1 hora, em real?

a) 800,00.
b) 810,00.
c) 820,00.
d) 1 100,00.
e) 2 700,00.

46. Numa banca de frutas, uma pera custa R$ 3,00 mais meia banana, e meia dúzia de bananas custam R$ 0,80 mais meia pera. Então uma dúzia de bananas mais meia dúzia de peras custam ao todo:

a) R$ 18,00
b) R$ 24,00
c) R$ 30,00
d) R$ 36,00
e) R$ 42,00

47. Marta precisa trocar as tomadas e os interruptores de sua casa. Começou a fazer isso há dois finais de semana, quando trocou o interruptor e as quatro tomadas da lavanderia. No último final de semana Marta trocou os dois interruptores e as três tomadas da cozinha e no próximo final de semana pretende trocar os quatro interruptores e as 11 tomadas dos quartos da casa.
Marta comprou os novos dispositivos elétricos na mesma loja onde gastou R$ 29,40 com as peças da lavanderia e R$ 32,30 com as peças da cozinha.
Sabendo que não houve e nem haverá reajuste nos preços das mercadorias dessa loja, no próximo final de semana Marta deverá gastar com as peças necessárias para os quartos de sua casa, nessa mesma loja, a quantia de:

a) R$ 58,80
b) R$ 85,50
c) R$ 91,10
d) R$ 102,40
e) R$ 123,80

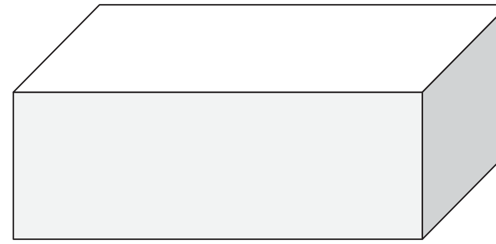
48. **UEMG 2014** Uma pequena empresa fabrica dois tipos de colchão: solteiro e casal. A tabela a seguir refere-se ao faturamento da empresa nos meses de agosto e setembro:

	Faturamento mensal com colchão de solteiro	Faturamento mensal com colchão de casal	TOTAL
AGOSTO	(?)	(?)	R$ 8 320,00
SETEMBRO	Metade do valor faturado em agosto	Um terço do valor faturado em agosto	R$ 3 200,00

Cada colchão de solteiro custa R$ 320,00, e cada colchão de casal custa R$ 480,00.
A quantidade de colchões de solteiro vendidos em agosto corresponde a

a) 6.
b) 8.
c) 10.
d) 11.

49. Em um bloco retangular há faces com perímetros iguais a 22 cm, 24 cm e 30 cm.



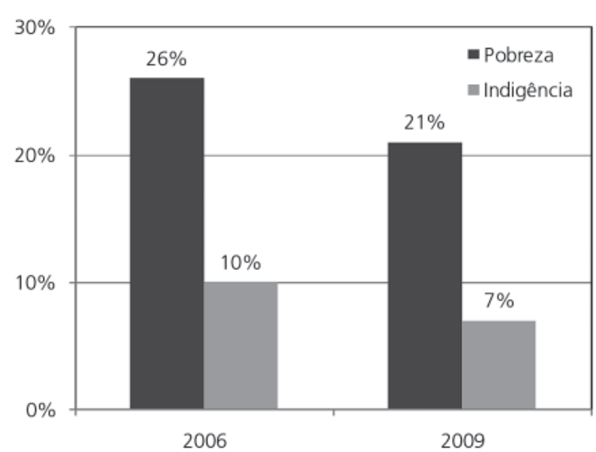
A área da maior face desse bloco mede:

a) 56 cm^2
b) 52 cm^2
c) 48 cm^2
d) 44 cm^2
e) 40 cm^2

50. **Fuvest-SP 2021** Uma treinadora de basquete aplica o seguinte sistema de pontuação em seus treinos de arremesso à cesta: cada jogadora recebe 5 pontos por arremesso acertado e perde 2 pontos por arremesso errado. Ao fim de 50 arremessos, uma das jogadoras contabilizou 124 pontos. Qual é a diferença entre as quantidades de arremessos acertados e errados dessa jogadora?

a) 12
b) 14
c) 16
d) 18
e) 20

51. Recentemente, um órgão governamental de pesquisa divulgou que, entre 2006 e 2009, cerca de 5,2 milhões de brasileiros saíram da condição de indigência. Nesse mesmo período, 8,2 milhões de brasileiros deixaram a condição de pobreza. Observe que a faixa de pobreza inclui os indigentes. O gráfico abaixo mostra os percentuais da população brasileira enquadrados nessas duas categorias, em 2006 e 2009.

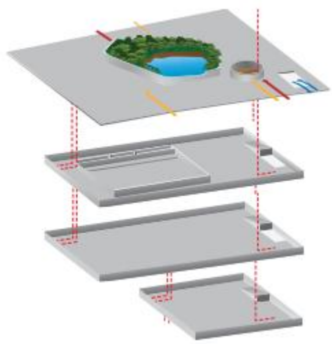


Após determinar a população brasileira em 2006 e em 2009, resolvendo um sistema linear, verifica-se que

a) o número de brasileiros indigentes passou de 19,0 milhões, em 2006, para 13,3 milhões, em 2009.
b) 12,9 milhões de brasileiros eram indigentes em 2009.
c) 18,5 milhões de brasileiros eram indigentes em 2006.
d) entre 2006 e 2009, o total de brasileiros incluídos nas faixas de pobreza e de indigência passou de 36% para 28% da população.

FRENTE 2

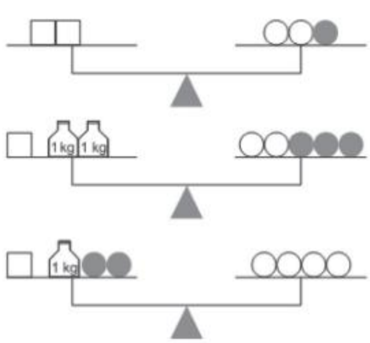
52. Um estacionamento construído no subsolo abaixo de um parque municipal tem três pavimentos e um total de 800 vagas. A figura a seguir representa o projeto de sua construção.



Como os sanitários do parque ocupam uma área do primeiro subsolo, o número de vagas neste pavimento é menor que nos outros dois. Além disso, devido às dificuldades impostas pela geologia do terreno, o terceiro subsolo foi construído com uma área menor que a dos outros dois.
Se o número de vagas do segundo subsolo é igual ao número de vagas nos outros dois pavimentos e igual a quatro vezes a diferença entre o número de vagas dos outros dois pavimentos, podemos concluir que:

a) no primeiro subsolo há 250 vagas.
b) no primeiro subsolo há 150 vagas.
c) no primeiro subsolo há 100 vagas.
d) no terceiro subsolo há 150 vagas.
e) no terceiro subsolo há 100 vagas.

53. Cefet-MG 2015 Analise o esquema seguinte.



Se os pratos da balança estão equilibrados, então a soma dos pesos dos objetos □, ○ e ●, em kg, é

a) menor que 1.
b) maior que 2,5.
c) maior que 1 e menor que 1,5.
d) maior que 1,5 e menor que 2.
e) maior que 2 e menor que 2,5.

54. Unesp 2015 Em uma floricultura, os preços dos buquês de flores se diferenciam pelo tipo e pela quantidade de flores usadas em sua montagem. Quatro desses buquês estão representados na figura a seguir, sendo que três deles estão com os respectivos preços.

De acordo com a representação, nessa floricultura, o buquê 4, sem preço indicado, custa

a) R$ 15,30.
b) R$ 16,20.
c) R$ 14,80.
d) R$ 17,00.
e) R$ 15,50.

55. Um restaurante japonês oferece três tipos de combo para seus clientes na hora do almoço. Cada um deles é formado por quantidades diferentes de *temakis*, *sushis* e *oniguiris*.
Tanto os *temakis* quanto os *sushis* são enrolados em alga, mas o primeiro tem formato cônico e o segundo tem formato cilíndrico. Já os *oniguiris* só levam arroz e peixe.
Logo na entrada do restaurante, há um cartaz com as fotos e os preços dos combos:

De acordo com as informações do cartaz, e supondo que o preço de cada item seja sempre o mesmo independentemente do combo, pode-se concluir que o valor cobrado por cada *temaki* nos combos desse restaurante é de:

a) R$ 5,50
b) R$ 5,00
c) R$ 4,50
d) R$ 3,00
e) R$ 2,50

56. Enem digital 2020 Para sua festa de 17 anos, o aniversariante convidará 132 pessoas. Ele convidará 26 mulheres a mais do que o número de homens. A empresa contratada para realizar a festa cobrará R$ 50,00 por convidado do sexo masculino e R$ 45,00 por convidado do sexo feminino. Quanto esse aniversariante terá que pagar, em real, à empresa contratada, pela quantidade de homens convidados para sua festa?

a) 2 385,00
b) 2 650,00
c) 3 300,00
d) 3 950,00
e) 5 300,00

57. UEG-GO 2015 Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ tal que $A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ os valores de x, y e z são, respectivamente:

a) 1, –2 e –1
b) 0, –1 e 1
c) 1, 0 e –2
d) 0, –2 e 1

58. Unicamp-SP 2017 Sejam a e b números reais. Considere, então, os dois sistemas lineares abaixo, nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} x - y = a \\ z - y = 1 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = b \end{cases}$$

Sabendo que esses dois sistemas possuem uma solução em comum, podemos afirmar corretamente que

a) $a - b = 0$.
b) $a + b = 1$.
c) $a - b = 2$.
d) $a + b = 3$.

59. Unicamp-SP 2018 Sabendo que k é um número real, considere o sistema linear nas variáveis reais x e y,

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ x + y = k \end{cases}$$

É correto afirmar que esse sistema

a) tem solução para todo k.
b) não tem solução única para nenhum k.
c) não tem solução se $k = 1$.
d) tem infinitas soluções se $k = 1$.

60. No sistema de equações a seguir, m e n são constantes reais e x, y e z são variáveis reais:

$$\begin{cases} mx - y + z = 2 \\ x + y + 4z = 3 \\ 2x + nz = 7 \end{cases}$$

Sabendo que a terna ordenada (1, 6, –1) é a solução desse sistema podemos concluir que $m + n$ é igual a:

a) 9
b) –5
c) 6
d) 4
e) 0

61. UFRR 2021 O sistema dado por $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \end{cases}$

a) é possível e indeterminado, com conjunto solução $\{(x, y, y - 1); x, y \in \mathbb{R}\}$.
b) é possível e indeterminado.
c) tem como solução $x = y = z = 0$.
d) é impossível.
e) é possível e indeterminado, com conjunto solução $\{(1, z - 1, z); z \in \mathbb{R}\}$.

62. Carla foi ao *petshop* com seus três cãezinhos: Rex, Ray e Buz. Chegando lá, viu uma balança e resolveu pesá-los de dois em dois, verificando que:

- Rex e Ray pesam juntos 8 kg.
- Rex e Buz pesam juntos 10 kg.
- Ray e Buz pesam juntos 11 kg.

Se Carla tivesse pesado os três cãezinhos ao mesmo tempo, a balança acusaria:

a) 13,5 kg
b) 14,5 kg
c) 15,5 kg
d) 16,5 kg
e) 17,5 kg

63. UPE 2015 No quadro abaixo, observa-se o balanço de vendas das três vendedoras da Perfumaria Soxeiro para os três perfumes mais vendidos no último sábado.

Vendedora	Perfumes (nº de vidros)			Faturamento R$
	Alfa	Beta	Gama	
Amanda	7	3	4	1 950
Bruna	5	10	8	3 600
Carol	4	5	6	2 350
Total	16	18	18	7 900

De acordo com esses dados, quanto custa um vidro do perfume Beta?

a) R\$ 100,00
b) R\$ 150,00
c) R\$ 160,00
d) R\$ 180,00
e) R\$ 200,00

64. Uerj 2020 Os números inteiros x e y satisfazem às seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = 37 \\ x - y = 30 \end{cases}$$

Logo, $x + y$ é igual a:

a) 80
b) 85
c) 90
d) 95

65. Uece 2021 Considere as matrizes reais $M = \begin{bmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} a & 1 & b \\ 1 & ab & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$. Se o determinante de M é igual a 2 e o determinante de N é igual a 1, então, o produto ab pode ser igual a

a) 1 ou –2.
b) –1 ou 2.
c) –1 ou –2.
d) 1 ou 2.

66. Unifenas-MG 2021 Qual a classificação do seguinte sistema?

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

a) Sistema possível e determinado.
b) Sistema possível e indeterminado.
c) Sistema impossível.
d) Impossível classificar.
e) Sistema indefinido.

67. Unicamp-SP 2016 Considere o sistema linear nas variáveis reais x, y, z e w,

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ y + z = 2 \\ w - z = 3 \end{cases}$$

Logo, a soma $x = y + z + w$ é igual a

a) -2.
b) 0.
c) 6.
d) 8.

68. Em relação ao sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x - \dfrac{y}{2} = -1 \end{cases}$ é correto afirmar que:

a) é possível e determinado.
b) é possível e indeterminado.
c) é impossível.
d) é homogêneo.

69. Em relação ao sistema linear $\begin{cases} 2 - x = 3y \\ x + 5y = 2(y + 5) \end{cases}$ é correto afirmar que:

a) é possível e determinado.
b) é possível e indeterminado.
c) é impossível.
d) é homogêneo.

70. Em relação ao sistema linear $\begin{cases} 2x - 5y = -6 \\ -x + y = 3 - \dfrac{y}{2} \end{cases}$ é correto afirmar que:

a) é possível e determinado.
b) é possível e indeterminado.
c) é impossível.
d) é homogêneo.

71. FGV-SP 2020 Considere o sistema linear de equações, nas incógnitas x e y:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = -6 \\ 4x + y = m \end{cases}$$

Ele é possível e determinado para um único valor de m. Podemos afirmar que este valor é:

a) 1.
b) 3.
c) 0.
d) 2.
e) -1.

72. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e X tal que $A \cdot X = B$.

Considere também o conjunto C de todos os valores reais do elemento m localizado na terceira linha e primeira coluna da matriz A, para os quais a equação $A \cdot X = B$ admite mais de uma solução. Sobre o conjunto considerado, é correto afirmar que:

a) $0 \in C$
b) $3 \in C$
c) $-3 \in C$
d) C é unitário
e) C é vazio

73. Fuvest-SP 2015 No sistema linear $\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$ nas variáveis x, y e z, a e m são constantes reais. É correto afirmar:

a) No caso em que $a = 1$, o sistema tem solução se, e somente se, $m = 2$.
b) O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.
c) No caso em que $m = 2$, o sistema tem solução se, e somente se, $a = 1$.
d) O sistema só tem solução se $a = m = 1$.
e) O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

74. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, assinale a alternativa que apresenta os valores reais de λ tais que a equação matricial $A \cdot X = \lambda \cdot X$ tenha solução não nula:

a) 1 e -5
b) -1 e 5
c) 1 e -4
d) -1 e 4
e) 4 e -5

75. Unicamp-SP 2015 Considere o sistema linear nas variáveis x, y e z

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 7x + 8y - mz = 26 \end{cases}$$

onde m é um número real. Sejam $a < b < c$ números inteiros consecutivos tais que $(x, y, z) = (a, b, c)$ é uma solução desse sistema. O valor de m é igual a

a) 3.
b) 2.
c) 1.
d) 0.

76. Qual o valor de m para que o sistema $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ my + 6z = 0 \end{cases}$ admita solução não nula?

a) 1
b) -1
c) 2
d) -2
e) 0

77. EsPCEx-SP 2020 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 \\ -12 \\ -4 \end{bmatrix}$. Se $AB = C$, então $x + y + z$ é igual a:

a) -2. b) -1. c) 0. d) 1. e) 2.

78. Quantas são as soluções do sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 8

79. Quantas soluções distintas o sistema

$\begin{cases} (x-1)(y-2)(z-3) = 0 \\ (x+y)^2 + (z-3x)^2 = 0 \end{cases}$ admite?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 6

80. Fuvest-SP 2016 Uma dieta de emagrecimento atribui a cada alimento um certo número de pontos, que equivale ao valor calórico do alimento ao ser ingerido. Assim, por exemplo, as combinações abaixo somam, cada uma, 85 pontos:

- 4 colheres de arroz + 2 colheres de azeite + 1 fatia de queijo branco.
- 1 colher de arroz + 1 bife + 2 fatias de queijo branco.
- 4 colheres de arroz + 1 colher de azeite + 2 fatias de queijo branco.
- 4 colheres de arroz + 1 bife.

Note e adote:

	1 colher de arroz	1 colher de azeite	1 bife
Massa de alimento (g)	20	5	100
% de umidade + macronutriente minoritário + micronutrientes	75	0	60
% de macronutriente majoritário	25	100	40

São macronutrientes as proteínas, os carboidratos e os lipídeos.

Com base nas informações fornecidas, e na composição nutricional dos alimentos, considere as seguintes afirmações:

I. A pontuação de um bife de 100 g é 45.

II. O macronutriente presente em maior quantidade no arroz são os carboidratos.

III. Para uma mesma massa de lipídeo de origem vegetal e de carboidrato, a razão

$$\frac{\text{número de pontos do lipídeo}}{\text{número de pontos do carboidrato}} \text{ é } 1{,}5.$$

É correto o que se afirma em

a) I, apenas.
b) II, apenas.
c) I e II, apenas.
d) II e III, apenas.
e) I, II e III.

81. Fuvest-SP 2017 João tem R\$ 150,00 para comprar canetas em 3 lojas. Na loja A, as canetas são vendidas em dúzias, cada dúzia custa R\$ 40,00 e há apenas 2 dúzias em estoque. Na loja B, as canetas são vendidas em pares, cada par custa R\$ 7,60 e há 10 pares em estoque. Na loja C, as canetas são vendidas avulsas, cada caneta custa R\$ 3,20 e há 25 canetas em estoque. O maior número de canetas que João pode comprar nas lojas A, B e C utilizando no máximo R\$ 150,00 é igual a

a) 46
b) 45
c) 44
d) 43
e) 42

82. Considere as equações lineares:

I. $2x - y + z + w = 4$
II. $x + y - 5z + 3w = 3$
III. $2x - 2y + z + 3w = 7$
IV. $3x + 2y - 2z - 2w = -1$

A respeito da solução do sistema formado por essas equações, é correto afirmar que:

a) $x = 1$
b) $y = 1$
c) $z = 1$
d) $w = 1$

83. Enem 2019 Um professor aplica, durante os cinco dias úteis de uma semana, testes com quatro questões de múltipla escolha a cinco alunos. Os resultados foram representados na matriz.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz os elementos das linhas de 1 a 5 representam as quantidades de questões acertadas pelos alunos Ana, Bruno, Carlos, Denis e Érica, respectivamente, enquanto as colunas de 1 a 5 indicam os dias da semana, de segunda-feira a sexta-feira, respectivamente, em que os testes foram aplicados.
O teste que apresentou maior quantidade de acertos foi o aplicado na

a) segunda-feira.
b) terça-feira.
c) quarta-feira.
d) quinta-feira.
e) sexta-feira.

84. Imed-RS 2018 Em uma grande cidade, para estudar o nível de ruído a que estavam expostos os habitantes, a prefeitura realizou quatro medições diárias durante cinco dias em um cruzamento de grande movimento. Cada elemento a_{ij} da matriz a seguir representa o nível de ruído, em decibéis (dB), registrado na medição i do dia j.

$$\begin{bmatrix} 45 & 62 & 68 & 44 & 63 \\ 51 & 49 & 72 & 48 & 68 \\ 39 & 52 & 71 & 52 & 62 \\ 51 & 45 & 63 & 40 & 69 \end{bmatrix}$$

De acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), 50 dB é o nível máximo recomendável à exposição do ouvido humano.
Com as informações apresentadas, determine o nível médio de ruídos registrados no quarto dia e assinale a alternativa correta:

a) 46 dB
b) 46,5 dB
c) 52 dB
d) 65,5 dB
e) 68,5 dB

85. Enem 2018 A Transferência Eletrônica Disponível (TED) é uma transação financeira de valores entre diferentes bancos. Um economista decide analisar os valores enviados por meio de TEDs entre cinco bancos (1, 2, 3, 4 e 5) durante um mês. Para isso, ele dispõe esses valores em uma matriz $A = [a_{ij}]$, em que $1 \leqslant i \leqslant 5$ e $1 \leqslant j \leqslant 5$ e o elemento a_{ij} corresponde ao total proveniente das operações feitas via TED, em milhão de real, transferidos do banco i para o banco j durante o mês. Observe que os elementos $a_{ii} = 0$, uma vez que TED é uma transferência entre bancos distintos. Esta é a matriz obtida para essa análise:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Com base nessas informações, o banco que transferiu a maior quantia via TED é o banco

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

86. UEL-PR 2018 Leia o texto a seguir.

Segundo o Sistema de Informações sobre Mortalidade (SIM), do Ministério da Saúde, em 2014 houve 59 627 homicídios no Brasil, o que representa 4,9% do total de óbitos do mesmo ano. Restringindo esses dados ao sexo masculino, obtemos que 7,9% desse novo total de óbitos são homicídios. De forma análoga, se restringirmos os dados ao sexo feminino, observamos que aqueles causados por homicídio representam 0,9% desse total.

(Adaptado de: Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada e Fórum Brasileiro de Segurança Pública. *Atlas da Violência 2016*. p. 6).

Um pesquisador decide representar as informações presentes no texto através do uso de incógnitas de acordo com a tabela a seguir.

Incógnita	Significado
M	Número de óbitos do sexo masculino
F	Número de óbitos do sexo feminino
m	Número de homicídios do sexo masculino
f	Número de homicídios do sexo feminino

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a forma matricial do sistema de equações lineares que representa as informações contidas no texto.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{49}{10^3} & \frac{49}{10^3} & 0 & 0 \\ \frac{79}{10^3} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10^3} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ F \\ m \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59\,627 \\ 59\,627 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{49}{10^2} & \frac{49}{10^2} & 0 & 0 \\ \frac{79}{10^2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ F \\ m \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59\,627 \\ 59\,627 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}049 & 0{,}049 & 0 & 0 \\ 0{,}079 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0{,}09 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ F \\ m \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59\,627 \\ 59\,627 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{49}{10^3} & 0 & \frac{49}{10^3} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \frac{79}{10^3} \\ 0 & \frac{9}{10^3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ F \\ m \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59\,627 \\ 59\,627 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4{,}9 & 1 & 0 & 4{,}90 \\ 0 & 0 & 1 & -7{,}9 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M \\ F \\ m \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59\,627 \\ 59\,627 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

87. Udesc 2018 Analise as proposições abaixo.

I. O produto de uma matriz linha por uma matriz linha é uma matriz linha.

II. Uma matriz identidade elevada ao quadrado é uma matriz identidade.

III. O produto de uma matriz por sua transposta é a matriz identidade.

Assinale a alternativa **correta**.

a) Somente as afirmativas I e III são verdadeiras.
b) Somente as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Somente a afirmativa II é verdadeira.
d) Somente as afirmativas II e III são verdadeiras.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

Texto para as questões **88** e **89**.

Leia o texto para responder à(s) questão(ões) a seguir.
A tabela a seguir será usada para a transmissão de mensagens criptografadas em matrizes. A criptografia é feita ao se multiplicar a matriz C pela matriz-mensagem M, gerando a matriz criptografada $M_C = C \cdot M$.

0		7	**G**	14	**N**	21	**U**
1	**A**	8	**H**	15	**O**	22	**V**
2	**B**	9	**I**	16	**P**	23	**W**
3	**C**	10	**J**	17	**Q**	24	**X**
4	**D**	11	**K**	18	**R**	25	**Y**
5	**E**	12	**L**	19	**S**	26	**Z**
6	**F**	13	**M**	20	**T**	27	**?**

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por exemplo, a matriz-mensagem

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 19 & 20 & 15 & 21 & 0 \\ 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 14 & 19 & 16 & 5 & 18 \end{bmatrix}, \text{ que significa ESTOU}$$

NO INSPER, depois de criptografada por C vira a matriz

$$M_C = \begin{bmatrix} 33 & 67 & 59 & 46 & 5 & 18 \\ 28 & 48 & 39 & 31 & 5 & 18 \\ 70 & 111 & 78 & 62 & 10 & 36 \end{bmatrix}.$$

Ao receber M_C, o destinatário deve multiplicá-la pela matriz decodificadora D, da mesma ordem da matriz C, para recuperar a mensagem original.

88. Insper-SP 2018 Modificando-se ligeiramente a matriz C, o envio da mensagem EU ESTUDEI NO INSPER torna-se possível no sistema descrito. Uma matriz C que funcione para a transmissão dessa mensagem tem que ser, necessariamente,

a) quadrada e igual à sua transposta.
b) de ordem 4×7 e inversível
c) de ordem 4×4 e inversível.
d) de ordem 7×7 e inversível.
e) quadrada com determinante negativo.

89. Insper-SP 2018 A matriz decodificadora D será

a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 4 \\ 11 & 11 & 9 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

90. Udesc 2017 Sejam A, B, X e Y matrizes quadradas de ordem 2 tais que, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.
A soma dos determinantes das matrizes X e Y sabendo que $2X - 2Y = A \cdot B$ e $-X + 2Y = A^t$ é igual a:

a) -4
b) -72
c) -144
d) -24
e) -102

91. FICSAE-SP 2017 Uma matriz quadrada de ordem n é chamada triangular superior se $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Os elementos de uma matriz triangular superior T, de ordem 3, onde $i \leqslant j$ são obtidos a partir da lei de formação $t_{ij} = 2i^2 - j$. Sendo $A = [-1 \quad 1 \quad 1]$ uma matriz de ordem 1×3 e A^t sua transposta, o produto $A \cdot T \cdot A^t$ é a matriz 1×1 cujo único elemento vale

a) 0.
b) 4.
c) 7.
d) 28.

92. FICSAE-SP 2017 Uma matriz B possui i linhas e j colunas e seus elementos são obtidos a partir da expressão $b_{ij} = i - 2j$. Seja uma matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ cujos elementos da primeira coluna são nulos e I_2 a matriz identidade de ordem 2, tal que $A \cdot B = I_2$. O valor numérico do maior elemento da matriz A é igual a

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3

93. FGV-SP 2017 Uma matriz A de ordem 2 transmite uma palavra de 4 letras em que cada elemento da matriz representa uma letra do alfabeto.
A fim de dificultar a leitura da palavra, por se tratar de informação secreta, a matriz A é multiplicada pela matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ obtendo-se a matriz codificada $B \cdot A$.

Sabendo que a matriz $B \cdot A$ é igual a $\begin{bmatrix} -10 & 27 \\ 21 & -39 \end{bmatrix}$, podemos afirmar que a soma dos elementos da matriz A é:

a) 48
b) 46
c) 47
d) 49
e) 50

94. Uefs-BA 2017 Se M = (a_{ij}), $i = 1, 2$, e $j = 1, 2$, é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ então o elemento da matriz oposta ou simétrica da adjunta de M, associado ao a_{21} é

a) -3 **b)** -2 **c)** -1 **d)** 2 **e)** 3

95. Uece 2017 Se o produto das matrizes $M = \begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{pmatrix}$ e $K = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ satisfaz a condição $M \cdot K = K \cdot M$ então, a expressão $pq - xy$ é igual a

a) $p^2 - x^2$ ou $-xy$.
b) $p^2 + x^2$ ou $-xy$.
c) $p^2 - q^2$ ou $-x^2$.
d) $p^2 + q^2$ ou $-x^2$.

96. FGV-SP 2016 Os marcos A, B, C e D de uma cidade estão conectados por pistas de rodagem, conforme mostra a malha viária indicada no diagrama da figura 1. A figura 2 indica uma matriz que representa as quantidades de caminhos possíveis de deslocamento entre os marcos (dois a dois). Considera-se um caminho entre dois marcos qualquer percurso que não viole o sentido da pista, que não passe novamente pelo marco de onde partiu e que termine quando se atinge o marco de destino final pela primeira vez. As flechas da figura 1 indicam o sentido das pistas de rodagem.

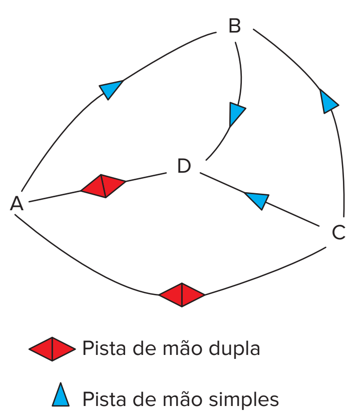


Figura 1

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Figura 2

Durante período de obras na malha viária descrita, a pista de rodagem entre os marcos A e D passou a ser de mão simples (sentido de A para D), e a pista do marco C para o marco D, ainda que tenha permanecido com mão simples, teve seu sentido invertido, passando a ser de D para C. Comparando os 16 elementos da matriz da figura 2 com seus correspondentes na matriz da nova configuração de malha viária, a quantidade de elementos que mudarão de valor é igual a

a) 5. **c)** 7. **e)** 9.
b) 6. **d)** 8.

97. FGV-SP 2016 Os pontos de coordenadas (x, y) do plano cartesiano que satisfazem a equação matricial

$$[x \quad y] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [1] \text{ representam:}$$

a) uma elipse com centro no ponto (0, 0).
b) um par de retas paralelas com declividade -3.
c) uma hipérbole com um dos focos de coordenadas $(-3, 0)$.
d) uma circunferência de raio $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
e) uma parábola com concavidade voltada para cima.

98. FICSAE-SP 2016 Uma matriz quadrada se diz ortogonal se sua inversa é igual à sua transposta. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x-3 & -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} & x-3 \end{pmatrix}$ em que $x \in \mathbb{C}^*$, a soma dos valores de x que a tornam uma matriz ortogonal é igual a

a) $6 + 4i$
b) $6 - 4i$
c) 6
d) 4

99. Uern 2015 Considere a seguinte operação entre matrizes: $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot K = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A soma de todos os elementos da matriz K é:

a) 1.
b) 3.
c) 4.
d) 7.

100. Uece 2019 Os elementos a, b, c, d da matriz $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ são distintos entre si e escolhidos aleatoriamente no conjunto {1, 3, 5, 7}. Considerando-se, para cada escolha destes elementos, D o determinante de M, o número de valores distintos que D pode assumir é

a) 6.
b) 8.
c) 16.
d) 24.

101. Udesc 2019 Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $D = [2]$, o valor $\dfrac{\det(A) \cdot \det(B)}{\det(C) \cdot \det(D)}$ é igual a:

a) 0
b) 15
c) 20
d) 10
e) 25

102. Uece 2019 Considere as matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} p & q \\ u & v \end{bmatrix}$. Se M · N = N · M, é correto afirmar que o determinante da matriz N é igual a

a) $\dfrac{2p^2 - 3q^2}{3}$.

b) $\dfrac{3p^2 - 2q^2}{3}$

c) $\dfrac{3p^2 - 2q^2}{2}$

d) $\dfrac{2p^2 - 3q^2}{2}$

103. Uece 2018 A solução real da equação

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_2(x) & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & \log_2(x) & 1 \end{vmatrix} = 8$$ é um número inteiro

Dado: $\log_2(x)$ é o logaritmo de x na base 2.

a) par.
b) primo.
c) múltiplo de 3.
d) múltiplo de 5.

104. Famema-SP 2018 Considere as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ com $a_{ij} = 2i - j$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ m^2 - 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -m & 0 \\ 3m & 6 \end{pmatrix}$, sendo m um número real. Sabendo que C = A · B, então det(C) é igual a

a) 0.
b) −12.
c) −8.
d) 6.
e) −4.

105. UPF-RS 2018 Sabendo que x é um número real, o determinante da matriz abaixo é dado por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & 2 & \cos x \end{pmatrix}$$

a) $\det A = \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + 4$

b) $\det A = \operatorname{sen} 2x - 4$

c) $\det A = 4 + \cos 2x$

d) $\det A = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - 2$

e) $\det A = 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + 2$

106. Unisc-RS 2017 Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ o determinante da matriz A · B é

a) 4
b) 6
c) 8
d) 12
e) 27

107. PUC-RS 2017 Sendo o determinante $\Delta = \begin{vmatrix} x & 4 \\ -1 & x - 2 \end{vmatrix}$ e $A = \{x \in \mathbb{R};\ \Delta = 0\}$ o número de elementos do conjunto A é igual a

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

108. Famerp-SP 2017 No estudo da dinâmica de populações é comum ser necessário determinar o número real λ na equação $\det(M - \lambda I) = 0$ em que M é uma matriz quadrada, I é a matriz identidade, da mesma ordem de M, e det representa o determinante da matriz $(M - \lambda I)$

Se, em um desses estudos, tem-se $M = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ o valor positivo de λ é igual a

a) 5.
b) 8.
c) 9.
d) 12.
e) 6.

109. Uece 2017 Uma matriz quadrada $X = (a_{ij})$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Se o determinante da matriz simétrica $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & y \\ z & w & 1 \end{pmatrix}$ é igual a 8, então, o valor da soma $x + y + z + w$ pode ser

a) 9 ou 11.
b) 9 ou 25.
c) 11 ou 25.
d) 9 ou 25.

110. Uerj 2017 Observe a matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 + t & -4 \\ 3 & t - 4 \end{bmatrix}$$

Para que o determinante dessa matriz seja nulo, o maior valor real de t deve ser igual a:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

111. Unigranrio-RJ 2017 Considere as funções

$f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 1 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ e $g(x) = \begin{vmatrix} x & 11 & -4 \\ 10 & 11 & x \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. Desta forma, pode-se afirmar que o ponto de interseção das funções $f(x)$ e $g(x)$ é:

a) (6, 30)
b) (9, −90)
c) (9, 72)
d) (6, −42)
e) (6, 42)

112. Famema-SP 2017 Considere as matrizes

$A = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 3 & -2 & k \end{pmatrix}$ sendo k um número real, com $k < 2$, $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, com $b_{ij} = (i - j)^2$, e $C = A \cdot B$. Sabendo que $\det C = 12$, o valor de k^2 é

a) 0.
b) 9.
c) 4.
d) 16.
e) 1.

113. Feevale-RS 2016 O determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} \text{sen}(x) & 0 & 1 \\ 1 & \sec(x) & 0 \\ 0 & 0 & \text{cotg}(x) \end{bmatrix}$$ é

a) 0
b) 1
c) $\text{sen}(x)$
d) $\cos(x)$
e) $\text{tg}(x)$

114. Udesc 2016 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} x-1 & 4-x \\ -2 & x \end{bmatrix}$ onde $x \in \mathbb{R}$. A quantidade de números inteiros que pertencem ao conjunto solução da inequação $48 \leqslant \det(A) \leqslant 116$ é igual a:

a) 13
b) 22
c) 8
d) 10
e) 6

115. Udesc 2015 Considerando que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e inversível, se $\det(3A) = \det(A^2)$, então $\det(A)$ é igual a:

a) 9
b) 0
c) 3
d) 6
e) 27

116. IFSul-RS 2015 Sejam as matrizes $A_{2 \times 2}$, onde $a_{ij} = \begin{cases} 2^j, \text{ se } i \leqslant j \\ j^i, \text{ se } i > j \end{cases}$ $B = I_2$, e I é a matriz identidade. Sabendo que A^t é a matriz transposta de A, qual é o determinante de $(A^t + B)$?

a) 11
b) −11
c) 9
d) −9

117. Uern 2015 Considere a seguinte matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \log_2 8 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & \log_2 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela regra de Sarrus, o determinante dessa matriz é

a) 8.
b) 9.
c) 15.
d) 24.

118. Udesc 2014 Se A^T e A^{-1} representam, respectivamente, a transposta e a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$, então o determinante da matriz $B = A^T - 2A^{-1}$ é igual a:

a) $\dfrac{-111}{2}$

b) $\dfrac{-83}{2}$

c) −166

d) $\dfrac{97}{2}$

e) 62

119. UEPB 2014 Se x e y são números reais não nulos e $\begin{vmatrix} x & y & x^2 + y^2 \\ x & 0 & x^2 \\ -2 & -3 & -5 \end{vmatrix} = 0$, então o valor de $2x + 3y$ é:

a) 10
b) 4
c) 7
d) −5
e) 5

120. UEG-GO 2019 Considerando o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases},$$

verifica-se que

a) as retas que representam esse sistema são paralelas.
b) as retas que representam esse sistema são coincidentes.
c) o determinante da matriz dos coeficientes desse sistema é igual a zero.
d) esse sistema não possui solução.
e) a solução desse sistema é $\left\{\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Texto complementar

Interpolação polinomial e a matriz de Vandermonde

Depois de muita observação, o proprietário de uma loja chegou à conclusão de que o lucro $L(x)$ diário de seu estabelecimento pode ser calculado em função do número x de produtos vendidos. A função $L(x)$ é da forma $L(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$ em que a_1, a_2 e a_3 são números reais desconhecidos. São conhecidos, no entanto, três valores assumidos pela função: sabe-se que ao vender duas unidades o prejuízo é de R$ 69,00; ao vender 5 unidades, a loja não tem lucro nem prejuízo; e ao vender 20 unidades, o lucro é de R$ 75,00. Qual é a função $L(x)$?

Sabemos que a função passa pelos pontos $(2, -69)$, $(5, 0)$ e $(20, 75)$. Então, descobrir os coeficientes a_1, a_2 e a_3 é um problema de interpolação polinomial (descobrir os coeficientes de um polinômio que passa por determinados pontos) e equivale a resolver o sistema que obtemos ao substituir cada um dos valores na equação da função:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 2^2a_3 = -69 \\ a_1 + 5a_2 + 5^2a_3 = 0 \\ a_1 + 20a_2 + 20^2a_3 = 75 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $L(x) = -x^2 + 30x - 125$.

Vamos observar a matriz dos coeficientes do sistema: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & 20 & 20^2 \end{pmatrix}$. Uma matriz como esta, em que cada linha é composta de termos de uma progressão geométrica com termo inicial igual a 1, é chamada de matriz de Vandermonde.

Uma matriz de Vandermonde é uma matriz V quadrada, de ordem n, em que cada uma de suas linhas é uma progressão geométrica com termo inicial unitário.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & (x_1)^2 & \dots & (x_1)^{n-1} \\ 1 & x_2 & (x_2)^2 & \dots & (x_2)^{n-1} \\ 1 & x_3 & (x_3)^2 & \dots & (x_3)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & (x_n)^2 & \dots & (x_n)^{n-1} \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz de Vandermonde é o produto de todas as diferenças possíveis entre os termos de expoente unitário. Para convencionar o sinal do produto, as diferenças $(x_j - x_i)$ são tomadas de maneira que $j > i$ (em outras palavras, na hora de listar a diferença entre, por exemplo, x_1 e x_3, fazemos $x_3 - x_1$, pois $3 > 1$). Ou seja:

$$\det(V) = (x_n - x_1) \cdot (x_n - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_1) \cdot (x_{n-1} - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot \ldots \cdot (x_2 - x_1)$$

Claramente, o determinante de Vandermonde só se anula se há dois pontos x_i e x_j iguais. Como a matriz de Vandermonde aparece na solução de interpolações polinomiais, esse resultado significa que a interpolação é sempre possível se forem usados n pontos de abscissas diferentes.

Observando que $V = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \\ 1 & 8 & 64 & 512 \end{pmatrix}$ é uma matriz de Vandermonde, seu determinante é:

$$\det(V) = (8 - 2) \cdot (8 - 3) \cdot (8 - 5) \cdot (5 - 2) \cdot (5 - 3) \cdot (3 - 2) = 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 540$$

Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Matrizes

Uma matriz é um arranjo retangular de números, dispostos em linhas e colunas.

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$ indica uma matriz com m linhas e n colunas, cujos elementos são a_{ij}.
- a_{ij} indica a entrada ou elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz tal que $1 \leqslant j \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$.

Quando $m = n$, dizemos que a matriz é quadrada.

A matriz identidade de ordem n, representada por I_n, é a matriz quadrada de ordem n em que a diagonal principal é composta apenas de elementos unitários e os demais elementos são todos nulos.

A transposta A^T de uma matriz A é obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de A.

A adição de duas matrizes A e B, de mesma ordem $m \times n$, resulta na matriz C, de mesmas dimensões, em que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para $1 \leqslant i \leqslant m$ e $1 \leqslant j \leqslant n$. A adição de matrizes é comutativa $[A + B = B + A]$, associativa $[A + (B + C) = (A + B) + C]$ e não é alterada pela transposição.

A multiplicação de uma matriz A por um escalar λ resulta numa matriz B, de mesmas dimensões que A, em que todo elemento b_{ij} de B é igual a $\lambda \cdot a_{ij}$

O produto escalar $\langle u, v\rangle$ de dois vetores u e v de n elementos é igual à soma dos produtos de termos correspondentes de u e v:

$$\langle u, v\rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$$

A multiplicação de duas matrizes $A = (A_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{p \times q}$ só está definida, nessa ordem, quando $n = p$, e resulta na matriz $C = (c_{ij})_{m \times q}$ em que cada elemento de C é o produto escalar da respectiva linha de A pela respectiva coluna de B: $c_{ij} = \langle nnn_i(A), nnn_j(B)\rangle$. A multiplicação de matrizes não é comutativa, mas é associativa e também distributiva em relação à adição. Além disso, $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ e $(k \cdot A) \cdot B = k \cdot (A \cdot B) = A \cdot (k \cdot B)$, em que k é um número real.

A inversa de uma matriz quadrada A de ordem n é a matriz A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$. Se A não possuir inversa, dizemos que A é uma matriz singular.

Se A for uma matriz de ordem 2, existe uma regra prática para o cálculo de A^{-1}:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Se A é uma matriz quadrada de ordem n, então $A \cdot X = B$ em que X é um vetor de variáveis e B é um vetor de números reais, é um sistema de n equações e n incógnitas. A matriz A é chamada de matriz de coeficientes do sistema, X é o vetor de incógnitas e B é o vetor resposta. Se A for uma matriz inversível, a solução do sistema é única e é dada por $X = A^{-1} \cdot B$.

Determinantes

Determinante é um número associado a toda matriz quadrada. O determinante de uma matriz A é representado por det(A).
Se A for de ordem 2, o determinante de A é igual à diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária, nessa ordem.
Para calcular o determinante de matrizes de ordem 3, podemos utilizar a regra de Sarrus:

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right] \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

O teorema de Laplace diz que, escolhendo uma fila (linha ou coluna) de uma matriz A de ordem n, seu determinante é igual à soma dos produtos entre cada elemento da fila e seu respectivo cofator.

Propriedades dos determinantes:

- O determinante de uma matriz é igual ao de sua transposta: $\det(A) = \det(A)^T$.
- O determinante de uma matriz é zero se uma fila puder ser escrita como uma combinação linear de duas filas paralelas. Isso inclui o caso em que uma fila é inteira igual a zero e o caso em que duas filas são iguais ou proporcionais.
- O determinante de uma matriz triangular ou diagonal é igual ao produto dos elementos de sua diagonal principal. Usando essa propriedade, demonstra-se que o determinante da matriz identidade é igual a 1.
- Se uma matriz B puder ser obtida de uma matriz A por meio da troca de duas de suas filas paralelas, $\det(B) = -\det(A)$. Na prática, dizemos que trocar duas filas paralelas de uma matriz muda o sinal de seu determinante.
- Ao multiplicar uma fila de uma matriz por um número real k, seu determinante fica multiplicado por esse mesmo número. Se a matriz for de ordem n, ao multiplicar toda a matriz por k, seu determinante fica multiplicado por k^n:
$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det(A)$$
- Se cada elemento de uma fila de uma matriz A puder ser escrito como a soma de duas parcelas, o determinante de A pode ser escrito como a soma de dois determinantes, cada um obtido substituindo a fila escolhida por uma das parcelas, sem alterar o restante da matriz:

$$\begin{vmatrix} a & x_1 + x_2 & b \\ c & y_1 + y_2 & d \\ e & z_1 + z_2 & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x_1 & b \\ c & y_1 & d \\ e & z_1 & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & x_2 & b \\ c & y_2 & d \\ e & z_2 & f \end{vmatrix}$$

- O teorema de Binet afirma que, se A e B têm a mesma dimensão, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Por isso, uma matriz é inversível se, e somente se, seu determinante for não nulo.
- O teorema de Jacobi diz que podemos substituir qualquer fila por uma soma entre ela própria e qualquer combinação linear de filas paralelas.

Sistemas lineares

Se existir apenas uma sequência $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaça simultaneamente todas as equações de um sistema linear, então esse sistema é possível e determinado.

Se existirem infinitas sequências $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que tornem o sistema verdadeiro, então ele é um sistema possível e indeterminado.

Se não existir nenhuma sequência $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaça todas as equações de um sistema, então ele é um sistema impossível.

Para sistemas com o mesmo número de variáveis e equações, pode-se usar a regra de Cramer, em que:

- Se $D \neq 0$, o sistema é possível e determinado e o valor de cada variável pode ser dado por:

$$x_i = \frac{D_{x_i}}{D}$$

- Se $D = 0$, o sistema pode ser impossível ou possível e indeterminado e, para decidir corretamente sua classificação, deve-se escalonar o sistema.

Quer saber mais?

Vídeos

e-Aulas: Portal de videoaulas. *Regra de Cramer outra vez*. USP. Disponível em: https://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=14270. (Acesso em: 4 nov. 2021.)

Nessa videoaula são apresentadas uma prova algébrica e uma interpretação geométrica do método Cramer.

e-Aulas: Portal de videoaulas. *Método de Gauss-Jordan. O passo a passo no cálculo da inversa de uma matriz*. USP. Disponível em: https://eaulas.usp.br/portal/video.action?idItem=26054. (Acesso em: 4 nov. 2021.)

Veja, nessa videoaula, como obter a matriz inversa pelo método de Gauss.

Sites

IME. Sistemas de equações – algumas aplicações. Unicamp. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/sistemas-lineares-algumas-aplicacoes/. (Acesso em: 4 nov. 2021.)

No endereço sugerido, conheça alguns casos de aplicação de sistemas de equações.

COLOMBO, Jones. Koiller. Álgebra linear - Determinantes. UFF. Disponível em: https://www.professores.uff.br/jcolombo/wp-content/uploads/sites/124/2017/09/2-2012-Determinante.pdf. (Acesso em: 4 nov. 2021.)

Veja mais sobre determinantes nesse *site* em que você encontra a dedução de fórmulas e procedimentos para calculá-lo.

Exercícios complementares

1. Unicamp-SP 2012 Um supermercado vende dois tipos de cebola, conforme se descreve na tabela abaixo:

Tipo de cebola	Peso unitário aproximado (g)	Raio médio (cm)
Pequena	25	2
Grande	200	4

a) Uma consumidora selecionou cebolas pequenas e grandes, somando 40 unidades, que pesaram 1 700 g. Formule um sistema linear que permita encontrar a quantidade de cebolas de cada tipo escolhidas pela consumidora e resolva-o para determinar esses valores.

b) Geralmente, as cebolas são consumidas sem casca. Determine a área de casca correspondente a 600 g de cebolas pequenas, supondo que elas sejam esféricas. Sabendo que 600 g de cebolas grandes possuem 192π cm^2 de área de casca, indique que tipo de cebola fornece o menor desperdício com cascas.

2. Ao fim do ano escolar, Otávio deseja saber se conseguiu a aprovação em todas as disciplinas. Para isso, com base no conhecimento de suas médias (matriz N) e dos pesos (matriz P) de cada bimestre, deve calcular suvas médias finais (MF), utilizando uma média ponderada.

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{cccc} 1^{\circ}\,B & 2^{\circ}\,B & 3^{\circ}\,B & 4^{\circ}\,B \end{array} & \\ N = \begin{pmatrix} 5,5 & 6,5 & 8,5 & 7 \\ 6,5 & 7 & 8 & 8 \\ 8 & 7 & 7 & 6,5 \\ 9 & 10 & 10 & 9 \\ 8 & 8,5 & 7,5 & 8 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \text{Matemática} \\ \text{Português} \\ \text{História} \\ \text{Geografia} \\ \text{Ciências} \end{array} \end{array}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 1^{\circ}\,B \\ 2^{\circ}\,B \\ 3^{\circ}\,B \\ 4^{\circ}\,B \end{array}$$

Como calcular, por exemplo, a média de Matemática com base nas informações dadas?

FRENTE 2

3. **FGV-SP 2013** Um determinado produto deve ser distribuído a partir de 3 fábricas para 4 lojas consumidoras. Seja $C = (c_{ij})_{3 \times 4}$ a matriz do custo unitário de transporte da fábrica i para a loja j, com $c_{ij} = (2i - 3j)^2$. Seja $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$ a matriz que representa a quantidade de produtos transportados da fábrica i para a loja j, em milhares de unidades, com $b_{ij} = i + j$.

a) Determine as matrizes $C = (c_{ij})_{3 \times 4}$ e B^t sendo que B^t é a transposta da matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 4}$.

b) Sendo $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1}$ e $E = [1 \quad 0 \quad 0]_{1 \times 3}$, determine as matrizes $X = (x_{ij})_{3 \times 1}$ e $Y = (y_{ij})_{1 \times 3}$ tais que $X = B \cdot D$ e $Y = E \cdot (C \cdot B)$. Em seguida, determine o significado econômico de x_{ij} e de y_{ij}.

4. Os elementos de uma matriz quadrada de terceira ordem $M = (m_{ij})_{3 \times 3}$ são tais que:

- Na terceira linha os elementos formam uma progressão geométrica de razão 3 da esquerda para a direita.
- Na segunda linha os elementos formam uma progressão aritmética de razão 2 da direita para a esquerda.
- Na primeira linha, cada elemento é igual à soma dos elementos que estão abaixo dele na mesma coluna.

Sabendo que os elementos da primeira linha dessa matriz são $m_{11} = 20$, $m_{12} = 30$ e $m_{13} = 64$ então, sendo m_{ij} o menor dos elementos da matriz M, a diferença $j - i$ é igual a:

a) 2 **b)** 1 **c)** 0 **d)** -1 **e)** -2

5. **Fuvest-SP 2013** Sejam α e β números reais com $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ e $0 < \beta \leqslant \pi$. Se o sistema de equações, dado em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\alpha \\ \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

for satisfeito, então $\alpha + \beta$ é igual a

a) $-\dfrac{\pi}{3}$ **b)** $-\dfrac{\pi}{6}$ **c)** 0 **d)** $\dfrac{\pi}{6}$ **e)** $\dfrac{\pi}{3}$

6. **UnB-DF 2012** Uma equipe de pesquisa de mercado conduziu, durante vários meses, um levantamento para determinar a preferência dos consumidores em relação a duas marcas de detergentes, marca 1 e marca 2. Verificou-se, inicialmente, que, entre 200 pessoas pesquisadas, 120 usavam a marca 1 e 80, a marca 2. Com base no levantamento inicial, a equipe compilou a seguinte estatística:

- 70% dos usuários da marca 1, em qualquer mês, continuaram a utilizá-la no mês seguinte, e 30% mudaram para a marca 2;
- 80% dos usuários da marca 2, em qualquer mês, continuaram a utilizá-la no mês seguinte, e 20% mudaram para a marca 1.

Esses resultados podem ser expressos pela matriz $P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, em que p_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, representa a probabilidade de o consumidor da marca j consumir a marca i após um mês, supondo-se que tais probabilidades sejam mantidas constantes de um mês para o outro. Dessa forma, obtém-se a fórmula de recorrência $X_{k+1} = P \cdot X_k$, $k \geqslant 0$, em que $X_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix}$ representa a distribuição, no mercado, ao final do mês k, dos usuários de cada detergente pesquisado; a_k e b_k representam os percentuais de usuários das marcas 1 e 2, respectivamente, no referido período.

Com base nessas informações, julgue os itens subsequentes.

a) A sequência $b_1 - b_0$, $b_2 - b_1$, $b_3 - b_2$ representa uma progressão geométrica decrescente de razão 0,5.

b) Se $X_k = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ é tal que $X_{k+1} = X_k$, para algum $k \geqslant 0$, então α 0,4 e β 0,6.

c) A probabilidade de um consumidor do detergente da marca 1 comprar o da marca 2 ao final do 2º mês é superior a 50%.

7. Considere uma matriz de números reais não nulos $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que seja invertível e considere também um número real λ tal que: $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Escreva uma função $y = f(x)$, para todo $x \neq -\dfrac{d}{c}$, usando como parâmetros apenas os elementos da matriz M.

b) Mostre que $f(x)$ não é uma função constante.

c) Determine a função inversa $f^{-1}(x)$.

8. **Fuvest-SP 2019** A multiplicação de matrizes permite codificar mensagens. Para tanto, cria-se uma numeração das letras do alfabeto, como na tabela abaixo. (O símbolo * corresponde a um espaço).

A	B	C	D	E	F	G	H
1	2	3	4	5	6	7	8

I	J	K	L	M	N
9	10	11	12	13	14

O	P	Q	R	S	T
15	16	17	18	19	20

U	V	W	X	Y	Z	*
21	22	23	24	25	26	27

Como exemplo, suponha que a mensagem a ser transferida seja **FUVEST**, e que as matrizes codificadora e decodificadora sejam $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, respectivamente. A matriz em que se escreve a mensagem é $M = \begin{pmatrix} F & U & V \\ E & S & T \end{pmatrix}$ que, numericamente, corresponde a $M = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. Para fazer a codificação da mensagem, é feito o produto de matrizes

$$N = A \cdot M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 101 & 106 \\ 11 & 40 & 42 \end{pmatrix}$$

O destinatário, para decifrar a mensagem, deve fazer o produto da matriz decodificadora com a matriz codificada recebida: $M = B \cdot N = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 22 \\ 5 & 19 & 20 \end{pmatrix}$.

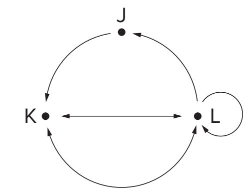
a) Se a matriz codificadora é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e a mensagem a ser transmitida é **ESCOLA**, qual é a mensagem codificada que o destinatário recebe?

b) Se a matriz codificadora é $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, e o destinatário recebe a matriz codificada $N = \begin{pmatrix} 33 & 9 & 8 & 48 \\ 47 & 13 & 9 & 75 \end{pmatrix}$, qual foi a mensagem enviada?

c) Nem toda matriz A é uma matriz eficaz para enviar mensagens. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$ encontre 4 sequências de 4 letras de forma que as respectivas matrizes codificadas sejam sempre iguais a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. No Campeonato Brasileiro de 2015, cada um dos 20 times jogou contra todos os outros duas vezes, em turno e returno. Cada vitória garantia 3 pontos, cada empate somava 1 ponto e as derrotas não contavam pontos. Ao fim do Campeonato, o São Paulo somou 62 pontos, tendo vencido 10 jogos a mais do que o número de jogos que empatou. Quantas vezes o São Paulo venceu, empatou e perdeu no campeonato?

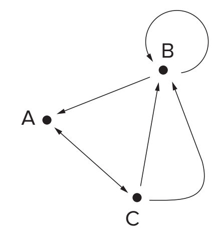
10. Uma rede é um conjunto finito de pontos conectados entre si. Cada um desses pontos é chamado de **nó** ou **vértice** e cada conexão entre dois vértices é chamada de **aresta** da rede. Uma **rede orientada** é uma rede com sentidos de tráfego definidos entre os vértices (as arestas são direcionadas). Redes podem ser utilizadas para representar muitas situações, desde computadores conectados à Internet até cidades conectadas por estradas. Podemos representar uma rede por uma **matriz de adjacências**, que indica quantos caminhos de comprimento unitário (que passam por apenas uma aresta) existem entre dois vértices. Um exemplo de rede orientada e sua matriz de adjacências correspondente estão dispostos a seguir.



Para:

$$\begin{array}{cccc} & J & K & L & \\ A = & \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) & & & \begin{array}{c} J \\ K \\ L \end{array} \end{array} \quad \text{De:}$$

Se A faz a matriz de adjacências de uma rede, o produto $A \cdot A = A^2$ fornece o número de caminhos de comprimento 2 (que percorrem duas arestas) de um vértice a outro. Ou seja: o número de maneiras de chegar de um vértice a outro, tendo um vértice intermediário. Na rede do exemplo, isso acontece por exemplo se formos de L até K, passando por J.
Considere a rede orientada a seguir.



a) Escreva a matriz M de adjacências da rede.

b) Encontre a matriz que fornece o número de caminhos de comprimento 2.

c) Interprete o elemento m_{21} na matriz M^2 e liste os caminhos correspondentes.

11. **UEPB 2013** A equação $\begin{vmatrix} \log(x-1) & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \log(x-1) & 1 & \log(x-1) \end{vmatrix} = 0$ tem como solução real os valores de x:

a) 2 e 10

b) 0 e 2

c) 3 e 11

d) 4 e 11

e) 2 e 11

12. **UFPR 2012** Considere o polinômio $p(x) = \begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 3 & x & -4 \\ x & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

Calcule as raízes de $p(x)$. Justifique sua resposta, deixando claro se utilizou propriedades de determinantes ou algum método para obter as raízes do polinômio.

13. **Uece 2014** Se os números reais x, y, z, m, n, p, u, v e w formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão q, então o valor do determinante da matriz

$$M = \begin{bmatrix} x & y & z \\ m & n & p \\ u & v & w \end{bmatrix} \text{ é}$$

a) 1.

b) 0.

c) xnw.

d) q^3.

14. Unicamp-SP 2014 Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ c & -2 & 0 \end{pmatrix}$, onde a, b e c são números reais.

a) Encontre os valores de a, b e c de modo que $A^T = -A$.

b) Dados $a = 1$ e $b = -1$, para que os valores de c e d o sistema linear $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{pmatrix}$ tem infinitas soluções?

15. Insper-SP 2012 Dado um número real a, com $a > 1$, define-se a seguinte sequência de matrizes quadradas:

$$A_1 = [1],\ A_2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} a^2 & a & 1 \\ 0 & a^2 & a \\ 0 & 0 & a^2 \end{bmatrix},$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ 0 & a^3 & a^2 & a \\ 0 & 0 & a^3 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 \end{bmatrix}, \ldots$$

Representando o determinante de uma matriz quadrada M por det(M), considere agora a sequência numérica

$$(\det(A_1), \det(A_2), \det(A_3), \det(A_4), \ldots).$$

Essa sequência numérica

a) é uma progressão aritmética de razão 2.

b) é uma progressão aritmética de razão a^2.

c) é uma progressão geométrica de razão a.

d) é uma progressão geométrica de razão a^2.

e) não é uma progressão aritmética nem uma progressão geométrica.

16. UFSC 2020 (Adapt.) Some os números associados às proposições corretas.

01 Se as matrizes $\begin{pmatrix} 3m + 2n & \log(10) \\ \sqrt{2} & 3m - 2n \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ \frac{\sqrt{8}}{2} & \log\left(\frac{1}{1000}\right) \end{pmatrix}$ são iguais, então $m \cdot n = \frac{5}{3}$.

02 A matriz $\begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ \frac{5}{\sqrt{27}} & \frac{-4}{-\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ admite inversa.

04 Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{se } i \geq j \\ 2i - j, \text{se } i < j \end{cases}$, então $B^t - A + I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix}$, sendo I a matriz identidade.

08 O sistema $\begin{cases} x - 2y + mz = 1 \\ x - y - z = 2 \\ -x + 2y - 2z = p \end{cases}$ é indeterminado para $m = 2$ e $p = -1$.

16 Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então $(A \cdot B)^t = A^t \cdot B^t$.

Soma:

17. UFPE 2013 Sobre o sistema de equações lineares apresentado abaixo, analise as proposições a seguir, sendo a um parâmetro real.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + ay + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$$

- ☐ Se $a = 2$ então o sistema admite infinitas soluções.
- ☐ O sistema sempre admite solução.
- ☐ Quando o sistema admite solução, temos que $x = 1$.
- ☐ Se $a \neq 2$, então o sistema admite uma única solução.
- ☐ Se $a = 1$, então o sistema admite a solução $(1, 2, -1)$.

18. UEL-PR 2014 Uma padaria possui 3 tipos de padeiros, classificados como A, B e C. Essa padaria é bem conhecida na cidade pela qualidade do pão francês, da baguete e do pão de batata.

Cada padeiro do tipo A produz, diariamente, 30 pães franceses, 100 baguetes e 20 pães de batata.

Cada padeiro do tipo B produz, diariamente, 30 pães franceses, 70 baguetes e 20 pães de batata.

Cada padeiro do tipo C produz, diariamente, 90 pães franceses, 30 baguetes e 100 pães de batata.

Quantos padeiros do tipo A, do tipo B e do tipo C são necessários para que em um dia a padaria produza, exatamente, 420 pães franceses, 770 baguetes e 360 pães de batata?

Apresente os cálculos realizados na resolução desta questão.

19. UFSJ-MG 2013 Observe o sistema de variáveis x, y, z e t.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + t = 2 \\ x + z + t = 4 \end{cases}$$

Com base no sistema, é **CORRETO** afirmar que sua solução, considerando x, y, z e t, nessa ordem, forma uma progressão

a) geométrica decrescente.

b) aritmética decrescente.

c) geométrica crescente.

d) aritmética crescente.

20. PUC-RS 2014 Dadas as matrizes $A = [\,1 \quad 2 \quad 3\,]$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, o determinante det $(A \cdot B)$ é igual a

a) 18.
b) 21.
c) 32.
d) 126.
e) 720.

21. Udesc 2013 Seja X o conjunto formado por todas as matrizes diagonais de ordem 2×2. Analise as proposições:

I. A multiplicação de matrizes pertencentes a X satisfaz a propriedade comutativa.
II. Todas as matrizes pertencentes ao conjunto X possuem inversa.
III. A matriz identidade de ordem 2×2 pertence ao conjunto X.
IV. Se A e B são dois elementos pertencentes a X, então A + B também pertence a X.

Assinale a alternativa **correta**.

a) Somente a afirmativa II é verdadeira.
b) Somente as afirmativas I, III e IV são verdadeiras.
c) Somente as afirmativas I e IV são verdadeiras.
d) Somente a afirmativa III é verdadeira.
e) Todas as afirmativas são verdadeiras.

22. Feevale-RS 2012 Sendo $\begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$, o valor de $\begin{vmatrix} 3x+1 & 8 \\ 3y+1 & 8 \end{vmatrix}$ é:

a) 6
b) 8
c) 24
d) 128
e) 144

23. Udesc 2012 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} x+1 & x^2 \\ 2 & -x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Se I representa a matriz identidade de ordem dois, então o produto entre todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem a equação $\det(A \cdot B) + \det(B + I) = \det(2B^T)$ é igual a:

a) $-\frac{4}{3}$
b) $-\frac{2}{3}$
c) $\frac{3}{2}$
d) $\frac{5}{2}$
e) $-\frac{1}{3}$

24. Famema-SP 2021 Dois jogadores, A e B, disputam a final de um torneio de xadrez em dois jogos. Em cada partida, se ocorresse empate, cada jogador ganharia 1 ponto, caso contrário, o vencedor ganharia 2 pontos e o perdedor perderia 1 ponto. As matrizes que indicaram a pontuação obtida por cada jogador tinham, ambas, a seguinte estrutura:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1^{\text{o}} \text{ jogo} \\ 2^{\text{o}} \text{ jogo} & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

No caso do jogador A, sua matriz de pontuação foi:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se a matriz de pontuação do jogador B era igual a matriz resultante da multiplicação matricial $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, então $x + y + z + w$ é igual a

a) 0.
b) 2.
c) 1.
d) 3.
e) -1.

25. UEG-GO 2020 Considerando o determinante a seguir, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} y & 2 & -1 \\ 4 & 5 & x \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

a) $-4x^2y + 15y - 37$
b) $-2x + 17xy^2 - 37$
c) $-2x - 2xy + 15y - 37$
d) $-2x + 2xy - 15y - 37$
e) $-2x^2y - 17xy^2 - 37$

26. Se n é um número inteiro positivo e X é a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, então o valor do determinante da matriz $Y = X^n$ é

a) 2^n
b) 3^n
c) 6^n
d) 9^n

27. FGV-SP 2020 Considere a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, com $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^j \text{ sen } x, i = j \\ \cos x, i \neq j \end{cases}$.

Sendo x um número real, o determinante da matriz A é

a) igual a 1.
b) igual a -1.
c) igual a $\cos 2x$.
d) positivo se x pertence ao intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.
e) positivo se x pertence ao intervalo $[0, \pi]$.

28. Urca-CE 2020 Se $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ então $(P \times Q \times P^{-1})^{2020}$ vale:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

29. Urca-CE 2020 Qual o valor de $x \in \mathbb{R}$, para que a matriz abaixo não seja invertível?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & \sqrt{x^2} & 4 \end{bmatrix}$$

a) 1
b) −1
c) −1 e 1
d) Qualquer valor real.
e) Nenhum valor real.

30. Uece 2021 Se M é a matriz $M = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 1 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e det(M) é o determinante de M, então, para um número k inteiro, todas as soluções x da equação det(M) = 0 são da forma

a) $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

b) $\pi + k\pi$.

c) $\pi + 2k\pi$.

d) $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

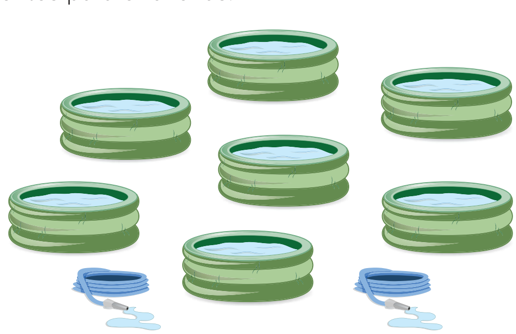
31. Unicamp-SP 2017 Sabendo que m é um número real, considere o sistema linear nas variáveis x, y e z:

$$\begin{cases} mx + 2z = 4 \\ x - y + z = 3 \\ 2x + mz = 4 \end{cases}$$

a) Seja A a matriz dos coeficientes desse sistema. Determine os valores de m para os quais a soma dos quadrados dos elementos da matriz A é igual à soma dos elementos da matriz $A^2 = A \cdot A$.

b) Para $m = 2$, encontre a solução do sistema linear para a qual o produto xyz é mínimo.

32. Um acampamento infantil possui sete piscinas de montar idênticas, mas apenas duas mangueiras diferentes para enchê-las.



As duas mangueiras juntas são capazes de encher as sete piscinas em duas horas, mas em cada piscina há um ralo que se for deixado aberto fará com que cada piscina demore mais para ficar cheia.
Com o ralo aberto, a torneira de maior vazão levaria uma hora e meia para encher uma única piscina. Já a torneira de menor vazão levaria 6 horas para encher uma piscina com o ralo aberto.
Quanto tempo leva para cada torneira sozinha encher uma única piscina?

33. Unicamp-SP 2015 Seja (a, b, c, d) uma progressão geométrica (PG) de números reais, com razão $q \neq 0$ e $a \neq 0$.

a) Mostre que $x = -\frac{1}{q}$ é uma raiz do polinômio cúbico $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$.

b) Sejam e e f números reais quaisquer e considere o sistema linear nas variáveis x e y,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Determine para que valores da razão q esse sistema tem solução única.

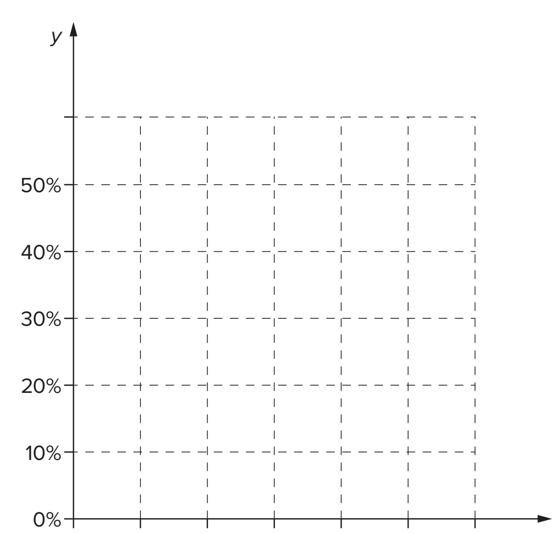
34. Unicamp-SP 2013 Na formulação de fertilizantes, os teores percentuais dos macronutrientes N, P e K, associados respectivamente a nitrogênio, fósforo e potássio, são representados por x, y e z.

a) Os teores de certo fertilizante satisfazem o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0{,}20 \\ 2y + z = 0{,}55 \\ z = 0{,}25 \end{cases}$$

Calcule x e y nesse caso.

b) Suponha que para outro fertilizante valem as relações $24\% \leqslant x + y + z \leqslant 54\%$, $x \geqslant 10\%$, $y \geqslant 20\%$ e $z = 10\%$. Indique no plano cartesiano abaixo a região de teores (x, y) admissíveis para tal fertilizante.



35. Unicamp-SP 2013 Considere a matriz $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\frac{1}{\alpha} & -1 \end{bmatrix}$ que depende do parâmetro real $\alpha > 0$.

a) Calcule a matriz $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2$.

b) Um ponto no plano cartesiano com as coordenadas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é transformado pela matriz A_α em um novo ponto da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_\alpha \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ -\frac{1}{\alpha}x - y \end{bmatrix}$$

Calcule o valor de α, sabendo que o sistema $A_\alpha \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ admite solução.

36. Unicamp-SP 2018 Sabendo que p e q são números reais, considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$

a) Prove que para quaisquer p e q teremos $B^TAB \geqslant 0$.

b) Determine os valores de p e q para os quais o sistema linear nas variáveis x, y e z, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$ tem infinitas soluções.

37. Unicamp-SP 2016 Considere o polinômio cúbico $p(x) = x^3 - 3x + a$, onde a é um número real.

a) No caso em que $p(1) = 0$, determine os valores de x para os quais a matriz A abaixo não é invertível.

$$A = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ a & 3 & x \end{bmatrix}$$

b) Seja b um número real não nulo e i a unidade imaginária, isto é, $i_2 = -1$. Se o número complexo $z = 2 + bi$ é uma raiz de $p(x)$, determine o valor de $|z|$.

38. Unicamp-SP 2012 Seja dada a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 2 & 0 \\ 2 & x & 6 \\ 0 & 6 & 16x \end{bmatrix}$ em que x é um número real.

a) Determine para quais valores de x o determinante de A é positivo.

b) Tomando $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ e supondo que, na matriz A, $x = -2$, calcule $B = A \cdot C$.

39. AFA-SP 2020 Três amigas, Tereza, Ana e Kely, entram juntas numa loja de chocolates. A tabela abaixo indica a quantidade de caixas e os tipos de trufa que cada uma comprou na loja.

	Trufas de morango	Trufas de nozes	Trufas de coco
Tereza	3	7	1
Ana	4	10	1
Kely	1	1	1

Com as compras, Tereza gastou 315 reais e Kely gastou 105 reais.

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

- ☐ O valor da caixa de trufas de coco é o dobro do valor da caixa de trufas de nozes.
- ☐ Ana gastou o quádruplo do que Kely gastou.
- ☐ As três juntas gastaram menos de 800 reais.

Sobre as proposições, tem-se que

a) todas são verdadeiras.

b) apenas uma é falsa.

c) apenas duas são falsas.

d) todas são falsas.

40. AFA-SP 2020 Considere:

- a matriz $A = \begin{pmatrix} x+1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ x+2 & 1 & x+1 \end{pmatrix}$ cujo determinante é det A = M;
- a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cujo determinante é det B = N; e $T = 3 - x$

Seja $\boldsymbol{f}$ uma função real definida por $f(x) = \log_T M + \log_T N$. Sobre o domínio de $\boldsymbol{f}$, é correto afirmar que

a) é o conjunto dos números reais.

b) possui apenas elementos negativos.

c) não tem o número 2 como elemento.

d) possui três elementos que são números naturais.

41. AFA-SP 2018 Sejam a e b números positivos tais que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ vale 24.

Dessa forma o determinante da matriz $\begin{bmatrix} \sqrt{b} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & \sqrt{a} \end{bmatrix}$ é igual a

a) 0

b) 6

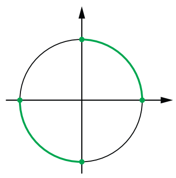
c) -6

d) $\sqrt{6}$

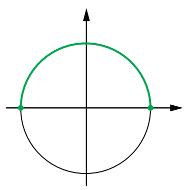
42. AFA-SP 2019 Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \text{sen}\,x & -1 \\ -1 & \text{sen}\,x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \text{sen}\,x & \text{sen}\,x \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Se o determinante do produto matricial $A \cdot B$ é um número real positivo ou nulo, então os valores de x, no ciclo trigonométrico, que satisfazem essa condição, estão representados em

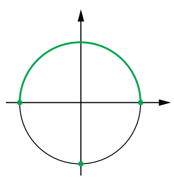
a)



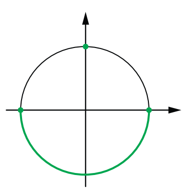
b)



c)



d)



43. AFA-SP 2017 Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \text{sen}\,x \\ \cos x & 1 & 0 \\ \text{sen}\,x & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \det A$. Sobre a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$g(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot |f(x)|$, em que $|f(x)|$ é módulo de $f(x)$, é correto afirmar que

a) possui período π.

b) seu conjunto imagem é $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

c) é par.

d) é crescente no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right]$.

44. AFA-SP 2016 Seja A a matriz $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Sabe-se que

$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ vezes}}$.

Então, o determinante da matriz $S = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{11}$ é igual a

a) 1

b) −31

c) −875

d) −11

45. AFA-SP 2015 Considere as seguintes simbologias em relação à matriz M:

- M^t é a matriz transposta de M
- M^{-1} é a matriz inversa de M
- det M é o determinante da matriz M

Da equação $(X^t)^{-1} = A \cdot (B + C)$, em que A e (B + C) são matrizes quadradas de ordem n e inversíveis, afirma-se que

I. $X = (A^{-1})^t \cdot [(B + C)^{-1}]^t$

II. $\det X = \dfrac{1}{\det A \cdot \det(B + C)}$

III. $X^{-1} = (B^t + C^t) \cdot A^t$

São corretas

a) apenas I e II.

b) apenas II e III.

c) apenas I e III.

d) I, II e III.

46. AFA-SP 2013 Considere as matrizes A e B, inversíveis e de ordem n, bem como a matriz identidade I. Sabendo que $\det(A) = 5$ e $\det(I \cdot B^{-1} \cdot A) = \frac{1}{3}$, então o $\det[3 \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1})^t]$ é igual a

a) $5 \cdot 3^n$

b) $\dfrac{3^{n-1}}{5^2}$

c) $\dfrac{3^n}{15}$

d) 3^{n-1}

47. AFA-SP 2012 Uma montadora de automóveis prepara três modelos de carros, a saber:

MODELO	1	2	3
CILINDRADA (em litro)	1.0	1.4	1.8

Essa montadora divulgou a matriz abaixo em que cada termo a_{ij} representa a distância percorrida, em km, pelo modelo i, com um litro de combustível, à velocidade $10j$ km/h.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7{,}6 & 7{,}2 & 8{,}9 & 8{,}2 & 11 & 10 & 12 & 11{,}8 \\ 5 & 7{,}5 & 7 & 8{,}5 & 8 & 10{,}5 & 9{,}5 & 11{,}5 & 11 \\ 3 & 2{,}7 & 5{,}9 & 5{,}5 & 8{,}1 & 7{,}4 & 9{,}8 & 9{,}4 & 13{,}1 \end{bmatrix}$$

Com base nisso, é correto dizer que

a) para motoristas que somente trafegam a 30 km/h, o carro 1.4 é o mais econômico.

b) se durante um mesmo período de tempo um carro 1.4 e um 1.8 trafegam a 50 km/h, o 1.4 será o mais econômico.

c) para motoristas que somente trafegam a velocidade de 70 km/h, o carro 1.8 é o de maior consumo.

d) para motoristas que somente trafegam a 80 km/h, o carro 1.0 é o mais econômico.

48. AFA-SP 2012 Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} k \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Em relação à equação matricial $A \cdot X = B$, é correto afirmar que

a) é impossível para $k = \frac{7}{2}$

b) admite solução única para $k = \frac{7}{2}$

c) toda solução satisfaz à condição $x_1 + x_2 = 4$

d) admite a terna ordenada $\left(2, 1, -\frac{1}{2}\right)$ como solução.

49. Uece 2014 Uma matriz quadrada $P = (a_{ij})$ é simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Por exemplo, a matriz $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica. Se a matriz $M = \begin{bmatrix} x+y & x-y & xy \\ 1 & y-x & 2y \\ 6 & x+1 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica, pode-se afirmar corretamente que o determinante de M é igual a

a) -1.

b) -2.

c) 1.

d) 2.

50. Famema-SP 2021 O sistema de equações a seguir é composto por uma equação linear e uma equação logarítmica, na base 10.

$$\begin{cases} x - y = -20 \\ \log(x + y) = 2 \end{cases}$$

Sendo (x, y) a solução do sistema, o valor de $\frac{y}{x}$ é igual a

a) 1.

b) 1,5.

c) 0,6.

d) 0,8.

e) 1,2.

51. Unioeste-PR 2019 José precisa pesar três peças de metal A, B e C. Mas, a balança que ele dispõe não é precisa para pesos menores do que 1 kg. José decide então pesar as peças de duas em duas. A e B juntas pesam 1600 g, B e C juntas pesam 1400 g e A e C juntas pesam 1700 g.

Nestas condições, qual o peso da peça mais leve?

a) 550 g.

b) 650 g.

c) 700 g.

d) 950 g.

e) 1 400 g.

52. UFJF/Pism-MG 2018 Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$$

É **CORRETO** afirmar que:

a) O sistema é possível e indeterminado.

b) $x = 4, y = 1$ e $z = 0$ é a única solução do sistema.

c) $x = -4, y = 1$ e $z = 1$ é a única solução do sistema.

d) O sistema é impossível.

e) $x = 0, y = 0$ e $z = 0$ é a única solução do sistema.

53. Enem PPL 2018 Visando atingir metas econômicas previamente estabelecidas, é comum no final do mês algumas lojas colocarem certos produtos em promoção. Uma determinada loja de departamentos colocou em oferta os seguintes produtos: televisão, sofá e estante. Na compra da televisão mais o sofá, o cliente pagaria R$ 3 800,00. Se ele levasse o sofá mais a estante, pagaria R$ 3 400,00. A televisão mais a estante sairiam por R$ 4 200,00. Um cliente resolveu levar duas televisões e um sofá que estavam na promoção, conseguindo ainda mais 5% de desconto pelo pagamento à vista.

O valor total, em real, pago pelo cliente foi de

a) 3 610,00.

b) 5 035,00.

c) 5 415,00.

d) 5 795,00.

e) 6 100,00.

54. ESPM-SP 2018 André comprou uma calça, três camisetas e duas cuecas por R$ 420,00. Se tivesse comprado duas calças e uma cueca teria gasto R$ 285,00. Se ele tivesse comprado apenas uma peça de cada tipo, teria pago a importância de:

a) R$ 195,00

b) R$ 200,00

c) R$ 215,00

d) R$ 220,00

e) R$ 235,00

55. Unioeste-PR 2018 Existem dois valores reais, α_1 e α_2, que α pode assumir de modo que a equação matricial $\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ admita solução não trivial. Assim, é **CORRETO** afirmar que

a) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 20$.

b) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 100$.

c) $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 20$.

d) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 16$.

e) $\alpha_1 \in \mathbb{Z}, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 84$.

56. Famema-SP 2017 Uma pessoa comprou 2 pacotes de algodão, 5 rolos de gaze e 3 rolos de esparadrapo. Na farmácia onde realizou a compra, o preço de um pacote de algodão mais um rolo de gaze e mais um rolo de esparadrapo é R$ 16,00. Um rolo de esparadrapo custa R$ 2,00 a menos que um pacote de algodão e R$ 1,00 a mais que um rolo de gaze. Sabendo que essa pessoa pagou a compra com uma nota de R$ 50,00, o valor do troco recebido foi

a) R$ 0,50.
b) R$ 1,00.
c) R$ 1,50.
d) R$ 2,50.
e) R$ 2,00.

57. PUC-PR 2017 Clarice e suas colegas de Engenharia resolveram organizar uma festa junina para arrecadar fundos para a formatura. Com esse intuito, montaram três quiosques, nos quais eram vendidos pipoca, cachorro quente e quentão. Ao término da festa, foi feito o levantamento das vendas nos três quiosques:

- No primeiro, foram vendidos 10 sacos de pipoca, 20 cachorros quentes e 10 copos de quentão.
- No segundo, foram vendidos 50 sacos de pipoca, 40 cachorros quentes e 20 copos de quentão.
- No terceiro, foram vendidos 20 sacos de pipoca, 10 cachorros quentes e 30 copos de quentão.
- Os três quiosques lucraram R$ 150,00, R$ 450,00 e R$ 250,00, respectivamente.

Assinale a alternativa que apresenta o preço de cada saco de pipoca, cachorro quente e copo de quentão, respectivamente.

a) R$ 3,00, R$ 2,00 e R$ 4,00.
b) R$ 3,00, R$ 4,00 e R$ 5,00.
c) R$ 3,50, R$ 4,50 e R$ 5,50.
d) R$ 1,50, R$ 2,50 e R$ 3,50.
e) R$ 5,00, R$ 3,00 e R$ 4,00.

58. FGV-SP 2017 Chama-se solução trivial de um sistema linear aquela em que todos os valores das incógnitas são nulos.

O sistema linear, nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x - y + 5z = 0 \\ -5x + y + mz = 0 \end{cases}$$

a) é impossível para qualquer valor de m.
b) admite apenas a solução trivial para qualquer valor de m.
c) admite soluções diferentes da solução trivial para $m = 13$.
d) admite soluções diferentes da solução trivial para $m = 10$.
e) não admite a solução trivial para $m \neq 13$.

59. Uece 2017 O produto dos valores dos números reais λ para os quais a igualdade entre pontos do $\mathbb{R}^2$, $(2x + y, x - y) = (\lambda x, \lambda y)$ ocorre para algum $(x, y) \neq (0, 0)$ é igual a

a) -2.
b) -3.
c) -4.
d) -5.

60. Efomm-RJ 2017 Dado o sistema linear abaixo, analise as seguintes afirmativas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$$

I. Se $b \neq -12$, o sistema linear terá uma única solução.
II. Se $a = b = -12$, o sistema linear terá infinitas soluções.
III. Se $b = -12$, o sistema será impossível.

a) Todas as afirmativas são corretas.
b) Todas as afirmativas são incorretas.
c) Somente as afirmativas I e III são corretas.
d) Somente as afirmativas I e II são corretas.
e) Somente as afirmativas II e III são corretas.

61. UFJF/Pism-MG 3 2017 Sobre um sistema: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

com $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, é **CORRETO** afirmar que:

a) Se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{c}{b} = \frac{f}{e}$, o sistema possui uma única solução.
b) Se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{c}{b} \neq \frac{f}{e}$, o sistema não possui solução.
c) Se $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$, o sistema possui infinitas soluções.
d) Se $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$ e $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$, o sistema não possui solução.
e) Se $\frac{a}{b} \neq \frac{d}{e}$, o sistema não possui solução.

62. Udesc 2017 Um supermercado publicou três anúncios:

- Anúncio 1: 2 facas, 2 garfos e 3 colheres por 27 reais;
- Anúncio 2: 3 facas, 4 garfos e 4 colheres por 44 reais;
- Anúncio 3: 4 facas, 5 garfos e 6 colheres por 59 reais.

Supondo que o preço unitário de cada tipo de talher é o mesmo nos três anúncios, sendo x, y e z o preço de cada faca, garfo e colher, respectivamente, tem-se que:

a) $x < y < z$
b) $z < x < y$
c) $y < z < x$
d) $z < y = x$
e) $y < x = z$

63. UEG-GO 2017 Cinco jovens, que representaremos por a, b, c, d, e, foram a um restaurante e observaram que o consumo de cada um obedecia ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + d = 20 \\ b + c - e = 30 \\ a - c = 15 \\ e - a = 10 \\ c + e = 25 \end{cases}$$

O total da conta nesse restaurante foi de

a) R$ 50,00.
b) R$ 80,00.
c) R$ 100,00.
d) R$ 120,00.
e) R$ 135,00.

64. Unioeste-PR 2017 Sobre o sistema de equações lineares $\begin{cases} 3x + 5y = 7 \\ 3x + \beta y = 7 \end{cases}$, é **CORRETO** afirmar que

a) possui uma única solução, qualquer que seja β.
b) possui infinitas soluções, qualquer que seja β.
c) possui ao menos uma solução, qualquer que seja β.
d) só tem solução se $\beta = 5$.
e) é impossível se $\beta \neq -5$.

65. PUC-Rio 2016 Considere o sistema $\begin{cases} 2x + ay = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ e assinale a alternativa correta:

a) O sistema tem solução para todo $a \in \mathbb{R}$.
b) O sistema tem exatamente uma solução para $a = 2$.
c) O sistema tem infinitas soluções para $a = 1$.
d) O sistema tem solução para $a = 4$.
e) O sistema tem exatamente três soluções para $a = -1$.

66. Uece 2020 Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & y & 1 \end{bmatrix}$, em que x e y são números reais. Se det(M) representa o determinante da matriz M, então, em um plano com o sistema de coordenadas cartesiano usual, a equação det(M) $= -4$ expressa a equação de uma reta. A distância dessa reta à origem do sistema de coordenadas é igual a

Dado: u.c. = unidade de comprimento.

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ u.c.
b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ u.c.
c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ u.c.
d) $\sqrt{3}$ u.c.

67. ITA-SP 2018 Sejam $x_1, ..., x_5$ e $y_1, ..., y_5$ números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$ uma matriz 5×5 definida por $a_{ij} = x_1 + y_1, 1 \leqslant i, j \leqslant 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

68. ITA-SP 2018 Sejam A e B matrizes quadradas $n \times n$ tais que $A + B = A \cdot B$ e I_n a matriz identidade $n \times n$. Das afirmações:

I. $I_n - B$ é inversível;
II. $I_n - A$ é inversível;
III. $A \cdot B = B \cdot A$

é(são) verdadeira(s)

a) somente I.
b) somente II.
c) somente III.
d) somente I e II.
e) todas.

69. ITA-SP 2018 Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Se o polinômio $p(x)$ é dado por $p(x) = \det A$, então o produto das raízes de $p(x)$ é

a) $\dfrac{1}{2}$
b) $\dfrac{1}{3}$
c) $\dfrac{1}{5}$
d) $\dfrac{1}{7}$
e) $\dfrac{1}{11}$

70. ITA-SP 2018 Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, ..., a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é

a) –96
b) –85
c) 63
d) 99
e) 115

71. ITA-SP 2017 Sejam $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Considere $A = P^{-1} \cdot D \cdot P$. O valor de $\det(A^2 + A)$ é

a) 144.
b) 188.
c) 240.
d) 324.
e) 360.

FRENTE 2

72. ITA-SP 2016 Se $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $M \cdot N^T - M^{-1} \cdot N$ é igual a

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

73. ITA-SP 2016 Seja A a matriz de ordem 3×2, dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine todas as matrizes B tais que $B \cdot A = I_2$.

b) Existe uma matriz B com $B \cdot A = I_2$ que satisfaça $B \cdot B_T = I_2$? Se sim, dê um exemplo de uma dessas matrizes.

74. ITA-SP 2015 Considere a matriz $M = (m_{ij})_{22}$ tal que $m_{ij} = j - i + 1$, com $i, j = 1, 2$. Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 252,$$

então o valor de n é igual a

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

75. ITA-SP 2014 Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par;

II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;

III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é(são) verdadeira(s)

a) apenas I.
b) apenas I e II.
c) apenas I e III.
d) apenas II e III.
e) todas.

76. ITA-SP 2014 Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto $A \cdot B$ é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. $B \cdot A$ é antissimétrica;

II. $B \cdot A$ não é inversível;

III. O sistema $(B \cdot A) \cdot X = 0$, com $X^t = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$, admite infinitas soluções.

é(são) verdadeira(s)

a) apenas I e II.
b) apenas II e III.
c) apenas I.
d) apenas II.
e) apenas III.

