

CONHECIMENTOS DE

 **ESTATÍSTICA**

COMBINATÓRIA

PROBABILIDADE


ANDERSON
MATEMÁTICA

MÓDULO II - SUMÁRIO

CONTEÚDO	PÁGINA
ESTATÍSTICA - Conceitos Iniciais	03
ESTATÍSTICA - Conceitos Iniciais - Questões	15
ESTATÍSTICA - Média Aritmética Simples	39
ESTATÍSTICA - Média Aritmética Simples - Questões	43
ESTATÍSTICA - Média Aritmética Ponderada	59
ESTATÍSTICA - Média Aritmética Ponderada - Questões	61
ESTATÍSTICA - Moda	67
ESTATÍSTICA - Moda - Questões	70
ESTATÍSTICA - Mediana	75
ESTATÍSTICA - Mediana - Questões	80
ESTATÍSTICA - Média, Mediana e Moda - Questões	95
ESTATÍSTICA - Medidas de Dispersão	101
ESTATÍSTICA - Medidas de Dispersão - Questões	114
ESTATÍSTICA - Gabarito	118
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Princípio Fundamental da Contagem	121
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Princípio Fundamental da Contagem - Questões	124
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Permutação Simples	134
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Permutação Simples - Questões	136
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Permutação com Repetição	139
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Permutação com Repetição - Questões	142
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Arranjo Simples	146
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Arranjo Simples - Questões	148
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Combinação Simples	151
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Combinação Simples - Questões	153
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Permutação Circular	158
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Permutação Circular - Questões	161
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Combinação Completa	163
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Combinação Completa - Questões	166
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Gabarito	168
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Permutação com Repetição, Permutação Circular, Arranjo Simples, Combinação Simples e Combinação Completa - Questões	169
ANÁLISE COMBINATÓRIA - Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Permutação com Repetição, Permutação Circular, Arranjo Simples, Combinação Simples e Combinação Completa - Gabarito	182
PROBABILIDADE - Experimentos Determinísticos	185
PROBABILIDADE - Experimentos Aleatórios	186
PROBABILIDADE - Espaço Amostral	187
PROBABILIDADE - Evento	189
PROBABILIDADE - Definição	190
PROBABILIDADE - Probabilidade de um Evento Complementar	191
PROBABILIDADE - Probabilidade Condicional	192
PROBABILIDADE - Probabilidade de Eventos Independentes	192
PROBABILIDADE - Probabilidade da União de Eventos	193
PROBABILIDADE - Probabilidade Binomial	194
PROBABILIDADE - Questões	196
PROBABILIDADE - Gabarito	235

CONHECIMENTOS DE

ESTATÍSTICA



Inicialmente, se analisarmos a matriz de referência do ENEM, veremos que para estatística, espera-se que o aluno saiba sobre:

- Representação e análise de dados;
- Medidas de tendência central (médias, moda e mediana);
- Medidas de dispersão (desvios e variância).

Nosso curso de estatística será fundamentado no que realmente o ENEM aborda.

Mas o que é estatística?

A Estatística pode ser encarada como uma ciência ou como um método de estudo.

A Estatística pode ser vista a partir de duas concepções:

- No plural (estatísticas), indica qualquer coleção consistente de dados numéricos, reunidos com a finalidade de fornecer informações acerca de uma atividade qualquer. Por exemplo, as estatísticas demográficas referem-se a dados numéricos sobre nascimentos, falecimentos, matrimônios, desquites, etc;
- No singular, indica um corpo de técnicas, ou ainda uma metodologia técnica desenvolvida para a coleta, a classificação, a apresentação, a análise e a interpretação de dados quantitativos e a utilização desses dados para a tomada de decisões.

Qualquer ciência experimental não pode prescindir das técnicas proporcionadas pela Estatística, como por exemplo, a Física, a Biologia, a Administração, a Economia, etc. Todos esses ramos de atividade profissional tem necessidade de um instrumental que se preocupa com o tratamento quantitativo dos fenômenos de massa ou coletivos, cuja mensuração e análise requerem um conjunto de observações de fenômeno ou particulares.

Assim, *Estatística* é a ciência fundamentada na teoria das probabilidades e em um conjunto de técnicas e métodos de pesquisa que abrange, entre outros temas: planejamento de experimentos, coleta e organização de dados, representação de dados numéricos por meio de tabelas e gráficos, análise de dados, previsões e tomadas de decisões em situações de incerteza com base na análise de dados e tem como objetivo fundamental o estudo de uma população.

Este estudo pode ser feito de duas maneiras:

- Investigando todos os elementos da população;
- Por amostragem, ou seja, selecionando alguns elementos da população.

A parte da Estatística que iremos utilizar para resolver os problemas do ENEM é a Estatística Descritiva, e ela se preocupa com a coleta, organização, classificação, apresentação, interpretação e análise de dados referentes ao fenômeno através de gráficos e tabelas além de calcular medidas que permitam descrever o fenômeno.

CONCEITOS PRELIMINARES

POPULAÇÃO: Coleção de unidades individuais, que podem ser pessoas ou resultados experimentais, com uma ou mais características comuns, que se pretendem estudar.

AMOSTRA: Conjunto de dados ou observações, recolhidos a partir de um subconjunto da população, que se estuda com o objetivo de tirar conclusões para a população de onde foi recolhida.

VARIÁVEIS ESTATÍSTICAS: São atributos, numéricos ou não, pesquisados em cada elemento de uma população.

- **Variáveis quantitativas:** são expressas por números, ou seja, são características susceptíveis de serem medidas, apresentando-se com diferentes intensidades, que podem ser de natureza discreta ou contínua.
- **Variáveis qualitativas:** são aquelas expressas por qualidades não numéricas.

CENSO: É o exame completo de toda população.

Quanto maior a amostra mais precisas e confiáveis deverão ser as induções feitas sobre a população. Logo, os resultados mais perfeitos são obtidos pelo Censo. Na prática, esta conclusão muitas vezes não acontece, pois, o emprego de amostras, com certo rigor técnico, pode levar a resultados mais confiáveis ou até mesmo melhores do que os que seriam obtidos através de um Censo.

As razões de se recorrer a amostras são: menor custo e tempo para levantar dados; melhor investigação dos elementos observados.

ORGANIZAÇÃO E REPRESENTAÇÃO DE DADOS

Em uma pesquisa, a organização e a representação dos dados coletados são necessárias para que a leitura e a análise dos dados sejam facilitadas. A seguir, veremos que, quando a variável é quantitativa discreta, seus valores podem ser organizados em sequências, tabelas ou gráficos.

ROL: é toda sequência de dados numéricos tal que cada termo, a partir do segundo, é maior ou igual a seu antecessor, ou é menor ou igual a seu antecessor.

Conforme vamos fazendo uma pesquisa vamos tomando nota dos resultados (dados) na sequência em que eles aparecem. Essa relação de dados é chamada de **DADOS BRUTOS**.

Ex₁: Notas de um grupo de 10 alunos em uma avaliação:

2, 5, 8, 9, 7, 4, 6, 6, 7, 6

Neste caso os dados estão na forma bruta.

Ex₂: De um grupo de 50 pessoas. Perguntamos quantos filhos a pessoa tem. O resultado foi o seguinte:

0, 1, 1, 4, 3, 1, 0, 3, 4, 1, 1, 0, 3, 3, 2, 5, 2, 1, 2, 4, 2, 1, 0, 2, 0, 0, 3, 4, 5, 2, 3, 1, 4, 0, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 1, 0, 3, 1, 2, 0, 3, 1, 4, 2

Novamente, os dados estão na forma bruta.

Costuma-se organizar, para facilitar a consulta, os dados quantitativos de uma maneira crescente.

Assim teremos:

Ex₁: Para as notas:

2, 4, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9

Aqui as notas estão em ROL.

Ex₂: Para o número de filhos:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5.

Aqui também, as notas estão em ROL.

TABELA: é um quadro que resume um conjunto de informações.

O exemplo 2 poderia ser facilmente representado por uma tabela, vejamos:

Número de Filhos	Frequência Absoluta	Frequência Relativa
0	9	18%
1	13	26%
2	9	18%
3	10	20%
4	6	12%
5	3	6%
Total de Pessoas	50	100%

Lembrado que:

Frequência Absoluta f_i é a quantidade de vezes que o dado aparece em determinada pesquisa.

Frequência Relativa f_r é a quantidade de vezes que o dado aparece em determinada pesquisa dividido pelo total de elementos pesquisados.

$$f_r = \frac{f_i}{n}$$

A Frequência Relativa pode vir expressa em percentual. Para tal, basta multiplicar o resultado da Frequência Relativa por 100. Chamamos essa de **Frequência Relativa Percentual**.

Ex₃: Em uma campanha para arrecadar fundos para ajudar crianças carentes, os valores disponíveis para doação eram R\$ 5,00, R\$ 10,00 e R\$ 30,00. Todas as doações feitas no primeiro dia de campanha foram organizadas em uma tabela.

Valores de Cada Doação	Quantidade de Pessoas que Doaram	Frequência Relativa
R\$ 5,00	250	
R\$ 10,00	150	
R\$ 30,00	100	

Determine a frequência relativa para cada valor de doação disponível.

Solução:

O total de doadores foi 500.

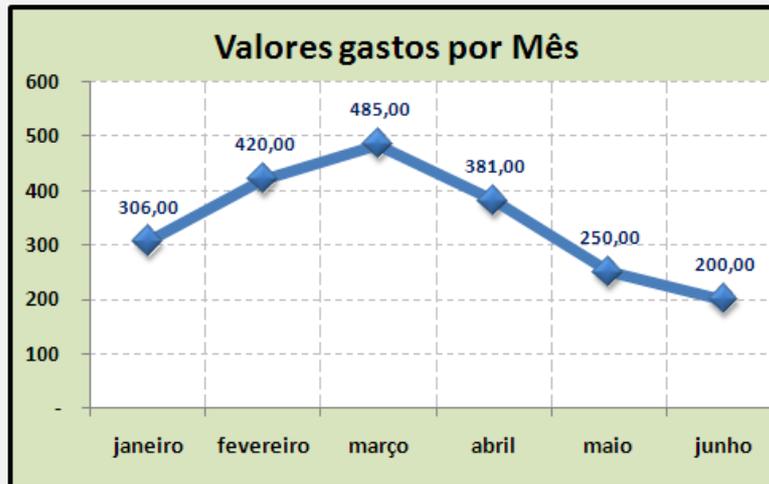
$$\begin{aligned}
 \text{R\$ 5,00} &\rightarrow \frac{250}{500} = 50\% \\
 \text{R\$ 10,00} &\rightarrow \frac{150}{500} = 30\% \\
 \text{R\$ 30,00} &\rightarrow \frac{100}{500} = 20\%
 \end{aligned}$$

GRÁFICO: A apresentação gráfica é um complemento importante da apresentação tabular. A vantagem de um gráfico sobre a tabela está em possibilitar uma rápida impressão visual da distribuição dos valores ou das frequências observadas. Os gráficos propiciam uma ideia inicial mais satisfatória da concentração e dispersão dos valores, uma vez que através deles os dados estatísticos se apresentam em termos de grandezas visualmente interpretáveis.

Vejamos então alguns principais tipos de gráficos:

GRÁFICOS EM CURVAS OU EM LINHAS: O gráfico de linha é um tipo de gráfico que exibe informações com uma série de pontos de dados chamados de marcadores, ligados por segmentos de linha reta. É um tipo básico de gráfico comum em muitos campos. Um gráfico de linhas é muitas vezes usado para visualizar uma tendência nos dados em intervalos de tempo (uma série de tempo), assim, a linha é muitas vezes atraída por ordem cronológica. O gráfico de linha é composto por dois eixos, um vertical e outro horizontal, e por uma linha que mostra a evolução de um fenômeno ou processo.

EX4:

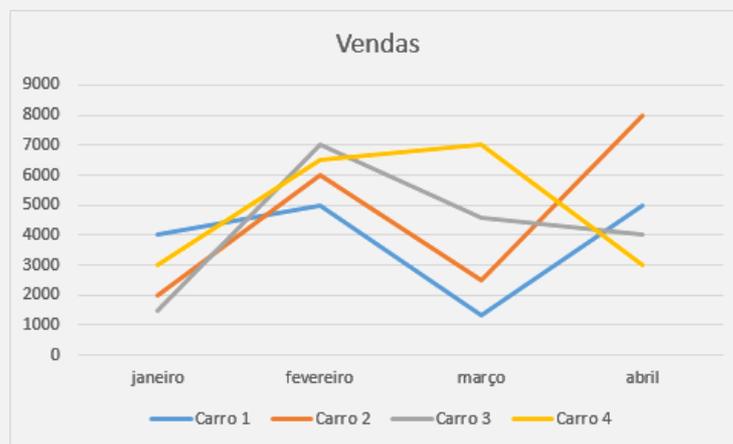


Ao observar o gráfico acima, percebemos rapidamente que o maior valor gasto foi no mês de março; analogamente, o menor valor gasto foi no mês de junho.

Os valores gastos aumentaram de janeiro a março e diminuíram de março a junho.

Essas são interpretações bem exploradas em um gráfico de linhas, o efeito visual que ele causa facilita a interpretação desse tipo de informação com maior facilidade.

EX5:



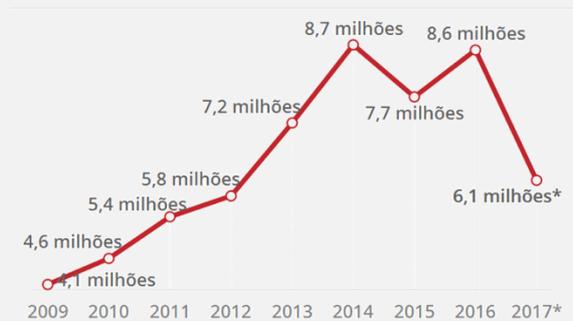
O gráfico de linhas também é muito importante quando queremos comparar o desempenho de vendas de objetos ao longo do tempo. É possível detectar variações bruscas, tanto de crescimentos quanto de queda. Isso é um bom indício para que se possa intervir precocemente e impedir um prejuízo considerável.

Mesmo sem saber os valores exatos das vendas dos carros, conseguimos perceber que o carro 1 (representado pela linha azul) não tem um desempenho de vendas tão bom.

Ex6:

Enem - histórico de inscrições

Número de inscrições confirmadas no Enem desde 2009



FONTE: MEC/Inep (*O número de inscrições confirmadas ainda podem mudar, após o prazo de análise de recursos sobre as isenções)



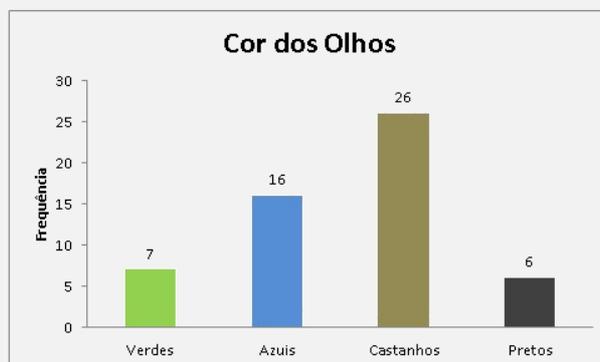
Infográfico elaborado em: 30/05/2017

Analisando o gráfico que mostra a evolução do número de inscritos no ENEM a cada ano, percebemos que de 2009 a 2014 o número de inscrições cresceu, chegando a mais que o dobro de inscrições, no entanto, em 2015, houve uma redução. O que fez o número de inscrições em 2015 cair? Esse tipo de gráfico nos faz refletir, de modo que possamos identificar o motivo da redução e corrigi-lo para que o número de inscrições volte a subir.

