OBJETIVO

ITA
Matemática
Livro do Professor

7

MÓDULO 25

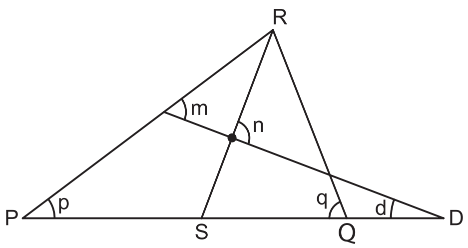
Geometria Plana I

1. (**MAM-*Mathematical Association of America***) – Dados um triângulo PQR, onde $\overline{RS}$ é bissetriz do ângulo interno $\hat{R}$ do triângulo, $\overline{PQ}$ é estendida até D e o ângulo n é reto, então

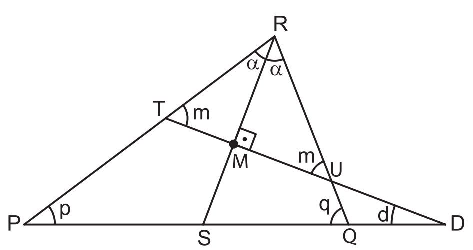
a) $m = \dfrac{1}{2}(p - q)$ b) $m = \dfrac{1}{2}(p + q)$

c) $d = \dfrac{1}{2}(q + p)$ d) $d = \dfrac{1}{2}m$

e) nenhuma das anteriores



RESOLUÇÃO:



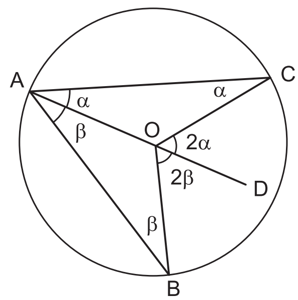
$\Delta RMT \cong \Delta RMU \Rightarrow R\hat{U}M = R\hat{T}M = m$

No ΔPDT, tem-se $m = p + d$
No ΔQDU, tem-se $q = m + d$ $\Rightarrow \begin{cases} d = \dfrac{1}{2}(q - p) \\ m = \dfrac{1}{2}(p + q) \end{cases}$

Resposta: B

2. Mostre que o ângulo inscrito em uma circunferência é a metade do ângulo central correspondente.

RESOLUÇÃO:

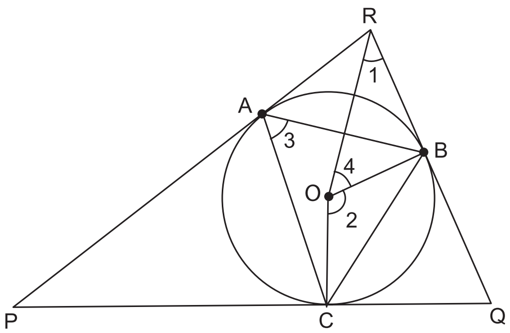


Os triângulos OAC e OAB são isósceles. Neles temos:
$O\hat{A}C = O\hat{C}A = \alpha$ e $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \beta$
Os ângulos externos medem respectivamente 2α e 2β.
Desta forma,

$C\hat{O}B = 2\alpha + 2\beta = 2 \cdot (\alpha + \beta) = 2 \cdot B\hat{A}C \Leftrightarrow B\hat{A}C = \dfrac{C\hat{O}B}{2}$

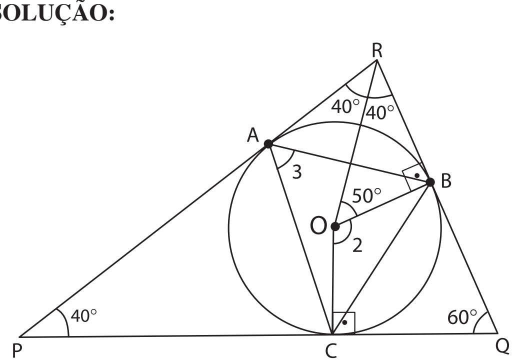
Resposta: Demonstração

3. **(ITA)** – Considere o triângulo PQR abaixo, circunscrito a uma circunferência de centro O, cujos pontos de tangências são A, B e C. Sabe-se que os ângulos $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética de razão 20°. Os ângulos 1, 2, 3 e 4, conforme mostrado na figura abaixo, medem, nesta ordem:



a) 40°, 120°, 60°, 50°
b) 40°, 100°, 50°, 40°
c) 60°, 140°, 60°, 40°
d) 60°, 120°, 40°, 50°
e) n.d.a.

RESOLUÇÃO:



Se os ângulos $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nesta ordem, em PA de razão 20°, então P = 40°, Q = 60° e R = 80° e $\boxed{\hat{1} = 40°}$, pois $\overrightarrow{RO}$ é bissetriz.

O ângulo $\boxed{\hat{4} = 50°}$, pois o triângulo OBR é retângulo em $\hat{B}$.

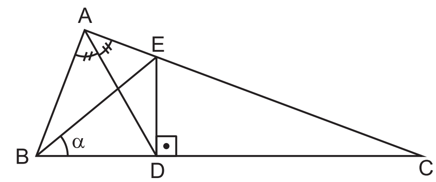
No quadrilátero OBQC, tem-se:

$\hat{2} + 90° + 60° + 90° = 360° \Rightarrow \boxed{\hat{2} = 120°}$

O ângulo $\hat{3}$ é a metade de $\hat{2}$, pois $\hat{2}$ é o ângulo central de arco $\overset{\frown}{BC}$ e $\hat{3}$ é o ângulo inscrito e, portanto, $\boxed{\hat{3} = 60°}$

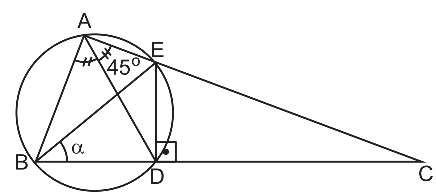
Resposta: A

4. Da figura, sabe-se que D é o pé da bissetriz do ângulo reto $\hat{A}$ do triângulo retângulo ABC. Se $\overline{DE}$ é perpendicular a $\overline{BC}$, o ângulo α:



a) é igual a $\hat{c}$
b) é igual a $\dfrac{90° + \hat{c}}{2}$
c) é igual a 45°
d) é maior que 45°
e) n.r.a.