77. ITA-SP 2014 Considere a equação $A(t) \cdot X = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

a) $2\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2}$

b) $-2\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2}$

c) $0, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$

d) $0, 2\sqrt{3}, \sqrt{3}$

e) $2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0$

78. ITA-SP 2014 Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{5}$

e) $\frac{5}{4}$

79. ITA-SP 2013 Considere $A \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$

d) 1

e) $\sqrt{216}$

80. ITA-SP 2012 Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são $1 + x_1$, $1 + x_2$, ..., $1 + x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

81. Unicamp-SP 2021 Considere um número real $t \in [0, 2\pi)$ e defina a matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} \cos^2 t & \cos t \cdot \operatorname{sen} t \\ \cos t \cdot \operatorname{sen} t & \operatorname{sen}^2 t \end{pmatrix}$$

a) Mostre que a matriz H é invertível.

b) Determine valores de t tais que $H \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

82. ITA-SP 2012 Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

83. ITA-SP Determine todas as matrizes $M \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM$, $\forall\, N \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

84. Unicamp-SP 2021 Considere a, b, c, d termos consecutivos de uma progressão aritmética de números reais com razão $r \neq 0$. Denote por D o determinante da matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

É correto afirmar que $\frac{D}{r^2}$ vale

a) -1.
b) -2.
c) -3.
d) -4.

85. UFSC 2020

01 Se $M = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}$ e M^{-1} é a inversa da matriz M, então a soma dos elementos de M^{-1} é -1.

02 Se A e B são matrizes que comutam, então, não vale a igualdade $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

04 Quatro candidatos disputam uma vaga em um concurso público. As notas obtidas pelos candidatos estão registradas na tabela a seguir:

	Prova 1	Prova 2	Prova 3
Candidato 1	7	8	9
Candidato 2	8	7	7
Candidato 3	9	6	6
Candidato 4	6	8	8

Com base na tabela foi montada a matriz $N = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 7 \\ 9 & 6 & 6 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}$. Pretende-se calcular a média aritmética de cada candidato nas três provas. Nessas condições, a matriz P definida por $P = \frac{2}{3} \cdot N \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ fornece essas médias.

08 Existe algum valor irracional k para que o sistema $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 1 \\ -2y + z = k \end{cases}$ admita infinitas soluções.

16 Em uma rede de supermercados foram anunciadas as seguintes ofertas relacionando três produtos. Os produtos A e B juntos custam R$ 120,00; os produtos B e C juntos custam R$ 110,00; já os produtos A e C juntos custam R$ 150,00. Como o preço de cada produto não varia, a pessoa que comprar cinco produtos, sendo dois do tipo A, um do tipo C e os demais do tipo B, deve gastar exatamente R$ 320,00.

Soma:

86. Unicamp-SP 2020 Seja a matriz de ordem 2 × 3, dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Seja C a matriz de ordem 3 × 2, cujos elementos são dados por $c_{ij} = (-1)^{i+j}$, para $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2$. Determine o produto AC.

b) Determine a solução do sistema linear $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$, nas variáveis reais x, y e z, em que (x, y, z) é uma progressão aritmética.

FRENTE 2

87. AFA-SP 2022 Considere o sistema linear $\begin{cases} mx + my = 2 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ nas incógnitas x e y, com $m \in \mathbb{R}$.

A solução desse sistema é o par ordenado (x, y), em que x e y são determinantes de matrizes, tais que

$x = \begin{vmatrix} 2 & m \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ e $y = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Assim, pode-se afirmar que $x + y + m$ é igual a

a) -9

b) -3

c) 0

d) 7

88. ITA-SP 2021 Seja A uma matriz real quadrada de ordem 2 tal que

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ y+1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então, o traço da matriz A é igual a:

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 3.

e) 4.

89. ITA-SP 2021 Sejam A e B matrizes quadradas de ordem ímpar. Suponha que A é simétrica e que B é antissimétrica. Considere as seguintes afirmações:

I. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

II. A comuta com qualquer matriz simétrica.

III. B comuta com qualquer matriz antissimétrica.

IV. $\det(AB) = 0$.

É(são) **VERDADEIRA(S)**:

a) nenhuma.

b) apenas I.

c) apenas III.

d) apenas IV.

e) apenas II e IV.

90. Uesb-BA 2020 Considere o sistema de equações lineares dado $\begin{cases} kx + y + 0z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 2x + 3y + kz = -3 \end{cases}$. Para que ele seja um sistema possível e determinado, existem apenas dois valores reais de k que não satisfazem a essa condição.

A soma desses valores é igual a

a) -1

b) 0

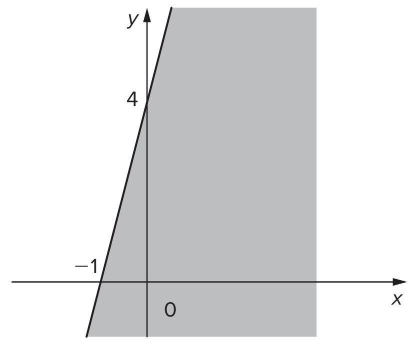
c) 1

d) 2

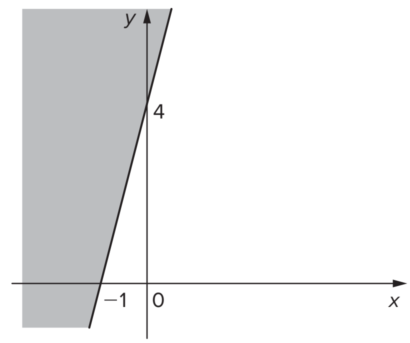
e) 3

91. AFA-SP 2022 Sejam as matrizes $M = \begin{bmatrix} x - 2y & 1 \\ 3x + y & -1 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$. A melhor representação, no plano cartesiano, dos pares ordenados (x, y) que satisfazem à inequação $\det(M) \leqslant \det(N)$ é

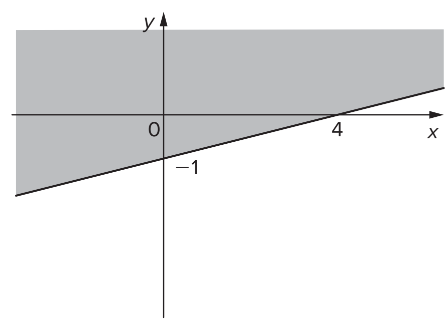
a)



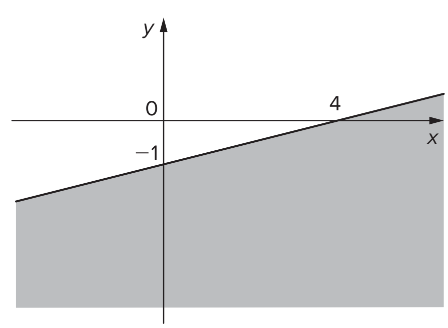
b)



c)



d)



92. Efomm-RJ 2021 Dadas as matrizes 2×2 do tipo $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}$, pode-se afirmar que

I. $A(x)$ é inversível.

II. $\exists x \in [0, 2\pi]$ tal que $A(x)A(x) = A(x)$.

III. $A(x)$ nunca será antissimétrica.

Assinale a opção correta.

a) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

b) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.

c) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.

d) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

e) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

93. UEM-PR 2020 Dadas duas matrizes 3×3, A e B, com entradas reais, dizemos que A é conjugada a B se existe uma matriz C, de mesma ordem e inversível, tal que $B = CAC^{-1}$. Assinale o que for correto.

01 Se A é conjugada a B, então B é conjugada a A.
02 A matriz identidade de ordem 3×3 é conjugada a qualquer outra matriz de mesma ordem.
04 Toda matriz A de ordem 3×3 é conjugada a 2A.
08 Se A é conjugada a B e B é conjugada a C, então A é conjugada a C.
16 Toda matriz 3×3 inversível é conjugada à sua inversa.

Soma:

94. Urca-CE 2020 Sabendo que $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, o valor real de a para que o determinante da matriz $A^2 + 2A$ seja igual a zero é:

a) 1
b) $-\dfrac{3}{2}$
c) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$
d) -2
e) -1

95. ITA-SP 2021 Determine todos os valores do número real a para os quais a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & a^3 & -a & 3 & 2 \\ 2 & a^2 & 1 & a^3 & a \\ 0 & 0 & 0 & a & -a^2 \\ -a & 0 & 0 & 0 & 3 \\ a^2 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

é não singular.

96. IME-RJ 2018 Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, com k real.

Determine a faixa de valores de k para que exista uma matriz de números reais P tal que as condições abaixo sejam atendidas simultaneamente:

a) $A^TP + PA + I$ em que A^T é a transposta da matriz A e I é a matriz identidade;
b) P seja simétrica;
c) $p_{11} > 0$, em que p_{11} é o elemento da linha 1 e coluna 1 de P; e
d) $|P| > 0$, em que $|P|$ é o determinante da matriz P.

97. IME-RJ 2020 Uma matriz A é semelhante a uma matriz B se e somente se existe uma matriz invertível P tal que $A = PBP^{-1}$.

a) Se A e B forem semelhantes, mostre que $\det(A) = \det(B)$.
b) Dadas $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, verifique se essas matrizes são semelhantes.

98. IME-RJ 2019 Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$

a) 1
b) 2
c) 4
d) 8
e) 16

99. IME-RJ 2018 Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 os quatro primeiros termos de uma PA com $x_1 = x$ e razão r, com $x, r \in \mathbb{R}$.

O determinante de $\begin{bmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ é:

a) 0
b) $x_4 \cdot r$
c) $x_4 \cdot r^3$
d) $x \cdot r^4$
e) $x \cdot r^3$

100. IME-RJ 2018 Seja $P(x)$ o polinômio de menor grau que passa pelos pontos $A\left(2, -4+3\sqrt{3}\right)$, $B\left(1, 3\sqrt{2}-2\right)$, $C\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ e $D\left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 3)$ é:

a) $8\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 6$
b) $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1$
c) $9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2$
d) $4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} - 3$
e) $4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$

101. IME-RJ 2015 Dada a matriz A, a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz A nulo é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

a) 7
b) 8
c) 9
d) 10
e) 11

102. IME-RJ 2017 Seja M uma matriz real 2×2. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$. Encontre todas as matrizes simétricas 2×2 reais na qual $M_2 = f(M)$.

103. IME-RJ 2016 Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. O maior valor de a, com $a \neq 1$, que satisfaz $A^{24} = I$ é:

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$

e) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$

Observação: I é a matriz identidade 2×2.

104. IME-RJ 2017 Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que $\det(A^2 - 2A + I) + 16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Obs: det(X) denota o determinante da matriz X.

105. IME-RJ 2016 Define-se A como a matriz 2016×2016, cujos elementos satisfazem a igualdade:

$$a_{i,j} = \binom{i+j-2}{j-1},\ i, j \in \{1, 2, ..., 2016\}.$$

Calcule o determinante de A.

106. IME-RJ 2014 Calcule o determinante abaixo, no qual $\omega = \text{cis}\frac{2\pi}{3}$ e $i = \sqrt{-1}$

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & 0 & i \\ i & 1 & -i & \omega^2 \\ 1-i & \omega & 1-i & 1 \\ 0 & \omega & 1 & i \end{vmatrix}$$

107. IME-RJ 2013 Seja Δ o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$. O número de possíveis valores de x reais que anulam Δ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

108. IME-RJ 2013 Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Seja a matriz $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$, com k e n números inteiros. Determine a soma, em função de n, dos quatro elementos da matriz B.

109. IME-RJ 2013 São dadas duas matrizes A e B tais que $AB = \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} x & 14 \\ 14 & y \end{bmatrix}$, com x e y reais e $x > y$.

Determine:

a) o(s) valor(es) de x e y;

b) as matrizes A e B que satisfazem as equações apresentadas.

110. IME-RJ 2013 Considere a seguinte definição:

"Dois pontos P e Q, de coordenadas (x_P, y_P) e (x_Q, y_Q), respectivamente, possuem coordenadas em comum se e somente se $x_P = x_Q$ ou $y_P = y_Q$."

Dado o conjunto S = {(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)}. Determine quantas funções bijetoras f: S → S existem, tais que para todos os pontos P e Q pertencentes ao conjunto S, $f(P)$ e $f(Q)$ possuem coordenadas em comum se, e somente se, P e Q possuem coordenadas em comum.

111. IME-RJ 2012 São dadas as matrizes quadradas inversíveis A, B e C, de ordem 3. Sabe-se que o determinante de C vale $(4 - x)$, onde x é um número real, o determinante da matriz inversa B vale $-\frac{1}{3}$ e que $(CA^t)^t = P^{-1}BP$, onde P é uma matriz inversível. Sabendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, determine os possíveis valores de x.

Observação: $(M)^t$ é a matriz transposta de M.

a) −1 e 3
b) 1 e −3
c) 2 e 3
d) 1 e 3
e) −2 e −3

112. IME-RJ 2012 Calcule as raízes de $f(x)$ em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

113. IME-RJ 2012 Os nove elementos de uma matriz M quadrada de ordem 3 são preenchidos aleatoriamente com os números 1 ou −1, com a mesma probabilidade de ocorrência. Determine:

a) o maior valor possível para o determinante de M;

b) a probabilidade de que o determinante de M tenha este valor máximo.

114. IME-RJ Sejam $x_1, ..., x_n$ os n primeiros termos de uma progressão aritmética. O primeiro termo e a razão desta progressão são os números reais x_1 e r, respectivamente. O determinante $\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \cdots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \cdots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$ é:

a) ${x_1}^n \cdot r^n$

b) ${x_1}^n \cdot r$

c) ${x_1}^n \cdot r^{n-1}$

d) $x_1 \cdot r^n$

e) $x_1 \cdot r^{n-1}$

115. IME-RJ Considere o sistema de equações lineares representado abaixo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11 \\ 7 \\ 9 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Os valores de a e d são, respectivamente:

a) 1 e 2

b) 2 e 3

c) 3 e 2

d) 2 e 2

e) 3 e 1

116. IME-RJ Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$.

117. IME-RJ 2021 Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} \log(-2x + 3y + k) = \log 3 + \log z \\ \log_x (1 - y) = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

onde x, y e z são variáveis e k é uma constante numérica real. Esse sistema terá solução se:

a) $k < -2$

b) $-2 < k < 0$

c) $0 < k < 2$

d) $2 < k < 4$

e) $k > 4$

118. Fuvest-SP 2021 É dado o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ px + qy = 2 \end{cases},$$

em que p e q são números reais.

a) Determine todos os valores de p e q para que o sistema seja possível e indeterminado (isto é, tenha mais do que uma solução).

b) Determine todos os valores de p e q para que o sistema tenha solução $(x; y)$ com $x = 0$.

c) Determine todos os valores de p e q para que o sistema não tenha solução.

119. ITA-SP 2019 Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem $n \times n$ inversíveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. $|\det(A)| = 1$

II. $A^T = A^{-1}$

III. $A + A^{-1}$ é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas III.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

120. FGV-RJ 2021 O sistema de equações $\begin{cases} x(m^2 - 1) - yn^2 = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$, nas incógnitas x e y, é impossível para valores de (m, n) cuja representação no plano cartesiano de eixos ortogonais é uma

a) elipse de focos (0, 0) e (1, 1).

b) circunferência de centro (1, 1) e raio 1.

c) circunferência de centro (0, 0) e raio 1.

d) parábola de foco (0, 0).

e) hipérbole de focos (−1, 0) e (1, 0).

BNCC em foco

EM13MAT301

1. Para otimizar seu dia, antes de começar um trabalho, um marceneiro cortou peças de 60 e 40 cm de comprimento, de vigas de madeira cujo comprimento total somava 138 m. Se no final dessa tarefa ele cortou 260 peças desses dois tamanhos, desconsiderando a quantidade que se perde ao cortá-las e que nenhuma peça tenha sido perdida, determine a quantidade de peças de 60 cm obtida.

a) 90
b) 120
c) 150
d) 170
e) 200

EM13MAT201

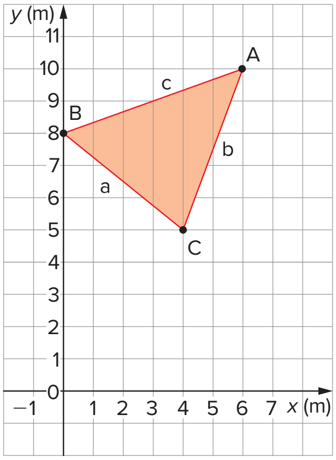
2. De modo geral, levantamento topográfico é a análise e descrição das características de uma região e pode ser dividido em:

- Levantamento topográfico PLANIMÉTRICO, compreendendo o conjunto de operações necessárias para a determinação de pontos e feições do terreno que serão projetados sobre um plano horizontal de referência através de suas coordenadas X e Y (representação bidimensional), e,

- Levantamento topográfico ALTIMÉTRICO, compreendendo o conjunto de operações necessárias para a determinação de pontos e feições do terreno que, além de serem projetados sobre um plano horizontal de referência, terão sua representação em relação a um plano de referência vertical ou de nível através de suas coordenadas X, Y e Z (representação tridimensional).

http://www2.uefs.br/geotec/topografia/apostilas/topografia(1).htm. Acesso em: 4 nov. 2021.

Em um dos resultados do levantamento topográfico de um terreno em que se pretende construir uma casa, podemos ver a forma do terreno e a projeção dos pontos referentes aos vértices desse terreno no plano, conforme imagem a seguir.



Com base nesse resultado, podemos afirmar que a área desse terreno é igual a:

a) 40 m^2
b) 13 m^2
c) 28 m^2
d) 9 m^2
e) 15 m^2

EM13MAT301

3. Um teatro recebeu 450 pessoas para assistirem a um musical, entre pagantes de entrada inteira e de meia entrada. No total, o valor arrecadado foi de R$ 11400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo que o preço do ingresso foi R$ 30,00 e que somente estudantes pagaram meia entrada, o número de estudantes que compareceram ao teatro foi:

a) 160
b) 260
c) 400
d) 60
e) 140

photomatz/
Shutterstock.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

6

Áreas das figuras planas

A necessidade de medir grandes extensões de terra talvez tenha sido o maior incentivo ao estudo da Geometria na Antiguidade. No antigo Egito, por exemplo, nas cheias do rio Nilo, a correnteza levava consigo todas as marcações dos limites entre duas propriedades, tornando necessário recalculá-los e demarcá-los novamente a cada ano.

Atualmente, há profissionais que utilizam a Geometria diariamente, seja em ambientes rurais, seja em urbanos: são os chamados agrimensores. Seus instrumentos de medição são a trena, que mede comprimentos, e o teodolito, que mensura ângulos verticais e horizontais.

A grandeza da superfície

Após o estudo das grandezas angulares e lineares, aprofundaremos nosso conhecimento sobre a grandeza relacionada a superfícies. Dos átomos aos planetas, tudo o que é concreto possui superfície, como as mesas, as casas e até o nosso corpo.

As superfícies podem ser planas ou curvas. Em ambos os casos, é possível medi-las e compará-las umas às outras de acordo com as medidas de sua grandeza, chamada de área.

Área é o nome da grandeza geométrica que avalia a extensão de uma superfície, e toda superfície possui uma área, que deve ser expressa por um número real positivo acompanhado de uma unidade de medida de área.

Neste capítulo, estudaremos como calcular as áreas de algumas superfícies planas.

Unidades de área

No Sistema Internacional de Unidades (SI), a principal unidade de medida adotada para expressar a área de uma superfície é o metro quadrado (m^2).

Assim como a unidade metro (m), usada para expressar a grandeza do comprimento, o metro quadrado também admite múltiplos e submúltiplos no SI:

O quilômetro quadrado: $1\ km^2 = 1\,000\,000\ m^2$

O hectômetro quadrado: $1\ hm^2 = 10\,000\ m^2$

O decâmetro quadrado: $1\ dam^2 = 100\ m^2$

O decímetro quadrado: $1\ dm^2 = 0{,}01\ m^2$

O centímetro quadrado: $1\ cm^2 = 0{,}0001\ m^2$

O milímetro quadrado: $1\ mm^2 = 0{,}000001\ m^2$

Perceba que $1\ m^2 = 10\,000\ cm^2$ e que $1\ cm^2 = 100\ mm^2$. Para compreender as transformações de unidades, observe os exemplos a seguir.

- 20 quilômetros quadrados em metros quadrados, considerando que 1 km = 1 000 m:

$$20\ km^2 = 20 \cdot (1\ km)^2$$
$$20\ km^2 = 20 \cdot (1\,000\ m)^2$$
$$20\ km^2 = 20 \cdot 1\,000^2\ m^2$$
$$20\ km^2 = 20 \cdot 1\,000\,000\ m^2$$
$$20km^2 = 20\,000\,000\ m^2$$

- 500 centímetros quadrados em metros quadrados, considerando que 1 cm = 0,01 m:

$$500\ cm^2 = 500 \cdot (1\ cm)^2$$
$$500\ cm^2 = 500 \cdot (0{,}01\ m)^2$$
$$500\ cm^2 = 500 \cdot (0{,}01)^2\ m^2$$
$$500\ cm^2 = 500 \cdot 0{,}0001\ m^2$$
$$500\ cm^2 = 0{,}05\ m^2$$

Outra unidade aceita no SI para expressar a extensão de uma superfície é o **are**, representado pela letra (**a**). O principal múltiplo dessa unidade é o **hectare** (**ha**), muito usado para expressar áreas de terrenos rurais:

$$1\ a = 100\ m^2$$
$$1\ ha = 10\,000\ m^2$$

! Atenção

Não há uma notação padronizada para a representação algébrica da área de uma superfície. Alguns estudiosos usam a letra **A** maiúscula, pois essa é a inicial da palavra "área"; outros usam a letra **S**, de "superfícies", pois apenas elas se relacionam à grandeza área.

De modo geral, quando há mais de uma área a ser representada algebricamente, as letras A ou S vêm acompanhadas de um índice, como A_1 e A_2 ou S_1 e S_2.

Os índices também podem ser figuras, letras ou siglas, como $S_{\triangle}$ e $S_{\odot}$ para áreas de um triângulo e de um círculo, S_P e S_L para áreas de um paralelogramo e de um losango ou, ainda, $S_{Trapézio}$ e S_{Setor} para áreas de um trapézio e de um setor circular.

No caso dos polígonos, podemos fazer a representação algébrica da área usando colchetes em torno da sucessão das letras que expressam seus vértices, seja no sentido horário, seja no anti-horário. Assim:

- Área do triângulo ABC = [ABC].
- Área do quadrilátero MNPQ = [MNPQ].
- Área do pentágono DEFGH = [DEFGH].

Exercícios resolvidos

1. O território da Rússia estende-se por dois continentes e cobre uma área de, aproximadamente, 17 milhões de quilômetros quadrados. Usando a notação científica, expresse a área do território russo em metros quadrados.

Resolução:

Sendo S a área do território russo:

$$S = 17\,000\,000\ km^2$$
$$S = 17 \cdot 10^6\ km^2$$
$$S = 1{,}7 \cdot 10^7 \cdot (1\ km)^2$$
$$S = 1{,}7 \cdot 10^7 \cdot (10^3\ m)^2$$
$$S = 1{,}7 \cdot 10^7 \cdot (10^3)^2\ m^2$$
$$S = 1{,}7 \cdot 10^7 \cdot 10^6\ m^2$$
$$S = 1{,}7 \cdot 10^{7+6}\ m^2$$
$$S = 1{,}7 \cdot 10^{13}\ m^2$$

2. Um terreno de 30 hectares é oferecido no interior do estado por R$ 960 000,00. Qual o preço do metro quadrado desse terreno?

Resolução:

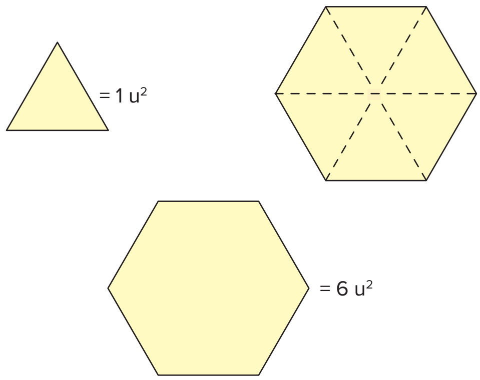
Como 30 ha equivale a $30 \cdot 10\,000\ m^2 = 300\,000\ m^2$, o preço do metro quadrado desse terreno é:

$$\frac{R\$\ 960000{,}00}{300000\ m^2} = R\$\ 3{,}20/m^2$$

Embora existam muitas opções de unidades para medir áreas, podemos resolver os problemas que tratam de comparações entre duas ou mais áreas adotando como unidade de medida a área de uma das figuras comparadas ou parte dela.

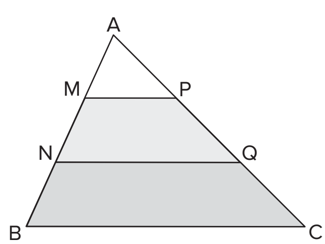
Quando adotamos, para resolver um problema, uma unidade de comparação que não pertence ao sistema métrico ou a outros sistemas, devemos representá-la por $\mathbf{u^2}$ ou, ainda, pela sigla **ua** (unidades de área).

Desse modo, podemos observar, por exemplo, que a área de um hexágono regular é igual a 6 vezes a área de um triângulo equilátero que tenha o mesmo lado do hexágono.



Exercícios resolvidos

3. Na figura a seguir, os pontos M e N dividem o lado $\overline{AB}$ em três partes congruentes, e os segmentos $\overline{MP}$ e $\overline{NQ}$ são paralelos à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC.

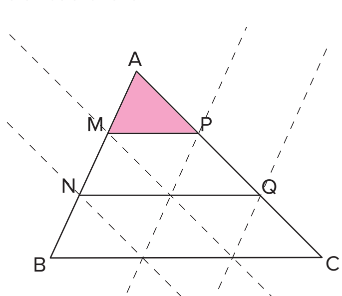


A razão entre as áreas dos trapézios MNQP e BNQC é igual a:

a) 0,55
b) 0,60
c) 0,75
d) 0,80
e) 0,85

Resolução:

Traçando retas paralelas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC pelos pontos M, N, P e Q, obtém-se uma figura composta do triângulo APM e de mais 8 triângulos congruentes a ele:



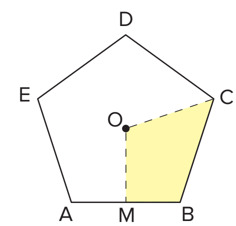
Adotando a área do triângulo AMP como unidade de área u^2, tem-se que as áreas dos trapézios medirão:

$$\begin{cases} [MNQP] = 3\,u^2 \\ [BNQC] = 5\,u^2 \end{cases}$$

Portanto, a razão entre essas áreas é $\dfrac{3\,u^2}{5\,u^2} = 0{,}60.$

Alternativa: B

4. A figura a seguir apresenta um pentágono regular com $8\ m^2$ de área.

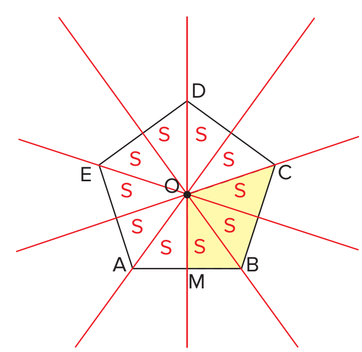


Se M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$ e O é o centro do pentágono, então a área do quadrilátero BCOM é igual a:

a) $2{,}0\ m^2$
b) $2{,}2\ m^2$
c) $2{,}4\ m^2$
d) $2{,}5\ m^2$
e) $3{,}0\ m^2$

Resolução:

Traçando todos os eixos de simetria do pentágono, tem-se:



Agora, adotando a área S de cada triângulo retângulo como unidade para a comparação das áreas do pentágono e do quadrilátero, tem-se que:

$$\frac{[BCOM]}{[ABCDE]} = \frac{3S}{10S}$$

Então, simplificando a unidade S na fração do segundo membro e substituindo o valor da área do pentágono:

$$\frac{[BCOM]}{8\ m^2} = \frac{3}{10}$$

$$[BCOM] = \frac{3 \cdot 8\ m^2}{10}$$

$$[BCOM] = 2{,}4\ m^2$$

Alternativa: C

FRENTE 3

Equivalência no plano

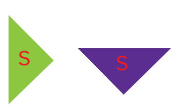
O conceito geométrico de equivalência entre figuras depende do número de dimensões das figuras mensuradas. Ângulos equivalentes têm a mesma medida, linhas equivalentes têm o mesmo comprimento, formas bidimensionais equivalentes têm a mesma área, e formas tridimensionais têm o mesmo volume. Desse modo, superfícies planas, polígonos, circunferências e outras formas bidimensionais fechadas são equivalentes quando cobrem regiões de mesma área no plano.

Embora figuras formadas pela justaposição de uma coleção de polígonos possam ter formatos muito diferentes, todas elas possuem a mesma área. Isso se deve ao fato de que os polígonos que compõem uma figura são congruentes aos polígonos que compõem as outras.

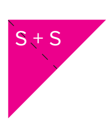
Tangram

Observe que as figuras mostradas na ilustração são obtidas pela mesma coleção de polígonos. Adotando como unidade a área S do menor deles, podemos afirmar que essa coleção é composta de:

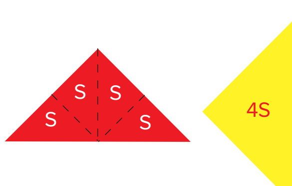
- Dois triângulos retângulos e isósceles pequenos com área S.



- Um triângulo retângulo e isósceles com área 2S.

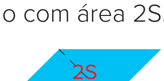


- Dois triângulos retângulos e isósceles grandes com área 4S.



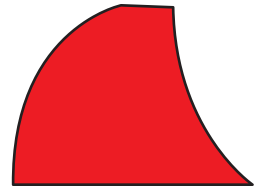
- Um quadrado com área 2S.

- Um paralelogramo com área 2S.



Princípio de Cavalieri

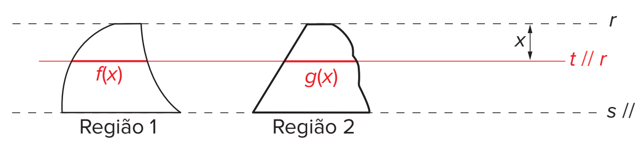
A ideia intuitiva de que as superfícies planas podem ser cobertas por uma infinidade de segmentos de reta paralelos, postos um ao lado do outro, é muito antiga.



Essa concepção está presente nos trabalhos de grandes pensadores da Antiguidade, como Eudoxo e Arquimedes, mas só foi formalizada nas obras do matemático italiano Bonaventura Cavalieri, que utilizou em seus estudos ferramentas matemáticas mais modernas, como os logaritmos e as funções trigonométricas.

Publicado em 1635, o livro *Nova Geometria dos indivisíveis contínuos*, de autoria desse italiano discípulo de Galileu, é considerado um dos precursores do cálculo integral.

Segundo o princípio de Cavalieri, dadas duas regiões planas inscritas em um mesmo par de retas paralelas r e s, sendo S_1 e S_2 suas respectivas áreas:



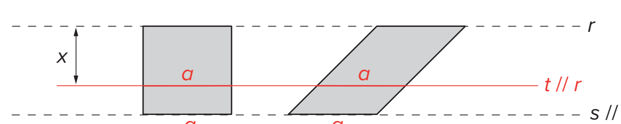
- Se toda reta t paralela a r e s interceptar as duas regiões, determinando segmentos de reta com o mesmo comprimento, então essas duas regiões têm a mesma área.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow S_1 = S_2$$

- Se toda reta t paralela a r e s interceptar as duas regiões, determinando segmentos de reta com a mesma razão, então as áreas dessas duas regiões também estão nessa razão.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = k \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = k$$

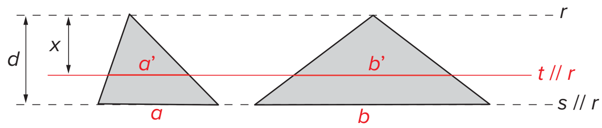
Considere que sejam dados um retângulo e um paralelogramo, ambos com bases de comprimento a e inscritos no mesmo par de retas paralelas, como mostra a figura.



Nesse caso, toda reta paralela a esse par de retas determina segmentos de comprimento a, tanto no retângulo quanto no paralelogramo, independentemente da distância x entre a terceira paralela t e a reta r, por exemplo. Portanto, pelo princípio de Cavalieri, um retângulo e um paralelogramo com bases congruentes e mesma altura possuem a mesma área.

$$S_{Retângulo} = S_{Paralelogramo}$$

Considere, agora, que sejam dados dois triângulos cujas bases tenham comprimentos a e b diferentes um do outro, mas que estejam inscritos no mesmo par de retas paralelas.



Nesse caso, toda reta paralela a r e s determina segmentos cujos comprimentos a' e b' são diretamente proporcionais aos comprimentos a e b das bases do triângulo, independentemente de qual seja a distância x entre a terceira paralela e a reta que contém as bases dos triângulos dados. Isso pode ser demonstrado da seguinte maneira:

- Sendo d a distância entre as retas r e s, pela semelhança entre os triângulos dados e os triângulos determinados pela terceira reta paralela t, tem-se:

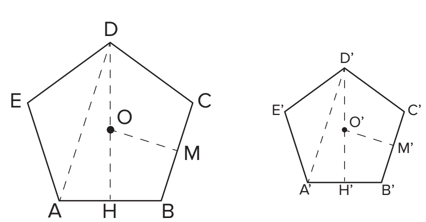
$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{a'} &= \frac{d}{x} \\ \frac{b}{b'} &= \frac{d}{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

- Portanto, pelo princípio de Cavalieri, a razão entre as áreas de dois triângulos com a mesma altura é igual à razão $\frac{a}{b}$ entre os comprimentos de suas bases.

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{a}{b}$$

Teorema da razão de semelhança entre figuras planas

Uma vez estabelecida uma correspondência entre os pontos de duas figuras planas, a relação de semelhança entre elas está garantida quando a divisão de quaisquer pares de comprimentos correspondentes, em determinada ordem, produzir sempre o mesmo quociente, o qual é denominado razão de semelhança.



Considerando dois pentágonos regulares de tamanhos diferentes e dividindo o comprimento do lado do maior pelo comprimento do lado do menor, encontra-se um quociente k:

$$\frac{AB}{A'B'} = k$$

Dividindo a altura do maior pela altura do menor, também se encontra o quociente k:

$$\frac{DH}{D'H'} = k$$

Dividindo o comprimento da diagonal do maior pelo comprimento da diagonal do menor, encontra-se o mesmo quociente k:

$$\frac{AD}{A'D'} = k$$

Dividindo o comprimento do apótema do maior pelo comprimento do apótema do menor, encontra-se novamente o quociente k:

$$\frac{OM}{O'M'} = k$$

O mesmo ocorre quando o perímetro do pentágono maior é dividido pelo perímetro do menor:

$$\frac{AB + BC + CD + DE + AE}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + A'E'} = k$$

Mas isso não acontece quando as áreas dos pentágonos são divididas uma pela outra. Nesse caso, se a área do pentágono maior for dividida pela do menor, o quociente produzido será k^2, ou seja, o quadrado da razão de semelhança.

$$\frac{[ABCDE]}{[A'B'C'D'E']} = k^2$$

Em outras palavras:

> Se duas figuras planas são semelhantes entre si e k é a razão dessa semelhança, então a razão entre as áreas dessas figuras é igual a k^2.

De acordo com esse teorema, se as medidas angulares forem mantidas, ao duplicarmos os lados de um polígono, quadruplicamos sua área, pois $2^2 = 4$. Se triplicarmos os lados, a área passará ao nônuplo de seu valor inicial, pois $3^2 = 9$, e assim por diante.

Exercício resolvido

5. O que acontece com a área de um retângulo quando aumentamos suas dimensões em 30%?

a) Aumenta exatamente 30%.
b) Aumenta aproximadamente 40%.
c) Aumenta aproximadamente 50%.
d) Aumenta exatamente 30%.
e) Aumenta aproximadamente 70%.

Resolução:

Como aumentamos as dimensões do retângulo em uma mesma proporção (30%), o retângulo inicial é semelhante ao retângulo obtido depois do aumento. Assim, sendo x o comprimento de um dos lados do retângulo original, o comprimento do lado correspondente no retângulo aumentado será $y = 130\% \cdot x$.
A razão de semelhança do retângulo aumentado para o retângulo original é:

$$k = \frac{y}{x} = \frac{130\% \cdot x}{100\% \cdot x} \Rightarrow k = 1{,}3$$

A razão entre a área do retângulo aumentado para a área do retângulo original é:

$$k^2 = (1{,}3)^2 = 1{,}69$$

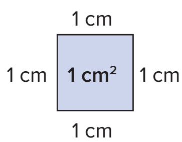
Portanto, a área do novo retângulo é 169% da área do retângulo original, o que indica um aumento de 69% (aproximadamente 70%) na área do retângulo original.
Alternativa: E

Fórmulas básicas para o cálculo de áreas

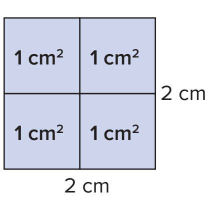
É possível determinar corretamente os valores de áreas de figuras planas complexas a partir de um número razoável de fórmulas algébricas que expressam as áreas das figuras mais básicas, como os triângulos e alguns quadriláteros.

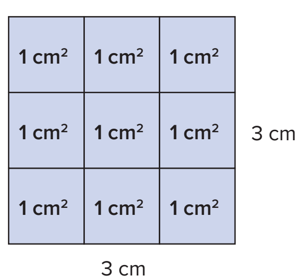
Área do quadrado

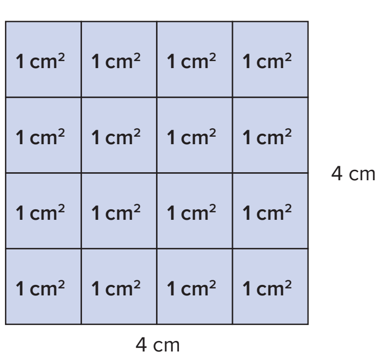
A principal unidade de medida de área do SI é o metro quadrado (m^2), que equivale à porção da superfície do plano coberta por um quadrado cujos lados têm 1 metro de comprimento. Da mesma forma, 1 centímetro quadrado equivale a um quadrado cujos lados têm 1 centímetro.



Então, usando pequenos quadrados com 1 cm de lado, é possível medir as áreas de quadrados maiores, em cm^2, apenas contando quantos quadrados pequenos cabem justapostos em seu interior.



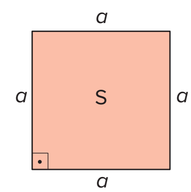




Lado do quadrado	Área do quadrado
1 cm	1 cm^2
2 cm	4 cm^2
3 cm	9 cm^2
4 cm	16 cm^2

O quadro apresentado nos permite induzir que a área da superfície delimitada pelos lados de um quadrado é dada pela segunda potência do comprimento de um de seus lados:

$$(1\text{ cm})^2 = 1\text{ cm}^2$$
$$(2\text{ cm})^2 = 4\text{ cm}^2$$
$$(3\text{ cm})^2 = 9\text{ cm}^2$$
$$(4\text{ cm})^2 = 16\text{ cm}^2$$
$$\vdots$$
$$(a\text{ cm})^2 = a^2\text{ cm}^2$$



$$S_{\text{Quadrado}} = a^2$$

Por esse motivo, as segundas potências dos números reais positivos são frequentemente chamadas de quadrados desses números.

Média quadrática

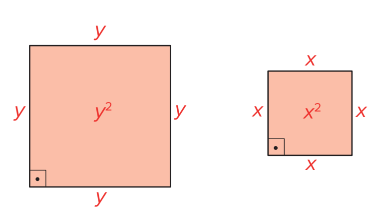
Entre dois valores, um grande e outro pequeno, cujas medidas podem variar no conjunto dos números reais positivos, existem infinitos valores médios. Muitos deles podem ser expressos algebricamente em função dos valores grande e pequeno, sendo chamados de médias. A média aritmética e a média quadrática são exemplos importantes.

Assim, dados os números reais x e y:

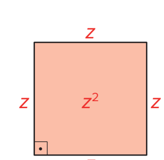
- A média aritmética de x e y é $\dfrac{x + y}{2}$.
- A média quadrática de x e y é $\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}}$.

O conceito de média quadrática de números reais é um dos mais usados no estudo da Estatística, sendo o fundamento principal de medidas de dispersão como a variância e o desvio padrão. Geometricamente, a média quadrática pode ser interpretada da seguinte maneira:

Considere os quadrados de lados x, y, com $x < y$.



Considere, agora, o quadrado de lado z cuja área é igual à média aritmética das áreas dos quadrados de lados x e y.



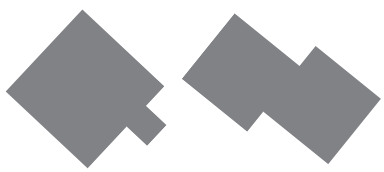
$$z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2}$$

Nesse caso, dizemos que o lado z do quadrado médio é a média quadrática dos lados x e y dos quadrados dados inicialmente:

$$z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}$$

Exercício resolvido

6. As figuras a seguir são compostas de dois quadrados cada.



Na primeira, um dos quadrados tem 5 cm de lado e o outro, 35 cm. Na segunda, os quadrados são congruentes. Determine o comprimento dos lados dos quadrados congruentes sabendo que as regiões do plano cobertas pelas duas figuras têm a mesma área.

Resolução:

Sendo x o comprimento, em centímetros, dos lados dos quadrados congruentes, considerando a igualdade entre as áreas da figura, temos:

$$x^2 + x^2 = 5^2 + 35^2$$
$$2x^2 = 25 + 1\,225$$
$$2x^2 = 1\,250$$
$$x^2 = 625 \Rightarrow x = 25$$

Portanto, o lados do quadrados medem 25 cm.

Saiba mais

Podemos estabelecer uma relação de ordem entre as médias aritmética e quadrática. Veja a seguir:

Sendo x e y dois números reais positivos, mesmo com $x < y$, tem-se que $(x - y)^2 > 0$.

Assim, pela identidade do trinômio quadrado perfeito:

$$x^2 - 2xy + y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 2xy$$

Somando $x^2 + y^2$ a ambos os membros:

$$x^2 + y^2 + x^2 + y^2 > 2xy + x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 > x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 > (x + y)^2$$

Dividindo a desigualdade por 4:

$$\frac{2x^2 + 2y^2}{4} > \frac{(x + y)^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} > \frac{(x + y)^2}{4}$$

Então, das raízes quadradas de cada termo:

$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} > \sqrt{\frac{(x + y)^2}{4}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} > \frac{x + y}{2}$$

Isso prova que a média quadrática de dois números reais positivos distintos é sempre maior que a média aritmética entre esses números.

Como a igualdade entre essas médias acontece quando $y = x$, é correto afirmar, de maneira genérica, que entre números reais positivos:

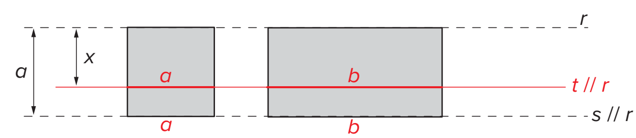
média quadrática $\geqslant$ média aritmética

Área do retângulo

Considere as seguintes figuras geométricas:

- Um quadrado de lado a.
- Um retângulo de base b e altura a.

Postas as figuras em um mesmo plano de modo que suas bases fiquem alinhadas, se uma reta paralela às bases interceptar ambas as figuras, ela determinará segmentos congruentes a essas bases.



Segundo o princípio de Cavalieri, a razão entre a área do quadrado e a área do retângulo deve ser igual à razão entre os comprimentos de suas bases. Assim:

$$\frac{S_{\text{Quadrado}}}{S_{\text{Retângulo}}} = \frac{a}{b}$$

Substituindo a área do quadrado:

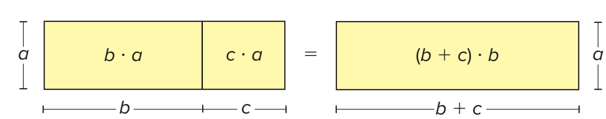
$$\frac{a^2}{S_{\text{Retângulo}}} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow a \cdot S_{\text{Retângulo}} = a^2 \cdot b$$

Como $a \neq 0$, dividindo por a toda a expressão, temos:

$$S_{\text{Retângulo}} = a \cdot b$$

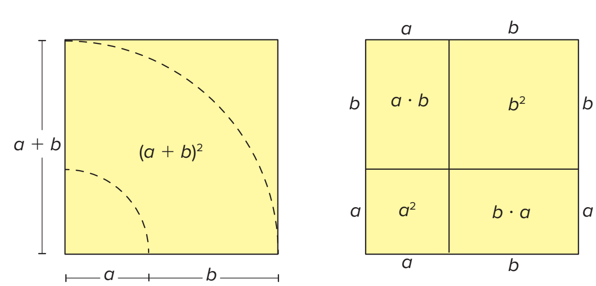
Saiba mais

Muitas expressões algébricas oriundas da propriedade distributiva podem ser representadas geometricamente pelas relações entre as áreas de retângulos justapostos.



$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a$ ou $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$

A identidade entre o quadrado da soma e o trinômio quadrado perfeito também pode ser representada geometricamente por justaposição de quadrados e retângulos.



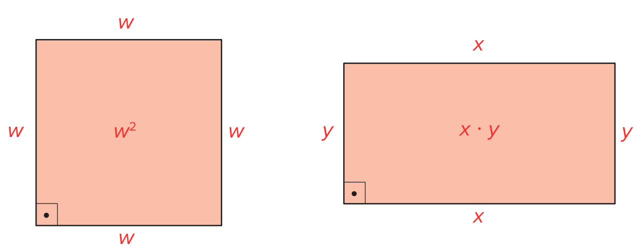
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

FRENTE 3

Média geométrica

Outro importante valor médio entre dois valores reais positivos é conhecido como média geométrica. Algebricamente, a média geométrica de dois números reais positivos x e y é expressa pela raiz quadrada positiva do produto de seus valores, ou seja, $+\sqrt[2]{x \cdot y}$ ou, simplesmente, $\sqrt{x \cdot y}$.

Geometricamente, essa média corresponde ao comprimento do lado de um quadrado cuja área coincide com a de um retângulo de dimensões x e y. Assim, sendo w o comprimento do lado do quadrado cuja área é igual à de um retângulo como o da figura a seguir, então:



$$w^2 = x \cdot y$$

Nesse caso, dizemos que w é a média geométrica de x e y:

$$w = \sqrt{x \cdot y}$$

Saiba mais

Podemos estabelecer uma relação de ordem entre as médias aritmética e geométrica. Veja a seguir:

Sendo x e y dois números reais positivos, mesmo com $x < y$, tem-se que $\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 > 0$

Assim, pela identidade do trinômio quadrado perfeito:

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} + \left(\sqrt{y}\right)^2 > 0$$
$$x - 2\sqrt{x \cdot y} + y > 0$$
$$x + y > 2\sqrt{x \cdot y}$$

Dividindo a desigualdade por 2:

$$\frac{x+y}{2} > \frac{2\sqrt{x \cdot y}}{2} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} > \sqrt{x \cdot y}$$

Isso prova que a média aritmética de dois números reais positivos distintos é sempre maior que a média geométrica entre esses números.

Novamente, como a igualdade entre as médias acontece quando $y = x$, é correto afirmar, de maneira genérica, que entre números reais positivos:

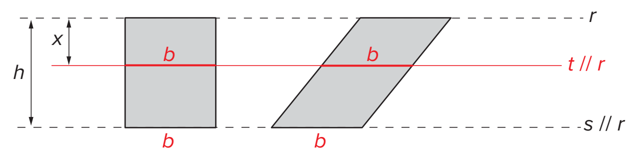
média quadrática ⩾ média aritmética ⩾ média geométrica

Área do paralelogramo

Considere as seguintes figuras geométricas:

- Um retângulo de base b e altura h.
- Um paralelogramo de base b e altura h.

Novamente, postas as figuras em um mesmo plano de modo que suas bases fiquem alinhadas, se uma reta paralela às bases interceptar ambas as figuras, ela determinará segmentos congruentes a essas bases.



Segundo o princípio de Cavalieri, ambas as figuras possuem a mesma área. Portanto, sendo $S_{\text{Retângulo}}$ e $S_{\text{Paralelogramo}}$, respectivamente, as áreas do retângulo e do paralelogramo, temos que:

$$S_{\text{Retângulo}} = S_{\text{Paralelogramo}}$$

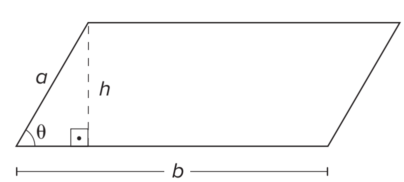
Substituindo a área do retângulo:

$$S_{\text{Paralelogramo}} = b \cdot h$$

O fato de a altura do retângulo ter o mesmo comprimento de dois de seus lados garante que sua área seja equivalente ao produto dos comprimentos de dois lados adjacentes. No entanto, no caso dos paralelogramos com inclinações diferentes de 90°, essa regra não se aplica.

Podemos expressar a área de um paralelogramo em função dos comprimentos de dois lados adjacentes considerando a medida θ do ângulo formado por esses lados e um pouco de trigonometria.

Traçando uma altura relativa à base cuja extremidade seja um dos vértices do paralelogramo, obtém-se um triângulo retângulo em que a hipotenusa é um dos lados do paralelogramo e a altura é o cateto oposto ao ângulo agudo de medida θ.



Assim, nesse triângulo retângulo, verificamos que $\text{sen}(\theta) = \dfrac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \text{sen}(\theta)$.

Como todos os ângulos internos de um paralelogramo possuem o mesmo seno, com $h = a \cdot \text{sen}(\theta)$, é possível expressar a área do paralelogramo em função dos comprimentos de dois lados adjacentes e da medida do ângulo que eles formam:

$$S_{\text{Paralelogramo}} = a \cdot b \cdot \text{sen}(\theta)$$

! Atenção

A fórmula para a área do paralelogramo é dada por:

$$S_{\text{Paralelogramo}} = a \cdot b \cdot \text{sen}(\theta),$$

que acaba de ser deduzida, também pode ser usada como referência para o cálculo da área dos retângulos, losangos e quadrados.

- Os ângulos dos retângulos são retos, logo:

$$S_{\text{Retângulo}} = a \cdot b \cdot \text{sen}(90°)$$
$$S_{\text{Retângulo}} = a \cdot b \cdot 1$$
$$S_{\text{Retângulo}} = a \cdot b$$

- Os lados de um losango têm o mesmo comprimento a = b, assim:

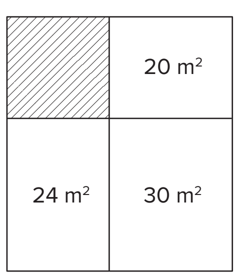
$$S_{\text{Losango}} = a \cdot a \cdot \text{sen}(\theta)$$
$$S_{\text{Losango}} = a^2 \cdot \text{sen}(\theta)$$

- Os lados de um quadrado têm o mesmo comprimento e os ângulos são retos, então:

$$S_{\text{Quadrado}} = a \cdot a \cdot \text{sen}(90°)$$
$$S_{\text{Quadrado}} = a^2 \cdot 1$$
$$S_{\text{Quadrado}} = a^2$$

Exercícios resolvidos

7. Na figura a seguir, o retângulo maior está dividido em três regiões retangulares e a região hachurada é quadrada.

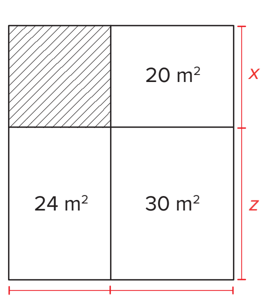


Considerando as áreas indicadas na figura, a área da região quadrada deve ser de:

a) 12 m^2
b) 16 m^2
c) 18 m^2
d) 22 m^2
e) 26 m^2

Resolução:

Sejam x, y e z as medidas, em metros, dos lados do quadrado e dos retângulos, como mostra a figura:



Assim, das áreas das regiões retangulares, temos as equações:
$$\begin{cases} x \cdot z = 24 & \text{(I)} \\ y \cdot z = 30 & \text{(II)} \\ y \cdot x = 20 & \text{(III)} \end{cases}$$

Multiplicando as equações (I) e (III), obtemos:

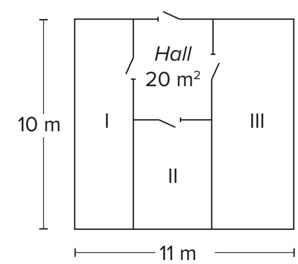
$$x^2 \cdot y \cdot z = 24 \cdot 20$$

Substituindo $y \cdot z$ pelo valor indicado na equação (II):

$$x^2 \cdot 30 = 480$$

Portanto, $x^2 = 16$, ou seja, a área da região quadrada é de 16 m^2.
Alternativa: B

8. Enem Em uma empresa, existe um galpão que precisa ser dividido em três depósitos e um *hall* de entrada de 20 m^2, conforme a figura a seguir. Os depósitos I, II e III serão construídos para o armazenamento de, respectivamente, 90, 60 e 120 fardos de igual volume, e suas áreas devem ser proporcionais a essas capacidades.



A largura do depósito III deve ser, em metros, igual a:

a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4 **e)** 5

Resolução:

Como as áreas A_I, A_{II} e A_{III} devem ser proporcionais aos números 90, 60 e 120, temos que:

$$\frac{A_I}{90} = \frac{A_{II}}{60} = \frac{A_{III}}{120} = k \Rightarrow \begin{cases} A_I = 90k \\ A_{II} = 60k \\ A_{III} = 120k \end{cases}$$

Então, como $A_I + A_{II} + A_{III} = (11 \cdot 10 - 20)$ m^2, temos que:

$$90k + 60k + 120k = (110 - 20)$$
$$270k = 90$$
$$3k = 1$$

Sendo x a largura do depósito III, temos que:

$$x \cdot 10 = 120k = 40 \cdot 3k = 40 \cdot 1 = 40 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x = 40 \Rightarrow x = 4$$

Logo, a largura do depósito mede 4 metros.
Alternativa: D

9. Determine a área de um paralelogramo cujos lados medem 5 cm e 8 cm e os ângulos internos medem 30° e 150°.

Resolução:

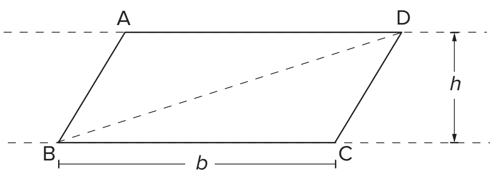
Sendo S a área do paralelogramo:

$$S = 5 \cdot 8 \cdot \text{sen}(30°) = 40 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow S = 20$$

Logo, a área do paralelogramo mede 20 cm^2.

Área do triângulo a partir do paralelogramo

O traçado de qualquer diagonal de um paralelogramo determina um par de triângulos congruentes.



$$\triangle ABD \cong \triangle CDB$$

Essa congruência se justifica pelo caso LLL, uma vez que os lados opostos de um paralelogramo têm o mesmo comprimento e que a diagonal traçada é lado comum aos triângulos determinados.

Desse modo, como figuras congruentes possuem área de mesma medida, podemos observar que a área do paralelogramo equivale ao dobro da área de um dos triângulos. Assim, sendo $S_{\text{Triângulo}}$ e $S_{\text{Paralelogramo}}$, respectivamente, as áreas do triângulo e do paralelogramo, tem-se:

$$\begin{aligned} 2 \cdot S_{\text{Triângulo}} &= S_{\text{Paralelogramo}} \\ 2 \cdot S_{\text{Triângulo}} &= b \cdot h \\ S_{\text{Triângulo}} &= \frac{b \cdot h}{2} \end{aligned}$$

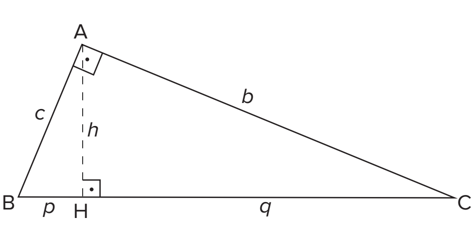
Outra maneira de representar a expressão para a área de um triângulo em função de um de seus lados e da altura correspondente é:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$

Nesse caso, quando os valores de b ou h são fracionários, evitam-se as frações de frações.

Relações de equivalência no triângulo retângulo

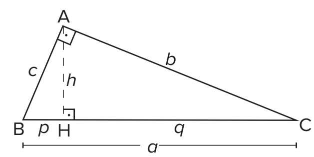
Também conhecidas como relações métricas, as expressões a seguir, já estudadas no capítulo 3, também dizem respeito a equivalências de áreas.

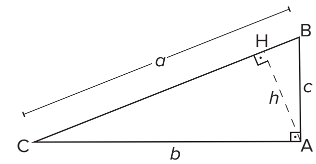


$$\begin{cases} h^2 = p \cdot q \\ b^2 = a \cdot q \\ c^2 = a \cdot p \end{cases}$$

Qualquer um dos lados do triângulo pode ser considerado base para o cálculo da área. Assim, a metade do produto da base pela altura resultará na área desse triângulo, desde que seja usada sempre a altura relativa à base escolhida.

Particularmente no caso do triângulo retângulo, quando se escolhe um dos catetos como base, a medida do outro torna-se a altura relativa.





Por esse motivo, sendo h a medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo de lados com medidas a, b e c, a área desse triângulo pode ser expressa tanto por $\frac{a \cdot h}{2}$ quanto por $\frac{b \cdot c}{2}$. Portanto:

$$\frac{a \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \Leftrightarrow a \cdot h = b \cdot c$$

Essas e as outras relações métricas do triângulo retângulo que foram estudadas no capítulo 3 e demonstradas a partir da semelhança de triângulos também podem ser compreendidas como relações de equivalência entre áreas.

Assim, $a \cdot h = b \cdot c$ é consequência da área do triângulo retângulo, independentemente do lado que se escolhe como base para o cálculo.

Veja como interpretar as outras relações:

- $b^2 = a \cdot q$ significa que a área de um quadrado de lado b equivale à área de um retângulo de dimensões a e q.
- $c^2 = a \cdot p$ significa que a área de um quadrado de lado c equivale à área de um retângulo de dimensões a e p.
- $h^2 = p \cdot q$ significa que a área de um quadrado de lado h equivale à área de um retângulo de dimensões p e q.

As três relações apresentadas também podem ser enunciadas em termos de média geométrica por dois teoremas:

I. Cada cateto de um triângulo retângulo tem medida igual à média geométrica entre as medidas de sua projeção na hipotenusa e da própria hipotenusa.

$$b = \sqrt{a \cdot q} \qquad c = \sqrt{a \cdot p}$$

II. A medida da altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à média geométrica entre as medidas das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$$h = \sqrt{p \cdot q}$$

Saiba mais

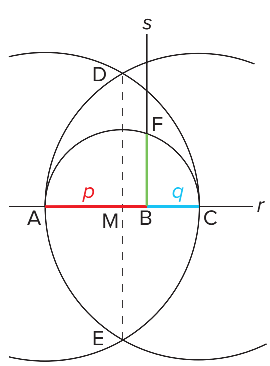
No estudo da construção geométrica, a quadratura consiste em determinar um segmento de reta que seja lado de um quadrado com a mesma área de outra figura, como triângulos, outros quadriláteros, polígonos e até círculos. O problema da quadratura é bastante desafiador, e, entre as principais contribuições do seu estudo, estão os processos para obter a média geométrica de dois segmentos usando apenas régua, compasso, papel e lápis. Esses processos são fundamentados nas relações de equivalência no triângulo retângulo.

Dados os segmentos de reta de comprimentos p e q, uma maneira de obter sua média geométrica com régua e compasso de acordo com a expressão $h^2 = p \cdot q$, por exemplo, consiste em efetuar os seguintes passos:

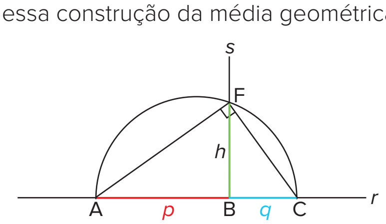
1. Construir sobre uma mesma reta r os segmentos consecutivos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ com medidas $AB = p$ e $BC = q$.
2. Traçar uma reta s perpendicular a r pelo ponto B.
3. Construir as circunferências de centro em A e raio AC e de centro em C e raio CA, obtendo os pontos D e E.
4. Traçar a reta $\overleftrightarrow{DE}$, obtendo o ponto M sobre a reta r.
5. Traçar uma semicircunferência de centro M e raio MA, obtendo o ponto F sobre a reta s.

Feitas essas construções, o comprimento do segmento $\overline{BF}$ deverá ser igual à média geométrica dos comprimentos p e q.

Com $p > q$ e o ponto C situado fora do segmento $\overline{AB}$, uma figura que representa corretamente o desenho dessa solução é:



Como o triângulo AFC está inscrito na semicircunferência de diâmetro AC, conclui-se que se trata de um triângulo retângulo de hipotenusa $\overline{AC}$. Então, traçando seus catetos, pode-se observar como a relação métrica $h^2 = p \cdot q$ justifica essa construção da média geométrica.



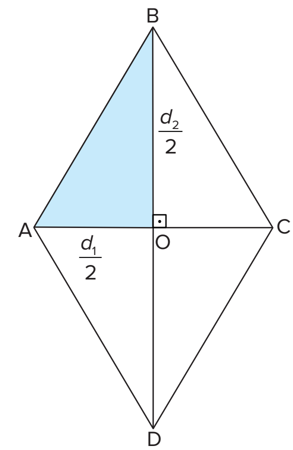
Assim, quanto mais precisas forem as construções feitas com os instrumentos de desenho, mais próxima a medida h do segmento $\overline{BF}$ estará do lado do quadrado cuja área equivale à de um retângulo de lados p e q.

Esse processo pode ser usado para efetuar a quadratura de qualquer polígono. A impossibilidade da quadratura do círculo foi demonstrada no final do século XIX como resultado dos trabalhos de Carl Friedrich Gauss, Pierre Laurent Wantzel e Ferdinand von Lindemann.

Área do losango

O losango também é um paralelogramo, portanto sua área também pode ser calculada multiplicando-se o comprimento das medidas de sua base pela sua altura, que é igual à distância entre dois lados opostos.

Mas, como todos os lados de um losango possuem o mesmo comprimento, as diagonais estão contidas em seus dois eixos de simetria, de modo que o traçado delas determina quatro triângulos congruentes justapostos em seu interior.



$$\triangle AOB \cong \triangle BOC \cong \triangle COD \cong \triangle AOD$$

Cada um desses triângulos é retângulo no ponto de cruzamento das diagonais do losango, e os catetos desses triângulos têm a metade do comprimento dessas diagonais. Assim, a área de cada um dos triângulos pode ser expressa, em função de seus catetos, por:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2}$$

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{8}$$

Como o losango é formado por quatro triângulos congruentes:

$$S_{\text{Losango}} = 4 \cdot S_{\text{Triângulo}}$$

$$S_{\text{Losango}} = 4 \cdot \frac{d_1 \cdot d_2}{8}$$

Portanto, a área do losango também pode ser expressa, em função de suas diagonais, por:

$$S_{\text{Losango}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Exercício resolvido

10. Qual a área, em metros quadrados, de um losango com perímetro de 80 cm e cujos comprimentos das diagonais somam 50 cm?

a) 2,25 m²

b) 0,45 m²

c) 0,225 m²

d) 0,045 m²

e) 0,0225 m²

Resolução:

Cada lado desse losango mede 80 : 4 = 20 cm.
Sendo x e y os comprimentos, em centímetros, das diagonais do losango, tem-se $x + y = 50$. Pelo teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 20^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 400 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1600$$

Elevando ambos os membros da equação $x + y = 50$ ao quadrado:

$$(x + y)^2 = 50^2 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 2\,500$$

Substituindo a soma dos quadrados de x e y:

$$1600 + 2xy = 2\,500 \Rightarrow 2xy = 900$$

Dividindo esta última equação por 4, obtemos:

$$\frac{2xy}{4} = \frac{900}{4} \Rightarrow \frac{xy}{2} = 225$$

Portanto, a área do losango é 225 cm^2.
Convertendo para metros quadrados:

$$225 \cdot (0{,}01\text{ m})^2 = 225 \cdot 0{,}0001\text{ m}^2 = 0{,}0225\text{ m}^2$$

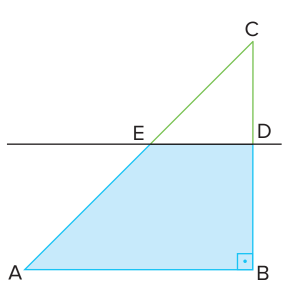
Alternativa: E

Área do trapézio

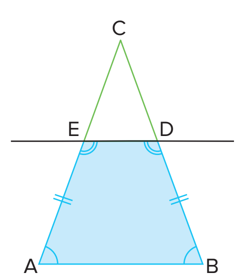
Trapézios são quadriláteros que possuem um par de lados opostos paralelos, os quais são denominados bases do trapézio. Todo trapézio pode ser obtido de um triângulo; para isso, deve-se traçar uma reta que seja paralela a um dos lados do triângulo e que intercepte os outros dois em pontos distintos. Por esse motivo, os trapézios são classificados da mesma forma que alguns triângulos.

Assim, dado um triângulo ABC e dois pontos D e E sobre os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, de modo que a reta $\overleftrightarrow{DE}$ seja paralela ao lado $\overline{AB}$, o quadrilátero ABDE obtido pode ser um:

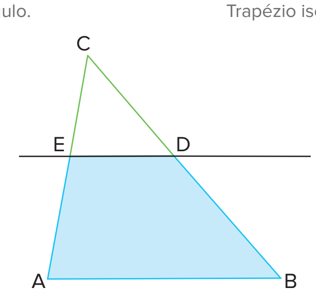
- trapézio retângulo se ABC for um triângulo retângulo.
- trapézio isósceles se ABC for um triângulo isósceles.
- trapézio escaleno se ABC for um triângulo escaleno.



Trapézio retângulo.



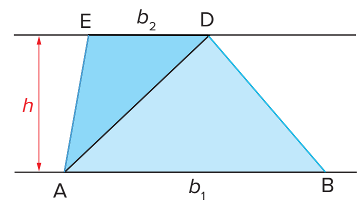
Trapézio isósceles.



Trapézio escaleno.

Com essa construção, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, paralelos, são as bases do trapézio, e a distância entre elas é a altura desse trapézio.

Desse modo, traçando uma das diagonais de um trapézio, os triângulos obtidos terão a mesma altura do trapézio, e cada um terá uma das bases do quadrilátero.



Sendo b_1 = AB e b_2 = ED os comprimentos das bases do trapézio e h a medida de sua altura, a área do triângulo ABD é $S_{\Delta 1} = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h$, e a área do triângulo ADE é $S_{\Delta 2} = \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h$. Portanto, a área do trapézio pode ser calculada pela adição dessas áreas:

$$S_{\text{Trapézio}} = S_{\Delta 1} + S_{\Delta 2}$$

$$S_{\text{Trapézio}} = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot h + \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot h$$

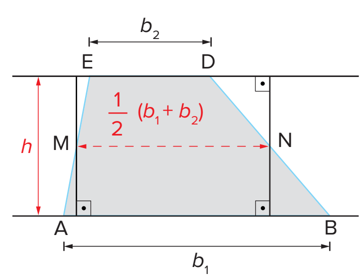
Colocando em evidência os fatores comuns às áreas dos triângulos, temos a expressão:

$$S_{\text{Trapézio}} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (b_1 + b_2)$$

Portanto, a área de um trapézio pode ser calculada como o produto entre a soma das bases e a metade da altura:

$$\boxed{S_{\text{Trapézio}} = (b_1 + b_2) \cdot \frac{h}{2}}$$

Reorganizando os termos da expressão, percebe-se que a área S_T também é igual ao produto da altura pela base média do trapézio.



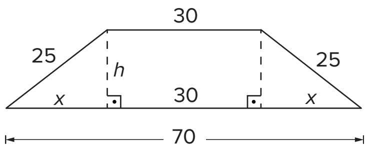
$$S_{\text{Trapézio}} = \left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right) \cdot h$$

Exercício resolvido

11. Determine a área do trapézio cujos lados paralelos medem 30 cm e 70 cm e os lados não paralelos medem 25 cm cada.

Resolução:

Como os lados não paralelos do trapézio têm a mesma medida, trata-se de um trapézio isósceles, como mostra a figura:



Traçadas as alturas com extremidades nos vértices da base menor, o trapézio fica dividido em duas regiões triangulares congruentes e uma retangular. Assim, na base maior do trapézio, observamos que:

$$x + 30 + x = 70 \Rightarrow x = 20$$

Sendo $h > 0$, a medida em centímetros da altura desse trapézio, pelo teorema de Pitágoras, é:

$$x^2 + h^2 = 25^2$$
$$20^2 + h^2 = 25^2$$
$$h^2 = 625 - 400 = 225$$
$$h = 15$$

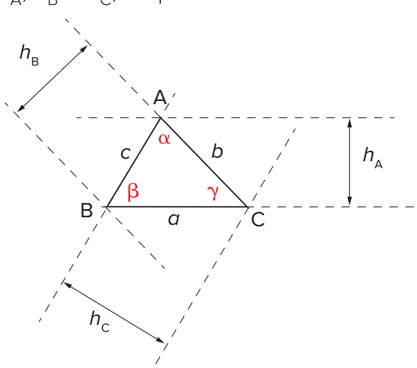
Portanto, a área do trapézio é:

$$S_{\text{Trapézio}} = \left(\frac{30 + 70}{2}\right) \cdot 15 = 750$$

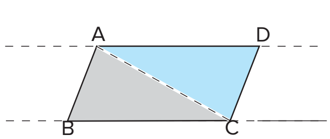
Logo, a área do trapézio é igual a 750 cm^2.

Área do triângulo

Triângulos são formas geométricas fechadas dotadas de três lados, três ângulos internos e três alturas. A figura a seguir mostra um triângulo ABC de ângulos internos α, β e γ, lados de medidas a, b e c e alturas relativas com medidas h_A, h_B e h_C, respectivamente:



Como todo triângulo pode ser obtido de um paralelogramo pelo traçado de uma de suas diagonais, conforme vimos anteriormente, e cada diagonal divide o paralelogramo em duas regiões congruentes, a área de cada triângulo originado dessa construção pode ser expressa como a metade da área do paralelogramo dividido.



$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot S_{\text{Paralelogramo}}$$

Fórmulas básicas

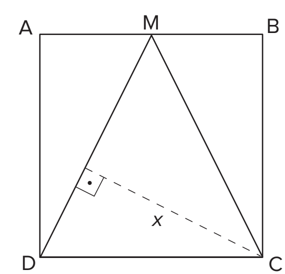
Considerando que a área de um paralelogramo equivale ao produto da distância entre dois lados paralelos pelo comprimento de um desses lados, a área do triângulo pode ser expressa como a metade do produto de qualquer um de seus lados pela distância desse lado ao vértice oposto. Assim:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_A \qquad S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_B$$

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_C$$

Exercício resolvido

12. Nesta figura, ABCD é um quadrado cujos lados medem 20 cm e M é o ponto médio do lado $\overline{AB}$. Determine a distância x do ponto C ao segmento $\overline{DM}$.



Resolução:

Como o triângulo CMD tem a mesma base e altura do quadrado ABCD, a área desse triângulo mede:

$[CMD] = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 = 200$, isto é, 200 cm^2.

Como M é ponto médio do lado $\overline{AB}$, pelo teorema de Pitágoras, no triângulo AMD, temos:

$$DM^2 = AM^2 + AD^2$$
$$DM^2 = 10^2 + 20^2$$
$$DM^2 = 100 + 400$$
$$DM^2 = 500$$
$$DM = +\sqrt{500}$$
$$DM = 10\sqrt{5}$$

Assim, $DM = 10\sqrt{5}$ cm, e, adotando o lado $\overline{DM}$ como base do triângulo CDM, sua área pode ser expressa por:

$$[CMD] = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{5} \cdot x$$

Portanto:

$$200 = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{5} \cdot x$$
$$x = \frac{40}{\sqrt{5}}$$

Racionalizando o denominador dessa fração, obtemos:

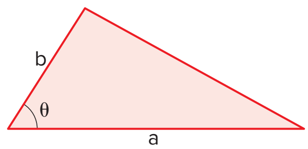
$$x = \frac{40}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{40\sqrt{5}}{5} = 8\sqrt{5}$$

Logo, a altura do triângulo mede $8\sqrt{5}$ cm.

FRENTE 3

Fórmulas trigonométricas da área de triângulos

Considerando que a área de um paralelogramo equivale ao produto dos comprimentos de dois lados adjacentes pelo seno do ângulo formado por eles, a área do triângulo também pode ser expressa como a metade do produto de dois de seus lados e do seno do ângulo formado por eles. Assim:



$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\,(\theta)$$

Exercícios resolvidos

13. A área do triângulo ABC, em que o ângulo interno de vértice A mede 30°, o lado $\overline{AB}$ mede 9 cm e o lado $\overline{AC}$ mede 10 cm, é igual a:

a) 90 cm2

b) $45\sqrt{3}$ cm^2

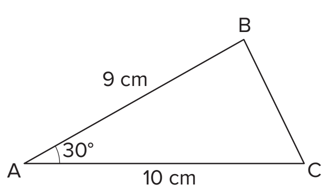
c) 45 cm^2

d) $\frac{45\sqrt{2}}{2}$ cm2

e) 22,5 cm^2

Resolução:

Uma figura de acordo com o enunciado é:



A área desse triângulo equivale a:

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \text{sen}\,(30°)$$

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}$$

$$[ABC] = 22{,}5$$

Logo, a área do triângulo ABC vale 22,5 cm^2.
Alternativa: E

14. A respeito da área do triângulo ABC, em que o ângulo interno de vértice A mede 60°, o lado $\overline{AB}$ mede 8 cm, e o lado $\overline{BC}$ mede 7 cm, pode-se afirmar que:

a) é maior do que $8\sqrt{3}$ cm^2.

b) é menor do que $8\sqrt{3}$ cm^2.

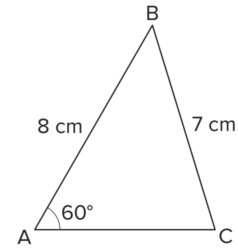
c) é igual a $4\sqrt{3}$ cm^2.

d) há duas possibilidades que diferem de $4\sqrt{3}$ cm^2 uma da outra.

e) há duas possibilidades que diferem de $8\sqrt{3}$ cm^2 uma da outra.

Resolução:

Uma figura de acordo com o enunciado é:



Sendo x o comprimento, em centímetros, do lado $\overline{AC}$, pelo teorema dos cossenos, tem-se:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos\,(60°)$$

$$7^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$

$$49 = 64 + x^2 \cdot 8x$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \nearrow x_1 = 5 \\ \searrow x_2 = 3 \end{array}$$

Como x_1 e x_2 são positivos, há duas possibilidades para a área desse triângulo:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \cdot \text{sen}\,(60°) = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

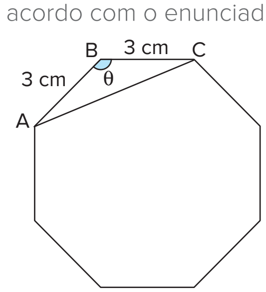
$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 \cdot \text{sen}\,(60°) = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

Essas áreas diferem de $S_1 - S_2 = 10\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
Assim, a diferença entre as áreas é de $4\sqrt{3}$ cm^2.
Alternativa: D

15. Se A, B e C são vértices consecutivos de um octógono regular de lados 3 cm, qual deve ser a área do triângulo ABC?

Resolução:

Uma figura de acordo com o enunciado é:



Sendo θ a medida, em graus, do ângulo interno do octógono regular, adotando $n = 8$ na expressão $\theta = \frac{(n-2) \cdot 180°}{n}$, temos que $\theta = \frac{(8-2) \cdot 180°}{8} = 135°$.

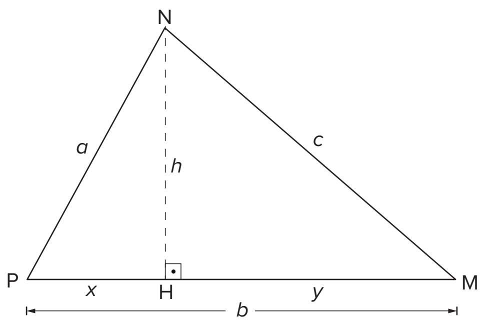
Como $\text{sen}\,(135°) = \text{sen}\,(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, a área do triângulo ABC equivale a:

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \text{sen}\,(135°) = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

Logo, a área do triângulo ABC é de $\frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Fórmula de Heron

A medida h da altura relativa à base b de um triângulo cujos lados medem a, b e c pode ser calculada resolvendo-se um sistema de equações provenientes da aplicação do teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos obtidos pelo traçado dessa altura:



Sendo x e y as projeções ortogonais dos lados de medidas a e c sobre a base do triângulo, temos:

$$\begin{cases} a^2 = x^2 + h^2 \\ b = x + y \\ c^2 = y^2 + h^2 \end{cases}$$

Da segunda equação do sistema, temos que $y = b - x$. Assim, substituindo y na terceira equação:

$$c^2 = (b - x)^2 + h^2$$

$$c^2 = b^2 - 2bx + x^2 + h^2$$

Da primeira equação do sistema, temos que $a^2 = x^2 + h^2$. Assim, substituindo $x^2 + h^2$ na equação anterior:

$$c^2 = b^2 - 2bx + \underbrace{x^2 + h^2}_{a^2}$$

$$c^2 = b^2 - 2bx + a^2$$

$$2bx = a^2 + b^2 - c^2$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$$

Substituindo x na primeira equação do sistema, teremos:

$$\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}\right)^2 + h^2 = a^2$$

Para facilitar a notação **dos próximos passos**, vamos indicar os quadrados dos lados a, b e c do triângulo da seguinte maneira: $\begin{cases} A = a^2 \\ B = b^2 \\ C = c^2 \end{cases}$

Desse modo:

$$h^2 + \left(\frac{(A + B) - C}{2b}\right)^2 = A$$

$$h^2 + \frac{(A + B)^2 - 2(A + B)C + C^2}{4b^2} = A$$

$$h^2 + \frac{A^2 + 2AB + B^2 - 2AC - 2BC + C^2}{4B} = A$$

$$\frac{4Bh^2 + A^2 + 2AB + B^2 - 2AC - 2BC + C^2}{4B} = A$$

$$4Bh^2 + A^2 + 2AB + B^2 - 2AC + 2BC + C^2 = 4AB$$

$$4Bh^2 = 4AB - A^2 - 2AB - B^2 + 2AC + 2BC - C^2$$

$$4Bh^2 = 2AC + 2BC - C^2 - A^2 + 2AB - B^2$$

Separando as parcelas $2AC + 2BC = AC + BC + AC + BC$ e fatorando o trinômio quadrado perfeito formado pelos três últimos termos da expressão anterior, teremos:

$$4Bh^2 = AC + BC + AC + BC - C^2 - (A - B)^2$$

Podemos dar continuidade ao processo de fatoração usando o artifício algébrico de somar e subtrair o termo $2abC$ entre cada par de parcelas $AC + BC$:

$$4Bh^2 = AC + 2abC + BC + AC - 2abC + BC - C^2 - (A - B)^2$$

$$4Bh^2 = C(A + 2ab + B) + C(A - 2ab + B) - C^2 - (A - B)^2$$

Substituindo $A = a^2$ e $B = b^2$ no segundo membro da última expressão:

$$4Bh^2 = C\underbrace{(a^2 + 2ab + b^2)} + C\underbrace{(a^2 - 2ab + b^2)} - C^2 - (a^2 - b^2)^2$$

$$4Bh^2 = C(a + b)^2 + C(a - b)^2 - C^2 - \overbrace{[(a - b)(a + b)]}^2$$

Reorganizando os termos do segundo membro:

$$4Bh^2 = \underbrace{C(a - b)^2 - C^2} - \underbrace{(a - b)^2(a + b)^2 + C(a + b)^2}$$

$$4Bh^2 = C[(a - b)^2 - C] - (a + b)^2[(a - b)^2 - C]$$

$$4Bh^2 = [(a - b)^2 - C]\,[C - (a + b)^2]$$

Substituindo $C = c^2$:

$$4Bh^2 = [(a - b)^2 - c^2][c^2 - (a + b)^2]$$

$$4Bh^2 = [(a - b) + c][(a - b) - c][c + (a + b)][c - (a + b)]$$

$$4Bh^2 = [a - b + c][a - b - c][c + a + b][c - a - b]$$

Multiplicando por (-1) as expressões no segundo e quarto pares de colchetes:

$$4Bh^2 = [a - b + c][-a + b + c][c + a + b][-c + a + b]$$

Reorganizando os fatores do segundo membro e as parcelas de alguns colchetes:

$$4Bh^2 = [a + b + c][-a + b + c][a - b + c][a + b - c]$$

Fazendo $a + b + c = 2p$, teremos:

$$\begin{cases} -a + b + c = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a) \\ a - b + c = a + b + c - 2b = 2p - 2b = 2(p - b) \\ a + b - c = a + b + c - 2c = 2p - 2c = 2(p - c) \end{cases}$$

Substituindo essas expressões no resultado da fatoração, temos:

$$4Bh^2 = [2p][2(p-a)][2(p-b)][2(p-c)]$$
$$4Bh^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c)$$
$$h^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4B}$$
$$h^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{B}$$

Então, substituindo $B = b^2$ e isolando a medida da altura do triângulo:

$$h = \sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2}}$$
$$h = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$$

Assim, a área do triângulo será:

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h$$
$$S = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{b} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\cancel{b}}$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Portanto, se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo, p é o seu semiperímetro e $S_{\text{Triângulo}}$ representa sua área, então:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{\text{Triângulo}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Exercício resolvido

16. Calcule a área de um triângulo cujos lados medem 7 cm, 8 cm e 9 cm.

Resolução:

Usando a fórmula de Heron, a área desse triângulo pode ser calculada em três passos.

No **primeiro passo**, calcula-se o semiperímetro do triângulo:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+9}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

No **segundo passo**, calculam-se as diferenças do semiperímetro para cada um dos lados do triângulo:

$$\begin{cases} p - a = 12 - 7 = 5 \\ p - b = 12 - 8 = 4 \\ p - c = 2 - 9 = 3 \end{cases}$$

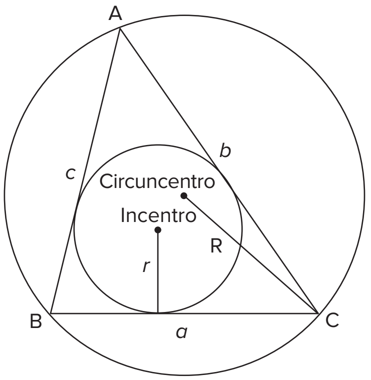
O **terceiro passo** consiste em calcular a raiz quadrada do produto de todos os resultados obtidos nos dois primeiros passos:

$$S_{\text{Triângulo}} = \sqrt{12 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} = \sqrt{720}$$
$$S_{\text{Triângulo}} = \sqrt{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5} = 2^2 \cdot 3\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$$

Logo, a área do triângulo é $12\sqrt{5}$ cm^2.

Triângulos e círculos

Como vimos anteriormente, todo triângulo é inscritível e circunscritível em circunferências cujos centros são, respectivamente, chamados de incentro e circuncentro do triângulo.



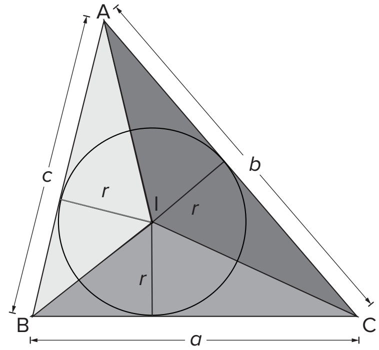
O incentro do triângulo é o ponto de encontro das bissetrizes de seus ângulos internos, e o circuncentro é o ponto de encontro das mediatrizes de seus lados.

As medidas dos raios dessas circunferências, indicadas na figura por r e R, estabelecem certas relações com os comprimentos dos lados e a área do triângulo.

Área do triângulo em função do raio da circunferência inscrita

A área de um triângulo é igual ao produto do seu semiperímetro pela medida do raio da circunferência inscrita nele.

Sendo r o raio da circunferência de centro I inscrita em um triângulo ABC, os triângulos IAB, IAC e IBC terão altura r.



Como a área do triângulo ABC equivale à soma das áreas desses três triângulos:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle IBC} + S_{\triangle IAC} + S_{\triangle IAB} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right) \cdot r$$

Então, indicando por p o semiperímetro de um triângulo, a área desse triângulo $S_{\text{Triângulo}}$ será:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{\text{Triângulo}} = p \cdot r$$

Exercício resolvido

17. Determine a medida do raio da circunferência inscrita em um triângulo sabendo que seus lados medem 5 m, 6 m e 7 m.

Resolução:

Usando a fórmula de Heron:

- Primeiro passo: $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{5+6+7}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$
- Segundo passo: $\begin{cases} p - a = 9 - 5 = 4 \\ p - b = 9 - 6 = 3 \\ p - c = 9 - 7 = 2 \end{cases}$
- Terceiro passo: calcular a raiz quadrada do produto de todos os resultados obtidos nos dois primeiros passos:

$$S_{\text{Triângulo}} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \sqrt{216} = \sqrt{2^3 \cdot 3^3} = 6\sqrt{6}$$

Sendo r o raio da circunferência inscrita no triângulo, da expressão $S_{\text{Triângulo}} = p \cdot r$, temos:

$$6\sqrt{6} = 9 \cdot r$$

$$r = \frac{6\sqrt{6}}{9} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

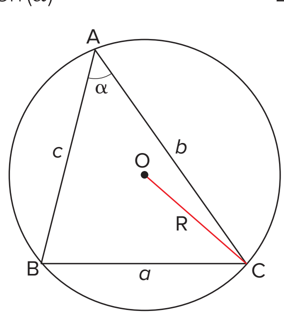
Logo, o raio é igual a $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ m.

Área do triângulo em função do raio da circunferência circunscrita

A área de um triângulo é igual ao produto das medidas de seus lados dividido pelo quádruplo da medida do raio da circunferência circunscrita a ele.

Sendo R a medida do raio da circunferência de centro O circunscrita a um triângulo ABC em que α é a medida do ângulo interno de vértice A e a = BC, pelo teorema dos senos, temos:

$$\frac{BC}{\text{sen}(\alpha)} = 2R \Rightarrow \text{sen}(\alpha) = \frac{a}{2R}$$



Como a área do triângulo ABC equivale ao produto das medidas de dois lados pelo seno do ângulo formado por eles:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \text{sen}(\alpha) \Rightarrow S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \frac{a}{2R}$$

$$\boxed{S_{\text{Triângulo}} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}}$$

Exercício resolvido

18. Determine a medida do raio da circunferência circunscrita em um triângulo cujos lados medem 5 m, 6 m e 9 m.

Resolução:

Usando a fórmula de Heron:

- Primeiro passo: $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{5+6+9}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$
- Segundo passo: $\begin{cases} p - a = 10 - 5 = 5 \\ p - b = 10 - 6 = 4 \\ p - c = 10 - 9 = 1 \end{cases}$
- Terceiro passo: consiste em calcular a raiz quadrada do produto de todos os resultados obtidos nos dois primeiros passos:

$$S_{\text{Triângulo}} = \sqrt{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

Sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, da expressão $S_{\text{Triângulo}} = \dfrac{a \cdot b \cdot c}{4R}$, temos:

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{4R} = 10\sqrt{2}$$

$$5 \cdot 6 \cdot 9 = 4R \cdot 10\sqrt{2}$$

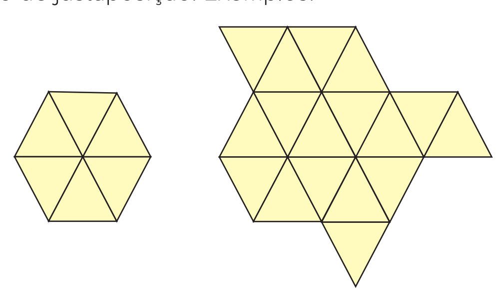
$$270 = R \cdot 40\sqrt{2}$$

$$R = \frac{270}{40\sqrt{2}} = \frac{27\sqrt{2}}{8}$$

Logo, o raio é igual a $\dfrac{27\sqrt{2}}{8}$ m.