GRÁFICOS EM COLUNAS: é a representação de uma série estatística através de retângulos, paralelepípedos ou cilindros, dispostos em colunas. Indicam, geralmente, um dado quantitativo sobre diferentes variáveis para um mesmo instante, neste caso, os dados são indicados na posição vertical, enquanto as divisões qualitativas apresentam-se na posição horizontal.

Ex7:

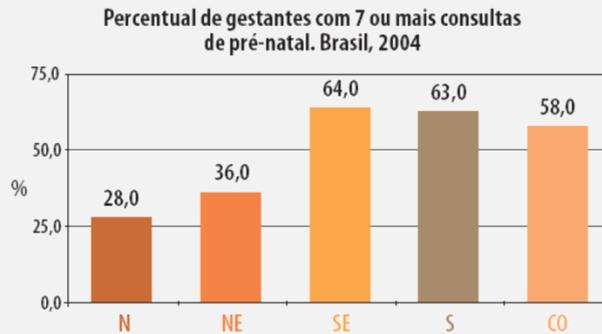
Este gráfico analisa a quantidade de pessoas para cada cor de olho em uma sala de aula com 55 alunos:



As variáveis qualitativas são as cores dos olhos: Verdes, Azuis, Castanhos e Pretos. Para cada cor é atribuído um valor: 7, 16, 26 e 6, respectivamente.

Concluimos facilmente, que a cor de olhos mais frequente é castanha e a menos frequente é preta.

Ex₈:



Neste gráfico, as variáveis qualitativas são as regiões brasileiras, Norte (N), Nordeste (NE), Sudoeste (SE), Sul (S) e Centro-Oeste (CO), que ficam na horizontal. Já na vertical, temos o percentual de gestantes que realizaram 7 ou mais consultas de pré-natal.

A região Sudoeste é com maior percentual de grávidas com 7 consultas ou mais, seguida de perto pela região Sul. Em último lugar vem a região Norte, com menos da metade do percentual.

O gráfico em colunas pode apresentar ainda, dados quantitativos sobre uma mesma variável ao longo do tempo, semelhante ao gráfico em linhas, neste caso, os dados quantitativos ficam no eixo vertical e os temporais ficam na horizontal.

Ex₉:

Semelhante ao gráfico em linhas, o gráfico em barras abaixo, apresenta a variável tempo (anos de 1991 a 1995) na horizontal associada às quantidades em toneladas da produção de Soja nesses respectivos anos na vertical.



Percebemos, através da análise do gráfico, que a produção foi crescente de 1991 a 1995, ano em que atingiu seu máximo.

EX₁₀:

O gráfico mostra a renda média mensal dos brasileiros ocupados em cada ano de 1997 a 2007:



Dados harmonizados para comparação. Fonte: Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios

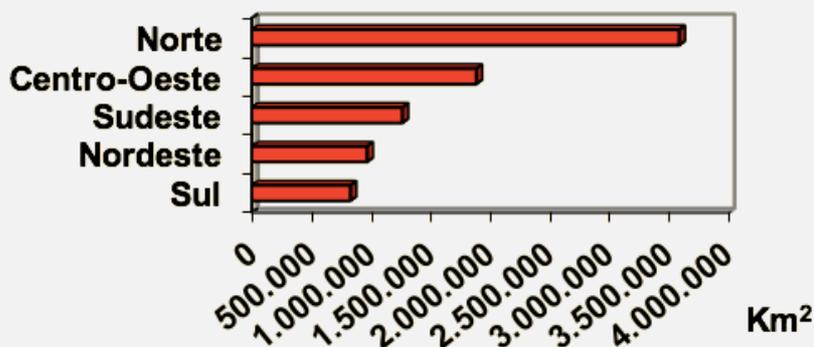
Novamente, a variável temporal (anos de 1997 a 2007) encontra-se na horizontal, enquanto que os dados sobre a renda se encontram na vertical. O efeito visual é semelhante ao do gráfico em linhas: a maior média mensal ocorre em 1997 e a pior em 2003/2004.

GRÁFICOS EM BARRAS: Um gráfico de barras é uma forma de resumir um conjunto de dados categóricos. Ele mostra os dados utilizando um número de barras de mesma largura, cada uma delas representando uma categoria particular. A largura de cada barra é proporcional à quantidade específica de cada dado. As variáveis qualitativas ficam na vertical e as quantitativas na horizontal.

EX₁₁:

Perceba que as regiões brasileiras, que representam a variável qualitativa, encontram-se na vertical, enquanto que a área em Km², que representa a variável quantitativa, encontra-se na horizontal.

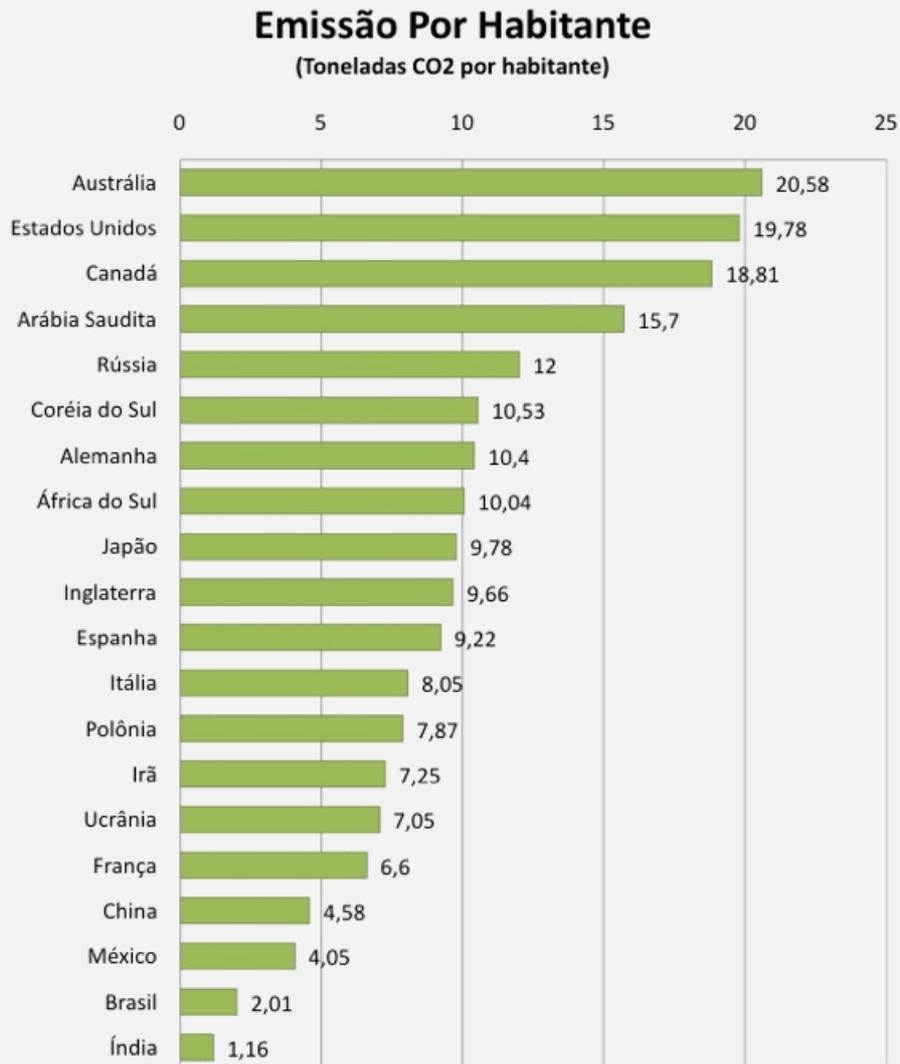
Gráfico: Áreas (Km²) das Regiões Fisiográficas - Brasil - 1966.



A região com maior área é a Norte e a com menor área é a Sul.

EX12:

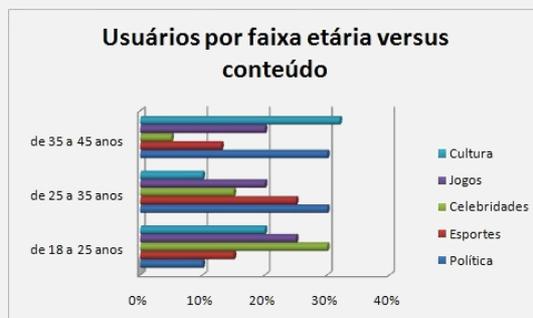
O gráfico a seguir mostra a emissão de CO₂ em toneladas de alguns países. Os países estão no eixo vertical e suas respectivas emissões estão no eixo horizontal.



A Austrália é o país que mais emite CO₂, seguida por Estados Unidos e Canadá.

GRÁFICO EM BARRAS OU COLUNAS MÚLTIPLAS (AGRUPADAS): É um tipo de gráfico útil para estabelecer comparações entre as grandezas de cada categoria dos fenômenos estudados.

EX₁₃:

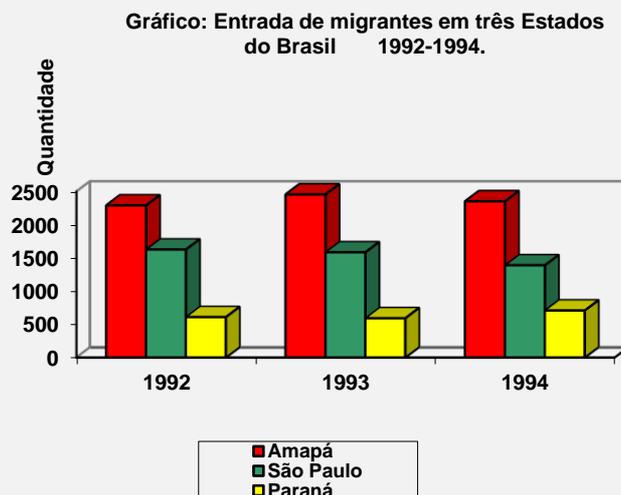


As barras estão agrupadas, isto facilita a comparação entre os conteúdos: Cultura, Jogos, Celebidades, Esportes e Política para cada faixa etária específica.

Perceba que, dos 18 aos 25, o conteúdo mais relevante são as Celebidades, já dos 25 aos 35, o conteúdo mais relevante é a Política, e, finalmente, dos 35 aos 45 anos, o conteúdo Cultura assume a primeira posição.

EX₁₄:

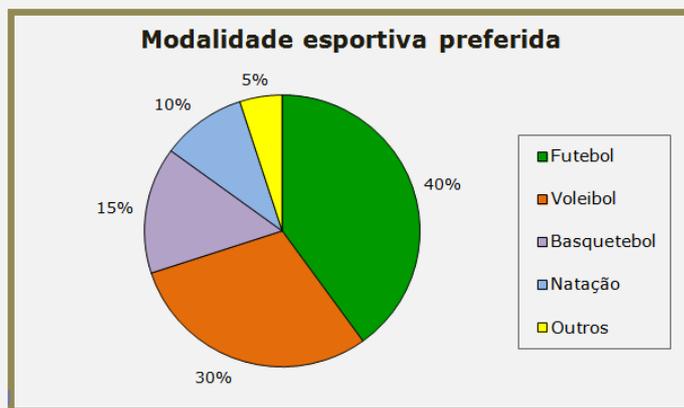
O gráfico mostra a imigração em três estados do Brasil nos anos de 1992, 1993 e 1994. Percebemos que os três estados estão agrupados para facilitar a comparação entre eles:



Observe que a imigração é bem mais intensa no Amapá, tanto em 1992, quanto em 1993 e 1994.

GRÁFICO EM SETORES: É a representação gráfica de uma série estatística em um círculo de raio qualquer, pôr meio de setores com ângulos centrais proporcionais às ocorrências.

EX₁₅: Foi feita uma pesquisa com 200 pessoas para saber qual modalidade esportiva elas preferiam, os resultados foram organizados em um gráfico de setores:



Analisaremos minuciosamente cada modalidade:

Futebol

O total de pessoas é 200, para sabermos a quantidade de pessoas que preferem futebol, devemos calcular 40% de 200 = 80. Ou seja, 80 pessoas preferem futebol.

Sabemos que uma “volta completa” corresponde a 360°, para determinar o ângulo central correspondente às pessoas que preferem futebol, devemos calcular 40% de 360° = 144°.

Voleibol

60 pessoas preferem voleibol (30% de 200 = 60);
O ângulo central correspondente às pessoas que preferem voleibol é 108° (30% de 360° = 108°).

Basquetebol

30 pessoas preferem voleibol (15% de 200 = 30);
O ângulo central correspondente às pessoas que preferem voleibol é 54° (15% de 360° = 54°).

Natação

20 pessoas preferem voleibol (10% de 200 = 20);
O ângulo central correspondente às pessoas que preferem voleibol é 36° (10% de 360° = 36°).

Outros

10 pessoas preferem voleibol (5% de 200 = 10);
O ângulo central correspondente às pessoas que preferem voleibol é 18° (5% de 360° = 18°)

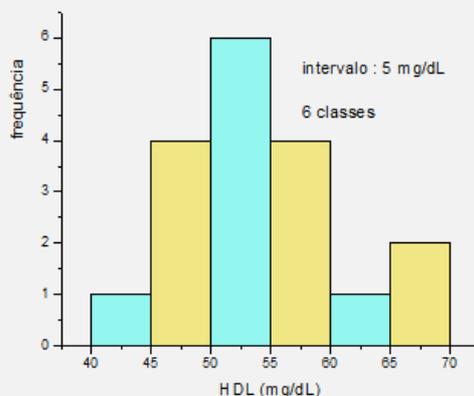
HISTOGRAMA: O histograma, também conhecido como distribuição de frequências, é a representação gráfica em colunas ou em barras (retângulos) de um conjunto de dados previamente tabulado e dividido em classes. A base de cada retângulo representa uma classe. A altura de cada retângulo representa a quantidade ou a frequência absoluta com que o valor da classe ocorre no conjunto de dados.