RESOLUÇÃO:
Sr. Professor, comente com o aluno que todo quadrilátero inscrito em uma circunferência possui ângulos opostos suplementares e vice-versa. Comente também que ângulos inscritos em uma circunferência e correspondentes ao mesmo arco são congruentes.



O quadrilátero ABDE é inscritível, pois os ângulos $B\hat{A}E$ e $B\hat{D}E$ são suplementares.
Os ângulos $D\hat{A}E$ e $D\hat{B}E$ correspondem ao mesmo arco $\overset{\frown}{DE}$ da circunferência e, portanto $\alpha = D\hat{B}E = D\hat{A}E = 45°$.
Resposta: C

5. **(OBM)** – No triângulo ABC, o ângulo $\hat{A}$ mede 60° e o ângulo B mede 50°. Sejam M o ponto médio do lado AB e P o ponto sobre o lado BC tal que AC + CP = BP. Qual a medida do ângulo MPC?

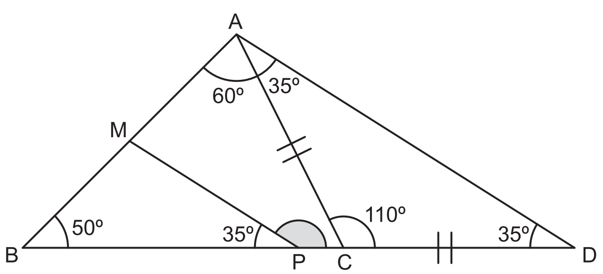
a) 120° b) 125° c) 130°
d) 135° e) 145°

RESOLUÇÃO:

Consideremos D no prolongamento do lado $\overline{BC}$ tal que AC = CD. Como BP = AC + CP = CD + CP = PD, P é ponto médio do segmento $\overline{BD}$ e, sendo M o ponto médio do segmento $\overline{AB}$, temos $\overline{MP} // \overline{AD}$.

No triângulo isósceles ADC, temos

$$A\hat{D}C = \frac{180° - A\hat{C}D}{2} = \frac{180° - 110°}{2} = 35°$$



Assim sendo:

$M\hat{P}C = 180° - M\hat{P}B = 180° - A\hat{D}C = 180° - 35° = 145°$

Resposta: E

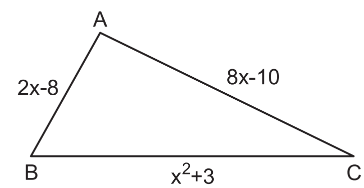
MÓDULO 26

Geometria Plana I

1. Se as medidas dos lados de um triângulo são dadas por $(2x - 8)$, $(8x - 10)$ e $(x^2 + 3)$, com $x \in \mathbb{Z}$, o perímetro é

a) 14 .
b) um número par.
c) um quadrado perfeito.
d) múltiplo de 5.
e) o dobro do maior lado.

RESOLUÇÃO:



$$\begin{cases} x^2 + 3 < (2x - 8) + (8x - 10) \\ 2x - 8 < (x^2 + 3) + (8x - 10) \\ 8x - 10 < (x^2 + 3) + (2x - 8) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 21 < 0 \\ x^2 + 6x + 1 > 0 \\ x^2 - 6x + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 7 \\ x < -3 - 2\sqrt{2} \text{ ou } x > -3 + 2\sqrt{2} \\ x < 1 \text{ ou } x > 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 5 < x < 7$, portanto $x = 6$, pois $x \in \mathbb{Z}$.

Os lados medem 4, 38 e 39. O perímetro é 81, que é quadrado perfeito.
Resposta: C

2. **(ITA)** – De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a:

a) 63 b) 65 c) 66 d) 70 e) 77

RESOLUÇÃO:
Sendo n e n + 6 os números de lados e, d e d + 39, os números de diagonais desses dois polígonos convexos, têm-se:

1º) $d = \dfrac{n(n-3)}{2} \Leftrightarrow 2d = n^2 - 3n$

2º) $d + 39 = \dfrac{(n+6)(n+6-3)}{2} \Leftrightarrow 2d + 78 = (n+6)(n+3)$

Assim: $n^2 - 3n + 78 = n^2 + 9n + 18 \Leftrightarrow 12n = 60 \Leftrightarrow n = 5$

Conclui-se, portanto, que um dos polígonos convexos tem 5 vértices e 5 diagonais e o outro polígono tem exatamente 5 + 6 = 11 vértices e 5 + 39 = 44 diagonais.
Logo, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a: 5 + 11 + 5 + 44 = 65
Resposta: B

3. **(ITA)** – Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a 3780°. O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a:

a) 63 b) 69 c) 90 d) 97 e) 106

RESOLUÇÃO:
Sendo n – p, n e n + p os números naturais que expressam a quantidade de lados destes três polígonos e S_d o número total das diagonais nestes três polígonos, de acordo com o enunciado, têm-se:

1º) $(n-p-2)\,180° + (n-2)\,180° + (n+p-2)\,180° = 3780° \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n - \cancel{p} - 2 + n - 2 + n + \cancel{p} - 2 = 21 \Leftrightarrow 3n - 6 = 21 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3n = 27 \Leftrightarrow n = 9$

2º) $(n-p) \,.\, n \,.\, (n+p) = 585$

Assim: $(9-p) \,.\, 9\,(9+p) = 585 \Leftrightarrow 81 - p^2 = 65 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2 = 16 \Leftrightarrow p = 4$, **pois** $p \in \mathbb{N}$

Os polígonos têm 5, 9 e 13 lados e, portanto, o número total de diagonais é

$$S_d = \frac{5 \,.\, 2}{2} + \frac{9 \,.\, 6}{2} + \frac{13 \,.\, 10}{2} = 97$$

Resposta: D

8. **(ITA)** – Considere as afirmações sobre polígonos convexos:

I) Existe apenas um polígono cujo número de diagonais coincide com o número de lados.

II) Não existe polígono cujo número de diagonais seja o quádruplo do número de lados.

III) Se a razão entre o número de diagonais e o de lados de um polígono é um número natural, então o número de lados do polígono é ímpar.

Então:

a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.
c) Apenas (I) é verdadeira.
d) Apenas (III) é verdadeira.
e) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

RESOLUÇÃO:
Sendo d o número de diagonais e n o número de lados do polígono, temos:

I) Verdadeira

$$d = n \Leftrightarrow \frac{n\,.\,(n-3)}{2} = n \Leftrightarrow n^2 - 5n = 0 \Leftrightarrow n = 0 \text{ ou } n = 5$$

Como n ≥ 3, temos n = 5 e, portanto, o único polígono é o pentágono.

II) Falsa

$$d = 4n \Leftrightarrow \frac{n\,.\,(n-3)}{2} = 4n \Leftrightarrow n^2 - 11n = 0 \Rightarrow n = 0 \text{ ou } n = 11$$

Como n ≥ 3, temos n = 11 e, portanto, existe um polígono que satisfaz a condição d = 4n. É o undecágono.

III) Verdadeira

Seja $k \in \mathbb{N}$ a razão entre o número de diagonais e o número de lados.
Assim,

$$\frac{d}{n} = k \Leftrightarrow d = n\,.\,k \Leftrightarrow \frac{n\,.\,(n-3)}{2} = n\,.\,k$$

Como n ≥ 3, temos:

$$\frac{n-3}{2} = k \Leftrightarrow n - 3 = 2k \Leftrightarrow n = 2k + 3$$

e, portanto, n é ímpar.
Resposta: B

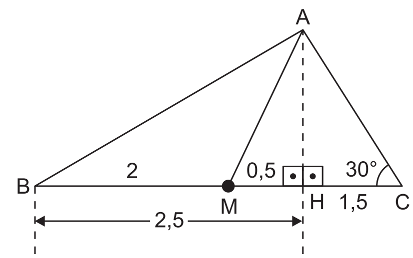
MÓDULO 27

Geometria Plana I

1. **(ITA)** – Num triângulo ABC, BC = 4 cm, o ângulo C mede 30° e a projeção do lado AB sobre BC mede 2,5 cm. O comprimento da mediana que sai do vértice A mede:

a) 1 cm b) $\sqrt{2}$ cm c) 0,9 cm
d) $\sqrt{3}$ cm e) 2 cm

RESOLUÇÃO:



$$\frac{AH}{1{,}5} = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AH = 0{,}5\sqrt{3}$$

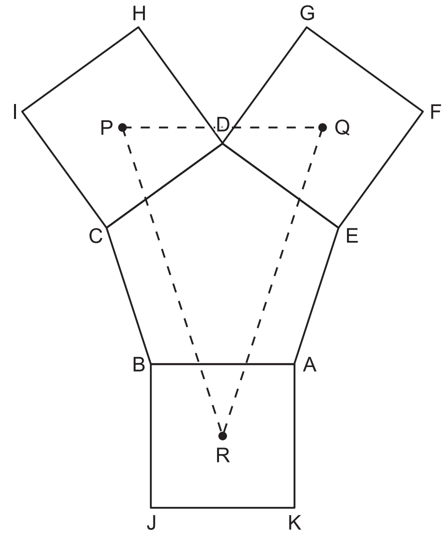
$$AM^2 = (0{,}5)^2 + (0{,}5\sqrt{3})^2$$

$$AM^2 = (0{,}5)^2(1 + 3) = 1$$

AM = 1

Resposta: A

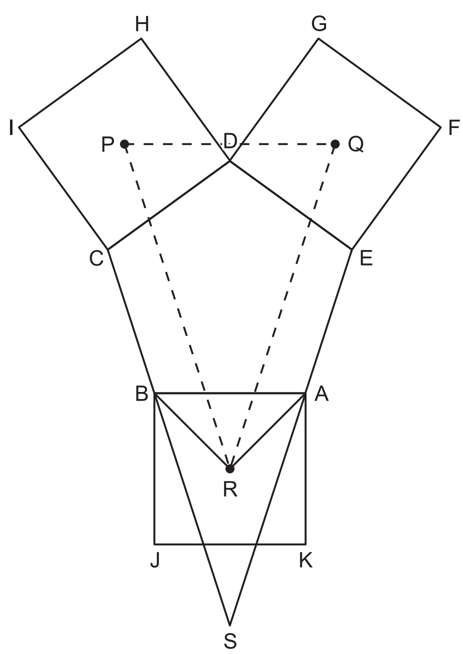
4. Na figura



ABCDE é um pentágono regular. P, Q e R são os centros dos quadrados DEFG, CDHI e ABJK. A medida do ângulo $P\hat{R}Q$é:

a) 18° b) 24° c) 30° d) 36° e) 42°

RESOLUÇÃO:



1) Os ângulos internos do pentágono medem 108°.