Fórmula para o triângulo equilátero

Mesmo havendo muitas maneiras genéricas de obter a área de um triângulo, é recomendável conhecer uma expressão específica para a área do triângulo equilátero. Isso porque, além de ser uma figura muito usada no estudo da Geometria Espacial como base de prismas e pirâmides, os triângulos equiláteros também são formas modulares capazes de preencher superfícies planas de diversos formatos por meio de justaposição. Exemplos:



Assim, como todos os lados de um triângulo equilátero têm o mesmo comprimento ℓ e todos os ângulos internos medem 60°, sendo S a área do triângulo equilátero:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \ell \cdot \text{sen}(60°)$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \ell^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área do triângulo equilátero de lado ℓ pode ser expressa por:

$$S = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

Exercício resolvido

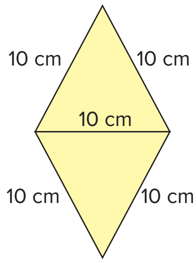
19. Se a diagonal menor de um losango mede o mesmo que seus lados, 10 cm, qual é a área do losango?

a) $75\sqrt{3}$ cm² **c)** $50\sqrt{2}$ cm² **e)** $25\sqrt{3}$ cm²

b) $50\sqrt{3}$ cm² **d)** $25\sqrt{2}$ cm²

Resolução:

Uma figura de acordo com o enunciado é:



A área de cada triângulo equilátero que compõe o losango é $S = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$.

Então, a área do losango é:

$$2 \cdot S = 2 \cdot 25\sqrt{3} = 50\sqrt{3}$$

Logo, a área do losango é igual a $50\sqrt{3}$ cm².

Alternativa: B

Área dos polígonos regulares

Apenas três tipos de polígonos regulares são capazes de preencher superfícies planas por meio de justaposição:

- os quadrados;
- os triângulos equiláteros;
- os hexágonos regulares.

O quadrado foi escolhido como principal representante das unidades geométricas de área, como o metro quadrado ou a polegada quadrada. Isso se deve ao fato de que a expressão para a área S de um quadrado com lado ℓ é bem simples:

$$S = \ell^2$$

Entre os triângulos equiláteros e os hexágonos regulares de mesmo lado há uma importante relação de equivalência que pode ser observada traçando-se as diagonais que passam pelo centro de um hexágono regular:

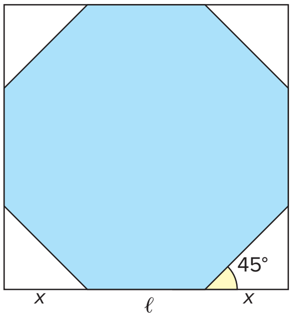
$$S_{\text{Hexágono}} = 6 \cdot S_{\text{Triângulo equilátero}}$$

Então:

$$S_{\text{Hexágono regular}} = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Octógono regular

A área de um octógono regular de lado ℓ pode ser calculada a partir da área do quadrado que se obtém prolongando alguns lados do octógono, como mostra a figura:



Como os ângulos externos do octógono medem 360° : 8 = 45°, sendo x os comprimentos dos prolongamentos dos lados do octógono, temos:

$$\cos(45°) = \frac{x}{\ell} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \ell = x \Rightarrow 2x = \ell\sqrt{2}$$

Assim, o lado do quadrado obtido mede $\ell + 2x = \ell + \ell\sqrt{2}$, e sua área:

$$S_{\text{Quadrado}} = \left(\ell + \ell\sqrt{2}\right)^2$$
$$S_{\text{Quadrado}} = \ell^2 + 2\sqrt{2}\ell^2 + 2\ell^2$$
$$S_{\text{Quadrado}} = 3\ell^2 + 2\sqrt{2}\ell^2$$

A área de cada triângulo exterior ao octógono e interior ao quadrado é:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot x \cdot \text{sen}(45°)$$

Substituindo $x = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot \ell \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{\ell^2}{4}$$

A área desse octógono regular é tal que:

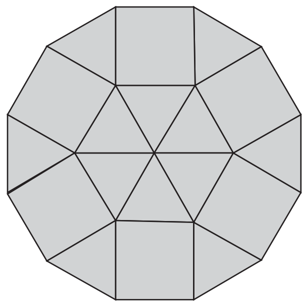
$$S_{\text{Octógono}} + 4 \cdot S_{\text{Triângulo}} = S_{\text{Quadrado}}$$
$$S_{\text{Octógono}} + 4 \cdot \frac{\ell^2}{4} = 3\ell^2 + 2\sqrt{2}\ell^2$$
$$S_{\text{Octógono}} + \ell^2 = 3\ell^2 + 2\sqrt{2}\ell^2$$
$$S_{\text{Octógono}} = 2\ell^2 + 2\sqrt{2}\ell^2$$

Portanto, a área de um octógono regular de lado ℓ pode ser expressa por:

$$S_{\text{Octógono}} = \left(2\sqrt{2} + 2\right) \cdot \ell^2$$

Dodecágono regular

A área de um dodecágono regular de lado ℓ pode ser calculada a partir das áreas dos quadrados e triângulos equiláteros que o compõem:



Como um dodecágono regular de lado ℓ é formado por 6 quadrados de lado ℓ e mais 12 triângulos equiláteros também de lado ℓ, sua área é tal que:

$$S_{\text{Dodecágono}} = 6 \cdot S_{\text{Quadrado}} + 12 \cdot S_{\text{Triângulo}}$$

$$S_{\text{Dodecágono}} = 6 \cdot \ell^2 + 12 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{Dodecágono}} = 6 \cdot \ell^2 + 3\sqrt{3}\ell^2$$

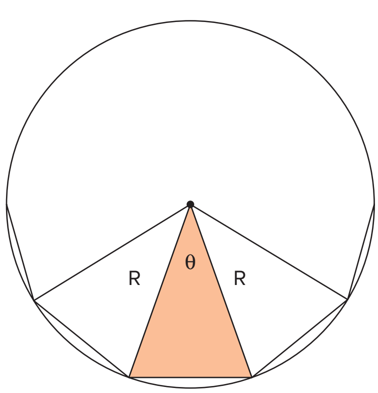
Portanto, a área de um dodecágono regular de lado ℓ pode ser expressa por:

$$S_{\text{Dodecágono}} = \left(6 + 3\sqrt{3}\right) \cdot \ell^2$$

Áreas de octógonos, dodecágonos e demais polígonos regulares podem ser calculadas de modo mais eficiente se for conhecida a medida do raio de alguma de suas circunferências associadas (a inscrita ou a circunscrita).

Área dos polígonos inscritos

Considere um polígono regular com n lados e inscrito em uma circunferência de raio R.



Traçando todos os raios da circunferência que unem o centro a algum vértice do polígono, obtemos exatamente n triângulos isósceles congruentes cuja área é:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen}(\theta)$$

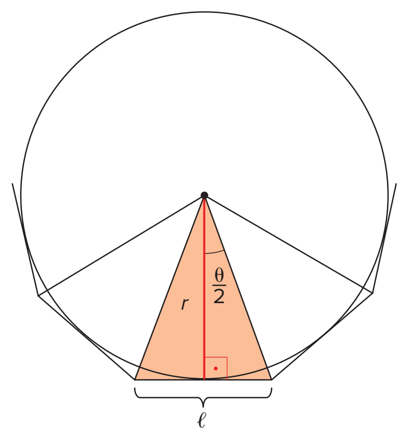
Como $\theta = \dfrac{360°}{n}$ e o polígono é composto de exatamente n triângulos justapostos, a área desse polígono regular é tal que $S_{\text{Polígono}} = n \cdot S_{\text{Triângulo}}$.

Assim, a área de um polígono regular com n lados e inscrito em uma circunferência de raio R pode ser obtida pela expressão:

$$S_{\text{Polígono}} = \frac{n \cdot R^2}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{360°}{n}\right)$$

Área dos polígonos circunscritos

Considere um polígono regular com n lados e circunscrito a uma circunferência de raio r.



Traçando todos os raios da circunferência que unem o centro a algum vértice do polígono, obtemos novamente n triângulos isósceles congruentes cujas bases coincidem com os lados e cujas alturas coincidem com os apótemas do polígono. Então, sendo ℓ a medida dos lados do polígono, a área de cada triângulo é:

$$S_{\text{Triângulo}} = \frac{\ell \cdot r}{2}$$

Como $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{180°}{n}$ e $\text{tg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{r} = \dfrac{\ell}{2r}$, o lado ℓ do polígono pode ser expresso por:

$$\ell = 2r \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Assim, com $S_{\text{Polígono}} = n \cdot S_{\text{Triângulo}}$, a área de um polígono regular circunscrito a uma circunferência de raio r é tal que:

$$S_{\text{Polígono}} = nr^2 \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

FRENTE 3

Exercícios resolvidos

20. Usando a aproximação $\sqrt{2} \cong 1{,}414$, faça uma estimativa da medida da área de um octógono que seja inscritível em uma circunferência com 40 cm de raio.

Resolução:

Com $n = 8$ e $R = 40$ cm, a área desse octógono é:

$$S_{\text{Octógono}} = \frac{n \cdot R^2}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{360°}{n}\right)$$

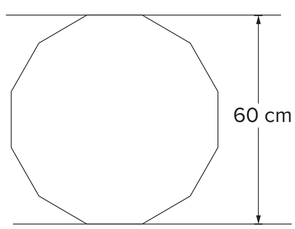
$$S_{\text{Octógono}} = \frac{8 \cdot 40^2}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{360°}{8}\right)$$

$$S_{\text{Octógono}} = 4 \cdot 1600 \cdot \text{sen}(45°)$$

$$S_{\text{Octógono}} = 6\,400 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3200\sqrt{2}$$

Assim, se $\sqrt{2} \cong 1{,}414$, pode-se estimar essa área em, aproximadamente, $4\,525$ cm^2.

21. Faça uma estimativa da área do polígono regular ilustrado pela seguinte figura:

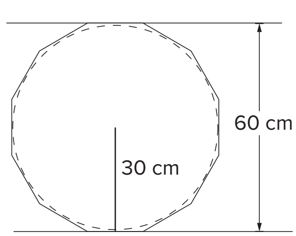


Dados:

θ	9°	12°	15°	18°
tg (θ)	0,16	0,21	0,27	0,32

Resolução:

Observe que o polígono tem 12 lados e que a distância de 60 cm equivale ao diâmetro da circunferência que o polígono circunscreve.



Com $n = 12$ e $r = 60 : 2 = 30$ cm, a área S desse dodecágono é:

$$S_{\text{Dodecágono}} = nr^2 \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$S_{\text{Dodecágono}} = 12 \cdot 30^2 \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{12}\right)$$

$$S_{\text{Dodecágono}} = 10800 \cdot \text{tg}(15°)$$

Assim, sendo $\text{tg}(15°) \cong 0{,}27$, pode-se estimar essa área em, aproximadamente, $2\,916$ cm^2.

Área do círculo

Os círculos são as figuras geométricas resultantes da reunião dos pontos de uma circunferência aos pontos situados no interior dessa circunferência. Assim, podemos dizer que a circunferência de centro O e raio *r* é o contorno do círculo de centro O e raio *r*.

Assim:

- Circunferências possuem comprimento: $C = 2\pi \cdot r$.
- Círculos possuem área: $A = \pi \cdot r^2$.

Essas expressões foram originalmente obtidas dos princípios da proporcionalidade e de exaustivos cálculos numéricos.

Uma maneira de obter a expressão da área de um círculo de raio unitário é confrontar as funções obtidas das fórmulas para os seus polígonos inscritos e circunscritos.

A área de um polígono com *n* lados, inscrito em um círculo de raio R, é $S_{\text{Polígono}} = \frac{n \cdot R^2}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{360°}{n}\right)$. Então, se $R = 1$, a função ordinal $f(n) = \frac{n}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{360°}{n}\right)$, com $n \geqslant 3$, associa o número de lados do polígono ao valor de sua área. Como o polígono está situado no interior do círculo, sua área é sempre menor que a do círculo:

$$f(3) = \frac{3}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{360°}{3}\right) = 1{,}5 \cdot \text{sen}(120°) = 1{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong$$
$$\cong 1{,}5 \cdot \frac{1{,}73}{2} = 1{,}2975$$

$$f(4) = \frac{4}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{360°}{4}\right) = 2 \cdot \text{sen}(90°) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f(6) = \frac{6}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{360°}{6}\right) = 3 \cdot \text{sen}(60°) = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 3 \cdot \frac{1{,}73}{2} = 2{,}595$$

$$f(12) = \frac{12}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{360°}{12}\right) = 6 \cdot \text{sen}(30°) = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

$$f(24) = \frac{24}{2} \cdot \text{sen}\left(\frac{360°}{24}\right) = 12 \cdot \text{sen}(15°) = 12 \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \cong$$
$$\cong 12 \cdot \frac{2{,}45 - 1{,}41}{4} = 3{,}12$$

A área de um polígono com *n* lados circunscrito em um círculo de raio *r* é $S_{\text{Polígono}} = nr^2 \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{n}\right)$. Então, se $r = 1$, a função ordinal $g(n) = n \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{n}\right)$, com $n \geqslant 3$, associa o número de lados do polígono circunscrito ao valor de sua área. Como o círculo está situado no interior do polígono, sua área é sempre menor que a do polígono:

$$g(3) = 3 \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{3}\right) = 3 \cdot \text{tg}(60°) = 3 \cdot \sqrt{3} \cong 3 \cdot 1{,}73 = 5{,}19$$

$$g(4) = 4 \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{4}\right) = 4 \cdot \text{tg}(45°) = 4 \cdot 1 = 4$$

$$g(6) = 6 \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{6}\right) = 6 \cdot \text{tg}(30°) = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 2 \cdot 1{,}73 = 3{,}46$$

$$g(12) = 12 \cdot \text{tg}\left(\frac{180°}{12}\right) = 12 \cdot \text{tg}(15°) = 12 \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) \cong$$
$$\cong 12 \cdot (2 - 1{,}73) = 3{,}24$$

Esses poucos cálculos efetuados com as funções *f* e *g* já permitem concluir que a área S de um círculo de raio unitário é tal que $3{,}12 < S < 3{,}24$. Calculando os valores de $f(n)$ e $g(n)$ para $n = 200$ com o auxílio de uma calculadora científica, podemos melhorar a estimativa da área desse círculo. Assim:

$$3{,}1411 < S < 3{,}1418$$

Esse resultado garante tanto a parte inteira quanto as primeiras casas decimais do valor de S. Portanto, $S \cong 3{,}14$.

Com o crescimento do valor de *n*, esse processo permite aproximar o valor da constante irracional π em tantas casas decimais quantas forem computáveis pela calculadora científica utilizada. Fazendo *n* tender ao infinito, o limite dessas funções leva à conclusão de que a área do círculo de raio unitário é $S = \pi$.

Como todos os círculos são semelhantes, sendo *k* a razão de semelhança de dois círculos, um de raio unitário e outro de raio *r*:

$$k = \frac{1}{r}$$

Então, sendo $S_{\odot}$ a área do círculo de raio *r* e S a área do círculo de raio unitário:

$$k^2 = \frac{S}{S_{\odot}}$$

Portanto:

$$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{S}{S_{\odot}} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{S}{S_{\odot}} \Rightarrow S_{\odot} = S \cdot r^2$$

Assim, do limite das funções *f* e *g* analisado anteriormente, podemos concluir que a área de um círculo de raio *r* é expressa por:

$$\boxed{S_{\odot} = \pi \cdot r^2}$$

! Atenção

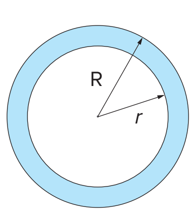
O número π é usado para expressar as grandezas do comprimento da circunferência e da área do círculo das seguintes maneiras:

1. O comprimento de uma circunferência de raio *r* é dado pela expressão $2\pi r$.
2. A área de um círculo de raio *r* é dada pela expressão πr^2.

Coroa circular

A região compreendida por duas circunferências de mesmo centro é denominada coroa circular.

A área de uma coroa circular é igual à diferença entre as áreas dos círculos determinados pelas circunferências, máxima e mínima, da coroa.



Assim, sendo R e *r* as medidas dos raios das circunferências de uma coroa circular, com $R > r$, a área dessa coroa pode ser expressa por:

$$S_{Coroa} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$$

$$\boxed{S_{Coroa} = \pi \cdot (R^2 - r^2)}$$

Exercícios resolvidos

22. UTFPR 2014 A área do círculo, em cm^2, cuja circunferência mede 10π cm, é:

a) 10π **b)** 36π **c)** 64π **d)** 50π **e)** 25π

Resolução:

Sendo *r* o raio do círculo, do comprimento de sua circunferência, temos:

$$2\pi r = 10\pi \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

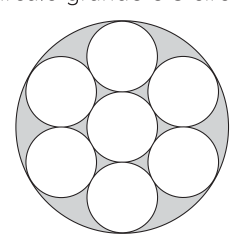
Assim, a área do círculo é:

$$\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 5^2 = 25$$

Portanto, a área do círculo é igual a 25 cm^2.

Alternativa: E

23. FGV-SP Cada um dos 7 círculos menores da figura tem raio 1 cm. Um círculo pequeno é concêntrico com o círculo grande, e tangencia os outros 6 círculos pequenos. Cada um desses 6 outros círculos pequenos tangencia o círculo grande e 3 círculos pequenos.



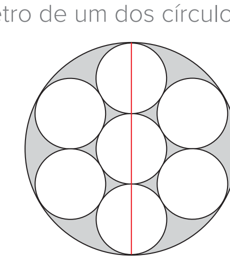
Na situação descrita, a área da região sombreada na figura, em cm^2, é igual a:

a) π **b)** $\frac{3\pi}{2}$ **c)** 2π **d)** $\frac{5\pi}{2}$ **e)** 3π

Resolução:

A área de cada um dos círculos menores é $S_1 = \pi \cdot 1^2 = \pi$, isto é, π cm^2.

Traçando um eixo de simetria na figura, podemos observar que o diâmetro do círculo maior equivale ao triplo do diâmetro de um dos círculos menores.



O raio do círculo maior é $R = 3 \cdot 1 \text{ cm} = 3$ cm e sua área é $S_2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$, isto é, 9π cm^2.

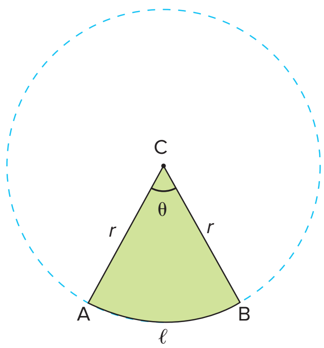
Assim, a área sombreada é $S = S_2 - 7 \cdot S_1 = 9\pi - 7\pi = 2\pi$, isto é, 2π cm^2.

Alternativa: C

Setor circular

A figura cercada por dois raios distintos de um círculo e um dos arcos determinados pelas extremidades desses raios é denominada setor circular.

Na imagem a seguir, podemos observar um setor circular ABC em que C é o centro da circunferência, os raios $\overline{CA}$ e $\overline{CB}$ são os lados retilíneos e o arco $\overset{\frown}{AB}$ é o lado curvilíneo.



O ângulo $A\hat{C}B$ formado pelos lados retilíneos tem medida θ e é diretamente proporcional à área do setor. Logo, como a área do próprio círculo também é diretamente proporcional à área do setor circular, existe uma constante de proporcionalidade k, tal que:

$$S_{Setor} = k \cdot \theta \cdot S_{Círculo}$$

O valor da constante k pode ser determinado considerando $\theta = 360°$, pois, nesse caso, a área do setor deve coincidir com a área do círculo que o contém.

$$\theta = 360° \Rightarrow S_{Setor} = S_{Círculo}$$

Assim, sendo r o raio dessa circunferência:

$$\pi \cdot r^2 = k \cdot 360° \cdot \pi \cdot r^2 \Rightarrow k = \frac{1}{360°}$$

Portanto, a área de um setor circular determinado por um ângulo central de medida θ em uma circunferência de raio r é expressa por:

$$S_{Setor} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$$

! Atenção

A área de um setor circular equivale à metade do produto do comprimento do lado curvilíneo pelo comprimento de um dos lados retilíneos. Assim, sendo ℓ o comprimento do lado curvilíneo do setor de uma circunferência de raio r, é correto expressar a área do setor por:

$$S_{Setor} = \frac{\ell \cdot r}{2}$$

Demonstração:

Sendo C o comprimento da circunferência de raio r, temos:

$$\frac{\ell}{C} = \frac{\theta}{360°} \Rightarrow \ell = \frac{\theta \cdot C}{360°}$$

Como $C = 2\pi r$:

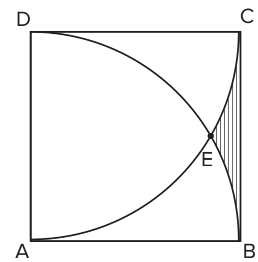
$$\ell = \frac{\theta \cdot 2\pi r}{360°} \Rightarrow \frac{\ell}{2} = \frac{\theta \cdot \pi r}{360°}$$

Multiplicando ambos os membros dessa expressão por r, temos:

$$\frac{\ell \cdot r}{2} = \frac{\theta \cdot \pi r^2}{360°}$$

Exercício resolvido

24. Fuvest-SP Na figura, ABCD é um quadrado de lado 1, DEB e CEA são arcos de circunferências de raio 1. Logo, a área da região hachurada é:



a) $1 - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

b) $1 - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

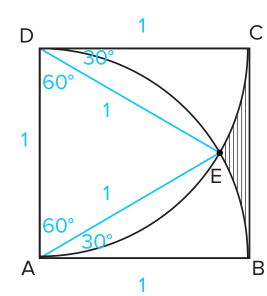
c) $1 - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

d) $1 + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $1 - \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

Resolução:

Traçando os raios $\overline{AE}$ e $\overline{DE}$ das circunferências, temos a seguinte figura:



Com esses traços, o quadrado fica dividido em quatro regiões disjuntas: um triângulo equilátero de lado 1, dois setores circulares de 30° e a região hachurada.

A área do quadrado é $S_{Quadrado} = \ell^2 = 1^2 = 1$.

A área do triângulo equilátero é:

$$S_{Triângulo} = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{1^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

A área de cada setor circular é

$$S_{Setor} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°} = \frac{30° \cdot \pi \cdot 1^2}{360°} = \frac{\pi}{12}$$

Assim, sendo S a área da região hachurada, temos:

$$S + S_{Triângulo} + 2 \cdot S_{Setor} = S_{Quadrado}$$

$$S + \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \cdot \frac{\pi}{12} = 1$$

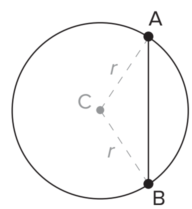
$$S = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

Alternativa: C

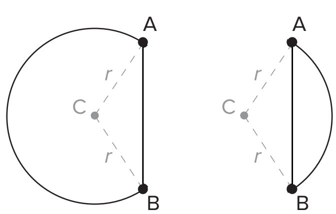
> **! Atenção**
>
> Sendo ℓ o comprimento do lado curvilíneo de um setor circular contido em um círculo de raio r, o perímetro desse setor é igual a $\ell + 2r$.

Segmento circular

Quando dois pontos distintos A e B de uma mesma circunferência de centro C são unidos por um segmento de reta, as regiões determinadas pela corda $\overline{AB}$ dentro do círculo de centro C são denominadas segmentos circulares.



Segmentos circulares possuem apenas dois lados: um retilíneo, que é a corda $\overline{AB}$ da circunferência, e um curvilíneo, que é um dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ da circunferência.



Se a corda $\overline{AB}$ for diâmetro da circunferência, então os segmentos circulares serão congruentes e denominados semicírculos. A área de um semicírculo de raio r é $S_{\text{Semicírculo}} = \dfrac{\pi \cdot r^2}{2}$.

Se a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ for maior do que 180°, então a área do segmento circular será igual à soma da área do setor circular ABC, de ângulo central $\theta > 180°$, com a área do triângulo ABC.

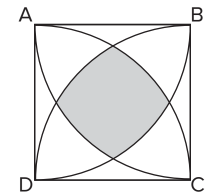
$$\theta > 180° \Rightarrow S_{\text{Segmento}} = S_{\text{Setor}} + S_{\text{Triângulo}}$$

Se a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ for menor do que 180°, então a área do segmento circular será igual à diferença entre a área do setor circular ABC, de ângulo central $\theta < 180°$, e a área do triângulo ABC.

$$\theta < 180° \Rightarrow S_{\text{Segmento}} = S_{\text{Setor}} - S_{\text{Triângulo}}$$

Exercício resolvido

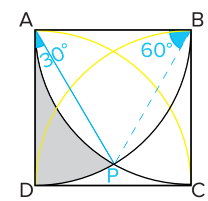
25. Os arcos de circunferência que determinam a região escurecida na figura a seguir têm seus centros nos vértices do quadrado ABCD de lado 6.



Determine a área da região escurecida.

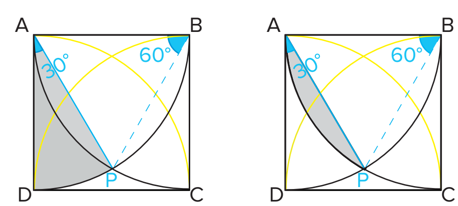
Resolução:

Sendo P o ponto de interseção de dois arcos mais próximos do lado $\overline{CD}$ do quadrado, o triângulo APB é equilátero.



Sendo X a área perguntada e Y a área da região compreendida pelo lado $\overline{AD}$ do quadrado e pelos arcos $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{DP}$, temos que $X + 4Y = 6^2 \Rightarrow X = 36 - 4Y$.

A área Y pode ser encontrada pela diferença entre as áreas de um setor circular de 30° e um segmento circular de 60°, ambos contidos em circunferências de raio 6.



A área do setor circular de 30° é:

$$S_{\text{Setor}} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°} = \frac{30° \cdot \pi \cdot 6^2}{360°} = 3\pi$$

A área do segmento circular de 60° é:

$$S_{\text{Segmento}} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°} - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{60° \cdot \pi \cdot 6^2}{360°} - \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

Assim:

$$Y = S_{\text{Setor}} - S_{\text{Segmento}}$$
$$Y = 3\pi - \left(6\pi - 9\sqrt{3}\right)$$
$$Y = 9\sqrt{3} - 3\pi$$

Portanto:

$$X = 36 - 4Y$$
$$X = 36 - 4 \cdot \left(9\sqrt{3} - 3\pi\right)$$
$$X = 36 - 36\sqrt{3} + 12\pi = 12\left(3 - 3\sqrt{3} + \pi\right)$$

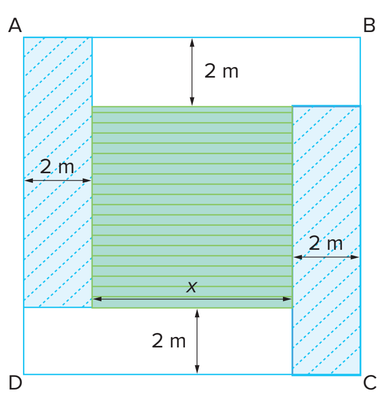
Revisando

1. Uma empreiteira deseja comprar um terreno retangular para construir um condomínio e está considerando duas opções em um mesmo bairro. O quadro a seguir apresenta as dimensões e o preço de cada terreno.

Terreno	Comprimento	Largura	Preço
A	250 m	150 m	R$ 13 125 000,00
B	220 m	180 m	R$ 13 464 000,00

Levando em consideração apenas o tamanho e o preço, qual dos terrenos deve proporcionar um melhor negócio para a empreiteira?

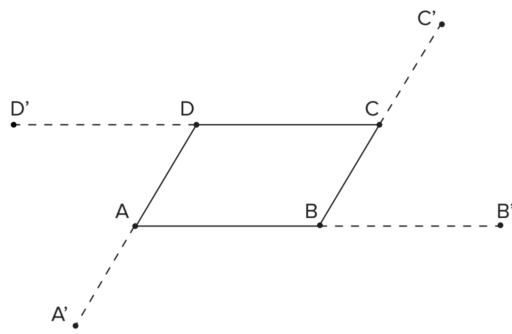
2. **Unesp 2016** Renata pretende decorar parte de uma parede quadrada ABCD com dois tipos de papel de parede, um com linhas diagonais e outro com riscos horizontais. O projeto prevê que a parede seja dividida em um quadrado central, de lado x, e quatro retângulos laterais, conforme mostra a figura.



Se o total da área decorada com cada um dos dois tipos de papel é a mesma, então x, em metros, é igual a:

a) $1 + 2\sqrt{3}$
b) $2 + 2\sqrt{3}$
c) $2 + \sqrt{3}$
d) $1 + \sqrt{3}$
e) $4 + \sqrt{3}$

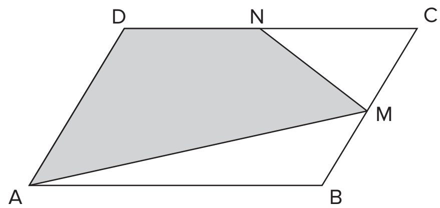
3. **Fuvest-SP 2013**



Percorre-se o paralelogramo ABCD em sentido anti-horário. A partir de cada vértice atingido ao longo do percurso, prolonga-se o lado recém-percorrido, construindo-se um segmento com mesmo comprimento que esse lado. As extremidades dos prolongamentos são denotadas por A', B', C' e D', de modo que os novos segmentos sejam, então, $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ e $\overline{DD'}$. Dado que $AB = 4$ e que a distância de D à reta determinada por A e B é 3, calcule a área do:

a) paralelogramo ABCD.
b) triângulo BB'C'.
c) quadrilátero A'B'C'D'.

4. **ESPM-SP 2014** Na figura a seguir, ABCD é um paralelogramo de área 24 cm^2. M e N são pontos médios de $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$, respectivamente.



A área do polígono AMND é igual a:

a) 20 cm^2
b) 16 cm^2
c) 12 cm^2
d) 15 cm^2
e) 18 cm^2

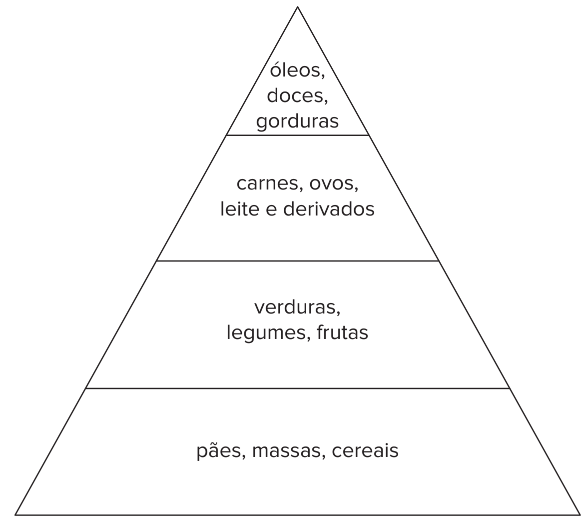
5. Qual o valor mais próximo da área de um terreno triangular com lados de 13 m, 15 m e 20 m?

a) 10 m^2
b) 20 m^2
c) 50 m^2
d) 100 m^2
e) 150 m^2

6. **Uece 2020** As medidas dos lados de um triângulo isósceles são, respectivamente, 3 m e 4 m. Nessas condições, podem ser construídos dois triângulos isósceles. A razão entre a maior e a menor das áreas desses triângulos é:

a) $0{,}375\sqrt{11}$
b) $0{,}625\sqrt{7}$
c) $0{,}375\sqrt{7}$
d) $0{,}625\sqrt{11}$

7. **UFG-GO 2013** Um recurso visual muito utilizado para apresentar as quantidades relativas dos diferentes grupos de alimentos na composição de uma dieta equilibrada é a chamada "pirâmide alimentar", que usualmente é representada por um triângulo dividido em regiões, como na figura a seguir.



Considere que as regiões da figura dividem a altura do triângulo em partes iguais. No que se refere às áreas das regiões ocupadas por cada grupo de alimentos, o grupo com predominância de carboidratos ocupa:

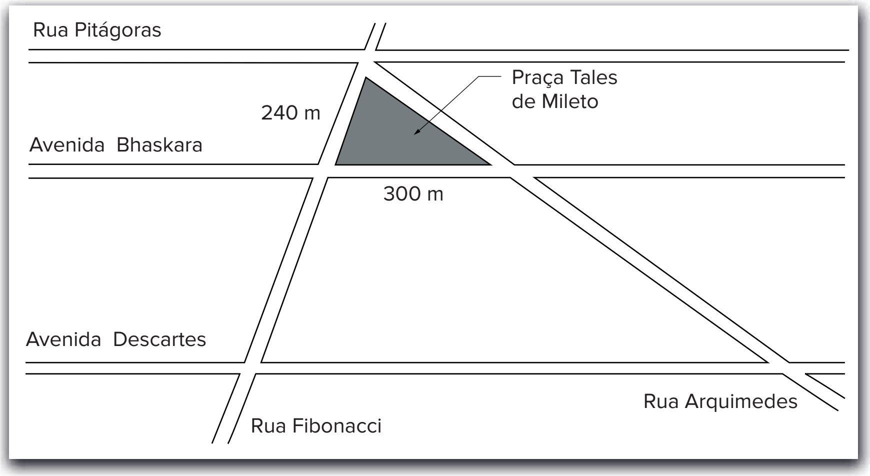
a) sete terços da área do grupo com predominância de proteínas.
b) cinco sétimos da área do grupo com predominância de fibras.
c) um sétimo da área do grupo com predominância de lipídios.
d) o dobro da área do grupo com predominância de proteínas.
e) cinco sétimos da área do grupo com predominância de vitaminas e sais minerais.

FRENTE 3

8. **Uece 2020** Um hexágono regular está inscrito em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 2 m. A medida, em m^2, da área da região do plano interior à circunferência e exterior ao hexágono é igual a:

a) $4\pi - 4\sqrt{3}$ b) $4\pi - 6\sqrt{2}$ c) $4\pi - 6\sqrt{3}$ d) $4\pi + 6\sqrt{2}$

9. **Fatec-SP 2020** Na figura temos um mapa onde se localiza a Praça Tales de Mileto. A prefeitura pretende cobri-la completamente com grama.

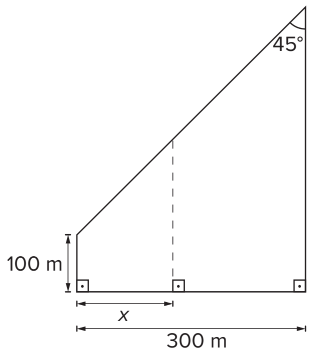


Considere retilíneos esses trechos de ruas e avenidas

Admita que a medida do ângulo agudo formado entre a Rua Fibonacci e a Avenida Descartes é igual a 60°, e que a Avenida Bhaskara é paralela à Avenida Descartes. Nessas condições, o total da área a ser gramada é, em metros quadrados, igual a

a) $20\,400\sqrt{3}$ b) $20\,400\sqrt{2}$ c) $27\,000$ d) $18\,000\sqrt{3}$ e) $12\,000$

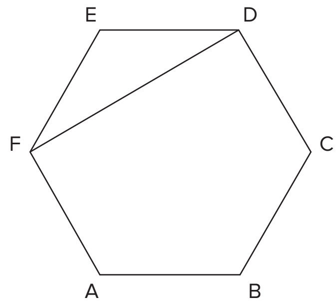
10. UFG-GO 2013 Um agricultor pretende dividir um terreno em duas partes que possuam a mesma área. A figura a seguir representa o terreno e a divisão deve ser feita ao longo da linha vertical tracejada.



Considerando-se o exposto, determine o valor de x, com precisão de uma casa decimal.

Dado: $\sqrt{34} = 5{,}83$

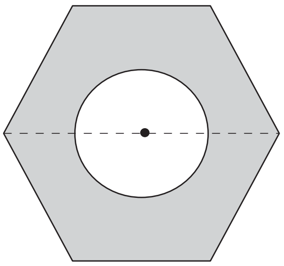
11. UFRGS 2015 Considere o hexágono regular ABCDEF, no qual foi traçado o segmento $\overline{FD}$ medindo 6 cm, representado na figura a seguir.



A área do hexágono mede, em cm^2:

a) $18\sqrt{3}$
b) $20\sqrt{3}$
c) $24\sqrt{3}$
d) $28\sqrt{3}$
e) $30\sqrt{3}$

12. UPE 2014 A figura a seguir representa um hexágono regular de lado medindo 2 cm e um círculo cujo centro coincide com o centro do hexágono, e cujo diâmetro tem medida igual à medida do lado do hexágono.



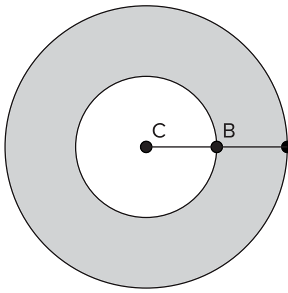
Dados: Considere $\pi \cong 3$ e $\sqrt{3} \cong 1{,}7$.

Nessas condições, quanto mede a área da superfície pintada?

a) 2,0 cm^2
b) 3,0 cm^2
c) 7,2 cm^2
d) 8,0 cm^2
e) 10,2 cm^2

FRENTE 3

13. UTFPR 2013 Seja α a circunferência que passa pelo ponto B com centro no ponto C e β a circunferência que passa pelo ponto A com centro no ponto C, como mostra a figura dada.



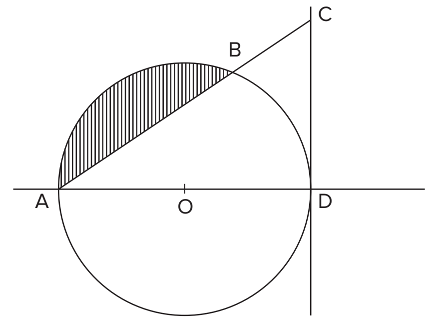
A medida do segmento $\overline{AB}$ é igual à medida do segmento $\overline{BC}$ e o comprimento da circunferência α mede 12π cm. Então a área do anel delimitado pelas circunferências α e β (região escura) é, em cm^2, igual a:

a) 108π
b) 144π
c) 72π
d) 36π
e) 24π

14. Uece 2020 Em uma circunferência com centro no ponto M, cuja medida do diâmetro é igual a 20 m, considere um arco com extremidades P e Q medindo exatamente um quarto do comprimento da circunferência. Se X é um ponto do arco tal que o triângulo MXQ é equilátero e Y é um ponto do segmento $\overline{MP}$ tal que o triângulo MYX é retângulo em Y, então a medida da área do triângulo MYX, em m^2, é:

a) $15\sqrt{3}$.
b) $12,5\sqrt{3}$.
c) $12\sqrt{5}$.
d) $10,5\sqrt{5}$.

15. Fuvest-SP 2012



Na figura, a circunferência de centro O é tangente à reta $\overleftrightarrow{CD}$ no ponto D, o qual pertence à reta $\overleftrightarrow{AO}$. Além disso, A e B são pontos da circunferência, $AB = 6\sqrt{3}$ e $BC = 2\sqrt{3}$. Nessas condições, determine:

a) a medida do segmento $\overline{CD}$;
b) o raio da circunferência;
c) a área do triângulo AOB;
d) a área da região hachurada na figura.

Exercícios propostos

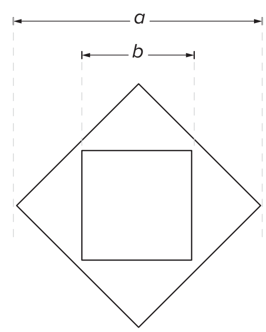
1. **Enem 2020** O proprietário de um apartamento decidiu instalar porcelanato no piso da sala. Essa sala tem formato retangular com 3,2 m de largura e 3,6 m de comprimento. As peças do porcelanato têm formato de um quadrado com lado medindo 80 cm. Esse porcelanato é vendido em dois tipos de caixas, com os preços indicados a seguir.
   - Caixas do tipo A: 4 unidades de piso, R$ 35,00;
   - Caixas do tipo B: 3 unidades de piso, R$ 27,00.

   Na instalação do porcelanato, as peças podem ser recortadas e devem ser assentadas sem espaçamento entre elas, aproveitando-se ao máximo os recortes feitos.

   A compra que atende às necessidades do proprietário, proporciona a menor sobra de pisos e resulta no menor preço é

   a) 5 caixas do tipo A.
   b) 1 caixa do tipo A e 4 caixas do tipo B.
   c) 3 caixas do tipo A e 2 caixas do tipo B.
   d) 5 caixas do tipo A e 1 caixa do tipo B.
   e) 6 caixas do tipo B.

2. Na figura a seguir, o quadrado maior tem o triplo da área do quadrado menor.



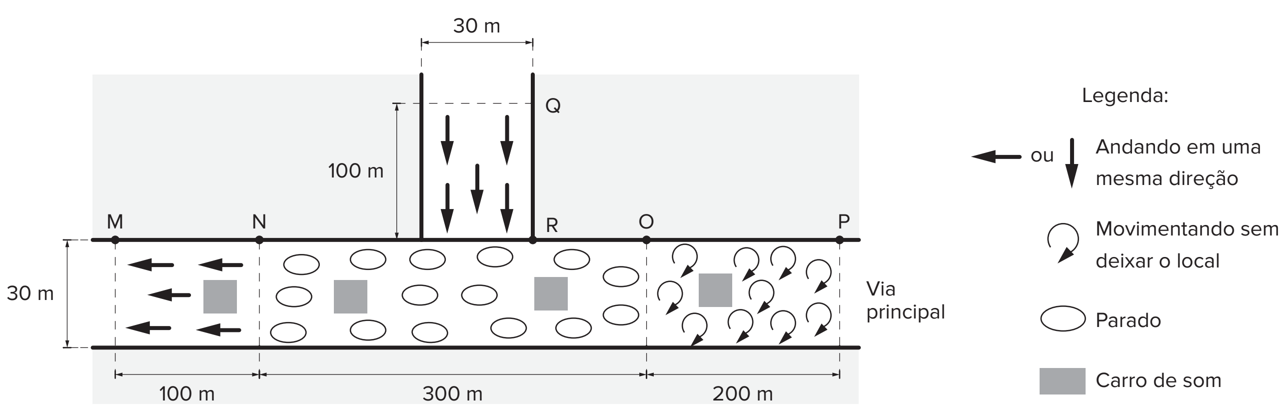
   Determine a razão $\frac{a}{b}$.

   a) $\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt{3}$ **c)** $\sqrt{4}$ **d)** $\sqrt{5}$ **e)** $\sqrt{6}$

3. **Enem 2020** O fenômeno das manifestações populares de massa traz à discussão como estimar o número de pessoas presentes nesse tipo de evento. Uma metodologia usada é: no momento do ápice do evento, é feita uma foto aérea da via pública principal na área ocupada, bem como das vias afluentes que apresentem aglomerações de pessoas que acessam a via principal. A foto é sobreposta por um mapa virtual das vias, ambos na mesma escala, fazendo-se um esboço geométrico da situação. Em seguida, subdivide-se o espaço total em trechos, quantificando a densidade, da seguinte forma:
   - 4 pessoas por metro quadrado, se elas estiverem andando em uma mesma direção;
   - 5 pessoas por metro quadrado, se elas estiverem se movimentando sem deixar o local;
   - 6 pessoas por metro quadrado, se elas estiverem paradas.

   É feito, então, o cálculo do total de pessoas, considerando os diversos trechos, e desconta-se daí 1 000 pessoas para cada carro de som fotografado.

   Com essa metodologia, procederam-se aos cálculos para estimar o número de participantes na manifestação cujo esboço geométrico é dado na figura. Há três trechos na via principal: MN, NO e OP, e um trecho numa via afluente da principal: QR.



   Obs.: a figura não está em escala (considere as medidas dadas).

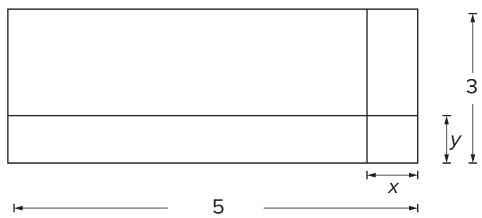
   Segundo a metodologia descrita, o número estimado de pessoas presentes a essa manifestação foi igual a

   a) 110 000 **b)** 104 000 **c)** 93 000 **d)** 92 000 **e)** 87 000

4. **FGV-SP 2017** Um canteiro com formato retangular tem área igual a 40 m^2 e sua diagonal mede $\sqrt{89}$ m. O perímetro desse retângulo é:

a) 20 m
b) 22 m
c) 24 m
d) 26 m
e) 28 m

5. **Enem 2012** Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem, mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é $(5 - x)(3 - y)$.



Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

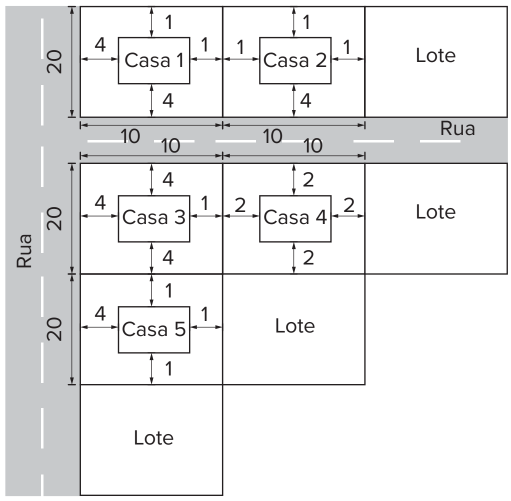
a) $2xy$
b) $15 - 3x$
c) $15 - 5y$
d) $-5y - 3x$
e) $5y + 3x - xy$

6. **Enem 2020** A lei municipal para a edificação de casas em lotes de uma cidade determina que sejam obedecidos os seguintes critérios:

- afastamento mínimo de 4 m da rua;
- afastamento mínimo de 1 m da divisa com outro lote;
- área total construída da casa entre 40% e 50% da área total do lote.

Um construtor submeteu para aprovação na prefeitura dessa cidade uma planta com propostas para a construção de casas em seus 5 lotes. Cada lote tem área medindo 200 m^2.

A imagem apresenta um esquema, sem escala, no qual estão representados os lotes, as ruas e os afastamentos considerados nos projetos entre as casas e as divisas dos lotes. As medidas indicadas no esquema estão expressas em metro.



A prefeitura aprovará apenas a planta da casa

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

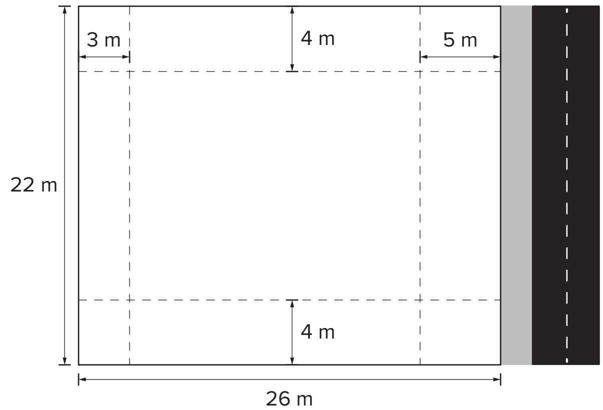
7. **Enem Digital 2020** Um marceneiro visitou 5 madeireiras para comprar tábuas que lhe permitissem construir 5 prateleiras de formato retangular, de dimensões iguais a 30 cm de largura por 120 cm de comprimento cada, tendo como objetivo minimizar a sobra de madeira, podendo, para isso, fazer qualquer tipo de emenda. As dimensões das tábuas encontradas nas madeireiras estão descritas no quadro.

Madeireira	Largura (cm)	Comprimento (cm)
I	40	100
II	30	110
III	35	120
IV	25	150
V	20	200

Em qual madeireira o marceneiro deve comprar as tábuas para atingir seu objetivo?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

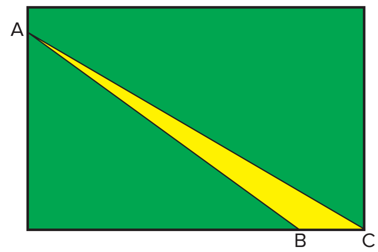
8. **Enem Digital 2020** Uma empresa deseja construir um edifício residencial de 12 pavimentos, num lote retangular de lados medindo 22 e 26 m. Em 3 dos lados do lote serão construídos muros. A frente do prédio será sobre o lado do lote de menor comprimento. Sabe-se que em cada pavimento 32 m^2 serão destinados à área comum (hall de entrada, elevadores e escada), e o restante da área será destinado às unidades habitacionais. A legislação vigente exige que prédios sejam construídos mantendo distâncias mínimas dos limites dos lotes onde se encontram. Em obediência à legislação, o prédio ficará 5 m afastado da rua onde terá sua entrada, 3 m de distância do muro no fundo do lote e 4 m de distância dos muros nas laterais do lote, como mostra a figura.



A área total, em metro quadrado, destinada às unidades habitacionais desse edifício será de

a) 2 640
b) 3 024
c) 3 840
d) 6 480
e) 6 864

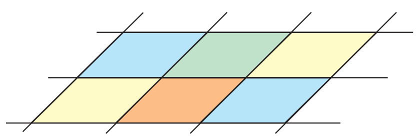
9. A figura retangular a seguir representa a bandeira de uma equipe de futebol.



Se o ponto A divide a altura do retângulo na razão de 1 para 7, o ponto B divide a base do retângulo na razão de 5 para 1 e a área de toda a bandeira é de 2 400 cm^2, então, a área que o triângulo ABC ocupa na bandeira é de:

a) 175 cm^2
b) 200 cm^2
c) 250 cm^2
d) 350 cm^2
e) 474 cm^2

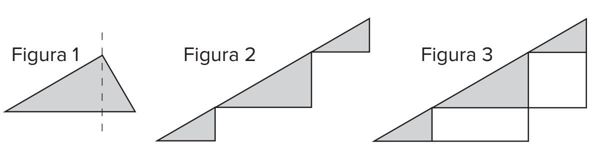
10. Um arquiteto projetou, para as paredes de uma capela, janelas vitrais na forma de um paralelogramo composto de 6 peças congruentes. A figura a seguir apresenta um esboço desse projeto, que foi feito em escala de 1 para 10.



Para fazer esse esboço, o arquiteto traçou, primeiro, um feixe de quatro retas paralelas afastadas 3 cm uma da outra e, depois, um feixe com mais três retas paralelas afastadas 2 cm uma da outra.
Sabendo que as retas do primeiro feixe formam ângulos de 45° com as retas do segundo feixe, podemos concluir que, depois de construída e instalada, cada janela ocupará na parede uma área de:

a) 3 600 cm^2
b) $3600\sqrt{2}\ cm^2$
c) $3600\sqrt{3}\ cm^2$
d) $2400\sqrt{2}\ cm^2$
e) $2400\sqrt{3}\ cm^2$

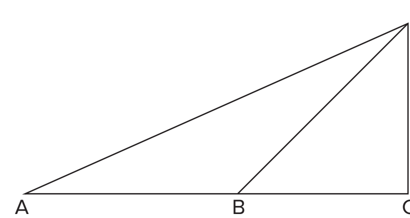
11. Em um pedaço de papel com o formato de um triângulo retângulo, foi feito um recorte sobre uma linha perpendicular à hipotenusa, como mostra a figura 1. Em seguida, foi feita uma cópia do pedaço menor e os três triângulos obtidos foram colados em uma cartolina de modo que os maiores lados de cada triângulo ficassem alinhados e os demais lados ficassem paralelos, como mostra a figura 2. Depois, foram traçadas quatro retas, prolongando os lados dos triângulos colados e determinando dois quadriláteros, como mostra a figura 3.



Os quadriláteros obtidos na figura 3:

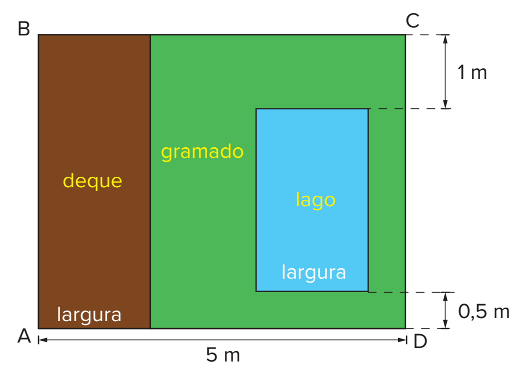
a) têm a mesma área.
b) têm o mesmo perímetro.
c) têm diagonais de mesma medida.
d) são congruentes.
e) são semelhantes.

12. **Unifesp** Na figura, os triângulos ABD e BCD são isósceles. O triângulo BCD é retângulo, com o ângulo C reto, e A, B, C estão alinhados.



a) Dê a medida do ângulo $B\hat{A}D$ em graus.
b) Se BD = *x*, obtenha a área do triângulo ABD em função de *x*.

13. **Unesp 2016** Em um terreno retangular ABCD de 20 m^2, serão construídos um deque e um lago, ambos de superfícies retangulares de mesma largura, com as medidas indicadas na figura. O projeto de construção ainda prevê o plantio de grama na área restante, que corresponde a 48% do terreno.



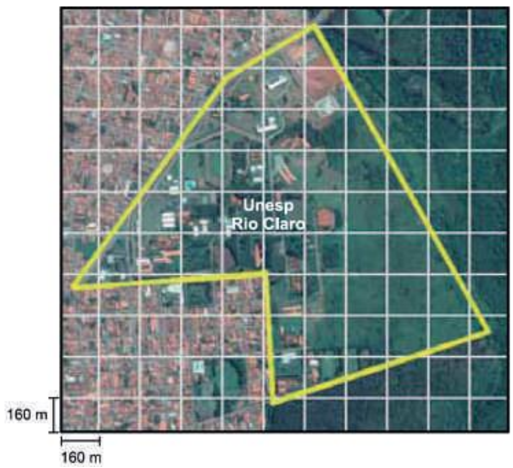
No projeto descrito, a área da superfície do lago, em m^2, será igual a:

a) 4,1
b) 4,2
c) 3,9
d) 4,0
e) 3,8

14. **Enem Digital 2020** Um fazendeiro possui uma cisterna com capacidade de 10 000 litros para coletar a água da chuva. Ele resolveu ampliar a área de captação da água da chuva e consultou um engenheiro que lhe deu a seguinte explicação: “Nesta região, o índice pluviométrico anual médio é de 400 milímetros. Como a área de captação da água da chuva de sua casa é um retângulo de 3 m de largura por 7 m de comprimento, sugiro que aumente essa área para que, em um ano, com esse índice pluviométrico, o senhor consiga encher a cisterna, estando ela inicialmente vazia”. Sabe-se que o índice pluviométrico de um milímetro corresponde a um litro de água por metro quadrado. Considere que as previsões pluviométricas são cumpridas e que não há perda, por nenhum meio, no armazenamento da água.
Em quantos metros quadrados, no mínimo, o fazendeiro deve aumentar a área de captação para encher a cisterna em um ano?

a) 1,6
b) 2,0
c) 4,0
d) 15,0
e) 25,0

15. Unesp 2017 O hexágono marcado na malha quadriculada sobre a fotografia representa o contorno do campus da Unesp de Rio Claro, que é aproximadamente plano.



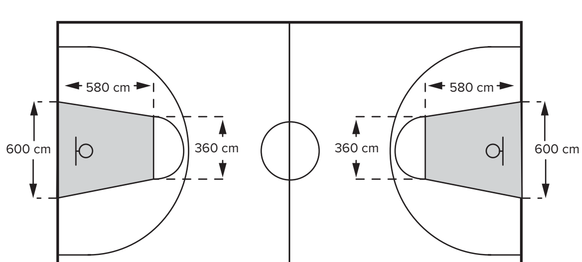
A área aproximada desse campus, em km^2, é um número pertencente ao intervalo:

a) [0,8; 1,3[
b) [1,8; 2,3[
c) [2,3; 2,8[
d) [1,3; 1,8[
e) [0,3; 0,8[

16. Enem PPL 2020 Pretende-se comprar uma mesa capaz de acomodar 6 pessoas, de modo que, assentadas em torno da mesa, cada pessoa disponha de, pelo menos, 60 cm de espaço livre na borda do tampo da mesa, que deverá ter a menor área possível. Na loja visitada há mesas com tampos nas formas e dimensões especificadas:
Mesa I: hexágono regular, com lados medindo 60 cm;
Mesa II: retângulo, com lados medindo 130 cm e 60 cm;
Mesa III: retângulo, com lados medindo 120 cm e 60 cm;
Mesa IV: quadrado, com lados medindo 60 cm;
Mesa V: triângulo equilátero, com lados medindo 120 cm.
A mesa que atende aos critérios especificados é a

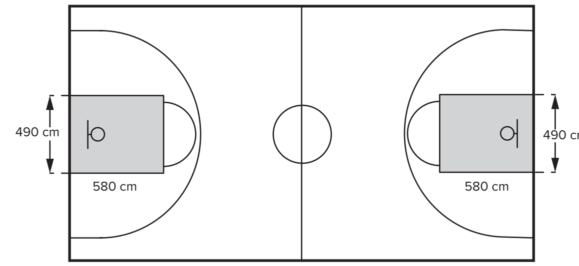
a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

17. Enem 2015 O esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete. Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010.

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (FIBA) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o esquema II.

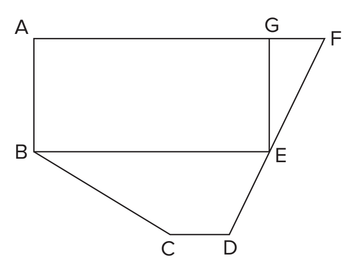


Esquema II: área restritiva a partir de 2010.

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a):

a) aumento de 5 800 cm^2.
b) aumento de 75 400 cm^2.
c) aumento de 214 600 cm^2.
d) diminuição de 63 800 cm^2.
e) diminuição de 272 600 cm^2.

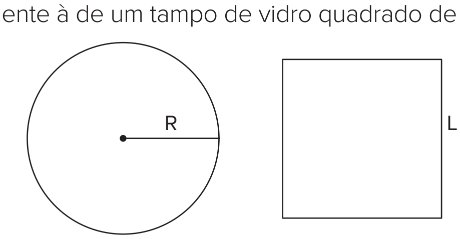
18. Fuvest-SP 2013 O mapa de uma região utiliza a escala de 1 : 200 000. A porção desse mapa, contendo uma Área de Preservação Permanente (APP), está representada na figura, na qual $\overline{AF}$ e $\overline{DF}$ são segmentos de reta, o ponto G está no segmento $\overline{AF}$, o ponto E está no segmento $\overline{DF}$, ABEG é um retângulo e BCDE é um trapézio. Se AF = 15, AG = 12, AB = 6, CD = 3 e DF = $5\sqrt{5}$ indicam valores em centímetros no mapa real, então a área da APP é:



Obs.: Figura ilustrativa, sem escala.

a) 100 km^2
b) 108 km^2
c) 210 km^2
d) 240 km^2
e) 444 km^2

19. Enem PPL 2020 Um vidraceiro precisa construir tampos de vidro com formatos diferentes, porém com medidas de áreas iguais. Para isso, pede a um amigo que o ajude a determinar uma fórmula para o cálculo do raio R de um tampo de vidro circular com área equivalente à de um tampo de vidro quadrado de lado L.



A fórmula correta é

a) $R = \dfrac{L}{\sqrt{\pi}}$
b) $R = \dfrac{L}{\sqrt{2\pi}}$
c) $R = \dfrac{L^2}{2\pi}$
d) $R = \sqrt{\dfrac{2L}{\pi}}$
e) $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{\pi}}$

20. Uece 2020 No triângulo acutângulo XYZ, cuja medida da área é 24 m^2, sejam M, N, O os pontos médios, respectivamente, dos lados $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ e $\overline{XZ}$. Pelo vértice Z, traça-se uma reta paralela ao lado $\overline{XY}$ e, pelo vértice X, traça-se uma reta paralela ao lado $\overline{YZ}$, as quais se cortam no ponto G. Nessas condições, a medida, em m^2, da área do triângulo MNG é

a) 24 **b)** 12 **c)** 18 **d)** 15

21. Enem 2016 Um senhor, pai de dois filhos, deseja comprar dois terrenos, com áreas de mesma medida, um para cada filho. Um dos terrenos visitados já está demarcado e, embora não tenha um formato convencional (como se observa na figura B), agradou ao filho mais velho e, por isso, foi comprado. O filho mais novo possui um projeto arquitetônico de uma casa que quer construir, mas, para isso, precisa de um terreno na forma retangular (como mostrado na figura A) cujo comprimento seja 7 m maior do que a largura.

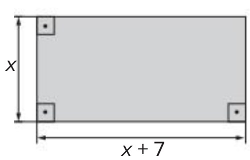


Figura A

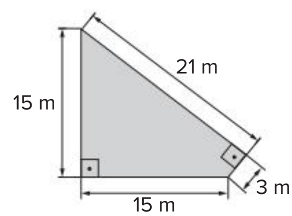
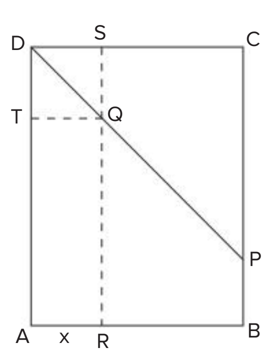


Figura B

Para satisfazer o filho mais novo, esse senhor precisa encontrar um terreno retangular cujas medidas, em metros, do comprimento e da largura sejam iguais, respectivamente, a:

a) 7,5 e 14,5.
b) 9,0 e 16,0.
c) 9,3 e 16,3.
d) 10,0 e 17,0.
e) 13,5 e 20,5.

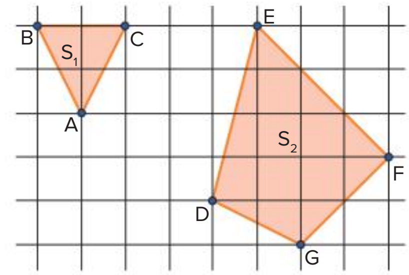
22. Fuvest-SP 2017 O retângulo ABCD, representado na figura, tem lados de comprimento AB = 3 e BC = 4. O ponto P pertence ao lado $\overline{BC}$ e BP = 1. Os pontos R, S e T pertencem aos lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$, respectivamente. O segmento $\overline{RS}$ é paralelo a $\overline{AD}$ e intercepta $\overline{DP}$ no ponto Q. O segmento $\overline{TQ}$ é paralelo a $\overline{AB}$.



Sendo x o comprimento de $\overline{AR}$, o maior valor da soma das áreas do retângulo ARQT, do triângulo CQP e do triângulo DQS, para x variando no intervalo aberto]0, 3[, é:

a) $\frac{61}{8}$ **b)** $\frac{33}{4}$ **c)** $\frac{17}{2}$ **d)** $\frac{35}{4}$ **e)** $\frac{73}{8}$

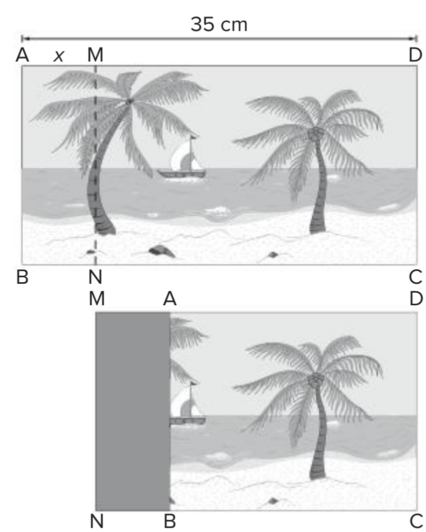
23. Unesp 2015 Os polígonos ABC e DEFG estão desenhados em uma malha formada por quadrados. Suas áreas são iguais a S_1 e S_2, respectivamente, conforme indica a figura.



Sabendo que os vértices dos dois polígonos estão exatamente sobre pontos de cruzamento das linhas da malha, é correto afirmar que $\frac{S_2}{S_1}$ é igual a:

a) 5,25
b) 4,75
c) 5,00
d) 5,50
e) 5,75

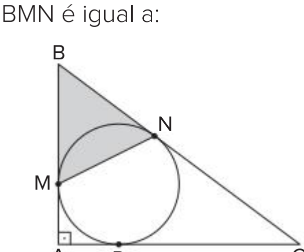
24. ESPM-SP 2018 A gravura mostrada na figura abaixo foi dobrada na linha tracejada MN, a x cm da borda AB.



Sabendo-se que, depois da dobradura, a parte oculta da gravura representa 25% da parte visível, podemos afirmar que a medida x é de:

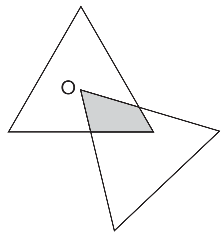
a) 3,5 cm
b) 6 cm
c) 3 cm
d) 4,5 cm
e) 5 cm

25. ESPM-RJ 2018 Na figura abaixo, M, N e P são os pontos de tangência do triângulo retângulo ABC com sua circunferência inscrita. Se AB = 3 e AC = 4, a área do triângulo BMN é igual a:



a) 1,2 **b)** 2,0 **c)** 1,8 **d)** 2,4 **e)** 1,6

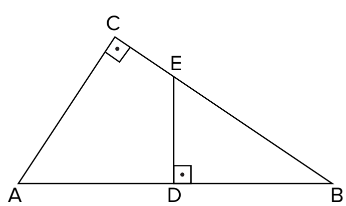
26. Na figura a seguir, há dois triângulos equiláteros, e o ponto O é o centro de um deles.



Se a área do triângulo de centro O é 1, então o valor da área hachurada na figura, enquanto os triângulos efetuam rotações aleatórias em torno do mesmo ponto O, varia no intervalo:

a) de $\frac{1}{9}$ até $\frac{2}{9}$.
b) de $\frac{2}{9}$ até $\frac{1}{3}$.
c) de $\frac{1}{6}$ até $\frac{1}{3}$.
d) de $\frac{1}{3}$ até $\frac{4}{9}$.
e) de $\frac{1}{3}$ até $\frac{1}{2}$.

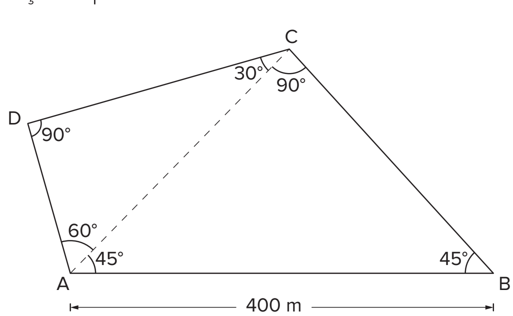
27. Unifesp Na figura, o ângulo $\hat{C}$ é reto, D é ponto médio de $\overline{AB}$, $\overline{DE}$ é perpendicular a $\overline{AB}$, AB = 20 cm e AC = 12 cm.



A área do quadrilátero ADEC, em centímetros quadrados, é:

a) 96
b) 75
c) 8,5
d) 48
e) 37,5

28. UFPB 2012 A prefeitura de certa cidade reservou um terreno plano, com o formato de um quadrilátero, para construir um parque, que servirá de área de lazer para os habitantes dessa cidade. O quadrilátero ABCD, a seguir, representa a planta do terreno com algumas medições que foram efetuadas:

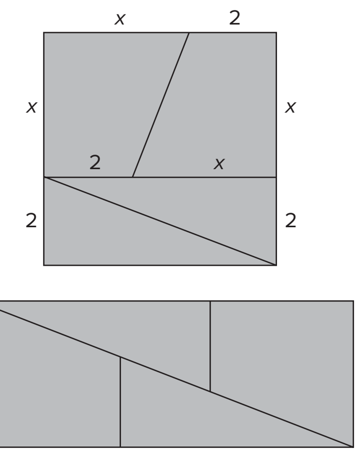


Com base nos dados apresentados nessa figura, é correto afirmar que a área do terreno reservado para o parque mede:

Dado: Use: $\sqrt{3} = 1{,}73$.

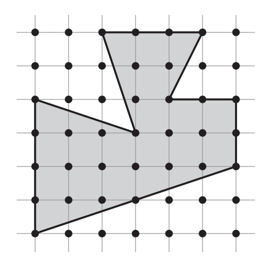
a) 56 300 m^2
b) 56 800 m^2
c) 57 300 m^2
d) 57 000 m^2
e) 58 300 m^2

29. ESPM-SP 2018 O quadrado e o retângulo da figura abaixo foram montados com as mesmas 4 peças. A medida *x* é igual a:



a) $2\sqrt{5} - 1$
b) $\sqrt{5} - 1$
c) $\sqrt{5} + 1$
d) $3\sqrt{5} - 2$
e) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

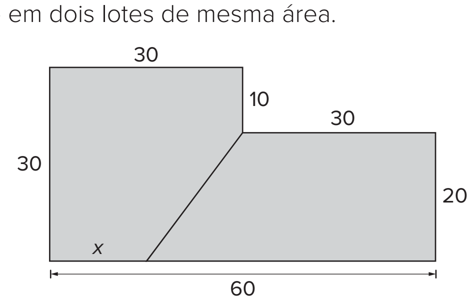
30. ESPM-RJ 2018 Considere uma malha quadriculada cujas células são quadrados de lado 1. Segundo o teorema de Pick, a área de um polígono simples cujos vértices são nós dessa malha, é igual ao número de nós da malha que se encontram no interior do polígono mais metade do número de nós que se encontram sobre o perímetro do polígono, menos uma unidade.



De acordo com esse teorema, a área do polígono representado na figura acima é igual a:

a) 21
b) 18
c) 23
d) 19
e) 22

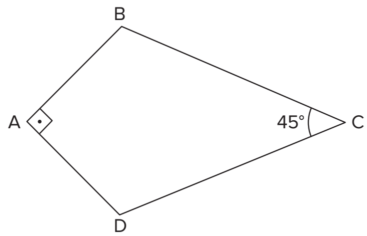
31. ESPM-SP 2018 O terreno mostrado na figura abaixo, cujas medidas estão expressas em metros, foi dividido em dois lotes de mesma área.



A medida *x*, em metros, é igual a:

a) 11
b) 12
c) 13
d) 14
e) 15

32. **Unicamp-SP 2016** A figura a seguir exibe um quadrilátero ABCD, onde AB = AD e BC = CD = 2 cm.



A área do quadrilátero ABCD é igual a:

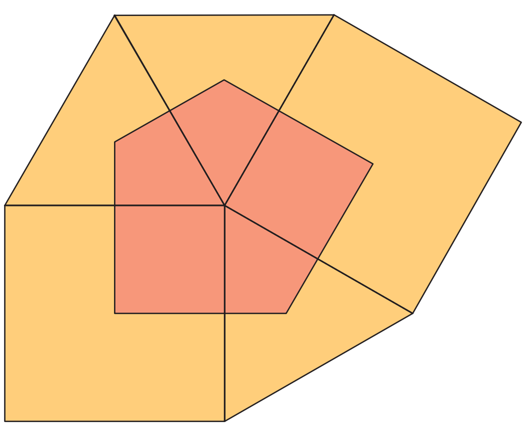
a) $\sqrt{2}$ cm^2

b) 2 cm^2

c) $2\sqrt{2}$ cm^2

d) 3 cm^2

33. **Fuvest-SP 2021** Três triângulos equiláteros e dois quadrados formam uma figura plana, como ilustrado. Seus centros são os vértices de um pentágono irregular, que está destacado na figura. Se T é a área de cada um dos triângulos e Q a área de cada um dos quadrados, a área desse pentágono é



a) T + Q

b) $\frac{1}{2}T + \frac{1}{2}Q$

c) $T + \frac{1}{2}Q$

d) $\frac{1}{3}T + \frac{1}{4}Q$

e) $\frac{1}{3}T + \frac{1}{2}Q$

34. **Fuvest-SP 2012** O segmento $\overline{AB}$ é lado de um hexágono regular de área $\sqrt{3}$. O ponto P pertence à mediatriz de $\overline{AB}$ de tal modo que a área do triângulo PAB vale $\sqrt{2}$. Então, a distância de P ao segmento $\overline{AB}$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$

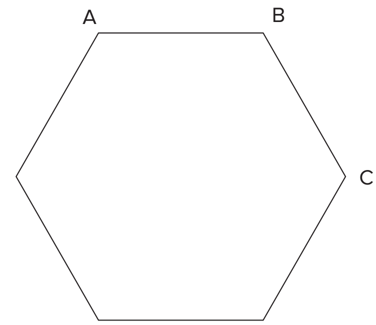
b) $2\sqrt{2}$

c) $3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{3}$

e) $2\sqrt{3}$

35. **Fuvest-SP** Os pontos A, B e C são vértices de um hexágono regular de área 6. Qual a área do triângulo ABC?



a) 1

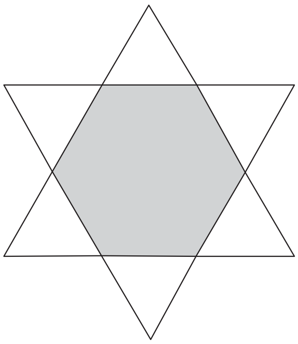
b) 2

c) 3

d) $\sqrt{2}$

e) $\sqrt{3}$

36. **Unifesp** O hexágono cujo interior aparece destacado em cinza na figura é regular e origina-se da sobreposição de dois triângulos equiláteros.



Se k é a área do hexágono, a soma das áreas desses dois triângulos é igual a:

a) k

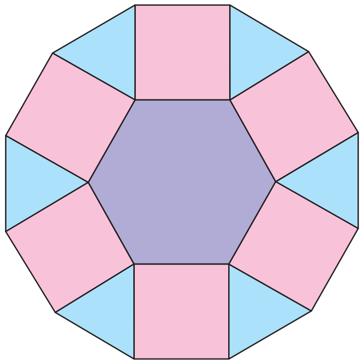
b) $2k$

c) $3k$

d) $4k$

e) $5k$

37. **UPF-RS 2021**



O mosaico acima é composto por um hexágono regular, quadrados e triângulos. Os lados do hexágono têm comprimento a. Se a área do hexágono é $192\sqrt{3}$ cm^2, a área de cada quadrado, em cm^2, é:

a) 96

b) $64\sqrt{3}$

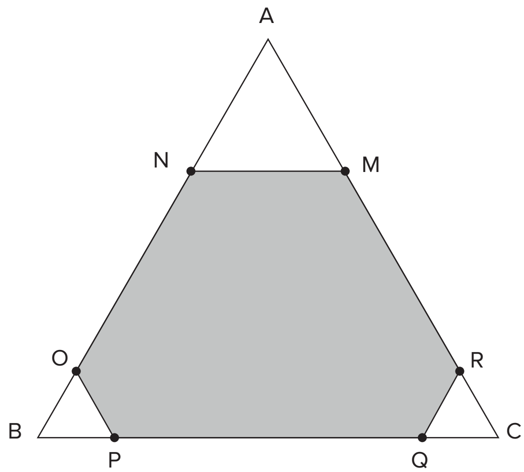
c) 128

d) $14\sqrt{3}$

e) $8\sqrt{2}$

38. Insper-SP 2012 Na figura a seguir, os pontos M, N, O, P, Q e R pertencem aos lados do triângulo equilátero ABC, de perímetro 6 cm, de modo que:

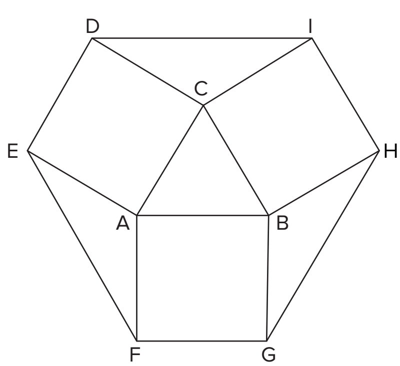
- AM = AN = $2x$ cm;
- BO = BP = CQ = CR = x cm.



Se a área do hexágono MNOPQR é metade da área do triângulo ABC, então o valor de x é igual a:

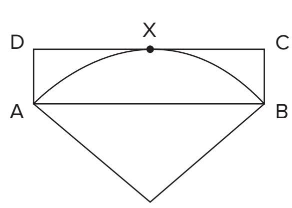
a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{1}{4}$

39. Fuvest-SP Na figura, o triângulo ABC é equilátero de lado 1, e ACDE, AFGB e BHIC são quadrados. A área do polígono DEFGHI vale:



a) $1+\sqrt{3}$
b) $2+\sqrt{3}$
c) $3+\sqrt{3}$
d) $3+2\sqrt{3}$
e) $3+3\sqrt{3}$

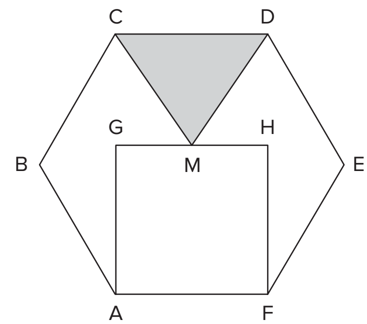
40. Fuvest-SP Na figura, OAB é um setor circular com centro em O, ABCD é um retângulo e o segmento $\overline{CD}$ é tangente em X ao arco de extremos A e B do setor circular.



Se AB = $2\sqrt{3}$ e AD = 1, então a área do setor OAB é igual a:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{4\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{3}$ e) $\frac{7\pi}{3}$

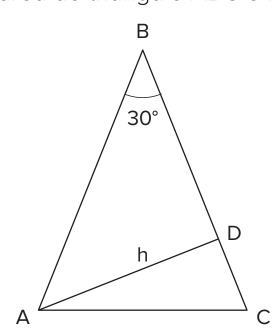
41. UFRGS 2020 Considere o hexágono regular ABCDEF de lado 1. Sobre o lado $\overline{AF}$ do hexágono, constrói-se o quadrado AGHF, como mostra a figura abaixo. Sendo M o ponto médio de $\overline{GH}$, constrói-se o triângulo CDM.



A área do triângulo CDM é:

a) $\sqrt{3}-1$
b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

42. Unicamp-SP 2020 A figura abaixo exibe o triângulo ABC, em que AB = BC e AD é uma altura de comprimento h. A área do triângulo ABC é igual a

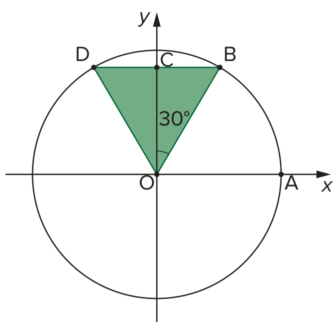


a) h^2
b) $\sqrt{2}h^2$
c) $\sqrt{3}h^2$
d) $2h^2$

43. Unifesp Se um arco de 60° num círculo I tem o mesmo comprimento de um arco de 40° num círculo II, então a razão da área do círculo I pela área do círculo II é:

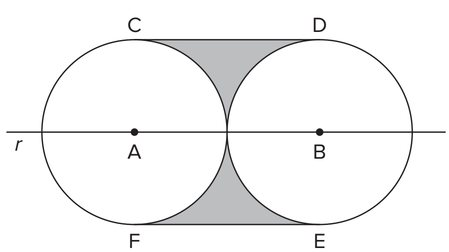
a) $\frac{2}{9}$
b) $\frac{4}{9}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{3}{2}$
e) $\frac{9}{4}$

44. UPF-RS 2020 Na figura abaixo, está representado, em referencial xOy, o círculo trigonométrico. Os pontos B e D pertencem à circunferência, sendo o segmento $\overline{DB}$ paralelo ao eixo x. O ângulo $B\hat{O}C$ tem 30° de amplitude. A área do triângulo OBD é:



a) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) 3

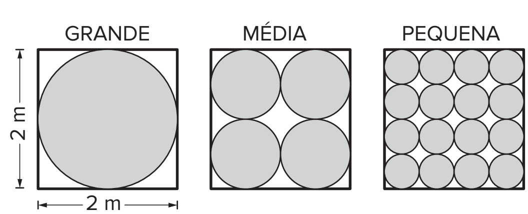
45. UFRGS 2020 Considere dois círculos tangentes entre si, de centros A e B sobre a reta r, e tais que o raio de cada um tenha medida 10. Os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{FE}$ são tangentes aos círculos e têm extremidades nos pontos de tangência C, D, E e F, como representado na figura a seguir.



A área da região sombreada é:

a) $100 - 25\pi$
b) $200 - 50\pi$
c) $200 + 50\pi$
d) $400 - 100\pi$
e) $400 + 100\pi$

46. Enem Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



Área do círculo: πr^2

As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que:

a) a entidade I recebe mais material do que a entidade II.
b) a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.
c) a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.
d) as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.
e) as três entidades recebem iguais quantidades de material.

47. Unifesp Você tem dois pedaços de arame de mesmo comprimento e pequena espessura. Um deles você usa para formar o círculo da figura I, e o outro você corta em 3 partes iguais para formar os três círculos da figura II.

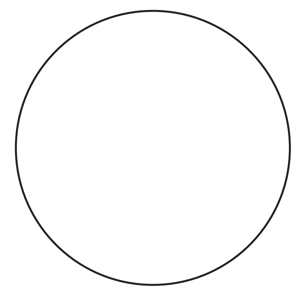


Figura I

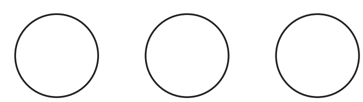
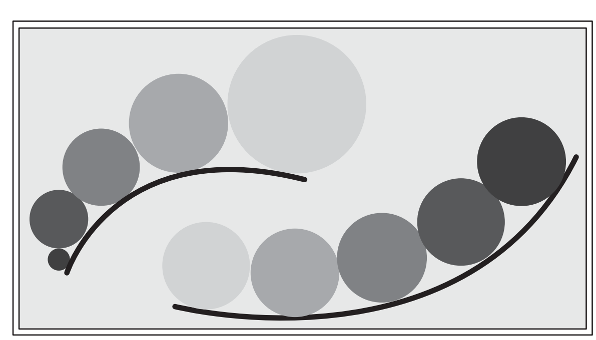


Figura II

Se S é a área do círculo maior e s é a área de um dos círculos menores, a relação entre S e s é dada por:

a) $S = 3s$
b) $S = 4s$
c) $S = 6s$
d) $S = 8s$
e) $S = 9s$

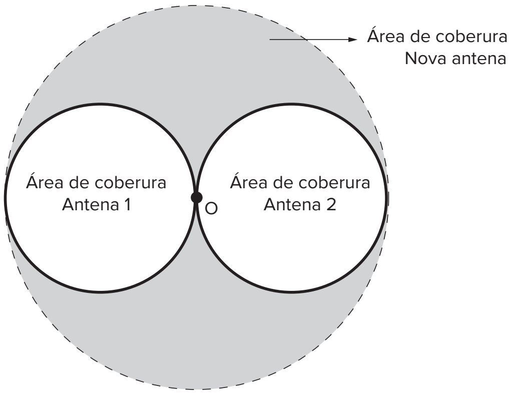
48. A figura a seguir apresenta um painel composto de dois grupos de cinco círculos cada, sendo que, no primeiro, os círculos têm tamanhos diferentes e, no segundo, o mesmo tamanho.



Sabendo que a área ocupada por ambos os grupos de cinco círculos é a mesma, e que os raios dos círculos do primeiro grupo medem 1 dm, 3 dm, 4 dm, 5 dm e 7 dm, assinale a alternativa que apresenta a média, em decímetros, dos raios dos círculos do segundo grupo.

a) $2\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{5}$ d) $5\sqrt{2}$ e) $4\sqrt{5}$

49. Enem 2015 Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.
Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em:

a) 8π
b) 12π
c) 16π
d) 32π
e) 64π

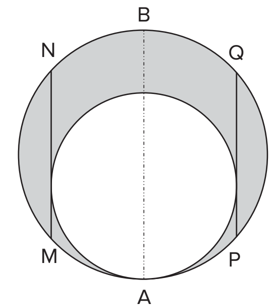
50. Um alvo de dardos tem um círculo central de diâmetro *a* e duas coroas circulares determinadas por circunferências de diâmetros 3*a* e 5*a*. Como se trata de uma versão infantil, os dardos não têm ponta, mas ficam presos no alvo, pois este contém diversos pinos de plástico, distribuídos de forma homogênea, que fixam o dardo quando ele é lançado corretamente.

KPad/Shutterstock.com

Se, no círculo central, há exatamente 52 pinos, pode-se estimar que a coroa circular exterior desse alvo contém, aproximadamente:

a) 104 pinos.
b) 416 pinos.
c) 468 pinos.
d) 832 pinos.
e) 1 300 pinos.

51. UPE 2012 A logomarca de uma empresa é formada por dois círculos tangentes e por três segmentos de reta paralelos, sendo que o segmento $\overline{AB}$ contém os centros dos círculos, e os segmentos $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ são tangentes ao círculo menor, medindo 6 cm cada um, como mostra a figura a seguir. Quanto mede a área da superfície cinza da logomarca?

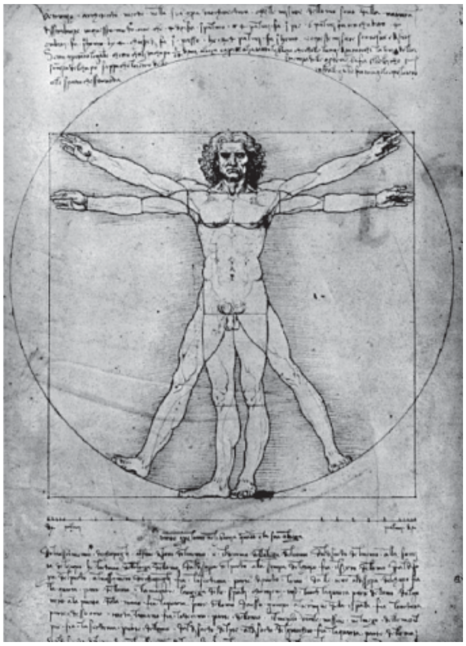


a) $\frac{9\pi}{2}$ **b)** $\frac{3\pi}{2}$ **c)** 9π **d)** 3π **e)** 2π

52. Uerj 2020 Um valor aproximado da área do círculo pode ser obtido elevando-se ao quadrado $\frac{8}{9}$ do seu diâmetro. Fazer esse cálculo corresponde a substituir, na fórmula da área do círculo, o valor de π por um número racional. Esse número é igual a:

a) $\frac{128}{9}$
b) $\frac{256}{9}$
c) $\frac{128}{81}$
d) $\frac{256}{81}$

53. UFSJ-MG 2012

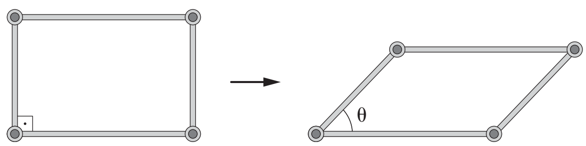


Fonte: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/imagem/*wm*000002.jpg>. Acesso em: 12 set. 2011.

A figura apresentada é conhecida como *Homem Vitruviano* (Leonardo da Vinci, 1490). Nela, um homem nu aparece inscrito em um quadrado e em um círculo, ambos de mesma área. Considerando R o raio desse círculo e L o lado desse quadrado, é correto afirmar que:

a) $R = \frac{L}{2}$
b) $\pi = \left(\frac{L}{R}\right)^2$
c) $\pi = \frac{L^2}{2R}$
d) $\pi = \frac{2L}{R}$

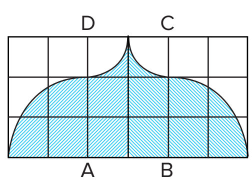
54. Fuvest-SP 2020 Um objeto é formado por 4 hastes rígidas conectadas em seus extremos por articulações, cujos centros são os vértices de um paralelogramo. As hastes movimentam-se de tal forma que o paralelogramo permanece sempre no mesmo plano. A cada configuração desse objeto, associa-se θ, a medida do menor ângulo interno do paralelogramo. A área da região delimitada pelo paralelogramo quando $\theta = 90°$ é A.