EX16:

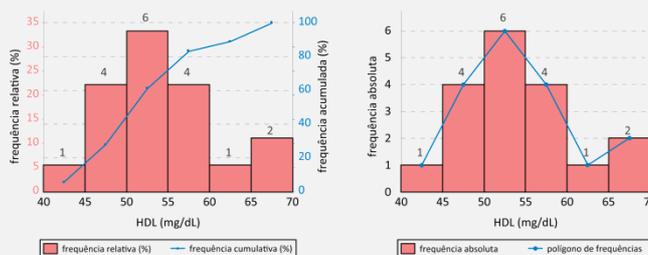
Tabulação dos dados das coletas de HDL realizadas em um grupo de 18 pacientes que foram agrupados em 6 classes delimitadas por intervalos de 5 mg/dL.

coleta aleatória		dados ordenados		intervalo	frequência	classe
pacientes	HDL (mg/dL)	pacientes	HDL (mg/dL)			
1	55	7	44	HDL < 45	1	1
2	57	8	45	45 ≤ HDL < 50	4	2
3	53	16	46			
4	49	14	47			
5	54	4	49			
6	52	9	50	50 ≤ HDL < 55	6	3
7	44	10	52			
8	45	6	52			
9	50	13	53			
10	52	3	53			
11	55	5	54	55 ≤ HDL < 60	4	4
12	67	1	55			
13	53	11	55			
14	47	2	57	60 ≤ HDL < 65	1	5
15	65	18	59			
16	46	17	64	65 ≤ HDL	2	6
17	64	15	65			
18	59	12	67			

Os dados desta tabela podem ser organizados em um histograma, a saber:



É possível traçar linhas auxiliares para complementar a interpretação:

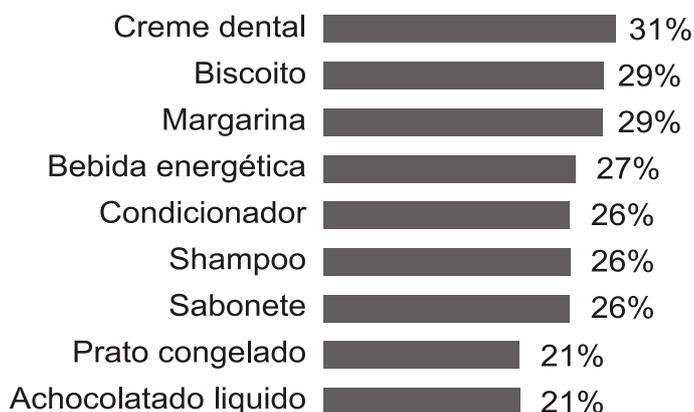


01. (Enem PPL 2012) Quando a propaganda é decisiva na troca de marcas

Todo supermercadista sabe que, quando um produto está na mídia, a procura pelos consumidores aumenta. Mas, em algumas categorias, a influência da propaganda é maior, de acordo com pesquisa feita com 400 pessoas pela consultoria YYY e com exclusividade para o supermercado XXX.

O levantamento mostrou que, mesmo não sendo a razão o fator mais apontado para trocar de marca, não se pode ignorar a força das campanhas publicitárias. Em algumas categorias, um terço dos respondentes atribuem a mudança à publicidade. Para Nicanor Guerreiro, a propaganda estabelece uma relação mais “emocional” da marca com o público. “Todos sentimos necessidade de consumir produtos que sejam ‘aceitos’ pelas outras pessoas. Por isso, a comunicação faz o papel de endosso das marcas”, afirma. O executivo ressalta, no entanto, que nada disso adianta se o produto não cumprir as promessas transmitidas nas ações de comunicação. Um dos objetivos da propaganda é tornar o produto aspiracional, despertando o desejo de experimentá-lo. O que o consumidor deseja é o que a loja vende. E é isso o que o supermercadista precisa ter sempre em mente. Veja o gráfico:

Categorias em que a influência da propaganda na troca de marcas atinge mais de 20% dos consumidores

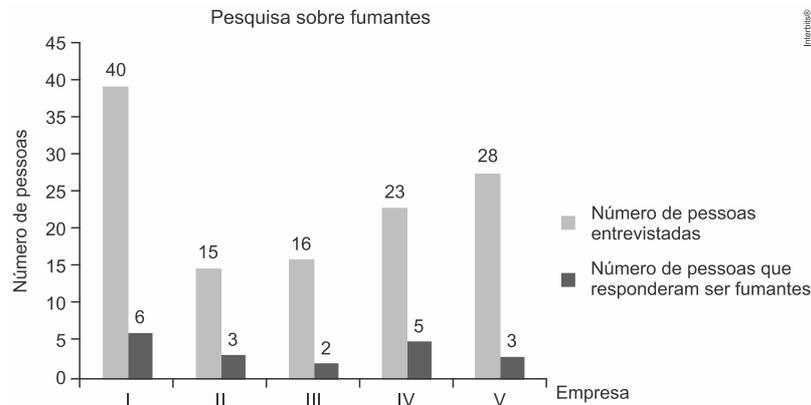


Disponível em: www.riovermelho.net. Acesso em: 3 mar. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto e com as informações fornecidas pelo gráfico, para aumentar as vendas de produtos, é necessário que

- Ⓐ a campanha seja centrada em produtos alimentícios, a fim de aumentar o percentual de troca atual que se apresenta como o mais baixo.
- Ⓑ a preferência de um produto ocorra por influência da propaganda devido à necessidade emocional das marcas.
- Ⓒ a propaganda influencie na troca de marca e que o consumidor valorize a qualidade do produto.
- Ⓓ os produtos mais vendidos pelo comércio não sejam divulgados para o público como tal.
- Ⓔ as marcas de qualidade inferior constituam o foco da publicidade por serem mais econômicas.

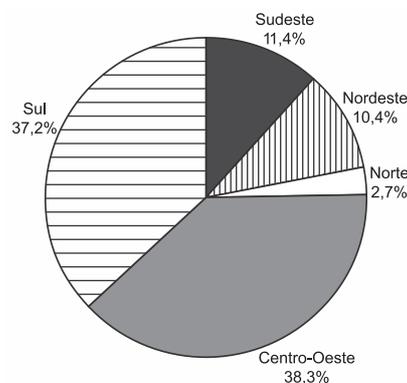
02. (Enem (Libras) 2017) Para fazer uma campanha contra o tabagismo, um empresário encomendou uma pesquisa com pessoas que trabalham em suas cinco empresas para saber quantas fumam. O gráfico mostra o número de pessoas entrevistadas e quantas responderam ser fumantes em cada uma das empresas.



A empresa que possui o menor percentual de pessoas fumantes é

- Ⓐ I.
- Ⓑ II.
- Ⓒ III.
- Ⓓ IV.
- Ⓔ V.

03. (Enem PPL 2017) Estimativas do IBGE para a safra nacional de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, apontavam uma participação por região conforme indicado no gráfico.



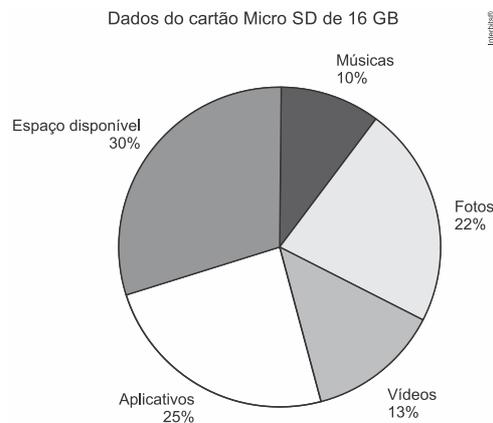
As estimativas indicavam que as duas regiões maiores produtoras produziriam, juntas, um total de 119,9 milhões de toneladas dessas culturas, em 2012.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 3 jul. 2012.

De acordo com esses dados, qual seria o valor mais próximo da produção, em milhão de tonelada, de cereais, leguminosas e oleaginosas, em 2012, na Região Sudeste do país?

- Ⓐ 10,3
- Ⓑ 11,4
- Ⓒ 13,6
- Ⓓ 16,5
- Ⓔ 18,1

04. (Enem (Libras) 2017) O cartão Micro SD é um tipo de mídia utilizada para armazenamento de dados (arquivos, fotos, filmes, músicas etc.). Um usuário tem um cartão Micro SD de 16 GB e, utilizando seu computador, visualiza, em termos percentuais, os dados armazenados no cartão, conforme o gráfico.

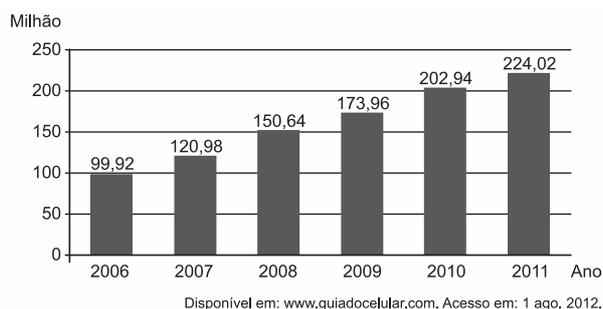


O usuário adquiriu um cartão do mesmo tipo, mas de 32 GB, com o objetivo de gravar os dados do seu cartão de 16 GB em seu novo cartão de 32 GB. No entanto, para aumentar o espaço de armazenamento disponível, decidiu não gravar suas músicas no novo cartão.

Analisando o gráfico, o espaço disponível no novo cartão de 32 GB, em termos percentuais, é igual a

- A 60.
- B 65.
- C 70.
- D 75.
- E 80.

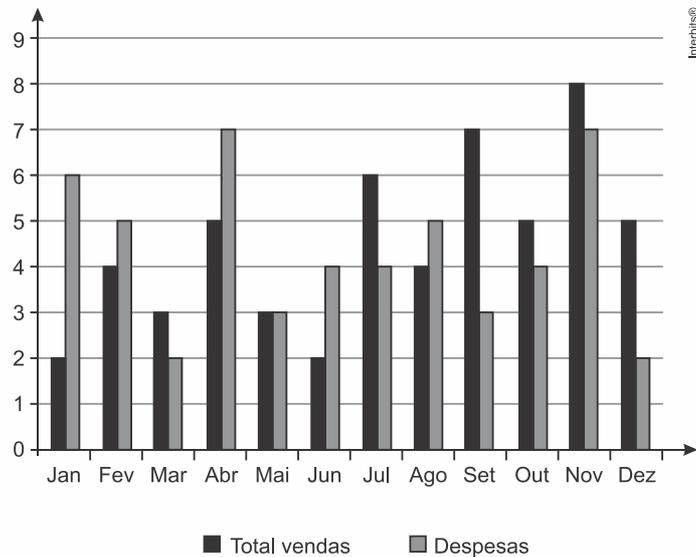
05. (Enem PPL 2017) O gráfico mostra a expansão da base de assinantes de telefonia celular no Brasil, em milhões de unidades, no período de 2006 a 2011.



De acordo com o gráfico, a taxa de crescimento do número de aparelhos celulares no Brasil, de 2007 para 2011, foi de

- A 8,53%
- B 85,17%
- C 103,04%
- D 185,17%
- E 345,00%

06. (Enem 2ª aplicação 2016) Uma empresa registrou seu desempenho em determinado ano por meio do gráfico, com dados mensais do total de vendas e despesas.



O lucro mensal é obtido pela subtração entre o total de vendas e despesas, nesta ordem.

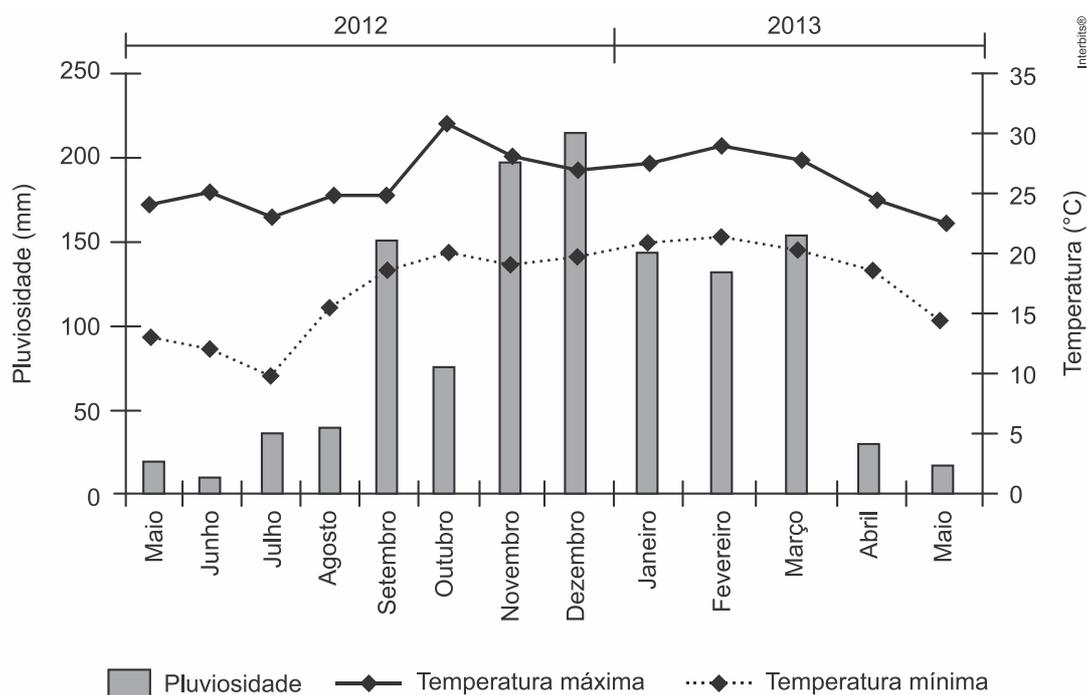
Quais os três meses do ano em que foram registrados os maiores lucros?

- A) Julho, setembro e dezembro.
- B) Julho, setembro e novembro.
- C) Abril, setembro e novembro.
- D) Janeiro, setembro e dezembro.
- E) Janeiro, abril e junho.

07. (Enem 2016) O cultivo de uma flor rara só é viável se do mês do plantio para o mês subsequente o clima da região possuir as seguintes peculiaridades:

- a variação do nível de chuvas (pluviosidade), nesses meses, não for superior a 50 mm;
- a temperatura mínima, nesses meses, for superior a 15 °C;
- ocorrer, nesse período, um leve aumento não superior a 5 °C na temperatura máxima.

Um floricultor, pretendendo investir no plantio dessa flor em sua região, fez uma consulta a um meteorologista que lhe apresentou o gráfico com as condições previstas para os 12 meses seguintes nessa região.



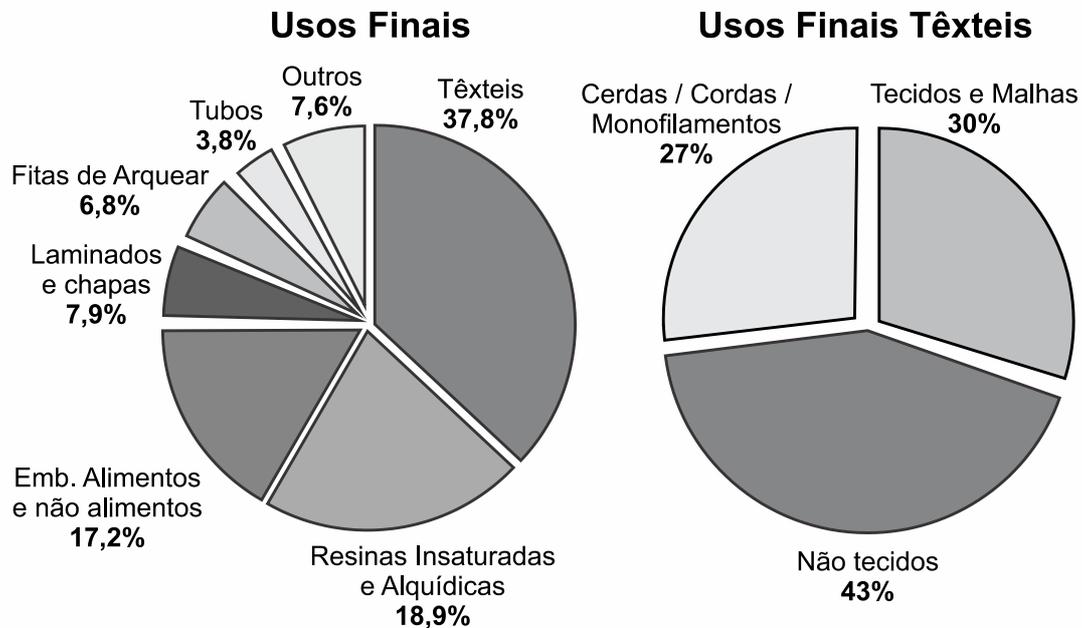
Com base nas informações do gráfico, o floricultor verificou que poderia plantar essa flor rara.