2) $\left.\begin{array}{l}\mathbf{Q\hat{E}A = R\hat{A}E = 108° + 45° = 153°} \\ \mathbf{\overline{QE} \cong \overline{AR}}\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ AEQR é um trapézio isósceles e, portanto, $\overleftrightarrow{AE} // \overleftrightarrow{QR}$

3) De forma análoga $\overleftrightarrow{PR} // \overleftrightarrow{BC}$

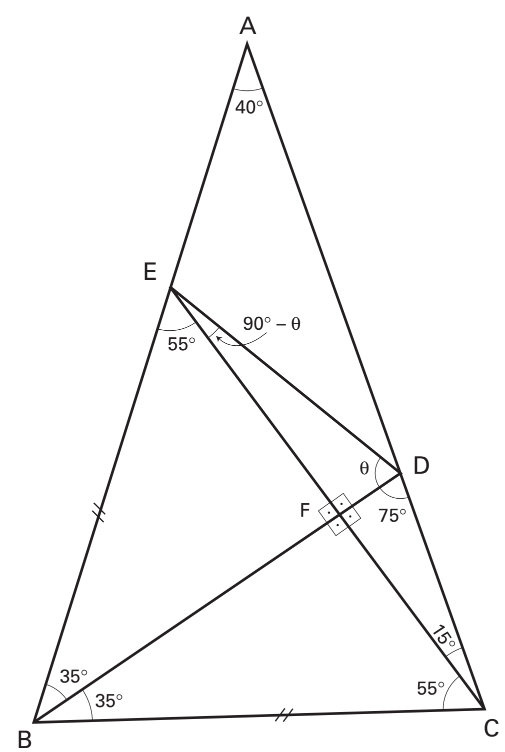
4) $P\hat{R}Q = C\hat{S}E = 180° - 2 \,.\, B\hat{A}S = 180° - 2 \,.\, (180° - 108°) = 36°$

Resposta: D

3. **(ITA)** – Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede 40°. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15°$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35°$. Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale

a) 35° b) 45° c) 55° d) 75° e) 85°

RESOLUÇÃO:
Com os dados do enunciado, pode-se montar a seguinte figura, onde θ é a medida, em graus, do ângulo $E\hat{D}B$



1) Da congruência entre os triângulos retângulos FBC e FBE, resulta: FC = FE

2) Os triângulos retângulos FDC e FDE são congruentes pelo critério LAL, pois: FC = FE, FD é lado comum e $D\hat{F}C = D\hat{F}E = 90°$

Assim: $F\hat{C}D = F\hat{E}D \Leftrightarrow 15° = 90° - \theta \Leftrightarrow \theta = 90° - 15° \Leftrightarrow \theta = 75°$

Resposta: D

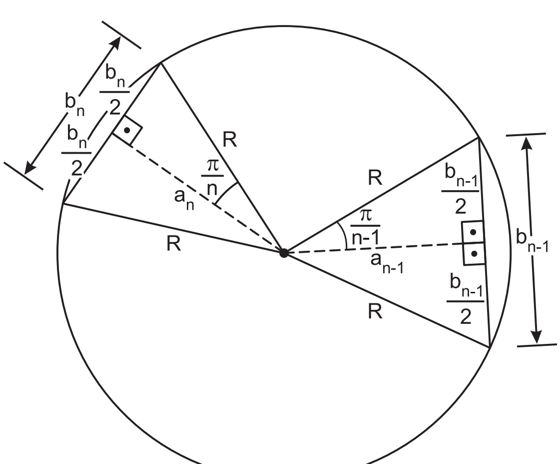
4. **(ITA)** – Seja P_n um polígono regular de n lados, com $n > 2$. Denote por a_n o apótema e por b_n o comprimento de um lado de P_n. O valor de n para o qual valem as desigualdades $b_n \le a_n$ e $b_{n-1} > a_{n-1}$ pertence ao intervalo

a) $3 < n < 7$ b) $6 < n < 9$ c) $8 < n < 11$

d) $10 < n < 13$ e) $12 < n < 15$

RESOLUÇÃO:

1) Sem perda de generalidade, consideremos dois polígonos (de (n – 1) e n lados), inscritos no mesmo círculo de raio R, como se vê na figura seguinte.



em que $$\text{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{\frac{b_n}{2}}{a_n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{b_n}{a_n}$$ **e de modo análogo,**

$$\text{tg}\left(\frac{\pi}{n-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$$

2) De $0 < b_n \le a_n$ e $b_{n-1} > a_{n-1} > 0$, tem-se:

2.1) $$\frac{b_n}{a_n} \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{b_n}{a_n} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \le \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

assim: $$\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow n > 6 \quad \text{(I)}$$

2.2) $$\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{\pi}{n-1}\right) > \frac{1}{2} > \sqrt{2} - 1 = \text{tg}\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

assim: $$\frac{\pi}{n-1} > \frac{\pi}{8} \Leftrightarrow n - 1 < 8 \Leftrightarrow n < 9 \quad \text{(II)}$$

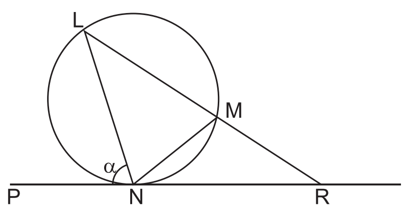
3) De (I) e (II), tem-se, finalmente: $6 < n < 9$