Para que a área da região delimitada pelo paralelogramo seja $\frac{A}{2}$, o valor de θ é, necessariamente, igual a

a) 15°
b) 22,5°
c) 30°
d) 45°
e) 60°

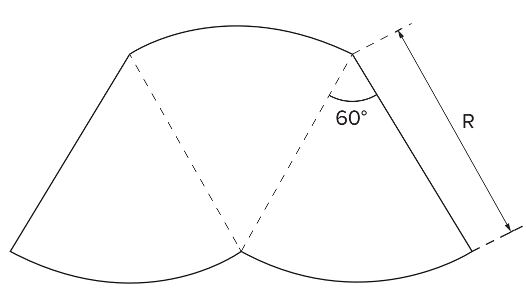
55. Os arcos góticos flamejantes são construções bastante comuns na arquitetura renascentista. Eles são compostos de quatro arcos de circunferência que, embora variem de raio e comprimento, apresentam simetria bilateral.
A figura a seguir mostra um arco gótico flamejante em uma malha de 18 quadrados congruentes em que os pontos A, B, C e D são os centros dos arcos que o compõem.



Se a área hachurada abaixo do arco gótico é dada por um número da forma $a + b \cdot \pi$, com a e b racionais, então a razão $\frac{b}{a}$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 1

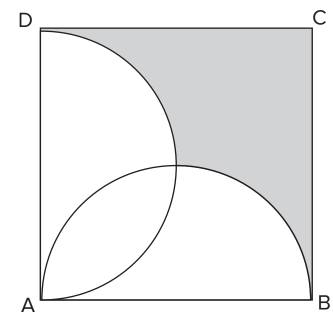
56. Enem 2015 O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a 60°. O raio R deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões 50 m × 24 m.
O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente. Considere 3,0 como aproximação para π.
O maior valor possível para R, em metros, deverá ser:

a) 16
b) 28
c) 29
d) 31
e) 49

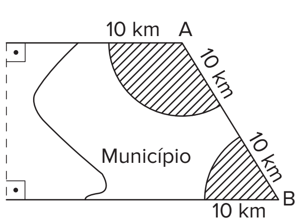
57. UFRGS 2013 Observe a figura a seguir.



No quadrado ABCD de lado 2, os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são diâmetros dos semicírculos. A área da região sombreada é:

a) $3 - \frac{\pi}{4}$
b) $4 - \frac{\pi}{2}$
c) $3 - \pi$
d) $4 - \pi$
e) $3 - \frac{\pi}{2}$

58. Enem Um município de 628 km^2 é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura:

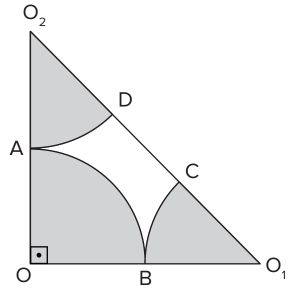


Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.
Essa probabilidade é de, aproximadamente:

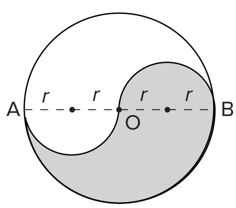
a) 20%
b) 25%
c) 30%
d) 35%
e) 40%

FRENTE 3

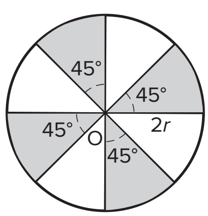
59. EPCar-MG 2012 Considere a área S da parte sombreada no triângulo retângulo isósceles OO_1O_2.$\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{BC}$ são arcos de circunferência com centros em O_2, O e O_1, respectivamente, cujos raios medem $2r$.



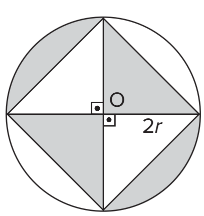
Das figuras a seguir, a única em que a área sombreada **não** é igual a S é:

a) 

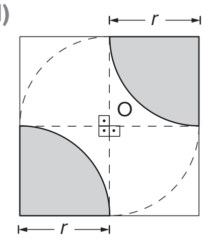
Circunferência de diâmetro $\overline{AB}$ e semicircunferências de diâmetros $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$.

b) 

Circunferência de centro O.

c) 

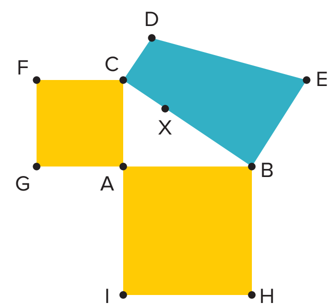
Circunferência de centro O.

d) 

Circunferência de centro O inscrita num quadrado. Dois setores circulares de raio r.

60. Uerj 2018 Considere na imagem abaixo:

- os quadrados ACFG e ABHI, cujas áreas medem, respectivamente, S_1 e S_2;
- o triângulo retângulo ABC;
- o trapézio retângulo BCDE, construído sobre a hipotenusa BC, que contém o ponto X.



Sabendo que CD = CX e BE = BX, a área do trapézio BCDE é igual a:

a) $\dfrac{S_1 + S_2}{2}$

b) $\dfrac{S_1 + S_2}{3}$

c) $\sqrt{S_1 \cdot S_2}$

d) $\sqrt{(S_1)^2 + (S_2)^2}$

Texto complementar

Quadratura do círculo

O problema da quadratura do círculo é um dos três problemas clássicos da Geometria grega; consiste em construir, usando apenas régua e compasso, um quadrado com a mesma área que a de um círculo dado.

Resolução do problema

Como aconteceu com os restantes dois problemas, demonstrou-se no século XIX que o problema da quadratura do círculo não tem solução. Essa demonstração foi obtida em várias fases. Em 1801, no seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss afirmou que, dado um número natural ímpar $n > 1$, são condições equivalentes:

- é possível construir um polígono regular com n lados usando apenas régua e compasso;
- n pode ser escrito como produto de números primos distintos da forma $2^{2^k} + 1$ (os chamados "primos de Fermat", dos quais só se conhecem cinco: 3, 5, 17, 257 e 65 537).

No entanto, Gauss apenas publicou a demonstração de que a segunda condição implica a primeira.

O primeiro matemático a publicar efetivamente uma demonstração da impossibilidade de se efetuarem determinadas construções geométricas apenas com régua e compasso foi o francês Pierre Laurent Wantzel, em 1837.

Como é que se pode demonstrar que é *impossível* efetuar uma determinada construção com régua e compasso? É claro que para mostrar que uma certa construção é *possível* basta levá-la efetivamente a cabo. O que Wantzel conseguiu provar, influenciado pelas ideias de Gauss, foi que se se conseguir, partindo de dois pontos A e B, construir um ponto C com régua e compasso, então o quociente q entre as distâncias de A e C e de A e B tem as seguintes propriedades:

- O número q é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos (ou seja, é aquilo que se designa por um *número algébrico*).
- Se $P(x) = 0$ for uma equação polinomial de grau mínimo entre as equações polinomiais com coeficientes inteiros não todos nulos das quais q é uma solução, então o grau de $P(x)$ é uma potência de 2. [...]

Impossibilidade da quadratura do círculo

Não é difícil ver que se fosse possível resolver o problema da quadratura do círculo, então resultaria das observações de Gauss e de Wantzel que $\sqrt{\pi}$ seria um número algébrico. De fato, se fosse possível, partindo de dois pontos A e B, construir um ponto C tal que o círculo de centro A que passa por B e um quadrado em que um dos lados fosse o segmento que une A a C tivessem a mesma área, então o quociente entre os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ seria um número algébrico. Mas, por outro lado, se r fosse a distância de A a B, então a área do círculo seria igual a πr^2, pelo que o comprimento do segmento $\overline{AC}$ seria necessariamente igual a $\sqrt{\pi} \cdot r$ e então o quociente entre os comprimentos dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ seria $\sqrt{\pi}$.

Embora não seja óbvio, afirmar que $\sqrt{\pi}$ é algébrico equivale a afirmar que π é algébrico. Mas em 1882 o matemático alemão Ferdinand von Lindermann demonstrou que π é transcendente (ou seja, não é solução de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos) pelo que é impossível efetuar a quadratura do círculo apenas com régua e compasso.

Será realmente impossível?

Foi dito acima que o problema da quadratura do círculo não tem solução, mas isto quer somente dizer que não é possível construir, usando apenas régua e compasso, um quadrado com a mesma área que a de um círculo dado. Usando outras ferramentas, tal como a quadratriz de Hípias, é possível resolver o problema. [...]

SANTOS, José Carlos. *Faculdade de Ciências da Universidade do Porto*. Disponível em: https://www.fc.up.pt/mp/jcsantos/quadratura.html. Acesso em: 5 nov. 2021.

Resumindo

Principais unidades de área

$1\ m^2 = 10\,000\ cm^2$ $\quad$ $1\ km^2 = 1\,000\,000\ m^2$

Áreas dos quadriláteros

$A_{Quadrado} = (lado)^2$ $\quad$ $A_{Retângulo} = base \cdot altura$

$A_{Paralelogramo} = base \cdot altura$

$$A_{Losango} = \frac{diagonal\ maior \cdot diagonal\ menor}{2}$$

$$A_{Trapézio} = \frac{(base\ maior + base\ menor) \cdot altura}{2}$$

Teorema da razão de semelhança

Se duas figuras forem semelhantes e o número k for a razão dessa semelhança, então a razão entre as áreas dessas figuras será igual a k^2.

Leis e fórmulas para o cálculo das áreas de triângulos

Fundamental

A área é igual à metade do produto das medidas da base pela altura relativa a essa base.

$$S_{\triangle} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Trigonométrica

A área é igual à metade do produto de dois de seus lados pelo seno do ângulo formado por eles.

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot b \cdot sen(\theta)}{2}$$

Fórmula de Heron

A área é igual à raiz quadrada do produto do semiperímetro pelas diferenças entre o semiperímetro e a medida de cada um dos lados.

$$S_{\triangle} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} \quad \text{com} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

Triângulo circunscrito

A área é igual ao produto do semiperímetro pela medida do raio da circunferência inscrita no triângulo.

$$S_{\triangle} = p \cdot r \text{ com } p = \frac{a+b+c}{2}$$

Triângulo inscrito

A área é igual ao produto das medidas dos lados dividido pelo dobro do diâmetro (quádruplo do raio) do círculo que circunscreve o triângulo.

$$S_{\triangle} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4 \cdot R}$$

Polígonos regulares

Área do triângulo equilátero de lados medindo ℓ:

$$S_{\triangle equilátero} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

Área do hexágono regular de lados medindo ℓ:

$$S_{Hexágono} = 6 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{2}$$

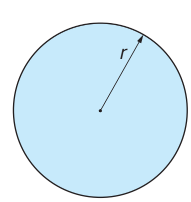
Polígono de n lados circunscrito a uma circunferência de raio r:

$$S = n \cdot r^2 \cdot tg\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Polígono de n lados inscrito em uma circunferência de raio R:

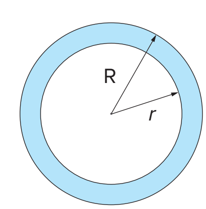
$$S = \frac{n \cdot R^2}{2} \cdot sen\left(\frac{360°}{n}\right)$$

O círculo e suas partes



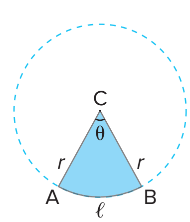
Área do círculo

$S_{\odot} = \pi \cdot r^2$



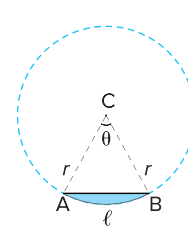
Área da coroa circular

$S_{Coroa} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$



Área do setor circular

$$S_{Setor} = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$$



Área do segmento circular

$S_{Segmento} = S_{Setor} - S_{\triangle ABC}$

Quer saber mais?

Site

A História da Geometria. Disponível em: www.somatematica.com.br/geometria.php. Acesso em: 17 nov. 2021.

Conheça um pouco das ideias e necessidades que levaram ao desenvolvimento da Geometria.

Vídeo

Número pi – História e aplicações. Disponível em: www.ime.unicamp.br/~apmat/numero-pi/. Acesso em: 17 nov. 2021.

Como surgiu, quanto vale, ao que corresponde? Conheça um pouco mais sobre o número π.

Exercícios complementares

1. **Enem** O quadro apresenta informações da área aproximada de cada bioma brasileiro.

Biomas continentais brasileiros	Área aproximada (km^2)	Área/total Brasil
Amazônia	4 196 943	49,29%
Cerrado	2 036 448	23,92%
Mata atlântica	1 110 182	13,04%
Caatinga	844 453	9,92%
Pampa	176 496	2,07%
Pantanal	150 355	1,76%
Área total Brasil	8 514 877	

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 10 jul. 2009 (Adapt.).

É comum em conversas informais, ou mesmo em noticiários, o uso de múltiplos da área de um campo de futebol (com medidas de 120 m × 90 m) para auxiliar a visualização de áreas consideradas extensas. Nesse caso, qual é o número de campos de futebol correspondente à área aproximada do bioma Pantanal?

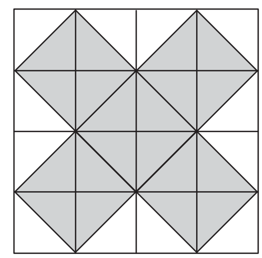
a) 1 400
b) 14 000
c) 140 000
d) 1 400 000
e) 14 000 000

2. **Unicamp-SP** Supondo que a área média ocupada por uma pessoa em um comício seja de 2 500 cm^2, pergunta-se:

a) Quantas pessoas poderão se reunir em uma praça retangular que mede 150 metros de comprimento por 50 metros de largura?

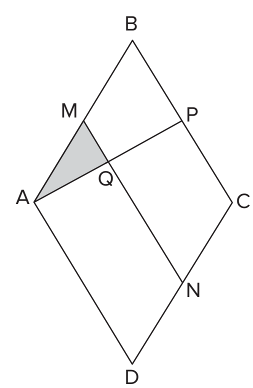
b) Se $\frac{3}{56}$ da população de uma cidade lota a praça, qual é, então, a população da cidade?

3. A figura a seguir apresenta um grande quadrado composto de diversos triângulos retângulos congruentes, sendo alguns brancos e outros escurecidos. Qual a fração decimal que representa a parte escurecida do quadrado maior em relação ao quadrado todo?



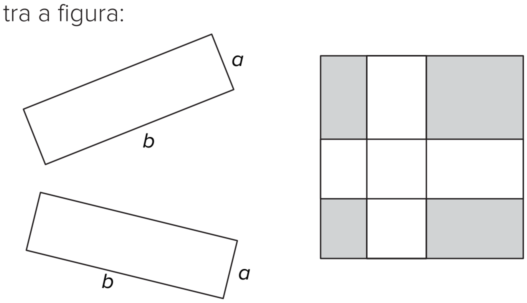
a) $\frac{375}{1000}$ **b)** $\frac{625}{1000}$ **c)** $\frac{75}{100}$ **d)** $\frac{25}{100}$ **e)** $\frac{6}{10}$

4. Na figura a seguir, M, N e P são os respectivos pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$ do losango ABCD, cujas diagonais medem 8 cm e 6 cm.



Sendo Q o ponto de interseção dos segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{MN}$, determine a área do triângulo AMQ.

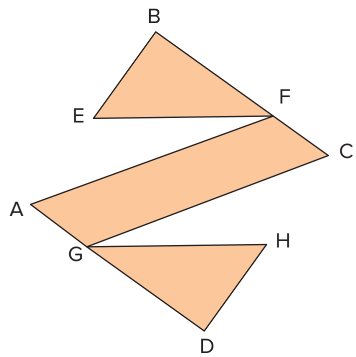
5. Duas faixas retangulares de dimensões $a \times b$ foram sobrepostas no interior de um quadrado, como mostra a figura:



Desse modo, a área da região sombreada dentro do quadrado e fora das faixas sobrepostas pode ser expressa por:

a) $a(a - 2b)$ **c)** $b(2a - b)$ **e)** $(a - b)^2$
b) $b(b - 2a)$ **d)** $(a + b)^2$

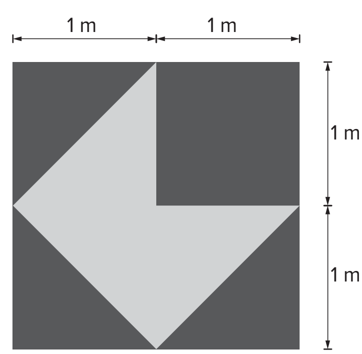
6. O logotipo da empresa Z é formado por um paralelogramo AGCF e dois triângulos retângulos congruentes entre si, BEF e DGH, como mostra a ilustração:



Sabendo que os pontos A, B, C e D são vértices de um quadrado de área 36 cm², que o logotipo ocupa $\frac{2}{3}$ dessa área e que a área do paralelogramo equivale às áreas dos dois triângulos retângulos juntos, determine a medida do segmento $\overline{AF}$.

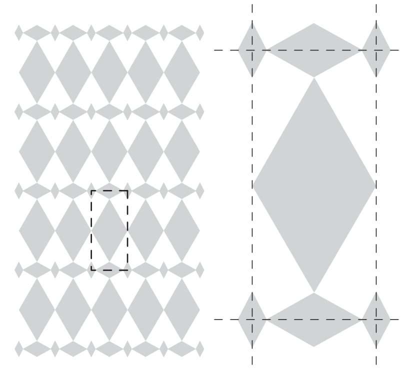
a) $2\sqrt{13}$ cm
b) $\sqrt{13}$ cm
c) $\sqrt{11}$ cm
d) $2\sqrt{11}$ cm
e) $11\sqrt{2}$ cm

7. **FGV-SP 2016** A figura a seguir representa a tela de um quadro pós-moderno, um quadrado cujos lados medem 2 metros. Deseja-se pintar o quadro nas cores cinza e preta, como descrito na figura.



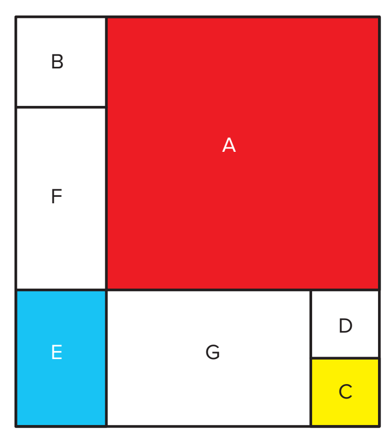
a) Qual a área que deverá ser pintada em preto? Expresse a resposta em metros quadrados. Qual é a proporção de cor preta para cor cinza?
b) Se a pintura na cor preta custa R$ 100,00 o metro quadrado, e a pintura na cor cinza, R$ 200,00 o metro quadrado, qual será o custo total de pintura do quadro?
c) Se as cores forem invertidas (sendo a área cinza pintada de preto e a área preta pintada de cinza), qual será a variação percentual do custo total de pintura do quadro, com relação ao custo total obtido no item *b*?

8. Uma tapeçaria é composta de losangos, e, em cada losango, a diagonal maior mede o dobro da diagonal menor. As figuras a seguir apresentam, respectivamente, a tapeçaria toda e a ampliação de um detalhe inscrito em um retângulo pontilhado de 20 cm por 48 cm.



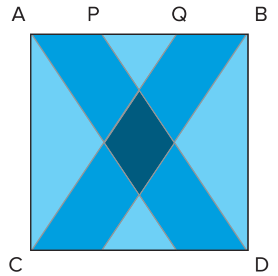
Nessas condições, é correto afirmar que a área do losango maior é:
a) duas vezes e meia a área do losango menor.
b) cinco vezes a área do losango menor.
c) dez vezes a área do losango menor.
d) vinte e cinco vezes a área do losango menor.
e) cem vezes a área do losango menor.

9. No início do século XX, surgiu, na Europa, um movimento artístico de arte e pesquisa denominado Neoplasticismo. Os experimentos geométricos realizados pelos artistas que participaram desse movimento tiveram grande influência na arquitetura moderna e, de certa maneira, definiram o que hoje chamamos de *design*. O holandês Piet Mondrian pintou uma série de quadros intitulada *Composition with colors*, que é, provavelmente, a obra mais famosa do Neoplasticismo. A figura a seguir é uma representação de um dos quadros dessa coleção:



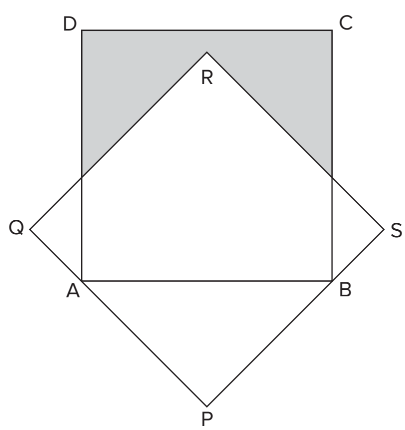
Esse quadro apresenta um quadrado vermelho grande (A), um quadrado branco de tamanho médio (B) e dois quadrados pequenos congruentes, sendo um amarelo (C) e o outro branco (D), além de três retângulos, sendo um azul (E) e dois brancos (F e G).
Considere que o quadro tenha dimensões de 64 cm por 72 cm e que a área do quadrado A seja igual a nove vezes a área do quadrado B e a dezesseis vezes a área do quadrado C.
Desprezando a espessura das linhas que contornam os quadriláteros da ilustração, determine:
a) a razão entre os lados dos quadrados A e B e a razão entre os lados dos quadrados A e D.
b) as medidas dos lados dos quadrados A, B e C.
c) a área dos retângulos E, F e G.

10. A figura a seguir é a bandeira da equipe de xadrez de um determinado colégio. Nessa bandeira ABCD, quadrada, de 90 cm de lado, há duas faixas que se cruzam formando uma grande letra X e um pequeno losango, no qual será bordado o brasão da escola.



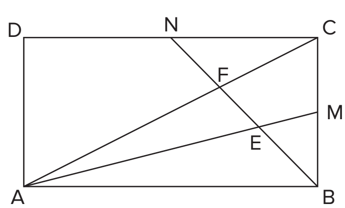
Sabendo que os pontos P e Q dividem o lado do quadrado ABCD em três partes congruentes, calcule a área do losango determinado no centro da bandeira.

11. Dois quadrados ABCD e PQRS, ambos com 2 cm de lado, foram dispostos de tal forma que os vértices A e B de um quadrado ficaram, respectivamente, sobre os lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PS}$ do outro quadrado, como mostra a figura:



Determine a área da região escurecida da figura formada pelos dois quadrados sabendo que ela apresenta simetria bilateral.

12. Fuvest-SP 2017 Na figura, o retângulo ABCD tem lados de comprimento AB = 4 e BC = 2. Sejam M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e N o ponto médio do lado $\overline{CD}$. Os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{AC}$ interceptam o segmento $\overline{BN}$ nos pontos E e F, respectivamente.



A área do triângulo AEF é igual a:

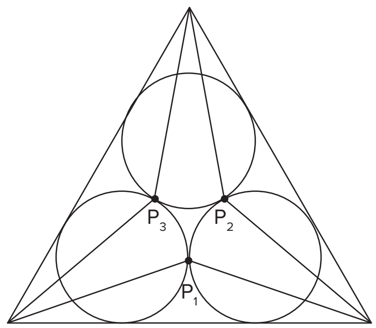
a) $\frac{24}{25}$ **b)** $\frac{29}{30}$ **c)** $\frac{61}{60}$ **d)** $\frac{16}{15}$ **e)** $\frac{23}{20}$

13. Fuvest-SP No triângulo ABC, tem-se que AB > AC, AC = 4 e $\cos \hat{C} = \frac{3}{8}$. Sabendo-se que o ponto R pertence ao segmento $\overline{BC}$ e é tal que AR = AC e $\frac{BR}{BC} = \frac{4}{7}$, calcule:

a) a altura do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{BC}$.

b) a área do triângulo ABR.

14. Fuvest-SP 2016 São dadas três circunferências de raio *r*, duas a duas tangentes. Os pontos de tangência são P_1, P_2 e P_3.

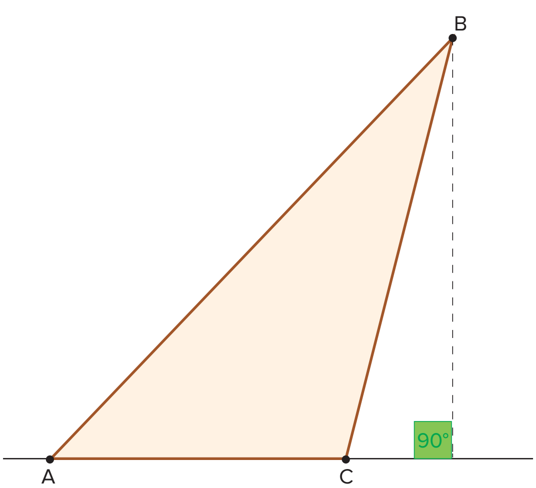


Calcule, em função de *r*:

a) o comprimento do lado do triângulo equilátero T determinado pelas três retas que são definidas pela seguinte exigência: cada uma delas é tangente a duas das circunferências e não intersecta a terceira.

b) a área do hexágono não convexo cujos lados são os segmentos ligando cada ponto P_1, P_2 e P_3 aos dois vértices do triângulo T mais próximos a ele.

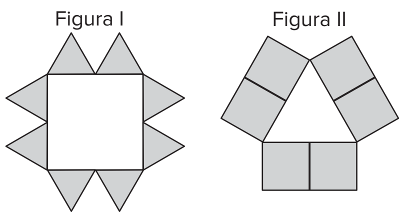
15. Unicamp-SP 2013 Os lados do triângulo ABC da figura a seguir têm as seguintes medidas: AB = 20, BC = 15 e AC = 10.



a) Sobre o lado $\overline{BC}$ marca-se um ponto D tal que BD = 3 e traça-se o segmento $\overline{DE}$ paralelo ao lado $\overline{AC}$. Ache a razão entre a altura H do triângulo ABC relativa ao lado $\overline{AC}$ e a altura h do triângulo EBD relativa ao lado $\overline{ED}$, sem explicitar os valores de *h* e H.

b) Calcule o valor explícito da altura do triângulo ABC em relação ao lado AC.

16. As figuras a seguir apresentam apenas quadrados e triângulos equiláteros. Na figura I, os triângulos equiláteros são todos congruentes entre si, ao passo que, na figura II, são os quadrados todos congruentes entre si.



Se o lado do quadrado da figura I mede o mesmo que o lado do triângulo equilátero da figura II, então a razão entre as áreas das figuras I e II é igual a:

a) $\dfrac{18+8\sqrt{3}}{33}$

b) $\dfrac{8+18\sqrt{3}}{33}$

c) $\dfrac{8+33\sqrt{3}}{18}$

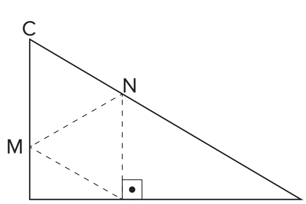
d) $\dfrac{33+8\sqrt{3}}{18}$

e) $\dfrac{33+18\sqrt{3}}{8}$

17. Fuvest-SP A soma das distâncias de um ponto interior de um triângulo equilátero aos seus lados é 9. Assim, a medida do lado do triângulo é:

a) $5\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{3}$
c) $7\sqrt{3}$
d) $8\sqrt{3}$
e) $9\sqrt{3}$

18. Fuvest-SP O triângulo retângulo ABC, cujos catetos $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ medem 1 e $\sqrt{3}$, respectivamente, é dobrado de tal forma que o vértice C coincida com o ponto D do lado $\overline{AB}$. Seja $\overline{MN}$ o segmento ao longo do qual ocorreu a dobra. Sabendo que o ângulo $N\hat{D}B$ é reto, determine:



a) o comprimento dos segmentos $\overline{CN}$ e CM.
b) a área do triângulo CMN.

19. Nos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ de um quadrado ABCD com lado 1, tomam-se os pontos P e Q de forma que o triângulo PQC seja isósceles com CP = CQ. Qual deve ser a medida do segmento $\overline{AP}$ para que a área do triângulo PQC seja igual a $\dfrac{1}{4}$?

a) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

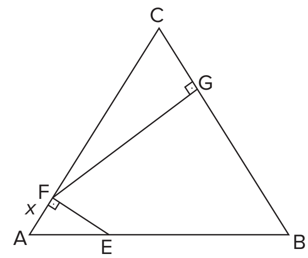
c) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

d) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

e) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

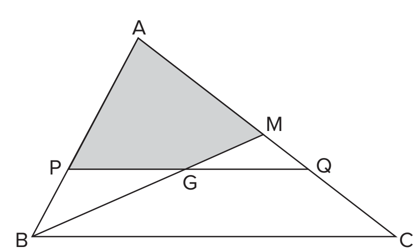
20. Unicamp-SP Um triângulo equilátero tem o mesmo perímetro que um hexágono regular cujo lado mede 1,5 cm. Calcule:
a) o comprimento de cada lado do triângulo.
b) a razão entre as áreas do hexágono e do triângulo.

21. Fuvest-SP



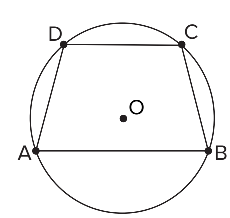
O triângulo ABC da figura é equilátero de lado 1. Os pontos E, F e G pertencem, respectivamente, aos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo. Além disso, os ângulos $A\hat{F}E$ e $C\hat{G}F$ são retos e a medida do segmento $\overline{AF}$ é *x*. Assim, determine:
a) a área do triângulo AFE em função de *x*.
b) o valor de *x* para o qual o ângulo $F\hat{E}G$ também é reto.

22. Uma reta paralela à base $\overline{BC}$ do triângulo ABC intercepta a mediana $\overline{BM}$ no baricentro G, determinando os pontos P e Q sobre os lados do triângulo, como mostra a figura:



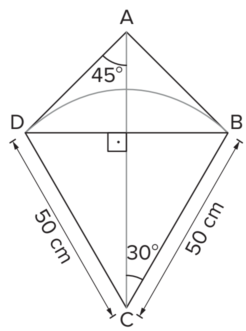
Se o triângulo ABC tem 18 m^2 de área, determine a área do quadrilátero APGM.

23. Fuvest-SP A figura representa um trapézio ABCD de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, inscrito em uma circunferência cujo centro O está no interior do trapézio. Sabe-se que AB = 4, CD = 2 e $AC = 3\sqrt{2}$.



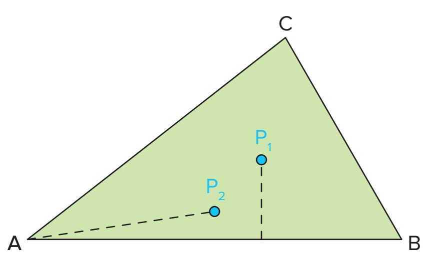
a) Determine a altura do trapézio.
b) Calcule o raio da circunferência na qual ele está inscrito.
c) Calcule a área da região exterior ao trapézio e delimitada pela circunferência.

24. Unicamp-SP O papagaio (também conhecido como pipa, pandorga ou arraia) é um brinquedo muito comum no Brasil. A figura a seguir mostra as dimensões de um papagaio simples, confeccionado com uma folha de papel que tem o formato do quadrilátero ABCD, duas varetas de bambu (indicadas em cinza) e um pedaço de linha. Uma das varetas é reta e liga os vértices A e C da folha de papel. A outra, que liga os vértices B e D, tem o formato de um arco de circunferência e tangencia as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ nos pontos B e D, respectivamente.



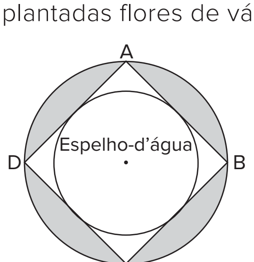
a) Calcule a área do quadrilátero de papel que forma o papagaio.
b) Calcule o comprimento da vareta de bambu que liga os pontos B e D.

25. Os lados de um terreno triangular ABC medem 100 m, 140 m e 160 m. No interior desse terreno, há dois poços artesianos situados nos pontos P_1 e P_2.



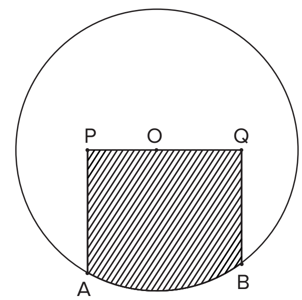
Sabendo que o poço em P_1 equidista dos lados do terreno e o poço em P_2 equidista dos vértices do terreno, determine:
a) a área entre o terreno ABC.
b) a distância entre o poço P_1 e o lado $\overline{AB}$ do terreno.
c) a distância entre o poço P_2 e o vértice A do terreno.

26. UFTM-MG A figura mostra o projeto de um paisagista para um jardim em um terreno plano. Sabe-se que os círculos são concêntricos e que a área do quadrado ABCD é igual a 100 m^2. No círculo inscrito no quadrado haverá um espelho-d'água, e na região sombreada do círculo circunscrito ao quadrado serão plantadas flores de várias espécies.



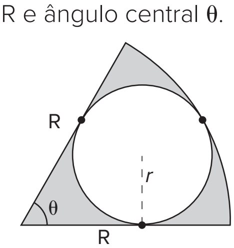
Usando $\pi \cong 3{,}1$, determine a área aproximada:
a) ocupada pelo espelho-d'água.
b) da região onde serão plantadas flores.

27. Fuvest-SP Na figura, estão representadas a circunferência C, de centro O e raio 2, e os pontos A, B, P e Q, de tal modo que:
1. O ponto O pertence ao segmento $\overline{PQ}$.
2. $OP = 1$, $OQ = \sqrt{2}$.
3. A e B são pontos da circunferência, $\overline{AP} \perp \overline{PQ}$ e $\overline{BQ} \perp \overline{PQ}$.



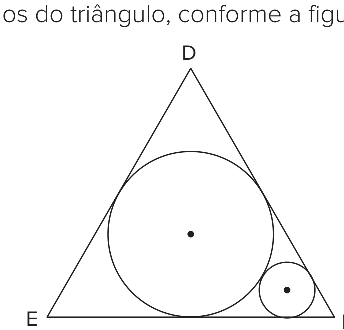
Assim sendo, determine:
a) a área do triângulo APO.
b) os comprimentos dos arcos determinados por A e B em C.
c) a área da região hachurada.

28. Unicamp-SP 2015 A figura a seguir exibe um círculo de raio *r* que tangencia internamente um setor circular de raio R e ângulo central θ.



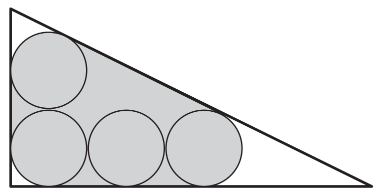
a) Para $\theta = 60°$, determine a razão entre as áreas do círculo e do setor circular.
b) Determine o valor de $\cos\theta$ no caso em que $R = 4r$.

29. Fuvest-SP O círculo C, de raio R, está inscrito no triângulo equilátero DEF. Um círculo de raio *r* está no interior do triângulo DEF e é tangente externamente a C e a dois lados do triângulo, conforme a figura.



Assim, determine:
a) a razão entre R e *r*.
b) a área do triângulo DEF em função de *r*.

30. Quatro circunferências de raios unitários estão dispostas no interior de um triângulo retângulo tangenciando seus lados, como mostra a figura:



Se cada circunferência tangencia também as circunferências vizinhas, a área da região hachurada vale:

a) $10 + 2\sqrt{5} + \pi$

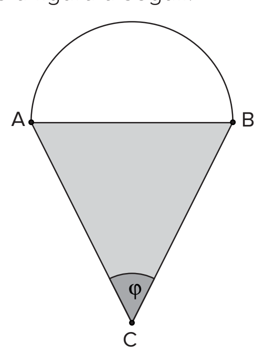
b) $5 + 2\sqrt{5} + 2\pi$

c) $5 + \sqrt{5} - \pi$

d) $10 + \sqrt{5} - \pi$

e) $5 + \sqrt{5} + 2\pi$

31. Unicamp-SP 2013 O segmento $\overline{AB}$ é o diâmetro de um semicírculo e a base de um triângulo isósceles ABC, conforme a figura a seguir.



Denotando as áreas das regiões semicircular e triangular, respectivamente, por S(φ) e T(φ), podemos afirmar que a razão $\frac{S(\varphi)}{T(\varphi)}$, quando $\varphi = \frac{\pi}{2}$ radianos, é:

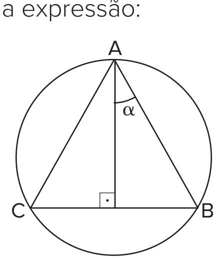
a) $\frac{\pi}{2}$

b) 2π

c) π

d) $\frac{\pi}{4}$

32. Fuvest-SP Na figura a seguir, o triângulo ABC inscrito na circunferência tem AB = AC. O ângulo entre o lado $\overline{AB}$ e a altura do triângulo ABC em relação a $\overline{BC}$ é α. Nestas condições, o quociente entre a área do triângulo ABC e a área do círculo da figura é dado, em função de α, pela expressão:



a) $\left(\frac{2}{\pi}\right)\cos^2 \alpha$

b) $\left(\frac{2}{\pi}\right)\text{sen}^2\, 2\alpha$

c) $\left(\frac{2}{\pi}\right)\text{sen}^2\, 2\alpha \cdot \cos\alpha$

d) $\left(\frac{2}{\pi}\right)\text{sen}\,\alpha \cdot \cos^2 \alpha$

e) $\left(\frac{2}{\pi}\right)\text{sen}\, 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha$

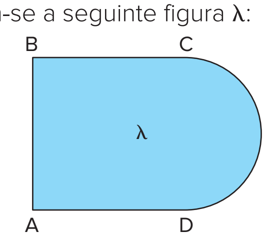
33. Unicamp-SP Em um triângulo com vértices A, B e C, inscrevemos um círculo de raio *r*. Sabe-se que o ângulo A tem 90° e que o círculo inscrito tangencia o lado $\overline{BC}$ no ponto P, dividindo esse lado em dois trechos com comprimentos PB = 10 e PC = 3.

a) Determine *r*.

b) Determine AB e AC.

c) Determine a área da região que é, ao mesmo tempo, interna ao triângulo e externa ao círculo.

34. Substituindo o lado $\overline{CD}$ de um quadrado ABCD, com 10 cm de lado, por uma semicircunferência de diâmetro CD, obtém-se a seguinte figura λ:



Considere a figura λ' formada pelos pontos exteriores à λ que distam exatamente 1 cm do contorno da figura λ.

a) Determine o perímetro aproximado de λ'.

b) Determine a área aproximada de λ'.

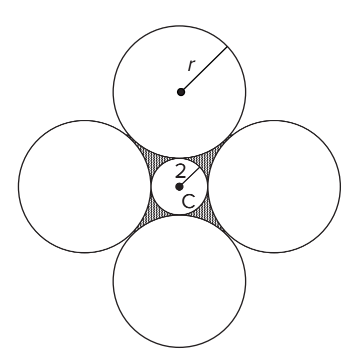
Dado: π = 3.

35. Unicamp-SP Entre todos os triângulos cujos lados têm como medidas números inteiros e perímetro igual a 24 cm, apenas um deles é equilátero e apenas um deles é retângulo. Sabe-se que um dos catetos do triângulo retângulo mede 8 cm.

a) Calcule a área do triângulo equilátero.

b) Encontre o raio da circunferência circunscrita ao triângulo retângulo.

36. Fuvest-SP Na figura a seguir, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio *r* e cada uma delas é tangente a outras duas e à circunferência interna C.



Se o raio de C é igual a 2, determinar:

a) o valor de *r*.

b) a área da região hachurada.

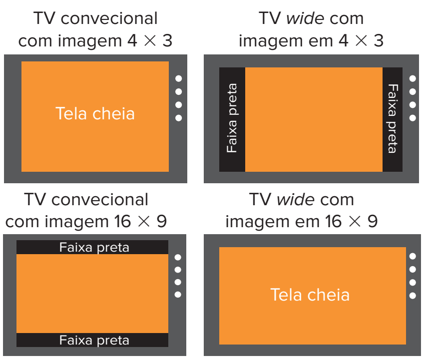
FRENTE 3

Texto para as questões de **37** a **39**.

Atualmente, as telas dos aparelhos de televisão são fabricadas em dois formatos: o convencional, chamado de *fullscreen*, e o *widescreen*. No primeiro, a tela é um retângulo com base e altura na proporção de 4 para 3, e no segundo essa proporção é de 16 para 9.

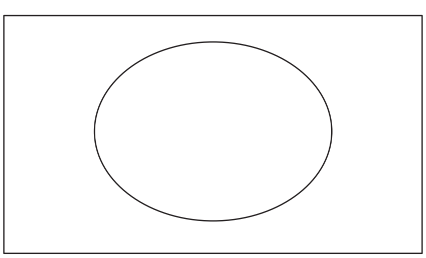
O formato 4 × 3 ainda é o ideal para se assistir à programação produzida para a TV, mas, para se assistir a uma produção cinematográfica, o formato de tela ideal é o 16 × 9. Por isso, os televisores têm um controle que adapta o formato da imagem em suas telas.

As figuras a seguir ilustram as quatro possíveis situações em relação ao formato da tela e da imagem:

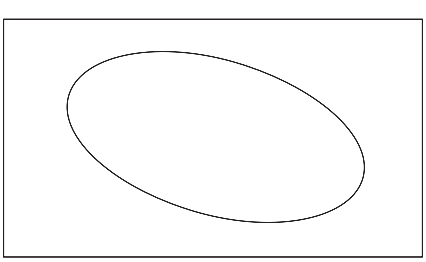


37. Paula tem dois aparelhos de TV, um convencional e outro com tela *widescreen*, que estão sintonizados em uma mesma transmissão exibindo imagens em tela cheia. Se, em determinado momento, ela vê a imagem perfeita de uma circunferência no aparelho convencional, então, nesse mesmo momento, na tela *widescreen*, vê-se uma imagem semelhante a:

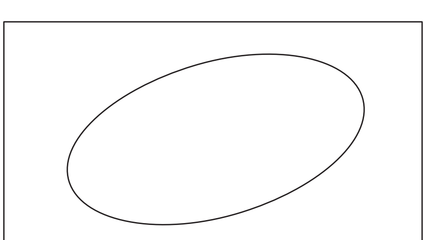
a)



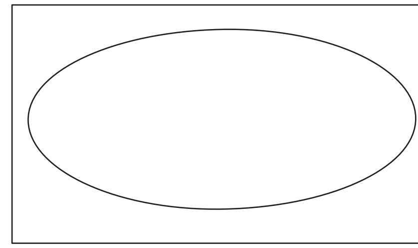
b)



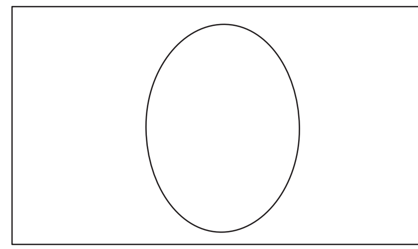
c)



d)



e)



38. Quando a proporção das dimensões da imagem difere da proporção das dimensões da tela, aparecem faixas pretas nos televisores. Considere a porcentagem X da tela *widescreen* que fica inutilizada quando ajustamos a imagem para 4 × 3 e a porcentagem Y da tela convencional que fica inutilizada quando ajustamos a imagem para 16 × 9.

Assinale a relação correta entre os valores de X e Y.

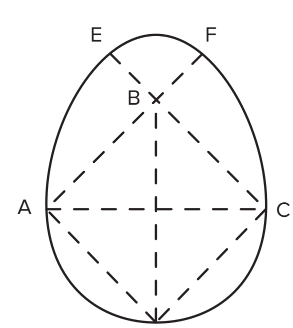
a) $X > 2Y$
b) $Y < 2X$
c) $X + Y = 100\%$
d) $X = Y$
e) $X - Y = 1\%$

39. Comercialmente, as telas de televisores são medidas pela diagonal. Então, quando compramos uma TV de 22 polegadas, não é a base nem a altura da tela que têm essa medida; é a diagonal da tela que possui 22 polegadas.

Considere dois aparelhos de televisão com 22 polegadas, um no formato convencional 4 × 3 e outro no formato *widescreen*. Calculando a razão entre as áreas das duas telas, pode-se concluir que a área da tela convencional é, aproximadamente,

a) 36% menor do que a área da tela *widescreen*.
b) 12% menor do que a área da tela *widescreen*.
c) igual à área da tela *widescreen*.
d) 12% maior do que a área da tela *widescreen*.
e) 36% maior do que a área da tela *widescreen*.

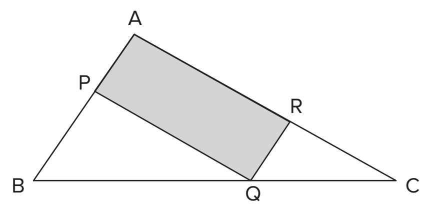
40. A forma geométrica oval a seguir é composta de 4 arcos de circunferências diferentes.



Os vértices A e C do quadrado ABCD são os centros dos arcos $\overset{\frown}{CF}$ e $\overset{\frown}{AE}$, respectivamente. O arco $\overset{\frown}{EF}$ tem centro no vértice B, e o arco $\overset{\frown}{AC}$ tem o centro no ponto de encontro das diagonais do quadrado.
Sabendo que o quadrado tem 32 cm^2 de área e usando as aproximações $\pi \cong 3{,}14$ e $\sqrt{2} \cong 1{,}41$, faça estimativas de valores inteiros para:

a) o perímetro dessa oval.
b) a área aproximada dessa oval.

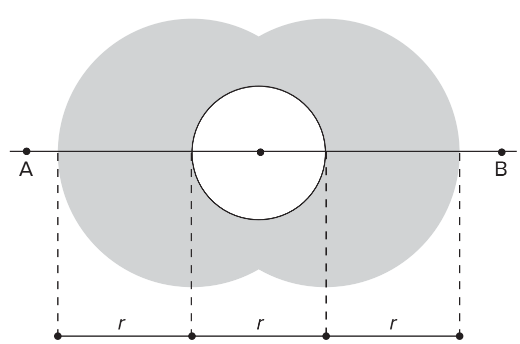
41. **AFA-SP 2017** Considere, no triângulo ABC a seguir, os pontos $P \in \overline{AB}$, $Q \in \overline{BC}$, $R \in \overline{AC}$ e os segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$ paralelos, respectivamente, a $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$.



Sabendo que BQ = 3 cm, QC = 1 cm e que a área do triângulo ABC é 8 cm^2, então a área do paralelogramo hachurado, em cm^2, é igual a:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

42. **AFA-SP 2014** Na figura a seguir, os três círculos têm centro sobre a reta $\overleftrightarrow{AB}$, e os dois de maior raio têm centro sobre a circunferência de menor raio.



A expressão que fornece o valor da área sombreada é:

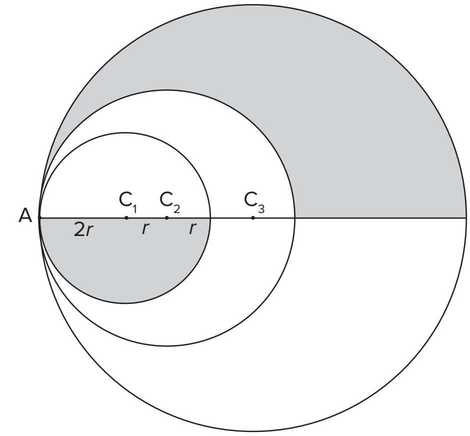
a) $\dfrac{17\pi - 6\sqrt{3}}{9}r^2$

b) $\dfrac{11\pi + 9\sqrt{3}}{12}r^2$

c) $\dfrac{15\pi - 4\sqrt{3}}{9}r^2$

d) $\dfrac{13\pi + 6\sqrt{3}}{12}r^2$

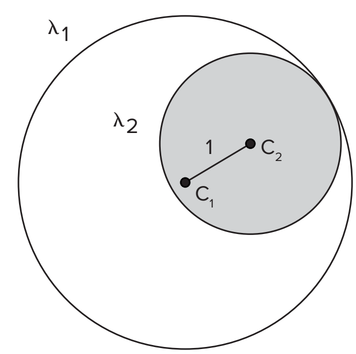
43. **AFA-SP 2012** Conforme a figura a seguir, A é o ponto de tangência das circunferências de centros C_1, C_2 e C_3. Sabe-se que os raios dessas circunferências formam uma progressão geométrica crescente.



Se os raios das circunferências de centros C_1 e C_2 medem, respectivamente, $2r$ e $3r$, então a área da região sombreada vale, em unidades de área,

a) $\dfrac{55}{8}\pi r^2$ **b)** $\dfrac{29}{4}\pi r^2$ **c)** $\dfrac{61}{8}\pi r^2$ **d)** $8\pi r^2$

44. **AFA-SP** As circunferências λ_1 e λ_2 da figura a seguir são tangentes interiores, e a distância entre os centros C_1 e C_2 é igual a 1 cm.



Se a área sombreada é igual à área não sombreada na figura, é correto afirmar que o raio de λ_2, em cm, é um número do intervalo

a) $\left]2, \dfrac{11}{5}\right[$
b) $\left]\dfrac{11}{5}, \dfrac{23}{10}\right[$
c) $\left]\dfrac{23}{10}, \dfrac{5}{2}\right[$
d) $\left]\dfrac{5}{2}, \dfrac{13}{5}\right[$

45. **ITA-SP 2016** Sejam λ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em λ de comprimento 4 cm. As tangentes a λ em P e em Q interceptam-se no ponto R exterior a λ. Então, a área do triângulo PQR, em cm^2, é igual a:

a) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
b) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
c) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$
d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$
e) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

46. **ITA-SP 2016** Um hexágono convexo regular H e um triângulo equilátero T estão inscritos em circunferências de raios R_H e R_T, respectivamente. Sabendo-se que H e T têm mesma área, determine a razão $\dfrac{R_H}{R_T}$.

47. ITA-SP 2014 Em um triângulo isósceles ABC, cuja área mede 48 cm^2, a razão entre as medidas da altura $\overline{AP}$ e da base $\overline{BC}$ é igual a $\frac{2}{3}$. Das afirmações a seguir:

I. As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $\sqrt{97}$ cm;

II. O baricentro dista 4 cm do vértice A;

III. Se α é o ângulo formado pela base $\overline{BC}$ com a mediana $\overline{BM}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, então $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{97}}$;

É (são) verdadeira(s):

a) apenas I. b) apenas II. c) apenas III. d) apenas I e III. e) apenas II e III.

48. ITA-SP Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6 cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto D. Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm^2, é igual a:

a) 14 b) 15 c) 16 d) 17 e) 18

49. ITA-SP Sejam ABCD um quadrado e E um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado ABCD, do trapézio BEDC e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é 200 cm^2, a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a:

a) $\frac{10}{3}$ b) 5 c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{25}{3}$ e) 10

50. ITA-SP Considere o quadrado ABCD com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, equidistantes de A. Por M traça-se uma reta *r* paralela ao lado $\overline{AD}$ e por N uma reta *s* paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados AMON e OPCQ, onde P é a interseção de *s* com o lado $\overline{BC}$ e Q é a interseção de *r* com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados AMON, OPCQ e ABCD constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a:

a) $15+5\sqrt{5}$ b) $10+5\sqrt{5}$ c) $10-\sqrt{5}$ d) $15-5\sqrt{5}$ e) $10-3\sqrt{5}$

51. ITA-SP Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC.

52. ITA-SP Sejam *r* e *s* duas retas paralelas distando 10 cm entre si. Seja P um ponto no plano definido por *r* e *s* e exterior à região limitada por estas retas, distando 5 cm de *r*. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm, do triângulo equilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas *r* e *s*, são iguais a:

a) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$. b) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$. c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$. d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$. e) 700 e $10\sqrt{21}$.

53. ITA-SP Sejam P_1 e P_2 octógonos regulares. O primeiro está inscrito e o segundo circunscrito a uma circunferência de raio R. Sendo A_1 a área de P_1 e A_2 a área de P_2, então a razão $\frac{A_1}{A_2}$ é igual a:

a) $\sqrt{\frac{5}{8}}$ b) $9\frac{\sqrt{2}}{16}$ c) $2\sqrt{2}-1$ d) $4\frac{\sqrt{2}+1}{8}$ e) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

54. ITA-SP Considere um losango ABCD cujo perímetro mede 100 cm e cuja maior diagonal mede 40 cm. Calcule a área, em cm^2, do círculo inscrito neste losango.

55. ITA-SP Considere o triângulo de vértices A, B e C, sendo D um ponto do lado $\overline{AB}$ e E um ponto do lado $\overline{AC}$. Se $\text{med}(\overline{AB}) = 8$ cm, $\text{med}(\overline{AC}) = 10$ cm, $\text{med}(\overline{AD}) = 4$ cm e $\text{med}(\overline{AE}) = 6$ cm, a razão das áreas dos triângulos ADE e ABC é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{8}$ d) $\frac{3}{10}$ e) $\frac{3}{4}$

56. ITA-SP Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Seja $\overline{AB}$ uma corda de C_2, tangente à C_1. A área da menor região delimitada pela corda $\overline{AB}$ e pelo arco $\overset{\frown}{AB}$ mede, em cm^2,

a) $9(\pi - 3)$ b) $18(\pi + 3)$ c) $18(\pi - 2)$ d) $18(\pi + 2)$ e) $16(\pi + 3)$

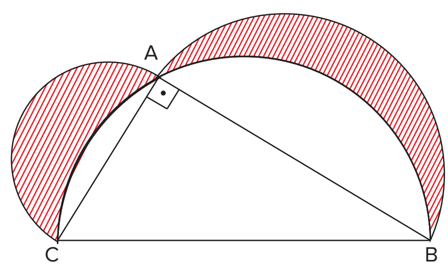
57. ITA-SP Sejam r e s duas retas paralelas distando entre s i5 cm. Seja P um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de r. A área do triângulo equilátero PQR, cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, é igual, em cm^2, a:

a) $3\sqrt{15}$
b) $7\sqrt{3}$
c) $5\sqrt{6}$
d) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$
e) $\frac{7}{2}\sqrt{15}$

58. IME-RJ 2015 Seja um trapézio retângulo de bases a e b com diagonais perpendiculares. Determine a área do trapézio.

a) $\frac{ab}{2}$
b) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
c) $\left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$
d) $\left(\frac{2a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$
e) $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)a^2b}$

59. IME-RJ Seja o triângulo retângulo ABC com os catetos medindo 3 cm e 4 cm. Os diâmetros dos três semicírculos, traçados na figura a seguir, coincidem com os lados do triângulo ABC. A soma das áreas hachuradas, em cm^2, é:



a) 6
b) 8
c) 10
d) 12
e) 14

60. IME-RJ Seja ABC um triângulo de lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ iguais a 26, 28 e 18, respectivamente. Considere o círculo de centro O inscrito nesse triângulo. A distância AO vale:

a) $\frac{\sqrt{104}}{6}$
b) $\frac{\sqrt{104}}{3}$
c) $\frac{2\sqrt{104}}{3}$
d) $\sqrt{104}$
e) $3\sqrt{104}$

BNCC em foco

EM13MAT307

1. O Amazonia-1, primeiro satélite de observação da Terra completamente projetado, integrado, testado e operado pelo Brasil, foi colocado em órbita na madrugada deste domingo (28/02/2021). O lançamento ocorre após cerca de 13 anos de desenvolvimento do projeto. [...] Segundo o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe), as informações providas pelo Amazonia-1 consistem em imagens ópticas com resolução de 64 m e largura da faixa imageada de 866 km.

https://www.cnnbrasil.com.br/tecnologia/2021/02/28/amazonia-1-o-1-satelite-100-brasileiro-e-lancado-com-sucesso-de-base-indiana

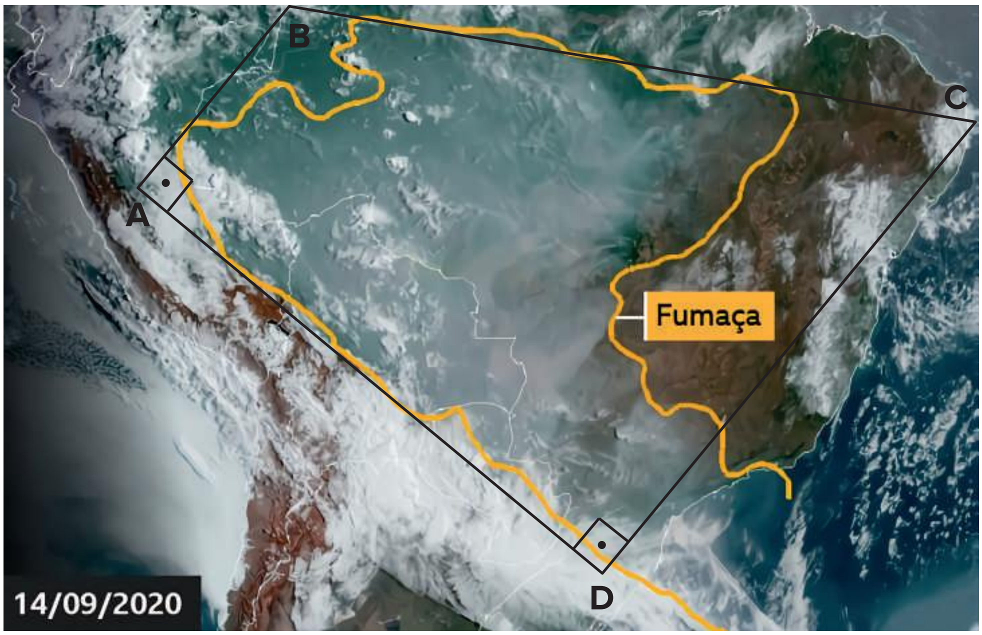
Tomando a largura da faixa de 866 km como sendo o diâmetro de uma circunferência e considerando $\pi \cong 3{,}14$, a área de observação desse satélite é de, aproximadamente:

a) 2 719 km^2
b) 5 438 km^2
c) 588 715 km^2
d) 1 177 430 km^2
e) 2 354 861 km^2

EM13MAT307

2. As queimadas no Pantanal resultam em um grande impacto para o meio ambiente. A sua origem está ligada à transformação de áreas de vegetação nativa em pastagem para a criação de animais e produção de alimentos. A ocorrência dessas queimadas foi facilitada pela seca histórica que atinge a região. Com isso, as altas temperaturas e a baixa umidade possibilitaram a maior propagação do fogo.

A movimentação da coluna de fumaça gerada pelos incêndios na Amazônia, no Pantanal e no Cerrado pelo país foi registrada por imagens de satélite coletadas pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe), destacada em amarelo no mapa.



Considerando o polígono ABCD, a área S desse polígono pode ser calculada por:

a) $S = \dfrac{(AB + CD) \cdot AD}{2}$

b) $S = \dfrac{(BC + AB) \cdot AD}{2}$

c) $S = AD \cdot CD$

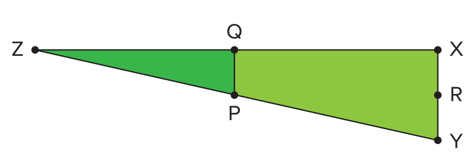
d) $S = AD + CD + BC + AB$

e) $S = (AB \cdot BC) \cdot (CD \cdot AD)$

EM13MAT307

3. O Pantanal é um bioma brasileiro localizado na região Centro-Oeste entre os estados de Mato Grosso e Mato Grosso do Sul e sua planície se estende também para a Bolívia e o Paraguai. Esse bioma sofre forte influência de outros importantes biomas brasileiros, a Mata Atlântica, o Cerrado e a Floresta Amazônica, abrigando mais de 1000 espécies entre mamíferos, peixes, aves, répteis e anfíbios. Além disso, seu clima apresenta uma dinâmica única, alternando períodos de seca com outros muito chuvosos, causando um ciclo frequente de seca e cheia. Seu desmatamento, facilitado pelas queimadas, gera prejuízos de toda espécie: naturais, humanos, extinção de espécies e poluição do ar. As consequências dessa prática são devastadoras e sua continuidade levará a danos ambientais irreversíveis. O ano de 2020 ficou marcado pelo recorde de queimadas no bioma pantaneiro.

Medindo comprimentos e ângulos e fazendo demarcações por uma determinada área queimada, foram feitas algumas marcas no chão plano, sendo possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura (as estacas estão indicadas por letras).



A região demarcada pelas estacas X, Y, P e Q corresponde:

a) à mesma área do triângulo XPZ.

b) à mesma área do triângulo YQZ.

c) à metade da área formada pelo triângulo XYZ.

d) ao dobro da área do triângulo PQZ.

e) ao triplo da área do triângulo PQZ.

FRENTE 3

CAPÍTULO

7

O plano cartesiano

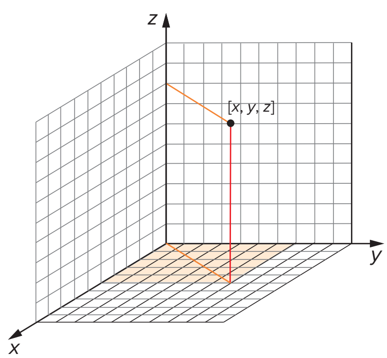
Em 1637, o filósofo e matemático René Descartes (1596-1650) propôs novas ideias na área da Geometria, principalmente no que diz respeito à representação algébrica dos conceitos geométricos. Essas novas ideias basearam a Geometria Analítica que estudamos hoje. Por meio de um sistema de eixos coordenados que, posteriormente, recebeu o nome de plano cartesiano em sua homenagem, é possível representar pontos com pares ordenados de números reais, retas, curvas e circunferências por meio de sentenças algébricas. Entre as diversas aplicações do sistema de eixos coordenados, estão as animações gráficas computacionais de jogos e filmes, por exemplo, que utilizam o plano cartesiano como espaço para criar personagens, objetos e cenários por meio da modelagem matemática. Além disso, o sistema de eixos coordenados auxilia na descrição de posição e movimento dos elementos que compõem a animação.

Introdução

O conceito da existência de um segmento unitário que funcione como elemento neutro na multiplicação, por exemplo, revolucionou o pensamento euclidiano, no qual produtos e potências de segmentos representavam exclusivamente áreas e volumes.

De acordo com essa nova ideia, se um segmento $\overline{AB}$ é unitário, para qualquer segmento $\overline{BC}$, o produto $AB \cdot BC = BC$. Nesse caso, é importante observar que $\overline{BC}$ continua representando um segmento ou mesmo um vetor. No estudo da Geometria Euclidiana tradicional, $AB \cdot BC$ pode representar, por exemplo, a área de um retângulo ABCD.

Esse conceito não rompe completamente com o pensamento euclidiano, apenas atribui mais possibilidades para a representação geométrica de produtos, potências e, consequentemente, raízes. Ele permite que a localização de pontos seja expressa numericamente pelas distâncias deles a retas preestabelecidas, denominadas eixos coordenados.



Assim, surgiu um novo modelo matemático de análise algébrica da Geometria, que possibilita o cálculo de ângulos, áreas e volumes a partir dos números que indicam as posições dos elementos das figuras estudadas.

Dizemos que a Geometria é o estudo das formas, dos tamanhos e das posições. E foram os gregos antigos que finalizaram a maior parte do estudo das formas de acordo com os tamanhos que conhecemos atualmente, mas foi Descartes que voltou a atenção dos matemáticos para o estudo das posições.

Hoje em dia, as posições dos pontos de uma figura geométrica são representadas por sequências de dois ou três números cuja interpretação tem como referência o que chamamos de sistema de coordenadas cartesianas, em homenagem a René Descartes.

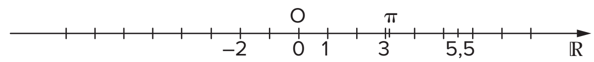
De certo modo, podemos dizer que as ideias dele propiciaram uma maneira de comunicação inédita na história da humanidade: o gráfico.

A principal ideia da Geometria Analítica é integrar a Álgebra à Geometria Plana. No livro *La Géométrie*, escrito por René Descartes, é possível perceber que essa integração gera, ao menos, duas possibilidades interessantes: a de usar as ferramentas da Álgebra para resolver problemas de Geometria Plana e a de interpretar de maneira mais eficiente algumas estruturas algébricas por meio da Geometria.

Para chegar a esses objetivos e desenvolver toda a Geometria Analítica, precisamos primeiro construir algumas estruturas básicas.

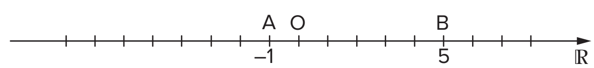
Coordenadas em um eixo e no plano cartesiano

A primeira estrutura necessária para compreender a Geometria Analítica é a noção de **eixo**. Considere uma **reta orientada** e tome um ponto dela, geralmente denotado pela letra O, chamado de **origem**. Faça uma correspondência entre cada ponto da reta e todos os números reais, até mesmo os negativos e os irracionais, como se fosse formar uma régua.



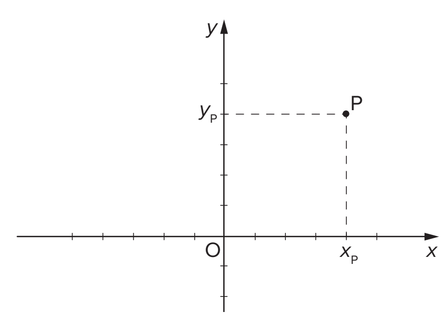
Agora, cada ponto está "ligado" a um número real, então vamos chamar esses números de **coordenadas**. Elas serão muito úteis para descrever toda a Geometria.

Assim, podemos, por exemplo, denotar um segmento de reta sobre um eixo e calcular facilmente seu comprimento, pois ele será a diferença entre as coordenadas desse segmento. Observe a figura a seguir.



$$AB = \text{dist}(A, B) = d(A, B) = |5 - (-1)| = 6$$

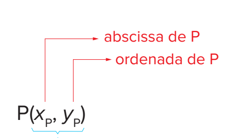
Com isso, podemos definir um plano a partir de dois eixos perpendiculares (x e y) com a origem em comum e usar retas paralelas a esses eixos para determinar as coordenadas de seus pontos.



O plano definido com essas características é chamado de **plano cartesiano ortogonal**.

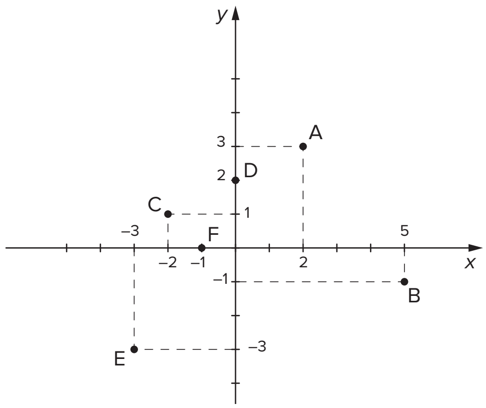
Saiba mais

No plano cartesiano, não denotamos um ponto apenas por uma letra latina maiúscula, como na Geometria Plana, e sim por um par de coordenadas (x, y).
Chamamos a primeira coordenada do ponto de **abscissa** e a segunda de **ordenada**.

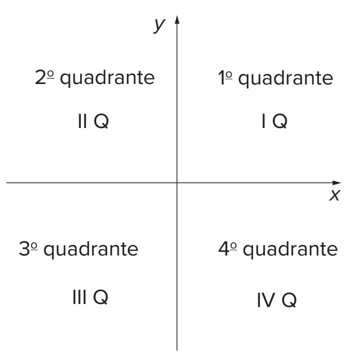


Veja alguns pontos descritos por suas coordenadas e representações no plano:

A(2, 3), B(5, –1), C(–2, 1), D(0, 2), E(–3, –3) e F(–1, 0)



Note que existem pontos sobre os eixos e pontos que não pertencem aos eixos. Para melhor descrevê-los, chamaremos as quatro regiões que não estão contidas nos eixos de quadrantes e lhes daremos números, como na figura a seguir.

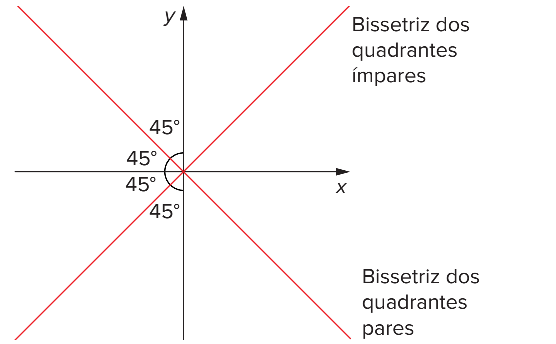


Observando o plano cartesiano e considerando um ponto P qualquer, podemos afirmar:

- Se P pertence ao eixo x, então sua ordenada é nula ($y = 0$).
- Se P pertence ao eixo y, então sua abscissa é nula ($x = 0$).
- Se P pertence ao 1º quadrante, então suas coordenadas são tais que $x > 0$ e $y > 0$.
- Se P pertence ao 2º quadrante, então suas coordenadas são tais que $x < 0$ e $y > 0$.
- Se P pertence ao 3º quadrante, então suas coordenadas são tais que $x < 0$ e $y < 0$.
- Se P pertence ao 4º quadrante, então suas coordenadas são tais que $x > 0$ e $y < 0$.

As semirretas que dividem os quadrantes em duas regiões congruentes são denominadas bissetrizes desses quadrantes, pois dividem o ângulo reto formado pelos eixos coordenados em dois ângulos de 45°.

Como a semirreta bissetriz do 1º quadrante é colinear à do 3º quadrante, dizemos que a reunião dos pontos dessas duas semirretas é a reta bissetriz dos quadrantes ímpares. Isso também ocorre com as bissetrizes do 2º e 4º quadrantes, portanto dizemos que a reunião dessas semirretas é a reta bissetriz dos quadrantes pares.



Na figura anterior, observe que, se um ponto estiver sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares, então suas coordenadas serão iguais. Entretanto, se ele estiver sobre a bissetriz dos quadrantes pares, então a soma de suas coordenadas será nula, ou seja, suas coordenadas são valores opostos.

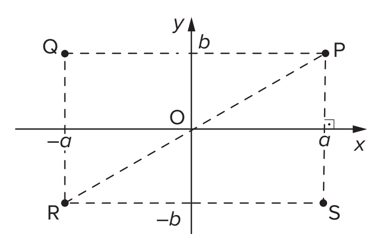
Note que:

- P(a, b) $\in$ bissetriz dos quadrantes ímpares, portanto $a = b$.
- P(a, b) $\in$ bissetriz dos quadrantes pares, portanto $a = -b \Rightarrow a + b = 0$.

Simetrias no plano cartesiano

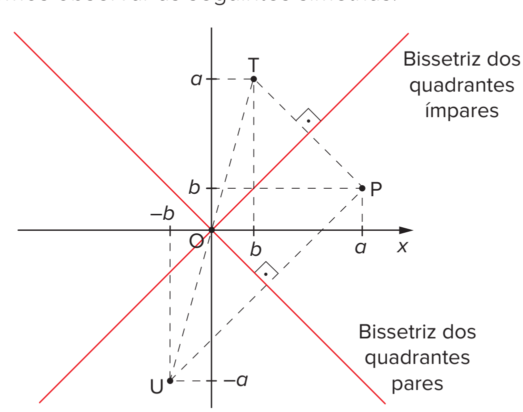
Analisaremos, agora, alguns tipos de simetria que podem ser úteis tanto na resolução de problemas geométricos quanto na análise de algumas funções.

Os próprios eixos do plano cartesiano estabelecem simetrias bilaterais entre pontos de diferentes quadrantes, como mostra a ilustração a seguir:



- Os pontos P(a, b) e Q($-a$, b) são simétricos em relação ao eixo Oy das ordenadas.
- Os pontos P(a, b) e S(a, $-b$) são simétricos em relação ao eixo Ox das abscissas.
- Os pontos P(a, b) e R($-a$, $-b$) são simétricos em relação à origem O do plano cartesiano.

Sobre as bissetrizes dos quadrantes do plano cartesiano, devemos observar as seguintes simetrias:



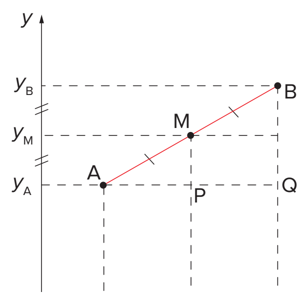
- Os pontos P(a, b) e T(b, a) são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.
- Os pontos P(a, b) e U($-b$, $-a$) são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes pares.

Note também que os pontos T e U são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano.

Determinação das coordenadas do ponto médio

Considerando que todo segmento de reta tem um ponto médio que o divide na razão de 1 : 2, ou seja, ao meio, podemos deduzir uma fórmula para determinar as coordenadas desse ponto sempre que tivermos as coordenadas dos pontos extremos do segmento.

Observe:



Note que os triângulos ABQ e AMP são semelhantes, pelo caso AA, na razão 2 : 1; logo:

$$\frac{x_B - x_A}{x_M - x_A} = \frac{2}{1}$$

Isolando x_M, obtemos:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

E, ainda:

$$\frac{y_B - y_A}{y_M - y_A} = \frac{2}{1}$$

Isolando y_M, obtemos:

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Assim, sendo A(x_A, y_A) e B(x_B, y_B) as extremidades de um segmento $\overline{AB}$, as coordenadas (x_M, y_M) do ponto médio M do segmento são tais que:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Exercícios resolvidos

1. Determine o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, com A(2, 3) e B(4, 8).

Resolução:

Considerando que, para determinar um ponto, é necessário calcular suas duas coordenadas, vamos encontrar x_M e y_M.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$$

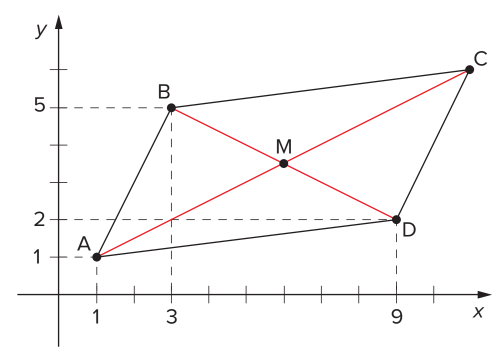
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+8}{2} = \frac{11}{2}$$

Portanto, o ponto médio de $\overline{AB}$ é $M\left(3, \frac{11}{2}\right)$.

2. Dado o paralelogramo ABCD, determine o vértice C sabendo que A(1, 1) e a diagonal $\overline{BD}$ é tal que B(3, 5) e D(9, 2).

Resolução:

Devemos lembrar que, em um paralelogramo, as diagonais se encontram nos respectivos pontos médios. Assim, vamos determinar o ponto médio de $\overline{BD}$ e utilizá-lo também como ponto médio de $\overline{AC}$.



Então, seja M o ponto médio da diagonal $\overline{BD}$:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{3+9}{2} = 6$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$$

Portanto, $M\left(6, \frac{7}{2}\right)$ é o ponto médio de $\overline{BD}$, além de ser ponto médio de $\overline{AC}$. Assim, sendo A(1, 1), tem-se:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 6 = \frac{1 + x_C}{2} \Rightarrow 1 + x_C = 12 \Rightarrow x_C = 11$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow \frac{7}{2} = \frac{1 + y_C}{2} \Rightarrow 1 + y_C = 7 \Rightarrow y_C = 6$$

Portanto, o vértice C tem coordenadas (11, 6).

! Atenção

As demonstrações são, muitas vezes, fontes de ideias para resolver exercícios. Um exemplo disso pode ser visto na questão a seguir, que também utiliza a ideia da demonstração do ponto médio.

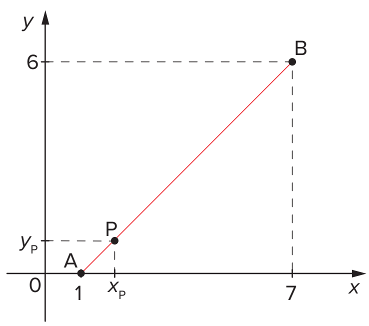
Agora que conhecemos as expressões usadas para determinar o ponto médio de um segmento, podemos estender esse conceito e dividir um segmento em qualquer razão $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Note esse conceito no exercício a seguir.

Exercício resolvido

3. Determine o ponto P interno ao segmento $\overline{AB}$ e que o divide na razão $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{5}$, sendo A(1, 0) e B(7, 6).

Resolução:



Para determinar as coordenadas do ponto P, utilizaremos a razão de semelhança:

$$\frac{x_P - x_A}{x_B - x_P} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x_P - 1}{7 - x_P} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x_P - 5 = 7 - x_P \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_P = 2$$

e

$$\frac{y_P - y_A}{y_B - y_P} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{y_P - 0}{6 - y_P} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5y_P = 6 - y_P \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_P = 1$$

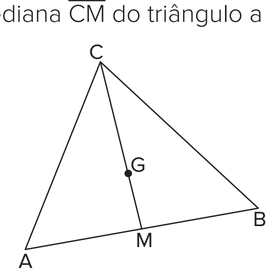
Portanto, o ponto P tal que $\frac{AP}{PB} = \frac{1}{5}$ é P(2, 1).

Determinação das coordenadas do baricentro de um triângulo

Sabemos que o baricentro do triângulo é o ponto de encontro das medianas e divide cada uma delas na razão de 1 : 2. Diante disso, as coordenadas do baricentro G de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são dadas por:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Verifique uma demonstração dessas expressões considerando a mediana $\overline{CM}$ do triângulo a seguir:



Primeiro, devemos lembrar que $\frac{CG}{GM} = \frac{2}{1}$, portanto, como vimos no exercício anterior, podemos escrever:

$$\frac{x_C - x_G}{x_G - x_M} = \frac{2}{1} \quad \text{e} \quad \frac{y_C - y_G}{y_G - y_M} = \frac{2}{1}$$

Para terminar a demonstração, precisamos seguir dois passos:

1) trocar x_M por $\frac{x_A + x_B}{2}$ e y_M por $\frac{y_A + y_B}{2}$, pois M é ponto médio de $\overline{AB}$;

2) isolar x_G e y_G.

$$\frac{x_C - x_G}{x_G - x_M} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{x_C - x_G}{x_G - \frac{x_A + x_B}{2}} = \frac{2}{1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2x_C - 2x_G}{2x_G - x_A - x_B} = \frac{2}{1} \Rightarrow 4x_G - 2x_A - 2x_B = 2x_C - 2x_G \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x_G + 2x_G = 2x_A + 2x_B + 2x_C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x_G = 2(x_A + x_B + x_C) \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

De maneira análoga, podemos demonstrar que:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Exercícios resolvidos

4. Determine as coordenadas do baricentro do triângulo ABC de vértices A(1, 2), B(4, 7) e C(8, 3).

Resolução:

Substituindo as coordenadas dos vértices na expressão obtida na demonstração, temos:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_G = \frac{1 + 4 + 8}{3} = \frac{13}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_G = \frac{2 + 7 + 3}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

O baricentro do triângulo é o ponto $G\left(\frac{13}{3}, 4\right)$.

5. Sabendo que o baricentro do triângulo ABC é o ponto G(5, –2) e que os vértices B e C possuem coordenadas respectivamente iguais a (9, 7) e (–1, –9), determine as coordenadas do vértice A.

Resolução:

Com os dados do enunciado, temos:

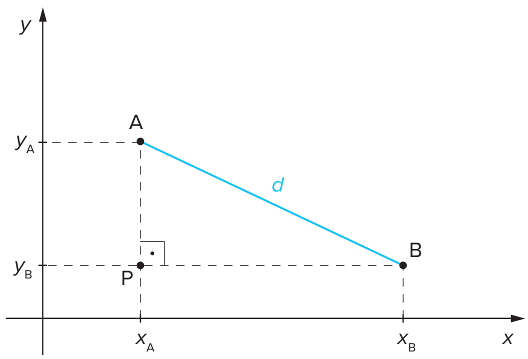
$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow 5 = \frac{x_A + 9 + (-1)}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_A + 8 = 15 \Rightarrow x_A = 7$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow -2 = \frac{y_A + 7 + (-9)}{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_A - 2 = -6 \Rightarrow y_A = -4$$

As coordenadas do vértice A são (7, –4).

Distância entre dois pontos

Agora, determinaremos a distância entre os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Para isso, começaremos pelo caso mais geral, ou seja, aquele em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ não é perpendicular a nenhum dos dois eixos.



Como o triângulo ABP é retângulo em P, temos, por Pitágoras, que:

$$[d(A, B)]^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

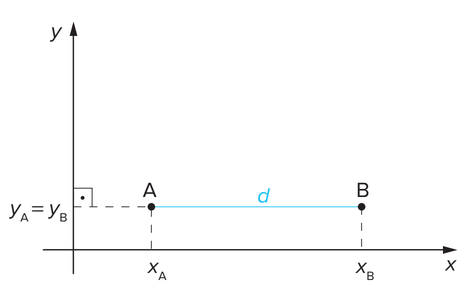
Portanto:

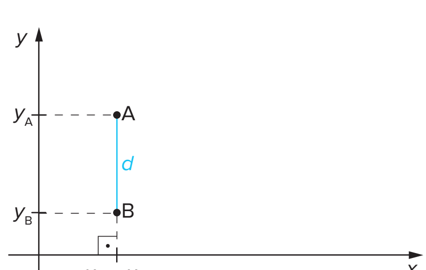
$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

! Atenção

Observe que $(x_A - x_B)^2 = (x_B - x_A)^2$, portanto não devemos nos preocupar com a ordem em que escolhemos as coordenadas e podemos chamar $(x_A - x_B)^2$ ou $(x_B - x_A)^2$ de $(\Delta x)^2$. Isso vale para as coordenadas y, que substituiremos pela notação $(\Delta y)^2$.

Observe que, se a reta $\overleftrightarrow{AB}$ formar 90° com algum dos eixos, tal fórmula também será verdadeira. Isso porque, se a reta for perpendicular ao eixo y, então $\Delta y = 0$, e, se a reta for perpendicular ao eixo x, então $\Delta x = 0$.





Exercícios resolvidos

6. Determine a distância entre os pontos A(2, 3) e B(5, –1).

Resolução:

Substituindo as coordenadas dos pontos A e B na expressão da distância, temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(2-5)^2 + (3-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$

$$d(A, B) = \sqrt{25} = 5 \text{ unidades de comprimento}$$

7. Calcule o comprimento da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC, com A(2, 2), B(4, 8) e C(8, 3).

Resolução:

Como a mediana é o segmento com extremidades em um vértice e no ponto médio do lado oposto a esse vértice, precisamos primeiro determinar o ponto médio do lado $\overline{AB}$:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_M &= \frac{2+8}{2} = 5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(3, 5)$$

Agora, basta calcular a distância de M a C:

$$d(M, C) = \sqrt{(3-8)^2 + (5-3)^2}$$

$$d(M, C) = \sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

Logo, o comprimento da mediana é $\sqrt{29}$ unidades de comprimento.

8. Calcule o perímetro do triângulo ABC, com A(2, 3), B(–5, 4) e C(–1, 0).

Resolução:

Para determinar o perímetro do triângulo, precisamos saber os comprimentos (em u.c. – unidades de comprimento) dos três lados desse triângulo. Para isso, calcularemos as distâncias: $d(A, B)$, $d(A, C)$ e $d(B, C)$.

$$\left\{\begin{aligned} & d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2-(-5))^2 + (3-4)^2} = \\ & = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} \text{ u.c.} \\ & d(A, C) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-0)^2} = \\ & = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \text{ u.c.} \\ & d(B, C) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(-5-(-1))^2 + (4-0)^2} = \\ & = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} \text{ u.c.} \end{aligned}\right.$$

Logo, o perímetro ($2p$) do triângulo, em unidades de comprimento, é:

$$2p = \sqrt{50} + \sqrt{18} + \sqrt{32} = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$$

9. Um quadrado ABCD tem $\overline{AC}$ como diagonal e as coordenadas de A e C são, respectivamente, (4, 8) e (–1, 13). Determine a área desse quadrado.

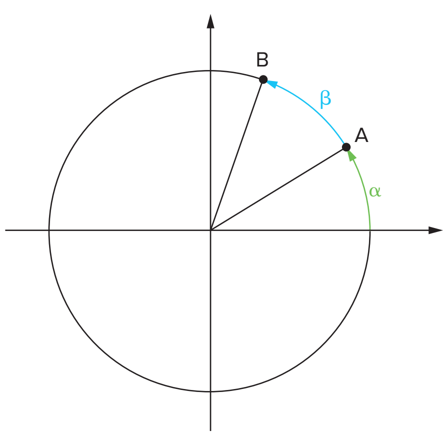
Resolução:

Para determinar a área do quadrado, precisamos conhecer a medida de um de seus lados. Sabendo que a medida da diagonal de um quadrado de lado ℓ é $d = \ell\sqrt{2}$, podemos determinar a medida do lado a partir da medida da diagonal $\overline{AC}$.

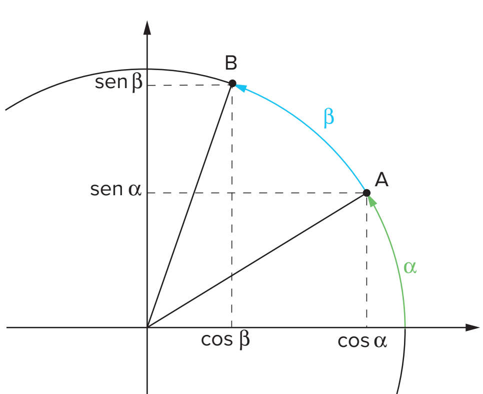
$$AC = d(A, C) = \sqrt{(4-(-1))^2 + (8-13)^2} = \sqrt{25+25} =$$
$$= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Se a diagonal do quadrado mede $5\sqrt{2}$ u.c., então o lado do quadrado mede 5 u.c. Portanto, a área do quadrado mede 25 unidades de área.

10. Determine a distância entre os pontos A e B do ciclo trigonométrico que representam as extremidades dos arcos α e β.



Resolução:



Sabemos que os pontos A e B do ciclo trigonométrico podem ter suas coordenadas representadas, respectivamente, por (cos α, sen α) e (cos β, sen β). Assim, com essas coordenadas, determinaremos a distância em unidades de comprimento:

$$d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 = (\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta)^2} =$$
$$= \sqrt{\cos^2\alpha - 2\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta + \text{sen}^2\alpha - 2\cdot\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta + \text{sen}^2\beta} =$$
$$= \sqrt{\underbrace{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + \underbrace{\text{sen}^2\beta + \cos^2\beta}_{1} - 2\underbrace{(\text{sen}\,\alpha\cdot\text{sen}\,\beta + \cos\alpha\cdot\cos\beta)}_{\cos(\alpha-\beta)}} =$$
$$= \sqrt{1+1-2\cos(\alpha-\beta)} = \sqrt{2-2\cos(\alpha-\beta)} =$$
$$= \sqrt{2(1-\cos(\alpha-\beta))}$$

Logo, a distância entre A e B é $\sqrt{2(1-\cos(\alpha-\beta))}$ u.c.

11. Determine todos os pontos equidistantes de A(1, 2) e B(3, –1).

Resolução:

Como não sabemos quais são os pontos, vamos descrevê-los genericamente por P(*x*, *y*). Se esses pontos são equidistantes de A e B, podemos afirmar que *d*(P, A) = *d*(P, B). Assim, temos:

$$\begin{cases} d(P, A) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\ d(P, B) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-(-1))^2} \end{cases}$$

Então:

$$d(P, A) = d(P, B)$$
$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2}$$
$$\cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 4y + 4 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + \cancel{y^2} + 2y + 1$$
$$-2x - 4y + 5 = -6x + 2y + 10$$
$$4x - 6y - 5 = 0$$

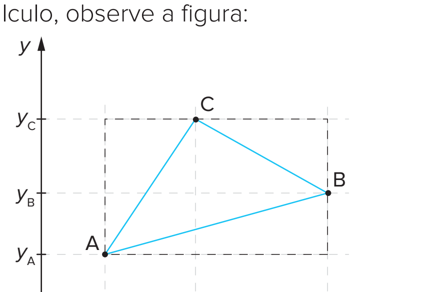
Portanto, todos os pares (*x*, *y*) que satisfazem a equação $4x - 6y - 5 = 0$ correspondem a pontos equidistantes de A e B.

Observação: note que existem infinitos pares (*x*, *y*) que satisfazem a equação; logo, existem infinitos pontos equidistantes de A e B. Também é importante perceber que esses pontos formam a mediatriz do segmento $\overline{AB}$.