O mês escolhido para o plantio foi

- A** janeiro.
- B** fevereiro.
- C** agosto.
- D** novembro.
- E** dezembro.

08. (Enem 2015) O polímero de PET (Politereftalato de Etileno) é um dos plásticos mais reciclados em todo o mundo devido à sua extensa gama de aplicações, entre elas, fibras têxteis, tapetes, embalagens, filmes e cordas. Os gráficos mostram o destino do PET reciclado no Brasil, sendo que, no ano de 2010, o total de PET reciclado foi de 282 kton (quilotoneladas).

PET RECICLADO - 2010



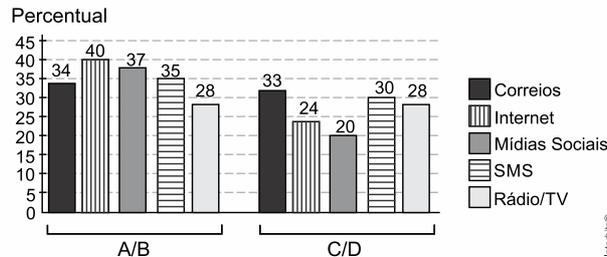
Disponível em: www.abipet.org.br. Acesso em: 12 jul. 2012 (adaptado).

De acordo com os gráficos, a quantidade de embalagens PET recicladas destinadas a produção de tecidos e malhas, em kton, é mais aproximada de

- A** 16,0.
- B** 22,9.
- C** 32,0.
- D** 84,6.
- E** 106,6.

09. (Enem 2015) Uma pesquisa de mercado foi realizada entre os consumidores das classes sociais A, B, C e D que costumam participar de promoções tipo sorteio ou concurso. Os dados comparativos, expressos no gráfico, revelam a participação desses consumidores em cinco categorias: via Correios (juntando embalagens ou recortando códigos de barra), via internet (cadastrando-se no *site* da empresa/marca promotora), via mídias sociais (redes sociais), via SMS (mensagem por celular) ou via rádio/TV.

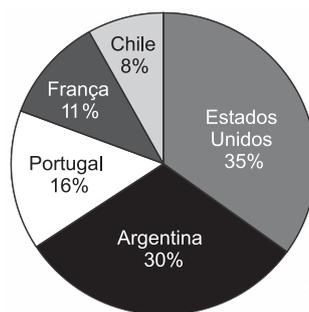
Participação em promoções do tipo sorteio ou concurso em uma região



Uma empresa vai lançar uma promoção utilizando apenas uma categoria nas classes A e B (A/B) e uma categoria nas classes C e D (C/D). De acordo com o resultado da pesquisa, para atingir o maior número de consumidores das classes A/B e C/D, a empresa deve realizar a promoção, respectivamente, via

- A** Correios e SMS.
- B** internet e Correios.
- C** internet e internet.
- D** internet e mídias sociais.
- E** rádio/TV e rádio/TV.

10. (Enem PPL 2014) Em 2010, cerca de 3,24 milhões de passageiros foram transportados entre os Estados Unidos e o Brasil, de acordo com dados divulgados pela Agência Nacional de Aviação Civil (ANAC). O gráfico mostra a distribuição relativa do número de passageiros transportados entre o Brasil e os cinco destinos mais procurados, dos quais apenas dois países são europeus: França e Portugal.



De acordo com esses dados, o valor mais aproximado para a quantidade total de passageiros transportados em 2010 entre o Brasil e os países europeus mostrados no gráfico é

- A** 874.800.
- B** 1.018.285.
- C** 1.481.142.
- D** 2.499.428.
- E** 3.240.000.

11. (Enem 2014) A taxa de fecundidade é um indicador que expressa a condição, reprodutiva média das mulheres de uma região, e é importante para uma análise da dinâmica demográfica dessa região. A tabela apresenta os dados obtidos pelos Censos de 2000 e 2010, feitos pelo IBGE, com relação à taxa de fecundidade no Brasil.

Ano	Taxa de fecundidade no Brasil
2000	2,38
2010	1,90

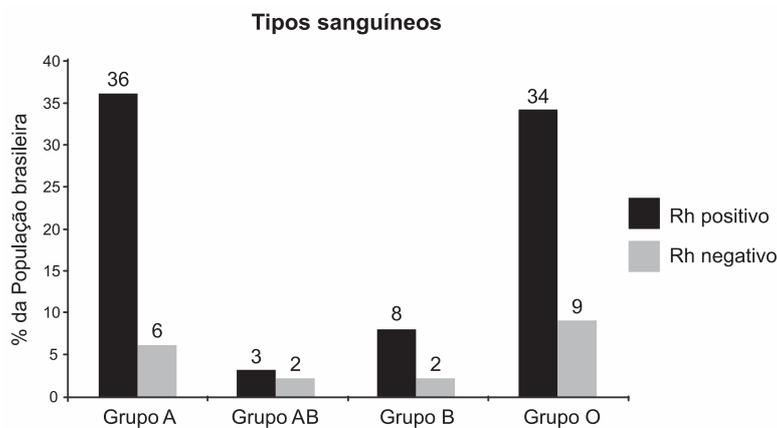
Disponível em: www.saladeimprensa.ibge.gov.br. Acesso em: 31 jul. 2013.

Suponha que a variação percentual relativa na taxa de fecundidade no período de 2000 a 2010 se repita no período de 2010 a 2020.

Nesse caso, em 2020 a taxa de fecundidade no Brasil estará mais próxima de

- A** 1,14.
- B** 1,42.
- C** 1,52.
- D** 1,70.
- E** 1,80.

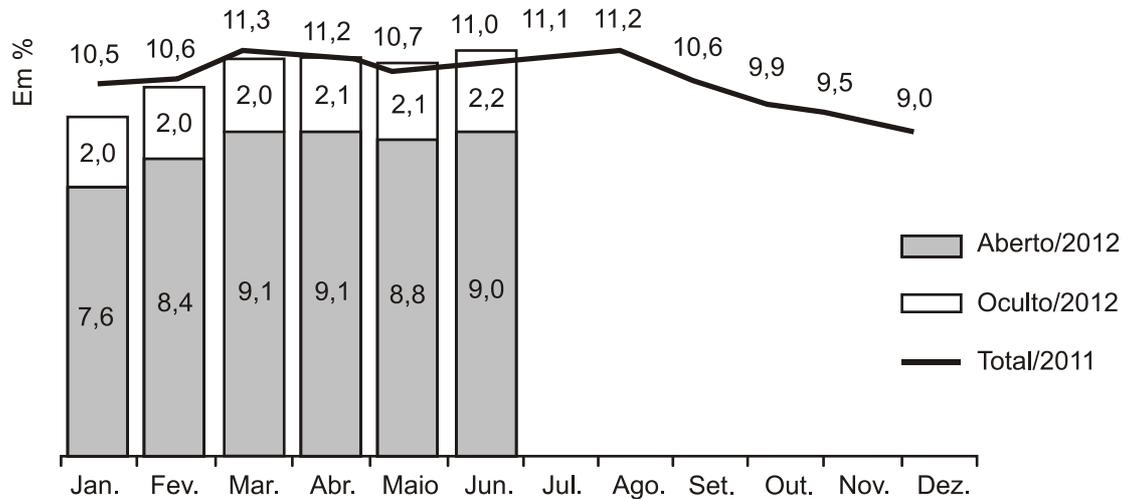
12. (Enem PPL 2014) Uma revista publicará os dados, apresentados no gráfico, sobre como os tipos sanguíneos estão distribuídos entre a população brasileira. Contudo, o editor dessa revista solicitou que esse gráfico seja publicado na forma de setores, em que cada grupo esteja representado por um setor circular.



O ângulo do maior desses setores medirá, em graus,

- A** 108,0.
- B** 122,4.
- C** 129,6.
- D** 151,2.
- E** 154,8.

13. (Enem 2014) O gráfico apresenta as taxas de desemprego durante o ano de 2011 e o primeiro semestre de 2012 na região metropolitana de São Paulo. A taxa de desemprego total é a soma das taxas de desemprego aberto e oculto.



Suponha que a taxa de desemprego oculto do mês de dezembro de 2012 tenha sido a metade da mesma taxa em junho de 2012 e que a taxa de desemprego total em dezembro de 2012 seja igual a essa taxa em dezembro de 2011.

Disponível em: www.dieese.org.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (fragmento).

Nesse caso, a taxa de desemprego aberto de dezembro de 2012 teria sido, em termos percentuais, de

- A** 1,1.
- B** 3,5.
- C** 4,5.
- D** 6,8.
- E** 7,9.

14. (Enem 2014) O Ministério da Saúde e as unidades federadas promovem frequentemente campanhas nacionais e locais de incentivo à doação voluntária de sangue, em regiões com menor número de doadores por habitante, com o intuito de manter a regularidade de estoques nos serviços hemoterápicos. Em 2010, foram recolhidos dados sobre o número de doadores e o número de habitantes de cada região conforme o quadro seguinte.

Taxa de doação de sangue, por região, em 2010			
Região	Doadores	Número de habitantes	Doadores/habitantes
Nordeste	820.959	53.081.950	1,5%
Norte	232.079	15.864.454	1,5%
Sudeste	1.521.766	80.364.410	1,9%
Centro-Oeste	362.334	14.058.094	2,6%
Sul	690.391	27.386.891	2,5%
Total	3.627.529	190.755.799	1,9%

Os resultados obtidos permitiram que estados, municípios e o governo federal estabelecessem as regiões prioritárias do país para a intensificação das campanhas de doação de sangue.

A campanha deveria ser intensificada nas regiões em que o percentual de doadores por habitantes fosse menor ou igual ao do país.

Disponível em: <http://bvsmms.saude.gov.br>. Acesso em: 2 ago. 2013 (adaptado).

As regiões brasileiras onde foram intensificadas as campanhas na época são

- Ⓐ Norte, Centro-Oeste e Sul.
- Ⓑ Norte, Nordeste e Sudeste.
- Ⓒ Nordeste, Norte e Sul.
- Ⓓ Nordeste, Sudeste e Sul.
- Ⓔ Centro-Oeste, Sul e Sudeste.

15. (Enem 2014) Uma empresa de alimentos oferece três valores diferentes de remuneração a seus funcionários, de acordo com o grau de instrução necessário para cada cargo. No ano de 2013, a empresa teve uma receita de 10 milhões de reais por mês e um gasto mensal com a folha salarial de R\$400.000,00, distribuídos de acordo com o Gráfico 1. No ano seguinte, a empresa ampliará o número de funcionários, mantendo o mesmo valor salarial para cada categoria. Os demais custos da empresa permanecerão constantes de 2013 para 2014. O número de funcionários em 2013 e 2014, por grau de instrução, está no Gráfico 2.

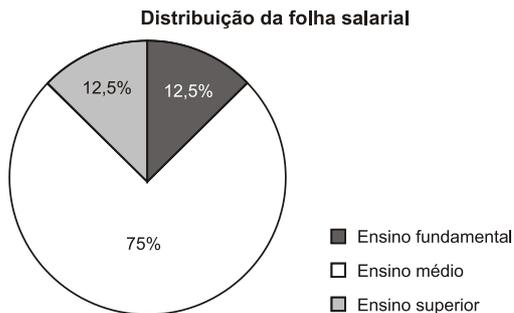


Gráfico 1

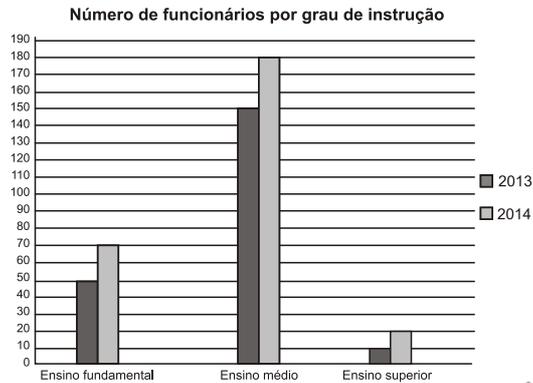
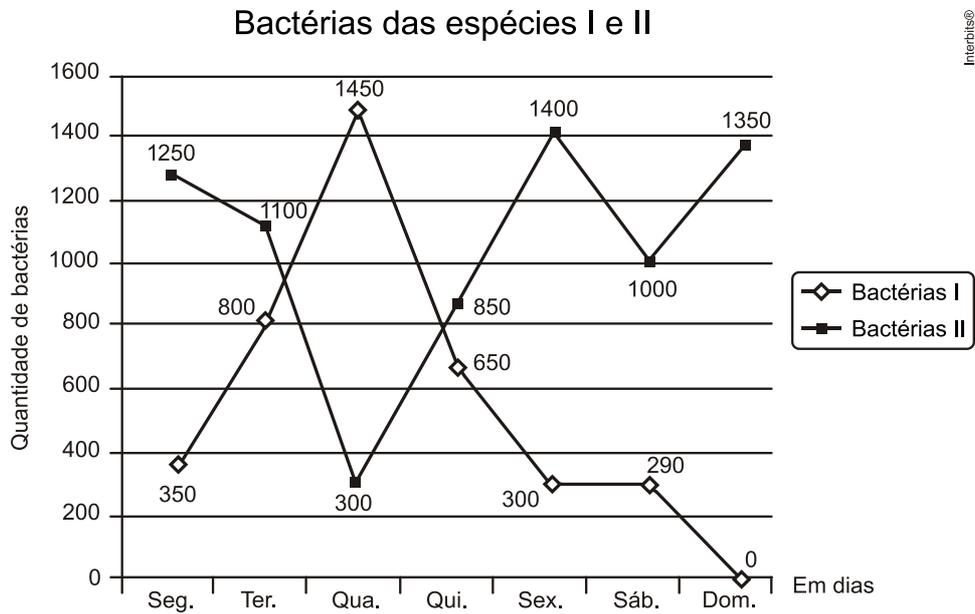


Gráfico 2

Qual deve ser o aumento na receita da empresa para que o lucro mensal em 2014 seja o mesmo de 2013?

- A R\$114.285,00
- B R\$130.000,00
- C R\$160.000,00
- D R\$210.000,00
- E R\$213.333,00

16. (Enem 2014) Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1.250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.



Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

- A** Terça-feira.
- B** Quarta-feira.
- C** Quinta-feira.
- D** Sexta-feira.
- E** Domingo.

17. (Enem PPL 2013) Nos últimos anos, a frota de veículos no Brasil tem crescido de forma acentuada. Observando o gráfico, é possível verificar a variação do número de veículos (carros, motocicletas e caminhões), no período de 2000 a 2010. Projeta-se que a taxa de crescimento relativo no período de 2000 a 2010 mantenha-se para década seguinte.