Resposta: B

MÓDULO 28

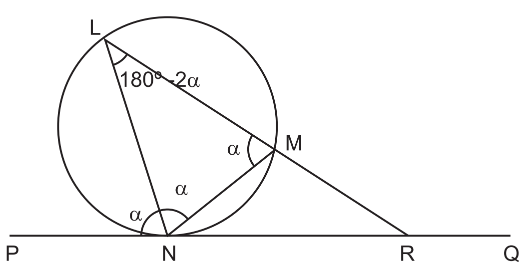
Geometria Plana I

1. **(OBM-RETIFICADO)** – Na figura, a reta PQ toca em N o círculo que passa por L, M e N. A reta LM corta a reta PQ em R. Se LM = LN e a medida do ângulo PNL é α, $\alpha > 60°$, quanto mede o ângulo LRP?



a) $3\alpha - 180°$ b) $180° - 2\alpha$ c) $180° - \alpha$
d) $90° - \alpha/2$ e) α

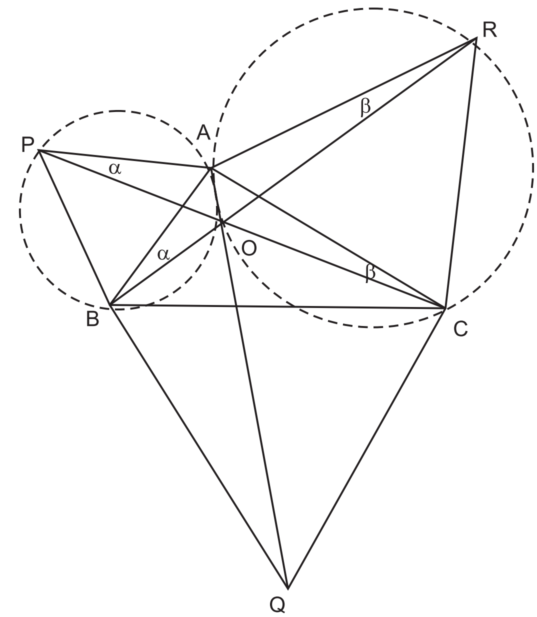
RESOLUÇÃO:

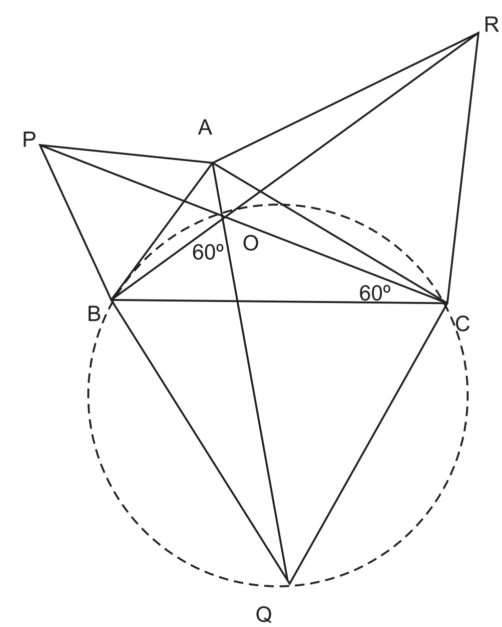


Como a reta PQ é tangente à circunferência, os ângulos $L\hat{N}P$ e $L\hat{M}N$ são congruentes, pois correspondem ao mesmo arco de circunferência. Seja a a medida de cada um deles. Sendo o triângulo LMN isósceles com LM = LN, os ângulos $L\hat{M}N$ e $L\hat{N}M$ são congruentes.
Assim, $M\hat{L}N = 180 - 2\alpha$ e $L\hat{R}P = \alpha - (180 - 2\alpha) = 3\alpha - 180°$.
Resposta: A

2. Sobre os lados do triângulo ABC são construídos os triângulos equiláteros ABP, BCQ e CAR, não sobrepostos ao triângulo ABC. Demonstre que as retas $\overleftrightarrow{AQ}$, $\overleftrightarrow{BR}$ e $\overleftrightarrow{CP}$ se interceptam em um mesmo ponto **O**.

RESOLUÇÃO:

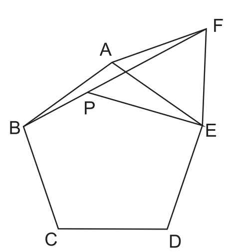




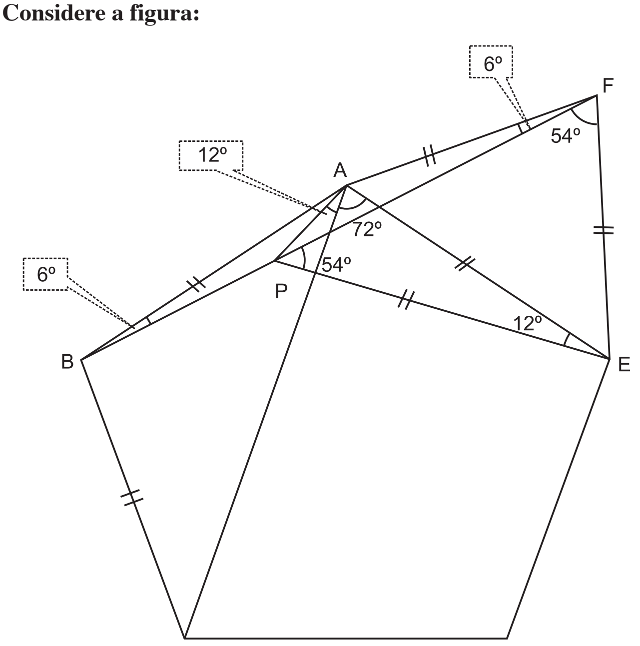
Seja O o ponto de intersecção das retas $\overleftrightarrow{BR}$ e $\overleftrightarrow{CP}$. O que se deve provar é que os pontos A, O e Q são colineares, ou seja, $A\hat{O}B + B\hat{O}Q = 180°$
Demonstração:
Os triângulos PAC e BAR são congruentes, pois $\overline{PA} \equiv \overline{BA}$, $P\hat{A}C \equiv B\hat{A}R = 60° + B\hat{A}C$ e $\overline{AC} \equiv \overline{AR}$.
Os ângulos $O\hat{B}A$ e $O\hat{P}A$, assinalados por α na figura, são congruentes e os pontos O, B, P e A pertencem a uma mesma circunferência. Desta forma $A\hat{O}B = 180° - A\hat{P}B = 180° - 60° = 120°$. De forma análoga, os pontos O, A, R e C também pertencem