Determinação da área de um triângulo

A seguir, veremos como calcular a área de um triângulo conhecendo apenas seus vértices: $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$.

Para entender como é construída a expressão para esse cálculo, observe a figura:



FRENTE 3

Note que a área do retângulo está dividida em quatro triângulos. Um deles, o ABC, é o desejado, e os outros têm áreas fáceis de calcular. Assim, temos:

$$S_{\Delta ABC} = (x_B - x_A) \cdot (y_C - y_A) - \left[\frac{(x_C - x_A) \cdot (y_C - y_A)}{2} + \frac{(x_B - x_A) \cdot (y_B - y_A)}{2} + \frac{(x_B - x_C) \cdot (y_C - y_B)}{2}\right]$$

$$S_{\Delta ABC} = x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C + x_A y_A - \left[\frac{-x_C y_A - x_A y_C + x_A y_A - x_B y_A - x_A y_B + x_A y_A + x_B y_C + x_C y_B}{2}\right]$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{2x_B y_C - 2x_B y_A - 2x_A y_C + 2x_A y_A + x_C y_A + x_A y_C - x_A y_A + x_B y_A + x_A y_B - x_A y_A - x_B y_C - x_C y_B}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A}{2}$$

Nesse ponto, é necessária uma boa percepção para notar que a expressão descrita no numerador é idêntica à da resolução do determinante:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = x_A y_B + x_C y_A + x_B y_C - x_C y_B - x_A y_C - x_B y_A$$

Então, a área do triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dada por:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{D}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Vale a pena ressaltar que, como queremos uma expressão que forneça a área sem a necessidade de elaborarmos a figura (bastando apenas substituir as coordenadas dos pontos no determinante D), ao colocarmos cada ponto em uma linha, corremos o risco de obter um determinante negativo, o que não faz sentido nessa situação. Assim, considerando a teoria de determinantes, podemos verificar que o determinante negativo decorre da troca de linhas da matriz. Portanto, para que não tenhamos uma área negativa, basta colocar um módulo no determinante, obtendo a seguinte expressão:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|D|}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Exercícios resolvidos

12. Determine a área do triângulo ABC, com A(2, 2), B(4, 8) e C(8, 3).

Resolução:

Aplicando a expressão obtida anteriormente, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 8 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (16 + 16 + 12) - (64 + 6 + 8) = 44 - 78 = -34$$

Assim, a área do triângulo é:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|D|}{2} = \frac{|-34|}{2} = 17$$

A área do triângulo ABC mede 17 unidades de área.

13. Calcule a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC, com A(1, 1), B(3, 7) e C(5, 3).

Resolução:

Existem algumas maneiras de resolver esse exercício. Nesta resolução, usaremos o cálculo da área:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (7+5+9) - (35+3+3) = 21 - 41 = -20$$

Assim, a área do triângulo, em unidades de área, é:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|D|}{2} = \frac{|-20|}{2} = 10$$

Em seguida, devemos calcular a medida da base $\overline{AB}$ do triângulo:

$$d(A, B) = \sqrt{(x)^2 + (y)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

Como a área de um triângulo também pode ser calculada por $\frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$, sendo h a altura do triângulo, temos:

$$10 = \frac{2\sqrt{10} \cdot h}{2}$$

Isolando h, obtemos:

$$10 = \frac{2\sqrt{10} \cdot h}{2} \Rightarrow 20 = 2\sqrt{10} \cdot h \Rightarrow h = \frac{20}{2\sqrt{10}} \Rightarrow h = \sqrt{10}$$

Portanto, a altura pedida é $\sqrt{10}$ unidades de comprimento.

Condição de alinhamento para três pontos

Uma maneira interessante de verificar se três pontos estão ou não alinhados é utilizar o mesmo procedimento do cálculo da área e conferir se a área desse "triângulo" é nula. Perceba que o raciocínio é simples: se a área é positiva, os três pontos não estão alinhados, logo eles formam um triângulo. Mas, se a "área" é nula, os três pontos não formam um triângulo, ou seja, estão alinhados.

Assim, podemos concluir que, se três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados, o determinante $D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ deve ser nulo para que a área seja nula. Logo, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados se, e somente se, $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Exercícios resolvidos

14. Verifique se os pontos (1, 2), (2, 5) e (3, 8) estão alinhados.

Resolução:

Calculando o determinante formado pelas coordenadas desses pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} = (5 + 6 + 16) - (15 + 8 + 4) = 27 - 27 = 0$$

Portanto, os três pontos estão alinhados.

15. Determine uma expressão que represente todos os pontos alinhados aos pontos A(1, 2) e B(3, 6).

Resolução:

Chamemos genericamente de $P(x, y)$ os pontos alinhados com A e B.

Como esses pontos estão alinhados, podemos escrever que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Assim:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 + 2x + 3y - 6x - y - 6 = 0 \Rightarrow -4x + 2y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

Portanto, todos os pontos que satisfazem a igualdade $y = 2x$ estão alinhados com A e B.

Observação: esse exercício apresenta uma maneira prática de determinar a equação de uma reta, assunto que estudaremos no próximo capítulo.

Revisando

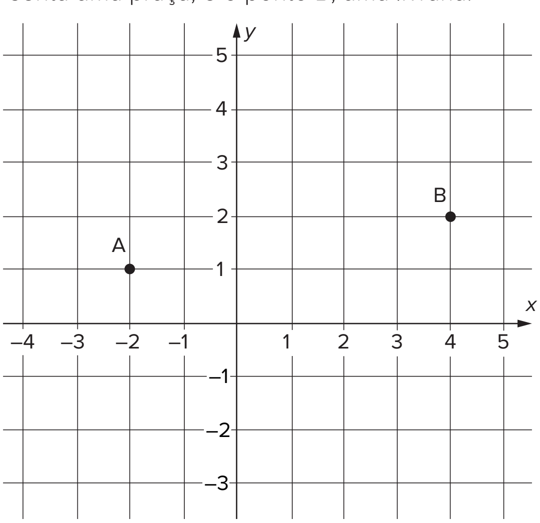
1. Determine o ponto médio dos segmentos de extremos A e B nos casos a seguir:

a) A(1, 3) e B(5, 9)
b) A(–2, 4) e B(6, 8)
c) A(1, –3) e B(4, 5)
d) A(3, –4) e B(–6, –7)

2. PUC-Minas 2015 Quando representados no sistema de coordenadas *xOy*, o ponto B é o simétrico do ponto A(–3, 2) em relação à origem O; por sua vez, o ponto C é o simétrico de B em relação ao eixo *x*. Com base nessas informações, é correto afirmar que a medida da área do triângulo ABC é igual a:

a) 8 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 12

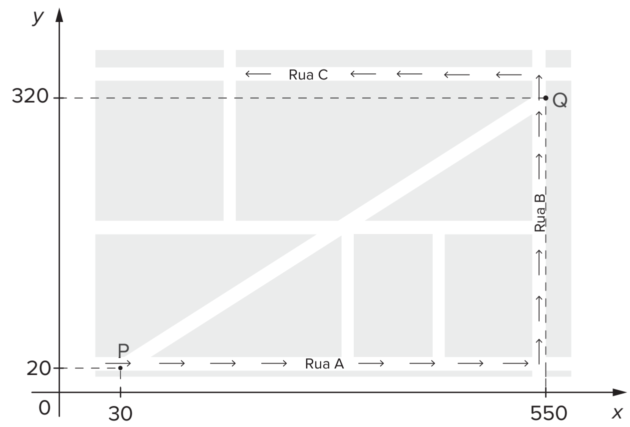
3. Feevale-RS 2016 Na figura a seguir, o ponto A representa uma praça, e o ponto B, uma livraria.



Considerando quilômetro (km) como unidade de medida, a menor distância entre a praça e a livraria é de aproximadamente:

a) 4 km **b)** 5 km **c)** 6 km **d)** 7 km **e)** 8 km

4. Enem 2015 Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por P e Q.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são:

a) (290, 20)
b) (410, 0)
c) (410, 20)
d) (440, 0)
e) (440, 20)

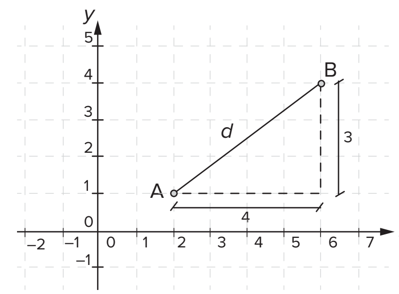
5. **EEAR-SP 2017** Seja ABC um triângulo tal que A(1, 1), B(3, –1) e C(5, 3). O ponto ___________ é o baricentro desse triângulo.

a) (2, 1) b) (3, 3) c) (1, 3) d) (3, 1)

6. **EEAR-SP 2016** O triângulo determinado pelos pontos A(–1, –3), B(2, 1) e C(4, 3) tem área igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6

7. **Cefet-RJ 2016** O professor pediu a João que calculasse a distância entre os pontos A(2, 1) e B(6, 4) no plano cartesiano. Para isso, João calculou a medida do segmento $\overline{AB}$, observando um triângulo retângulo que tem $\overline{AB}$ como hipotenusa. Após realizar o esboço a seguir, João fez a seguinte conta: $d^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow \rightarrow d = 5$.



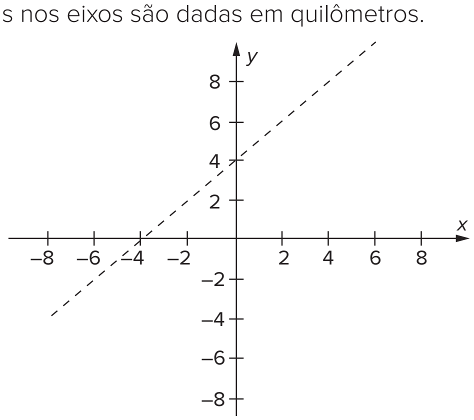
Com base nessas informações, calcule a distância entre os pontos (–5, 1) e (7, 6).

Exercícios propostos

1. **IFSP 2014** Um triângulo é desenhado marcando-se os pontos A(3, 5), B(2, –6) e C(–4, 1) no plano cartesiano. O triângulo A'B'C' é o simétrico do triângulo ABC em relação ao eixo *y*. Um dos vértices do triângulo A'B'C' é:

a) (3, 5)
b) (–2, 6)
c) (–2, –1)
d) (–4, 5)
e) (4, 1)

2. **Enem 2011** Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta de equação $y = x + 4$ representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade.
No ponto P(–5, 5), localiza-se um hospital público.
A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km.
Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

a) (–5, 0)
b) (–3, 1)
c) (–2, 1)
d) (0, 4)
e) (2, 6)

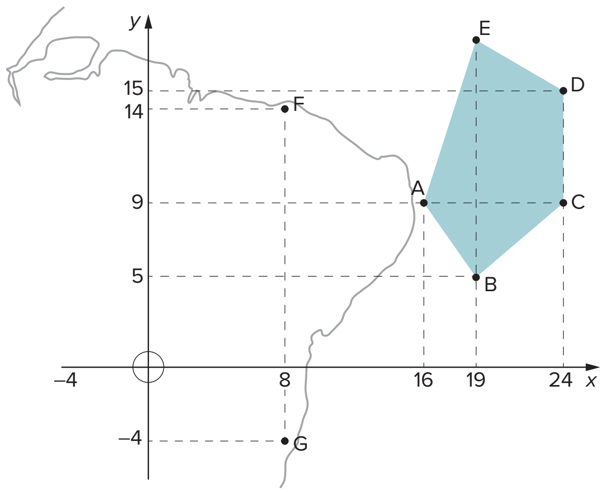
3. **FGV-SP 2012** Em um paralelogramo, as coordenadas de três vértices, consecutivos, são, respectivamente, (1, 4), (–2, 6), e (0, 8). A soma das coordenadas do quarto vértice é:

a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

FRENTE 3

4. O ponto A pode ser representado de duas formas: $(y + 2, 2x - 4)$ e $(8x, 3y - 10)$. Determine os valores de x e y.

5. Unicamp-SP 2021 Em 2019, diversas praias brasileiras foram atingidas por manchas de óleo. Pesquisadores concentraram esforços na tentativa de localizar o ponto provável da emissão do óleo. Na figura abaixo, a origem do plano cartesiano está localizada no Distrito Federal e cada unidade equivale a 1000 km.



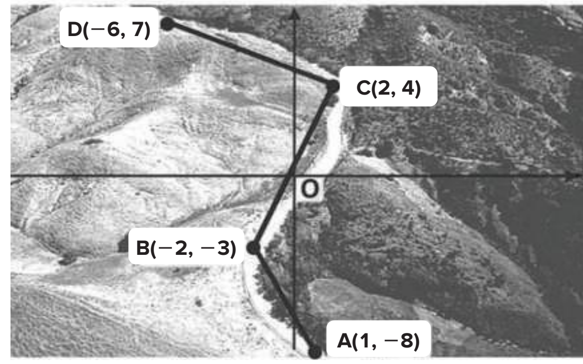
a) Numa primeira investigação sobre a origem do óleo, um navio fez uma sondagem numa área poligonal de 63000000 km^2, com vértices A, B, C, D e E, conforme indica a figura acima. Calcule o valor da ordenada h do ponto E(19, h).

b) Após a investigação dos resíduos encontrados nas praias indicadas pelos pontos F e G, descobriu-se que a fonte provável do óleo encontrava-se no Oceano Atlântico, a uma distância de 12000 km do ponto F e 18000 km do ponto G. Encontre as coordenadas (x, y) da provável fonte do óleo.

6. Unioeste-PR 2012 Dado o ponto A(–2, 4), determine as coordenadas de dois pontos P e Q, situados, respectivamente, sobre as retas $y = 3x$ e $y = -x$, de tal modo que A seja o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$.

a) P(1, 3) e Q(–5, 5).
b) P(2, 6) e Q(4, –4).
c) P(0, 0) e Q(–5, 5).
d) P(1, 3) e Q(4, –4).
e) P(2, 6) e Q(0, 0).

7. UEL-PR 2021 Suponha que Cassi Jones, para se exibir e conquistar paixões, estima o comprimento de uma estrada que marca a fronteira entre dois países. Para isso, supõe que essa divisa esteja contida em um plano munido de um referencial de coordenadas cartesianas de origem O. Na sequência, ele escolhe quatro pontos A, B, C, D na fronteira, calcula suas coordenadas com base nesse sistema cartesiano e os conecta por três segmentos de reta de modo a criar a poligonal de vértices A, B, C, D, conforme imagem a seguir.



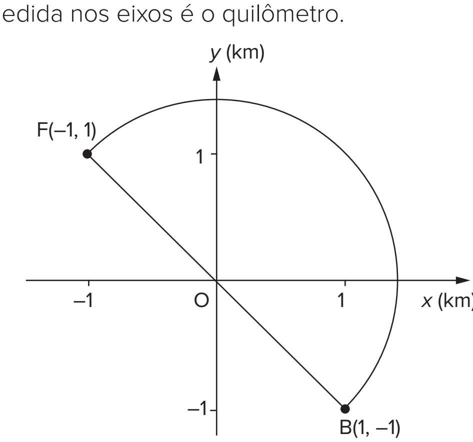
Sabendo que Cassi calcula o comprimento da poligonal para estimar o comprimento desejado, assinale a alternativa que apresenta o número obtido, corretamente, por ele.

a) 30
b) $3\sqrt{19}$
c) $\sqrt{122} + 1 + \sqrt{137}$
d) $\sqrt{82} + \sqrt{5} + \sqrt{173}$
e) $\sqrt{34} + \sqrt{65} + \sqrt{73}$

8. EEAR-SP 2017 O triângulo ABC formado pelos pontos A(7, 3), B(–4, 3) e C(–4, –2) é:

a) escaleno.
b) isósceles.
c) equilátero.
d) obtusângulo.

9. Enem 2016 Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (F) até o reservatório de um novo bairro (B). Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.



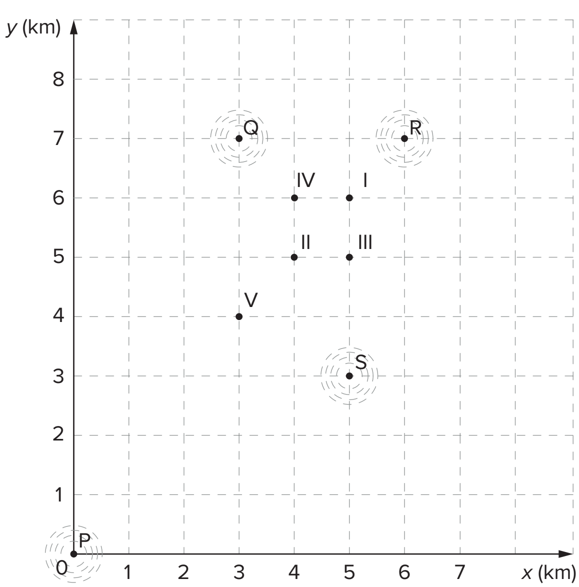
Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.
Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$.

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de:

a) 1 260
b) 2 520
c) 2 800
d) 3 600
e) 4 000

10. Enem 2019 Um aplicativo de relacionamentos funciona da seguinte forma: o usuário cria um perfil com foto e informações pessoais, indica as características dos usuários com quem deseja estabelecer contato e determina um raio de abrangência a partir da sua localização. O aplicativo identifica as pessoas que se encaixam no perfil desejado e que estão a uma distância do usuário menor ou igual ao raio de abrangência. Caso dois usuários tenham perfis compatíveis e estejam numa região de abrangência comum a ambos, o aplicativo promove o contato entre os usuários, o que é chamado de *match*.

O usuário P define um raio de abrangência com medida de 3 km e busca ampliar a possibilidade de obter um *match* se deslocando para a região central da cidade, que concentra um maior número de usuários. O gráfico ilustra alguns bares que o usuário P costuma frequentar para ativar o aplicativo, indicados por I, II, III, IV e V. Sabe-se que os usuários Q, R e S, cujas posições estão descritas pelo gráfico, são compatíveis com o usuário P, e que estes definiram raios de abrangência respectivamente iguais a 3 km, 2 km e 5 km.



Com base no gráfico e nas afirmações anteriores, em qual bar o usuário P teria a possibilidade de um *match* com os usuários Q, R e S, simultaneamente?

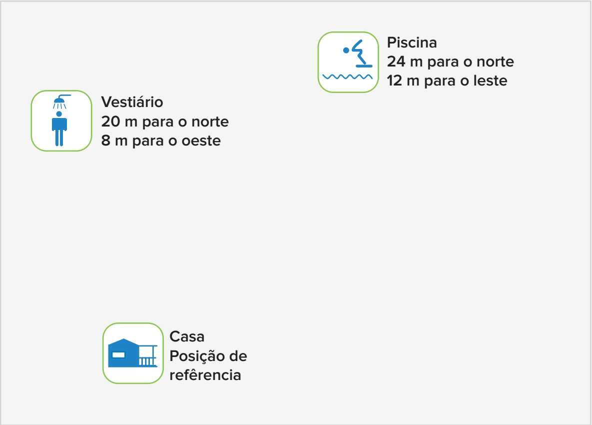
a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

11. Uece 2019 No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, os gráficos das funções reais de variável real $f(x) = x^2 - 6x + 9$ e $g(x) = -x^2 + 6x - 1$ são parábolas. Os pontos de interseção dessas parábolas juntamente com seus vértices são vértices de um quadrilátero convexo, cuja medida da área é igual a:

u.a = unidades de área

a) 16 u.a.
b) 20 u.a.
c) 22 u.a.
d) 18 u.a.

12. Insper-SP 2015 O Sr. Antônio resolveu construir um poço em seu sítio. Ele passou ao engenheiro o esquema a seguir, indicando a posição da piscina e do vestiário em relação à localização da casa.



O Sr. Antônio disse ao engenheiro que queria o poço em uma localização que estivesse à mesma distância da casa, da piscina e do vestiário. Para atendê-lo o engenheiro deve construir o poço na posição, em relação à casa, dada por, aproximadamente,

a) 4,2 m para o leste e 13,8 m para o norte.
b) 3,8 m para o oeste e 13,1 m para o norte.
c) 3,8 m para o leste e 13,1 m para o norte.
d) 3,4 m para o oeste e 12,5 m para o norte.
e) 3,4 m para o leste e 12,5 m para o norte.

13. Uece 2018 (Adapt.) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, os pontos P e Q estão no primeiro quadrante, pertencem aos gráficos das funções $g(x) = e^x$ e $f(x) = \ell n(x)$ respectivamente e satisfazem a condição: se P(*a*, *b*), então, Q(*b*, *a*). Nessas condições, pode-se afirmar corretamente que a medida do comprimento do segmento $\overline{PQ}$ tem a forma:

Dados: $\ell n(x)$ = logaritmo natural de x e e^x = exponencial natural de x.

a) $(a + e^a)\sqrt{2}$
b) $(a + e^a)\sqrt{3}$
c) $(e^a - a)\sqrt{2}$
d) $(e^a - a)\sqrt{3}$

FRENTE 3

14. ITA-SP 2012 Sejam A(0, 0), B(0, 6) e C(4, 3) vértices de um triângulo. A distância do baricentro desse triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a:

a) $\frac{5}{3}$

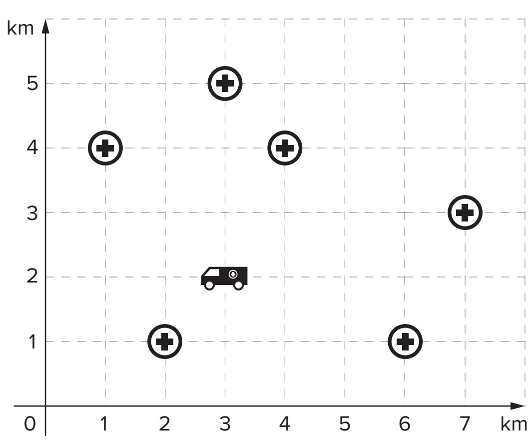
b) $\frac{\sqrt{97}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{109}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

e) $\frac{10}{3}$

15. FCMMG 2020 Uma empresa de entrega de medicamentos repassa, diariamente, a seus motoristas o mapa da distância a ser percorrida para a entrega dos produtos em seis instituições hospitalares, como ilustrado na figura seguinte.



Seguindo orientações, o motorista deve:

- a partir do depósito, simbolicamente representado pelo desenho de um caminhão, entregar as medicações em todos os hospitais simbolizados por ⊕, retornando obrigatoriamente ao depósito após todas as entregas;
- no trajeto, dirigir-se sempre ao local mais próximo de sua localização, representado geometricamente pelo segmento de reta com início em sua posição atual e término no próximo destino.

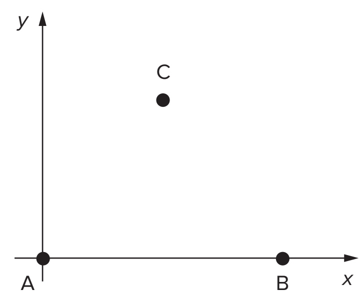
Considerando-se que o motorista tenha recebido o mapa apresentado na figura anterior, ao retornar ao depósito, o hodômetro (instrumento que indica distâncias percorridas pelo veículo) acusará que esse motorista percorreu aproximadamente:

a) 19 km
b) 17 km
c) 14 km
d) 11 km

16. UFJF-MG 2016 Considere os pontos A(2, 0), $B\left(-1, \sqrt{3}\right)$ e $C\left(-1, -\sqrt{3}\right)$ em um plano cartesiano.

a) Determine o ângulo $A\hat{B}C$.
b) Calcule a área do triângulo ABC.

17. FGV-SP 2012 (Adapt.) Um funcionário do setor de planejamento de uma distribuidora de materiais escolares verifica que as lojas dos seus três clientes mais importantes estão localizadas nos pontos A(0, 0), B(6, 0) e C(3, 4). Todas as unidades são dadas em quilômetros.
O setor de planejamento decidiu instalar um depósito no ponto P(x, y), de modo que as distâncias entre o depósito e as três lojas sejam iguais: PA = PB = PC.
[...]



Determine a quantos quilômetros da Loja A deverá ser instalado o depósito da distribuidora de materiais escolares. Aproxime a resposta para um número inteiro de quilômetros.

18. EEAR-SP 2020 Sejam A(−4, −2), B(1, 3) e M(a, b) pontos do plano cartesiano. Se M é ponto médio de $\overline{AB}$, o valor de $a + b$ é

a) −2
b) −1
c) 1
d) 2

19. Três retas de equações $y = 4x + 3$, $y = -x + 3$ e $y = x + 6$ interceptam-se duas a duas nos pontos A, B e C. Determine a área do triângulo ABC.

20. Os vértices de um triângulo ABC são os pontos A($-k$, $-k$), B(0, 0) e C($-k$, k). A área do triângulo ABC vale, em unidades de área:

a) $\frac{k^2}{4}$

b) $\frac{k^2}{2}$

c) k^2

d) $2k^2$

e) $4k^2$

Texto complementar

Cálculo da área de um polígono convexo

Quando nos deparamos, pela primeira vez, com a expressão usada para o cálculo da área de um triângulo, geralmente a consideramos estranha, pois, para chegarmos ao resultado pretendido, precisamos do auxílio de um determinante. Porém, é importante perceber que o determinante presente na expressão é uma coincidência numérica, ou seja, a expressão para o cálculo da área é idêntica ao módulo desse determinante.

Se continuarmos analisando essa expressão, notaremos que ela pode ser adaptada para um polígono convexo qualquer. Mas, se antes o determinante era apenas uma coincidência, o que ele seria agora?

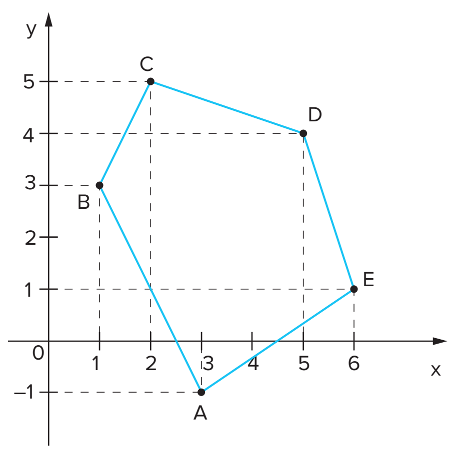
Vamos trabalhar com uma estrutura parecida com um determinante, porém, como se trata de uma matriz não quadrada, chamaremos essa estrutura de **diferencial**.

Para ver como ela funciona, observe o exercício e sua respectiva resolução a seguir.

Determine a área de um pentágono ABCDE, com A(3, –1), B(1, 3), C(2, 5), D(5, 4) e E(6, 1).

Resolução:

Primeiro, devemos fazer a representação do polígono no plano cartesiano. (Note que, no caso do triângulo, isso não era necessário.)

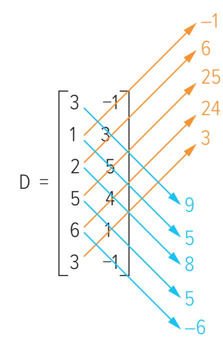


Em seguida, precisamos montar uma matriz com duas colunas, em que cada linha seja composta de coordenadas dos pontos. Vale ressaltar que os pontos devem ser tomados no sentido horário ou anti-horário, na ordem em que aparecem na representação gráfica. Portanto, não podemos escolhê-los aleatoriamente e, após o último ponto da sequência, devemos repetir o primeiro.

Tomando os pontos no sentido horário a partir de A, temos:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 5 & 4 \\ 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Devemos fazer o cálculo como se estivéssemos resolvendo um determinante. Para isso, temos que multiplicar as “diagonais” e calcular a diferença entre as somas dos produtos da diagonal principal e das paralelas e da diagonal secundária e das paralelas.



Logo, D = (9 + 5 + 8 + 5 – 6) – (–1 + 6 + 25 + 24 + 3) = = 21 – 57 = –36.

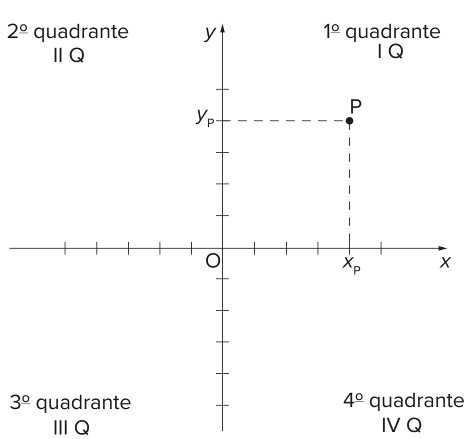
Assim, para calcular a área do pentágono, devemos utilizar a mesma expressão que deduzimos para o triângulo, ou seja, $S_{\text{polígono}} = \dfrac{|D|}{2}$.

Desse modo: $S_{\text{polígono}} = \dfrac{|-36|}{2} = 18\,\text{u.a.}$

Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Coordenadas no plano cartesiano



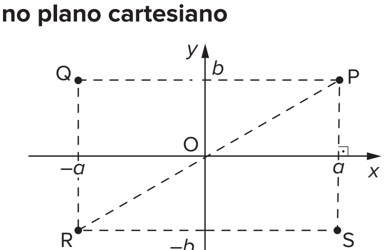
abscissa de P

ordenada de P

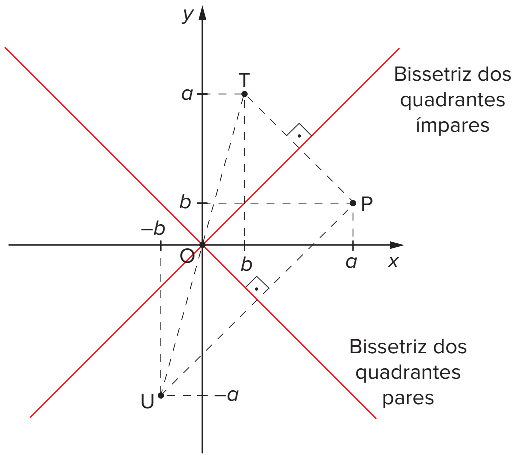
$P(x_P, y_P)$

coordenadas de P

Simetrias no plano cartesiano

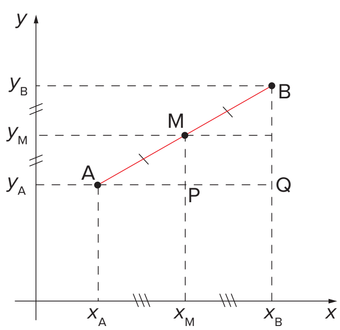


- P(*a*, *b*) e Q(–*a*, *b*) são simétricos em relação ao eixo O*y*;
- P(*a*, *b*) e S(*a*,–*b*) são simétricos em relação ao eixo O*x*;
- P(*a*, *b*) e R(–*a*, –*b*) são simétricos em relação à origem O.



- $P(a, b)$ e $T(b, a)$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares;
- $P(a, b)$ e $U(-b, -a)$ são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes pares;
- T e U são simétricos em relação à origem do sistema cartesiano.

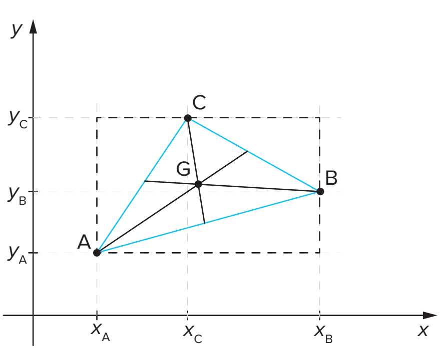
Determinação das coordenadas do ponto médio:



Sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ as extremidades de $\overline{AB}$, as coordenadas (x_M, y_M) do ponto médio M são tais que:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

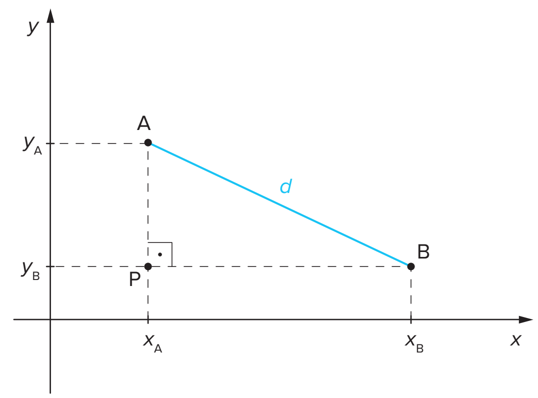
Determinação das coordenadas do baricentro de um triângulo



As coordenadas do baricentro $G(x_G, y_G)$ de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são dadas por:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Distância entre dois pontos



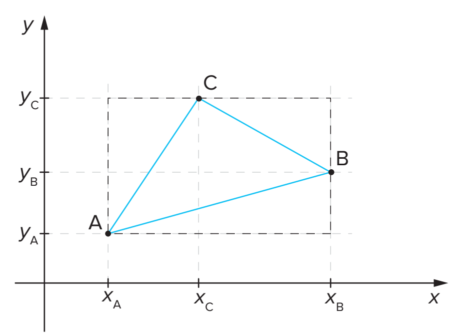
Sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, a distância d entre eles é dada por:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

ou

$$d(A, B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

Determinação da área de um triângulo



A área do triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dada por:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{D}{2}, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Condição de alinhamento de três pontos

Os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Quer saber mais?

Site

UNICAMP. Como funciona o sistema de posicionamento global (GPS)? Derivando a Matemática, 12 abr. 2020. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~apmat/o-sistema-gps/. Acesso em: 18 nov. 2021.

Conheça os princípios básicos do funcionamento de um sistema de localização global (Global Positioning System – GPS) e as aplicações da Geometria Analítica para o aprimoramento dessa tecnologia. Texto e vídeos apresentam linguagem simples e divertida.

Vídeo

DIDATICS. René Descartes. YouTube, 5 nov. 2018. Disponível em: https://youtu.be/8UGdAipS4lI. Acesso em: 4 nov. 2021.

René Descartes – sua filosofia e maneira de pensar. Conheça o soldado, filósofo e matemático que relacionou a Álgebra com a Geometria, originando a Geometria Analítica e que também é conhecido como o pai da filosofia moderna, sendo considerado um dos pensadores mais importantes da história do pensamento ocidental.

Exercícios complementares

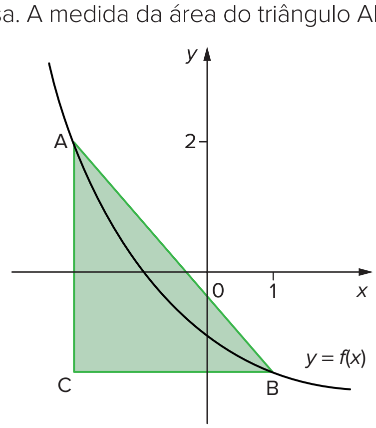
1. **EEAR-SP 2016** Considere os segmentos de retas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em que A(0, 10), B(2, 12), C(–2, 3) e D(4, 3). O segmento $\overline{MN}$, determinado pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é dado pelos pontos M e N, pertencentes respectivamente a $\overline{AB}$ e a $\overline{CD}$. Assinale a alternativa que corresponde corretamente a esses pontos.

a) $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ e N(–1, 3).
b) M(–2, 10) e N(–1, 3).
c) M(1, –2) e N(1, 3).
d) M(1, 11) e N(1, 3).

2. Em um jogo de computador, os jogadores devem mover pontos sobre um sistema de coordenadas até que eles estabeleçam algum tipo de simetria. Determine os valores reais de a e b para os quais os pontos $P(a - 1, 2a + 1)$ e $Q(2b, 2 - b)$ sejam simétricos em relação:

a) ao eixo das abscissas.
b) ao eixo das ordenadas.
c) à origem.
d) à bissetriz dos quadrantes ímpares.

3. **UPF-RS 2018** Na figura abaixo, está representado um triângulo retângulo em que os vértices A e B pertencem ao gráfico da função f, definida por $f(x) = 2^{-x} - 2$. Como indica a figura, a abscissa do ponto B é 1, a ordenada do ponto A é 2 e os pontos A e C têm a mesma abscissa. A medida da área do triângulo ABC é



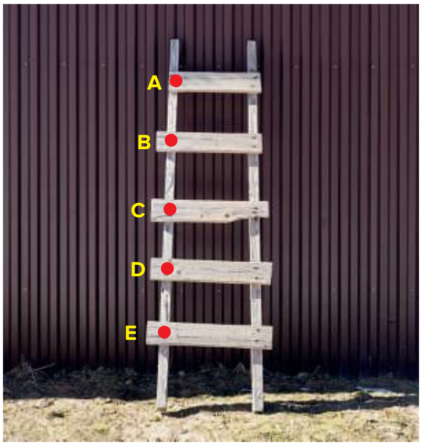
a) $\frac{21}{2}$ **b)** $\frac{3}{2}$ **c)** 6 **d)** 12 **e)** $\frac{21}{4}$

4. No mapa de uma cidade, as coordenadas dos três hospitais municipais A, B e C são, respectivamente, (–5, 12), (8, –4) e (0, 10). Determine:

a) as coordenadas de um pronto-socorro situado no ponto médio do segmento com extremos nas coordenadas dos hospitais B e C.
b) as coordenadas do corpo de bombeiros situado no baricentro do triângulo de vértices em A, B e C.
c) a área do triângulo de vértices A, B e C, em unidades de área.

5. Uma escada de madeira com 5 degraus consecutivos igualmente afastados um do outro está encostada na parede de uma construção, como ilustra a figura a seguir:

WoodyAlec/iStockphoto.com

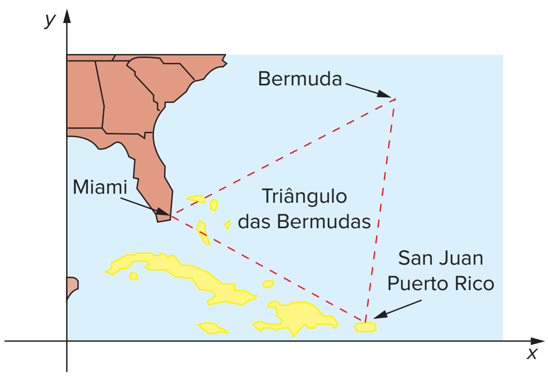


Se o ponto A, no degrau mais alto da escada, está a 10 cm afastado da parede e a 2,0 m de altura, e o ponto E, no degrau mais baixo, está a 70 cm afastado da parede e a 0,4 m de altura, determine o afastamento da parede, em centímetros, e a altura, em metros, do ponto:

a) C, situado no degrau central da escada.
b) B, situado no penúltimo degrau da escada.
c) D, situado no segundo degrau da escada.

FRENTE 3

6. O Triângulo das Bermudas é uma região do Oceano Atlântico limitada pelas cidades de Miami, nos Estados Unidos, San Juan, em Porto Rico, e pela ilha Bermuda. Essa região é famosa pelo número de navios e aviões desaparecidos misteriosamente.



Em um sistema cartesiano cujas unidades dos eixos coordenados equivalem a 100 km, as coordenadas dos vértices do triângulo são Miami (7, 9), San Juan (22, 1) e Bermuda (24, 17). Faça uma estimativa da área, em quilômetros quadrados, de região limitada pelo Triângulo das Bermudas.

7. ITA-SP A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos A(2, 1) e B(3, –2). Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abcissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são:

a) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ou (5, 0).

b) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ou (4, 0).

c) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ ou (5, 0).

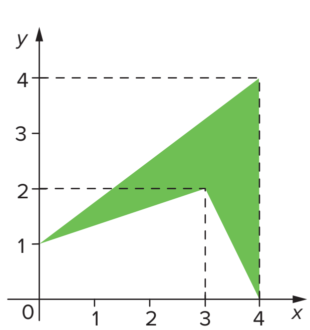
d) $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ ou (4, 0).

e) $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ ou (3, 0).

8. UPE/SSA 2018 Os pontos (3, 2), (5, 2) e (3, 6) são vértices de um triângulo retângulo. Quais são os valores das medidas da hipotenusa e da área desse triângulo nessa ordem?

a) 2 e $2\sqrt{2}$
b) 2 e $2\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{5}$ e 4
d) $\sqrt{5}$ e 2
e) 5 e $5\sqrt{3}$

9. FGV-SP A área da figura colorida no diagrama a seguir vale:



a) 4,0 **b)** 3,5 **c)** 3,0 **d)** 5,0 **e)** 4,5

10. Fuvest-SP Sejam A(1, 2) e B(3, 2) dois pontos do plano cartesiano. Nesse plano, o segmento $\overline{AC}$ é obtido do segmento $\overline{AB}$ por uma rotação de 60°, no sentido anti-horário, em torno do ponto A. As coordenadas do ponto C são:

a) $\left(2, 2+\sqrt{3}\right)$

b) $\left(1+\sqrt{3}, \frac{5}{2}\right)$

c) $\left(2, 1+\sqrt{3}\right)$

d) $\left(2, 1-\sqrt{3}\right)$

e) $\left(1+\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\right)$

11. UPE/SSA 2018 Qual é a medida da área e do perímetro do losango cujos vértices são A(2, 3), B(1, 0), C(0, 3) e D(1, 6)?
Utilize: $\sqrt{10} \cong 3{,}2$.

a) Área = 6 e perímetro = 12,8
b) Área = 6 e perímetro = 10,4
c) Área = 12 e perímetro = 22,3
d) Área = 12 e perímetro = 25,9
e) Área = 18 e perímetro = 27,1

12. O baricentro de um triângulo ABC é o ponto $G\left(\frac{4}{3}, 3\right)$, o ponto médio do lado $\overline{AB}$ é $M_1(-1, 5)$ e o ponto médio do lado $\overline{BC}$ é $M_3(1, 1)$. Determine os vértices A, B e C.

13. Uema Uma reta passa pelos pontos A(–12, –13) e B(–2, –5). Determine, nesta reta, um ponto cuja abscissa é 3.

a) (3, –2)
b) (3, 1)
c) (3, –1)
d) (3, 3)
e) (3, 0)

14. Folheando o guia da cidade, Bruno percebeu que tanto a localização de sua casa quanto a da escola em que estuda estavam representadas em uma mesma página. No mapa dessa página, a casa de Júlio fica exatamente no centro do quadrado D1; e a escola dele, no centro do quadrado B4.

Sabendo que cada quadrado do mapa representa uma região da cidade com 1 km^2 de área, calcule a distância entre a casa e a escola de Bruno.

15. Um terreno no interior do estado de Santa Catarina é quadrangular e tem seus vértices nos pontos A, B, C e D tais que:

- B está a 5 km ao leste e a 2 km ao norte do ponto A;
- C está a 4 km ao leste e a 5 km ao norte do ponto A;
- D está a 1 km ao leste e a 4 km ao norte do ponto A.

O preço médio dos terrenos rurais nessa região do país é de R$ 2 500,00 por hectare, mas o dono desse terreno quer vendê-lo rapidamente, por isso vai oferecê-lo por um valor 10% inferior ao preço médio praticado na região.

Sabendo que um hectare equivale a 10 000 m^2, determine o valor da oferta que será feita pelo dono do terreno.

16. FURRN A reta *r* é determinada pelos pontos (3, 3) e (–5, 1). O ponto (–3, *m*) também pertencerá a *r* para um certo valor de *m*, tal que:

a) $m = -2$ **b)** $-2 < m < 0$ **c)** $0 < m \leq \frac{1}{2}$ **d)** $\frac{1}{2} < m < 2$ **e)** $m > 2$

17. Efomm-RJ Os pontos A(0, 3), B(2, –2) e C(3, 3) são vértices de um triângulo. Podemos afirmar que a raiz quadrada da soma dos quadrados dos lados desse triângulo é igual a:

a) $\sqrt{2}$ **b)** 8 **c)** $\sqrt{3}$ **d)** 12 **e)** $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

18. ITA-SP Três pontos de coordenadas, respectivamente, (0, 0), (*b*, 2*b*) e (5*b*, 0), com $b > 0$, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:

a) (–*b*, –*b*) **b)** (2*b*, –*b*) **c)** (4*b*, –2*b*) **d)** (3*b*, –2*b*) **e)** (2*b*, –2*b*)

19. AFA-SP 2016 Considere os pontos A(4, –2), B(2, 0) e todos os pontos P(*x*, *y*), sendo *x* e *y* números reais, tais que os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são catetos de um mesmo triângulo retângulo.

É correto afirmar que, no plano cartesiano, os pontos P(*x*, *y*) são tais que

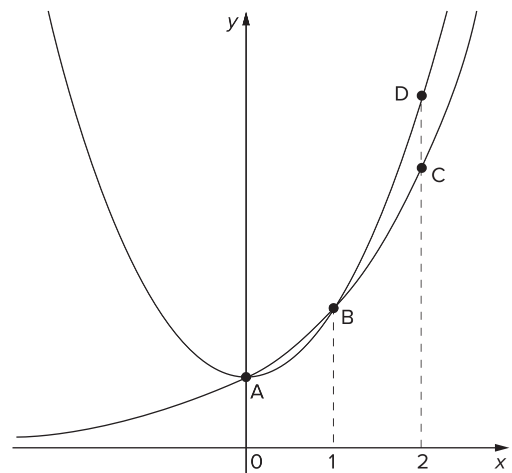
a) são equidistantes de C(2, –1).

b) o maior valor de *x* é $3+\sqrt{2}$.

c) o menor valor de *y* é –3.

d) *x* pode ser nulo.

20. ESPM-SP 2013 A figura a seguir representa os gráficos das funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2^x$. A área do quadrilátero ABCD é igual a:



a) 2,0 **b)** 1,5 **c)** 0,5 **d)** 2,5 **e)** 1,0

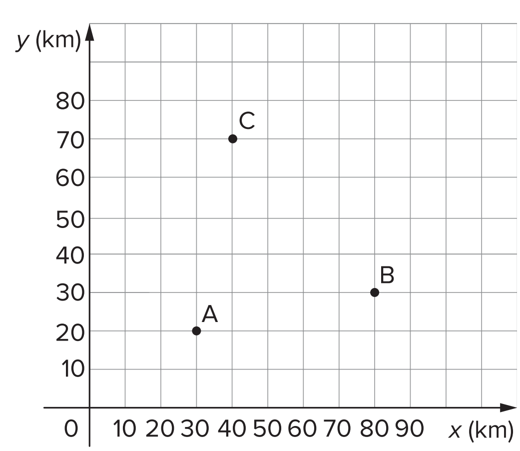
BNCC em foco

EM13MAT308

1. Desde o começo do século XXI, Israel começou a construir muros para separar os locais habitados por israelenses e palestinos. [...]

No ano de 2000, teve início a Segunda Intifada, liderada pelo Hamas. Uma ofensiva palestina foi montada contra Israel, que novamente respondeu duramente, além de demolir casas de palestinos e iniciar a construção do Muro da Cisjordânia ou Muro de Israel, em 2002. Milhares de mortes aconteceram em ambos os lados da guerra, que se estendeu até 2004, com a morte do líder do Hamas.

SILVA, Daniel N. Conflitos entre Israel e Palestina. Mundo Educação, [s.d.]. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/geografia/o-conflito-entre-israel-palestina.htm. Acesso em: 25 nov. 2021



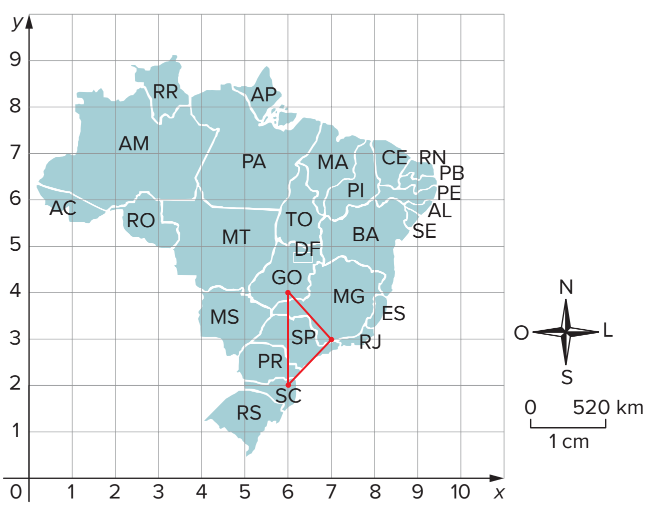
Em um dos ataques de Israel, foi apresentado à artilharia um mapa com as coordenadas mostradas na figura anterior. O alvo deveria ser exatamente o ponto que divide as medianas do triângulo ABC na razão 2 : 1. As coordenadas desse ponto são:

a) (50, 30) **c)** (30, 50) **e)** (40, 50)
b) (50, 40) **d)** (30, 40)

EM13MAT307

2. Uma crise hidrológica histórica enfrentada pelo Brasil nos últimos meses passou a gerar preocupações sobre a oferta de energia, e técnicos responsáveis pela operação do sistema elétrico avaliam que evitar um racionamento ou blecautes exigirá uma verdadeira "disputa pela água". O Comitê de Monitoramento do Setor Elétrico (CMSE), liderado pelo Ministério de Minas e Energia, disse após reunião extraordinária na quinta-feira que a escassez de chuvas faz com que seja importante flexibilizar restrições à operação de algumas hidrelétricas, incluindo Jupiá, Porto Primavera e Ilha Solteira, em São Paulo, e Furnas, em Minas Gerais.

COSTA, Luciano; GAIER, Rodrigo V. Crise hídrica no Brasil deve gerar "disputa pela água", dizem especialistas. CNN Brasil com informações da Reuters, 28 maio 2021. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/business/crise-hidrica-no-brasil-deve-gerar-disputa-pela-agua-dizem-especialistas/. Acesso em: 25 nov. 2021.



Fonte: elaborado com base em IBGE. Atlas geográfico escolar. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 90.

As previsões para as chuvas começarem são pessimistas, e a escassez hídrica já está aí. A crise da água é pior nos estados de alta densidade demográfica. Atentando para a escala fornecida, a área (em km^2) da região destacada no mapa, com as coordenadas cartesianas, que mais sente a crise hídrica é de aproximadamente:

a) 520 km **c)** 520 km^2 **e)** 270 400 km^2
b) 2 080 km **d)** 1 040 km^2

EM13MAT105 e EM13MAT301

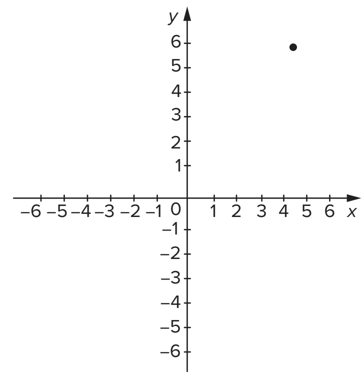
3. Em animações gráficas computacionais, para rotacionar (girar) um objeto no sentido anti-horário, em determinado ângulo, sendo a origem dos eixos coordenados o centro de rotação, é necessário multiplicar matrizes, e, para transladá-lo (deslocar), somamos vetores, como indicado a seguir.

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$, em que x e y são as coordenadas do ponto original, θ é o ângulo que se deseja girar, d_x e d_y o deslocamento nas direções x e y, respectivamente, e x' e y', as coordenadas do ponto após o deslocamento.

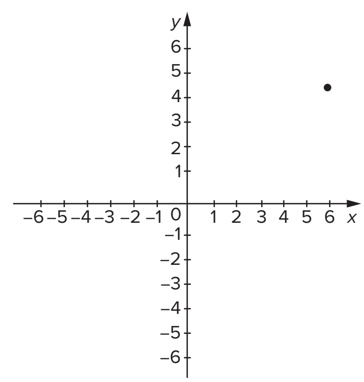
Com base nessas informações, se um animador girar cerca de 60° no sentido anti-horário um ponto no plano cartesiano, cujas coordenadas iniciais são (4, 3), e em seguida transladá-lo por um vetor (5, 1), a posição final aproximada do ponto será:

Considere: $\sqrt{3} \cong 1{,}7$.

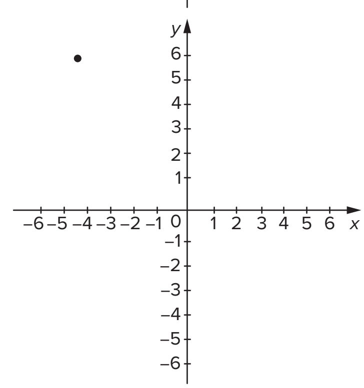
a)



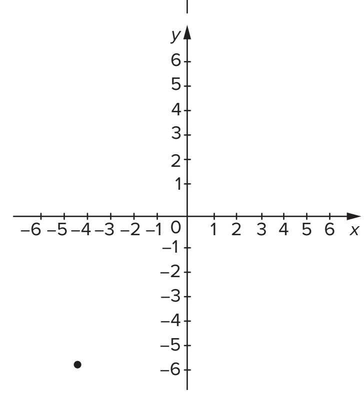
b)



c)



d)



valeriopardi/iStockphoto.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

8

O estudo da reta

O estudo da reta permite relacionar a Álgebra e a Geometria na medida em que é possível converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano.

Teoria angular da reta

Se você já correu (ou observou alguém correndo) em uma esteira inclinada de uma academia, sabe que é possível regular a inclinação por meio de controles. Quando isso é feito, aparece um número no visor do equipamento, provavelmente uma porcentagem. Você sabe o que ele significa?


andresr/iStockphoto.com

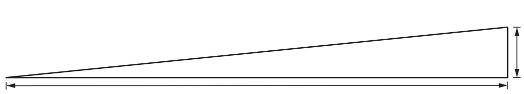
Você já observou uma decolagem no Aeroporto Santos Dumont, na cidade do Rio de Janeiro? Como a pista é curta, o avião tem de acelerar muito e subir com inclinação acentuada para não se chocar contra o Morro do Pão de Açúcar. Você sabe dizer qual é a inclinação necessária dessa trajetória e como calculá-la?


ChandraDhas/iStockphoto.com

Questões como essas fazem parte do cotidiano da humanidade. A Geometria Plana e Espacial, a Trigonometria e a Geometria Analítica fornecem ferramentas para resolver esse tipo de problema, que consiste, entre outras coisas, em medir a inclinação de uma reta em relação a uma referência.

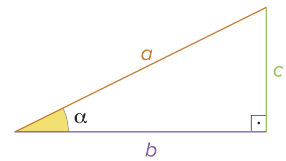
Coeficiente angular

Para se chegar ao resultado, uma primeira abordagem seria medir diretamente o ângulo de inclinação da reta. Porém, nem sempre os instrumentos necessários estão disponíveis ou a medida do ângulo é prática. Retomando o exemplo da esteira inclinada, saber que ela apresenta uma inclinação de 7° talvez não informe muito sobre o desempenho do corredor. Mas, se o visor mostrasse o valor de 10%, o que significaria essa inclinação expressa em porcentagem? Imagine que o corredor "sobe" 100 metros na vertical a cada 1 000 metros de deslocamento na horizontal, ou seja, a inclinação é uma "taxa de subida" igual a $\dfrac{100\text{ m}}{1000\text{ m}} = 10\%$.



O exemplo da inclinação de decolagem do avião é similar ao do corredor: o avião deve subir uma determinada altura em uma certa distância para passar sobre o Morro do Pão de Açúcar. Logo, existe uma taxa mínima de subida para garantir uma decolagem segura.

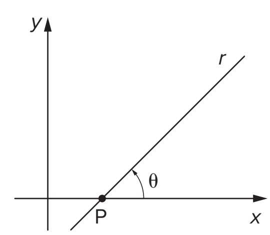
Retomando a trigonometria do triângulo retângulo, podemos considerar que a taxa de subida é a tangente do ângulo de inclinação, definida como a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo.



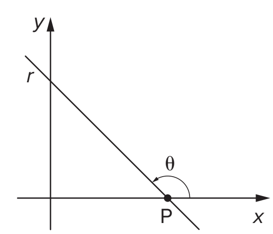
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{c}{b}$$

No estudo da reta pela Geometria Analítica, utilizamos ideias similares às descritas anteriormente. Na sequência, vamos defini-las e generalizá-las.

Definimos o ângulo de inclinação θ de uma reta no plano cartesiano como aquele formado pela reta e pelo eixo das abscissas (x), com vértice no ponto P de interseção da reta e do eixo. O ângulo é orientado no sentido anti-horário, da mesma maneira que é medido na circunferência trigonométrica. No caso de a reta r ser paralela ao eixo das abscissas, definimos o ângulo entre a reta e o eixo como nulo.



O ângulo θ é agudo.



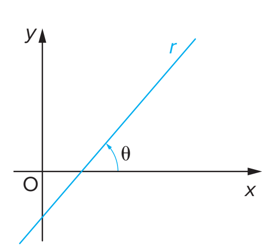
O ângulo θ é obtuso.

Dada uma reta r não perpendicular ao eixo x, definimos seu **coeficiente angular** m como a tangente do ângulo de inclinação, ou seja:

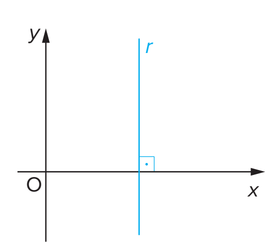
$$m = \text{tg}\,\theta$$

Assim, se:

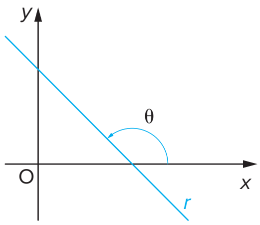
$$\begin{cases} \theta \text{ é agudo } (0° < \theta < 90°) \Rightarrow m \text{ é positivo } (\text{tg}\,\theta > 0); \\ \theta \text{ é obtuso } (90° < \theta < 180°) \Rightarrow m \text{ é negativo } (\text{tg}\,\theta > 0); \\ \theta \text{ é nulo } (\theta = 0°) \Rightarrow m \text{ é nulo } (\text{tg}\,0° = 0); \\ \theta \text{ é reto } (\theta = 90°) \Rightarrow m \text{ não se define.} \end{cases}$$



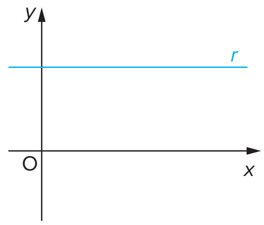
$0° < \theta < 90°$
$m = \text{tg}\,\theta > 0$



$\theta = 90°$
$m = \text{tg}\,\theta$ não é definida



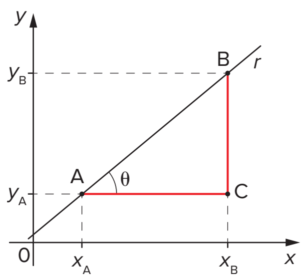
$90° < \theta < 180°$
$m = \text{tg}\,\theta < 0$



$\theta = 0°$
$m = \text{tg}\,\theta = 0$

Podemos determinar o valor do coeficiente angular m em função das coordenadas de dois pontos distintos pertencentes à reta.

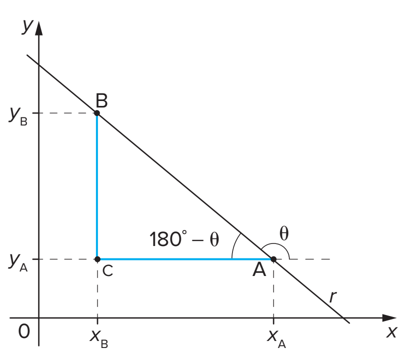
Se o ângulo θ é agudo, temos:



Os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencem à reta r, que não é paralela ao eixo y. O coeficiente angular é dado por

$$m = \text{tg}\,\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Se o ângulo θ é obtuso, temos:



$$m = \text{tg}\,\theta = -\text{tg}\,(180° - \theta) = -\frac{BC}{AC} = -\frac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Assim, se uma reta r não paralela ao eixo y passar por $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, seu coeficiente angular sempre será dado por:

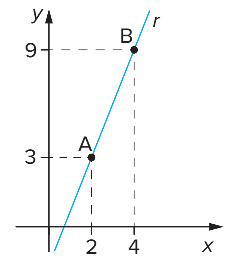
$$m = \text{tg}\,\theta = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exercício resolvido

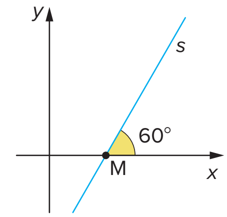
1. Calcule o coeficiente angular das retas a seguir:

a) $\overleftrightarrow{AB}$, tal que A(–2, 5) e B(3, –2).

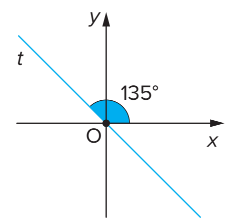
b)



c)



d)



Resolução:

a) $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-2 - 5}{3 - (-2)} = -\dfrac{7}{5}$

b) A reta r passa pelos pontos A(2, 3) e B(4, 9). Assim, o coeficiente angular m é:

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{9 - 3}{4 - 2} = \frac{6}{2} = 3$$

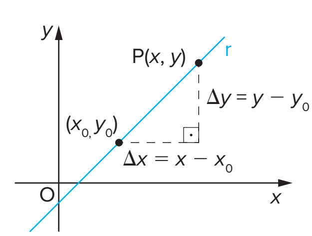
c) $m_s = \text{tg}\,\theta \Rightarrow m_s = \text{tg}\,60° = \sqrt{3}$

d) $m_t = \text{tg}\,\theta \Rightarrow m_t = \text{tg}\,135° = -1$

Equação fundamental da reta

Seja r uma reta não paralela ao eixo y que tem coeficiente angular igual a m. Se (x_0, y_0) é um ponto conhecido da reta e $P(x, y)$ é um outro ponto qualquer, temos que P será um ponto da reta r se, e somente se, $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = m$, o que implica a seguinte equação:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$



Essa equação é conhecida como **equação fundamental da reta** e é satisfeita por todos os pontos da reta e apenas por eles. A partir dela, podemos deduzir outras equações da reta.

Exercício resolvido

2. Considerando as retas dos itens do exercício resolvido 1, obtenha a equação fundamental de cada uma delas.

Resolução:

a) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ passa por A(–2, 5) e B(3, –2) e tem $m = -\frac{7}{5}$, então:

$$y - 5 = -\frac{7}{5}(x - (-2)) \Rightarrow y - 5 = -\frac{7}{5}(x + 2)$$

b) A reta *r* passa por A(2, 3) e B(4, 9) e tem $m = 3$, então:

$$y - 3 = 3(x - 2)$$

c) A reta *s* passa por M(x_M, 0) e tem $m = \sqrt{3}$, então:

$$y - 0 = \sqrt{3}(x - x_M)$$

d) A reta *t* passa por O(0, 0) e tem $m = -1$, então:

$$y - 0 = -1(x - 0)$$

Para cada ponto de uma reta, é possível obter uma equação fundamental distinta para essa reta. Logo, uma mesma reta possui infinitas equações fundamentais.

A seguir, estudaremos outras equações de reta que podem ser obtidas a partir da equação fundamental.

Equação reduzida da reta

Seja uma reta *r* de coeficiente angular *m* que passa pelo ponto (x_0, y_0). A equação fundamental da reta é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Desenvolvendo e isolando o *y*:

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

Chamando $y_0 - mx_0$ de *n*, temos:

$$\boxed{y = mx + n}$$

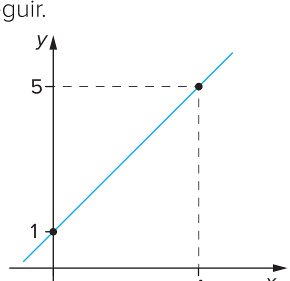
Essa equação é conhecida como equação reduzida da reta.

O coeficiente *n* é chamado de **coeficiente linear** da reta. Observe que, para $x = 0$, temos $y = n$. Assim, *n* é a ordenada do ponto onde a reta intersecta o eixo *y*.

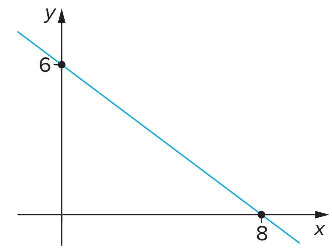
Exercícios resolvidos

3. Obtenha a equação reduzida de cada reta nas figuras a seguir.

a)



b)



Resolução:

a) A reta passa pelos pontos (0, 1) e (4, 5), tendo, portanto, coeficiente angular $m = \frac{5-1}{4-0} = \frac{4}{4} = 1$ e coeficiente linear $n = 1$ (onde a reta intersecta o eixo *y*). Assim, sua equação reduzida é $y = x + 1$.

b) A reta passa pelos pontos (0, 6) e (8, 0), tendo, portanto, coeficiente angular $m = \frac{0-6}{8-0} = -\frac{3}{4}$ e coeficiente linear $n = 6$. Assim, sua equação reduzida é $y = -\frac{3}{4}x + 6$.

4. Determine a equação reduzida da reta que passa por A(2, 2) e B(6, 4).

Resolução:

Sabendo que a equação reduzida da reta é da forma $y = mx + n$, temos:

$$\begin{cases} 2 = m \cdot 2 + n \\ 4 = m \cdot 6 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = 2 \\ 6m + n = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $m = \frac{1}{2}$ e $n = 1$; assim, a equação pedida é $y = \frac{1}{2}x + 1$.

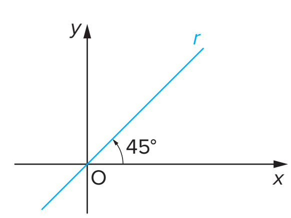
5. Determine a equação reduzida:

a) da bissetriz dos quadrantes ímpares.

b) da bissetriz dos quadrantes pares.

Resolução:

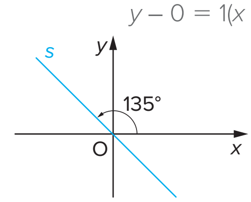
a)



Conforme a figura, a bissetriz dos quadrantes ímpares passa pela origem e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 45° = 1$. Logo, sua equação é dada por:

$$y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$$

b)



Conforme a figura, a bissetriz dos quadrantes pares passa pela origem e tem coeficiente angular $m = \text{tg } 135° = -1$. Logo, sua equação é dada por:

$$y - 0 = -1(x - 0) \Rightarrow y = -x$$

6. Dados os pontos A(1, 4), B(–2, 1) e C(2, 1), determine a equação reduzida da reta suporte da mediana do triângulo ABC, traçada pelo vértice A.

Resolução:

A mediana do triângulo ABC traçada por A passa pelo ponto médio do lado $\overline{BC}$. Sendo M esse ponto, temos:

$$M\left(\frac{-2+2}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = M(0, 1)$$

A reta suporte da mediana traçada por A é $\overleftrightarrow{AM}$. Seu coeficiente angular é:

$$m_{AM} = \frac{y_A - y_M}{x_A - x_M} = \frac{4-1}{1-0} = 3$$

A equação fundamental é $y - 1 = 3(x - 0)$. Logo, a equação reduzida é da forma $y = 3x + 13$.

Como os coeficientes angular e linear são únicos para uma reta, cada reta possui uma única equação reduzida.

Equação geral da reta

Desenvolvendo a equação fundamental da reta, podemos deixá-la em uma forma conhecida como **equação geral da reta**:

$$ax + by + c = 0$$

Exercício resolvido

7. Determine a equação geral da reta que passa pelos pontos A(1, 2) e B(7, 6).

Resolução:

O coeficiente angular da reta é dado por:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{7-1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

A equação fundamental da reta é dada por:

$$y - 2 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

Isso equivale a $3y - 6 = 2x - 2 \Rightarrow 2x - 3y + 4 = 0$, que é uma equação geral com $a = 2$, $b = -3$ e $c = 4$.

Uma equação geral de reta, ao ser multiplicada por uma constante não nula, gera uma nova equação resolvida pelo mesmo conjunto de pontos da reta anterior. Assim, uma mesma reta possui infinitas equações gerais.

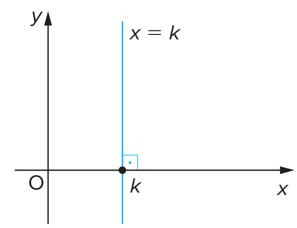
Note que as equações a seguir são todas equações gerais da reta que passa pelos pontos A(2, 3) e B(6, 5).

$$x - 2y + 4 = 0 \qquad \frac{1}{2}x - y + 2 = 0$$

$$2x - 4y + 8 = 0 \qquad 5x - 10y + 20 = 0$$

Retas paralelas ao eixo x têm inclinação igual a zero e coeficiente angular nulo. Suas equações são da forma $y = k$, em que k é uma constante.

Retas paralelas ao eixo y têm inclinação de 90°, e para elas não está definido o coeficiente angular. Suas equações são da forma $x = k$, em que k é uma constante.



Seja r a reta de equação $ax + by + c = 0$, com $b \neq 0$. Temos:

$$ax + by + c = 0 \Leftrightarrow by = -ax - c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

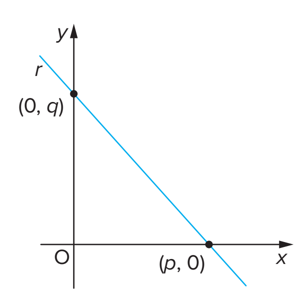
Assim, o coeficiente angular da reta r é $m = -\frac{a}{b}$, e o coeficiente linear é $n = -\frac{c}{b}$.

! Atenção

Note que o coeficiente angular das retas paralelas ao eixo y não existe, portanto essas retas não podem ser representadas por equações na forma fundamental ($y - y_0 = m(x - x_0)$) ou reduzida ($y = mx + n$).
No entanto, toda reta, inclusive as paralelas ao eixo y, pode ser representada por uma equação na forma geral ($ax + by + c = 0$), como visto acima.

Equação segmentária da reta

Seja r uma reta que intersecta o eixo y no ponto $(0, q)$, com $q \neq 0$, e o eixo x no ponto $(p, 0)$, com $p \neq 0$, como representado abaixo.



O coeficiente angular de r é $m = \frac{0 - q}{p - 0} = -\frac{q}{p}$.

Temos como equação fundamental $y - y_0 = m(x - x_0)$, logo:

$$y - q = -\frac{q}{p}(x - 0) \Rightarrow \frac{q}{p}x + y = q$$

Dividindo por q:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}$$

Essa equação é chamada **equação segmentária da reta**.

Equação paramétrica da reta

Nesse tipo de equação, x e y são dados em equações separadas como funções de um ou mais parâmetros reais. Por exemplo: para um parâmetro t qualquer, temos $x = f(t)$ e $y = g(t)$.

Note a equação paramétrica $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$. Para transformá-la em uma equação geral, isolamos o parâmetro e igualamos as equações obtidas. Observe:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \Rightarrow 2t = 3 - x \Rightarrow t = \dfrac{3 - x}{2} \\ y = 4 + 3t \Rightarrow 3t = y - 4 \Rightarrow t = \dfrac{y - 4}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3 - x}{2} = \frac{y - 4}{3} \Rightarrow 9 - 3x = 2y - 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x + 2y - 17 = 0$$

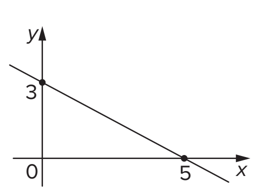
Saiba mais

Nem toda equação paramétrica da reta é formada por equações afins. Por exemplo, a equação paramétrica $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = 3t^3 \end{cases}$ é representada por uma reta no plano cartesiano.

Além disso, nem toda equação paramétrica corresponde a uma reta. Por exemplo, a equação $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\operatorname{sen} t \end{cases}$ descreve uma elipse no plano cartesiano.

Exercícios resolvidos

8. Determine a equação segmentária da reta dada na figura a seguir:



Resolução:

Como a reta intersecta os eixos nos pontos $(p, 0) = (5, 0)$ e $(0, q) = (0, 3)$, a equação segmentária é dada por:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$$

9. A trajetória de um móvel no plano cartesiano pode ser descrita, em função do tempo t, pelas equações $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3t + 1 \end{cases}$. Obtenha uma equação geral da trajetória determinada por essas equações paramétricas.

Resolução:

Isolando t na primeira equação, obtemos $t = x - 2$. Substituindo t na segunda equação, temos:

$$y = 3(x - 2) + 1 \Rightarrow y = 3x - 5$$

Assim, uma equação da trajetória é $3x - y - 5 = 0$.

10. Seja $B \neq (0, 0)$ o ponto da reta de equação $y = 2x$ cuja distância ao ponto A(1, 1) é igual à distância de A até a origem. Determine as coordenadas de B.

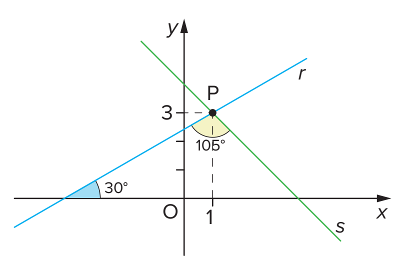
Resolução:

Como B pertence à reta $y = 2x$, ele é da forma $B(a, 2a)$, com $a \neq 0$. Assim:

$$d(B, A) = d(A, O)$$
$$\sqrt{(a - 1)^2 + (2a + 1)^2} = \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2}$$
$$\sqrt{a^2 - 2a + 1 + 4a^2 - 4a + 1} = \sqrt{1 + 1}$$
$$\sqrt{5a^2 - 6a + 2} = \sqrt{2}$$
$$5a^2 - 6a + 2 = 2$$
$$5a^2 - 6a = 0$$
$$a(5a - 6) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ (não serve) ou } a = \frac{6}{5}$$

Portanto, $B(a, 2a) = B\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}\right)$.

11. **Unesp** Na figura a seguir têm-se as retas r e s, concorrentes no ponto (1, 3).



Se os ângulos assinalados têm as medidas indicadas, determine:

a) uma equação geral da reta r.
b) uma equação geral da reta s.
c) a área do triângulo formado pelas retas r, s e o eixo x.

Resolução:

a) Se r passa por (1, 3) e tem coeficiente angular $m_r = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$, sua equação geral é:

$$y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y - 9 = \sqrt{3}x - \sqrt{3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sqrt{3}x - 3y + 9 - \sqrt{3} = 0$$

b) A inclinação da reta s é $\theta = 30° + 105° = 135°$, logo, seu coeficiente angular é $m_s = \text{tg}\,135° = -1$. Como s também passa pelo ponto (1, 3), sua equação é:

$$y - 3 = -1(x - 1) \Rightarrow y - 3 = -x + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + y - 4 = 0$$

c) A reta r intersecta o eixo x em A, tal que $y = 0$:

$$\sqrt{3}x - 3 \cdot 0 + 9 - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3} - 9}{\sqrt{3}} = 1 - 3\sqrt{3}$$

Portanto, $A\left(1 - 3\sqrt{3}, 0\right)$.

A reta s intersecta o eixo x em B, tal que $y = 0$:

$$x + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Portanto, B(4, 0).

A distância entre A e B, base do triângulo, é igual a:

$$\left|4 - \left(1 - 3\sqrt{3}\right)\right| = \left|3 + 3\sqrt{3}\right| = 3\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

Então, a área do triângulo ABP é:

$$S_{\Delta ABP} = \frac{3\left(1 + \sqrt{3}\right) \cdot 3}{2} = \frac{9\left(1 + \sqrt{3}\right)}{2} \text{ u.a.}$$

12. Fuvest Uma reta de coeficiente angular $m < 0$ passa pelo ponto P(1, 2).

a) Escreva a equação da reta para $m = -1$.

b) Calcule m de modo que a reta forme com os eixos um triângulo de área 4.

Resolução:

a) A reta passa por P(1, 2) e tem $m = -1$:

$$y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 2x + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + y - 3 = 0$$

b) Se a reta passa por P(1, 2) e tem coeficiente angular m ($m < 0$), ela é da forma:

$$y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow y - 2 = mx - m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow mx - y + 2 - m = 0$$

Essa reta intersecta os eixos nos pontos:

eixo x ($y = 0$): $mx - 0 + 2 - m = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{m - 2}{m} \Rightarrow \left(\frac{m - 2}{m}, 0\right)$$

eixo y ($x = 0$): $m \cdot 0 - y + 2 - m = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = 2 - m \Rightarrow (0, 2 - m)$$

Perceba que, como $m < 0$, as expressões algébricas $\frac{m - 2}{m}$ e $2 - m$ são sempre positivas. Logo, $\left|\frac{m - 2}{m}\right| = \frac{m - 2}{m}$ e $|2 - m| = 2 - m$, e essas são as medidas dos catetos do triângulo determinado pela reta e pelos eixos. Desse modo, sendo a área do triângulo igual a 4, temos:

$$4 = \frac{\left(\frac{m - 2}{m}\right) \cdot (2 - m)}{2} \Rightarrow \left(\frac{m - 2}{m}\right) \cdot (2 - m) = 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{2m - m^2 - 4 + 2m}{m} = 8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -m^2 + 4m - 4 = 8m \Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos $m = -2$.

Posições relativas entre retas

Introdução

Sejam as retas r e s dadas por:

Equações gerais: $\begin{cases} r\colon a_r x + b_r y + c_r = 0,\ b_r \neq 0 \\ s\colon a_s x + b_s y + c_s = 0,\ b_s \neq 0 \end{cases}$

Equações reduzidas: $\begin{cases} r\colon y = m_r x + n_r \\ s\colon y = m_s x + n_s \end{cases}$

Os coeficientes angulares e lineares de r e s são, respectivamente:

$$m_r = -\frac{a_r}{b_r} \text{ e } n_r = -\frac{c_r}{b_r} \qquad m_s = -\frac{a_s}{b_s} \text{ e } n_s = -\frac{c_s}{b_s}$$

A seguir, analisaremos suas posições relativas.

Retas coincidentes

Duas retas r e s serão **coincidentes** (ou paralelas coincidentes) se, e somente se, tiverem o mesmo coeficiente angular e o mesmo coeficiente linear. Assim: $\begin{cases} m_r = m_s \\ n_r = n_s \end{cases}$

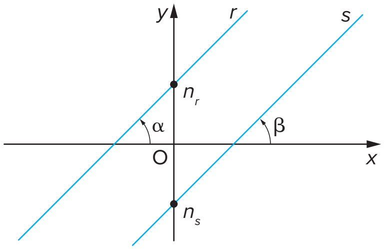
Na forma geral:

$$-\frac{a_r}{b_r} = -\frac{a_s}{b_s} \text{ e } -\frac{c_r}{b_r} = -\frac{c_s}{b_s} \Leftrightarrow \frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} = \frac{c_r}{c_s}$$

Por exemplo, considere as retas r: $2x + y - 2 = 0$ e s: $4x + 2y - 4 = 0$. Elas são coincidentes, pois $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4}$.

Retas paralelas distintas

Duas retas r e s **paralelas distintas**, como representado abaixo, têm o mesmo coeficiente angular e coeficientes lineares diferentes.



$$r // s \text{ e } r \neq s \Leftrightarrow \alpha = \beta \Rightarrow m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$

Na forma geral, temos:

$$m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s \Leftrightarrow -\frac{a_r}{b_r} = -\frac{a_s}{b_s}$$
$$\text{e } -\frac{c_r}{b_r} \neq -\frac{c_s}{b_s} \Leftrightarrow \frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} \neq \frac{c_r}{c_s}$$

FRENTE 3

Como exemplos, temos:

a) As retas $r: y = 3x - 1$ e $s: y = 3x + 2$ são paralelas distintas, pois $m_r = m_s = 3$ e $n_r = -1 \neq 2 = n_s$.

b) As retas $r: 2x + 3y - 1 = 0$ e $s: 4x + 6y - 2 = 0$ são coincidentes, pois $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2}$.

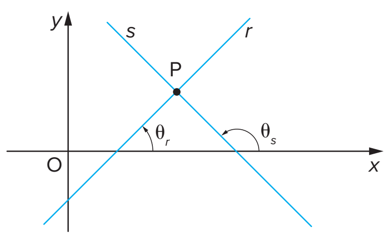
c) As retas $r: 3x - y + 2 = 0$ e $s: 9x - 3y - 6 = 0$ são paralelas distintas, pois $\frac{3}{9} = \frac{-1}{-3} \neq \frac{2}{-6}$.

d) As retas $r: y - 1 = 0$ e $s: y + 2 = 0$ são paralelas distintas, pois ambas são paralelas ao eixo x.

e) As retas $r: x - 1 = 0$ e $s: x - 3 = 0$ são paralelas distintas, pois ambas são paralelas ao eixo y.

Retas concorrentes

As retas r e s são chamadas **concorrentes** quando se intersectam em apenas um ponto. Isso ocorrerá se, e somente se, tiverem inclinação diferente em relação ao eixo Ox, ou seja, se seus coeficientes angulares forem diferentes (quando estiverem definidos).



$$\theta_r \neq \theta_s \Rightarrow m_r \neq m_s$$

Assim:
Como r e s são concorrentes, temos:

$$m_r \neq m_s \Rightarrow -\frac{a_r}{b_r} \neq -\frac{a_s}{b_s} \Rightarrow \frac{a_r}{a_s} \neq \frac{b_r}{b_s}$$

Como exemplo, temos:

a) As retas $r: y = 2x - 1$ e $s: y = 3x + 1$ são concorrentes, pois $m_r = 2 \neq 3 = m_s$.

b) As retas $2x + 3y - 1 = 0$ e $4x + 5y - 1 = 0$ são concorrentes, pois $\frac{2}{4} \neq \frac{3}{5}$.

Retas perpendiculares

Duas retas r e s serão **perpendiculares** se, e somente se, forem concorrentes e formarem um ângulo de 90°.

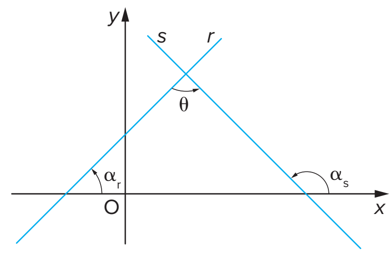
Se uma das retas for paralela a um dos eixos, ela será perpendicular a qualquer outra reta paralela a outro eixo. Assim, retas com equações na forma $x = k_1$, $k_1 \in \mathbb{R}$ (paralelas ao eixo y) são perpendiculares a retas com equações $y = k_2$, $k_2 \in \mathbb{R}$ (paralelas ao eixo x).

Teorema (condição de perpendicularidade)

Se r e s não forem retas paralelas aos eixos, elas serão perpendiculares se, e somente se, o produto dos coeficientes angulares for igual a -1, ou seja, $m_r \cdot m_s = -1$.

Demonstração

Sejam r e s duas retas concorrentes e não paralelas aos eixos, como na figura a seguir.



Suponha que $\theta = 90°$ (ou seja, r e s são perpendiculares). Temos que, se $m_r = \operatorname{tg} \alpha_r$, então $m_s = \operatorname{tg} \alpha_s = \operatorname{tg}(90° + \alpha_r) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_r} = \frac{+1}{m_r}$. Assim, $m_r \cdot m_s = -1$.

Agora, suponha que $m_r \cdot m_s = -1$. Como α_r e α_s são ângulos entre 0° e 180° e diferentes de 90°, temos:

$$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_r \cdot \operatorname{tg} \alpha_s = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_s = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_r} = \operatorname{tg}(90° + \alpha_r) \Rightarrow \alpha_s = 90° + \alpha_r$$

Isso implica que r e s são perpendiculares, e assim demonstramos o teorema.

Se r e s estiverem com suas equações na forma geral, teremos:

$$m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow \frac{-a_r}{b_r} \cdot \frac{-a_s}{b_s} = -1 \Rightarrow a_r \cdot a_s = -b_r \cdot b_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s = 0$$

Como exemplos, temos:

a) $r: y = 3x - 1$ e $s: y = -\frac{1}{3}x + 1$ são perpendiculares, pois $m_r \cdot m_s = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$.

b) $r: 3x + 4y - 2 = 0$ e $s: 4x - 3y + 2 = 0$ são perpendiculares, pois $a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s = 3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$

c) $r: x - 1 = 0$ e $s: y + 2 = 0$ são perpendiculares, pois $r \mathbin{//} Oy$ e $s \mathbin{//} Ox$.

! Atenção

Dadas as retas $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$, com $m_r \neq 0$ e $m_s \neq 0$, suas posições relativas são:

- Paralelas coincidentes: $m_r = m_s$ e $n_r = n_s$
- Paralelas distintas: $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$
- Concorrentes: $m_r \neq m_s$
- Perpendiculares: $m_r \cdot m_s = -1$

Dadas as retas $r: a_r x + b_r y + c_r = 0$ e $s: a_s x + b_s y + c_s = 0$, com $a_r \neq 0$, $a_s \neq 0$, $b_r \neq 0$ e $b_s \neq 0$, suas posições relativas são:

- Paralelas coincidentes: $\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} = \frac{c_r}{c_s}$
- Paralelas distintas: $\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} \neq \frac{c_r}{c_s}$
- Concorrentes: $\frac{a_r}{a_s} \neq \frac{b_r}{b_s}$
- Perpendiculares: $a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s = 0$

Exercícios resolvidos

13. Dada a reta r: $y = 2x$ e o ponto P(1, 4), determine a equação:

a) reduzida da reta s que passa por P e é paralela à reta r.

b) reduzida da reta t que passa por P e é perpendicular à reta r.

Resolução:

a) O ponto P(1, 4) não pertence à reta r, logo, r e s são paralelas distintas. Assim, $m_r = m_s = 2$.
A equação fundamental da reta s é dada por:
$$y - 4 = 2(x - 1)$$
Portanto, a equação reduzida é:
$$y = 2x - 2 + 4 \Rightarrow y = 2x + 2$$

b) Temos:
$$m_r \cdot m_t = -1 \Rightarrow 2 \cdot m_t = -1 \Rightarrow m_t = -\frac{1}{2}$$
A equação fundamental da reta t é dada por:
$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$
Portanto, a equação reduzida é:
$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$$

14. Dada a reta r: $3x + 4y = 0$ e o ponto P(2, 4), determine a equação:

a) geral da reta s que passa por P e é paralela à reta r.

b) geral da reta t que passa por P e é perpendicular à reta r.

Resolução:

a) O ponto P não pertence à reta r, logo, r e s são retas paralelas distintas. A equação geral de s pode ser escrita na forma $3x + 4y + c = 0$, pois $\frac{3}{3} = \frac{4}{4} \neq \frac{0}{c}$.
Como P(2, 4) pertence à reta s, temos:
$$3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow c = -22$$
Logo, uma equação geral da reta s é dada por:
$$3x + 4y - 22 = 0$$

b) Uma equação geral da reta t é dada por:
$$4x - 3y + d = 0, \text{ pois } 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 = 0$$
Como P(2, 4) pertence a t, temos:
$$4 \cdot 2 + (-3) \cdot 4 + d = 0 \Rightarrow d = 4$$
Logo, uma equação geral da reta t é dada por:
$$4x - 3y + 4 = 0$$

15. Considere no plano cartesiano as retas
r: $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + \frac{1}{2} \end{cases}$ e s: $(k + 1)x - y - \frac{k}{2} = 0$, em que $k \in \mathbb{R}$.
Sobre as retas r e s é correto afirmar que nunca serão:

a) concorrentes perpendiculares.

b) concorrentes oblíquas.

c) paralelas distintas.

d) paralelas coincidentes.

Resolução:

$$r: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t + \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} t = \frac{x}{2} \\ y = 3 \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow 2y = 3x + 1 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow r: 3x - 2y + 1 = 0$$
Para testar se r e s podem ser paralelas, temos:
$$\frac{3}{k+1} = \frac{-2}{-1} \Rightarrow \frac{3}{k+1} = 2 \Rightarrow 2k + 2 = 3 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$$
Se $k = \frac{1}{2}$, temos: $\frac{1}{\frac{-k}{2}} = \frac{2}{-k} = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4 \neq 2$.
Assim, não há como as retas r e s serem paralelas coincidentes.
Se $k \neq \frac{1}{2}$, as retas serão concorrentes. Para que elas sejam perpendiculares, devemos ter:
$$(k + 1) \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) = 0 \Rightarrow 3k + 3 + 2 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow k = -\frac{5}{3}$$
Portanto, de todas as posições relativas, as retas só não podem ser paralelas coincidentes.

16. Encontre a interseção das retas r: $2x + 3y - 7 = 0$ e s: $x - y - 1 = 0$.

Resolução:

As duas retas são concorrentes, pois $\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-1}$.
Assim, para encontrar a interseção, devemos resolver o sistema formado por suas equações:
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
Resolvendo o sistema, encontramos $x = 2$ e $y = 1$, logo, a interseção das retas é o ponto (2, 1).