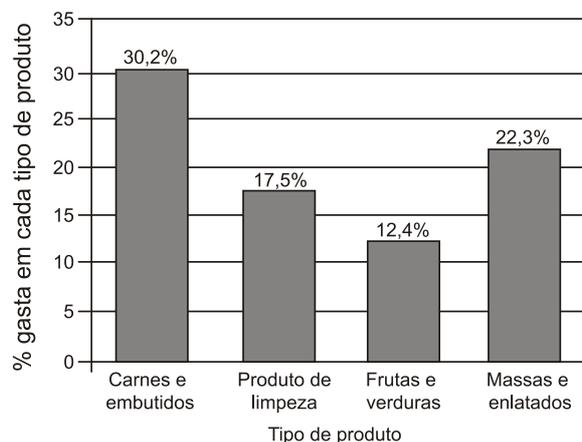


Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 27 fev. 2012 (adaptado).

Qual será o número de veículos no ano de 2020?

- A 79,2 milhões
- B 102,0 milhões
- C 132,0 milhões
- D 138,0 milhões
- E 145,2 milhões

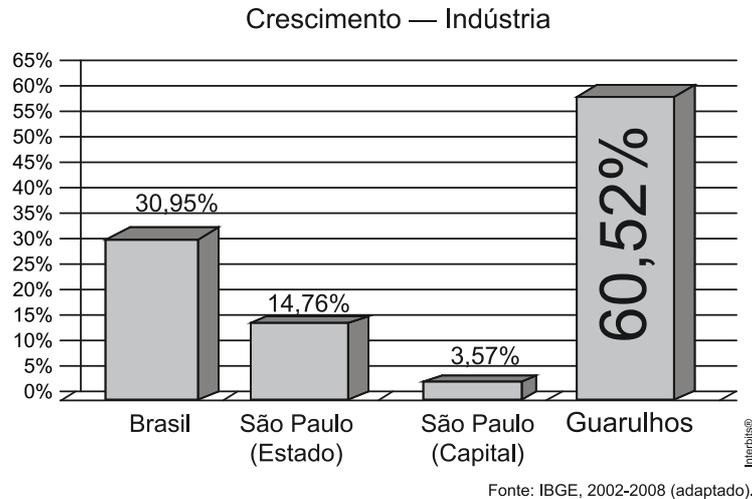
18. (Enem PPL 2013) Uma dona de casa vai ao supermercado fazer a compra mensal. Ao concluir a compra, observa que ainda lhe restaram R\$ 88,00. Seus gastos foram distribuídos conforme mostra o gráfico. As porcentagens apresentadas no gráfico são referentes ao valor total, em reais, reservado para a compra mensal.



Qual o valor total, em reais, reservado por essa dona de casa para a compra mensal?

- A 106,80
- B 170,40
- C 412,00
- D 500,00
- E 588,00

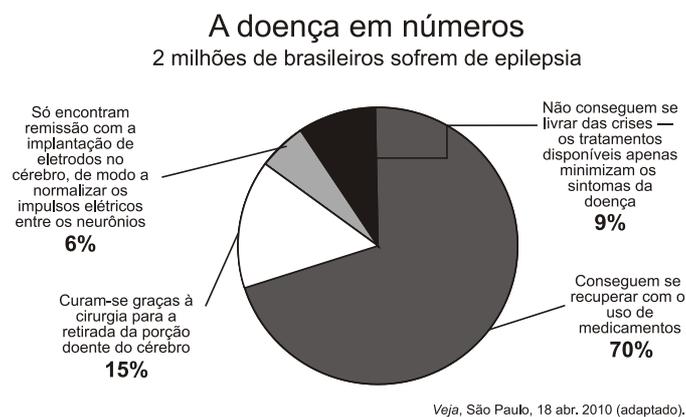
19. (Enem 2013) A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

- A** 75,28
- B** 64,09
- C** 56,95
- D** 45,76
- E** 30,07

20. (Enem PPL 2013) Existem hoje, no Brasil, cerca de 2 milhões de pessoas que sofrem de epilepsia. Há diversos meios de tratamento para a doença, como indicado no gráfico:



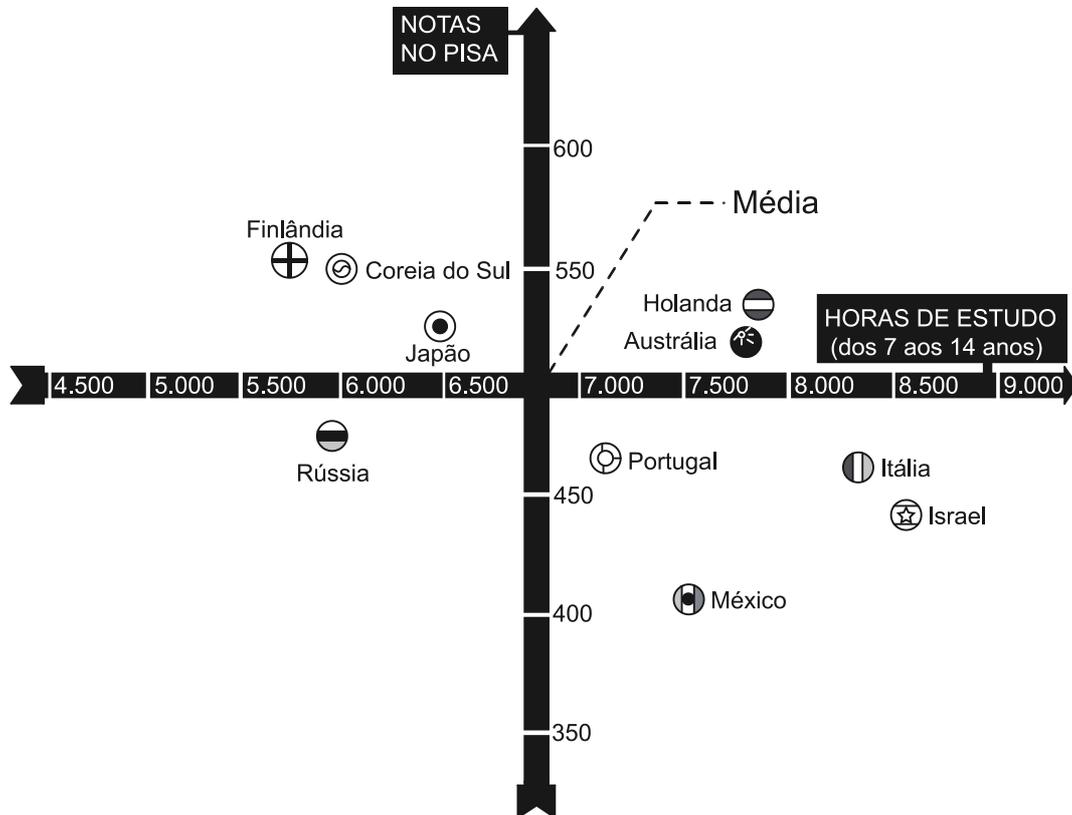
Considere um estado do Brasil, onde 400.000 pessoas sofrem de epilepsia. Nesse caso, o número de pessoas que conseguem se recuperar com o uso de medicamentos, ou se curar a partir da cirurgia para retirada da porção doente do cérebro, é aproximadamente

- A** 42.000.
- B** 60.000.
- C** 220.000.
- D** 280.000.
- E** 340.000.

21. (Enem 2013) **Uma falsa relação**

O cruzamento da quantidade de horas estudadas com o desempenho no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) mostra que mais tempo na escola não é garantia de nota acima da média.

NOTAS NO PISA E CARGA HORÁRIA (PAÍSES SELECIONADOS)*



*Considerando as médias de cada país no exame de matemática.

Nova Escola, São Paulo, dez. 2010 (adaptado).

Dos países com notas abaixo da média nesse exame, aquele que apresenta maior quantidade de horas de estudo é

- A Finlândia.
- B Holanda.
- C Israel.
- D México.
- E Rússia.

22. (Enem PPL 2013) A tabela apresenta os registros de ocorrência de acidentes de trabalho por categorias econômicas no Brasil, no mês de julho de 2001:

Afastamentos por acidentes de trabalho por atividades econômicas – julho de 2001
(em valores aproximados)

Atividades Econômicas	Quantidade de Empregados	Afastamentos por Acidente de Trabalho
Agropecuária e extrativismo	1.414.000	8.000
Indústria leve	2.031.000	24.000
Indústria pesada	2.455.000	33.000
Construção civil	1.105.000	14.000
Comércio	4.097.000	24.000
Serviços	6.241.000	34.000
Transportes	1.278.000	13.000
Crédito	524.000	6.000
Administração pública	1.138.000	2.000
Não classificado	33.000	30
Total	20.316.000	158.030

Fonte: MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO.

Caderno de teoria e prática 2 – TP2: matemática na alimentação e nos impostos. Brasília, 2008 (adaptado).

Considerando os dados dispostos na tabela, uma pessoa que pretende ingressar no mercado de trabalho decide pela ocupação de menor grau de risco de acidente de trabalho. Sabendo que o grau de risco é a probabilidade de ocorrência de acidentes de trabalho em categorias de atividade econômica, sua opção é se empregar na atividade econômica

- A** crédito, pois representa risco aproximado de acidente de trabalho igual a 1,15%.
- B** crédito, pois representa risco aproximado de acidente de trabalho igual a 2,58%.
- C** crédito, pois apresenta o menor registro de quantidade de empregados.
- D** administração pública, pois representa risco aproximado de acidente de trabalho igual a 0,18%.
- E** administração pública, pois apresenta o menor registro de afastamento por acidente de trabalho.

23. (Enem 2013) Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual. O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

O empresário decidiu comprar a empresa

- A F.
- B G.
- C H.
- D M.
- E P.

24. (Enem 2013) O índice de eficiência utilizado por um produtor de leite para qualificar suas vacas é dado pelo produto do tempo de lactação (em dias) pela produção média diária de leite (em kg), dividido pelo intervalo entre partos (em meses). Para esse produtor, a vaca é qualificada como eficiente quando esse índice é, no mínimo, 281 quilogramas por mês, mantendo sempre as mesmas condições de manejo (alimentação, vacinação e outros). Na comparação de duas ou mais vacas, a mais eficiente é a que tem maior índice.

A tabela apresenta os dados coletados de cinco vacas:

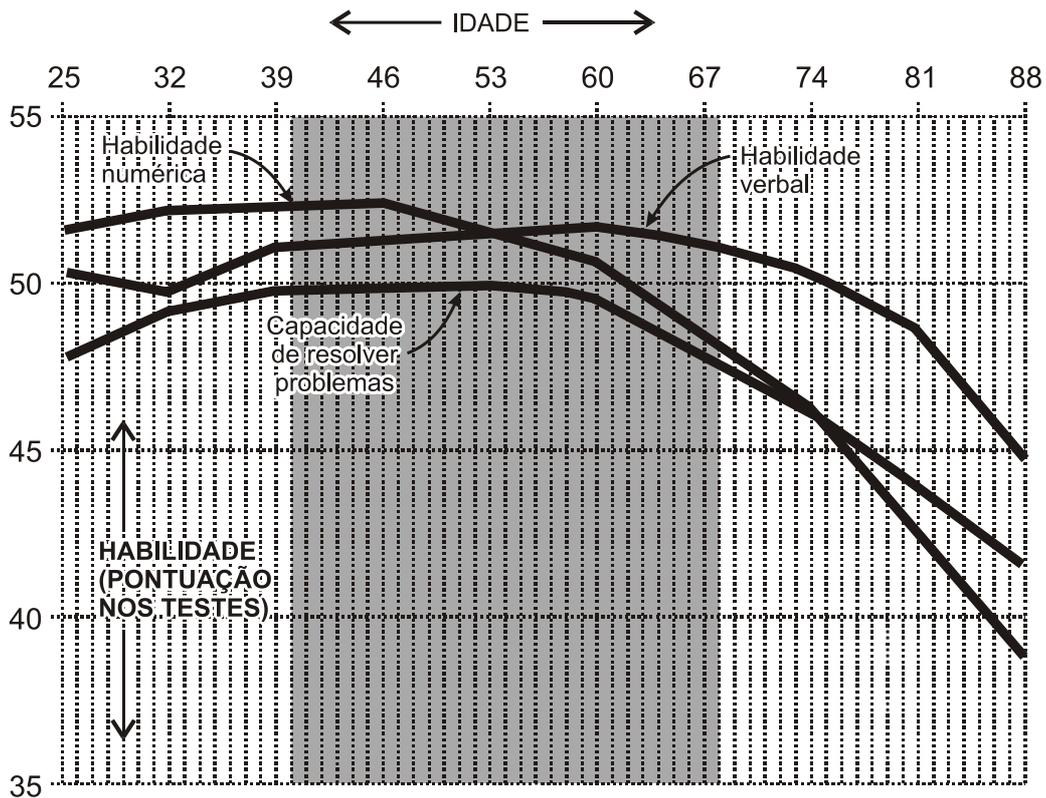
Dados relativos à produção de vacas

Vaca	Tempo de lactação (em dias)	Produção média diária de leite (em kg)	Intervalo entre partos (em meses)
Malhada	360	12,0	15
Mamona	310	11,0	12
Maravilha	260	14,0	12
Mateira	310	13,0	13
Mimosa	270	12,0	11

Após a análise dos dados, o produtor avaliou que a vaca mais eficiente é a

- A Malhada.
- B Mamona.
- C Maravilha.
- D Mateira.
- E Mimosa.

25. (Enem PPL 2012)

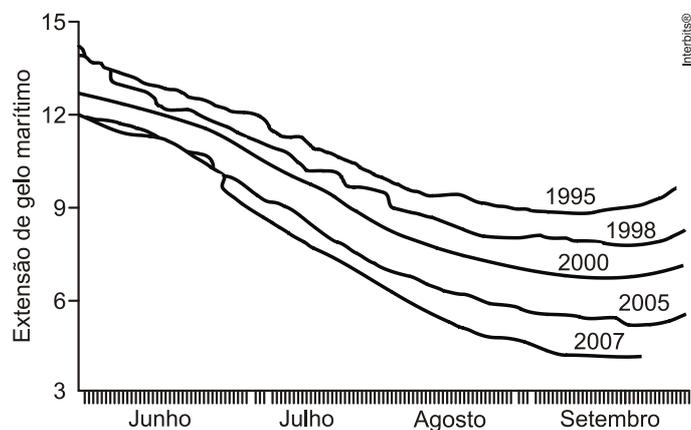


BUSCATO, M.; SEGADILHA, B.; PEROSA, T. Disponível em: www.revistaepoca.globo.com. Acesso em: 28 fev. 2012.

Em variados momentos de nossa vida, precisamos interpretar as diferentes linguagens dos sistemas de comunicação. O gráfico é um desses sistemas, que, no caso apresentado, indica que as habilidades associadas à inteligência humana variam de acordo com a idade. Considerando essa informação, constata-se que

- A** as habilidades verbal e de resolução de problemas destacam-se entre 40 e 60 anos.
- B** a habilidade numérica diminui consideravelmente entre 20 e 40 anos.
- C** a habilidade de resolução de problemas piora consideravelmente a partir dos 30 anos.
- D** as habilidades humanas, em geral, declinam consideravelmente a partir dos 40 anos.
- E** a habilidade numérica melhora muito na faixa etária entre 60 e 80 anos.