a uma mesma circunferência e $A\hat{O}C = 120°$. Como consequência $B\hat{O}C = 120°$, $B\hat{O}C + B\hat{Q}C = 180°$ e os pontos O, B, Q e C também pertencem a uma mesma circunferência. Assim, $B\hat{O}Q \equiv B\hat{C}Q = 60°$ e $A\hat{O}B + B\hat{O}Q = 120° + 60° = 180°$, o que prova que os pontos A, O e Q são colineares.
Resposta: Demonstração

3. **(OBM)** – Na figura, ABCDE é um pentágono regular e AEF é um triângulo equilátero. Seja P um ponto sobre o segmento BF, no interior de ABCDE, e tal que o ângulo $P\hat{E}A$ mede 12°, como mostra a figura abaixo. Calcule a medida, em graus, do ângulo $P\hat{A}C$.



RESOLUÇÃO:
Considere a figura:



a) O triângulo ABF é isósceles e $A\hat{F}B = 6°$, pois

$$A\hat{F}B = \frac{180° - (108° + 60°)}{2} = 6°$$

b) No triângulo FEP temos $P\hat{F}E = 60° - 6° = 54°$ e $P\hat{E}F = 12° + 60° = 72°$. Desta forma, $F\hat{P}E = 180° - 54° - 72° = 54°$ e, portanto, o triângulo FEP é isosceles de base $\overline{PF}$.

c) Como AE = FE e PE = FE, temos PE = AE e o triângulo AEP é isosceles e tem ângulo da base $P\hat{A}E = \dfrac{180° - 12°}{2} = 84°$.

d) No triângulo ABC isósceles, temos $BAC = \dfrac{180° - 108°}{2} = 36°$ e, portanto $C\hat{A}E = 72°$.

Assim, $P\hat{A}C = P\hat{A}E - C\hat{A}E = 84° - 72° = 12°$.

Resposta: 12°

■ MÓDULO 25

1. No triângulo ABC, AC = CD e $C\hat{A}B - A\hat{B}C = 30°$. Então, o ângulo $B\hat{A}D$ mede:

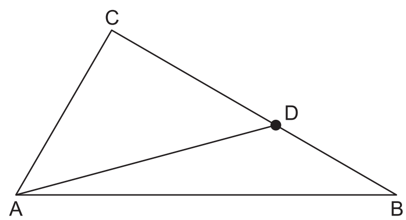
a) 30°

b) 20°

c) 22,5°

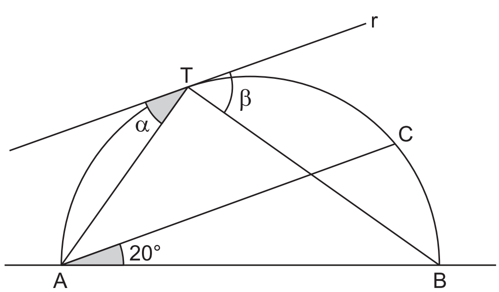
d) 10°

e) 15°



2. Na figura, AB é o diâmetro do semi-círculo que forma 20° com a corda $\overline{AC}$. Se r é tangente ao círculo e r // $\overline{AC}$, os ângulos α e β medem, respectivamente:

a) 20° e 70° b) 25° e 65° c) 30° e 60°
d) 35° e 55° e) 10° e 70°



3. **(ITA)** – Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo, considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) 23° b) 32° c) 36° d) 40° e) 45°

■ MÓDULO 26

1. **(OBM)** – DEFG é um quadrado no exterior do pentágono regular ABCDE. Quanto mede o ângulo $E\hat{A}F$?

a) 9° b) 12° c) 15° d) 18° e) 21°

2. **(COLÉGIO NAVAL)** – Dois lados de um triângulo são iguais a 4cm e 6cm. O terceiro lado é um número inteiro expresso por $x^2 + 1$, com $x \in \mathbb{Z}$. O seu perímetro é:

a) 13 cm b) 14 cm c) 15 cm
d) 16 cm e) 20 cm

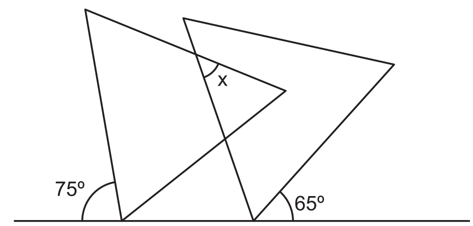
3. **(ITA)** – O número de diagonais de um polígono regular de 2n lados, que não passam pelo centro da circunferência circunscrita a esse polígono, é dado por:

a) 2n(n – 2) b) 2n(n – 1) c) 2n(n – 3)

d) $\dfrac{n(n-5)}{2}$ e) n.d.a.