17. O quadrilátero ABCD é um paralelogramo em que A(1, 1) e B(5, 4). O ponto de encontro das diagonais é M(4, 9). Determine:

a) as coordenadas de C e D.

b) as equações das retas suportes dos lados do paralelogramo.

Resolução:

a) Sabemos que as diagonais de um paralelogramo se cruzam ao meio. Assim, M(4, 9) é ponto médio dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.
$$\begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = x_M \\ \frac{y_A + y_C}{2} = y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1 + x_C}{2} = 4 \\ \frac{1 + y_C}{2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 7 \\ y_C = 17 \end{cases} \Rightarrow C(7, 17)$$
$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = x_M \\ \frac{y_B + y_D}{2} = y_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5 + x_D}{2} = 4 \\ \frac{4 + y_D}{2} = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 14 \end{cases} \Rightarrow D(3, 14)$$

FRENTE 3

b) O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-1}{5-1} = \frac{3}{4}$$

Então, a equação geral de $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$y - 1 = \frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow 4y - 4 = 3x - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x - 4y + 1 = 0$$

O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é:

$$m_{\overleftrightarrow{BC}} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{17-4}{7-5} = \frac{13}{2}$$

Então, a equação geral de $\overleftrightarrow{BC}$ é:

$$y - 4 = \frac{13}{2}(x-5) \Rightarrow 2y - 8 = 13x - 65 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 13x - 2y - 57 = 0$$

Como $\overleftrightarrow{AD}$ é paralela a $\overleftrightarrow{BC}$, sua equação tem a forma $13x - 2y + t = 0$. Como D pertence a essa reta, temos:

$$13x_D - 4y_D + t = 0 \Rightarrow 13 \cdot 3 - 2 \cdot 14 + t = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = -11$$

Assim, a equação geral de $\overleftrightarrow{AD}$ é $13x - 2y + 11 = 0$.
Como $\overleftrightarrow{CD}$ é paralela a $\overleftrightarrow{AB}$, sua equação tem a forma $3x - 4y + w = 0$. Como D pertence a essa reta, temos:

$$3x_D - 4y_D + w = 0 \Rightarrow 3 \cdot 3 - 4 \cdot 14 + w = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9 - 56 + w = 0 \Rightarrow w = 47$$

Assim, a equação geral de $\overleftrightarrow{CD}$ é $3x - 4y + 47 = 0$.

18. Determine a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$, em que A(–2, 3) e B(4, 7).

Resolução:

A mediatriz de um segmento é a reta que passa pelo ponto médio dele e é perpendicular a ele.
O ponto médio M de $\overline{AB}$ tem coordenadas:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = M\left(\frac{-2+4}{2}, \frac{3+7}{2}\right) = M(1, 5)$$

O coeficiente angular de $\overleftrightarrow{AB}$ (suporte do segmento) é dado por:

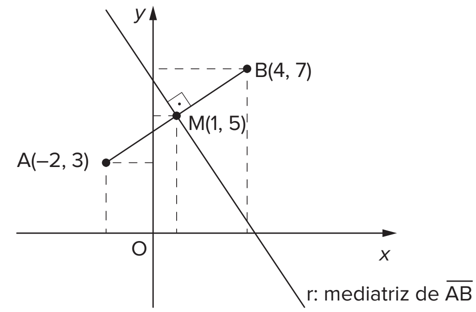
$$m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{4-(-2)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Como a mediatriz r e a reta $\overleftrightarrow{AB}$ são perpendiculares, temos:

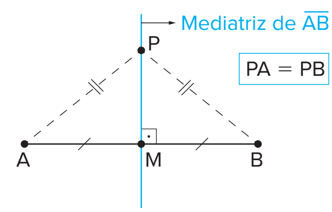
$$m_r \cdot m_{\overleftrightarrow{AB}} = -1 \Rightarrow m_r = \frac{-1}{m_{\overleftrightarrow{AB}}} = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2}$$

A equação da mediatriz r é dada por:

$$y - 5 = -\frac{3}{2}(x+1) \Rightarrow 2y - 10 = -3x + 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x + 2y - 13 = 0$$



Uma segunda forma de resolução para o problema poderia ser obtida considerando que todo ponto P(x, y) da mediatriz r equidista de A e B. Observe a figura a seguir.



Da figura, temos que os triângulos PMA e PMB são congruentes pelo caso LAL. Assim, qualquer que seja P pertencente à mediatriz, PA = PB. Assim:

$$d_{PA} = d_{PB}$$
$$\sqrt{(x-(-2))^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2}$$
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = (x-4)^2 + (y-7)^2$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 =$$
$$= x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 49$$
$$4x - 6y + 13 = -8x - 14y + 65$$
$$12x + 8y - 52 = 0$$
$$3x + 2y - 13 = 0$$

19. Determine a projeção ortogonal do ponto A(1, 5) em relação à reta r de equação $2x + 3y - 4 = 0$.

Resolução:

A projeção ortogonal de A sobre r é o ponto P de interseção de r com a reta t que passa por A e é perpendicular a r. Assim, temos:

$$r\colon 2x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$$

$$m_r \cdot m_t = -1 \Rightarrow m_t = \frac{-1}{m_r} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Equação de t (de coeficiente angular m_t passando por A):

$$y - 5 = \frac{3}{2}(x-1) \Rightarrow 2y - 10 = 3x - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3y - 2y + 7 = 0$$

O ponto P, projeção ortogonal de A em r, é a interseção entre as retas r e t, logo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 3x - 2y = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 8 \\ 9x - 6y = -21 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1, 2)$$

20. Determine o simétrico do ponto A(1, 5) em relação à reta r de equação $2x + 3y - 4 = 0$.

Resolução:

O simétrico de A em relação a r é o ponto A' tal que $\overline{AA'}$ é perpendicular a r, e r divide $\overline{AA'}$ ao meio. A interseção de r e $\overline{AA'}$ é a projeção ortogonal P(–1, 2) de A sobre r, determinado no exercício resolvido anterior. P é o ponto médio de $\overline{AA'}$, logo:

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_{A'}}{2} = x_P \\ \dfrac{y_A + y_{A'}}{2} = y_P \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1 + x_{A'}}{2} = -1 \Rightarrow 1 + x_{A'} = -2 \Rightarrow x_{A'} = -3 \\ \dfrac{5 + y_{A'}}{2} = 2 \Rightarrow 5 + y_{A'} = 4 \Rightarrow y_{A'} = -1 \end{cases}$$

Portanto, o simétrico de A(1, 5) em relação à reta r é A'(−3, −1).

21. Dado o triângulo ABC de vértices A(0, 0), B(10, 5) e C(3, 9), determine:

a) a equação geral da reta que contém a mediana relativa ao lado $\overline{AB}$.

b) a equação geral da reta suporte da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

c) a equação geral da mediatriz do lado $\overline{AB}$.

d) o pé da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

e) o comprimento da altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

Resolução:

a) O ponto médio M do lado $\overline{AB}$ é dado por $M\left(\dfrac{0+10}{2}, \dfrac{0+5}{2}\right) = M\left(5, \dfrac{5}{2}\right)$. A reta suporte da mediana relativa ao lado $\overline{AB}$ é $\overleftrightarrow{CM}$, cujo coeficiente angular é $m_{\overleftrightarrow{CM}} = \dfrac{y_C - y_M}{x_C - x_M} = \dfrac{9 - \frac{5}{2}}{3 - 5} = \dfrac{\frac{13}{2}}{-2} = -\dfrac{13}{4}$.

A equação de $\overleftrightarrow{CM}$ é: $y - 9 = -\dfrac{13}{4}(x - 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y - 36 = -13x + 39 \Rightarrow 13x + 4y - 75 = 0$.

b) O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é $m_{\overleftrightarrow{AB}} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5 - 0}{10 - 0} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$. O coeficiente $m_\perp$ da perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$ é tal que $m_\perp \cdot m_{\overleftrightarrow{AB}} = -1 \Rightarrow m_\perp = \dfrac{-1}{m_{\overleftrightarrow{AB}}} = \dfrac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$. Assim, a equação da altura é:

$$y - 9 = -2(x - 3) \Rightarrow y - 9 = -2x + 6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x + y - 15 = 0$$

c) A mediatriz t é perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ e, portanto, paralela à altura relativa a $\overline{AB}$. Assim, $m_\perp = m_t = -2$. Como t passa por M, temos que a equação de t é:

$$y - \frac{5}{2} = -2(x - 5) \Rightarrow y - \frac{5}{2} = -2x + 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y - 5 = -4x + 20 \Rightarrow 4x + 2y - 25 = 0$$

d) A equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$ é:

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow 2y = x \Rightarrow x - 2y = 0$$

Sendo H o pé da altura relativa a $\overline{AB}$, ele corresponde à interseção dessa altura com a reta $\overleftrightarrow{AB}$.

Assim, H é a solução do sistema $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x + 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow H(6, 3)$$

e) A altura relativa a $\overline{AB}$ tem medida, em unidades de comprimento, igual à distância entre os pontos C e H. Então:

$$d(C, H) = \sqrt{(3 - 6)^2 + (9 - 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} =$$
$$= \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \text{ u.c.}$$

22. Considere, no plano cartesiano, duas retas r e s cujas equações são dadas, respectivamente, por $y = x - 5$ e $y = 2x + 12$. Encontre a equação geral da reta que passa por P(1, 3) e intersecta r e s nos pontos A e B, com $A \in r$ e $B \in s$, de modo que P seja o ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Resolução:

Como o ponto A pertence à reta r, suas coordenadas são da forma $(k, k - 5)$, com $k \in \mathbb{R}$.

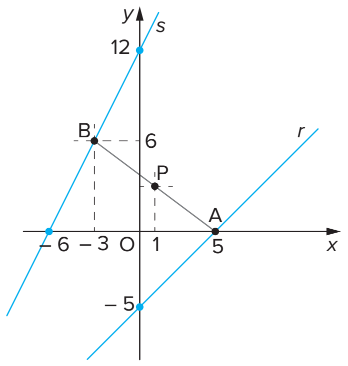
Como o ponto B pertence à reta s, suas coordenadas são da forma $(t, 2t + 12)$, com $t \in \mathbb{R}$.

Se P(1, 3) é o ponto médio de $\overline{AB}$, então:

$$\begin{cases} \dfrac{k + t}{2} = 1 \\ \dfrac{k - 5 + 2t + 12}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k + t = 2 \\ k + 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k - t = -2 \\ k + 2t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 5 \\ t = -3 \end{cases}$$

Logo, os pontos A e B têm coordenadas respectivamente iguais a (5, 0) e (–3, 6).



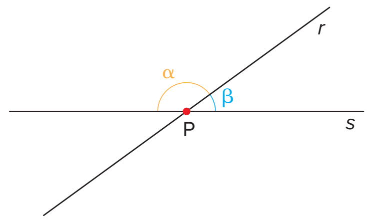
Portanto, a equação da reta que passa por P, A e B é:

$$y - 0 = \frac{3 - 0}{1 - 5}(x - 5) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}(x - 5) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4y = -3x + 15 \Rightarrow 3x + 4y - 15 = 0$$

FRENTE 3

Ângulo entre retas

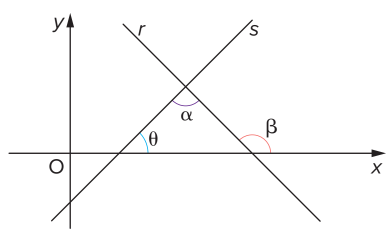
Na Geometria Analítica, há várias situações que envolvem o ângulo formado por duas retas. Quando elas são concorrentes, sempre formam um par de ângulos suplementares, como mostra a figura a seguir:



$\alpha + \beta = 180°$

Quando as retas são perpendiculares, temos $\alpha + \beta = 90°$.

Sejam *r* e *s* duas retas com coeficientes angulares definidos, ou seja, não paralelas ao eixo *y*. Conforme a figura a seguir, sejam β e θ as inclinações das retas *r* e *s* e α um ângulo entre elas (agudo, obtuso ou reto).



Temos que $m_r = \text{tg}\,\beta$ e $m_s = \text{tg}\,\theta$. O ângulo β é o ângulo externo do triângulo formado pelas retas *r* e *s* e o eixo *x*. Pelo teorema do ângulo externo:

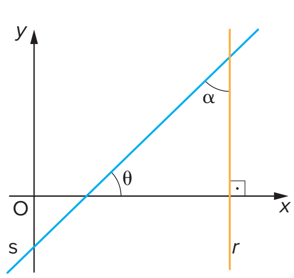
$$\alpha + \theta = \beta \Rightarrow \alpha = \beta - \theta \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,(\beta - \theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\theta}{1 + \text{tg}\,\beta \cdot \text{tg}\,\theta} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s} \qquad \text{(I)}$$

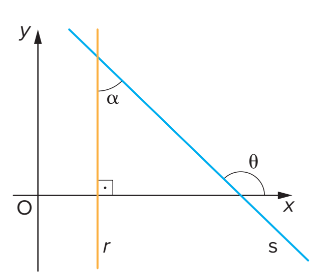
Os ângulos formados por duas retas concorrentes são suplementares, portanto têm tangentes opostas (com mesmo módulo e sinais opostos). Se quisermos que α seja o ângulo agudo formado pelas duas retas, é preciso garantir que sua tangente seja positiva. Para isso, basta tomar o resultado (I) em módulo, ou seja:

$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

Se a reta *r* for paralela ao eixo *y* e a reta *s* tiver inclinação igual a θ, o ângulo agudo α formado entre elas será igual a $(90° - \theta)$ ou $(\theta - 90°)$.



$\alpha = 90° - \theta$



$\alpha = \theta - 90°$

Nos dois casos:

$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{1}{\text{tg}\,\theta}\right| = \left|\frac{1}{m_s}\right|$$

Exercícios resolvidos

23. Qual é o ângulo agudo formado pelas retas *r* e *s*, cujas equações são *r*: $2x - 3y + 1 = 0$ e *s*: $x + y = 0$?

Resolução:

Temos que:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow 3y = 2x + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m_r = \frac{2}{3} \\ x + y = 0 \Rightarrow y = -x \Rightarrow m_s = -1 \end{cases}$$

Assim, sendo α o ângulo agudo entre as duas retas, temos:

$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right| = \left|\frac{\frac{2}{3} - (-1)}{1 + \frac{2}{3} \cdot (-1)}\right| = \left|\frac{\frac{2}{3} + 1}{1 - \frac{2}{3}}\right| = \left|\frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}\right| = 5$$

Logo, $\alpha = \text{arctg}\,5$ (α é um arco de tangente 5).

24. Sejam *r*: $x = 4$ e *s*: $x - 3y + 1 = 0$. Determine o ângulo agudo formado pelas duas retas.

Resolução:

A reta *r* é paralela ao eixo *y*. Como $m_s = \frac{1}{3}$, temos que $\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{1}{m_s}\right| = \left|\frac{1}{\frac{1}{3}}\right| = 3$, logo, $\alpha = \text{arctg}\,3$.

25. Dada a reta $x - 3y + 6 = 0$ no plano *xOy*, responda:

a) Se P é um ponto qualquer desse plano, quantas retas passam por P e formam um ângulo de 45° com a reta dada?

b) Para o ponto P(2, 5), determine as equações das retas mencionadas no item anterior.

Resolução:

a) Seja *s* a reta que forma um ângulo agudo $\alpha = 45°$ com *r*: $x - 3y + 6 = 0$. Então, temos que:

$$r: x - 3y + 6 = 0 \Rightarrow 3y = x + 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 2 \Rightarrow m_r = \frac{1}{3}$$

$$\text{tg}\,45° = \left|\frac{\frac{1}{3} - m_s}{1 + \frac{1}{3} \cdot m_s}\right| \Rightarrow \left|\frac{\frac{1 - 3m_s}{3}}{\frac{3 + m_s}{3}}\right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1 - 3m_s}{3 + m_s}\right| = 1 \begin{array}{l} \nearrow \frac{1 - 3m_s}{3 + m_s} = 1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{2} \\ \searrow \frac{1 - 3m_s}{3 + m_s} = -1 \Rightarrow m_s = 2 \end{array}$$

Assim, sempre existirão duas retas *s* que passam por um ponto qualquer P do plano e formam 45° com *r*.

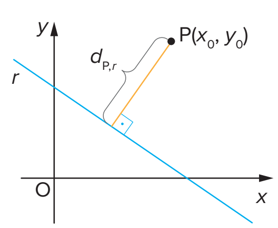
b) As duas retas s e s' do plano que passam por P(2, 5) e formam um ângulo de 45° com r têm coeficientes angulares iguais a $-\frac{1}{2}$ ou 2 e suas equações são dadas por:

$$s: y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 10 = -x + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x + 2y - 12 = 0$$
$$s': y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y - 5 = 2x - 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2x - y + 1 = 0$$

Distância entre ponto e reta

No exercício resolvido 21, determinamos o comprimento da altura relativa ao vértice C do triângulo ABC em que A(0, 0), B(10, 5) e C(3, 9). Para isso, seguimos um longo roteiro. Primeiro, determinamos o coeficiente angular e a equação da reta $\overleftrightarrow{AB}$. Depois, por condição de perpendicularidade, determinamos o coeficiente angular da reta suporte da altura relativa ao vértice C e sua equação. Em seguida, determinamos a interseção H entre a reta $\overleftrightarrow{AB}$ e a reta suporte da altura relativa. Finalmente, calculamos o comprimento da altura pela distância entre C e H.

Existe, porém, um caminho mais curto para a resolução de problemas desse tipo. A questão central era o cálculo da distância do ponto C à reta $\overleftrightarrow{AB}$, ou seja, a distância de um ponto a uma reta. Geometricamente, definimos a distância de um ponto P a uma reta r como sendo o comprimento do segmento perpendicular à reta r que passa pelo ponto P.



d é a distância do ponto P à reta r.

Dada a reta r de equação $ax + by + c = 0$ e o ponto P(x_0, y_0), a distância de P à reta r é dada por:

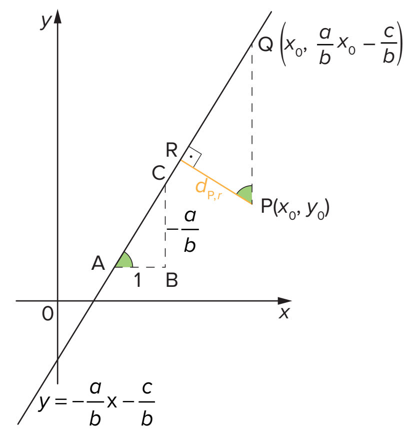
$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A seguir, vamos demonstrar esse resultado.

Considere a reta r de equação $ax + by + c = 0$ ou, escrita na forma reduzida, $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Agora, vamos calcular a distância $d_{P,r}$ de um ponto P(x_0, y_0) à reta r.

Na reta $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, o coeficiente angular da reta r é $-\frac{a}{b}$ e representa a tangente do seu ângulo de inclinação, que pode ser agudo ou obtuso, conforme já estudamos.

Para garantir que tenhamos a tangente do ângulo agudo α que a reta forma com o eixo x, devemos ter $\text{tg}\,\alpha = \left|-\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.



O triângulo ABC tem hipotenusa $\overline{AC}$ sobre a reta r e o cateto $\overline{AB}$ mede 1. A medida BC do outro cateto é dada por:

$$\frac{BC}{AB} = \text{tg}\,\alpha \Rightarrow \frac{BC}{1} = \frac{|a|}{|b|} \Rightarrow BC = \frac{|a|}{|b|}$$

Cálculo da hipotenusa $\overline{AC}$:

$$AC^2 = 1^2 + \left(\frac{|a|}{|b|}\right)^2 \Rightarrow AC^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{b^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2}} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|b|}$$

Agora, considere o triângulo PQR, em que a distância de P à reta r é representada pelo segmento $\overline{PR}$. Os pontos P e Q pertencem à mesma reta vertical, portanto têm a mesma abscissa x_0. Como Q pertence à reta de equação $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, então $Q\left(x_0, -\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}\right)$. A medida da hipotenusa $\overline{PQ}$ é a diferença (em módulo) das ordenadas dos pontos P e Q, ou seja:

$$PQ = \left|y_0 - \left(-\frac{a}{b}x_0 - \frac{c}{b}\right)\right| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}$$

Pela semelhança dos triângulos ABC e PQR, temos:

$$\frac{PR}{AB} = \frac{PQ}{AC} \Rightarrow \frac{d}{1} = \frac{\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{|b|}}{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|b|}}$$

Simplificando essa expressão, obtemos a fórmula da distância do ponto P à reta r:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Exercícios resolvidos

26. Calcule a distância, em unidades de comprimento, do ponto P(1, 5) à reta r: $3x + 4y - 3 = 0$.

Resolução:

Temos:

$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} =$$
$$= \frac{|3 + 20 - 3|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4 \text{ u.c.}$$

FRENTE 3

27. Calcule a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC de vértices A(0, 0), B(10, 5) e C(3, 9).
(Resolução alternativa para o exercício resolvido 21.)

Resolução:

A altura relativa à $\overline{AB}$ corresponde à distância do ponto C até a reta $\overleftrightarrow{AB}$. Uma equação geral de $\overline{AB}$ é dada por:

$$y - 0 = \frac{5 - 0}{10 - 0}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2y = x \Rightarrow x - 2y = 0$$

Assim, a distância é:

$$d_{C,\overleftrightarrow{AB}} = \frac{|1 \cdot 3 - 2 \cdot 9|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|3 - 18|}{\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{15}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$$

28. Um quadrado ABCD tem a diagonal $\overline{AC}$ sobre a reta r: $x - 3y + 6 = 0$. Sabendo que B(0, 6), calcule a área do quadrado.

Resolução:

Seja x o lado do quadrado e x^2 sua área. As diagonais do quadrado se intersectam no ponto médio M e são perpendiculares. Assim, a medida BM é igual à metade da diagonal do quadrado e também à distância do ponto B à reta r. Logo:

$$BM = d_{B,r} \Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 \cdot 0 - 3 \cdot 6 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{12}{\sqrt{10}} \Rightarrow x = \frac{24}{\sqrt{20}} = \frac{12}{\sqrt{5}}$$

Portanto, a área do quadrado é $x^2 = \left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{144}{5}$.

29. Determine, em unidades de comprimento, a distância entre as retas r: $5x + 12y - 12 = 0$ e s: $10x + 24y + 4 = 0$.

Resolução:

Como $\frac{5}{10} = \frac{12}{24} \neq \frac{-12}{4}$, as retas são paralelas.

A distância entre duas paralelas pode ser medida escolhendo-se um ponto P de uma delas e medindo a distância desse ponto à outra reta.
Para escolher um ponto em r, podemos atribuir arbitrariamente um valor para x e o substituir na equação da reta, obtendo o valor correspondente de y. Escolhendo, por exemplo, $x = 0$, temos:

$$5 \cdot 0 + 12y - 12 = 0 \Rightarrow 12y = 12 \Rightarrow y = 1$$

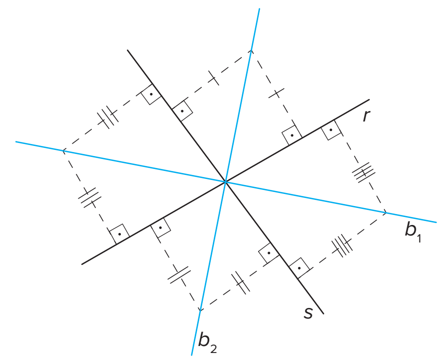
Portanto, P(0, 1) $\in r$.
Note que poderíamos ter atribuído um valor qualquer a y para encontrar o valor correspondente de x.

Calculando a distância de P até s, temos:

$$d_{r,s} = d_{P,s} = \frac{|10 \cdot 0 + 24 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{10^2 + 24^2}} =$$
$$= \frac{|28|}{\sqrt{676}} = \frac{28}{26} = \frac{14}{13} \text{ u.c.}$$

Bissetrizes dos ângulos entre duas retas

Considerando os ângulos formados por duas retas concorrentes r e s, o lugar geométrico dos pontos que equidistam de ambas é formado pelas bissetrizes b_1 e b_2, como mostra a figura a seguir.



Sejam duas retas concorrentes r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Se P(x, y) é um ponto genérico das bissetrizes de r e s, então a expressão a seguir é a que fornece as equações das duas bissetrizes de r e s:

$$d_{P,r} = d_{P,s} \Rightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Note que as bissetrizes são perpendiculares entre si.

Exercício resolvido

30. Sejam as retas r: $3x + 2y - 7 = 0$ e s: $2x - 3y + 1 = 0$. Determine as equações das bissetrizes dessas retas.

Resolução:

$$\frac{3x + 2y - 7}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \pm\frac{2x - 3y + 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3x + 2y - 7}{\sqrt{13}} = \pm\frac{2x - 3y + 1}{\sqrt{13}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x + 2y - 7 = \pm(2x - 3y + 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 7 = 2x - 3y + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow x + 5y - 8 = 0 \\ \text{ou} \\ 3x + 2y - 7 = 0 = -2x + 3y - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5x - y - 6 = 0 \end{cases}$$

As bissetrizes de r e s têm equações $x + 5y - 8 = 0$ e $5x - y - 6 = 0$.

Revisando

1. Seja θ a inclinação da reta r e A um ponto que pertence a r. Determine a equação geral e a reduzida nos seguintes casos:
   a) $\theta = 45°$ e A(0, 4)
   b) $\theta = 135°$ e A(0, 4)
   c) $\theta = 60°$ e $A\left(\sqrt{3}, 1\right)$

2. Determine a equação geral e a reduzida das retas que passam pelos pontos:
   a) A(0, 0) e B(3, 4)
   b) C(0, 5) e D(10, 0)
   c) P(2, 3) e Q(11, 6)

3. Determine a equação segmentária da reta que passa pelos pontos A(0, 4) e B(6, 0).

4. Determine a equação geral da reta dada por:

$$\begin{cases} x = 4t + 5 \\ y = 3t + 4 \end{cases}$$

5. Dadas as retas r: $x - 2y - 10 = 0$ e s: $3x + 2y - 6 = 0$, determine o ponto de interseção entre elas.

6. Calcule a área do triângulo formado pelas retas r: $3x - 4y + 12 = 0$ e s: $x + y = 3$ e o eixo x.

7. Determine a equação reduzida da reta *r* que passa por A(2, 6) e é paralela à reta *s*: $y = 2x + 3$.

8. Determine a equação geral da reta *r* que passa por P(3, 4) e é paralela à reta *s*: $2x + 3y = 0$.

9. Determine a equação reduzida da reta *t* que passa por P(0, 4) e é perpendicular à reta que passa por A(–2, 1) e B(2, 3).

10. Determine a equação da reta *t* perpendicular à *r*: $3x + 4y - 1 = 0$ e que passa por P(1, 2).

11. Determine a equação geral da mediatriz do segmento $\overline{AB}$, em que A(1, 4) e B(7, 2).

12. Seja ABC um triângulo em que A(6, 8), B(1, 2) e C(9, 4). Determine a equação da reta suporte da altura relativa ao vértice A.

13. Determine a distância, em unidades de comprimento, do ponto P(3, 5) à reta *r*: $12x - 5y + 15 = 0$.

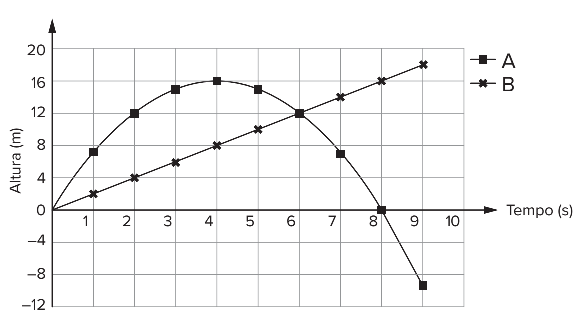
14. Determine o ponto simétrico de A(1, 10) em relação à reta r: $2x + 3y - 6 = 0$

15. Seja ABC um triângulo em que A(6, 8), B(1, 2) e C(9, 4). Determine o comprimento, em unidades de comprimento, da altura relativa ao vértice A.

16. Determine as equações gerais das retas que passam por A(0, 2) e formam um ângulo de 30° com a reta $r: y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x$.

Exercícios propostos

1. **Enem 2016** Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, A e B, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil B interceptar o A quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.



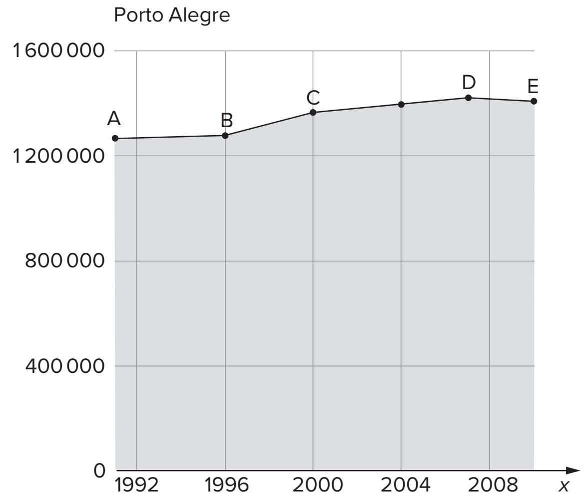
Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil B deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de B deverá

a) diminuir em 2 unidades.
b) diminuir em 4 unidades.
c) aumentar em 2 unidades.
d) aumentar em 4 unidades.
e) aumentar em 8 unidades.

FRENTE 3

2. PUC-RS 2017 O gráfico a seguir representa a evolução populacional de Porto Alegre entre os anos de 1992 e 2010.



Fontes: IBGE: Censo Demográfico 1991, Contagem Populacional 1996, Censo Demográfico 2000, Contagem Populacional 2007 e Censo Demográfico 2010.

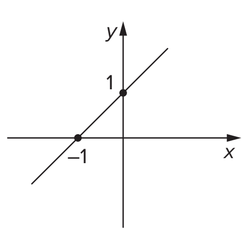
Considerando as seguintes retas: *r*, determinada pelos pontos A e B; *s*, pelos pontos B e C; *t*, pelos pontos C e D; e *u*, pelos pontos D e E, cujos coeficientes angulares são, respectivamente, a_r, a_s, a_t e a_u, é correto afirmar que

a) $a_r < a_u < a_t < a_s$
b) $a_r < a_u < a_s < a_t$
c) $a_u < a_r < a_t < a_s$
d) $a_u < a_r < a_s < a_t$
e) $a_u < a_t < a_r < a_s$

3. EEAR-SP 2016 A equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(0, 1) e B(6, 8) é dada por

a) $y = 7x + 1$
b) $y = 6x + 1$
c) $y = \frac{7}{6}x + 1$
d) $y = \frac{6}{7}x + 1$

4. PUC-RS 2013 A equação que representa a reta na figura a seguir é:



a) $y = x$
b) $y = -x + 1$
c) $y = -x - 1$
d) $y = x - 1$
e) $y = x + 1$

5. UCPel-RS 2021 A reta de equação $x - y - 3 = 0$ intercepta a parábola de equação $y = x^2 - 2x - 3$ nos pontos P_1 e P_2. Nestas condições, é correto afirmar que

a) a medida do segmento com extremidades em P_1 e P_2 é de $3\sqrt{2}$.
b) um dos pontos de interseção é o vértice da parábola de ponto V(1, −4).
c) um dos pontos de interseção possui coordenadas $x = 2$ e $y = -4$.
d) os pontos de interseção são $P_1(2, -4)$ e $P_2(1, -4)$.
e) a distância de P_1 a P_2 é de $\sqrt{2}$.

6. EEAR-SP 2020 Se a equação da reta é $2x + 3y - 12 = 0$, então seu coeficiente linear é:

a) −2
b) −1
c) 3
d) 4

7. Enem PPL 2012 Os procedimentos de decolagem e pouso de uma aeronave são os momentos mais críticos de operação, necessitando de concentração total da tripulação e da torre de controle dos aeroportos. Segundo levantamento da Boeing, realizado em 2009, grande parte dos acidentes aéreos com vítimas ocorre após iniciar-se a fase de descida da aeronave. Desta forma, é essencial para os procedimentos adequados de segurança monitorar-se o tempo de descida da aeronave.

A tabela mostra a altitude *y* de uma aeronave, registrada pela torre de controle, *t* minutos após o início dos procedimentos de pouso.

tempo *t* (em minutos)	0	5	10	15	20
altitude *y* (em metros)	10 000	8 000	6 000	4 000	2 000

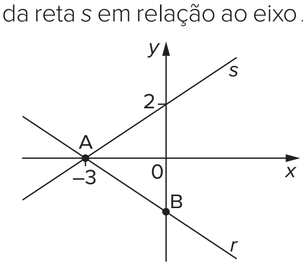
Considere que, durante todo o procedimento de pouso, a relação entre *y* e *t* é linear.

Disponível em: <www.meioaereo.com>.

De acordo com os dados apresentados, a relação entre *y* e *t* é dada por

a) $y = -400t$
b) $y = -2\,000t$
c) $y = 8\,000 - 400t$
d) $y = 10\,000 - 400t$
e) $y = 10\,000 - 2\,000t$

8. UEPB 2012 No sistema de eixos cartesianos *xy*, a reta *r*, simétrica da reta *s* em relação ao eixo *x*, tem equação:



a) $x + y + 6 = 0$
b) $3x + 2y + 6 = 0$
c) $2x + 3y - 5 = 0$
d) $2x + 3y - 6 = 0$
e) $2x + 3y + 6 = 0$

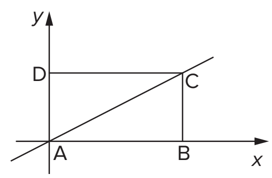
9. Cefet-MG A tabela seguinte mostra o número de ovos postos, por semana, pelas galinhas de um sítio.

Semana	Número de galinhas (*x*)	Número de ovos (*y*)
1ª	2	11
2ª	3	18
3ª	4	25
4ª	5	32

Considerando-se esses dados, é correto afirmar que os pares ordenados (*x*, *y*) satisfazem a relação:

a) $y = 4x + 3$
b) $y = 6x - 1$
c) $y = 7x - 3$
d) $y = 5x + 7$

10. **PUC-Rio 2014** O retângulo ABCD tem um lado sobre o eixo x e um lado sobre o eixo y, como mostra a figura. A área do retângulo ABCD é 15, e a medida do lado $\overline{AB}$ é 5.



A equação da reta que passa por A e por C é:

a) $y = 3x$
b) $y = -3x$
c) $y = 5x$
d) $y = \frac{3}{5}x$
e) $y = \frac{5}{3}x$

11. **UFJF/PISM-MG 2020** Num plano cartesiano cujos eixos estão graduados em centímetros, os pontos A(1, 4), B(−2, 4) e C(−4, −2) são vértices de um triângulo que tem como uma de suas medianas o segmento $\overline{AM}$ e como baricentro o ponto G.

a) Determine a equação da reta suporte da mediana $\overline{AM}$.
b) Determine a distância do ponto G ao ponto M.

12. **Uema 2016** Uma cidade gera, em média, 20 mil toneladas de lixo, diariamente, de diversos tipos: lixo residencial, lixo hospitalar, entulho. Uma cooperativa analisou os dados de coleta seletiva fornecidos pela Prefeitura, considerando somente a produção de lixo residencial para dois tipos de resíduo em uma determinada área onde pretendia atuar. Tais dados se referem à média diária, em toneladas, para cada ano de coleta, conforme tabela a seguir.

Ano \ Tipo	Garrafas PET	Papel
2012	15	20
2013	20	25
2014	20	35
2015	30	35

Disponível em: <www3.prefeitura.sp.gov.br/limpeza_urbana/formspublic/limpezarua.apx>. (Adapt.).

(Use, para fins de cálculo, apenas os dois últimos dígitos do ano.)

a) Qual a equação da reta que representa o comportamento da coleta total do ano de 2012 ao de 2014?
b) A partir dos dados na tabela, qual será o valor total recolhido para esses dois resíduos no ano de 2020?

13. **PUC-Minas 2016** No final do ano de 2005, o número de casos de dengue registrados em certa cidade era de 400 e, no final de 2013, esse número passou para 560. Admitindo-se que o gráfico do número de casos registrados em função do tempo seja formado por pontos situados em uma mesma reta, é correto afirmar que, no final de 2015, o número de casos de dengue registrados será igual a:

a) 580 b) 590 c) 600 d) 610 e) 650

14. **Uema 2015** O método analítico em Geometria é uma ferramenta muito utilizada em estudo de coordenadas. Para fazer uma aplicação desse método, um professor lançou o seguinte desafio aos seus alunos: teriam de construir, em sistema de coordenadas, a figura de um paralelogramo ABCD, cujo ponto A está na origem; o ponto D(5, 0) e a diagonal maior com extremidade no ponto C(9, 4).
Com base nas informações,

a) faça o esboço em sistema de coordenadas da figura que representa o paralelogramo.
b) determine a equação da reta que contém a diagonal maior.

15. **UEPB 2013** A reta de equação $(x - 2)m + (m - 3)y + m - 4 = 0$, com m constante real, passa pelo ponto P(2, 0). Então, seu coeficiente angular é:

a) 4 b) −4 c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{4}$ e) 2

16. **Unicamp-SP 2015** No plano cartesiano, a equação $|x - y| = |x + y|$ representa

a) um ponto.
b) uma reta.
c) um par de retas paralelas.
d) um par de retas concorrentes.

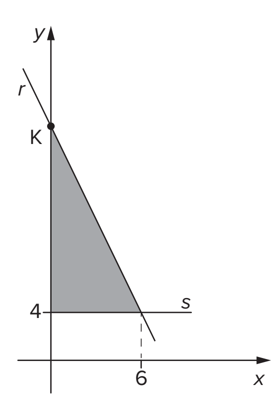
17. **FGV-SP 2019** Existem dois valores reais de m que fazem com que a reta de equação $y = mx + 3$ tangencie a parábola de equação $y = 0{,}5x^2 - x + 5$. A soma desses dois valores é igual a

a) −3 b) −2,5 c) −2 d) −1,5 e) −1

18. **Unicamp-SP 2014** No plano cartesiano, a reta de equação $2x - 3y = 12$ intercepta os eixos coordenados nos pontos A e B. O ponto médio do segmento $\overline{AB}$ tem coordenadas:

a) $\left(4, \frac{4}{3}\right)$ b) $(3, 2)$ c) $\left(4, -\frac{4}{3}\right)$ d) $(3, -2)$

19. **Uern 2013** A área do triângulo retângulo formada pela sobreposição das retas r e s, no gráfico, é igual a 36 unidades. Logo, a equação da reta r é:



a) $y = x + 12$
b) $y = -x + 16$
c) $y = -2x + 16$
d) $y = -2x + 12$

FRENTE 3

20. Insper-SP 2014 No plano cartesiano, a reta *r*, de coeficiente angular 10, intercepta o eixo *y* em um ponto de ordenada *a*. Já a reta *s*, de coeficiente angular 9, intercepta o eixo *y* em um ponto de ordenada *b*. Se as retas *r* e *s* interceptam-se em um ponto de abscissa 6, então:

a) $b = a$
b) $b = a - 9$
c) $b = a - 6$
d) $b = a + 9$
e) $b = a + 6$

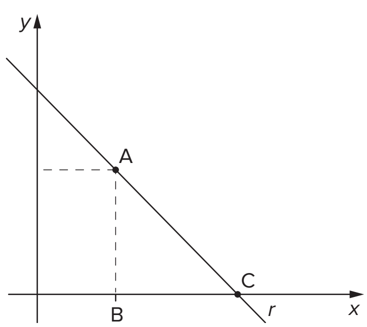
21. FGV-SP 2017 Os pares (*x*, *y*) dados a seguir pertencem a uma reta (r) do plano cartesiano:

x	–4	–2	0	2	4
y	–24	–14	–4	6	16

Podemos afirmar que

a) a reta (*r*) intercepta o eixo das abscissas no ponto de abscissa –4.
b) o coeficiente angular da reta (*r*) é –5.
c) a reta (*r*) determina com os eixos cartesianos um triângulo de área 1,6.
d) *y* será positivo se, e somente se, $x > \frac{-4}{5}$.
e) a reta (*r*) intercepta o eixo das ordenadas no ponto de abscissa $\frac{4}{5}$.

22. PUC-Rio 2013 O triângulo ABC da figura a seguir tem área 25 e vértices A(4, 5), B(4, 0) e C(*c*, 0).



A equação da reta *r* que passa pelos vértices A e C é:

a) $y = -x + 7$
b) $y = -\frac{x}{3} + 5$
c) $y = -\frac{x}{2} + 5$
d) $y = -\frac{x}{2} + 7$
e) $y = \frac{x}{3} + 7$

23. UPE 2017 No plano cartesiano, a reta *s*: $4x - 3y + 12 = 0$ intersecta o eixo das abscissas no ponto A e o eixo das ordenadas no ponto B. Nessas condições, qual é a distância entre os pontos A e B?

a) 5 **b)** $\sqrt{5}$ **c)** $2\sqrt{2}$ **d)** 2 **e)** $\sqrt{2}$

24. Uece 2020 No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, os gráficos das retas cujas equações são $y = x$ e $y = mx - 4$, onde *m* é um número inteiro maior do que um, se cortam em um ponto P. A soma dos possíveis valores de *m* para os quais as coordenadas de P são números inteiros positivos é

a) 11 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 8

25. Uece 2017 Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações $3x - 2y + 6 = 0$ e $3x + 4y - 12 = 0$ representam duas retas concorrentes. A medida da área da região limitada por essas retas e pelo eixo dos *x* é:

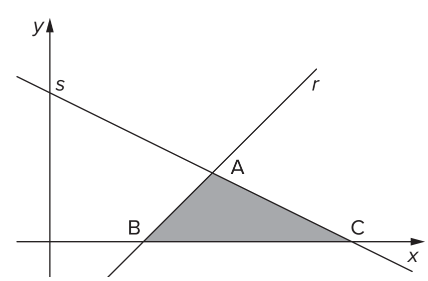
Dado: u.a. = unidades de área

a) 9 u.a.
b) 10 u.a
c) 11 u.a.
d) 12 u.a.

26. Uece 2019 No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, escolhida uma unidade de comprimento (u.c), a medida em $(u.c)^2$ da área da região do plano limitada pelas retas $x - 3y = 0$, $3x - y = 0$ e $x + y - 4 = 0$ é

a) 8
b) 9
c) 4
d) 6

27. PUC-Rio 2015 Sejam *r* e *s* as retas de equações $y = x - 2$ e $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$, respectivamente, representadas no gráfico a seguir. Seja A o ponto de interseção das retas *r* e *s*. Sejam B e C os pontos de interseção de *r* e *s* com o eixo horizontal, respectivamente.



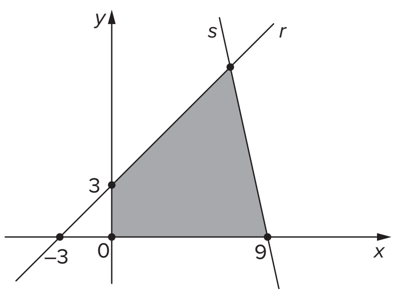
A área do triângulo ABC vale:

a) 1,0
b) 1,5
c) 3,0
d) 4,5
e) 6,0

28. Uece 2015 No referencial cartesiano ortogonal usual com origem no ponto O, a reta *r*, paralela à reta $y = -2x + 1y$ intercepta os semieixos positivos O*x* e O*y*, respectivamente, nos pontos P e Q formando o triângulo POQ. Se a medida da área deste triângulo é igual a $9\ m^2$, então a distância entre os pontos P e Q é igual a:

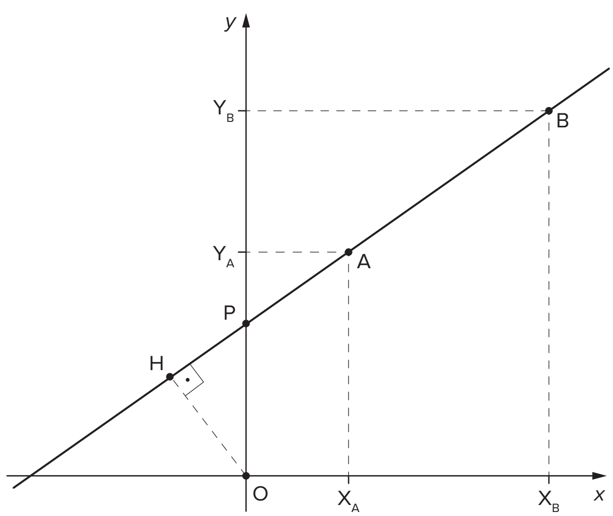
a) $\sqrt{5}$ m
b) $3\sqrt{5}$ m
c) $4\sqrt{5}$ m
d) $2\sqrt{5}$ m

29. **IFPE 2014** A figura a seguir ilustra as representações cartesianas das retas r e s de equações $y = x + 3$ e $y = -3x + 27$, respectivamente, com x e y dados em metros. Determine a área, em metros quadrados, do quadrilátero destacado.



a) 45,5 b) 49,5 c) 52,5 d) 55,5 e) 58,5

30. **CMRJ 2019** A imagem a seguir ilustra parte do gráfico da função real polinomial do primeiro grau y, de variável real x, além dos pontos H, P, A e B, pertencentes a esse gráfico, no plano cartesiano xOy.



A diferença entre as abscissas dos pontos A e B é 4, e a diferença entre as ordenadas desses mesmos pontos é 3.

Se o segmento $\overline{OH}$ mede 3, então o gráfico intersecta o eixo Oy no ponto P, cuja ordenada é

a) 3,00
b) 3,25
c) 3,75
d) 4,00
e) 5,00

31. **EsPCEx-SP 2021** Os pontos A(3, −2) e C(−1, 3) são vértices opostos de um quadrado ABCD. A equação da reta que contém a diagonal $\overline{BD}$ é

a) $5x + 4y - 7 = 0$
b) $8x - 10y - 3 = 0$
c) $8x + 10y - 13 = 0$
d) $4x - 5y + 3 = 0$
e) $4x + 5y - 7 = 0$

32. **UEL-PR 2020** Na exposição virtual "A Beleza da Matemática", realizada no Museu do Amanhã, o belo é celebrado como simetria matemática, como exemplificado na imagem a seguir.

Imagem da exposição "A Beleza da Matemática", no Museu do Amanhã.

No plano cartesiano, dois pontos distintos P e Q são simétricos em relação a uma reta r se as seguintes condições forem simultaneamente atendidas:

I. a distância de P a r é igual à distância de Q a r.

II. a reta que contém P e Q é perpendicular à reta r

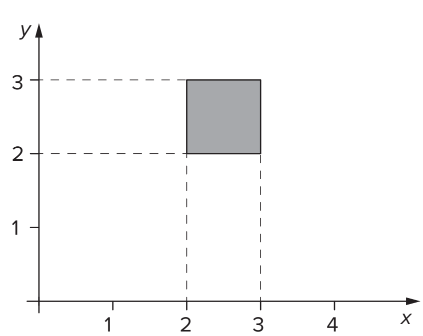
Suponha que, no plano que contém a imagem da borboleta, o eixo de simetria r seja dado pela equação de reta $y + x = 2$. Se P = (−2, 0) é um ponto desse plano, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o ponto simétrico a P em relação à reta r.

a) (0, 2)
b) (2, 0)
c) (2, 2)
d) (2, 4)
e) (4, 2)

33. **Unisc-RS 2016** A equação da reta r que passa pelo ponto (16, 11) e que não intercepta a reta de equação $y = \frac{x}{2} - 5$ é:

a) $y = \frac{x}{2} - 8$
b) $y = \frac{x}{2} + 11$
c) $y = \frac{x}{2} + 3$
d) $y = x - 8$
e) $y = x + 3$

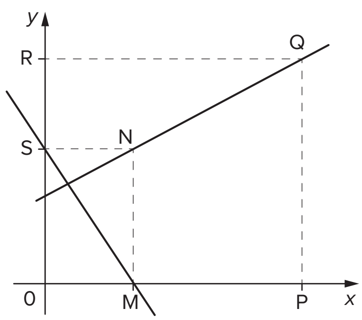
34. **PUC-RS 2016** Considere a figura a seguir, onde um quadrado está representado no primeiro quadrante do plano xy.



Para que uma reta da forma $y = x + m$ não intercepte qualquer ponto do quadrado, devemos ter:

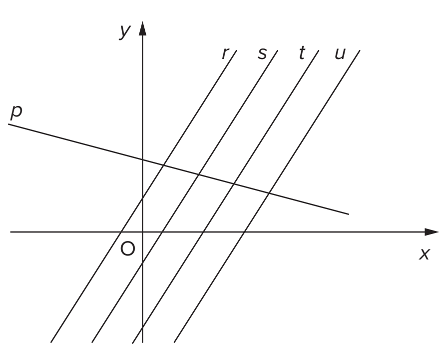
a) $m < 3$
b) $m < 0$
c) $m > 0$
d) $m > -1$
e) $m < -1$ ou $m > 1$

35. UPF-RS 2020 No primeiro quadrante do referencial XOY da figura a seguir, estão representados o quadrado OPQR e o retângulo OMNS. Os pontos M e P pertencem ao eixo x e os pontos R e S pertencem ao eixo y. O ponto N pertence ao interior do quadrado OPQR. Sabe-se que OP $= a$, OM $= b$, RS $= b$. Se m_1 é a declividade da reta que passa pelos pontos N e Q, e m_2 é a declividade da reta que passa pelos pontos S e M, a expressão que descreve a relação entre elas é:



a) $m_1 = m_2$
b) $m_2 = 2m_1$
c) $m_2 = -m_1$
d) $m_1 = \dfrac{1}{m_2}$
e) $m_1 \cdot m_2 = -1$

36. UEG-GO 2017 Na figura a seguir, as retas r, s, t e u são paralelas e seus coeficientes lineares estão em uma progressão aritmética de razão –2.



Sabendo-se que a equação da reta p é $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ e da reta u é $y = 3x - 5$, o ponto de interseção da reta p com a reta s é:

a) $\left(\dfrac{4}{7}, \dfrac{19}{7}\right)$
b) $\left(\dfrac{8}{7}, \dfrac{17}{7}\right)$
c) $\left(\dfrac{12}{7}, \dfrac{15}{7}\right)$
d) $\left(\dfrac{16}{7}, \dfrac{13}{7}\right)$
e) $\left(\dfrac{18}{7}, \dfrac{11}{7}\right)$

37. Uece 2020 No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, está desenhado um triângulo retângulo cujos vértices estão sobre os eixos coordenados, sendo que o vértice que corresponde ao ângulo reto está sobre o eixo dos y. Se as retas cujas equações são $px - 3y + 12 = 0$ e $3x + qy - 16 = 0$ contêm os catetos do triângulo e se $(a, 0)$ e $(b, 0)$ são coordenadas dos demais vértices do triângulo, então, o produto $a \cdot b$ é igual a

a) -16
b) 12
c) 16
d) -12

38. UFPR 2017 Considere a reta r de equação $y = 2x + 1$. Qual das retas a seguir é perpendicular à reta r e passa pelo ponto P(4, 2)?

a) $y = \dfrac{1}{2}x$
b) $y = -2x + 10$
c) $y = -\dfrac{1}{2}x + 5$
d) $y = -2x$
e) $y = -\dfrac{1}{2}x + 4$

39. EEAR-SP 2016 A reta s que passa por P(1, 6) e é perpendicular a $r: y = \dfrac{2}{3}x + 3$ é:

a) $y = \dfrac{3}{2}x$
b) $y = x + 5$
c) $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{20}{3}$
d) $y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{15}{2}$

40. Unioeste-PR 2013 Os valores de k para que as retas $2x + ky = 3$ e $x + y = 1$ sejam paralelas e perpendiculares entre si, respectivamente, são:

a) $-\dfrac{3}{2}$ e 1
b) –1 e 1
c) 1 e –1
d) –2 e 2
e) 2 e –2

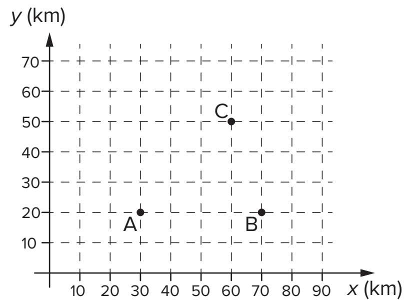
41. FGV-SP 2020 Dados os pontos A(2, 5) e B(4, 1), do plano cartesiano, o ponto de intersecção da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ com a bissetriz dos quadrantes pares tem abscissa igual a:

a) -2
b) -1
c) $-1{,}5$
d) -3
e) $-2{,}5$

42. Mackenzie-SP 2017 A equação da mediatriz do segmento que une os pontos P(1, –2) e Q(5, 4) é:

a) $2x + 3y - 9 = 0$
b) $2x - 3y + 9 = 0$
c) $2x - 3y - 3 = 0$
d) $3x - 2y - 7 = 0$
e) $3x + 2y - 11 = 0$

43. Enem 2013 Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



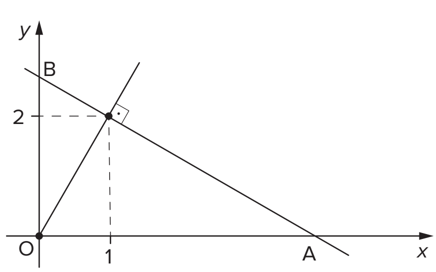
A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.
O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas:

a) (65, 35)
b) (53, 30)
c) (45, 35)
d) (50, 20)
e) (50, 30)

44. UFJF/Pism-MG 2021 De um avião, observam-se dois pares de postes. Tirou-se uma fotografia durante o voo. Cada par de postes pertence a uma mesma linha de transmissão de energia elétrica. Representados em um papel milimetrado, o primeiro par é $A_1(1, 2)$ e $A_2(3, 6)$ e o segundo par é $B_1(1, 3)$ e $B_2(3, 7)$. Supondo que as linhas de transmissão são retas, qual é a distância entre elas?

a) 1
b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
d) $\dfrac{1}{\sqrt{4}}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

45. Unicamp-SP 2012 A área do triângulo OAB esboçado na figura a seguir é:



a) $\dfrac{21}{4}$
b) $\dfrac{23}{4}$
c) $\dfrac{25}{4}$
d) $\dfrac{27}{4}$

46. UEPG/PSS-PR 2019 Considerando, no plano cartesiano, os pontos A(0, 0), B(4, 3), C(7, 4), D(11, 4) e E(14, 0), assinale o que for correto.

01 A equação da reta que passa pelos pontos B e C é $3y - x - 5 = 0$.
02 A distância entre os pontos D e E é igual à distância entre A e B.
04 A área da região delimitada pelo polígono ABCDE é maior do que 38 u.a.
08 A distância do ponto H(14, 4) até a reta definida pelos pontos D e E é maior do que 2.

Soma:

47. EsPCEx-SP 2014 O ponto simétrico do ponto (1, 5) em relação à reta de equação $2x + 3y - 4 = 0$ é o ponto:

a) (–3, –1)
b) (–1, –2)
c) (–4, 4)
d) (3, 8)
e) (3, 2)

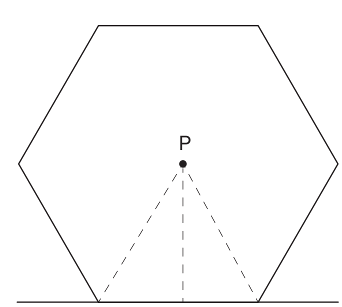
48. ITA-SP Dadas as retas r_1: $x + 2y - 5 = 0$, r_2: $x - y - 2 = 0$ e r_3: $x - 2y - 1 = 0$, podemos afirmar que:

a) são 2 a 2 paralelas.
b) r_1 e r_3 são paralelas.
c) r_1 é perpendicular a r_3.
d) r_2 é perpendicular a r_3.
e) as três são concorrentes num mesmo ponto.

49. UFC-CE Os vértices do quadrado ABCD no plano cartesiano são A(–1, 3), B(1, 1), C(3, 3) e D(*x*, *y*). Então, os valores de *x* e *y* são:

a) $x = 1$ e $y = 5$
b) $x = 5$ e $y = 1$
c) $x = 1 + \sqrt{5}$ e $y = 1 + \sqrt{5}$
d) $x = 1 - \sqrt{5}$ e $y = 1$
e) $x = 1$ e $y = 1 - \sqrt{5}$

50. FGV-SP 2020 O centro de um hexágono regular é o ponto P(4,2) e um lado se encontra sobre a reta de equação $4x - 3y + 5 = 0$.



a) Determine a área do hexágono regular.
b) Determine a área total (expressa como um produto de dois fatores) e o volume de um prisma hexagonal regular de altura $5\sqrt{3}$ e que tem esse hexágono como uma de suas bases.

FRENTE 3

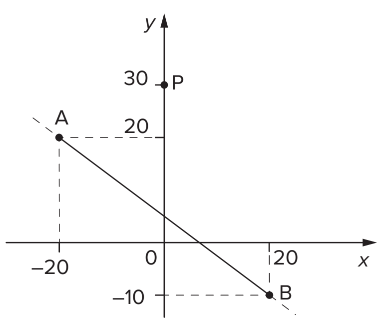
51. UFC-CE Considere a reta r cuja equação é $y = 3x$. Se P_0 é o ponto de r mais próximo do ponto $Q(3, 3)$ e d é a distância de P_0 a Q, então $d\sqrt{10}$ é igual a:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

52. EEAR-SP 2016 Dada a reta r: $2x - 3y + 5 = 0$ e o ponto P(5, 6), a distância de P à reta r é

a) $\sqrt{91}$
b) $30\sqrt{13}$
c) $\frac{3\sqrt{91}}{91}$
d) $\frac{3\sqrt{13}}{13}$

53. Fac. Albert Einstein 2016 A figura a seguir ilustra as localizações de um Posto de Saúde (P) e de um trecho retilíneo de uma rodovia ($\overline{AB}$) em um plano cartesiano ortogonal, na escala 1 : 200.



Pretende-se construir uma estrada ligando o Posto à rodovia, de modo que a distância entre eles seja a menor possível. Se a unidade de medida real é o metro, a distância entre o Posto e a rodovia deverá ser igual a:

a) 600 m
b) 800 m
c) 2 km
d) 4 km

54. UEM/PAS-PR 2020 Considere um plano munido de um sistema cartesiano ortogonal de coordenadas, com unidade de medida igual nos eixos Ox e Oy. Assinale o que for correto.

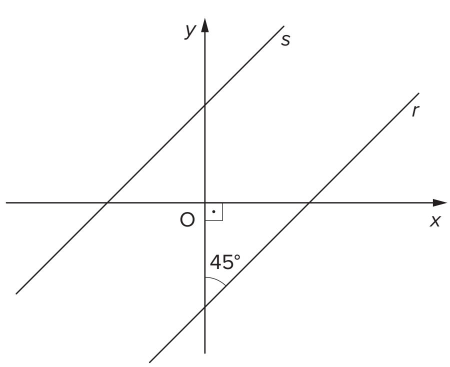
01 A equação $x^2 - y^2 = 0$ corresponde a um par de retas concorrentes.
02 Se as retas r: $y = (a - 2)x + a$ e s: $y = 2ax + (a - 1)$, com a um número real, são paralelas, então o ponto de coordenadas (3, −10) pertence a r.
04 A reta de equação $2x + 3y = 1$ é perpendicular à reta que passa pelos pontos de coordenadas (2, 1) e (3, 2).
08 Se a reta de equação $y = ax + (a - 2)$, sendo a um número real, passa pela origem, então o ponto de coordenadas (1, 0) está a uma distância de uma unidade de medida dessa reta.
16 Os pontos de coordenadas (4, 3) e (0, −1) estão a uma mesma distância do ponto de coordenadas (2, 1).

Soma:

55. FGV No plano cartesiano existem dois valores de m de modo que a distância do ponto P(m, 1) à reta de equação $3x + 4y + 4 = 0$ seja 6; a soma desses valores é:

a) $-\frac{16}{3}$
b) $-\frac{17}{3}$
c) $-\frac{18}{3}$
d) $-\frac{19}{3}$
e) $-\frac{20}{3}$

56. UFPE Na figura a seguir as retas r e s são paralelas e a distância da origem (0, 0) à reta s é $\sqrt{3}$. A equação cartesiana da reta s é $y = ax + b$. Determine $6a^2 + 4b^2$.



57. Famerp-SP 2020 Em um plano cartesiano, dois vértices de um triângulo equilátero estão sobre a reta de equação $y = 2x - 2$. O terceiro vértice desse triângulo está sobre a reta de equação $y = 2x + 2$. A altura desse triângulo, na mesma unidade de medida dos eixos cartesianos ortogonais, é igual a

a) $\frac{4\sqrt{3}}{5}$
b) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

58. **Uece 2015** Em um sistema de coordenadas cartesiano usual os pontos P(1, 2) e Q(4, 6) são vértices do triângulo PQM. Se o vértice M está sobre a reta paralela ao segmento $\overline{PQ}$ que contém o ponto (8, 6), então a medida da área do triângulo PQM é

Note: u.a. = unidades de área

a) 7 u.a.
b) 8 u.a.
c) 9 u.a.
d) 10 u.a.

59. **Unifesp** Dada a matriz, 3 × 3, $A = \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, a distância entre as retas r e s de equações, respectivamente, det(A) = 0 e det(A) = 1 vale:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
b) $\sqrt{2}$
c) 2
d) 3
e) $3\sqrt{2}$

Texto complementar

Sistemas lineares e retas

A principal ideia da Geometria Analítica é associar a Geometria e a Álgebra. Um aspecto interessante dessa integração é o uso de sistemas lineares de duas incógnitas para encontrar interseções de retas. Como se fosse a outra face da moeda, também podemos interpretar os sistemas lineares de duas incógnitas de maneira geométrica.

Todo sistema linear de duas incógnitas pode ser escrito na forma:

$$\begin{cases} a_r x + b_r y + c_r = 0 \\ a_s x + b_s y + c_s = 0 \end{cases}$$

Cada equação representa uma reta no plano cartesiano. Na Álgebra Linear, classificamos um sistema com solução única como Sistema Possível e Determinado (SPD). A solução é um par ordenado que pode ser interpretado como coordenadas de um ponto do plano cartesiano. Essa situação corresponde a retas concorrentes e ocorre se, e somente se, $\dfrac{a_r}{a_s} \neq \dfrac{b_r}{b_s}$.

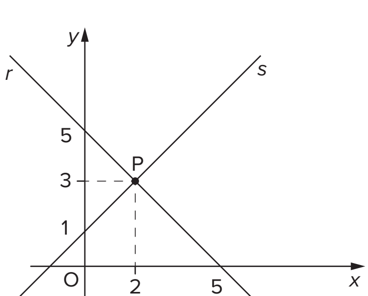
Um sistema que não possui solução é classificado como Sistema Impossível (SI). Geralmente, ele ocorre quando há contradição entre as equações. Do ponto de vista geométrico, ocorre contradição quando as duas retas são paralelas distintas, o que é equivalente a $\dfrac{a_r}{a_s} = \dfrac{b_r}{b_s} \neq \dfrac{c_r}{c_s}$.

Se as duas retas forem coincidentes, a interseção corresponderá a todos os pontos da reta. Nesse caso, o sistema terá infinitas soluções, o que ocorrerá quando $\dfrac{a_r}{a_s} = \dfrac{b_r}{b_s} = \dfrac{c_r}{c_s}$. Esse sistema é classificado como um Sistema Possível e Indeterminado (SPI).

Observe, nos exemplos a seguir, os sistemas lineares, suas soluções e classificações:

a) $\begin{cases} r: x + y - 5 = 0 \\ s: x - y + 1 = 0 \end{cases}$

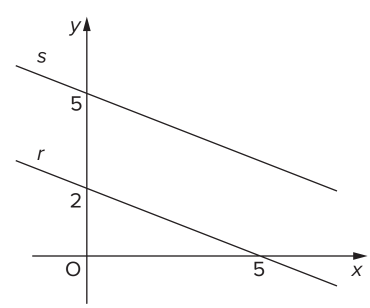
Graficamente:



Este é um sistema Possível e Determinado, pois $\dfrac{1}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$.
Solução única: $x = 2$, $y = 3$

b) $\begin{cases} r: 4x + 10y - 20 = 0 \\ s: 2x + 5y - 25 = 0 \end{cases}$

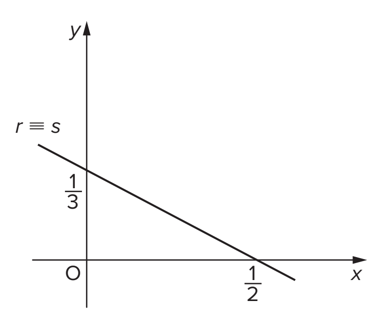
Graficamente:



Este é um sistema Impossível, pois $\dfrac{4}{2} = \dfrac{10}{5} \neq \dfrac{-20}{-25}$.
Não possui soluções.

c) $\begin{cases} r: 2x + 3y - 1 = 0 \\ s: 4x + 6y - 2 = 0 \end{cases}$

Graficamente:



Sistema Possível e Indeterminado, pois $\dfrac{2}{4} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{-1}{-2}$.

Possui infinitas soluções, todas da forma $x = k$, $y = \dfrac{1 - 2k}{3}$, com $k \in \mathbb{R}$.

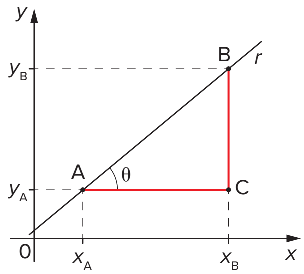
Texto elaborado para fins didáticos.

FRENTE 3

Resumindo

Coeficiente angular

Dados $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ pertencentes à reta r, não paralela ao eixo y, o coeficiente angular m é dado por:



$$m = \text{tg}\,\theta = \frac{BC}{AC} \therefore m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

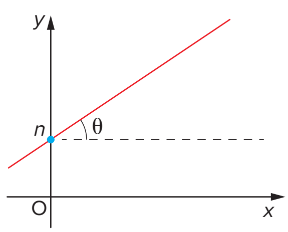
Equação fundamental da reta

Se (x_0, y_0) é um ponto conhecido da reta e $P(x, y)$ é outro ponto qualquer, temos que P é um ponto da reta r se, e somente se:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Equação reduzida da reta

A equação reduzida da reta é da forma $y = mx + n$.



$\boxed{m = \text{tg}\,\theta}$ → coeficiente angular da reta

$\boxed{n}$ → coeficiente linear da reta

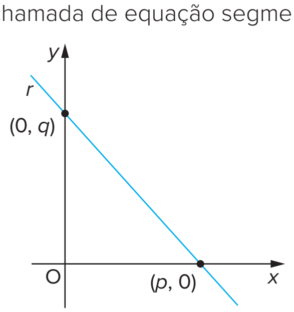
Equação geral da reta

Desenvolvendo a equação fundamental, podemos deixá-la em uma forma conhecida como equação geral da reta:

$$ax + by + c = 0$$

Equação segmentária da reta

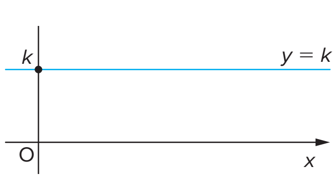
Se a reta r intersecta o eixo y no ponto $(0, q)$, com $q \neq 0$, e o eixo x no ponto $(p, 0)$, com $p \neq 0$, ela pode ser escrita em uma forma chamada de equação segmentária da reta.



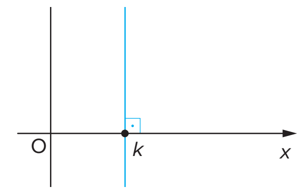
$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Retas paralelas aos eixos

Retas paralelas ao eixo x têm inclinação e coeficiente angular zero. Suas equações são da forma $y = k$, sendo k uma constante.



Retas paralelas ao eixo y têm inclinação de 90° e, para elas, não está definido o coeficiente angular. Suas equações são da forma $x = k$, sendo k uma constante.



Posições relativas entre retas

Equações gerais: $\begin{cases} r: a_r x + b_r y + c_r = 0, b_r \neq 0 \\ s: a_s x + b_s y + c_s = 0, b_s \neq 0 \end{cases}$

Equações reduzidas: $\begin{cases} r: y = m_r x + n_r \\ s: y = m_s x + n_s \end{cases}$

Retas coincidentes

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} = \frac{c_r}{c_s} \text{ ou } m_r = m_s \text{ e } n_r = n_s$$

Retas paralelas distintas

$$\frac{a_r}{a_s} = \frac{b_r}{b_s} \neq \frac{c_r}{c_s} \text{ ou } m_r = m_s \text{ e } n_r \neq n_s$$

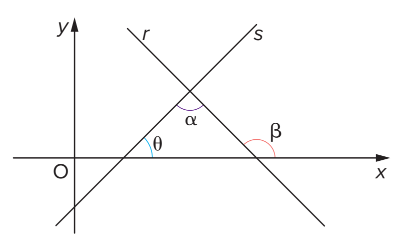
Retas concorrentes

$$\frac{a_r}{a_s} \neq \frac{b_r}{b_s} \text{ ou } m_r \neq m_s$$

Retas perpendiculares

$$a_r \cdot a_s + b_r \cdot b_s = 0 \text{ ou } m_r \cdot m_s = -1$$

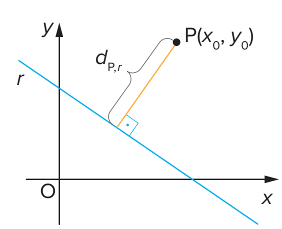
Ângulo entre retas



$$\text{tg}\,\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|$$

Distância entre ponto e reta

Dada a reta r de equação $ax + by + c = 0$ e o ponto $P(x_0, y_0)$, a distância de P à reta r é dada por:



$$d_{P,r} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Bissetrizes dos ângulos entre duas retas

Sejam duas retas concorrentes $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Se $P(x, y)$ é um ponto genérico das bissetrizes de r e s, então, a expressão que fornece as equações das duas bissetrizes de r e s é:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Quer saber mais?

Sites

RAMPA de acessibilidade: como construir? *Guia de Rodas*, 16 jul. 2020. Disponível em: https://guiaderodas.com/rampa-de-acessibilidade-como-construir/. Acesso em: 8 nov. 2021.

Uma das grandes necessidades das cidades é garantir às pessoas com deficiência, incluindo os usuários de cadeiras de rodas, acessibilidade a prédios e outras edificações. Um dos aspectos dessa acessibilidade são as rampas, que permitem o acesso a pisos de diferentes alturas. No entanto, nem toda rampa é acessível: de acordo com a norma NBR 9050/2015, ela precisa ter uma inclinação específica, dependendo da altura do desnível a ser vencido. No *site* indicado acima, essa norma técnica é descrita em maiores detalhes.

WANDERLEY, A. J. M.; CARNEIRO, J. P. Q.; WAGNER, E. Como melhorar a vida de um casal usando geometria não-euclidiana. *Revista do professor de matemática*, n. 50. Sociedade Brasileira de Matemática. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/50/5.htm. Acesso em: 8 nov. 2021.

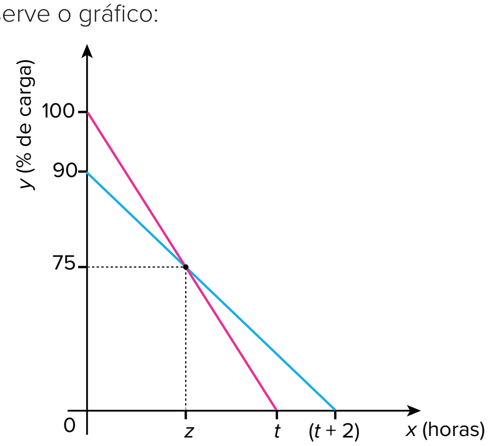
Nesse artigo da *RPM*, são abordados conceitos da Geometria Analítica, como a desigualdade triangular e a mediatriz de um segmento, mas aplicados em uma Geometria não euclidiana: a Geometria do Táxi.

Exercícios complementares

1. **UFJF/Pism-MG 2020** Um triângulo retângulo ABC tem a hipotenusa $\overline{AC}$ sobre a reta bissetriz dos quadrantes ímpares, sendo que os pontos A e C estão em quadrantes distintos. Os eixos desse sistema cartesiano estão graduados em centímetros e o ponto A está a uma distância de $5\sqrt{2}$ da origem. Os pontos B e C pertencem à reta $y = -2$.
A medida da área do triângulo ABC, em centímetros quadrados, é
a) 12,5
b) 24,5
c) 25
d) $10\sqrt{2}$
e) $49\sqrt{2}$

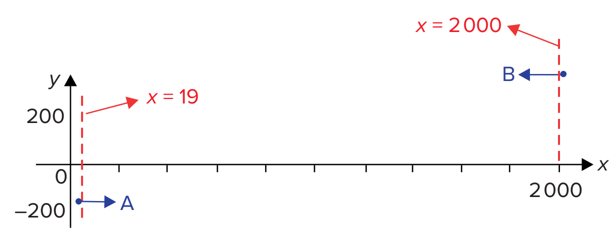
2. **Uerj 2015** As baterias B_1 e B_2 de dois aparelhos celulares apresentam em determinado instante, respectivamente, 100% e 90% da carga total.
Considere as seguintes informações:
- as baterias descarregam linearmente ao longo do tempo;
- para descarregar por completo, B_1 leva t horas e B_2 leva duas horas a mais do que B_1;
- no instante z, as duas baterias possuem o mesmo percentual de carga igual a 75%.

Observe o gráfico:



O valor de t, em horas, equivale a:
a) 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4

3. **Insper-SP 2018** Um retângulo ABCD possui vértices A(17, –158), B(2017, 242) e D(19, y). Na impossibilidade de esboçar os vértices desse retângulo por meio de um desenho em escala, Joana resolveu colocar os dados disponíveis em um programa de computador, que exibiu a seguinte imagem.

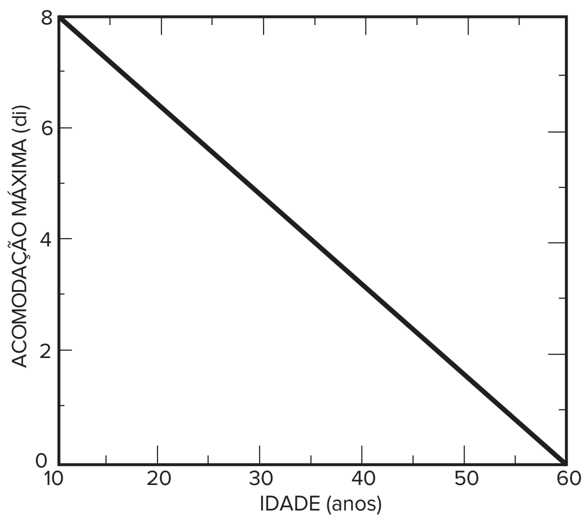


Como a imagem não permitiu a visualização do ponto D, Joana usou seus conhecimentos de Geometria Analítica e calculou, corretamente, a ordenada de D, igual a:
a) –172
b) –168
c) –326
d) –196
e) –224

4. **Efomm-RJ 2018** A forma de uma montanha pode ser descrita pela equação $y = -x^2 + 17x - 66$ $(6 \leqslant x \leqslant 11)$. Considere um atirador munido de um rifle de alta precisão, localizado no ponto (2, 0) e que a trajetória do tiro é uma linha reta. A partir de que ponto, na montanha, um indefeso coelho estará 100% seguro?
a) (8, 9)
b) (8, 6)
c) (7, 9)
d) (7, 5)
e) (7, 4)

5. **Enem PPL 2012** O cristalino, que é uma lente do olho humano, tem a função de fazer ajuste fino na focalização, ao que se chama acomodação. À perda da capacidade de acomodação com a idade chamamos presbiopia. A acomodação pode ser determinada por meio da convergência do cristalino. Sabe-se que a convergência de uma lente, para pequena distância focal em metros, tem como unidade de medida a dioptria (di).

A presbiopia, representada por meio da relação entre convergência máxima C_{max} (em di) e a idade T (em anos), é mostrada na figura seguinte.



COSTA, E. V.; FARIA LEITE, C. A. F. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 20, *n*. 3, set. 1998.

Considerando esse gráfico, as grandezas convergência máxima C_{max} e idade T estão relacionadas algebricamente pela expressão:

a) $C_{max} = 2^{-T}$

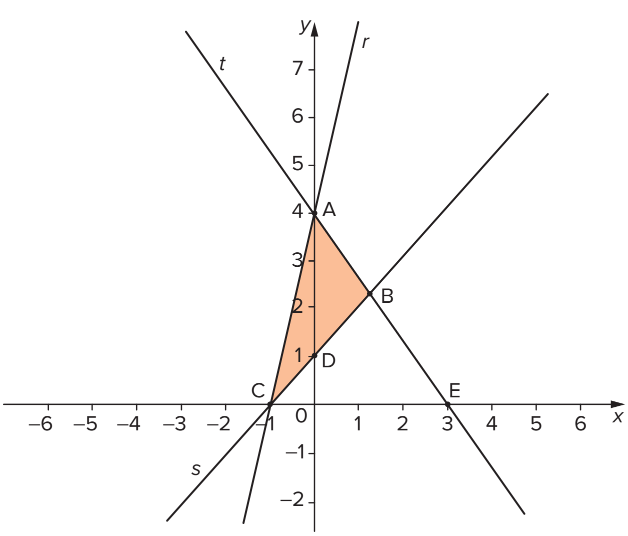
b) $C_{max} = T^2 - 70T + 600$

c) $C_{max} = log_2 (T^2 - 70T + 600)$

d) $C_{max} = 0{,}16T + 9{,}6$

e) $C_{max} = -0{,}16T + 9{,}6$

6. Acafe-SC 2019 Observe a figura, analise as afirmações a seguir e assinale a alternativa correta.



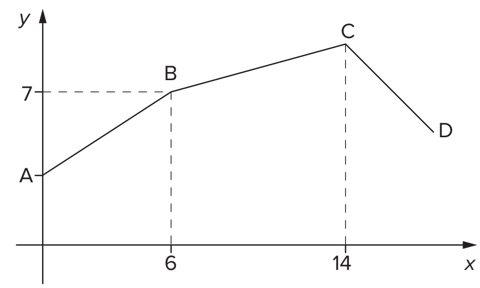
a) A distância da reta *s* ao ponto A é $3\sqrt{2}$ unidades de comprimento .

b) A região sombreada da figura representa os pontos (x, y) que satisfazem simultaneamente as desigualdades $4x - y + 4 \geqslant 0$, $x - y + 1 \geqslant 0$ e $4x + 3y - 12 \leqslant 0$.

c) A área do triângulo A, B e C é $\frac{48}{7}$ unidades de área.

d) A soma dos coeficientes angulares das retas *r*, *s* e *t* é $\frac{11}{3}$.

7. ESPM 2015 O gráfico a seguir é formado por 3 segmentos de retas consecutivos.



Sabe-se que:

I. A reta que contém o segmento $\overline{AB}$ tem coeficiente linear igual a 4.

II. O coeficiente angular do segmento $\overline{BC}$ vale metade do coeficiente angular do segmento $\overline{AB}$.

III. A ordenada do ponto D é $\frac{2}{3}$ da ordenada do ponto C.

IV. O coeficiente angular do segmento $\overline{CD}$ é igual a -1.

Podemos concluir que a abscissa do ponto D vale:

a) 7

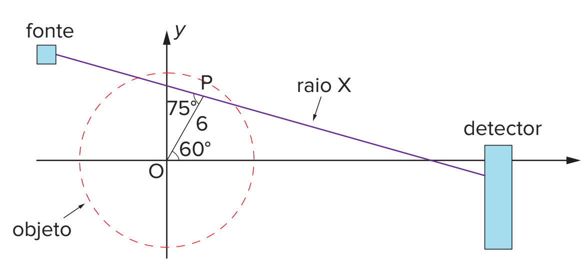
b) 15

c) 18

d) 16

8. Unifesp 2015 Um tomógrafo mapeia o interior de um objeto por meio da interação de feixes de raios X com as diferentes partes e constituições desse objeto. Após atravessar o objeto, a informação do que ocorreu com cada raio X é registrada em um detector, o que possibilita, posteriormente, a geração de imagens do interior do objeto.

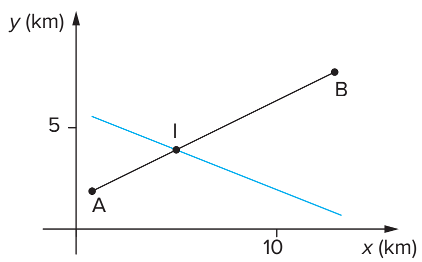
No esquema indicado na figura, uma fonte de raios X está sendo usada para mapear o ponto P, que está no interior de um objeto circular centrado na origem O de um plano cartesiano. O raio X que passa por P se encontra também nesse plano. A distância entre P e a origem O do sistema de coordenadas é igual a 6.



a) Calcule as coordenadas (x, y) do ponto P.

b) Determine a equação reduzida da reta que contém o segmento que representa o raio X da figura.

9. Uerj 2018 No projeto de construção de uma estrada retilínea entre duas vilas, foi escolhido um sistema referencial cartesiano em que os centros das vilas estão nos pontos A(1, 2) e B(11, 7). O trecho $\overline{AB}$ é atravessado por um rio que tem seu curso em linha reta, cuja equação, nesse sistema, é $x + 3y = 17$. Observe a seguir o esboço do projeto.



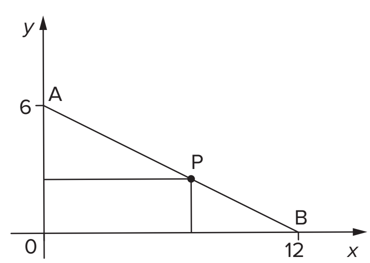
Desprezando as larguras da estrada e do rio, determine as coordenadas do ponto de interseção I.

10. Uece 2018 No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a medida da área da região limitada pelas retas $x + y = 5$; $x + y = 2$; $x - y = 0$ e $y = 0$ é igual a

Dado: u.a. = unidade de área.

a) $\frac{25}{4}$ u.a. b) $\frac{23}{4}$ u.a. c) $\frac{21}{4}$ u.a. d) $\frac{19}{4}$ u.a.

11. PUC-Rio 2018 Considere os pontos A(0, 6) e B(12, 0). Tomamos um ponto P sobre o segmento de reta $\overline{AB}$. Considere o retângulo R com um vértice na origem, um vértice em P e lados sobre os eixos x e y conforme a figura a seguir.



a) Encontre a equação da reta r que passa pelos pontos A e B.
b) Sejam (x, y) as coordenadas do ponto P. Escreva, em função apenas de x, uma fórmula para a área do retângulo R.
c) Qual é a maior área possível para o retângulo R?

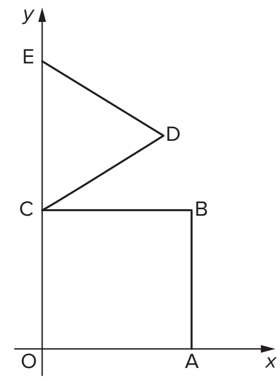
12. UFU-MG 2016 Considere o feixe de retas concorrentes no ponto P(8, 3). Seja r a reta desse feixe que determina junto com os eixos cartesianos um triângulo retângulo (ângulo reto na origem) contido no quarto quadrante e área igual a 6 unidades de área.
Na equação geral $ax + by + c = 0$ da reta r, a soma dos inteiros $a + b + c$ é múltiplo de:

a) 7 b) 13 c) 11 d) 5

13. ITA-SP 2012 A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas r: $x - 3y + 3 = 0$ e s: $3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a:

a) $\frac{19}{2}$ b) 10 c) $\frac{25}{2}$ d) $\frac{27}{2}$ e) $\frac{29}{2}$

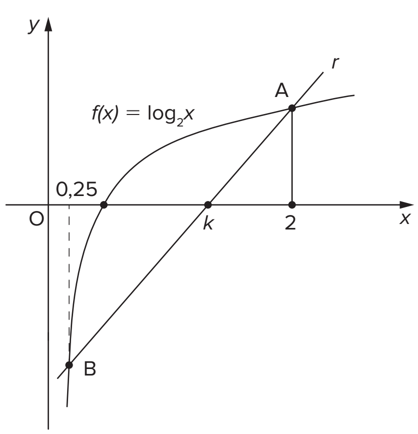
14. Fuvest-SP 2019



Na figura, OABC é um quadrado e CDE é um triângulo equilátero tal que OC = CE = 2.

a) Determine a equação da reta que passa por E e por A.
b) Determine a equação da reta que passa por D e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AE}$.
c) Determine um ponto P no segmento $\overline{AO}$, de modo que a reta que passa por E e por P divida o quadrado em duas regiões, de tal forma que a área da região que contém o segmento $\overline{OC}$ seja o dobro da área da outra região.

15. UFPR 2016 Considere o gráfico da função $f(x) = \log_2 x$ e a reta r que passa pelos pontos A e B, como indicado na figura a seguir, sendo k a abscissa do ponto em que a reta r intersecta o eixo Ox. Qual é o valor de k?



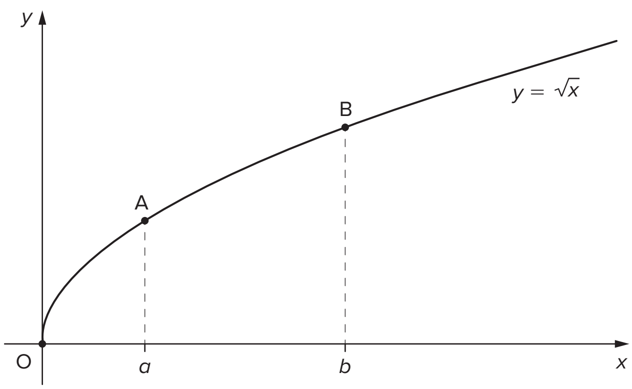
a) $\frac{17}{12}$ b) $\frac{14}{11}$ c) $\frac{12}{7}$ d) $\frac{11}{9}$ e) $\frac{7}{4}$

16. FGV-RJ 2017 Considere a reta de equação $4x - 7y + 10 = 0$. Seja $y = mx + h$ a equação da reta obtida ao se fazer a reflexão da reta dada em relação ao eixo x. O valor de $m + h$ é:

a) $-\frac{10}{11}$ b) $-\frac{10}{7}$ c) -2 d) -7 e) -10

FRENTE 3

17. Unicamp-SP 2020 A figura abaixo exibe, no plano cartesiano, o gráfico de $y = \sqrt{x}$ para $x \geqslant 0$, em que os pontos A e B têm abscissas $x_A = a > 0$ e $x_B = b > a$ e O é a origem do sistema de coordenadas.



a) Prove que os pontos A, B e $C = \left(-\sqrt{ab}, 0\right)$ são colineares.

b) Para $b = 3$, determine o valor de a para o qual a distância da origem ao ponto A é igual à distância do ponto A ao ponto B.

18. UFRGS 2017 As retas de equações $y = ax$ e $y = -x + b$ interceptam-se em um único ponto cujas coordenadas são estritamente negativas. Então, pode-se afirmar que

a) $a > 0$ e $b > 0$.
b) $a < 0$ e $b < 0$.
c) $a < -1$ e $b > 0$.
d) $a > 0$ e $b < 0$.
e) $a < -1$ e $b < 0$.

19. UEPG 2019 As equações das retas suporte dos lados de um triângulo são:

- Reta $\overleftrightarrow{AB}: y = \dfrac{2}{3}x$
- Reta $\overleftrightarrow{BC}: y = -2x + 8$
- Reta $\overleftrightarrow{CA}: y = \dfrac{2}{5}x$

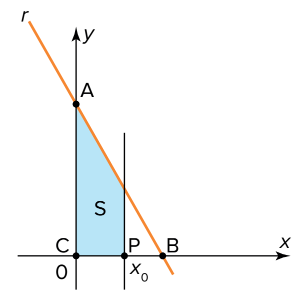
Considerando que A, B e C são as coordenadas dos vértices do triângulo formado, assinale o que for correto.