26. (Enem 2012) O gráfico mostra a variação da extensão média de gelo marítimo, em milhões de quilômetros quadrados, comparando dados dos anos 1995, 1998, 2000, 2005 e 2007. Os dados correspondem aos meses de junho a setembro. O Ártico começa a recobrar o gelo quando termina o verão, em meados de setembro. O gelo do mar atua como o sistema de resfriamento da Terra, refletindo quase toda a luz solar de volta ao espaço. Águas de oceanos escuros, por sua vez, absorvem a luz solar e reforçam o aquecimento do Ártico, ocasionando derretimento crescente do gelo.

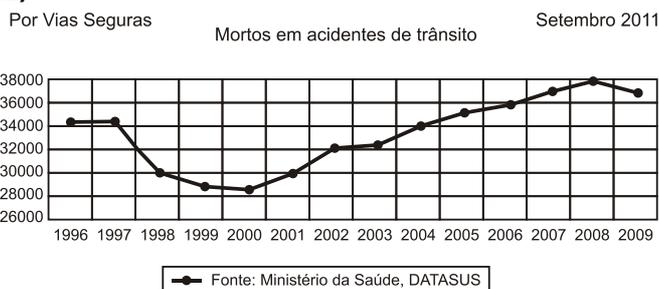


Disponível em: <http://sustentabilidade.allianz.com.br>.
Acesso em: fev. 2012 (adaptado)

Com base no gráfico e nas informações do texto, é possível inferir que houve maior aquecimento global em

- A 1995.
- B 1998.
- C 2000.
- D 2005.
- E 2007.

27. (Enem PPL 2012)



Disponível em: www.vias-seguras.com/. Acesso em: 28 fev. 2012.

O gráfico divulgado pela Associação por Vias Seguras traça objetivamente, a partir de dados do Ministério da Saúde, um histórico do número de vítimas fatais em decorrência de acidentes de trânsito no Brasil ao longo de catorze anos. As informações nele dispostas demonstram que o número de vítimas fatais

- A aumentou de forma progressiva ao longo do período.
- B teve sua maior redução no final da década de noventa.
- C estabilizou-se nos cinco primeiros anos do século XXI.
- D sofreu mais redução que aumento ao longo do período.
- E estabilizou-se na passagem do século XX ao século XXI.

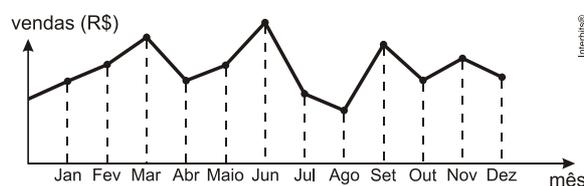
28. (Enem PPL 2012) O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) mede a qualidade de vida dos países para além dos indicadores econômicos. O IDH do Brasil tem crescido ano a ano e atingiu os seguintes patamares: 0,600 em 1990; 0,665 em 2000; 0,715 em 2010. Quanto mais perto de 1,00, maior é o desenvolvimento do país.

O Globo. Caderno Economia. 3 nov. 2011 (adaptado).

Observando o comportamento do IDH nos períodos citados, constata-se que, ao longo do período 1990-2010, o IDH brasileiro

- A** diminuiu com variações decenais crescentes.
- B** diminuiu em proporção direta com o tempo.
- C** aumentou com variações decenais decrescentes.
- D** aumentou em proporção direta com o tempo.
- E** aumentou em proporção inversa com o tempo.

29. (Enem 2012) O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.



De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas em 2011 foram

- A** março e abril.
- B** março e agosto.
- C** agosto e setembro.
- D** junho e setembro.
- E** junho e agosto.

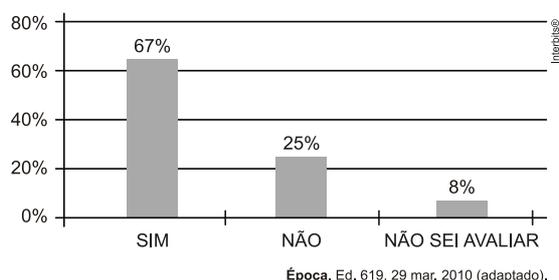
30. (Enem 2012) Uma pesquisa realizada por estudantes da Faculdade de Estatística mostra, em horas por dia, como os jovens entre 12 e 18 anos gastam seu tempo, tanto durante a semana (de segunda-feira a sexta-feira), como no fim de semana (sábado e domingo). A seguinte tabela ilustra os resultados da pesquisa.

Rotina Juvenil	Durante a semana	No fim de semana
Assistir à televisão	3	3
Atividades domésticas	1	1
Atividades escolares	5	1
Atividades de lazer	2	4
Descanso, higiene e alimentação	10	12
Outras atividades	3	3

De acordo com esta pesquisa, quantas horas de seu tempo gasta um jovem entre 12 e 18 anos, na semana inteira (de segunda-feira a domingo), nas atividades escolares?

- A** 20
- B** 21
- C** 24
- D** 25
- E** 27

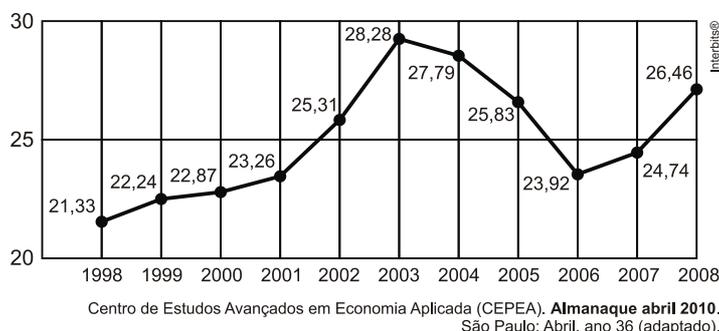
31. (Enem 2011) Uma enquete, realizada em março de 2010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.



Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam “Não” à enquete?

- Ⓐ Menos de 23.
- Ⓑ Mais de 23 e menos de 25.
- Ⓒ Mais de 50 e menos de 75.
- Ⓓ Mais de 100 e menos de 190.
- Ⓔ Mais de 200.

32. (Enem 2011) O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos. O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de

- Ⓐ 1998 e 2001.
- Ⓑ 2001 e 2003.
- Ⓒ 2003 e 2006.
- Ⓓ 2003 e 2007.
- Ⓔ 2003 e 2008.

33. (Enem 2011) A tabela compara o consumo mensal, em kWh, dos consumidores residenciais e dos de baixa renda, antes e depois da redução da tarifa de energia no estado de Pernambuco.

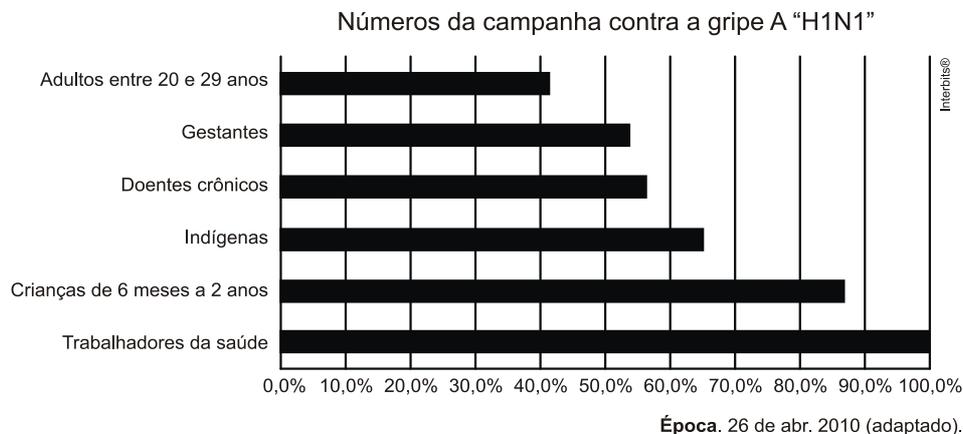
Como fica a tarifa?			
Residencial			
Consumo mensal (kWh)	Antes	Depois	Economia
140	R\$ 71,04	R\$ 64,75	R\$ 6,29
185	R\$ 93,87	R\$ 85,56	R\$ 8,32
350	R\$ 177,60	R\$ 161,86	R\$ 15,74
500	R\$ 253,72	R\$ 231,24	R\$ 22,48
Baixa renda			
Consumo mensal (kWh)	Antes	Depois	Economia
30	R\$ 3,80	R\$ 3,35	R\$ 0,45
65	R\$ 11,53	R\$ 10,04	R\$ 1,49
80	R\$ 14,84	R\$ 12,90	R\$ 1,94
100	R\$ 19,31	R\$ 16,73	R\$ 2,59
140	R\$ 32,72	R\$ 28,20	R\$ 4,53
Fonte: Celpe			

Diário de Pernambuco. 28 abr. 2010 (adaptado).

Considere dois consumidores: um que é de baixa renda e gastou 100 kWh e outro do tipo residencial que gastou 185 kWh. A diferença entre o gasto desses consumidores com 1 kWh, depois da redução da tarifa de energia, mais aproximada, é de

- A** R\$ 0,27 .
- B** R\$ 0,29 .
- C** R\$ 0,32 .
- D** R\$ 0,34 .
- E** R\$ 0,61 .

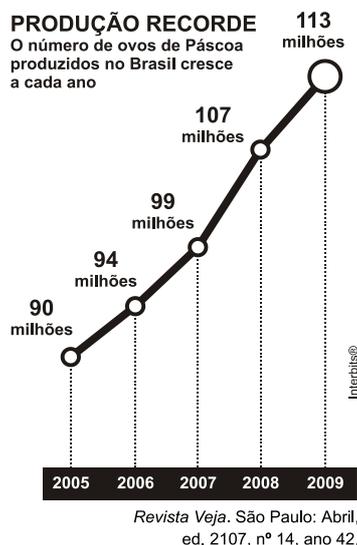
34. (Enem 2ª aplicação 2010) O gráfico expõe alguns números da gripe A-H1N1. Entre as categorias que estão em processo de imunização, uma já está completamente imunizada, a dos trabalhadores da saúde.



De acordo com o gráfico, entre as demais categorias, a que está mais exposta ao vírus da gripe A-H1N1 é a categoria de

- A** indígenas.
- B** gestantes.
- C** doentes crônicos.
- D** adultos entre 20 e 29 anos.
- E** crianças de 6 meses a 2 anos.

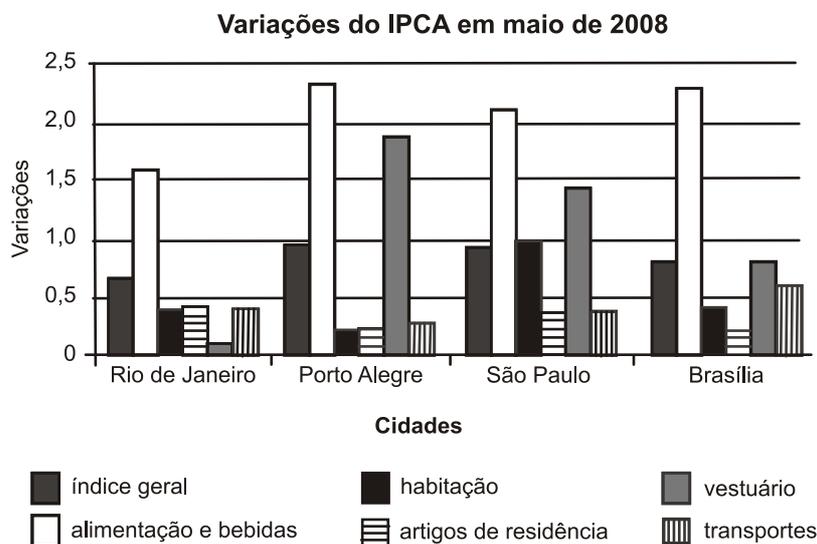
35. (Enem 2010) Para conseguir chegar a um número recorde de produção de ovos de Páscoa, as empresas brasileiras começam a se planejar para esse período com um ano de antecedência. O gráfico a seguir mostra o número de ovos de Páscoa produzidos no Brasil no período de 2005 a 2009.



De acordo com o gráfico, o biênio que apresentou maior produção acumulada foi

- A** 2004-2005.
- B** 2005-2006.
- C** 2006-2007.
- D** 2007-2008.
- E** 2008-2009.

36. (Enem cancelado 2009) Para o cálculo da inflação, utiliza-se, entre outros, o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), que toma como base os gastos das famílias residentes nas áreas urbanas, com rendimentos mensais compreendidos entre um e quarenta salários mínimos. O gráfico a seguir mostra as variações do IPCA de quatro capitais brasileiras no mês de maio de 2008.



Disponível em: <http://www.ibge.gov.br>. Acesso em: 05 jul. 2008 (adaptado).

Com base no gráfico, qual item foi determinante para a inflação de maio de 2008?

- A** Alimentação e bebidas.
- B** Artigos de residência.
- C** Habitação.
- D** Vestuário.
- E** Transportes

A maioria dos dados apresenta uma tendência de se concentrarem em torno de um ponto central. As medidas de tendência central são valores que, de certa forma, e de maneira condensada, trazem consigo informações contidas nos dados estatísticos. Elas funcionam como uma espécie de “medidas-resumo”, pois nos passam a ideia do comportamento geral das observações estudadas. Podemos dizer ainda que elas são como valores de referência, em torno dos quais, os outros se distribuem.

Existem vários tipos de medidas utilizadas como medidas de tendência central. Todavia, abordaremos as mais utilizadas:

MÉDIA ARITMÉTICA SIMPLES

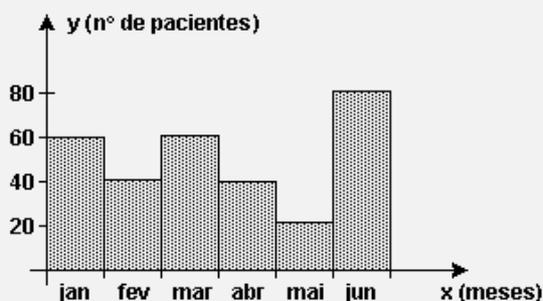
A média aritmética dos n números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ indicada por \bar{x} , é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Popularmente, dizemos que a média aritmética simples é a soma de todos os valores analisados, dividida pela quantidade de valores analisados.

EX₁₇:

O gráfico a seguir representa o número de pacientes atendidos mês a mês, em um ambulatório, durante o período de 6 meses de determinado ano.



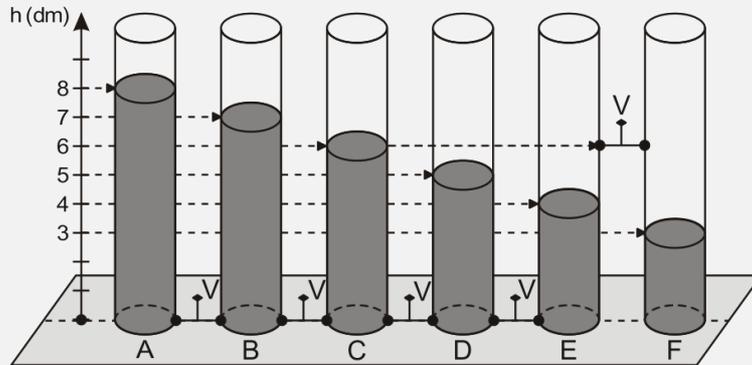
Foram atendidos 60, 40, 60, 40, 20 e 80 pacientes de janeiro a junho respectivamente. Para calcular a média mensal de pacientes atendidos, devemos calcular uma média aritmética simples: somar os números de todos os pacientes atendidos e dividir pelo total de meses.

$$M = \frac{60 + 40 + 60 + 40 + 20 + 80}{6} = \frac{300}{6} = 50$$

A média mensal de pacientes atendidos é 50.