■ MÓDULO 27

1. **(OBM)** – Na figura, os dois triângulos são equiláteros. Qual é o valor do ângulo x?



a) 30°

b) 40°

c) 50°

d) 60°

e) 70°

2. **(BIELORÚSSIA)** – No losango ABCD, ∠ A = 60°. Os pontos **F**, **H** e **G** estão sobre os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{AC}$ de modo que DFGH é um paralelogramo. Prove que FBH é um triângulo equilátero.

■ MÓDULO 28

1. **(ITA)** – Considere uma circunferência de centro em O e diâmetro AB. Tome um segmento BC tangente à circunferência, de modo que o ângulo BCA meça 30°. Seja D o ponto de encontro da circunferência com o segmento AC e DE o segmento paralelo a AB, com extremidades sobre a circunferência. A medida do segmento DE será igual

a) a metade da medida de AB.

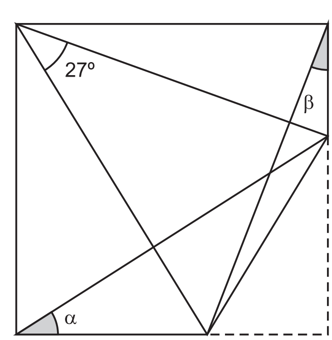
b) a um terço da medida de AB.

c) a metade da medida de DC.

d) a dois terços da medida de AB.

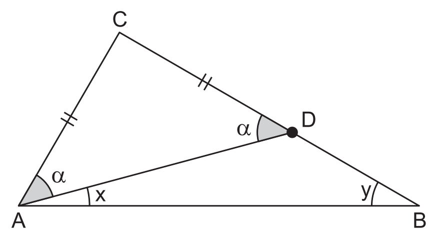
e) a metade da medida de AE.

2. **(OBM)** – O canto de um quadrado de cartolina foi cortado com uma tesoura. A soma dos comprimentos dos catetos do triângulo recortado é igual ao comprimento do lado do quadrado. Qual o valor da soma dos ângulos α e β marcados na figura ao lado?



■ MÓDULO 25

1)



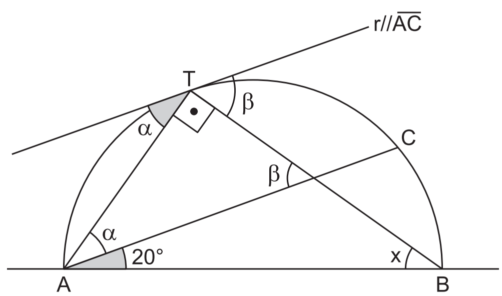
Conforme a figura, $x + y = \alpha$

Do enunciado $C\hat{A}B - A\hat{B}C = (\alpha + x) - y = 30°$
Desta forma,

$$\left.\begin{array}{l} x + y = \alpha \\ x - y = 30° - \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow x = 15°$$

Resposta: E

2)

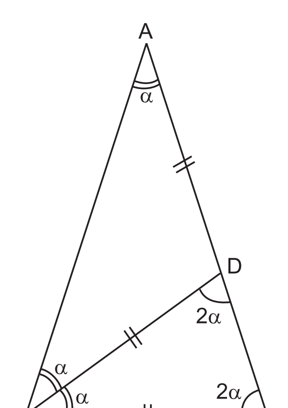


Conforme a figura,
$\beta = x + 20°$
$\alpha = x$, pois correspondem ao mesmo arco $\overset{\frown}{AT}$.
Assim,

$$\left\{\begin{array}{l} \beta = \alpha + 20° \\ \alpha + \beta = 90° \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha = 35° \\ \beta = 55° \end{array}\right.$$

Resposta: D

3)



1) Seja α a medida do ângulo $B\hat{A}C$. Como o triângulo ADB é isósceles de base $\overline{AB}$, temos:
$D\hat{A}B = D\hat{B}A = \alpha$

2) $B\hat{D}C = 2\alpha$, pois é ângulo externo do triângulo ABD.

3) ΔCBD é isósceles de base $\overline{CD} \Rightarrow B\hat{C}D = B\hat{D}C = 2\alpha$

4) ΔABC é isósceles de base $\overline{BC} \Rightarrow A\hat{B}C = A\hat{C}B = 2\alpha$

Assim, no triângulo CBD, temos:
$2\alpha + \alpha + 2\alpha = 180° \Leftrightarrow \alpha = 36°$

Resposta: C

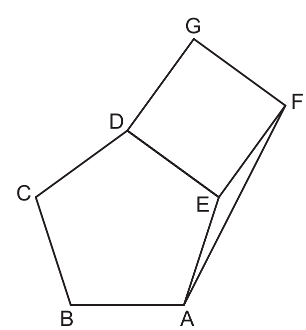
■ MÓDULO 26

1) Lembrando que o ângulo interno de um pentágono regular é igual a $\dfrac{(5-2)\,.\,180°}{5} = 108°$, temos que

$A\hat{E}F = 360 - 108° - 90° = 162°$

Como o triângulo AEF é isósceles com AE = EF, temos

$$E\hat{A}F = \frac{180° - 162°}{2} = 9°$$



Resposta: A

2)
I) $x^2 + 1 < 4 + 6 \Leftrightarrow x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 3$
II) $4 < x^2 + 1 + 6 \Leftrightarrow x^2 > -3 \Leftrightarrow \forall\, x \in \mathbb{R}$
III) $6 < x^2 + 1 + 4 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$
De (I), (II) e (III), tem-se $-3 < x < -1$ ou $1 < x < 3$ e portanto $x = -2$ ou $x = 2$. Os lados medem 4 cm, 5 cm e 6 cm e o perímetro é 15 cm.
Resposta: C

3) O número de diagonais de um polígono de 2n lados é $\dfrac{2n(2n-3)}{2}$.