01 O triângulo ABC é escaleno.
02 Se M_1 é o ponto médio do lado $\overline{BC}$, então o comprimento da mediana $\overline{AM_1}$ do triângulo ABC, é $\sqrt{37}$.
04 A equação da reta, paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$ e que passa pelo ponto D(5, 2) é $y = -2x + 12$.
08 As coordenadas dos vértices do triângulo são A(0, 0), B(3, 2) e $C\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$.
16 A distância AB é um número irracional.

Soma:

20. ITA 2020 Sejam a e b dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números a e b.

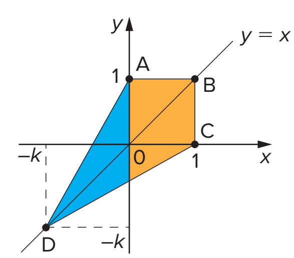
21. Uerj 2017 Considere o gráfico a seguir, em que a área S é limitada pelos eixos coordenados, pela reta r, que passa por A(0, 4) e B(2, 0), e pela reta perpendicular ao eixo x no ponto $P(x_0, 0)$, sendo $0 \leqslant x_0 \leqslant 2$.



Para que a área S seja a metade da área do triângulo de vértices C(0, 0), A e B, o valor de x_0 deve ser igual a:

a) $2 - \sqrt{2}$
b) $3 - \sqrt{2}$
c) $4 - \sqrt{2}$
d) $5 - \sqrt{2}$

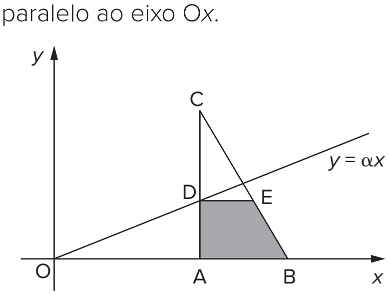
22. FGV 2017 Os pontos A(0, 1), B(1, 1), C(1, 0) e D($-k$, $-k$), com $k > 0$, formam o quadrilátero convexo ABCD, com eixo de simetria sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares.



O valor de k para que o quadrilátero ABCD seja dividido em dois polígonos de mesma área pelo eixo y é igual a:

a) $\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}$
b) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{4}$
c) $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$
d) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
e) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

23. Fuvest-SP 2018 No plano cartesiano real, considere o triângulo ABC, em que A(5, 0), B(8, 0), C(5, 5), e a reta de equação $y = \alpha x$, $0 < \alpha < 1$. Seja $f(\alpha)$ a área do trapézio ABED, em que D é a interseção da reta $y = \alpha x$ com a reta de equação $x = 5$, e o segmento $\overline{DE}$ é paralelo ao eixo Ox.



a) Encontre o comprimento do segmento $\overline{DE}$ em função de α.

b) Expresse $f(\alpha)$ e esboce o gráfico da função f.

24. ITA-SP 2016 Se a reta de equação $x = a$ divide o quadrilátero cujos vértices são (0, 1), (2, 0), (4, 0) e (6, 4) em duas regiões de mesma área, então o valor de a é igual a:

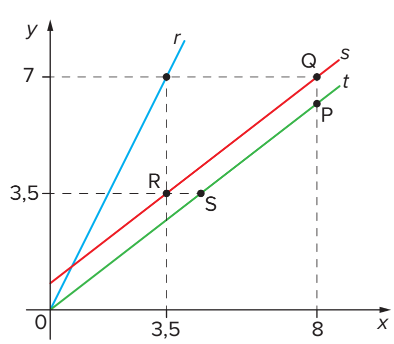
a) $2\sqrt{5} - 1$
b) $2\sqrt{6} - 1$
c) $3\sqrt{5} - 4$
d) $2\sqrt{7} - 2$
e) $3\sqrt{7} - 5$

25. ITA-SP 2018 No plano cartesiano são dados o ponto P(0, 3) e o triângulo de vértices A(0, 0), B(3, 0) e C(3, 2). Determine um ponto N sobre o eixo dos x de modo que a reta que passa por P e N divida o triângulo ABC em duas regiões de mesma área.

26. IME-RJ 2017 Sejam os pontos A(0, 0), B(–1, 1), C(1, 2), D(4, 1) e $E\left(3, \frac{1}{2}\right)$. A reta r passa por A e corta o lado $\overline{CD}$, dividindo o pentágono ABCDE em dois polígonos de mesma área. Determine a soma das coordenadas do ponto de interseção da reta r com a reta que liga C e D.

a) $\frac{25}{7}$
b) $\frac{51}{14}$
c) $\frac{26}{7}$
d) $\frac{53}{14}$
e) $\frac{27}{7}$

27. Unifesp 2016 Na figura, as retas r, s e t estão em um mesmo plano cartesiano. Sabe-se que r e t passam pela origem desse sistema, e que PQRS é um trapézio.



a) Determine as coordenadas do ponto de interseção entre as retas r e s.
b) Prove que os lados não paralelos do trapézio PQRS não possuem a mesma medida, ou seja, que o trapézio PQRS não é isósceles.

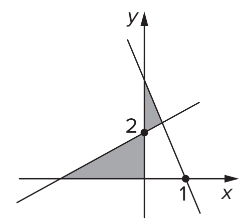
28. IFMG 2017 Sejam as funções reais $p(x) = 3x - 4$, $q(x) = -\frac{x}{2} + 4$, $r(x) = 3x - 10$ e $s(x) = 1$. Considerando todas as interseções entre essas retas, o único quadrilátero que pode ser desenhado, utilizando quatro dessas interseções como vértices, é um

a) losango.
b) trapézio.
c) quadrado.
d) retângulo.

29. UPE 2017 Qual é a medida da área do quadrilátero limitado pelas retas (r) $y = 4$; (s) $3x - y - 2 = 0$; (t) $y = 1$ e (u) $3x + 2y - 20 = 0$?

a) 7,5
b) 9,0
c) 10,5
d) 11
e) 12

30. Uemg 2017 No gráfico, representado a seguir, uma das retas esboçadas tem inclinação igual a –3 e a outra reta, inclinação igual a $\frac{1}{2}$. Sabendo-se disso, a área (em unidade de área) da região hachurada é:



a) 6 u.a.
b) $\frac{21}{5}$ u.a.
c) $\frac{29}{7}$ u.a.
d) $\frac{33}{7}$ u.a.

31. Unicamp-SP Os pontos A, B, C e D pertencem ao gráfico da função $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$. As abscissas de A, B e C são iguais a 2, 3 e 4, respectivamente, e o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao segmento $\overline{CD}$.

a) Encontre as coordenadas do ponto D.
b) Mostre que a reta que passa pelos pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ passa também pela origem.

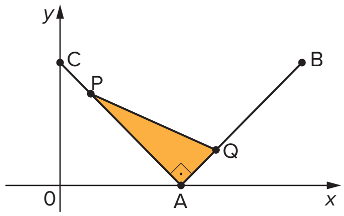
32. PUC-Rio 2016 Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as funções definidas por $f(x) = |3x - 1|$ e $g(x) = 1 - 3x$.

a) Esboce os gráficos de f e g no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.
b) Para quais valores de x, temos $f(x) - g(x) \leqslant 28$? Justifique sua resposta.
c) Determine a área do triângulo ABC, onde A(0, f(0)), B(3, g(3)) e C(3, f(3)), justificando sua resposta.

33. Col. Naval-RJ 2015 As retas r_1: $2x - y + 1 = 0$, r_2: $x + y + 3 = 0$ e r_3: $ax + y - 5 = 0$ concorrem em um mesmo ponto P para determinado valor de $\alpha \in \mathbb{R}$. Sendo assim, pode-se afirmar que o valor da expressão $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{3}\right) - 3\text{sen}^3\left[\frac{(-3-\alpha)\pi}{8}\right] - \frac{5\sqrt{3}}{2}\text{tg}\left(\frac{-\alpha\pi}{6}\right)$ é:

a) $3\left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$
b) $2-\frac{3\sqrt{2}}{4}$
c) $2+\frac{\sqrt{2}}{8}$
d) $3+\frac{\sqrt{2}}{4}$
e) $3\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

34. Uerj 2014



No gráfico apresentado, estão indicados os pontos A(1, 0), B(2, 1) e C(0, 1), que são fixos, e os pontos P e Q, que se movem simultaneamente. O ponto P se desloca no segmento de reta de C até A, enquanto o ponto Q se desloca no segmento de A até B. Nesses deslocamentos, a cada instante, a abscissa de P é igual à ordenada de Q.

Determine a medida da maior área que o triângulo PAQ pode assumir.

35. Unicamp-SP 2014 Considere no plano cartesiano os pontos A(–1, 1) e B(2, 2).

a) Encontre a equação que representa o lugar geométrico dos centros dos círculos que passam pelos pontos A e B.

b) Seja C um ponto na parte negativa do eixo das ordenadas. Determine C de modo que o triângulo ABC tenha área igual a 8.

36. Fuvest-SP A hipotenusa de um triângulo retângulo está contida na reta $r: y = 5x - 13$, e um de seus catetos está contido na reta $s: y = x - 1$. Se o vértice onde está o ângulo reto é um ponto da forma $(k, 5)$ sobre a reta s, determine

a) todos os vértices do triângulo;

b) a área do triângulo.

37. FGV-SP 2018 Sejam m e n números reais e $\begin{cases} 3x + my = n \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ um sistema de equações nas incógnitas x e y. A respeito da representação geométrica desse sistema no plano cartesiano, é correto afirmar que, necessariamente, é formada por duas retas

a) paralelas distintas, se $m = 6$ e $n \neq 3$.

b) paralelas coincidentes, se $m = 6$ e $n \neq 3$.

c) paralelas distintas, se $m = 6$.

d) paralelas coincidentes, se $n = 3$.

e) concorrentes, se $m \neq 0$.

38. AFA-SP 2018 Considere no plano cartesiano as retas r e s dadas pelas equações:

$$\begin{matrix} r: 3x + 3py + p = 0 \\ s: px + 9y - 3 = 0 \end{matrix}, \text{ onde } p \in \mathbb{R}.$$

Baseado nessas informações, marque a alternativa **incorreta**.

a) r e s são retas concorrentes se $|p| \neq 3$.

b) Existe um valor de p para o qual r é equação do eixo das ordenadas e s é perpendicular a r.

c) r e s são paralelas distintas para dois valores reais de p.

d) r e s são retas coincidentes para algum valor de p.

39. ITA-SP 2017 Considere as retas de equações $r: y = \sqrt{2}x + a$ e $s: y = bx + c$, em que a, b e c são reais. Sabendo que r e s são perpendiculares entre si, com r passando por (0, 1) e s, por $(\sqrt{2}, 4)$, determine a área do triângulo formado pelas retas r, s e o eixo x.

40. FGV-RJ 2017 No plano cartesiano são dados os pontos A(–3, 1) e B(4, 5). A reta r de equação $kx - y + 2 = 0$ é variável, pois sua posição depende do coeficiente real k.

a) Determine para que valores de k os pontos A e B ficam de um mesmo lado da reta r.

b) Determine para que valor de k os pontos A e B ficam equidistantes da reta r.

41. Efomm-RJ 2018 A projeção ortogonal de A sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$, sabendo-se que A(3, 7), B(1, 1) e C(9, 6), terá as coordenadas da projeção:

a) $x = \frac{468}{85}; y = \frac{321}{89}$

b) $x = \frac{478}{87}; y = \frac{319}{87}$

c) $x = \frac{487}{84}; y = \frac{321}{87}$

d) $x = \frac{457}{89}; y = \frac{319}{89}$

e) $x = \frac{472}{89}; y = \frac{295}{89}$

42. Uemg 2018 Com o sistema de coordenadas da Geometria Analítica, é possível obter a interpretação algébrica de problemas geométricos. Por exemplo, sabendo-se que as retas r e s são perpendiculares, conhecendo a equação da reta r dada por $x + y - 1 = 0$ e sabendo que o ponto P(–3, 2) pertence à reta s, é possível encontrar o ponto Q, simétrico de P em relação à reta r. Nesse caso, o ponto Q é dado por:

a) (1, 3) **b)** (–1, 3) **c)** (1, 4) **d)** (–1, 4)

43. UFTM-MG 2012 Seja A o conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano ortogonal em que x e y podem assumir quaisquer valores do conjunto {–1, 0, 1}, incluindo valores iguais.

a) Calcule o total de retas distintas que passam por pelo menos dois pontos de A.

b) Dentre todas as retas distintas que passam por pelo menos dois pontos de A, calcule a porcentagem daquelas que são perpendiculares à reta de equação $2x + 2y - 5 = 0$.

44. ITA-SP 2015 Dados o ponto $A\left(4, \frac{25}{6}\right)$ e a reta $r: 3x + 4y - 12 = 0$, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em r e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\frac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente, iguais a:

a) $\frac{22}{3}$ e $\frac{40}{3}$

b) $\frac{23}{3}$ e $\frac{40}{3}$

c) $\frac{25}{3}$ e $\frac{31}{3}$

d) $\frac{25}{3}$ e $\frac{35}{3}$

e) $\frac{25}{3}$ e $\frac{40}{3}$

45. **ITA-SP 2017** Considere a reta r: $y = 2x$. Seja A(3, 3) o vértice de um quadrado ABCD, cuja diagonal $\overline{BD}$ está contida em r. A área deste quadrado é:

a) $\frac{9}{5}$ b) $\frac{12}{5}$ c) $\frac{18}{5}$ d) $\frac{21}{5}$ e) $\frac{24}{5}$

46. **EsPCEx-SP 2017** Considere a reta t mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta intercepta os eixos coordenados. Então, a distância do ponto M(1, 1) à reta t é:

a) $\frac{13\sqrt{3}}{11}$

b) $\frac{10\sqrt{13}}{13}$

c) $\frac{13\sqrt{11}}{13}$

d) $\frac{3\sqrt{11}}{13}$

e) $\frac{3\sqrt{3}}{11}$

47. **ITA-SP 2015** Considere os pontos A(0, –1), B(0, 5) e a reta r: $2x - 3y + 6 = 0$. Das afirmações a seguir:

I. $d(A, r) = d(B, r)$.

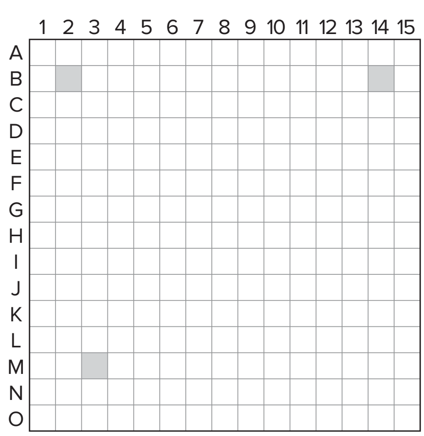
II. B é simétrico de A em relação à reta r.

III. $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero ABC de vértice $C\left(-3\sqrt{3}, 2\right)$ ou $C\left(3\sqrt{3}, 2\right)$.

É (são) verdadeira(s) apenas

a) I. b) II. c) I e II. d) I e III. e) II e III.

48. **Insper-SP 2014** A figura mostra um tabuleiro de um jogo Batalha Naval, em que André representou três navios nas posições dadas pelas coordenadas B2, B14 e M3. Cada navio está identificado por um quadrado sombreado.



André deseja instalar uma base em um quadrado do tabuleiro cujo centro fique equidistante dos centros dos três quadrados onde foram posicionados os navios. Para isso, a base deverá estar localizada no quadrado de coordenadas:

a) G8 b) G9 c) H8 d) H9 e) H10

49. **UFSCar-SP** Admita os pontos A(2, 2) e B(–3, 4) como sendo vértices opostos de um losango ACBD.

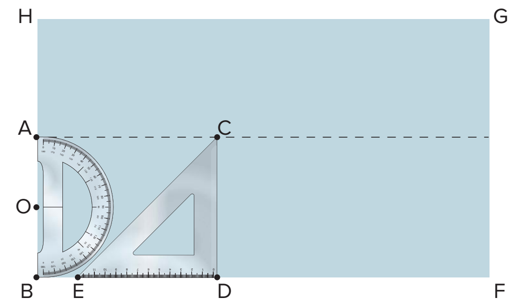
a) Determine a equação geral de cada uma das retas suportes das diagonais do losango ACBD.

b) Calcule o comprimento do lado do losango ACBD, admitindo-se que um de seus vértices esteja no eixo das abscissas.

50. **Uerj 2012** A figura a seguir representa a superfície plana de uma mesa retangular BFGH na qual estão apoiados os seguintes instrumentos para desenho geométrico, ambos de espessuras desprezíveis

– um transferidor com a forma de um semicírculo de centro O e diâmetro $\overline{AB}$;

– um esquadro CDE, com a forma de um triângulo retângulo isósceles.



Considere as informações a seguir:

- $\overline{ED}$ está contido em $\overline{BF}$;
- $\overline{OA}$ está contido em $\overline{BH}$;
- AB = 10 cm;
- BD = 13 cm.

Calcule a medida, em centímetros, do menor segmento que liga a borda do transferidor à borda do esquadro.

51. **IME-RJ 2016** O lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ equidistantes às retas de equações $4x + 3y - 2 = 0$ e $12x - 16y + 5 = 0$ é:

a) $4x + 28y + 13 = 0$

b) $8x - 7y - 13 = 0$

c) $28x - 4y - 3 = 0$

d) $56x^2 + 388y - 184x - 56y^2 - 16y + 19 = 0$

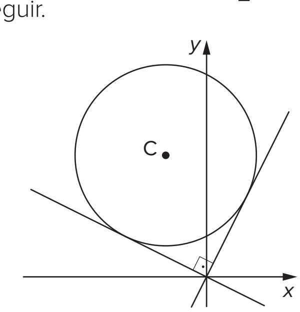
e) $112x^2 + 768xy - 376x - 112y^2 - 32y + 39 = 0$

52. **ITA-SP 2015** Sabe-se que a equação

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$$

representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s, formando um ângulo agudo θ. Determine a tangente de θ.

53. **Unicamp-SP 2012** Um círculo de raio 2 foi apoiado sobre as retas $y = 2x$ e $y = -\frac{x}{2}$, conforme mostra a figura a seguir.



a) Determine as coordenadas do ponto de tangência entre o círculo e a reta $y = -\frac{x}{2}$.

b) Determine a equação da reta que passa pela origem e pelo ponto C, centro do círculo.

FRENTE 3

54. EsPCEx-SP 2020 Uma reta tangente à curva de equação $y = x^2$ é paralela à reta $6x - y + 5 = 0$. As coordenadas do ponto de tangência são

a) (3, 9)
b) (6, 5)
c) (5, 6)
d) (5, 9)
e) (9, 3)

55. AFA-SP 2013 Sejam a e b dois números reais positivos. As retas r e s se interceptam no ponto (a, b).

Se $\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in r$ e $\left(0, \frac{b}{2}\right) \in s$, então uma equação para a reta t, que passa por (0, 0) e tem a tangente do ângulo agudo formado entre r e s como coeficiente angular, é:

a) $3abx + (2a^2 - b^2)y = 0$
b) $36bx - b(a^2 + b^2)y = 0$
c) $3ax - a(a^2 + b^2)y = 0$
d) $3abx - 2(a^2 + b^2)y = 0$

56. ITA-SP 2012 Dados os pontos A(0, 0), B(2, 0) e C(1, 1), o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância $d = 2$ da bissetriz interna, por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por:

a) $r_{1,2}: \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4 + \sqrt{2}} = 0$
b) $r_{1,2}: \frac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$
c) $r_{1,2}: 2y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$
d) $r_{1,2}: (\sqrt{2} + 1)y - x \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 0$
e) $r_{1,2}: (\sqrt{2} + 1)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0$

57. Uerj 2019 As retas r, u e v, construídas em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, apresentam as seguintes equações:

$r: 4x - 3y = 20$

$u: 2x + 3y = 28$

$v: 3x + y = 27$

Determine se as três retas são concorrentes em um único ponto. Justifique sua resposta com os cálculos necessários.

58. FGV-SP 2012 Os pontos A(3, 9), B(1, 1), C(5, 3) e D são vértices de um quadrilátero ABCD, de diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, no primeiro quadrante do plano cartesiano ortogonal. O polígono cujos vértices são os pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ é um quadrado.

a) Denotando por α o ângulo agudo de lados $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$, calcule $\cos \alpha$.
b) Determine as coordenadas do vértice D.

59. EsPCEx-SP 2018 A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 6x + 1$, no ponto (4, −7), é igual a

a) $y = -2x + 1$
b) $y = 3x - 19$
c) $y = x - 11$
d) $y = -3x + 5$
e) $y = 2x - 15$

BNCC em foco

Use as informações a seguir para responder às questões de **1** a **3**.

Durante o lançamento de um determinado satélite, ele seguiu, a partir da superfície terrestre, uma trajetória retilínea que pode ser representada, em um plano cartesiano, pela equação $3y - 13x + 12 = 0$, sendo que o eixo x representa a superfície da Terra (considerada plana no trecho em questão) e cada unidade de medida de comprimento nos eixos do plano cartesiano corresponde a 1 km. No ponto (6, 7), encontra-se um segundo satélite, estacionado em baixa altitude.

EM13MAT101 e EM13MAT302

1. Qual foi, aproximadamente, a menor distância entre os dois satélites?

EM13MAT302

2. A atmosfera terrestre é dividida nos seguintes estratos: troposfera, estratosfera, mesosfera, termosfera e exosfera. A segunda camada da atmosfera, partindo da superfície, é a estratosfera, que é uma camada com pressão atmosférica de cerca de 1 milésimo da pressão atmosférica ao nível do mar, e contém a camada de ozônio. Ela começa a partir de 12 km acima do nível do mar.
Desconsiderando a rotação da Terra, a que distância do ponto de lançamento estava a projeção vertical sobre a superfície terrestre do primeiro satélite quando o satélite entrou na estratosfera?

EM13MAT302 e EM13MAT314

3. Para conseguir colocar um satélite em órbita, é necessário que, durante os instantes iniciais do lançamento, ele atinja velocidades muito elevadas.
Em um certo momento desse movimento, o primeiro satélite estava a uma altura de 2,5 km da superfície da Terra. Após 1 segundo, ele se encontrava a 9 km da superfície. Lembrando que a trajetória desse satélite é oblíqua, qual foi, aproximadamente, a velocidade média dele, em km/h, entre esses dois pontos?

MartinM303/iStockphoto.com

FRENTE 3

CAPÍTULO

9

Equações da circunferência

A abóbada da Basílica de São Pedro, no Vaticano, reproduz inúmeras circunferências. Essa importante figura geométrica é utilizada em grande número de áreas do conhecimento, tais como: Engenharia, Arquitetura, Matemática, Física, Biologia, Química, Arte, Astronomia, entre outras.

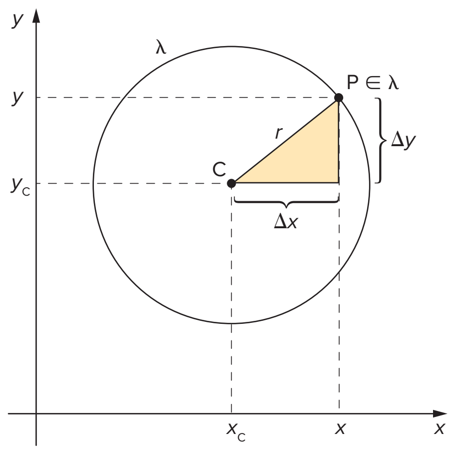
Ela possui características não encontradas frequentemente em outras figuras planas, como o fato de poder ser rotacionada em torno de um ponto sem modificar sua posição aparente, além de apresentar infinitos eixos de simetria.

Neste capítulo, estudaremos a circunferência do ponto de vista da Geometria Analítica, suas equações e propriedades.

Equação reduzida da circunferência

Como a distância de qualquer ponto de uma circunferência ao centro dela é igual ao raio r, podemos definir circunferência como o lugar geométrico dos pontos do plano que distam r de um centro dado.

Na figura a seguir, vemos como usar o teorema de Pitágoras para deduzir uma equação da circunferência:



Do teorema de Pitágoras, temos que:

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = r^2$$

$$\boxed{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2}$$

De maneira um pouco mais formal, seja λ a circunferência de centro $C(x_c, y_c)$ e raio r. Um ponto $P(x, y)$ pertence a λ se, e somente se:

$$d_{P,C} = r \Rightarrow \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad \text{(I)}$$

A equação (I) é chamada de equação reduzida da circunferência. Nela, podemos identificar claramente as coordenadas do centro e o raio da circunferência.

Exercícios resolvidos

1. Escreva a equação reduzida das circunferências de centro C e raio r a seguir:

a) $C(2, 3)$ e $r = 4$

b) $C(-2, 0)$ e $r = \sqrt{2}$

Resolução:

a) $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

b) $(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$

$(x - (-2))^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{2})^2$

$(x + 2)^2 + y^2 = 2$

2. Determine o centro e o raio das circunferências dadas pelas equações reduzidas a seguir:

a) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$

b) $x^2 + y^2 = 5$

Resolução:

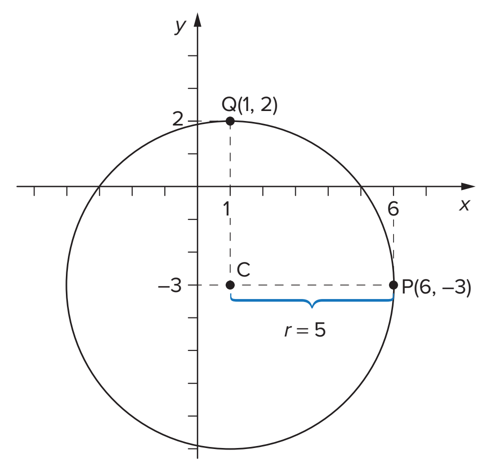
Sabendo que a equação reduzida de uma circunferência de centro $C(x_c, y_c)$ e raio r é $(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$, temos:

a) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25 \Rightarrow C(4, -3)$ e $r = 5$

b) $x^2 + y^2 = 5 \Rightarrow (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow C(0, 0)$ e $r = \sqrt{5}$

3. Determine o centro C, o raio r, o ponto P de maior abscissa e o ponto Q de maior ordenada da circunferência de equação reduzida $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$.

Resolução:



Na circunferência $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$, temos:
Centro: $C(1, -3)$.
Raio: $r = 5$.
Ponto de maior abscissa:

$$P(x_c + r, y_c) = P(1 + 5, -3) = P(6, -3)$$

Ponto de maior ordenada:

$$Q(x_c, y_c + r) = Q(1, -3 + 5) = Q(1, 2)$$

4. Determine as interseções entre a circunferência de centro (2, 3) e raio 3 e os eixos ordenados.

Resolução:

Interseção com o eixo y $(x = 0)$:

$$(0 - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9 \Rightarrow (y - 3)^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 3 = \pm\sqrt{5} \quad \begin{matrix} \nearrow & y = 3 + \sqrt{5} \\ & \text{ou} \\ \searrow & y = 3 - \sqrt{5} \end{matrix}$$

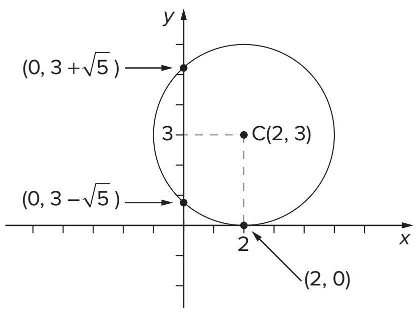
Pontos: $(0, 3 + \sqrt{5})$ e $(0, 3 - \sqrt{5})$

Interseção com o eixo x $(y = 0)$:

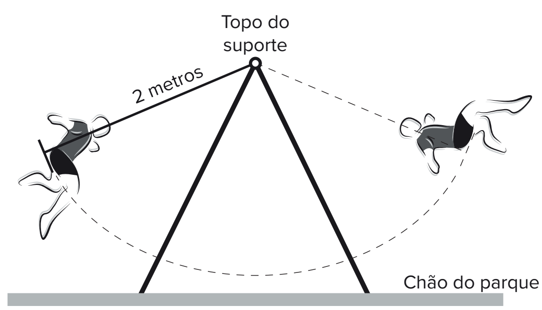
$$(x - 2)^2 + (0 - 3)^2 = 9 \Rightarrow (x - 2)^2 = 9 - 9 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = 2$$

Ponto: (2, 0) (circunferência tangente ao eixo x).

Veja a figura a seguir:



5. **Enem 2014** A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função:

a) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

b) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

c) $f(x) = x^2 - 2$

d) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Resolução:

Utilizando o sistema cartesiano sugerido no texto, o balanço descreve um arco sobre a circunferência de centro (0, 0) e raio 2, com equação $x^2 + y^2 = 4$. Assim, para $y < 0$ e $-2 < x < 2$:

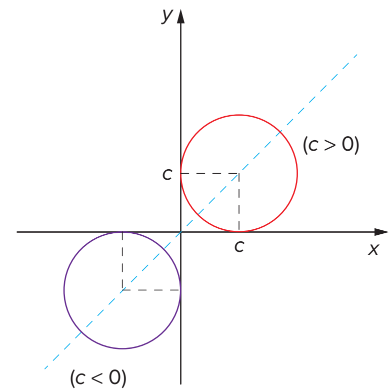
$$x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = -\sqrt{4 - x^2}$$

Alternativa: D.

6. Determine a equação reduzida de uma circunferência de centro em P(c, c), com $c \neq 0$, que tangencia o eixo das abscissas e o eixo das ordenadas.

Resolução:

Conforme a figura a seguir, se $c > 0$, o centro da circunferência se encontra no primeiro quadrante, e ela tem raio $r = c$. Se $c < 0$, o centro da circunferência se encontra no terceiro quadrante, e ela tem raio $r = -c$.



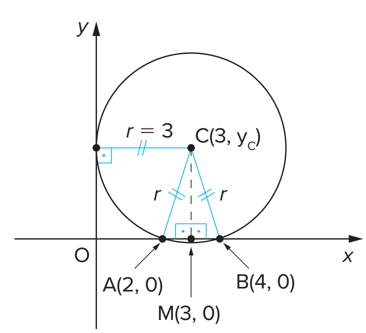
Nos dois casos, a equação da circunferência será:

$$(x - c)^2 + (y - c)^2 = (\pm c)^2 \Rightarrow (x - c)^2 + (y - c)^2 = c^2$$

7. Determine a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos A(2, 0) e B(4, 0) e que é tangente ao eixo y.

Resolução:

Na figura a seguir, temos AC = BC = r. Assim, o triângulo ABC é isósceles, e o ponto médio M(3, 0) da base $\overline{AB}$ também é pé da altura. Assim, temos r = OM = 3 e AM = 1.



No triângulo AMC:

$$AM^2 + CM^2 = AC^2 \Rightarrow 1^2 + y_C{}^2 = 3^2 \Rightarrow y_C = 2\sqrt{2}$$

Portanto, a equação reduzida da circunferência é:

$$(x - 3)^2 + \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 = 9$$

Equação geral da circunferência

Veremos, agora, que toda circunferência tem equação da forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, que é chamada de equação geral da circunferência.

Observe o exemplo a seguir.

Considere uma circunferência de centro (3, −2) e raio 4. Sua equação reduzida é:

$$(x - 3)^2 + (y - (-2))^2 = 4^2 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$$

Desenvolvendo os quadrados, temos:

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$$

A equação tem a forma $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, com $A = -6$, $B = 4$ e $C = -3$.

Generalizando para uma circunferência de raio r e centro (x_0, y_0), temos:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
$$x^2 - 2 \cdot x_0 \cdot x + x_0^2 + y^2 - 2 \cdot y_0 \cdot y + y_0^2 - r^2 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

Como essa equação é idêntica a $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, devemos ter:

$$\begin{cases} A = -2x_0 \\ B = -2y_0 \\ C = x_0^2 + y_0^2 - r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{A}{2} \\ y_0 = -\dfrac{B}{2} \\ r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - C} \end{cases}$$

Uma condição necessária para que a equação $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ represente uma circunferência é, portanto:

$$x_0^2 + y_0^2 - C > 0 \Rightarrow C < x_0^2 + y_0^2 \Rightarrow C < \frac{A^2 + B^2}{4}$$

Assim, toda circunferência tem uma equação geral, mas, dependendo dos valores de A, B e C, uma equação geral pode representar também um único ponto ou até mesmo o conjunto vazio.

Exercícios resolvidos

8. Escreva a equação geral da circunferência de centro C e raio r em cada caso:

a) $C(3, -2)$ e $r = 5$

b) $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ e $r = \frac{1}{2}$

Resolução:

a)
$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 - 25 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$$

b)
$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{4} + y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 3x + 2 = 0$$

9. O que representa cada equação a seguir?

a) $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 3x + y + 3 = 0$

Resolução:

Utilizaremos o método conhecido como completar quadrados.

a) Primeiro, reagrupamos os termos da equação, deixando espaços no primeiro e no segundo membros, conforme o esquema a seguir:

$$x^2 + 4x + \_\_\_ + y^2 - 3y + \_\_\_ = -5 + \_\_\_ + \_\_\_$$

Depois, adicionamos dois números ao primeiro membro, com o objetivo de completar os trinômios quadrados perfeitos. Devemos adicionar os mesmos números no segundo membro para manter a igualdade:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = \underbrace{-5 + \frac{9}{4} + 4}$$
$$(x + 2)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

Portanto, o centro dessa circunferência é o ponto $\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ e seu raio mede $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b)
$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - \underbrace{2x}_{2 \cdot 1 \cdot x} + 1^2 + y^2 - \underbrace{4y}_{2 \cdot 2 \cdot y} + 2^2 = -5 + 1^2 + 2^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 0$$

A equação é verdadeira para um único par ordenado, que é (1, 2). Assim, essa equação representa um único ponto de coordenadas (1, 2).

c)
$$x^2 + y^2 - 3x + y + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - \underbrace{3x}_{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 + \underbrace{y}_{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= -3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{2}$$

No conjunto dos números reais, uma soma de quadrados não pode ser negativa. Portanto, essa equação representa o conjunto vazio.

10. Determine o maior valor inteiro de p para que a equação $x^2 + y^2 + 6x + 8y + p = 0$ represente uma circunferência.

Resolução:

Completando quadrados:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = -p + 9 + 16 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25 - p$$

Para que essa equação represente uma circunferência, devemos ter:

$$25 - p > 0 \Rightarrow p < 25$$

O maior valor inteiro que satisfaz essa condição é 24.

11. Determine a equação geral da circunferência que passa pelos pontos $A(-2, 0)$, $B(7, 3)$ e $C(-1, 7)$.

Resolução:

Devemos encontrar uma equação da forma $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, satisfeita pelos pontos A, B e C. Assim:

$$\begin{cases} (-2)^2 + 0^2 + a \cdot (-2) + b \cdot 0 + c = 0 \\ 7^2 + 3^2 + a \cdot 7 + b \cdot 3 + c = 0 \\ (-1)^2 + 7^2 + a \cdot (-1) + b \cdot 7 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

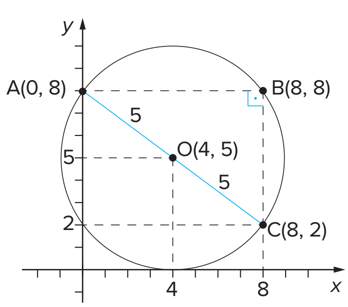
$$\Rightarrow \begin{cases} 4 - 2a + c = 0 \\ 58 + 7a + 3b + c = 0 \\ 50 - a + 7b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - c = 4 \\ 7a + 3b + c = -58 \\ a - 7b - c = 50 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -4$, $b = -6$ e $c = -12$. Portanto, a circunferência tem equação $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ ou $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$, tendo centro (2, 3) e raio 5.

12. Determine a equação geral da circunferência que passa pelos pontos A(0, 8), B(8, 8) e C(8, 2).

Resolução:



O triângulo ABC é retângulo em B. Logo, o centro O da circunferência circunscrita coincide com o ponto médio da hipotenusa $\overline{AC}$: $O\left(\frac{0+8}{2}, \frac{8+2}{2}\right) = O(4, 5)$.

O raio é dado por:

$$r = AO = \sqrt{(4-0)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Assim, a equação da circunferência que passa por A, B e C é dada por:

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 5^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$$

! Atenção

A circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$ e raio r tem equação reduzida dada por:

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2 \quad \text{(I)}$$

E equação geral dada por:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad \text{(II)}$$

Uma equação da forma (II) pode também representar um ponto ou o conjunto vazio.

Se a circunferência for:

- tangente ao eixo das abscissas, então $r = |y_C|$;
- tangente ao eixo das ordenadas, então $r = |x_C|$.

Reta e circunferência

Interseções entre reta e circunferência

Um tipo de problema bastante comum na Geometria Analítica e presente em várias situações contextualizadas consiste em encontrar os pontos de interseção entre uma reta e uma circunferência. Uma das maneiras de encontrá-los é resolver o sistema formado por equações do seguinte tipo:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

O processo de resolução desse tipo de sistema é o da substituição da relação linear na quadrática, que leva a uma equação do 2º grau na variável x ou na variável y.

Observe o exemplo a seguir.

Devemos encontrar as interseções entre a reta r: $2x - y + 4 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 20 = 0$.

Isolando y na equação da reta, temos:

$$y = 2x + 4 \quad \text{(I)}$$

Substituindo na equação da circunferência, temos:

$$x^2 + (2x + 4)^2 - 8x - 6(2x + 4) - 20 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 + 16x + 16 - 8x - 12x - 24 - 20 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x^2 - 4x - 28 = 0 \quad \text{(II)}$$

Resolvendo a equação (II):

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-28) = 16 + 560 = 576$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{576}}{2 \cdot 5} = \frac{4 \pm 24}{10} \begin{matrix} \nearrow & x = \frac{14}{5} \\ & \text{ou} \\ \searrow & x = -2 \end{matrix}$$

Substituindo na equação da reta:

$$\begin{cases} x = \frac{14}{5} \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{14}{5} + 4 = \frac{28}{5} + 4 = \frac{48}{5} \\ x = -2 \Rightarrow y = 2 \cdot (-2) + 4 = 0 \end{cases}$$

Logo, os pontos de interseção são $\left(\frac{14}{5}, \frac{48}{5}\right)$ e $(-2, 0)$.

Distância do centro da circunferência a uma reta

Para calcular a distância de uma reta de equação $r: ax + by + c = 0$ ao centro $C(x_c, y_c)$ de uma circunferência, devemos utilizar a fórmula da distância de ponto à reta que vimos no capítulo anterior:

$$d_{C,r} = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Posições relativas entre reta e circunferência

Podemos analisar a posição relativa entre uma reta e uma circunferência utilizando duas abordagens: pelo número de pontos de interseção entre a reta e a circunferência ou pela distância entre o centro da circunferência e a reta.

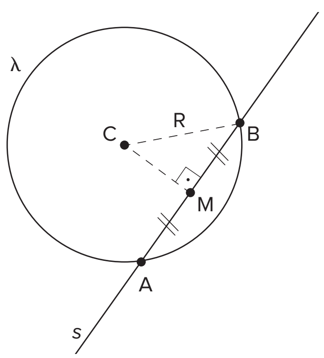
O número de interseções é obtido a partir da resolução do sistema formado pela equação da reta e da circunferência. Como visto anteriormente, resolver esse sistema leva a uma equação do 2º grau, que, dependendo do valor do seu discriminante (Δ), pode ter duas, uma ou nenhuma solução.

A distância entre o centro da circunferência e a reta pode ser calculada pela fórmula da distância entre ponto e reta, como já citado.

São três as posições relativas entre uma circunferência λ de centro $C(x_C, y_C)$ e raio R e a reta *s* de equação $ax + by + c = 0$:

1. **Secantes**

A reta *s* é secante a λ se a interseção entre elas for formada por dois pontos distintos: $s \cap \lambda = \{A, B\}$, com $A \neq B$.



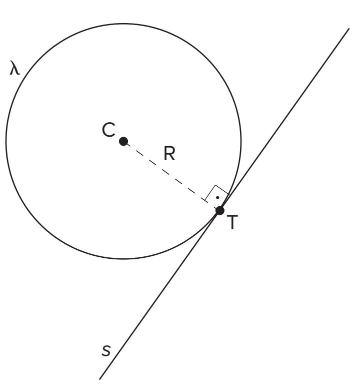
O número de interseções é 2, portanto, $\Delta > 0$.

A distância entre o centro da circunferência e a reta é menor que o raio:

$$d_{C,s} < R \Rightarrow \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} < R$$

2. **Tangentes**

A reta *s* é tangente a λ se a interseção entre elas for formada por apenas um ponto: $s \cap \lambda = \{T\}$.



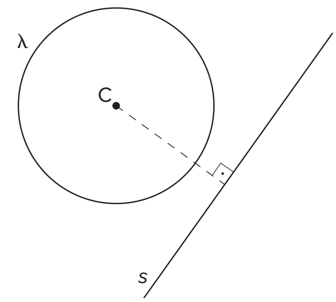
O número de interseções é 1, portanto, $\Delta = 0$.

A distância entre o centro da circunferência e a reta é igual ao raio:

$$d_{C,s} = R \Rightarrow \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = R$$

3. **Externa**

A reta *s* é externa a λ se não existir interseção entre elas: $s \cap \lambda = \varnothing$.



O número de interseções é zero, portanto, $\Delta < 0$.

A distância entre o centro da circunferência e a reta é maior do que o raio:

$$d_{C,s} > R \Rightarrow \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} > R$$

Exercícios resolvidos

13. Determine a posição relativa entre a circunferência $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ e as retas:

a) $s: 4x + 3y - 16 = 0$

b) $t: 4x + 3y - 20 = 0$

c) $u: 4x + 3y - 24 = 0$

Resolução:

O centro e o raio da circunferência são, respectivamente, iguais a C(–2, 1) e R = 5. Assim:

a) $d_{C,s} = \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 - 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-8 + 3 - 16|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-21|}{\sqrt{25}} = $

$= \frac{21}{5} < 5$, logo, *s* é secante à circunferência.

b) $d_{C,t} = \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-8 + 3 - 20|}{\sqrt{9 + 16}} =$

$= \frac{|-25|}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5$, logo, *t* é tangente à circunferência.

c) $d_{C,u} = \frac{|4 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-8 + 3 - 24|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-29|}{\sqrt{25}} =$

$= \frac{29}{5} > 5$, logo, *u* é exterior à circunferência.

14. Determine a equação da reta tangente à $\lambda: x^2 + y^2 = 25$ no ponto P(3, 4).

Resolução:

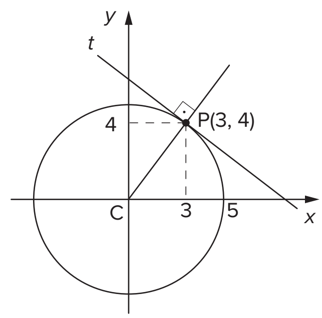
O centro da circunferência é C(0, 0). O ponto P pertence a λ, pois $3^2 + 4^2 = 25$.

Portanto, a reta *t* é perpendicular a $\overline{CP}$ no ponto P. Assim:

$$m_{CP} = \frac{y_P - y_C}{x_P - x_C} = \frac{4 - 0}{3 - 0} = \frac{4}{3}$$

$$m_t \cdot m_{CP} = -1 \Rightarrow m_t \cdot \frac{4}{3} = -1 \Rightarrow m_t = -\frac{3}{4}$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 4y - 16 = -3x + 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t\text{: } 3x + 4y - 25 = 0$$



15. Escreva a equação geral da circunferência de centro C(1, 4) tangente à reta r: $x - 2y + 2 = 0$.

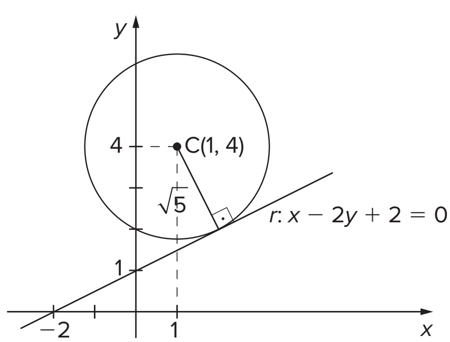
Resolução:

Como r é tangente à circunferência, o raio é dado por:

$$R = d_{C,r} \Rightarrow R = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 - 8 + 2|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

A equação da circunferência é dada por:

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 - 5 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 8y + 12 = 0$$



16. Determine as equações das retas que passam pela origem e são tangentes à circunferência de equação geral $x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0$.

Resolução:

$$x^2 + y^2 - 12x + 32 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot 6 \cdot x + 6^2 + y^2 = -32 + 6^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x - 6)^2 + (y - 0)^2 = 4$$

A circunferência tem centro C(6, 0) e raio R = 2.
Uma reta r que passa pela origem tem equação na forma $y = mx$ ou $mx - y = 0$.
Aplicando a condição de tangência:

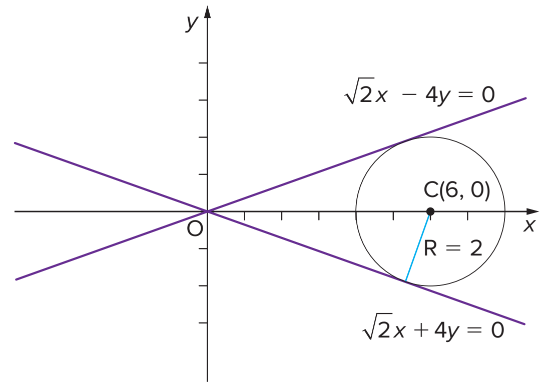
$$d_{C,r} = R \Rightarrow \frac{|m \cdot 6 - 0|}{\sqrt{m^2 + 1^2}} = 2 \Rightarrow |6m| = 2\sqrt{m^2 + 1}$$

Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado, temos:

$$36m^2 = 4(m^2 + 1) \Rightarrow 36m^2 = 4m^2 + 4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 32m^2 = 4 \Rightarrow m^2 = \frac{2}{16} \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Assim, as equações das retas são:

$$y = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}x \Rightarrow 4y = \pm\sqrt{2}x \begin{array}{l} \nearrow \sqrt{2}x - 4y = 0 \\ \searrow \sqrt{2}x + 4y = 0 \end{array}$$



17. Determine as equações gerais das retas que passam por P(0, 4) e são tangentes à circunferência λ de equação $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

Resolução:

A circunferência tem centro C(6, 1) e raio R = 3.
As retas que passam por P(0, 4) têm equação da forma: $y - 4 = m(x - 0) \Rightarrow mx - y + 4 = 0$.
Aplicando a condição de tangência:

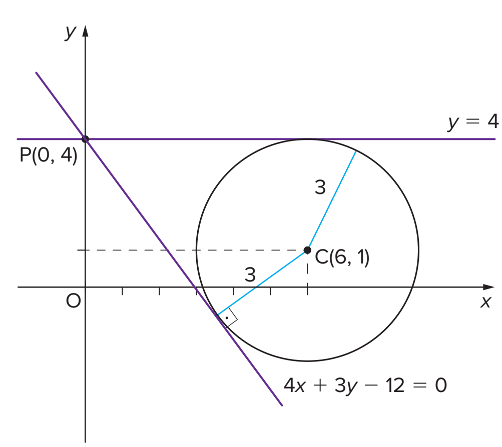
$$d_{C,r} = R \Rightarrow \frac{|m \cdot 6 - 1 \cdot 1 + 4|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{|6m + 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 3 \Rightarrow |6m + 3| = 3\sqrt{m^2 + 1}$$

Elevando ao quadrado:

$$36m^2 + 36m + 9 = 9m^2 + 9 \Rightarrow 27m^2 + 36m = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9m(3m + 4) = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ ou } m = -\frac{4}{3}$$

As equações das retas são dadas por:

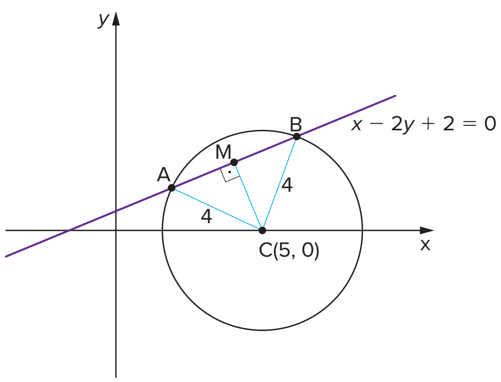
$$\begin{cases} r_1\text{: } y - 4 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 4 \\ r_2\text{: } y - 4 = -\frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow 4x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$$



18. Determine a medida da corda que a reta $x - 2y + 2 = 0$ determina na circunferência λ: $(x - 5)^2 + y^2 = 16$.

Resolução:

λ: $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ é uma circunferência de centro C(5, 0) e raio R = 4.



Sejam A e B os pontos de interseção que a reta r: $x - 2y + 2 = 0$ determina na circunferência.
Como $\overline{AC} = \overline{BC} = R$, o triângulo ABC é isósceles e sua altura $\overline{CM}$ divide a base $\overline{AB}$ ao meio. Além disso:

$$CM = d_{C,r} = \frac{|1 \cdot 5 - 2 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

No triângulo AMC, temos:

$$AM^2 + CM^2 = AC^2 \Rightarrow AM^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AM^2 = 16 - \frac{49}{5} = \frac{31}{5} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{155}}{5}$$

Logo: $AB = 2 \cdot AM = \dfrac{2\sqrt{155}}{5}$

Saiba mais

Uma vez conhecida a distância d entre o centro de uma circunferência de raio r e uma reta secante s, o comprimento da corda $\overline{AB}$ determinada pela reta secante no interior da circunferência pode ser obtido aplicando-se o teorema de Pitágoras da seguinte maneira:

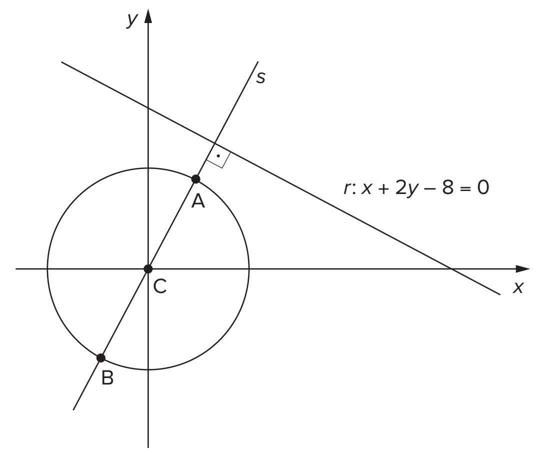
$$\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + d^2 = r^2 \Rightarrow \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = r^2 - d^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{2} = \sqrt{r^2 - d^2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

19. Dadas a circunferência λ: $x^2 + y^2 = 5$ e a reta r: $x + 2y - 8 = 0$, encontre os pontos da circunferência de maior e menor aproximação em relação à reta r.

Resolução:

Os pontos pedidos são as interseções da circunferência com a reta s, que é perpendicular à reta r e passa pelo centro da circunferência:



A circunferência λ: $x^2 + y^2 = 5$ tem centro C(0, 0) e raio $R = \sqrt{5}$. Então, temos:

1. Coeficiente angular de r:

$$x + 2y - 8 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4 \Rightarrow m_r = -\frac{1}{2}$$

2. Coeficiente angular de $s \perp r$: $m_s = -\dfrac{1}{m_r} = 2$

3. Equação de s: $y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$

Interseção entre s e λ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \text{(I)} \\ y = 2x & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (II) em (I):

$$x^2 + (2x)^2 = 5 \Rightarrow x^2 + 4x^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Substituindo em (II): $\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 2 \cdot (-1) = -2 \end{cases}$

Assim, A(1, 2) é o ponto de maior aproximação, e B(–1, –2), o de menor aproximação.

Duas circunferências

Pontos de interseção entre duas circunferências

Na Geometria Analítica, o problema geral de encontrar a interseção de duas curvas pode ser solucionado resolvendo-se o sistema formado pelas duas equações dessas curvas (quando elas possuírem equações analíticas).

Assim, dadas duas circunferências λ_1: $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ e λ_2: $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$, para encontrar os possíveis pontos de interseção entre elas, devemos resolver o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Uma das maneiras de resolvê-lo consiste em subtrair uma equação da outra. Assim, os termos quadráticos são eliminados, restando uma equação linear em x e y. Isolando uma das duas variáveis e a substituindo em uma das equações das circunferências, obtém-se uma equação do 2º grau cujas raízes fornecerão as abscissas (ou ordenadas) dos pontos de interseção. Dependendo do valor do discriminante Δ da equação, podemos ter duas interseções ($\Delta > 0$), uma interseção ($\Delta = 0$) ou nenhuma interseção ($\Delta < 0$).

Assim:

$$\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} - \\ \hline (A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0 \end{array}$$

Se a equação $(A_1 - A_2)x + (B_1 - B_2)y + (C_1 - C_2) = 0$ for equivalente a uma reta, ela representará a reta que contém todos os pontos equipotentes em relação às duas circunferências, incluindo as possíveis interseções. Essa reta é chamada **eixo radical**.

Exercício resolvido

20. Considere as circunferências λ_1: $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$, de centro (3, 0) e raio 5, e λ_2: $x^2 + y^2 - 22x - 8y + 112 = 0$, de centro (11, 4) e raio 5. Encontre os pontos de interseção das duas circunferências.

Resolução:

Montando o sistema, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 - 22x - 8y + 112 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo (I) – (II), temos:

$$16x + 8y - 128 = 0 \Rightarrow y = -2x + 16$$

Substituindo em (I):

$$x^2 + (-2x + 16)^2 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 64x + 256 - 6x - 16 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$$

Resolvendo a equação, obtemos $x = 6$ ou $x = 8$. Assim:

$$\begin{cases} x = 6 \Rightarrow y = -2 \cdot 6 + 16 = 4 \\ x = 8 \Rightarrow y = -2 \cdot 8 + 16 = 0 \end{cases}$$

Portanto, os pontos de interseção entre as circunferências são (6, 4) e (8, 0).

Posições relativas entre duas circunferências

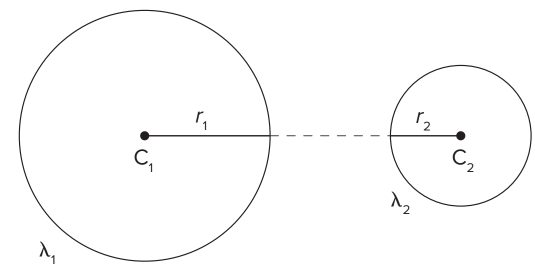
Dadas duas circunferências λ_1 e λ_2 de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2, devemos considerar seis posições relativas entre elas:

I. disjuntas exteriormente;
II. tangentes exteriormente;
III. secantes;
IV. tangentes interiormente;
V. disjuntas interiormente;
VI. concêntricas.

A posição relativa entre as circunferências λ_1 e λ_2 é determinada comparando-se a distância entre seus centros $d(C_1, C_2)$ com a diferença $|r_1 - r_2|$ ou a soma $r_1 + r_2$ dos seus raios, como veremos a seguir.

Disjuntas exteriormente (exteriores)

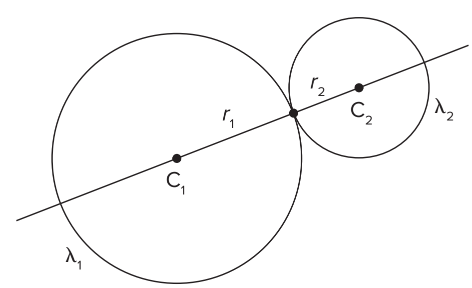
São circunferências que não possuem pontos em comum e nenhuma delas está parcial ou totalmente dentro da outra. Isso ocorre quando a distância entre os centros é maior que a soma dos raios.



$$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$$

Tangentes exteriormente

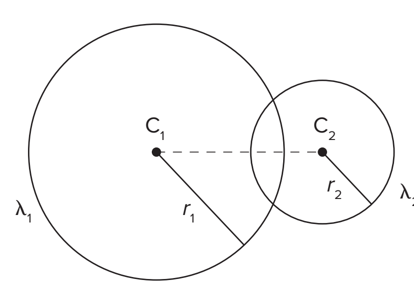
São circunferências que possuem um ponto em comum e uma não é interna à outra. Observe que a reta que passa pelos dois centros também passa pelo ponto de tangência. Esse caso ocorre quando a distância entre os centros equivale à soma dos raios.



$$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$$

Secantes

São circunferências que possuem dois pontos de interseção. Isso ocorre quando a distância entre os centros é menor que a soma dos raios e maior que o módulo da diferença entre eles.

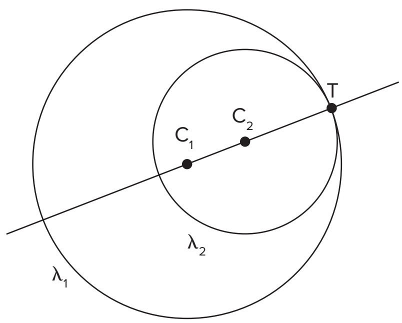


$$|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$$

FRENTE 3

Tangentes interiormente

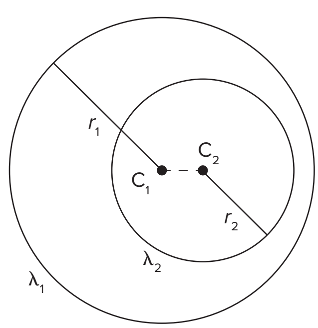
São circunferências que têm apenas um ponto em comum e uma é interna à outra. Observe que a reta que passa pelos dois centros também passa pelo ponto de tangência. Esse caso ocorre quando a distância entre os centros equivale ao módulo da diferença entre os raios.



$d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$

Disjuntas interiormente

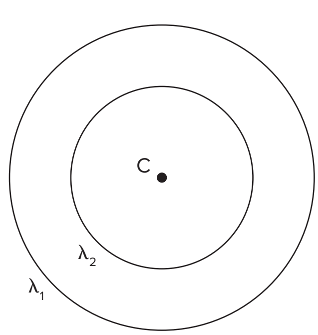
Uma circunferência é interior à outra quando seu centro é interior a ela e ambas não possuem ponto de interseção. Esse caso ocorre quando a distância entre os centros é menor que o módulo da diferença entre os raios.



$0 \leqslant d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$

Concêntricas

São circunferências cujos centros são coincidentes. Isso ocorre quando elas possuem o mesmo centro, ou seja, quando $C_1 = C_2$. Este é um caso particular das circunferências disjuntas interiormente.



$d(C_1, C_2) = 0$

Exercícios resolvidos

21. Determine a posição relativa entre as circunferências:

a) $\lambda_1: x^2 + y^2 = 9$ e $\lambda_2: (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 1$

b) $\lambda_1: x^2 + y^2 = 9$ e $\lambda_2: (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 49$

c) $\lambda_1: x^2 + y^2 = 9$ e $\lambda_2: (x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 64$

d) $\lambda_1: x^2 + y^2 = 100$ e $\lambda_2: (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

Resolução:

a) $\begin{cases} C_1(0, 0);\ r_1 = 3;\ C_2(6, 8);\ r_2 = 1 \\ d(C_1, C_2) = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = 10 \\ r_1 + r_2 = 3 + 1 = 4 \end{cases}$

Como $d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$, as circunferências são exteriores.

b) $\begin{cases} C_1(0, 0);\ r_1 = 3;\ C_2(6, 8);\ r_2 = 7 \\ d(C_1, C_2) = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = 10 \\ r_1 + r_2 = 3 + 7 = 10 \end{cases}$

Como $d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$, as circunferências são tangentes exteriormente.

c) $\begin{cases} C_1(0, 0);\ r_1 = 3;\ C_2(6, 8);\ r_2 = 8 \\ d(C_1, C_2) = \sqrt{(6-0)^2 + (8-0)^2} = 10 \\ r_1 + r_2 = 3 + 8 = 11 \\ |r_1 - r_2| = |3 - 8| = 5 \end{cases}$

Como $|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$, as circunferências são secantes.

d) $\begin{cases} C_1(0, 0);\ r_1 = 10;\ C_2(3, 4);\ r_2 = 5 \\ d(C_1, C_2) = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5 \\ |r_1 - r_2| = |10 - 5| = 5 \end{cases}$

Como $d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$, λ_2 é tangente interior a λ_1.

22. Duas circunferências de raio 10, em unidades de comprimento, tangenciam a circunferência $x^2 + y^2 = 36$ no ponto $P(3, 3\sqrt{3})$. Determine os centros dessas circunferências.

Resolução:

A circunferência $x^2 + y^2 = 36$ tem centro em $O(0, 0)$ e raio $r = 6$.

As circunferências tangentes a $x^2 + y^2 = 36$ têm centros sobre a reta que passa por $O(0, 0)$ e $P(3, 3\sqrt{3})$.

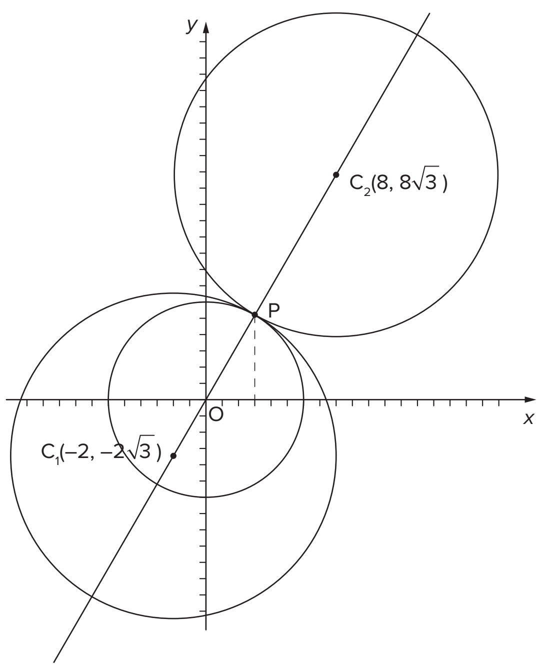
Essa reta tem equação $y - 0 = \dfrac{3\sqrt{3} - 0}{3 - 0}(x - 0) \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \sqrt{3}x$.

Assim, os centros das circunferências tangentes a $x^2 + y^2 = 36$ têm a forma $(a, \sqrt{3}a)$.

Como a distância dos centros das circunferências procuradas ao ponto de tangência P é igual a 10, chamando de C_1 um desses centros, temos:

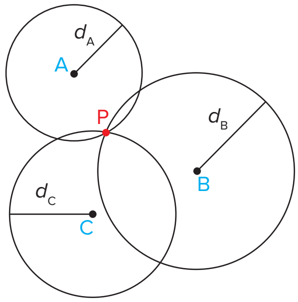
$$d(C_1, P) = 10 \Rightarrow \sqrt{(a-3)^2 + \left(\sqrt{3}a - 3\sqrt{3}\right)^2} = 10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - 6a + 9 + 3a^2 - 18a + 27 = 100 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4a^2 - 24a - 64 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^2 - 6a - 16 = 0 \begin{array}{l} \nearrow a = -2 \\ \quad \text{ou} \\ \searrow a = 8 \end{array}$$

Os centros das circunferências são os pontos $C_1\left(-2, -2\sqrt{3}\right)$ (tangente interior) e $C_2\left(8, 8\sqrt{3}\right)$ (tangente exterior).



Estabelecendo relações

As equações de circunferências no plano cartesiano podem ser usadas para localizar um ponto no plano, dadas as distâncias desse ponto a três pontos distintos.
Por exemplo, suponha que o ponto P, cujas coordenadas desejamos determinar, dista d_A, d_B e d_C unidades de comprimento dos pontos A, B, C, respectivamente, cujas coordenadas já conhecemos. O ponto P está na interseção das circunferências com centros nesses pontos e raios iguais às distâncias dadas.



Algebricamente, se as coordenadas de A, B e C são, respectivamente, $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$, as coordenadas de $P(x_P, y_P)$ satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left(x_P - x_A\right)^2 + \left(y_P - y_A\right)^2 = d_A{}^2 \\ \left(x_P - x_B\right)^2 + \left(y_P - y_B\right)^2 = d_B{}^2 \\ \left(x_P - x_C\right)^2 + \left(y_P - y_C\right)^2 = d_C{}^2 \end{cases}$$

Um princípio análogo a esse, mas em 3 dimensões, é utilizado na localização por GPS (sistema de posicionamento global). Um aparelho GPS envia sinais a 3 satélites e obtém o atraso de resposta desses satélites. Com esses valores, ele consegue obter as distâncias do aparelho até cada um dos satélites. Com esses dados, o aparelho de GPS consegue identificar 3 superfícies esféricas, cada uma centrada em um dos satélites, e sabe que ele está localizado em um ponto comum dessas 3 superfícies.

Revisando

1. Determine a equação reduzida das circunferências:
   a) de raio 3 e centro (3, 4).
   b) de raio 1 e centro (–1, 0).

2. Determine o centro, o raio, os pontos de maior e menor abscissa e os pontos de maior e menor ordenada das circunferências a seguir:
   a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$
   b) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$

3. Qual é o conjunto de pontos que cada uma das equações a seguir representa?

a) $x^2 + y^2 - 10x + 12y + 36 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 25 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x + 2 = 0$

4. Uma circunferência representada num sistema de coordenadas cartesianas xOy tem centro no ponto $(-2, 0)$ e um de seus pontos é $\left(-5, \frac{7}{2}\right)$. A equação dessa circunferência é:

a) $(x + 2)^2 + y^2 = \frac{85}{4}$

b) $(x - 2)^2 + y^2 = \frac{85}{4}$

c) $(x + 2)^2 + y^2 = \frac{85}{2}$

d) $(x - 2)^2 + y^2 = \frac{85}{2}$

e) $x^2 + (y + 2)^2 = \frac{4}{85}$

5. Determine as interseções entre a circunferência λ: $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 16$ e os eixos do plano cartesiano.

6. Determine a equação reduzida da circunferência que passa pelos pontos A(0, 8) e B(0, 18), é tangente ao eixo x e tem centro no segundo quadrante.

7. **UEM-PR 2015** Considerando uma reta s e uma circunferência C de centro Q e raio r, assinale o que for correto.

01 Se existir $P \in s$ tal que a distância de P a Q é r, então s é tangente a C.

02 Se s é secante a C, então existem dois pontos P_1 e P_2 pertencentes a s que são equidistantes de Q.

04 Se C: $x^2 + y^2 = 1$, então toda reta secante a C paralela ao eixo x tem equação $y = b$, onde $b \in (-1, 1)$.

08 Se C é dada por $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 9$ e s é a reta que passa por (2, 0) e é paralela ao eixo y, então s é tangente a C.

16 A circunferência C: $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 9$ tem centro sobre a reta s: $y = 3x + 7$ e seu raio é igual ao coeficiente angular de s.

Soma:

8. **FGV-SP 2014** No plano cartesiano, uma circunferência tem centro C(5, 3) e tangencia a reta de equação $3x + 4y - 12 = 0$.

A equação dessa circunferência é:

a) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 36 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 49 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 16 = 0$
e) $x^2 + y^2 + 10x + 6y + 9 = 0$

9. **FGV-SP 2016** No plano cartesiano, a equação da reta tangente ao gráfico de $x^2 + y^2 = 25$ pelo ponto (3, 4) é:

a) $4x + 3y - 25 = 0$
b) $4x + 3y - 5 = 0$
c) $4x + 5y - 9 = 0$
d) $3x + 4y - 25 = 0$
e) $3x + 4y - 5 = 0$

10. **ITA-SP 2015** Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas r: $3x + 4y - 4 = 0$ e s: $3x + 4y - 19 = 0$. A área do círculo determinado por C é igual a:

a) $\frac{5\pi}{7}$ **b)** $\frac{4\pi}{5}$ **c)** $\frac{3\pi}{2}$ **d)** $\frac{8\pi}{3}$ **e)** $\frac{9\pi}{4}$

11. Determine as equações das retas que passam por P(0, 4) e são tangentes à circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 9$.

12. Sejam as circunferências:

$$\lambda_1: x^2 + y^2 = 9 \text{ e } \lambda_2 = x^2 + y^2 - 8x - p = 0$$

Determine o valor de p para que λ_1 e λ_2 sejam:

a) tangentes exteriormente.
b) tangentes interiormente.
c) secantes.

FRENTE 3

Exercícios propostos

1. **Uece 2017** No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a distância do centro da circunferência $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ à origem é:

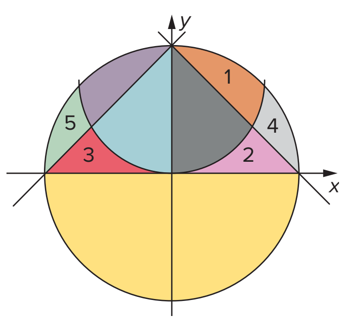
Dado: u. c. = unidade de comprimento.

a) 3 u.c. b) 6 u.c. c) 5 u.c. d) 4 u.c.

2. **FGV-SP 2021** Uma das retas que passa pela origem e é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ tem o coeficiente angular igual a:

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{5}$

3. **UFMS 2019** Na fazenda Boa Esperança, o plantio de *sorgo* será feito pela região que satisfaz às seguintes condições: S: $\begin{cases} x^2 - y^2 \leqslant 25 \\ y \leqslant x^2 \\ y \geqslant -x + 5 \end{cases}$.



A região que representa adequadamente o plantio de *sorgo*, na figura, é designada pelo número:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

4. **Unicamp-SP 2016** Considere o círculo de equação cartesiana $x^2 + y^2 = ax + by$, onde a e b são números reais não nulos. O número de pontos em que esse círculo intercepta os eixos coordenados é igual a:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5. **Uece 2016** No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, se a circunferência $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 = 0$ possui n interseções com os eixos coordenados, então, o valor de n é:

a) 2 b) 1 c) 3 d) 4

6. **UFJF/Pism-MG 2021** Considere a circunferência de equação cartesiana

$$C: x^2 + y^2 = 4$$

Determine equações cartesianas para as retas que passam pelo ponto P(4, 0) e são tangentes à circunferência C, acima.

a) $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - 4)$ e $y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 4)$

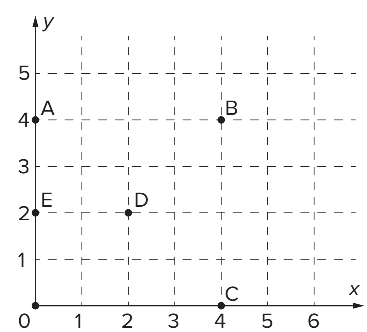
b) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1)$ e $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - 1)$

c) $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}(x - 5)$ e $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 5)$

d) $y = -x + 4$ e $y = x - 4$

e) $y = -x$ e $y = x$

7. **Enem 2018** Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando “tiros”, seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: A(0, 4), B(4, 4), C(4, 0), D(2, 2) e E(0, 2).



Passando pelo ponto A, qual equação forneceria a maior pontuação?

a) $x = 0$

b) $y = 0$

c) $x^2 + y^2 = 16$

d) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

e) $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 8$

8. **USF-SP 2018** A circunferência λ tem centro no ponto $C(-2, y)$ e intersecta o eixo das ordenadas nos pontos A(0, 1) e B(0, −1). De acordo com esses dados, pode-se afirmar que uma equação para representar λ é:

a) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + y + 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$

9. **UFJF/Pism-MG 2021** Considere duas circunferências concêntricas, C e D, centradas na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. Além disso, o raio de C é r_C e o raio de D é r_D, satisfazendo $r_C > r_D$. As áreas de C e D estão relacionadas da seguinte forma: para qualquer alteração percentual comum de r_C e r_D, a área da circunferência maior se mantém 70% maior que a área da menor. Se a equação da circunferência

menor é $x^2 + y^2 = \left(\frac{100}{98}\right)^2$, qual é a equação que representa C depois de uma redução de 2% em r_D?

a) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 0{,}7$
b) $x^2 + y^2 = 1{,}7$
c) $3x^2 + 3y^2 = 2{,}7$
d) $0{,}7x^2 + 0{,}7y^2 = 3{,}7$
e) $0{,}3x^2 + 0{,}3y^2 = 4{,}7$

10. Imed-RS 2018 Atualmente, por questão de proteção, certas edificações como presídios, instalações militares ou governamentais, casas de entretenimento e residências têm necessidade de bloquear o sinal de telefones celulares. Tal expediente causava transtornos até algum tempo atrás, pois exigia que fossem desativadas as torres de retransmissão de sinal, o que deixava um bocado de gente sem comunicação. Atualmente, isso pode ser feito de modo mais pontual, com a utilização de aparelhos capazes de restringir o raio de bloqueio a distâncias mais curtas. Em uma determinada região, desejava-se instalar um desses aparelhos em certa construção. No entanto, havia um trecho de estrada passando próximo a essa construção. Um mapa da região foi plotado num plano cartesiano, no qual a estrada corresponde a uma reta de equação $x + y = 5$ e a região em torno da edificação a partir da qual se estabeleceu o bloqueio corresponde a uma circunferência de equação $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 9$. O centro da circunferência correspondende à localização dessa edificação. Sabendo que cada unidade de distância no plano cartesiano corresponde a 10 km, dentre as afirmações a seguir:

I. A circunferência se localiza no 1º quadrante do sistema de coordenadas cartesianas.
II. Um aparelho de telefone celular localizado no ponto B(3, 4) do sistema de coordenadas cartesianas está sob a ação do bloqueio, já que ele é interior à circunferência.
III. A menor distância da estrada até a edificação é de 30 km.

É(são) verdadeira(s) apenas:

a) I.
b) III.
c) I e II.
d) II e III.
e) I, II e III.

11. Uece 2016 No plano cartesiano usual, a equação da circunferência que contém os pontos (–4, 0), (4, 0) e (0, 8) é $x^2 + y^2 + my + n = 0$. O valor da soma $m^2 + n$ é:

a) 30 **b)** 10 **c)** 40 **d)** 20

12. UPE 2018 Qual é a razão entre a medida da área e do comprimento da circunferência que, no plano cartesiano, passa pelos pontos A(–4, 1), B(–1, –2), e C(2, 1)?

a) 0,5 **b)** 1 **c)** 1,5 **d)** 2 **e)** 2,5

13. UEM-PR 2016 Considerando P(–2, 1) e Q(4, 5) pontos das extremidades de um dos diâmetros da circunferência C, onde P, Q ∈ C, assinale o que for correto.

01 O ponto (–1, 6) pertence à circunferência C.
02 O centro da circunferência C é (1, 3).
04 O raio da circunferência C é $2\sqrt{13}$.
08 A corda determinada pelos pontos (–2, 5) e (3, 0) é um diâmetro de C.
16 A equação da circunferência C é dada por $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$.

Soma:

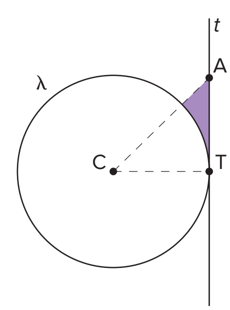
14. Acafe-SC 2017 Os pontos A(1, 1), B(1, 9) e C(7, 1) são os vértices do triângulo inscrito numa circunferência de equação $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$. O valor de $m + 2n + 3p$ é igual a:

a) 29 **b)** 20 **c)** 65 **d)** 28

15. Ulbra-RS 2016 As retas $2x - y - 4 = 0$ e $2x + 3y - 12 = 0$ interceptam-se no centro de uma circunferência de raio igual a 3. Então podemos dizer que:

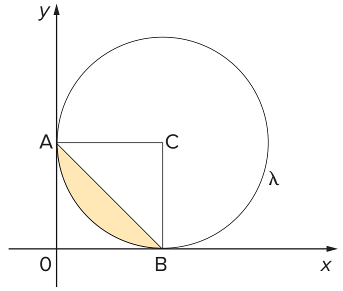
a) a circunferência possui centro no ponto (2, 3).
b) a circunferência corta o eixo *y* em dois pontos.
c) a circunferência corta o eixo *x* em um ponto.
d) a circunferência é tangente ao eixo *x*.
e) a circunferência é tangente ao eixo *y*.

16. Unioeste-PR 2021 Na figura, a circunferência λ de equação $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$, tem centro no ponto C. Dado o ponto A(5, 3), pertencente à reta *t*, que é tangente à circunferência λ no ponto T, a área hachurada representada na figura é igual a:



a) $2 - \frac{\pi}{2}$.
b) $4 - \frac{\pi}{2}$.
c) $\frac{\pi}{2}$.
d) $2 - \frac{\pi}{4}$.
e) $4 - \frac{\pi}{4}$.

17. PUC-SP 2016 Na figura tem-se a representação de λ, circunferência de centro C e tangente aos eixos coordenados nos pontos A e B.



Se a equação de λ é $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0$, então a área da região hachurada, em unidades de superfície, é:

a) $8 \cdot (\pi - 2)$
b) $8 \cdot (\pi - 4)$
c) $4 \cdot (\pi - 2)$
d) $4 \cdot (\pi - 4)$

FRENTE 3

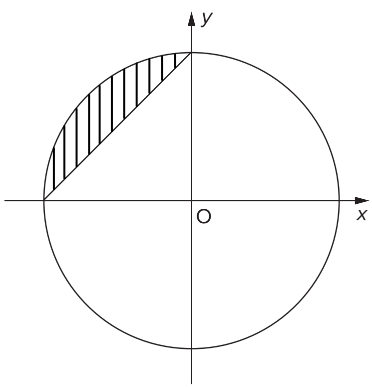
18. UEPG-PR 2017 Dada a equação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$. Considerando que p é o maior valor possível de x e q o maior valor possível de y, assinale o que for correto.

01 $p - 3q < 0$.
02 $2p - 4q = 2$.
04 $p + q$ é um número primo.
08 $2p + q > 0$.

Soma:

19. Fuvest-SP 2021 A região hachurada do plano cartesiano xOy contida no círculo de centro na origem O e raio 1, mostrada na figura, pode ser descrita por:

Note e adote: O círculo de centro O e raio 1 é o conjunto de todos os pontos do plano que estão a uma distância de O menor do que ou igual a 1.



a) $\{(x, y); x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ e } y - x \leqslant 1\}$.
b) $\{(x, y); x^2 + y^2 \geqslant 1 \text{ e } y + x \geqslant 1\}$.
c) $\{(x, y); x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ e } y - x \geqslant 1\}$.
d) $\{(x, y); x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ e } y + x \geqslant 1\}$.
e) $\{(x, y); x^2 + y^2 \geqslant 1 \text{ e } y + x \leqslant 1\}$.

20. UEM/PAS-PR 2019 Uma partícula gira sobre um plano cartesiano descrevendo a equação geral de uma circunferência dada por $x^2 + y^2 + 16x + 2y + 20 = 0$. Com base nessa informação, assinale o que for **correto**.

01 A circunferência descrita possui centro no quarto quadrante e raio 2.
02 Se no ponto $(-2, 2)$ a partícula seguir a trajetória dada pela reta tangente à circunferência no ponto, então essa partícula se deslocará sobre a reta $2x + y + 2 = 0$.
04 Sabendo-se que essa circunferência foi obtida por meio da seção de uma esfera por um plano que está a 4 unidades de distância do centro da esfera, então o raio dessa esfera é $\sqrt{61}$.
08 A equação reduzida dessa circunferência é dada por $(x - 8)^2 + (y - 1)^2 = 4$.
16 Se no ponto $\left(-8 - 3\sqrt{5}, -1\right)$ a partícula seguir a trajetória dada pela reta tangente à circunferência no ponto, então sua trajetória será sobre uma reta paralela ao eixo x.

Soma:

21. Unicamp-SP 2017 Considere a circunferência de equação cartesiana $x^2 + y^2 = x - y$. Qual das equações a seguir representa uma reta que divide essa circunferência em duas partes iguais?

a) $x + y = -1$
b) $x - y = -1$
c) $x - y = 1$
d) $x + y = 1$

22. UFJF-MG 2018 Determine a distância entre o centro da circunferência $x^2 - 2x + y^2 + 6y - 6 = 0$ e a reta $3y = -4x - 1$.

a) $\frac{12}{5}$
b) $\frac{4}{5}$
c) 5
d) 1
e) $\frac{1}{5}$

23. PUC-PR 2018 Considere os dados a seguir.
Dois corredores A e B partem do ponto P(0, 0) no mesmo instante e com velocidades de módulos constantes. O corredor A segue a trajetória descrita pela equação $4y - 3x = 0$ e o corredor B, a trajetória descrita pela equação $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$. As trajetórias estão no mesmo plano.
Assinale a alternativa que contém as coordenadas do ponto Q distinto de P, onde haverá cruzamento das duas trajetórias.

a) (3, 4)
b) (4, 3)
c) (6, 9)
d) (8, 4)
e) (8, 6)

24. UPF-RS 2016 Considere, num referencial xy, a circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$. A equação que define uma reta tangente a essa circunferência é:

a) $x = 3$
b) $x = -3$
c) $y = 0$
d) $y = 5$
e) $x = 0$

25. Unicamp-SP 2018 No plano cartesiano, sejam C a circunferência de centro na origem e raio $r > 0$ e s a reta de equação $x + 3y = 10$. A reta s intercepta a circunferência C em dois pontos distintos se, e somente se:

a) $r > 2$
b) $r > \sqrt{5}$
c) $r > 3$
d) $r > \sqrt{10}$

26. FGV-SP 2016 No plano cartesiano, a reta de equação $3x + 4y = 17$ tangencia uma circunferência de centro no ponto (1, 1). A equação dessa circunferência é:

a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 4 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$

27. PUC-RS 2016 A circunferência que está centrada na origem do plano cartesiano e que tangencia a reta de equação $y = 2 - x$ possui equação:

a) $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
b) $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$
c) $x^2 + y^2 = 1$
d) $x^2 + y^2 = 2$
e) $x^2 + y^2 = 4$

28. Uece 2018 No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, a equação da reta que contém o ponto P(9, 8) e é tangente à curva representada pela equação $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ é:

a) $3x + 4y - 59 = 0$
b) $3x - 4y + 5 = 0$
c) $4x - 3y - 12 = 0$
d) $4x + 3y - 60 = 0$

29. UFJF/Pism-MG 2020 A circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$ é tangenciada pela reta r no ponto P, que se situa no primeiro quadrante e tem ordenada 3. O ponto M(6, k), que também pertence à reta r, é o centro de uma outra circunferência C que passa pelo ponto P. Determine o raio da circunferência C.

30. Uece 2017 No plano, com o sistema de coordenadas cartesiano usual, as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0$ e que passam pelo ponto (0, 0) são:

a) $3x - 4y = 0$ e $3x + 4y = 0$.
b) $2x - 3y = 0$ e $2x + 3y = 0$.
c) $4x - 3y = 0$ e $4x + 3y = 0$.
d) $3x - 2y = 0$ e $3x + 2y = 0$.

31. Mackenzie-SP 2018 A equação da reta que corta o eixo das ordenadas no ponto P(0, –6) e que tangencia a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ no quarto quadrante é:

a) $y = -2\sqrt{2}x + 6$
b) $y = 2\sqrt{2}x - 6$
c) $y = 2\sqrt{2}x + 6$
d) $y = 4x - 6$
e) $y = -4x + 6$

32. PUC-SP 2017 A circunferência λ: $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$, de centro C, e a reta r: $x + y - 11 = 0$ se interceptam nos pontos P e Q. A área do triângulo PCQ, em unidades de área, é:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9

33. Acafe-SC 2018 A circunferência λ passa pelos pontos A(–1, –1), B(1, 5) e C(3, 1). A reta r: $x + 3y - 6 = 0$ e a circunferência λ são secantes. A área do triângulo cujos vértices são a origem do sistema de coordenadas cartesianas, e os pontos de interseção entre a reta r e a circunferência λ, tem medida igual a:

a) 6 unidades de área.
b) 12 unidades de área.
c) 4 unidades de área.
d) 10 unidades de área.

34. Efomm-RJ 2016 Quanto à posição relativa, podemos classificar as circunferências $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ e $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$ como:

a) secantes.
b) tangentes internas.
c) tangentes externas.
d) externas.
e) internas.

35. UFRGS 2020 A área do quadrilátero formado pelos pontos de interseção da circunferência de equação $(x + 1)^2 + y^2 = 4$ com os eixos coordenados é:

a) $\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{3}$
c) $3\sqrt{3}$
d) $4\sqrt{3}$
e) 12

36. FGV-SP 2020 No plano cartesiano, a reta de equação $3x + 4y = 0$ determina, na circunferência $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$, uma corda cujo comprimento é:

a) $2\sqrt{22}$
b) $2\sqrt{18}$
c) $2\sqrt{20}$
d) $2\sqrt{21}$
e) $2\sqrt{19}$

37. Mackenzie-SP 2018 Os valores de a para os quais as circunferências de equações $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$ e $(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 16$ são tangentes exteriormente são:

a) –2 e 8.
b) 2 e 8.
c) –8 e 2.
d) 0 e 6.
e) –6 e 0.

38. UEG-GO 2016 A circunferência de centro (8, 4) que tangencia externamente a circunferência $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$ possui raio igual a:

a) 16
b) 10
c) 8
d) 6
e) 4

39. FGV-SP 2020 No plano cartesiano, considere a região determinada pelos pontos que satisfazem a relação $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 \leqslant 0$. A distância máxima entre dois de seus pontos é:

a) 4,0
b) 3,7
c) 3,8
d) 3,6
e) 3,9

40. UEM-PR 2019 Assinale o que for **correto**.

01 Toda equação do tipo $x^2 + y^2 - 2a(x + y) = 0$, com $a \in \mathbb{R}$, é de uma circunferência que passa pela origem.

02 Se duas circunferências de centros $(a, 0)$ e $(b, 0)$ se interceptam em exatamente dois pontos, então esses pontos são simétricos em relação ao eixo x.

04 O coeficiente angular da reta dada pela equação $3x + 4y = 6$ é 4.

08 Os pontos de coordenadas (4, 0), (0, 6) e (2, 4) pertencem à mesma reta.

16 As retas de equações $2x + 4y + 3 = 0$ e $y = 3x - 5$ são concorrentes.

Soma:

FRENTE 3

Texto complementar

O eixo radical de duas circunferências

Um problema clássico da Geometria consiste em encontrar o lugar geométrico dos pontos do plano que tenham a mesma potência em relação a duas circunferências dadas.

A seguir, vamos resolvê-lo utilizando como ferramenta a Geometria Analítica. Antes, porém, é importante relembrar alguns conceitos importantes.

Potência de ponto

Seja um ponto P e uma circunferência λ de raio r e centro C distando d de P. A potência de P em relação a λ é definida como sendo o número real:

$$P_\lambda^P = d^2 - r^2$$

Teorema das secantes

Sendo P um ponto externo a λ, r uma reta que passa por P e é secante a λ em A e B, s uma reta que passa por P e é secante a λ em C e D, temos:

$$P_\lambda^P = PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Teorema das tangentes

Sendo P um ponto externo a λ, t uma reta que passa por P e é tangente a λ em T, temos:

$$P_\lambda^P = PT^2$$

Teorema das cordas

Sendo P um ponto interno a λ, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ duas cordas de λ passando por P, temos:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Adotaremos um sistema de coordenadas cartesianas em que $P(x, y)$, $C(x_0, y_0)$ e $d^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Nesse sistema, a potência de P em relação a λ é dada por:

$$P_\lambda^P = d^2 - r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 \quad \text{(I)}$$

Note que, se igualarmos o segundo membro da equação (I) a 0, obteremos uma equação geral de circunferência.

Isso faz sentido, pois os pontos da circunferência têm potência nula em relação a essa mesma circunferência.

A equação (I) também pode ser escrita na forma:

$$P_\lambda^P = x^2 + y^2 + Ax + By + C \quad \text{(II), em que:}$$

$$\begin{cases} A = -2x_0 \\ B = -2y_0 \\ C = x_0^{\,2} + y_0^{\,2} - r^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{A}{2} \\ y_0 = -\dfrac{B}{2} \\ r = \dfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C} \end{cases}$$

Seja λ' outra circunferência, não concêntrica a λ, de centro $C'(x_1, y_1)$ e raio r_1. Como vimos anteriormente, temos:

$$P_{\lambda'}^P = x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' \quad \text{(II), em que:}$$

$$\begin{cases} A' = -2x_1 \\ B' = -2y_1 \\ C' = x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{A'}{2} \\ y_1 = -\dfrac{B'}{2} \\ r_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{A'^2 + B'^2 - 4C'} \end{cases}$$

Buscando o lugar geométrico dos pontos equipotentes em relação às duas circunferências, temos:

$$P_\lambda^P = P_{\lambda'}^P \Rightarrow x^2 + y^2 + Ax + By + C = x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0 \quad \text{(IV)}$$

A equação (IV) representa uma reta r.