EX18:

Seis reservatórios cilíndricos, superiormente abertos e idênticos (A, B, C, D, E e F) estão apoiados sobre uma superfície horizontal plana e ligados por válvulas (V) nas posições indicadas na figura.



Com as válvulas (V) fechadas, cada reservatório contém água até o nível (h) indicado na figura. Todas as válvulas são, então, abertas, o que permite a passagem livre da água entre os reservatórios, até que se estabeleça o equilíbrio hidrostático.

Nesta situação final, o nível da água, em dm, será igual a

- Ⓐ 6,0 nos reservatórios de A a E e 3,0 no reservatório F.
- Ⓑ 5,5 nos reservatórios de A a E e 3,0 no reservatório F.
- Ⓒ 6,0 em todos os reservatórios.
- Ⓓ 5,5 em todos os reservatórios.
- Ⓔ 5,0 nos reservatórios de A a E e 3,0 no reservatório F.

Solução:

Pelo Teorema de Stevin, para os reservatórios de A a E, o equilíbrio hidrostático ocorrerá quando as pressões hidrostáticas (p) no fundo atingirem o mesmo valor. Como $p = d \cdot g \cdot h$, as alturas finais nos reservatórios de A a E deverão ser iguais.

O volume total permanece constante. Sendo A a área da base de cada reservatório, e h a altura final do nível da água nesses cinco reservatórios, vem:

$$A(h_A + h_B + h_B + h_D + h_E) = A(5h)$$

$$h = \frac{h_A + h_B + h_B + h_D + h_E}{5}$$

$$h = \frac{8 + 7 + 6 + 5 + 4}{5} = \frac{30}{5} = 6dm$$

Se no reservatório E o nível da água atingirá a mesma altura da válvula que o liga ao reservatório F, não passará água de E para F, portanto a altura do nível nesse último reservatório não se alterará.

Assim:

Nos tubos de A a E o nível ficará em 6 dm e no reservatório F será 3 dm.

EX19:

Para se programar em relação aos estudos, um aluno organizou todas as suas notas em uma tabela:

Prova	Nota
01	8,0
02	6,5
03	6,0
04	-

O título de aprovado só é concedido ao aluno que conseguir nota média igual ou superior a 7,0. Qual deve ser a nota a ser alcançada na quarta prova, para que ele seja aprovado?

Solução:

$$\text{Média} \geq 7,0$$

$$\frac{8,0 + 6,5 + 6,0 + x}{4} \geq 7,0$$

$$\frac{20,5 + x}{4} \geq 7,0$$

$$20,5 + x \geq 28,0$$

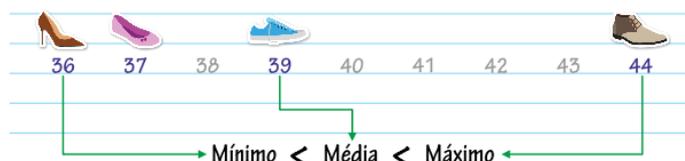
$$x \geq 7,5$$

O aluno deve atingir uma nota igual ou superior a 7,5 na quarta prova para ser aprovado.

PROPRIEDADES

P₁: A média aritmética está sempre entre o menor e o maior valor da sequência.

Tome como exemplo quatro calçados de números 36, 37, 39 e 44.



A média dos números dos quatro calçados é 39:

$$M = \frac{36 + 37 + 39 + 44}{4} = \frac{156}{4} = 39$$

O menor número de calçado apresentado é 36, o maior é 44.

$$36 < 39 < 44$$

A média, 39, está entre 36 e 44.

É importante ressaltar que a igualdade entre a média e os extremos só ocorre quando todos os valores da sequência são iguais.

P₂: A média é afetada por valores extremos.

Para calcular a média, é necessário somarmos todos os dados da série, ou seja, essa medida leva em conta todas as observações. Por isso, quando temos uma situação em que aparecem alguns valores, ou muito baixos, ou muito altos, se comparados com os demais elementos da série, a média é influenciada por eles.

Imagine 5 pessoas em uma sala, um bebê de 1 ano, uma criancinha de 3 anos, uma de 5 anos, uma de 7, todos supervisionados pela sua avó de 64 anos.

A média de idades dessas 5 pessoas é de 16 anos.

$$M_{\text{com a avó}} = \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 64}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

Se a vovó de 64 anos não estivesse a média das idades seria de 4 anos.

$$M_{\text{sem a avó}} = \frac{1 + 3 + 5 + 7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Veja como uma idade discrepante, um valor extremo, influencia a média!

P₃: Se acrescentarmos um valor constante a cada um dos termos da sequência, a média desses termos fica acrescida do mesmo valor.

Volte para a situação da avó e dos seus netos, se hoje eles possuem 1, 3, 5, 7 e 64 anos, quantos anos eles terão daqui há 10 anos?

Eles terão 11, 13, 15, 17 e 74 anos.

Perceba que foram adicionados 10 anos em cada idade. Mas o que aconteceu com a média das idades?

$$M_{\text{atual}} = \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 64}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

$$M_{\text{daqui há 10 anos}} = \frac{11 + 13 + 15 + 17 + 74}{5} = \frac{130}{5} = 26$$

A média saiu de 16 anos para 26 anos, ou seja, quando todas as idades aumentarem 10 anos, a média das idades também aumenta 10 anos.

Uma situação análoga acontecerá daqui há 20 anos:

$$M_{\text{daqui há 20 anos}} = \frac{21 + 23 + 25 + 27 + 84}{5} = \frac{180}{5} = 36$$

A média saiu de 16 anos para 36 anos, ou seja, quando todas as idades aumentarem 20 anos, a média das idades também aumenta 20 anos.

P₄: Se multiplicarmos todos os termos da sequência por um valor constante, a média desses termos fica multiplicada pelo mesmo valor.

Agora, pegue cada uma das idades 1, 3, 5, 7 e 64 multiplique por 4.

Você obterá 4, 12, 20, 28 e 256 (pense em uma idade avançada! 😊)

$$M_{idades} = \frac{1 + 3 + 5 + 7 + 64}{5} = \frac{80}{5} = 16$$

$$M_{quádruplo\ das\ idades} = \frac{4 + 12 + 20 + 28 + 256}{5} = \frac{320}{5} = 64$$

Quando cada idade quadruplica, a média das idades também quadruplica!

Vamos exercitar um pouco?

37. (Enem PPL 2018) Dois amigos abriram um restaurante. No primeiro ano, o custo total com as despesas do restaurante chegou a 250 mil reais. A receita neste ano foi de 325 mil reais, obtendo assim um lucro de 75 mil reais (diferença entre a receita e o custo total). A tabela representa o custo total e a receita nos cinco primeiros anos.

Ano	Custo total (milhar de real)	Receita (milhar de real)
Primeiro	250	325
Segundo	270	355
Terceiro	290	350
Quarto	280	365
Quinto	260	305

De acordo com a tabela, a média anual do lucro, em milhar de real, ao longo dos cinco anos é

- A** 60.
- B** 70.
- C** 75.
- D** 80.
- E** 85.

38. (Enem PPL 2018) No final de uma matéria sobre sorte e azar publicada em uma revista, o leitor tem a opção de realizar um teste no qual ele deve responder a dez perguntas sobre cinco temas, sendo cinco sobre sorte e cinco sobre azar. Para cada pergunta, o leitor marca apenas uma alternativa dentre as seis opções de respostas, sendo que a alternativa escolhida está associada a uma nota entre os valores 1, 3, 5, 7, 8 e 9.

Um leitor respondeu ao teste, obtendo as notas de sorte e de azar para as perguntas e representou-as no Quadro 1.

Quadro 1					
	Tema 1	Tema 2	Tema 3	Tema 4	Tema 5
Sorte	1	3	9	7	7
Azar	8	5	5	5	9

O resultado do teste x é calculado como sendo a diferença entre as médias aritméticas das notas de sorte e de azar, nessa ordem. A classificação desse resultado é dada de acordo com o Quadro 2.

Quadro 2	
	Resultado
Você é muito azarado	$x \leq -4$
Você é azarado	$-4 < x < -1$
Você está na média	$-1 \leq x \leq 1$
Você é sortudo	$1 < x < 4$
Você é muito sortudo	$x \geq 4$

SANTI, A.; KIST, C. Sorte: manual de instruções. *Superinteressante*, ago. 2012 (adaptado).

De acordo com os dados apresentados, a classificação do resultado do teste desse leitor é

- A "Você é azarado".
- B "Você é sortudo".
- C "Você é muito azarado".
- D "Você é muito sortudo".
- E "Você está na média".

39. (Enem PPL 2018) No quadro estão representadas as quantidades de certos tipos de vinho vendidos durante um ano e o lucro por unidade vendida de cada um desses tipos. Para repor seu estoque, o proprietário escolherá apenas os tipos de vinho em que o lucro total com sua venda foi maior do que a média entre os lucros obtidos com a venda de todos os tipos.

Tipo de vinho	I	II	III	IV	V	VI
Unidades vendidas	120	50	71	47	70	90
Lucro por unidade (R\$)	6,00	12,00	10,00	20,00	5,00	12,00

Conforme condições estabelecidas, os tipos de vinhos escolhidos serão

- A I e VI.
- B IV e VI.
- C I, IV e VI.
- D II, IV e VI.
- E II, III, IV e VI.

40. (Enem PPL 2018) Em 2012, o PNUD Brasil, o Ipea e a Fundação João Pinheiro assumiram o desafio de adaptar a metodologia do Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) global para calcular o Índice de Desenvolvimento Humano Municipal (IDHM) dos 5.565 municípios brasileiros com base nos dados do Censo Demográfico de 2010. Também se recalculou o IDHM, pela metodologia adotada, para os anos de 1990 e 2000, para permitir a comparabilidade temporal e espacial entre os municípios.

No quadro são apresentados os dados de cinco cidades brasileiras.

Município	IDHM - 1990	IDHM - 2000	IDHM - 2010
São Caetano do Sul (SP)	0,77	0,77	0,92
Águas de São Pedro (SP)	0,67	0,76	0,85
Florianópolis (SC)	0,65	0,80	0,80
Balneário Camboriú (SC)	0,79	0,79	0,79
Vitória (ES)	0,73	0,78	0,77

Disponível em: <http://atlasbrasil.org.br>. Acesso em: 26 abr. 2014 (adaptado)

Uma ONG decide fazer um trabalho de acompanhamento com a cidade que teve a menor média aritmética dos IDHM das três últimas décadas dentre as cinco cidades analisadas.

Com base nos dados fornecidos, qual foi o município escolhido pela ONG?

- A** Florianópolis.
- B** Águas de São Pedro.
- C** Balneário Camboriú.
- D** São Caetano do Sul.
- E** Vitória.

41. (Enem 2017) Três alunos, X, Y e Z, estão matriculados em um curso de inglês. Para avaliar esses alunos, o professor optou por fazer cinco provas. Para que seja aprovado nesse curso, o aluno deverá ter a média aritmética das notas das cinco provas maior ou igual a 6. Na tabela, estão dispostas as notas que cada aluno tirou em cada prova.

Aluno	1ª Prova	2ª Prova	3ª Prova	4ª Prova	5ª Prova
X	5	5	5	10	6
Y	4	9	3	9	5
Z	5	5	8	5	6

Com base nos dados da tabela e nas informações dadas, ficará(ão) reprovado(s)

- A** apenas o aluno Y.
- B** apenas o aluno Z.
- C** apenas os alunos X e Y.
- D** apenas os alunos X e Z.
- E** os alunos X, Y e Z.

42. (Enem PPL 2017) Numa turma de inclusão de jovens e adultos na educação formal profissional (Proeja), a média aritmética das idades dos seus dez alunos é de 32 anos.

Em determinado dia, o aluno mais velho da turma faltou e, com isso, a média aritmética das idades dos nove alunos presentes foi de 30 anos.

Disponível em: <http://portal.mec.gov.br>. Acesso em: 10 mar. 2012 (adaptado).

Qual é a idade do aluno que faltou naquela turma?

- A** 18
- B** 20
- C** 31
- D** 50
- E** 62

43. (Enem 2016) Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

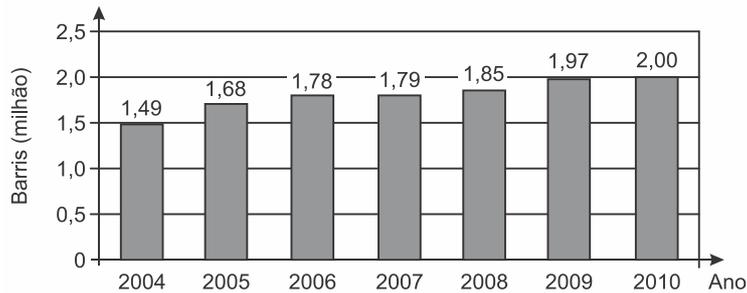
Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses.

Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

- A** I.
- B** II.
- C** IV.
- D** V.
- E** VII.

44. (Enem 2ª aplicação 2016) O gráfico mostra a média de produção diária de petróleo no Brasil, em milhão de barris, no período de 2004 a 2010.



Estimativas feitas naquela época indicavam que a média de produção diária de petróleo no Brasil, em 2012, seria 10% superior à média dos três últimos anos apresentados no gráfico.

Disponível em: <http://blogs.estadao.com.br>. Acesso em: 2 ago. 2012.

Se as estimativas tivessem sido confirmadas, a média de produção diária de petróleo no Brasil, em milhão de barris, em 2012, teria sido igual a

- A 1,940.
- B 2,134.
- C 2,167.
- D 2,420.
- E 6,402.

45. (Enem 2016) Em uma cidade, o número de casos de dengue confirmados aumentou consideravelmente nos últimos dias. A prefeitura resolveu desenvolver uma ação contratando funcionários para ajudar no combate à doença, os quais orientarão os moradores a eliminarem criadouros do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A tabela apresenta o número atual de casos confirmados, por região da cidade.

Região	Casos confirmados
Oeste	237
Centro	262
Norte	158
Sul	159
Noroeste	160
Leste	278
Centro-Oeste	300
Centro-Sul	278

A prefeitura optou pela seguinte distribuição dos funcionários a serem contratados:

- I. 10 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja maior que a média dos casos confirmados.
- II. 7 funcionários para cada região da cidade cujo número de casos seja menor ou igual à média dos casos confirmados.

Quantos funcionários a prefeitura deverá contratar para efetivar a ação?

- A 59
- B 65
- C 68
- D 71
- E 80

46. (Enem 2016) A permanência de um gerente em uma empresa está condicionada à sua produção no semestre. Essa produção é avaliada pela média do lucro mensal do semestre. Se a média for, no mínimo, de 30 mil reais, o gerente permanece no cargo, caso contrário, ele será despedido. O quadro mostra o lucro mensal, em milhares de reais, dessa empresa, de janeiro a maio do ano em curso.