Destas, $\frac{2n}{2}$ passam pelo centro.

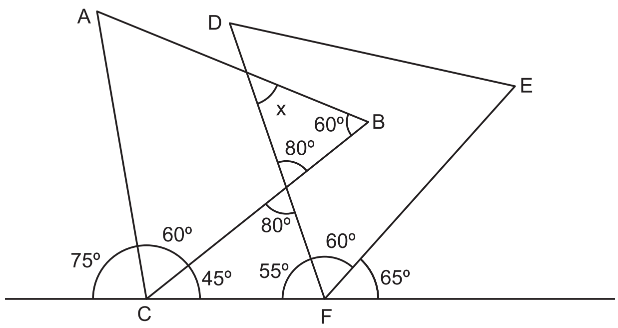
Não passam pelo centro $\frac{2n(2n-3)}{2} - \frac{2n}{2} =$

$= n \cdot (2n - 3 - 1) = 2n(n - 2)$

Resposta: A

■ MÓDULO 27

1)

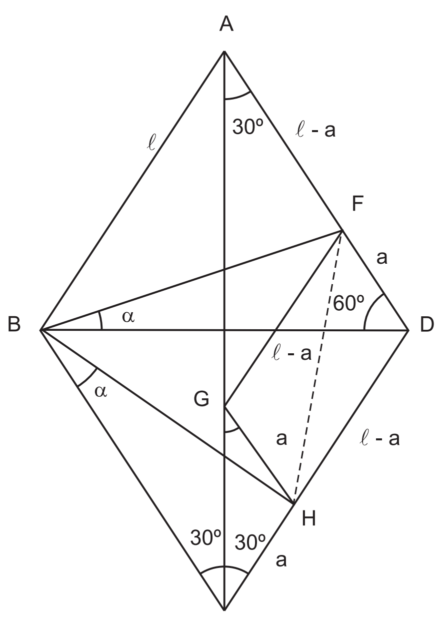


Os triângulos ABC e DEF são equiláteros e possuem ângulos internos de 60°. Desta forma os ângulos $B\hat{C}F$ e $D\hat{F}C$ e medem respectivamente 45° e 55°, e permitem obter os demais ângulos assinalados na figura.

Assim, $x + 60° + 80° = 180° \Leftrightarrow x = 40°$

Resposta: B

2)



a) **No paralelogramo DFGH temos $F\hat{D}H = F\hat{G}H = 120°$ e $D\hat{F}G = D\hat{H}G = 60°$. Por ser $\overleftrightarrow{FG} \,//\, \overleftrightarrow{DH}$ os ângulos $A\hat{F}G$ e $G\hat{H}C$ medem 120° e, consequentemente, os ângulos $A\hat{G}F$ e $H\hat{G}C$ medem 30º, o que prova que os triângulos AFG e GHC são isósceles.**

b) **Desta forma, CH = GH = FD = a, AF = GF = HD = = ℓ – a, onde ℓ é a medida do lado do losango.**

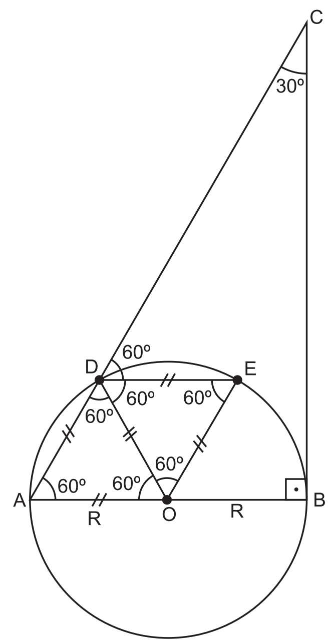
c) **Os triângulos CBH e DBF são congruentes, pois CB = DB = ℓ, BCH = BDF = 60° e CH = DF. Do que se conclui CBH = DBF = α e BH = BF.**

d) **Como $H\hat{B}F = H\hat{B}D + D\hat{B}F = H\hat{B}D + C\hat{B}H = 60°$ e BH = BF, o triângulo FBH é equilátero.**

Resposta: Demonstração

■ MÓDULO 28

1)



Os triângulos DAO e DEO são equiláteros. Assim, sendo R o raio da circunferência de diâmetro AB, tem-se:

1) AB = 2R

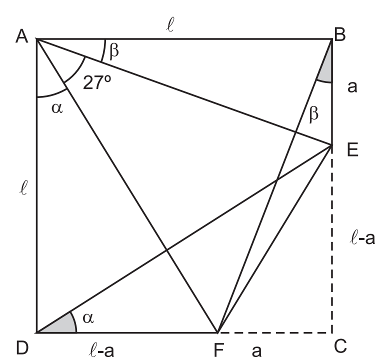
2) OA = AD = OD = DE = OE = R

Logo:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow DE = \frac{1}{2} = . AB$$

2) Considere a figura:



a) **Seja ℓ a medida do lado do quadrado e FC = a. Como FC + CE = ℓ, temos CE = ℓ – a, DF = ℓ – a, EB = ℓ – (ℓ – a) = a e, portanto, EB = FC e DF = CE.**

b) **Os triângulos ABE e BCF são congruentes pelo critério LAL. Pelo mesmo motivo também são congruentes os triângulos ADF e DCE. Assim, $D\hat{A}F = \alpha$ e $B\hat{A}E = \beta$.**

c) **Como $\alpha + \beta + 27° = 90°$, temos $\alpha + \beta = 63°$.**

Resposta: 63°