Agora, mostraremos que ela é perpendicular à reta que passa pelos dois centros.

O coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CC'}$ é dado por:

$$m_{CC'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-\dfrac{B'}{2} - \left(-\dfrac{B}{2}\right)}{-\dfrac{A'}{2} - \left(-\dfrac{A}{2}\right)} = \frac{B - B'}{A - A'}$$

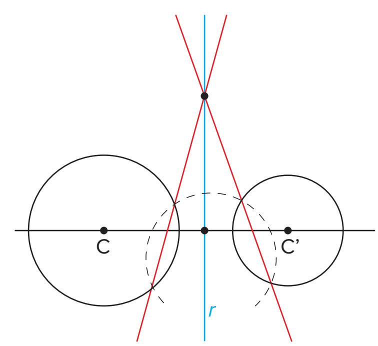
O coeficiente angular da reta r é dado por:

$$(A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0 \Rightarrow$$

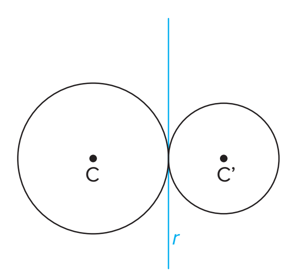
$$\Rightarrow (B - B')y = (A' - A)x + (C' - C) \Rightarrow m_r = \frac{A' - A}{B - B'}$$

$$\text{Assim: } m_r \cdot m_{CC'} = \frac{A' - A}{B - B'} \cdot \frac{B - B'}{A - A'} = -1 \Rightarrow r \perp \overleftrightarrow{CC'}$$

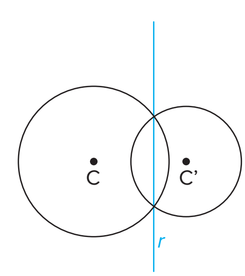
No caso em que $x_0 = x_1$ ou $y_0 = y_1$, as retas são paralelas, cada uma a um dos eixos, e continuam perpendiculares (como se pode verificar).



Eixo radical r de duas circunferências exteriores.



Eixo radical r de duas circunferências tangentes exteriormente.



Eixo radical r de duas circunferências secantes.

Apenas para exemplificar a situação, observe como encontrar a equação do eixo radical das circunferências λ_1 de centro $C_1(6, 4)$ e raio 5 e λ_2 de centro $C_2(-2, 2)$ e raio 3.

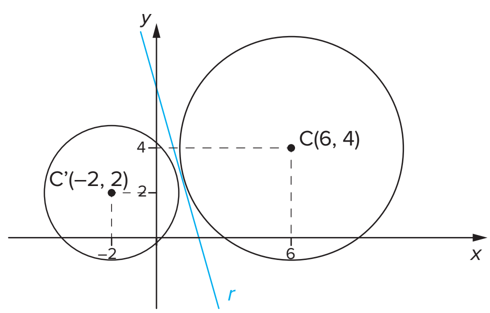
$$\lambda_1: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 - 12x + 36 + y^2 - 8y + 16 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 12x - 8y + 27 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = -12 \\ B = -8 \\ C = 27 \end{cases}$$

$$\lambda_2: (x-(-2))^2 + (y-2)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A' = 4 \\ B' = -4 \\ C' = -1 \end{cases}$$

A equação do eixo radical será:

$$(A - A')x + (B - B')y + (C - C') = 0 \Rightarrow (-12 - 4)x + (-8 - (-4))y + (27 - (-1)) = 0 \Rightarrow -16x - 4y + 28 = 0$$

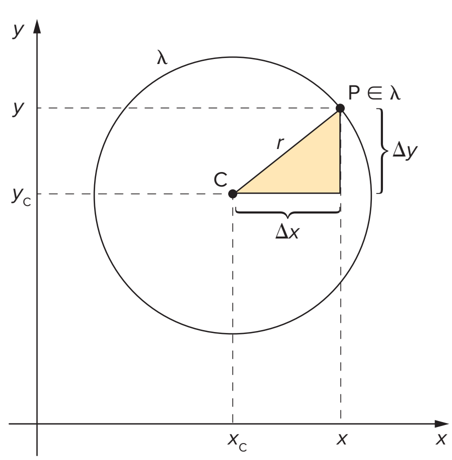
Em uma forma mais simples: $4x + y - 7 = 0$.



Texto elaborado para fins didáticos.

Resumindo

Equação reduzida da circunferência



$$|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2 = r^2$$
$$\Downarrow$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$\begin{cases} \text{Abscissa do centro: } x_C = a \\ \text{Ordenada do centro: } y_C = b \\ \text{Raio: } r = d(P, C) \end{cases}$$

Equação geral da circunferência

Para uma circunferência de raio r e centro (x_0, y_0), temos:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \qquad \begin{cases} A = -2x_0 \\ B = -2y_0 \\ C = x_0^2 + y_0^2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{A}{2} \\ y_0 = -\dfrac{B}{2} \\ r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - C} \end{cases}$$

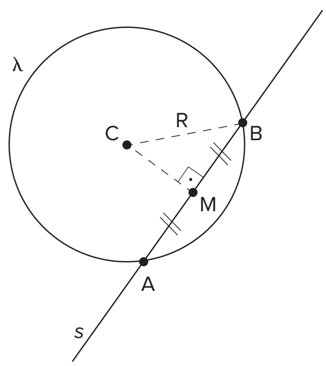
Posições relativas entre uma reta e uma circunferência

Se uma reta s é **secante** a uma circunferência de centro C, então a distância de C a s é menor que o raio da circunferência.

$$d_{C,s} < r$$

O discriminante da equação do 2º grau obtida do sistema formado por suas equações é positivo.

$$s \cap \lambda = \{A, B\}$$

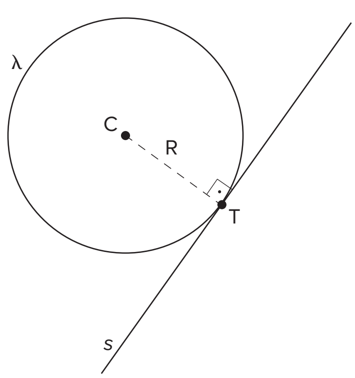


Se uma reta s é **tangente** a uma circunferência de centro C, então a distância de C a s é igual ao raio da circunferência.

$$d_{C,s} < r$$

O discriminante da equação do 2º grau obtida do sistema formado por suas equações é nulo.

$$s \cap \lambda = \{T\}$$

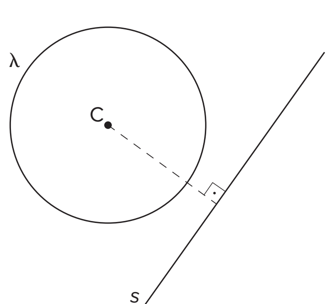


Se uma reta s é **exterior** a uma circunferência de centro C, então a distância de C a s é maior do que o raio da circunferência.

$$d_{C,e} > r$$

O discriminante da equação do 2º grau obtida do sistema formado por suas equações é negativo.

$$s \cap \lambda = \varnothing$$

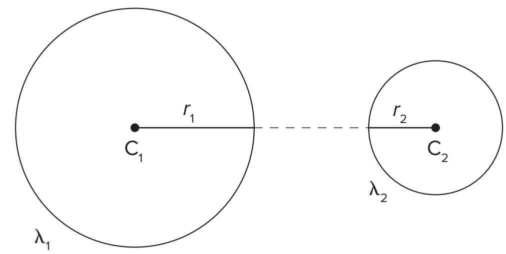


Posições relativas entre duas circunferências

Dadas duas circunferências λ_1 e λ_2 de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2, devemos considerar seis posições relativas entre elas.

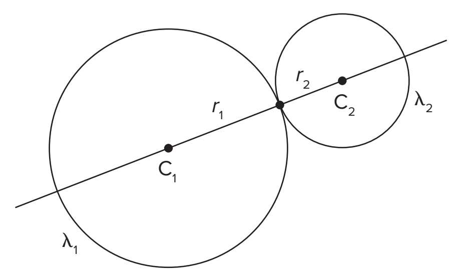
1. Elas são **disjuntas exteriormente** ou **exteriores** quando a distância entre os centros é maior do que a soma dos raios.

$$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2$$



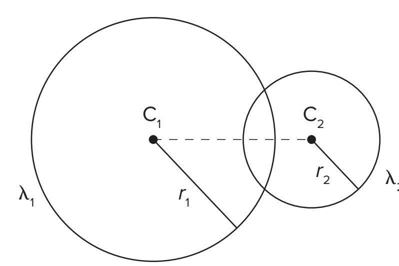
2. Elas são **tangentes exteriormente** quando a distância entre os centros é igual à soma dos raios.

$$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$$



3. Elas são **secantes** quando a distância entre os centros está entre a diferença absoluta e a soma dos raios.

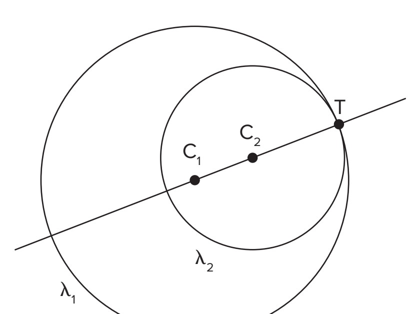
$$|r_1 - r_2| < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$$



A equação da reta que passa pelos pontos de interseção dessas circunferências pode ser obtida pela subtração de suas equações gerais.

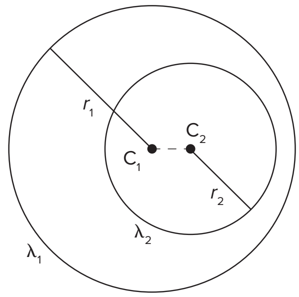
4. Elas são **tangentes interiormente** quando a distância entre os centros é igual ao módulo da diferença dos comprimentos dos raios.

$$d(C_1, C_2) = |r_1 - r_2|$$



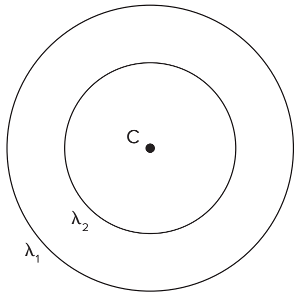
5. Elas são **disjuntas interiormente** ou **interiores** quando a distância entre os centros é menor que a diferença absoluta dos raios.

$$0 \leq d(C_1, C_2) < |r_1 - r_2|$$



6. Elas são **concêntricas** quando têm o mesmo centro.

$$d(C_1, C_2) = 0$$



Quer saber mais?

Site

BBC News Brasil. Onde a roda foi inventada – e por que demoramos tanto para criá-la. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/internacional-41795604. Acesso em: 9 nov. 2021.

Onde surgiu essa importante descoberta que mudou a forma dos seres humanos se deslocarem, além de inúmeras outras aplicações.

Vídeos

ENGENHARIA detalhada. *Invenção da roda*. YouTube, 24 mai. 2021. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=FFvVnnKZNnk. Acesso em: 9 nov. 2021.

Impossível pensar em uma circunferência sem pensar na roda. Conheça um pouco as origens dessa ideia simples e revolucionária.

LESICS. GPS, como funciona? YouTube, 17 mar. 2020. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=qzOA41vA8Qw. Acesso em: 9 nov. 2021.

Veja como funciona a trilateração 3D para localização e saiba mais sobre o sitema de localização global.

Exercícios complementares

1. Fuvest-SP 2021 São dados os pontos no plano cartesiano $P_1(3, 3)$, $P_2(5, 1)$, $P_3(3, -1)$ e $P_4(-2, 5)$.

a) Determine a equação da reta que passa por P_3 e é paralela à reta que passa por P_1 e P_4.

b) Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos P_1, P_2 e P_3.

c) Sendo C a circunferência do item (b) e P o ponto de interseção de C com o eixo O*x*, que está mais próximo da origem, determine a equação da reta tangente a C em P.

2. Uece 2020 Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, os pontos M(10, 0) e N(0, 10) são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência C. Se K(4, *p*) e L(4, *q*) são pontos distintos de C, então, a medida do comprimento do segmento $\overline{KL}$, em u.c., é:

Dado: u.c. ≡ unidade de comprimento.

a) 10.
b) 12.
c) 14.
d) 16.

3. UFU-MG 2018 Considere ℓ uma reta do plano cartesiano *xOy*. A reflexão em torno da reta ℓ é a transformação geométrica R_ℓ e associa a cada ponto P do plano o ponto $P' = R_\ell(P)$, tal que seja a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$. Tal transformação preserva a distância entre pontos, ou seja, dados os pontos A e B, se $A' = R_\ell(A)$ e $B' = R_\ell(B)$ são suas respectivas imagens, então $AB = A'B'$.

Considere a reta $\ell: x + y = 4$ e o círculo $\lambda: (x - 7)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Baseando-se nas informações citadas, elabore e execute um plano de resolução de maneira a determinar:

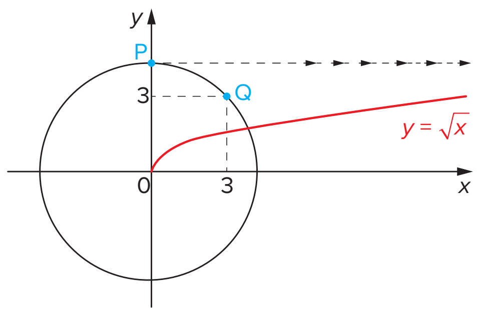
a) a interseção da reta perpendicular à reta ℓ passando pelo centro de λ com a reta ℓ.

b) a equação cartesiana do círculo λ' imagem do círculo λ pela reflexão em torno da reta ℓ.

4. EsPCEx-SP 2017 Uma circunferência tem centro no eixo das abscissas, passa pelo ponto (4, 4) e não intercepta o eixo das ordenadas. Se a área do círculo definido por essa circunferência é 17π, a abscissa de seu centro é:

a) 3 **b)** 4 **c)** 5 **d)** 6 **e)** 7

5. Unesp 2018 Os pontos P e Q(3, 3) pertencem a uma circunferência centrada na origem do plano cartesiano. P também é ponto de interseção da circunferência com o eixo y.



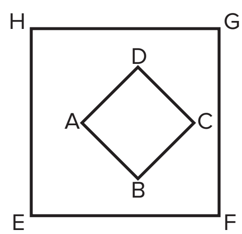
Considere o ponto R, do gráfico de $y = \sqrt{x}$, que possui ordenada y igual à do ponto P. A abscissa x de R é igual a:

a) 16
b) 15
c) 18
d) 9
e) 12

6. PUC-Rio 2018 Considere a circunferência de raio $\sqrt{13}$ e centro (0, 0) e a curva de equação $y = \dfrac{6}{x}$.

a) Determine a equação da circunferência. Esboce, no mesmo sistema de coordenadas ortogonais, a circunferência e a curva.
b) Encontre todos os pontos de interseção entre a circunferência e a curva.
c) Considere o polígono convexo cujos vértices são os pontos de interseção encontrados no item anterior. Calcule a área desse polígono.

7. Udesc 2017 Considere, na figura a seguir, o quadrado ABCD inscrito na circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 25 = 0$ e o quadrado EFGH circunscrito à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0$.



Com base nas informações e na figura, analise as sentenças.

I. A diferença das áreas dos quadrados EFGH e ABCD é de 82 unidades de área.

II. Se os lados do quadrado EFGH forem paralelos aos eixos do plano cartesiano e às diagonais do quadrado ABCD, então a área do triângulo EAB é de 12 unidades de área.

III. A soma dos perímetros dos quadrados ABCD e EFGH é de $52\sqrt{2}$ unidades de comprimento.

Assinale a alternativa correta.

a) Somente as sentenças I e II são verdadeiras.
b) Somente a sentença III é verdadeira.
c) Somente as sentenças II e III são verdadeiras.
d) Somente a sentença II é verdadeira.
e) Somente a sentença I é verdadeira.

8. AFA-SP 2016 Considere os pontos A(4, –2), B(2, 0) e todos os pontos P(x, y), sendo x e y números reais, tais que os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são catetos de um mesmo triângulo retângulo.

É correto afirmar que, no plano cartesiano, os pontos P(x, y) são tais que:

a) são equidistantes de C(2, –1).
b) o maior valor de x é $3 + \sqrt{2}$.
c) o menor valor de y é –3.
d) x pode ser nulo.

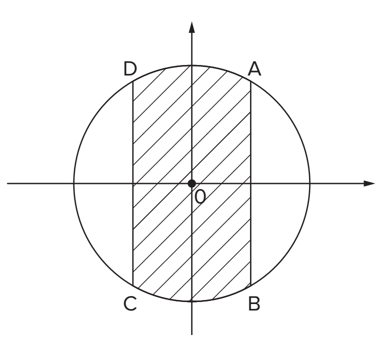
9. UFRGS 2020 A área da região determinada pela interseção das desigualdades $y > \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$, $y > -\dfrac{2}{3}x + 5$ e $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 < 9$ é

a) $\dfrac{3\pi}{4}$
b) $\dfrac{3\pi}{2}$
c) $\dfrac{9\pi}{4}$
d) $\dfrac{9\pi}{2}$
e) 9π

10. ITA-SP 2021 Determine todos os pontos (x, y) que pertencem à circunferência de centro (5, 0) e raio 5, que satisfazem a equação:

$$\sqrt{3x - y - 4} = \sqrt{x^2 - 7x - 5y - 4}$$

11. PUC-Rio 2017 Considere o círculo de raio 2 centrado na origem, e as retas verticais $x = 1$ e $x = -1$, como indicado na figura.



a) Encontre as coordenadas dos pontos de interseção A, B, C, D entre o círculo e as retas verticais.
b) Calcule a área da região interior ao círculo que fica entre as duas retas verticais.

12. Uece 2015 Em um sistema de coordenadas cartesiano usual, as retas representadas pelas equações $3x - 4y + 4 = 0$ e $3x - 4y + 20 = 0$ são tangentes a uma circunferência cujo centro está localizado sobre o eixo y. A equação que representa esta circunferência é:

a) $25x^2 + 25y^2 - 25y - 125 = 0$
b) $25x^2 + 25y^2 - 150y + 161 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 25y + 9 = 0$
d) $x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0$

13. EsPCEx-SP 2020 Sabendo-se que a equação $2x^2 + ay^2 - bxy - 4x + 8y + c = 0$ representa uma circunferência de raio 3, a soma $a + b + c$ é igual a:

a) -10
b) -6
c) -2
d) 2
e) 6

14. Fuvest-SP 2016 No plano cartesiano Oxy, a circunferência C tem centro no ponto P(2, 1), e a reta t é tangente a C no ponto Q(–1, 5).

a) Determine o raio da circunferência C.
b) Encontre uma equação para a reta t.
c) Calcule a área do triângulo PQR, sendo R o ponto de interseção de t com o eixo Ox.

15. Fuvest-SP 2016 No plano cartesiano, um círculo de centro P(a, b) tangencia as retas de equações $y = x$ e $x = 0$. Se P pertence à parábola de equação $y = x^2$ e $a > 0$, a ordenada b do ponto P é igual a:

a) $2 + 2\sqrt{2}$
b) $3 + 2\sqrt{2}$
c) $4 + 2\sqrt{2}$
d) $5 + 2\sqrt{2}$
e) $6 + 2\sqrt{2}$

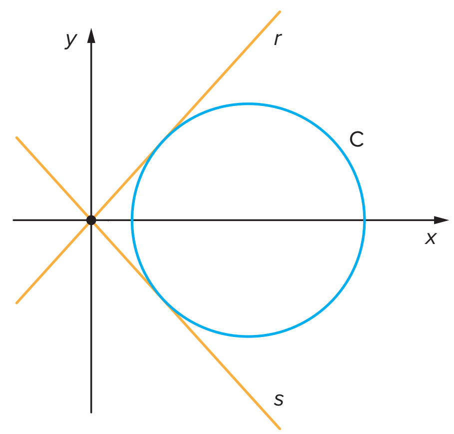
16. Unicamp-SP 2020 Sabendo que c é um número real, considere, no plano cartesiano, a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 2cx$. Se o centro dessa circunferência pertence à reta de equação $x + 2y = 3$, então seu raio é igual a:

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) 2
d) 3

17. UFPR 2014 Uma reta passando pelo ponto P(16, –3) é tangente ao círculo $x^2 + y^2 = r^2$ em um ponto Q. Sabendo que a medida do segmento $\overline{PQ}$ é de 12 unidades, calcule:

a) a distância do ponto P à origem do sistema cartesiano;
b) a medida do raio r da circunferência.

18. Uerj 2017 Considere a circunferência C de equação $x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$, representada graficamente a seguir.



Determine as equações das retas r e s que passam pela origem e são tangentes à circunferência.

19. ITA-SP 2014 A equação do círculo localizado no 1º quadrante que tem área igual a 4π (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas r: $2x - 2y + 5 = 0$ e s: $x + y - 4 = 0$ é:

a) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4$

b) $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 = 4$

c) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{10}{4}\right)^2 = 4$

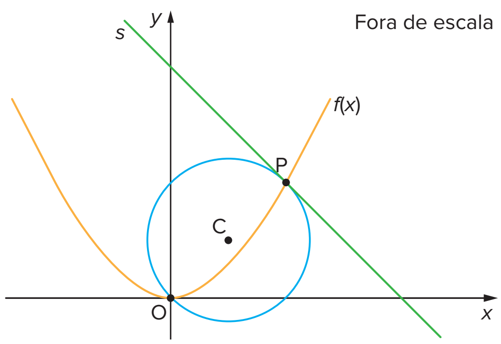
d) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4$

e) $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = 4$

20. Mackenzie-SP Uma circunferência de centro (4, y), com $y \in \mathbb{Z}$, é tangente às retas $x + y - 2 = 0$ e $x - 7y + 2 = 0$. O raio dessa circunferência é:

a) 4
b) 5
c) $4\sqrt{2}$
d) $5\sqrt{2}$
e) $6\sqrt{2}$

21. PUC-SP 2018 A função $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ e a circunferência de centro C e equação $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$ se intersectam nos pontos P e O, sendo O a origem do sistema cartesiano, conforme mostra o gráfico.



A equação da reta s, tangente à circunferência no ponto P, pode ser dada por:

a) $y = -x$
b) $y = -x + 8$
c) $y = -x + 2$
d) $y = -\frac{x}{2}$

22. Uespi 2012 Suponha que x e y são reais e satisfazem $x^2 + y^2 = 6x + 6y - 10$. Qual o valor máximo de $x + y$?

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

23. FGV-SP 2013 No plano cartesiano, há duas retas paralelas à reta de equação $3x + 4y + 60 = 0$ e que tangenciam a circunferência $x^2 + y^2 = 4$. Uma delas intercepta o eixo y no ponto de ordenada:

a) 2,9
b) 2,8
c) 2,7
d) 2,6
e) 2,5

24. AFA-SP 2018 Considere no plano cartesiano a circunferência λ tangente à bissetriz dos quadrantes ímpares no ponto A(1, 1). Sabendo que a reta t: $x - y + 4 = 0$ tangencia λ no ponto B, marque a opção correta.

a) A soma das coordenadas de B é igual a 3.
b) P(–1, 2) é exterior a λ.
c) O ponto de λ mais próximo da origem é $Q\left(0, 2 - \sqrt{2}\right)$.
d) A bissetriz dos quadrantes pares é exterior a λ.

25. EsPCEx-SP 2017 Seja C a circunferência de equação $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 2 = 0$. Considere em C a corda $\overline{MN}$ cujo ponto médio é P(–1, –1). O comprimento de $\overline{MN}$ (em unidades de comprimento) é igual a:

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $2\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{3}$
e) 2

26. ITA-SP 2016 Se P e Q são pontos que pertencem à circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e à reta $y = 2(1 - x)$, então o valor do cosseno do ângulo PÔQ é igual a:

a) $-\frac{3}{5}$
b) $-\frac{3}{7}$
c) $-\frac{2}{5}$
d) $-\frac{4}{5}$
e) $-\frac{1}{7}$

27. UFJF-MG 2016 Considere a circunferência:

$$C: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 9$$

a) Determine se o ponto A(4, –3) é interior, exterior ou pertencente à circunferência C.
b) Encontre o(s) valor(es) de a para que a circunferência C e a reta $y = ax$ possuam dois pontos em comum.

28. EsPCEx-SP 2016 Considere a circunferência que passa pelos pontos (0, 0), (0, 6) e (4, 0) em um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais. Sabendo que os pontos (0, 6) e (4, 0) pertencem a uma reta que passa pelo centro dessa circunferência, uma das retas tangentes a essa circunferência, que passa pelo ponto (3, –2), tem por equação:

a) $3x - 2y - 13 = 0$
b) $2x - 3y - 12 = 0$
c) $2x - y - 8 = 0$
d) $x - 5y - 13 = 0$
e) $8x + 3y - 18 = 0$

29. ITA-SP Determine uma equação da circunferência inscrita no triângulo cujos vértices são A (1, 1), B (1, 7) e C (5, 4) no plano xOy.

30. IME-RJ 2015 Sejam r a circunferência que passa pelos pontos (6, 7), (4, 1) e (8, 5) e t a reta tangente à r, que passa por (0, –1) e o ponto de tangência tem ordenada 5. A menor distância do ponto P(–1, 4) à reta t é:

a) $3\sqrt{2}$
b) 4
c) $2\sqrt{3}$
d) 3
e) $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

31. Fuvest-SP 2017 Duas circunferências com raios 1 e 2 têm centros no primeiro quadrante do plano cartesiano e ambas tangenciam os dois eixos coordenados. Essas circunferências se interceptam em dois pontos distintos de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

O valor de $(x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2$ é igual a:

a) $\frac{5}{2}$
b) $\frac{7}{2}$
c) $\frac{9}{2}$
d) $\frac{11}{2}$
e) $\frac{13}{2}$

32. ITA-SP 2017 Considere dois círculos no primeiro quadrante:

- C_1 com centro (x_1, y_1), raio r_1 e área $\frac{\pi}{16}$.
- C_2 com centro (x_2, y_2), raio r_2 e área 144π.

Sabendo que (x_1, y_1, r_1) e (x_2, y_2, r_2) são duas progressões geométricas com somas dos termos iguais a $\frac{7}{4}$ e 21, respectivamente, então a distância entre os centros de C_1 e C_2 é igual a:

a) $\frac{\sqrt{123}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{129}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{131}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{135}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{137}}{2}$

33. Udesc 2016 Considere o quadrilátero cujos vértices correspondem aos centros e aos pontos de interseção das circunferências $x^2 - 8x + y^2 = 0$ e $x^2 + (y - 2)^2 = 4$. Numericamente, a área deste quadrilátero é igual:

a) ao produto dos raios das circunferências.
b) à soma dos raios das circunferências.
c) à média aritmética dos raios das circunferências.
d) à metade do produto dos raios das circunferências.
e) à oitava parte do produto dos raios das circunferências.

34. Fuvest-SP No plano cartesiano, os pontos (0, 3) e (–1, 0) pertencem à circunferência C. Uma outra circunferência, de centro em $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ é tangente a C no ponto (0, 3). Então, o raio de C vale:

a) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

b) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

e) $\sqrt{5}$

35. ITA-SP 2016 Considere as circunferências λ_1: $x^2 + y^2 - 8x + 4y = 20$ e λ_2: $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 8$.
O triângulo ABC satisfaz as seguintes propriedades:

a) o lado $\overline{AB}$ coincide com a corda comum a λ_1 e λ_2;
b) o vértice B pertence ao primeiro quadrante;
c) o vértice C pertence a λ_1 e a reta que contém $\overline{AC}$ é tangente a λ_2.

Determine as coordenadas do vértice C.

36. ITA-SP Considere as circunferências C_1: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$ e C_2: $(x - 10)^2 + (y - 11)^2 = 9$. Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede:

a) $5\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{5}$

c) $3\sqrt{6}$

d) $\frac{25}{3}$

e) 9

37. UFPR 2017 Seja C_1 o círculo de raio $\rho = 2$ e centro no ponto P(3, 4).

a) Qual é a equação do círculo C_1?
b) Considere o círculo C_2 definido pela equação $x^2 + y^2 = \rho^2$. Para quais valores de ρ o círculo C_1 intersecta o círculo C_2?

38. Uece 2017 Em um plano, munido do sistema de coordenadas cartesianas usual, as equações $x^2 + y^2 - 10\sqrt{3}x - 25 = 0$ e $x^2 + y^2 + 10\sqrt{3}x - 25 = 0$ representam circunferências. Cada uma dessas circunferências limitam uma área no plano. O comprimento da linha que contorna a união das áreas limitadas por cada uma destas circunferências é:

Dado: u.c. = unidade de comprimento

a) $\frac{200\pi}{3}$ u.c.

b) $\frac{80\pi}{3}$ u.c.

c) $\frac{50\pi}{3}$ u.c.

d) $\frac{100\pi}{3}$ u.c.

39. ITA-SP 2018 Considere a definição: duas circunferências são ortogonais quando se interceptam em dois pontos distintos e nesses pontos suas tangentes são perpendiculares. Com relação às circunferências C_1: $x^2 + (y + 4)^2 = 7$, C_2: $x^2 + y^2 = 9$ e C_3: $(x - 5)^2 + y^2 = 16$, podemos afirmar que:

a) somente C_1 e C_2 são ortogonais.
b) somente C_1 e C_3 são ortogonais.
c) C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3.
d) C_1, C_2 e C_3 são ortogonais duas a duas.
e) não há ortogonalidade entre as circunferências.

40. ITA-SP 2018 No plano cartesiano são dadas as circunferências C_1: $x^2 + y^2 = 1$ e C_2: $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. Determine o centro e o raio de uma circunferência C tangente simultaneamente a C_1 e C_2, passando pelo ponto $A(3, \sqrt{3})$.

BNCC em foco

EM13MAT510

1. O Pantanal, maior superfície inundável do mundo, é um bioma brasileiro que possui duas estações climáticas muito bem definidas. Uma extremamente úmida, o verão, é marcada pela ocorrência de fortes chuvas, que provocam o transbordamento dos rios e, consequentemente, a inundação de extensa área de planícies; e outra, bem seca, o inverno, com baixa umidade relativa do ar e muito pouca chuva, o que aliado à vegetação muito seca frequentemente provoca queimadas.

Lucas Leuzinger/Shutterstock.com

Uma área mapeada do Pantanal, quando sobreposta a um plano cartesiano, é representada por uma circunferência de centro (7, 4) e tem seu contorno sobre um ponto de coordenadas (2, 2). Sua equação geral é dada por:

a) $x^2 + y^2 - 14x - 8y - 36 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 94 = 0$
c) $x^2 + y^2 + 14x + 8y + 94 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 14x + 8y + 36 = 0$
e) $x^2 + y^2 - 14x - 8y + 36 = 0$

EM13MAT510

2. Conforme o uso dos aparelhos celulares foi se popularizando, aumentou a necessidade de instalação de antenas de operadoras no território nacional. Além disso, a entrada no Brasil da tecnologia 5G, que apresenta velocidades muito superiores às alcançadas pela atual tecnologia 4G, abre a necessidade de uma quantidade muito maior de antenas do que a disponibilizada atualmente.

Na zona rural de uma certa região em que há pouca disponibilidade de antenas de celular, uma operadora instalou duas antenas, uma na cidade A e outra na cidade B, para tentar minimizar o problema com o sinal. Essas antenas foram instaladas à beira de um longo trecho de uma estrada retilínea que liga as cidades A e B. Compondo a situação em um sistema cartesiano de coordenadas, com os eixos cotados em quilômetros, e considerando as cidades A e B como pontuais nesse sistema, verifica-se que:

- O alcance do sinal da antena da cidade A é dado pela equação da circunferência:

$$(x - 10)^2 + (y - 20)^2 = 676$$

- A antena da cidade B está situada num ponto de coordenadas (40, 60).
- O raio de alcance da antena da cidade B é de 21 km.

Um morador da cidade A que viaja com muita frequência para a cidade B, com base nas informações fornecidas, durante seu trajeto ao longo da estrada que liga as duas cidades:

a) tem sinal de celular durante todo o percurso.
b) fica sem sinal de celular apenas por 1 km.
c) fica sem sinal de celular apenas por 2 km.
d) fica sem sinal de celular apenas por 3 km.
e) fica sem sinal de celular por 5 km.

EM13MAT510

3. Dérbi Campineiro é como se chama o confronto entre o Guarani Futebol Clube e a Associação Atlética Ponte Preta, clássico da cidade de Campinas e o mais antigo do estado de São Paulo. A imagem mostra que por muito pouco não poderia ser considerado um clássico entre vizinhos, pois suas "casas", como são conhecidos os seus estádios, são muito próximas. O Moisés Lucarelli, "casa" da Ponte Preta, e o Brinco de Ouro da Princesa, "casa" do Guarani, podem ser vistos simultaneamente na imagem abaixo.

© 2021 Google

Se considerarmos os estádios como duas circunferências sobre um plano cartesiano, podemos descrever suas equações como:

- Moisés Lucarelli: $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 25{,}39 = 0$
- Brinco de Ouro da Princesa: $x^2 + y^2 - 28x - 20y + 291{,}59 = 0$

Considerando que cada unidade do plano corresponde a 100 metros, determine a menor distância entre as circunferências que representam os estádios.

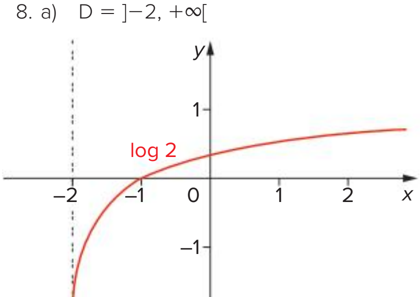
a) 1300 metros
b) 900 metros
c) 750 metros
d) 600 metros
e) 400 metros

Frente 1

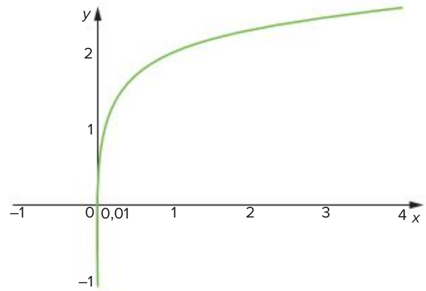
Capítulo 7 – Função logarítmica

Revisando

1. a) 4
   b) 4
   c) -2
   d) $\frac{5}{4}$
   e) $-\frac{3}{2}$
   f) 2
   g) -5
   h) -12
2. a) 5
   b) 25
   c) 25
   d) 25
   e) 625
   f) 65 536
3. a) 1
   b) 1
   c) 2
   d) 5
   e) -9
4. a) $5a$
   b) $4b$
   c) $3b - 2a$
   d) $2b - a$
   e) $1 + b - a$
   f) $\frac{7a}{2b}$
   g) $\frac{b}{a}$
5. 10 algarismos.
6. a) $S = \{3\}$
   b) $S = \{14\}$
   c) $S = \{3\}$
   d) $S = \{2, 4\}$
7. $S = \left\{\sqrt[3]{4}, 64\right\}$
8. a) $D =]-2, +\infty[$



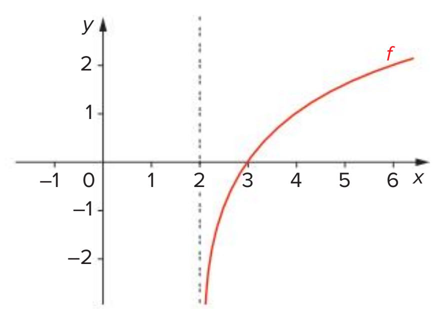
   b)



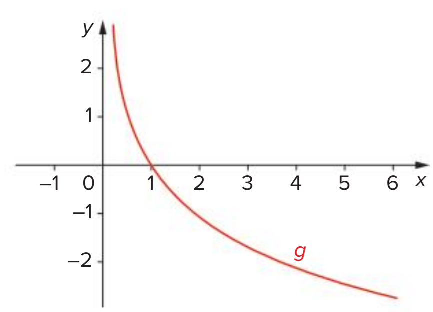
9. $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow]3, +\infty[$, $f^{-1}(x) = 10^{x-5} + 3$
10. a) $S = [11, +\infty[$
    b) $S =]2, 5[$

Exercícios propostos

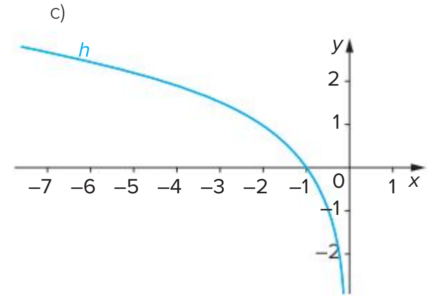
1. E
2. B
3. B
4. A
5. C
6. A
7. D
8. 63,1 mg
9. C
10. C
11. C
12. E
13. B
14. E
15. D
16. E
17. D
18. a) 2
    b) 3
    c) 1
    d) 1
    e) 2
    f) 4
19. 10 algarismos.
20. $\sqrt[5]{2} \cong 1{,}15$
21. E
22. D
23. a) $S = \{5\}$
    b) $S = \{2\}$
    c) $S = \left\{-3, \frac{1}{2}\right\}$
    d) $S = \{512\}$
    e) $S = \{1000\}$
    f) $S = \{3\}$
24. a) $S = \{3\}$
    b) $S = \left\{2, \frac{4}{5}\right\}$
    c) $S = \{4\}$
    d) $S = \{2\}$
25. a) $S = \{2\}$
    b) $S = \left\{\frac{1}{2}, 16\right\}$
    c) $S = \{4, 8\}$
    d) $S = \{8\}$
26. B
27. A
28. D
29. A
30. A
31. B
32. E
33. A
34. D
35. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
    b) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$
    c) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \text{ e } x \neq 3\}$
    d) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
36. E
37. a)



    b)



    c)

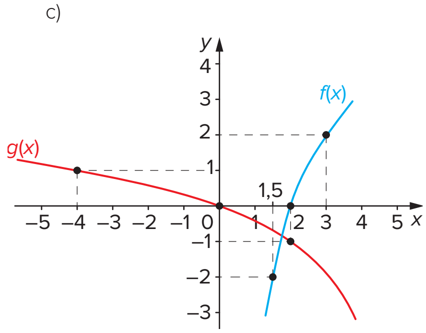


38. D
39. A

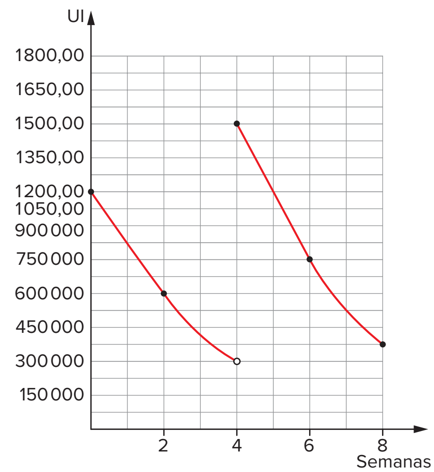
40. B
41. B
42. E
43. D
44. a) 2 anos.
b) Demonstração.
45. a) 400 mg/L
b) $a = 1$; $k = 200$.
46. a) f^{-1}: $]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_2 (x - 1)$
b) g^{-1}: $]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $g^{-1}(x) = \log_3 x + 1$
47. D
48. C
49. 2031; 2033.
50. E
51. a) $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x$; $f(0) = 3$
b) $g(x) = -2 - 2 \cdot 3^x$
Assíntota: $y = -2$
52. C
53. D
54. C
55. E
56. E
57. C
58. a) $S =]1, 5[$
b) $S = [1, +\infty[$
c) $S =]2, +\infty[$
d) $S = \left]\frac{1}{4}, 4\right[$
e) $S = [-5, -3[\cup]3, 5]$
59. a) $S =]3, 4]$
b) $S = \left]\frac{2}{11}, \frac{1}{2}\right[$
c) $S = \left]\frac{2}{3}, 2\right]$
60. a) $\log_{16}\left(\frac{1}{8}\right) = -0{,}75$
b) $S = \left]-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}\right]$
61. E
62. E
63. A

Exercícios complementares

1. C
2. B
3. B
4. B
5. Soma: 02 + 04 + 08 = 14
6. a) A concentração $[H^+]$ na bebida energética é 10 000 vezes maior do que a da água.
b) pH = 2,14
7. C
8. D
9. A
10. E
11. E
12. B
13. C
14. B
15. E
16. C
17. Soma: 01 + 02 = 03
18. A
19. B
20. a) Demonstração.
b) $x \cong 0{,}7$ e $x \cong -0{,}7$.
21. B
22. B
23. D
24. A
25. C
26. a) R\$ 360,00
b) R\$ 56,00
27. E
28. C
29. D
30. B
31. C
32. A
33. A
34. C
35. a) $x = 10^{5{,}17}$
b) R\$ 1 385 000,00
36. Soma: 01 + 02 = 03
37. C
38. S = 1,9285
39. B
40. A
41. a) $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$; $f(2) = 0$; $f(3) = 2$; $g(-4) = 1$; $g(0) = 0$; $g(2) = -1$.
b) $x = \frac{7}{4}$
c)



42. D
43. C
44. E
45. B
46. B
47. $x \cong 4{,}2$
48. a) $r: y = \frac{10}{3}x + 1$
b) $10^{0{,}06} \cong 1{,}2$; $\log (1{,}7) \cong 0{,}21$
49. A
50. A
51. B
52. A
53. D
54. A
55. B
56. a) $\log_{10} N_0 = 6$
b) $N_0 = 10^6$
c) 6 horas.
57. O maior valor da função é 81.
58. a)



b) $3{,}6 \cdot 10^6$ UI; 50 dias.
59. B
60. a) $S =]-2, 0[\cup]3, +\infty[$
b) $S = \left]-2, 1-\sqrt{5}\right] \cup [-1, 0[\cup \left]3, 1+\sqrt{5}\right]$
61. a) $D_f =]4, +\infty[$
b) $S = \varnothing$
c) $S = \left]\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$
62. D
63. B

BNCC em foco

1. 73 dB
2. 10^{-4} W/m²
3. 1 hora.

Capítulo 8 – Função modular

Revisando

1. a) 3
b) $-\pi + 4$
c) $6 - \sqrt{2}$
d) $1 + \sqrt{3}$
e) $4 - \sqrt{2}$
f) $8 + \sqrt{2} - \pi - \sqrt{3}$
2. a) $|2x - 6| = \begin{cases} 2x - 6, \text{ se } x \geq 3 \\ -2x + 6, \text{ se } x \leq 3 \end{cases}$
b) $|10 - 2x| = \begin{cases} 10 - 2x, \text{ se } x \leq 5 \\ -10 + 2x, \text{ se } x \geq 5 \end{cases}$

c) $|x^2 - 6x + 8| = \begin{cases} x^2 - 6x + 8, \\ \text{se } x \le 2 \text{ ou } x \ge 4 \\ -x^2 + 6x - 8, \\ \text{se } 2 \le x \le 4 \end{cases}$

d) $|2^x - 8| = \begin{cases} 2^x - 8, \text{ se } x \ge 3 \\ -2^x + 8, \text{ se } x \le 3 \end{cases}$

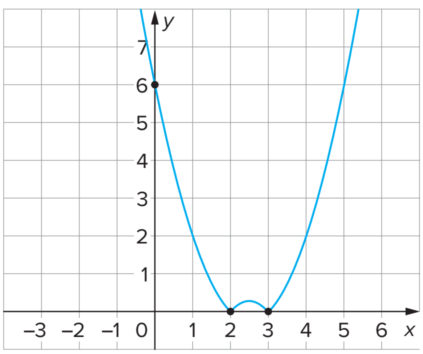
e) $|\log_3 x| = \begin{cases} \log_3 x, \text{ se } x \ge 1 \\ -\log_3 x, \text{ se } 0 < x \le 1 \end{cases}$

f) $|x^2 + 1| = x^2 + 1$

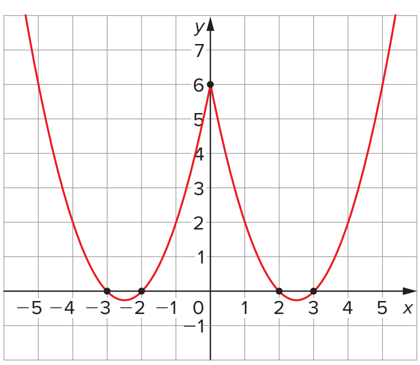
3. Porque, se $x < 0$, então $|x| = -x > 0$.

4. $\sqrt{(x-2)^2} = |x - 2|$ e, assim, a simplificação feita só é válida se $x - 2 > 0$, ou seja, se $x > 2$.

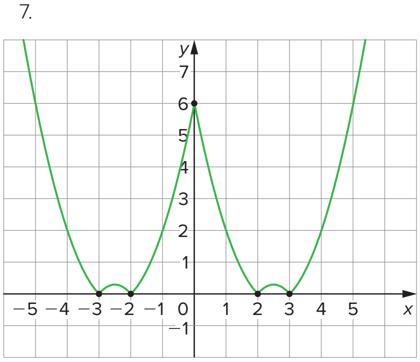
5.



6.



7.



8. a) $S = \{-3, 3\}$

b) $S = \{-1, 9\}$

c) $S = \varnothing$

d) $S = \{-1, -7, 3, 9\}$

e) $S = \{-3, 4\}$

f) $S = \{-2, 1\}$

9. a) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

b) $S = \varnothing$

c) $S = \{-4, 1\}$

d) $S = \{-3, 7\}$

e) $S = \{-8, 6\}$

f) $S = \{-3, 3\}$

10. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 7\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \le x \le 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 4\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 6\}$

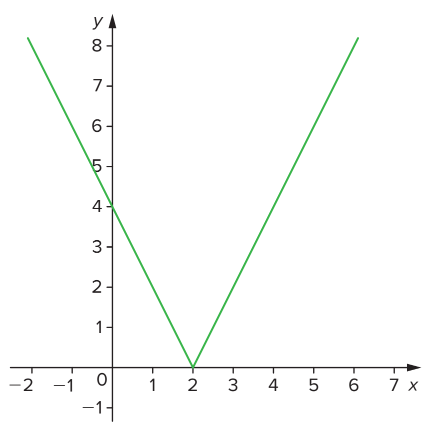
Exercícios propostos

1. E

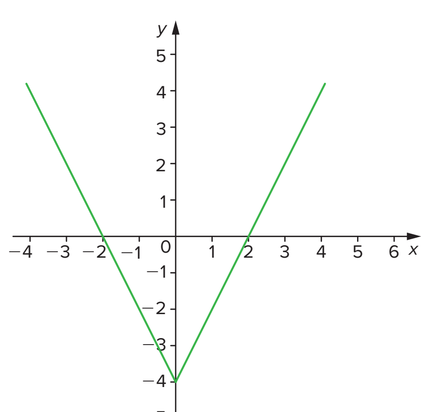
2. D

3. E

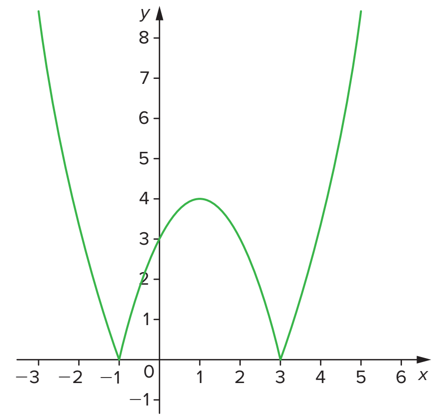
4. a) $\text{Im} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$ e a função não é injetora.



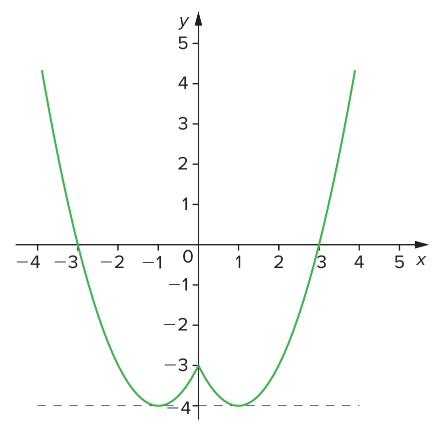
b) $\text{Im} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -5\}$ e a função não é injetora.



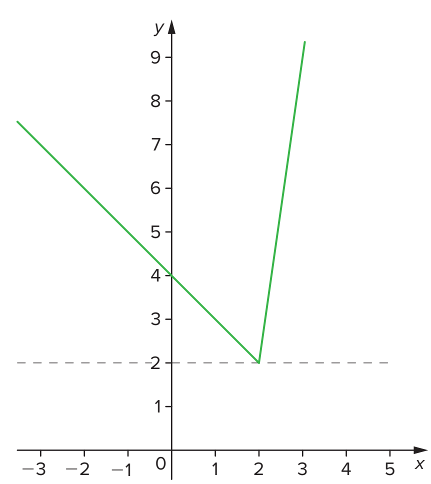
c) $\text{Im} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$ e a função não é injetora.



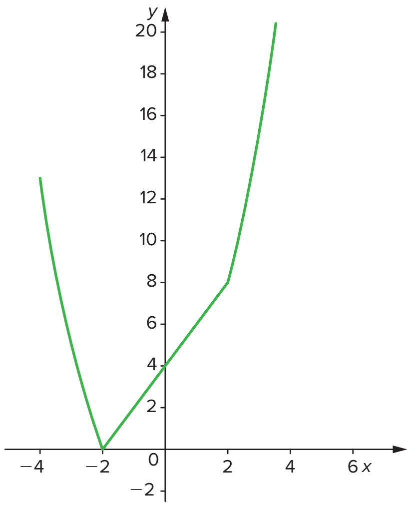
d) $\text{Im} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge -4\}$ e a função não é injetora.



e) $\text{Im} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 2\}$ e a função não é injetora.



f) Im $= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ e a função não é injetora.

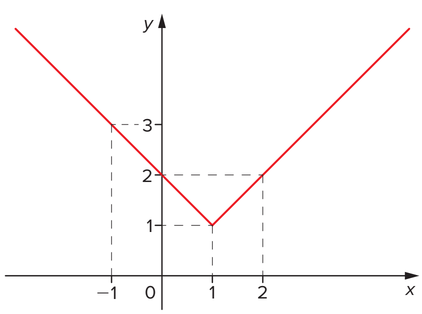


5. A 6. D 7. B

8. $x = 1$ e $x = 3$.

9. B 10. C 11. B 12. C

13. a)



b) $\frac{11}{2}$

14. E

15. a) Falsa. $|-2 - 1| \neq -2 - 1$

b) Falsa. $|-2 - 1| \neq -2 + 1$

c) Verdadeira.

d) Falsa. $\left|\sqrt{-2^2}\right| \neq -2$

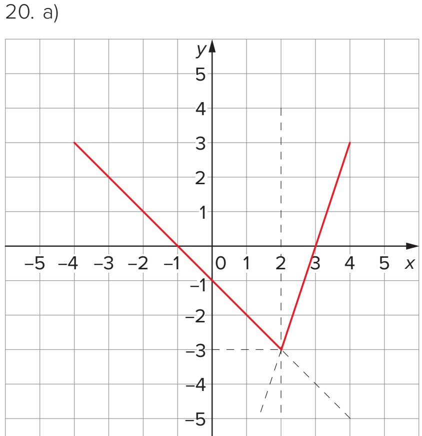
e) Verdadeira.

f) Verdadeira.

16. C 18. C

17. S = {−1, 7} 19. D

20. a)



b) $a = \sqrt[3]{2}$ e $b = 2$.

21. E

22. a) $p = -1$

b) $x = 5$

23. E

24. B

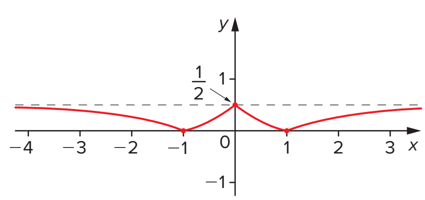
25. C

26. D

27. E

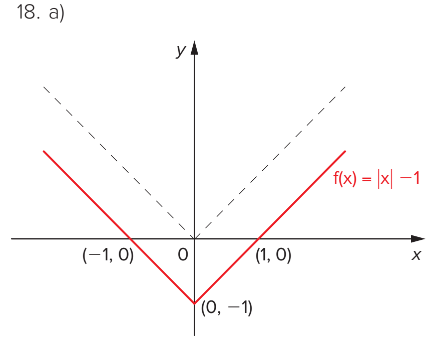
Exercícios complementares

1. D
2. B
3. D
4. D
5. C
6. F; F; F; V; F
7. B
8. A
9. D
10. A
11. A
12. C
13. C
14. D
15. C
16.

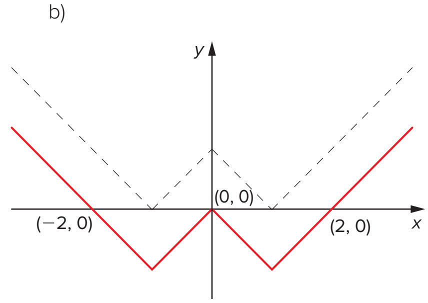


17. C

18. a)



b)



c) S = {−7, 7}

19. Soma: 01 + 04 = 05

20. B

21. Soma: 02 + 04 = 06

22. E

23. E

24. A

25. a) $S = \{-\sqrt{6}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{6}\}$

b) $S = [-\sqrt{6}, -2] \cup [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [2, \sqrt{6}]$

26. E

27. S = [1, 4] ∪ [6, 9]

BNCC em foco

1. C
2. B
3. O lucro será máximo para 8 ou 12 pares de sapato vendidos. Em ambos os casos, o lucro será de R$ 500,00.

Capítulo 9 – Trigonometria

Revisando

1. a) 1,35 rad

b) 2,8 rad

2. a) $\frac{\pi}{9}$ rad

b) $\frac{3\pi}{4}$ rad

c) $\frac{4\pi}{3}$ rad

d) $\frac{9\pi}{5}$ rad

e) $\frac{19\pi}{10}$ rad

3. a) 150°

b) 240°

c) 20°

d) 200°

4. a) A = 150°, B = 210°, C = 330°.

b) D = 135°, E = 225°, F = 315°.

c) G = 60°, H = 120°, I = 300°.

d) J = 50°, K = 130°, L = 230°.

5. $A = \frac{3\pi}{4}$, $B = \frac{5\pi}{4}$, $C = \frac{7\pi}{4}$, D = 144°, E = 216° e F = 324°.

6. $A = \frac{2\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$B = \frac{3\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$C = \frac{7\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$D = \frac{8\pi}{5} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

7. a) $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

e) $\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

8. a) $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) 0

g) 0

h) 1

9. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{1}{2}$

10. 2

11. a) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $S = \{0, \pi\}$

d) $S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

e) $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

f) $S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

g) $S = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

h) $S = \{0\}$

12. a) $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $S = \{\pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

e) $S = \left\{\pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

f) $S = \left\{\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \text{ ou } \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

13. $\cos x = -\frac{12}{13}$

14. a) $-\sqrt{3}$

b) -1

c) 0

d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

e) -1

f) 0

15. a) $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

c) $S = \{0, \pi\}$

d) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

16. a) $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $S = \left\{\frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $S = \{k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\}$

d) $S = \left\{\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

17. a) -1

b) -2

c) -2

18. $\operatorname{sen} x = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{3}$, $\sec x = -\sqrt{10}$ e $\operatorname{cossec} x = -\frac{\sqrt{10}}{3}$.

19. $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

20. A

Exercícios propostos

1. D
2. B
3. B
4. A
5. A
6. Aproximadamente 2 902,76 km.
7. D
8. D
9. Aproximadamente 286,5°.
10. D
11. a) 62 m b) $d = 98$ m
12. C
13. B
14. C
15. D
16. B
17. B
18. B
19. E
20. D
21. A
22. A
23. A
24. B
25. V; F; V; F; V; V
26. C
27. B
28. C
29. D
30. C
31. C
32. D
33. B
34. B
35. D
36. D
37. A
38. $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
39. $k = 2$
40. $1 + \cos\alpha$
41. A
42. D
43. D
44. B
45. A
46. B
47. E
48. a) Demonstração.
    b) 0 ou $\frac{4}{5}$.
49. B
50. D
51. $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{cotg} x = \frac{4}{3}$, $\sec x = -\frac{5}{4}$ e $\operatorname{cossec} x = -\frac{5}{3}$.
52. C
53. B
54. D
55. A
56. C
57. Soma: 01 + 04 + 16 = 21
58. B
59. B
60. D
61. a) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{55}}{8}$
    b) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$
62. B
63. C
64. E
65. B
66. E
67. a) $\beta = 60°$
    b) $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{7}}{3}$
68. B
69. C
70. B
71. B
72. $\frac{39}{10}$

Exercícios complementares

1. A
2. D
3. C
4. E
5. B
6. B
7. E
8. D
9. A
10. A
11. $a = 1$, $b = \frac{2}{\pi}$ e $Q\left(4{,}25\sqrt{2};\ -4{,}25\sqrt{2}\right)$.
12. C
13. C
14. B
15. C
16. D
17. E
18. $S = \left\{\pm\frac{\pi}{3},\ \pm\pi,\ \pm\frac{5\pi}{3},\ \frac{7\pi}{3}\right\}$
19. D
20. $S = \{1, -\text{sen}^2\,\theta\}$
21. 80
22. a) $\cos\alpha = 0{,}8$ e $\det A = -1{,}6$.
    b) $\theta = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ ou
    $\theta = \pm\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
23. D
24. a) $\frac{3}{5}$
    b) $4\left(10 + \sqrt{10}\right)$ cm
25. D
26. A
27. A
28. E
29. D
30. A
31. C
32. B
33. D
34. C
35. C
36. a) $a = 1$ e $b \in \mathbb{R}$ ou $a = -1$ e $b = 1$.
    b) $\text{tg}\,\theta = -1$ ou $\text{tg}\,\theta = 2$.
37. $\text{tg}\,\alpha = 3\sqrt{3}$ e $\text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{21}}{7}$.
38. C
39. D
40. A
41. A
42. D
43. Soma: 01 + 02 + 04 = 07
44. A
45. D
46. $x = \frac{\pi}{6}$
47. B
48. E
49. E
50. B
51. D
52. C
53. B
54. B
55. A
56. B
57. E
58. A
59. B
60. E
61. a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou
    $x = \text{arctg}(m) + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
    b) $m = 1$
62. Soma: 01 + 02 = 03
63. E
64. C
65. $MN = \frac{A}{\sqrt{A^2 + 1}}$ e $MP = \frac{1}{\sqrt{A^2 + 1}}$.
66. D
67. $\frac{1}{(a + b)^3}$
68. C
69. C
70. a) $Q\left(1,\ 4 - \frac{\pi}{2}\right)$
    b) $Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(4 - \frac{\pi}{4}\right);\ 1 + \sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{\pi}{8}\right)\right)$
71. E
72. D

BNCC em foco

1. C
2. Há erro ou erros nos resultados do aluno.
3. $\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$ e $\cos\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Frente 2

Capítulo 4 – Análise de grandezas proporcionais

Revisando

1. A
2. B
3. A
4. B
5. D
6. E
7. C
8. B
9. B
10. D

Exercícios propostos

1. E
2. C
3. C
4. D
5. C
6. B
7. D
8. B
9. A
10. C
11. B
12. C
13. B
14. D
15. C
16. A
17. C
18. C
19. C
20. B

Exercícios complementares

1. C
2. D
3. B
4. C
5. B
6. B
7. C
8. C
9. E
10. B
11. B
12. B
13. A
14. E
15. B
16. A
17. a) $\frac{11}{12}$ km/h
    b) $\frac{11}{40}$
18. A
19. Soma: 01 + 02 + 04 = 07
20. C

BNCC em foco

1. B
2. C
3. C

Capítulo 5 – Sequências numéricas

Revisando

1. $a_{31} = \frac{33}{2}$
2. C
3. A
4. B
5. C
6. E
7. E
8. E
9. B
10. A

Exercícios propostos

1. C
2. B
3. B
4. B
5. A
6. C
7. A
8. B
9. D
10. C
11. A
12. C
13. B
14. E
15. A
16. B
17. D
18. C
19. C
20. B
21. E
22. Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15
23. D
24. C
25. A
26. D
27. A
28. B
29. D
30. E
31. A
32. E
33. E
34. A
35. A
36. D
37. C
38. E
39. C
40. C
41. A
42. E
43. A
44. D
45. C
46. E
47. E
48. B
49. A
50. D
51. A
52. A
53. E
54. A
55. B
56. D
57. a) 192 lados.
    b) $\frac{1024}{81}$
    c) Passo 21.
58. A
59. D
60. C
61. A
62. D
63. D
64. A
65. B
66. B
67. D
68. D
69. B
70. E
71. D
72. A
73. D
74. A
75. D
76. A
77. B
78. C
79. C
80. C

Exercícios complementares

1. E
2. C
3. C
4. C
5. A
6. E
7. a) Demonstração.
   b) $a = 0$ e $b = -8$.
8. C
9. A
10. B
11. a) $2p = 2(a + b)$ e $n = 4044$.
    b) $R_n = \frac{n+1}{n}$
12. a) $F_{10} = 76$ e $F_n = 8n - 4$.
    b) 10 000
13. A
14. a) $\frac{25\pi}{2}$ cm
    b) 210π cm
15. A
16. a) $x = 5$ ou $x_2 = \frac{1}{2}$.
    b) $S_{100} = 7575$
17. C
18. A
19. D
20. C
21. Soma: 02 + 16 = 18
22. B
23. a) Demonstração.
    b) 1 055
24. E
25. a) $\frac{4}{5}$
    b) Demonstração.
26. Soma: 01 + 02 = 03
27. Soma: 02 + 04 + 16 = 22
28. $n_{2013} = -\frac{1}{4}$
29. a) Resposta possível: $n = 2$ e $k = 6$.
    b) $S_n^k = 1$ para $n = 3$ e $k = 0$.
    $S_n^k = 2$ para $n = 4$ e $k = 0$.
    $S_n^k = 3$ para $n = 3$ e $k = 1$.
    $S_n^k = 4$ para $n = 2$ e $k = 0$.
    $S_n^k = 5$ para $n = 2$ e $k = 1$.
    $S_n^k = 6$ para $n = 1$ e $k = 0$.
    $S_n^k = 7$ para $n = 2$ e $k = 2$.
    $S_n^k = 8$ para $n = 4$ e $k = 1$.
    $S_n^k = 9$ para $n = 3$ e $k = 2$.
    $S_n^k = 10$ para $n = 1$ e $k = 1$.
    $S_n^k = 11$ para $n = 1$ e $k = 2$.
    $S_n^k = 12$ para $n = 4$ e $k = 2$.
    c) Demonstração.
30. a) $S = 0$
    b) $P_7 = -1$
31. A
32. A

33. B
34. D
35. D
36. A
37. E
38. A
39. E
40. E
41. D
42. $\sqrt{15}$ cm
43. Soma: 02 + 04 + 08 = 14
44. D
45. Soma: 02 + 04 + 08 = 14
46. a) 72 horas.
    b) $k = 15$
47. a) $\beta = 60°$
    b) $\text{tg}\,\beta = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$
48. a) Demonstração.
    b) $q \in \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$
49. a) $q = \dfrac{3}{2}$
    b) $r = \dfrac{2\pi}{3}$
50. a) $q = -2$
    b) $S_3 = \dfrac{3}{22}$
51. Aproximadamente 36 metros.
52. B
53. a) 5 meses.
    b) Aproximadamente 9 milhões e 552 mil reais.
54. a) 1820
    b) 4704
    c) 79
55. a) $\left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{3}{2}, 3, 5, 7\right)$
    b) (1, 2, 4, 6, 8) ou (1, –4, 16, 12, 8).
56. a) $q = 2$ e (7, 14, 28, 56, ...).
    b) 6944
57. a) 62
    b) 19
58. 246
59. a) 4 saltos.
    b) Demonstração.
60. B
61. $K_{n \to \infty} = 1$
62. A
63. 8^n quadrados; Área = 1.
64. a) $OB_1 = \dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ cm
    b) PG de razão $q = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
    c) $\dfrac{\dfrac{7}{2} \cdot \left[\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n - 1\right]}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1}$
65. E
66. A
67. D
68. D
69. E
70. A
71. A
72. a) (4, 6, 9), (8, 12, 18) e (12, 18, 27).
    b) 4
73. $B = \dfrac{1}{4}$, $C = -\dfrac{1}{2}$, $D = 1$ e $E = -2$.
74. $14 - 6\sqrt{2}$
75. $j = 12$
76. 5 termos.
77. $\dfrac{11}{52}$
78. $\underbrace{333...3}_{\text{30 algarismos}}$
79. a) $r_{min} = 3$
    b) $a_{18} = 53$

BNCC em foco

1. A
2. C
3. B

Capítulo 6 – Introdução à Álgebra Linear

Revisando

1. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \\ 25 & 23 \end{pmatrix}$
   b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
   c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$
   d) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
3. a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 31 & -35 \\ 14 & 46 \end{pmatrix}$
   b) $A \cdot C = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 12 & -1 \\ 17 & -19 & 21 & -5 \\ -10 & 8 & -6 & 4 \end{pmatrix}$
   c) O produto B · A não existe.
   d) $B \cdot C = \begin{pmatrix} -17 & 19 & -21 & 5 \\ -24 & 36 & -48 & 4 \end{pmatrix}$
   e) O produto C · A não existe.
   f) O produto C · B não existe.
4. D
5. 36
6. E
7. a) $S = \{(4, 1)\}$
   b) $S = \varnothing$
   c) $S = \{(5 - \alpha, \alpha), \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$.
8. $S = \varnothing$
9. D
10. Se $k = 1$, o sistema é SPI. Se $k \neq 1$, o sistema é SPD.

Exercícios propostos

1. B
2. C
3. C
4. C
5. A
6. A
7. A
8. D
9. B
10. C
11. A
12. C
13. A matriz que fornece o número médio de aluguéis de cada tipo de carro é $\begin{pmatrix} 42 & 41 & 26 \\ 47 & 50 & 40 \\ 60 & 59 & 60 \end{pmatrix}$.
14. $a = 0$, $b = 2$ e $c = -1$.
15. C
16. E
17. A
18. A
19. B
20. Soma: 01 + 16 = 17
21. B
22. B
23. B
24. C
25. A
26. B
27. B
28. B
29. D
30. C
31. E
32. C
33. D
34. D
35. A
36. D
37. D
38. D
39. E
40. A
41. A
42. D
43. A

44. C
45. D
46. B
47. C
48. B
49. A
50. B
51. C
52. B
53. E
54. A
55. A
56. B
57. A
58. D
59. A
60. D
61. E
62. B
63. B
64. A
65. B
66. B
67. D
68. A
69. C
70. B
71. A
72. E
73. A
74. B
75. A
76. D
77. E
78. D
79. C
80. E
81. B
82. A
83. A
84. A
85. A
86. A
87. C
88. C
89. A
90. B
91. D
92. B
93. C
94. A
95. A
96. B
97. D
98. C
99. A
100. A
101. B
102. D
103. A
104. B
105. B
106. A
107. A
108. E
109. B
110. A
111. D
112. E
113. B
114. D
115. E
116. A
117. C
118. B
119. E
120. E

Exercícios complementares

1. a) $\begin{cases} x + y = 40 \\ 25x + 200y = 1700 \end{cases} \Rightarrow x = 36$ e $y = 4$.

   b) A cebola grande gera o menor desperdício de cascas.

2. $MF = \frac{1}{12} \cdot N \cdot P$

3. a) $C = \begin{pmatrix} 1 & 16 & 49 & 100 \\ 1 & 4 & 25 & 64 \\ 9 & 0 & 9 & 36 \end{pmatrix}$ e

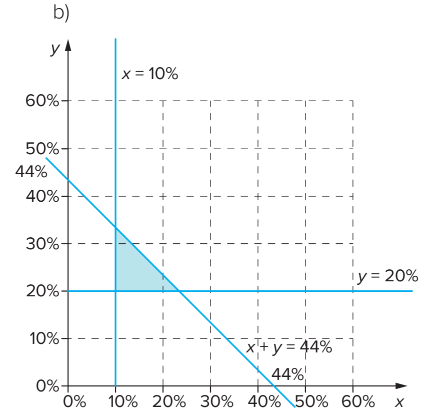
   $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

   b) $X = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \\ 22 \end{pmatrix}$ e $Y = (746 \quad 912 \quad 1078)$.

4. E
5. B
6. a) Verdadeira.
   b) Verdadeira.
   c) Falsa.
7. a) $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$
   b) Demonstração.
   c) $f^{-1}(x) = \frac{dx - b}{-cx + a}$
8. a) $M = \begin{pmatrix} 20 & 31 & 4 \\ 35 & 43 & 5 \end{pmatrix}$
   b) SEGUNDA
   c) GGBB, GNBD, NGDB e NNDD.
9. O São Paulo venceu 18 jogos, empatou 8 e perdeu 12 partidas.
10. a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

    b) $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

    c) m_{21} representa o número de caminhos de B para A com um vértice intermediário. O único é $B \rightarrow B \rightarrow A$.
11. E
12. As raízes são –3, 3 e 4.
13. B
14. a) $a = 0$, $b = 2$ e $c = -1$.
    b) $c = 0$ e $d = -4$.
15. E
16. Soma: 01 + 04 + 08 = 13
17. F; F; V; V; V
18. São necessários 5 padeiros do tipo A, 3 padeiros do tipo B e 2 do tipo C.
19. D
20. C
21. B
22. E
23. B
24. E
25. C
26. C
27. B
28. D
29. E
30. A
31. a) $m = 0$ b) $S = \{(1, -1, 1)\}$
32. A de maior vazão leva 30 minutos e a de menor vazão leva 40 minutos.
33. a) Demonstração.
    b) Para que o sistema tenha solução única q pode ser qualquer valor pertencente a $\mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$.
34. a) $x = 0{,}10$ e $y = 0{,}15$.
    b)



35. a) $(A_\alpha + A_{2\alpha})^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
    b) $\alpha = 3$
36. a) Demonstração.
    b) $p = 0$ e $q = 0$ ou $p = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.
37. a) $x = 1$ ou $x = -2$.
    b) $|z| = \sqrt{13}$

38. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2,5 < x < 0 \cup x > 2,5\}$

b) $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 56 \end{bmatrix}$

39. B
40. C
41. D
42. B
43. C
44. D
45. D
46. B
47. D
48. C
49. B
50. B
51. B
52. A
53. D
54. E
55. E
56. B
57. E
58. C
59. B
60. D
61. B
62. B
63. C
64. C
65. B
66. B
67. B
68. E
69. D
70. A
71. A
72. C
73. a) $B = \begin{bmatrix} 1-c & -c & c \\ -f & 1-f & f \end{bmatrix}$; $\forall c, f$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

74. C
75. C
76. B
77. B
78. A
79. C
80. 5
81. a) Demonstração.

b) $t = \frac{3\pi}{4}$ ou $t = \frac{7\pi}{4}$.

82. $n = 3$ e a soma é –1.
83. $M = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$, com $x \in \mathbb{R}$.
84. B
85. Soma: 01 + 04 = 05
86. a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

b) $S = \{(5, 2, -1)\}$

87. B
88. A
89. D
90. A
91. A
92. C
93. Soma: 01 + 02 + 08 = 11
94. B
95. Não existe a que torne a matriz não singular.
96. $k \in]-2, +\infty[$
97. a) Demonstração.

b) Demonstração.

98. E
99. E
100. A
101. A
102. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

103. E
104. D
105. 1
106. 0
107. C
108. $S = (n + 3) \cdot 2^n - 3$
109. a) $x = 20$ e $y = 10$.

b) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{15a}{11} + \frac{14b}{11} & \frac{14a}{11} + \frac{5b}{11} \end{bmatrix}$ e

$B = \frac{1}{7a^2 - 5ab - 7b^2}\begin{bmatrix} 35a - 48b & 77a - 110b \\ 23a - 35b & 77a - 110b \end{bmatrix}$

110. 72
111. D
112. $\{(-a - b - c), (a + b - c), (-a + b + c), (a - b + c)\}$
113. a) $D = 4$

b) $P(D = 4) = \frac{3}{16}$

114. E
115. B
116. $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$
117. C
118. a) $p = \frac{4}{5}$ e $q = \frac{6}{5}$.

b) $q = \frac{6}{5}$ e $p \in \mathbb{R}$.

c) $p \neq \frac{4}{5}$ e $q \neq \frac{6}{5}$.

119. A
120. C

BNCC em foco

1. D
2. B
3. E

Frente 3

Capítulo 6 – Áreas das figuras planas

Revisando

1. Terreno B.
2. B
3. a) 12

b) 12

c) 60

4. D
5. D
6. A
7. A
8. C
9. D
10. $x = 1{,}915$
11. A
12. C
13. A
14. B
15. a) $DC = 4\sqrt{3}$

b) $R = 6$

c) $S_{\triangle AOB} = 9\sqrt{3}$

d) $S_{Segmento} = 12\pi - 9\sqrt{3}$

Exercícios propostos

1. C
2. E
3. B
4. D
5. E
6. E
7. D
8. A
9. A
10. B
11. A
12. a) $med(B\hat{A}D) = 22°30'$

b) $A_{\triangle ABD} = \frac{x^2\sqrt{2}}{4}$

13. D
14. C
15. A
16. E
17. A
18. E
19. A
20. C
21. B
22. A
23. A
24. A
25. E

26. A
27. C
28. C
29. C
30. A
31. E
32. B
33. C
34. E
35. A
36. C
37. C
38. A
39. C
40. C
41. B
42. A
43. B
44. D
45. D
46. E
47. E
48. C
49. A
50. D
51. C
52. D
53. B
54. C
55. A
56. B
57. E
58. B
59. D
60. A

Exercícios complementares

1. E
2. a) 30 000 pessoas.
   b) 560 000 habitantes.
3. B
4. $A_{\triangle} = 1{,}5 \text{ cm}^2$
5. E
6. A
7. a) $\frac{5}{2}\text{ m}^2$; $\frac{5}{3}$.
   b) R$ 550,00
   c) 18,18%
8. D
9. a) 3 e 4.
   b) 48 cm, 16 cm e 12 cm.
   c) 384 cm², 512 cm² e 864 cm².
10. $A_{\text{Losango}} = 675 \text{ cm}^2$
11. $(7 - 4\sqrt{2}) \text{ cm}^2$
12. D
13. a) Altura: $\frac{\sqrt{55}}{2}$
    b) $A_{\triangle ABR} = \sqrt{55}$
14. a) $\ell = 2r(1 + \sqrt{3})$
    b) $A = r^2(3 + \sqrt{3})$
15. a) $\frac{H}{h} = 5$
    b) $H = \frac{15\sqrt{15}}{4}$
16. A
17. B
18. a) $CN = CM = \frac{2}{3}$
    b) $A_{\triangle CMN} = \frac{\sqrt{3}}{9}$
19. B
20. a) 3 cm
    b) $\frac{3}{2}$
21. a) $A_{\triangle AFE} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$
    b) $x = \frac{1}{5}$
22. 7 m²
23. a) $h = 3$
    b) $r = \sqrt{5}$
    c) $A = 5\pi - 9$
24. a) $A_{\text{Papel}} = 625(1 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$
    b) $\text{med}(\overset{\frown}{BD}) = \frac{25\pi\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$
25. a) $A_{\triangle ABC} = 4\,000\sqrt{3} \text{ m}^2$
    b) $r = 20\sqrt{3} \text{ m}$
    c) $R = \frac{140\sqrt{3}}{3} \text{ m}$
26. a) $A_{\text{espelho-d'água}} = 77{,}5 \text{ m}^2$
    b) $A_{\text{flores}} = 55 \text{ m}^2$
27. a) $A_{\triangle APO} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
    b) $AB_{\text{menor}} = \frac{5\pi}{6}$ e $AB_{\text{maior}} = \frac{19\pi}{6}$.
    c) $A_{\text{hachurada}} = \frac{3\sqrt{3} + 6 + 5\pi}{6}$
28. a) $\frac{A_{\text{Círculo}}}{A_{\text{Setor}}} = \frac{2}{3}$
    b) $\cos(\theta) = \frac{7}{9}$
29. a) $\frac{R}{r} = 3$
    b) $27\sqrt{3} \cdot r^2$
30. A
31. A
32. E
33. a) $r = 2$
    b) AB = 12 e AC = 5.
    c) $A = 30 - 4\pi$
34. a) Aproximadamente 51 cm.
    b) Aproximadamente 185,5 cm².
35. a) $S = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$
    b) R = 5 cm
36. a) $r = 2\sqrt{2} + 2$
    b) $A_{\text{Hachurada}} = 48 + 32\sqrt{2} - (16 - 8\sqrt{2})\pi$
37. A
38. D
39. D
40. a) Aproximadamente 29 cm.
    b) Aproximadamente 64 cm².
41. B
42. D
43. C
44. C
45. E
46. $\frac{R_H}{R_T} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
47. A
48. A
49. C
50. D
51. $S_{\triangle ABC} = 6$
52. B
53. E
54. $A_{\text{Círculo}} = 144\pi \text{ cm}^2$
55. D
56. C
57. B
58. C
59. A
60. D

BNCC em foco

1. C
2. A
3. E

Capítulo 7 – O plano cartesiano

Revisando

1. a) M(3, 6)
   b) M(2, 6)
   c) $M\left(\frac{5}{2}, 1\right)$
   d) $M\left(-\frac{3}{2}, -\frac{11}{2}\right)$
2. D
3. C
4. E
5. D
6. A
7. 13

Exercícios propostos

1. E
2. B
3. B

4. $x = \frac{6}{11}$ e $y = \frac{26}{11}$.

5. a) $h = 17$

b) $P(8 + 8\sqrt{2}, 10)$

6. A

7. E

8. A

9. B

10. A

11. C

12. C

13. A

14. B

15. B

16. a) $\text{med}(A\hat{B}C) = 60°$

b) $3\sqrt{3}$ u.a.

17. Aproximadamente 3 km.

18. B

19. $S_{\triangle ABC} = \frac{15}{4}$ u.a.

20. C

Exercícios complementares

1. D

2. a) $a = -\frac{7}{3}$ e $b = -\frac{5}{3}$.

b) $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$.

c) $a = -1$ e $b = 1$.

d) $a = \frac{5}{4}$ e $b = \frac{7}{4}$.

3. E

4. a) $M_{BC}(4, 3)$

b) $G(1, 6)$

c) $A_{\triangle ABC} = 27$ u.a.

5. a) C: 40 cm afastado da parede e a 1,2 m de altura.

b) B: 25 cm afastado da parede e a 1,6 m de altura.

c) D: 55 cm afastado da parede e a 0,8 m de altura.

6. 1 280 000 km^2

7. C

8. C

9. E

10. A

11. A

12. A(2, 7), B(–4, 3) e C(6, –1).

13. C

14. $d = \sqrt{13}$ km

15. R$ 3 150 000,00

16. D

17. B

18. C

19. B

20. B

BNCC em foco

1. B

2. E

3. A

Capítulo 8 – O estudo da reta

Revisando

1. a) $y = x + 4$ e $x - y + 4 = 0$.

b) $y = -x + 4$ e $x + y - 4 = 0$.

c) $y = \sqrt{3}x - 2$ e $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$.

2. a) $y = \frac{4}{3}x$ e $4x - 3y = 0$.

b) $y = -\frac{1}{2}x + 5$ e $x + 2y - 10 = 0$.

c) $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ e $x - 3y + 7 = 0$.

3. $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$

4. $3x - 4y + 1 = 0$

5. (4, –3)

6. $A_{\triangle ABC} = 10{,}5$ u.a.

7. $y = 2x + 2$

8. $2x + 3y - 19 = 0$

9. $y = -2x + 4$

10. $4x - 3y + 2 = 0$

11. $3x - y - 9 = 0$

12. $4x + y - 32 = 0$

13. 2 u.c.

14. B(−7, −2)

15. $h_A = \frac{19\sqrt{17}}{17}$ u.c.

16. $x - y + 2 = 0$ e $(-2 + \sqrt{3})x - y + 2 = 0$.

Exercícios propostos

1. C

2. C

3. C

4. E

5. A

6. D

7. D

8. E

9. C

10. D

11. a) $3x - 4y + 13 = 0$

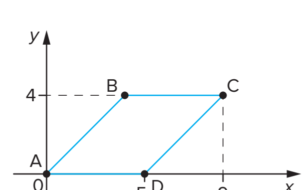
b) $\frac{5}{3}$

12. a) $y = 10x - 85$

b) 115 toneladas.

13. C

14. a)



b) $y = \frac{4}{9}x$

15. B

16. D

17. C

18. D

19. C

20. E

21. C

22. D

23. A

24. C

25. A

26. C

27. B

28. B

29. B

30. C

31. B

32. D

33. C

34. E

35. E

36. B

37. A

38. E

39. D

40. E

41. B

42. A

43. E

44. E

45. C

46. Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15

47. A

48. E

49. A

50. a) $18\sqrt{3}$

b) Área total: $36(5 + \sqrt{3})$

Volume: 270

51. D

52. D

53. D

54. Soma: 01 + 16 = 17

55. A

56. 30

57. D

58. B

59. A

Exercícios complementares

1. B

2. D

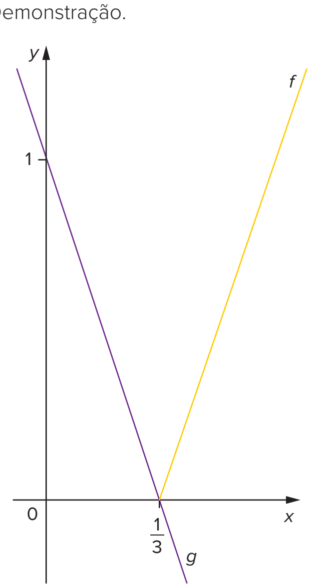
3. B

4. B

5. E

6. D

7. A
8. a) $P(3, 3\sqrt{3})$
   b) $y = (\sqrt{3} - 2)x + 6$
9. I(5, 4)
10. C
11. a) $x + 2y - 12 = 0$
    b) $\text{Área} = -\frac{x^2}{2} + 6x$
    c) $A_{máx} = 18$ u.a.
12. B
13. D
14. a) $y = -2x + 4$
    b) $y = \frac{1}{2}x + \frac{6 - \sqrt{3}}{2}$
    c) $P\left(\frac{16}{9}, 0\right)$
15. A
16. C
17. a) Demonstração.
    b) $\frac{4}{3}$
18. D
19. Soma: 01 + 04 + 08 + 16 = 29
20. $a = 4$ e $b = 1$.
21. A
22. E
23. a) $DE = 3 - 3\alpha$
    b) $f(\alpha) = -\frac{15}{2} \cdot \alpha \cdot (\alpha - 2)$
24. D
25. $N\left(\frac{1 + \sqrt{19}}{2}, 0\right)$
26. C
27. a) $A\left(\frac{7}{11}, \frac{14}{11}\right)$
    b) Demonstração.
28. B
29. C
30. C
31. a) $D\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$
    b) Demonstração.
32. a)



    b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$
    c) $[ABC] = 24$ u.a.
33. E
34. $A_{máxima} = \frac{1}{4}$
35. a) $3x + y - 3 = 0$
    b) $\alpha = -4$
36. a) (6, 5), (3, 2) e (4, 7).
    b) A = 6 u.a.
37. A
38. D
39. $S = \frac{121\sqrt{2}}{12}$
40. a) $\frac{1}{3} < k < \frac{3}{4}$
    b) $k = \frac{4}{7}$ ou $k = 2$.
41. D
42. D
43. a) 20
    b) 15%
44. E
45. C
46. B
47. D
48. A
49. a) $2x + 5y - 14 = 0$ e $10x - 4y + 17 = 0$.
    b) $\frac{\sqrt{1769}}{10}$
50. $(4\sqrt{2} - 5)$ cm
51. E
52. $\text{tg}\,\theta = 7$
53. a) $T\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
    b) $y = -3x$
54. A
55. D
56. E
57. Não são.
58. a) $\cos \alpha = \frac{6\sqrt{85}}{85}$
    b) D(7, 3)
59. E

BNCC em foco

1. 3,4 km
2. 2,8 km
3. 24012 km/h

Capítulo 9 – Equações da circunferência

Revisando

1. a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$
   b) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$
2. a) C(2, 1), R = 4, P(6, 1), Q(–2, 1), S(2, 5) e T(2, –3).
   b) $C(-1, 1)$, $R = \sqrt{5}$, $P(-1 + \sqrt{5}, 1)$, $Q(-1 - \sqrt{5}, 1)$, $S(-1, 1 + \sqrt{5})$ e $T(-1, 1 - \sqrt{5})$.
3. a) Uma circunferência de centro (5, –6) e raio 5.
   b) O ponto (3, –4).
   c) Um conjunto vazio.
4. A
5. Eixo x: $(-2, 0)$; Eixo y: $(0, 4 - 2\sqrt{3})$ e $(0, 4 + 2\sqrt{3})$.
6. $(x + 12)^2 + (y - 13)^2 = 169$
7. Soma: 02 + 04 + 16 = 22
8. A
9. D
10. E
11. $3x - 4y + 16 = 0$ e $3x + 4y - 16 = 0$.
12. a) $p = -15$
    b) $p = 33$
    c) $-15 < p < 33$

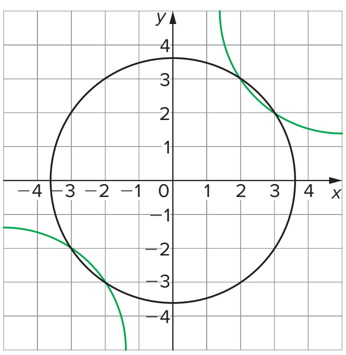
Exercícios propostos

1. C
2. A
3. D
4. C
5. B
6. A
7. E
8. C
9. B
10. C
11. D
12. C
13. Soma: 01 + 02 + 16 = 19
14. B
15. E
16. A
17. C
18. Soma: 01 + 02 + 04 + 08 = 15
19. C
20. Soma: 02 + 04 = 06
21. C
22. B
23. E
24. C
25. D
26. B
27. D
28. D
29. $\frac{10}{3}$
30. C
31. B
32. C
33. A

34. A
35. D
36. D
37. D
38. E
39. A
40. Soma: 02 + 16 = 18

Exercícios complementares

1. a) $2x + 5y - 1 = 0$
   b) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
   c) $\sqrt{3}x + y + 3(1 - \sqrt{3}) = 0$
2. C
3. a) $P(5, -1)$
   b) $\lambda': (x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 1$
4. C
5. C
6. a)



   b) A(2, 3), B(3, 2), C(−2, −3) e D(−3, −2).
   c) A = 10
7. A
8. B
9. C
10. (10, 0), (2, −4), (8, −4).
11. a) $A(1, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{3})$, $C(-1, -\sqrt{3})$ e $D(-1, \sqrt{3})$.
    b) $A_{total} = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}$
12. B
13. B
14. a) $r = 5$
    b) $3x - 4y + 23 = 0$
    c) $A_{\triangle PQR} = \frac{125}{6}$
15. B
16. D
17. a) $OP = \sqrt{265}$
    b) $r = 11$
18. $r: y = x$ e $s: y = -x$.
19. D
20. D
21. B
22. E
23. E
24. C
25. C
26. A
27. a) A pertence a C.
    b) $a < 0$ ou $a > \frac{3}{4}$.
28. A
29. $\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 4)^2 = \frac{9}{4}$
30. E
31. C
32. E
33. A
34. E
35. $C\left(\frac{38}{5}, -\frac{36}{5}\right)$
36. A
37. a) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$
    b) $3 \leq \rho \leq 7$
38. D
39. C
40. $C\left(\frac{1}{4}, \frac{15\sqrt{3}}{4}\right)$ e $r = \frac{11}{2}$ ou $C\left(\frac{23}{4}, -\frac{7\sqrt{3}}{4}\right)$ e $R = \frac{11}{2}$.

BNCC em foco

1. E
2. D
3. B