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Maio
21	35	21	30	38

Qual deve ser o lucro mínimo da empresa no mês de junho, em milhares de reais, para o gerente continuar no cargo no próximo semestre?

- A** 26
- B** 29
- C** 30
- D** 31
- E** 35

47. (Enem PPL 2016) O presidente de um time de futebol quer contratar um atacante para seu elenco e um empresário lhe ofereceu cinco jogadores. Ele deseja contratar o jogador que obteve a maior média de gols nos anos de 2010 a 2013. O quadro apresenta o número de gols marcados nos anos de 2010 a 2013 por cada um dos cinco jogadores: I, II, III, IV e V.

Jogador	Número de gols em 2010	Número de gols em 2011	Número de gols em 2012	Número de gols em 2013
I	21	21	24	21
II	20	21	22	22
III	26	21	20	21
IV	23	23	19	18
V	16	21	26	16

O presidente do time deve contratar o jogador

- A** I.
- B** II.
- C** III.
- D** IV.
- E** V.

48. (Enem 2016) Um posto de saúde registrou a quantidade de vacinas aplicadas contra febre amarela nos últimos cinco meses:

- 1° mês: 21;
- 2° mês: 22;
- 3° mês: 25;
- 4° mês: 31;
- 5° mês: 21.

No início do primeiro mês, esse posto de saúde tinha 228 vacinas contra febre amarela em estoque. A política de reposição do estoque prevê a aquisição de novas vacinas, no início do sexto mês, de tal forma que a quantidade inicial em estoque para os próximos meses seja igual a 12 vezes a média das quantidades mensais dessas vacinas aplicadas nos últimos cinco meses.

Para atender essas condições, a quantidade de vacinas contra febre amarela que o posto de saúde deve adquirir no início do sexto mês é

- A** 156.
- B** 180.
- C** 192.
- D** 264.
- E** 288.

49. (Enem PPL 2015) Cinco amigos marcaram uma viagem à praia em dezembro. Para economizar, combinaram de ir num único carro. Cada amigo anotou quantos quilômetros seu carro fez, em média, por litro de gasolina, nos meses de setembro, outubro e novembro. Ao final desse trimestre, calcularam a média dos três valores obtidos para escolherem o carro mais econômico, ou seja, o que teve a maior média. Os dados estão representados na tabela:

Carro	Desempenho médio mensal (km/litro)		
	Setembro	Outubro	Novembro
I	6,2	9,0	9,3
II	6,7	6,8	9,5
III	8,3	8,7	9,0
IV	8,5	7,5	8,5
V	8,0	8,0	8,0

Qual carro os amigos deverão escolher para a viagem?

- A** I
- B** II
- C** III
- D** IV
- E** V

50. (Enem PPL 2014) A tabela apresenta uma estimativa da evolução da população brasileira por faixa etária, em milhões de pessoas, para 2020, 2030 e 2045.

Ano Faixa etária	2020	2030	2045
Até 14 anos	49	48	48
De 15 a 49 anos	111	112	110
De 50 anos ou mais	50	63	78
Total	210	223	236

STEFANO, F. Mais velhos e mais rico: os ganhos da maturidade. *Exame*, ed. 1003, ano 45, n. 21, 2 nov. 2011 (adaptado).

Com base na tabela, o valor que mais se aproxima da média dos percentuais da população brasileira na faixa etária até 14 anos, nos anos de 2020, 2030 e 2045, é

- Ⓐ 21,5.
- Ⓑ 21,7.
- Ⓒ 48,0.
- Ⓓ 48,3.
- Ⓔ 48,5.

51. (Enem 2014) Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados:

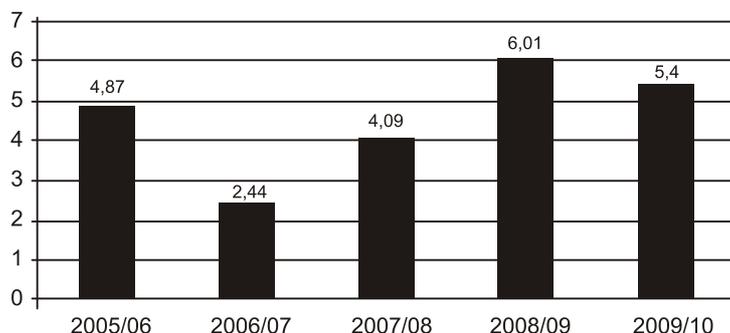
	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o

- Ⓐ 1.
- Ⓑ 2.
- Ⓒ 3.
- Ⓓ 4.
- Ⓔ 5.

52. (Enem PPL 2013) O gráfico mostra estimativas da produção brasileira de trigo em safras recentes:

Produção de trigo no Brasil
(em milhões de toneladas)



Globo Rural, São Paulo, jun. 2009 (adaptado).

A média da produção brasileira de trigo de 2005/06 a 2009/10, em milhões de toneladas, é de

- A** 4,87.
- B** 4,70.
- C** 4,56.
- D** 4,49.
- E** 4,09.

53. (Enem PPL 2013) Uma escola da periferia de São Paulo está com um projeto em parceria com as universidades públicas. Nesse projeto piloto, cada turma encaminhará um aluno que esteja apresentando dificuldades de aprendizagem para um acompanhamento especializado. Para isso, em cada turma, foram aplicadas 7 avaliações diagnósticas. Os resultados obtidos em determinada turma foram os seguintes:

	Aluno 1	Aluno 2	Aluno 3	Aluno 4	Aluno 5
Avaliação 1	4,2	8	8	9	6
Avaliação 2	4,2	2,5	5	3,5	8
Avaliação 3	3,2	1	0,5	5	4
Avaliação 4	3,2	4	3	8,5	7
Avaliação 5	3,5	3	2,5	3,5	9
Avaliação 6	4,2	4	4,6	7	7
Avaliação 7	3,2	8	8,6	6	6

Sabendo que o projeto visa atender o aluno que apresentar a menor média nas avaliações, deverá ser encaminhado o aluno

- A** 1.
- B** 2.
- C** 3.
- D** 4.
- E** 5.

54. (Enem PPL 2012) Acidentes banais como escorregões, quedas e tropeços se tornaram a segunda maior causa de morte na humanidade. A tabela a seguir mostra alguns tipos de acidentes e sua incidência, em milhares, no ano de 2009, nos EUA.

Tipos de acidentes	Machucados em 2009
Andando a cavalo	80
Andando de bicicleta	400
Acidentes na cama	500
Acidentes na piscina	160
Acidentes no banheiro	400
Jogando futebol	200

SOLEIRO, R. et al. Os novos jeitos de morrer. *Superinteressante*, dez. 2011 (adaptado)

Considerando os dados apresentados, a média de machucados em 2009, em milhares, nos EUA, foi igual a

- A** 200.
- B** 268.
- C** 290.
- D** 300.
- E** 330.

55. (Enem PPL 2012) O consumo de energia elétrica, nos últimos meses, na casa de uma família, é mostrado nas seguintes tabelas.

	set./2011	out./2011	nov./2011	dez./2011	jan./2012	fev./2012
Consumo kwh	292	284	301	292	281	242

A média do consumo mensal de energia elétrica na casa dessa família, de setembro de 2011 a fevereiro de 2012, é

- A** 280.
- B** 282.
- C** 284.
- D** 288.
- E** 292.

56. (Enem 2011) A participação dos estudantes na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) aumenta a cada ano. O quadro indica o percentual de medalhistas de ouro, por região, nas edições da OBMEP de 2005 a 2009:

Região	2005	2006	2007	2008	2009
Norte	2%	2%	1%	2%	1%
Nordeste	18%	19%	21%	15%	19%
Centro-Oeste	5%	6%	7%	8%	9%
Sudeste	55%	61%	58%	66%	60%
Sul	21%	12%	13%	9%	11%

Disponível em: <http://www.obmep.org.br>.
Acesso em: abr. 2010 (adaptado).

Em relação às edições de 2005 a 2009 da OBMEP, qual o percentual médio de medalhistas de ouro da região Nordeste?

- Ⓐ 14,6%
- Ⓑ 18,2%
- Ⓒ 18,4%
- Ⓓ 19,0%
- Ⓔ 21,0%

57. (Enem 2010) Em sete de abril de 2004, um jornal publicou o *ranking* de desmatamento, conforme gráfico, da chamada Amazônia Legal, integrada por nove estados.



Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação aos dados de 2004, o desmatamento médio por estado em 2009 está entre

- Ⓐ 100 km² e 900 km².
- Ⓑ 1 000 km² e 2 700 km².
- Ⓒ 2 800 km² e 3 200 km².
- Ⓓ 3 300 km² e 4 000 km².
- Ⓔ 4 100 km² e 5 800 km².

58. (Enem 2009) Brasil e França têm relações comerciais há mais de 200 anos. Enquanto a França é a 5.^a nação mais rica do planeta, o Brasil é a 10.^a, e ambas se destacam na economia mundial. No entanto, devido a uma série de restrições, o comércio entre esses dois países ainda não é adequadamente explorado, como mostra a tabela seguinte, referente ao período 2003-2007.

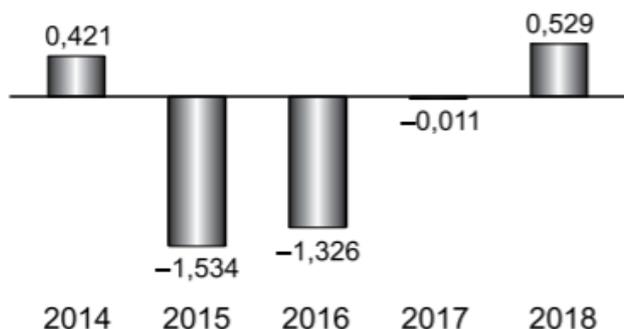
Investimentos Bilaterais (em milhões de dólares)		
Ano	Brasil na França	França no Brasil
2003	367	825
2004	357	485
2005	354	1.458
2006	539	744
2007	280	1.214

Disponível em: www.cartacapital.com.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Os dados da tabela mostram que, no período considerado, os valores médios dos investimentos da França no Brasil foram maiores que os investimentos do Brasil na França em um valor

- Ⓐ inferior a 300 milhões de dólares.
- Ⓑ superior a 300 milhões de dólares, mas inferior a 400 milhões de dólares.
- Ⓒ superior a 400 milhões de dólares, mas inferior a 500 milhões de dólares.
- Ⓓ superior a 500 milhões de dólares, mas inferior a 600 milhões de dólares.
- Ⓔ superior a 600 milhões de dólares.

59. (VUNESP 2019) No gráfico a seguir estão representados, em milhões de vagas, os saldos anuais (criação menos fechamento) do número de postos de trabalho com carteira assinada no Brasil, referentes aos anos de 2014 a 2018.



(Cadastro Geral de Empregados e Desempregados. O Estado de S.Paulo, 24.01.2019)

De acordo com os dados do gráfico, é correto afirmar que, no período considerado, o valor da média aritmética dos saldos anuais de postos de trabalho representa o fechamento de

- Ⓐ 957.000 vagas.
- Ⓑ 764.200 vagas.
- Ⓒ 574.200 vagas.
- Ⓓ 479.000 vagas.
- Ⓔ 384.200 vagas.

60. (VUNESP 2019) As empresas X, Y, W e Z participaram de uma licitação. Sabe-se que a empresa X apresentou o menor preço, e que os preços apresentados pelas empresas Y, W e Z superaram o menor preço em 6%, em 8% e em 10%, respectivamente.

Se a média aritmética dos preços das quatro empresas foi igual a R\$ 159.000,00, então, é correto afirmar que o preço apresentado pela empresa W foi

- A R\$ 162.000,00.
- B R\$ 164.600,00.
- C R\$ 165.000,00.
- D R\$ 168.800,00.
- E R\$ 174.900,00.

61. (VUNESP 2019) A tabela mostra alguns dados sobre o número de relatórios preenchidos por um funcionário durante uma semana.

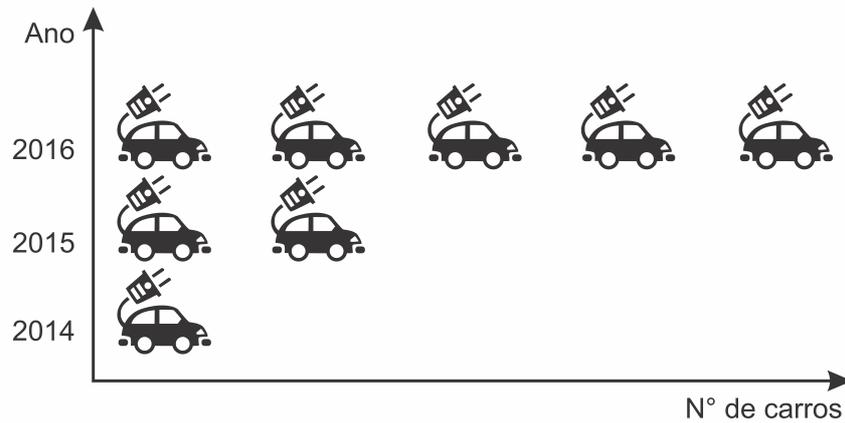
	Nº de relatórios
Segunda-feira	x
Terça-feira	9
Quarta-feira	2x
Quinta-feira	7
Sexta-feira	4

Sabendo-se que a média diária de relatórios preenchidos nesses 5 dias foi igual a 7, então o número de relatórios preenchidos na quarta-feira foi

- A 6.
- B 8.
- C 10.
- D 12.
- E 14.

62. (Enem 2018) De acordo com um relatório recente da Agência Internacional de Energia (AIE), o mercado de veículos elétricos atingiu um novo marco em 2016, quando foram vendidos mais de 750 mil automóveis da categoria. Com isso, o total de carros elétricos vendidos no mundo alcançou a marca de 2 milhões de unidades desde que os primeiros modelos começaram a ser comercializados em 2011.

No Brasil, a expansão das vendas também se verifica. A marca A, por exemplo, expandiu suas vendas no ano de 2016, superando em 360 unidades as vendas de 2015, conforme representado no gráfico.

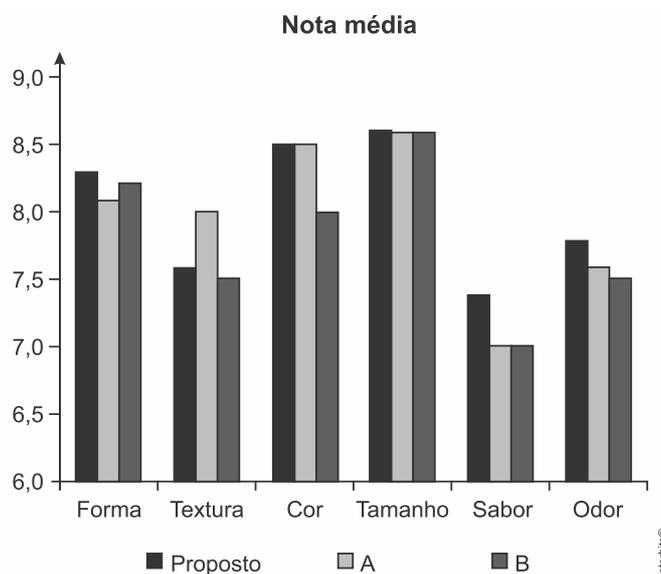


Disponível em: www.tecmundo.com.br. Acesso em: 5 dez. 2017.

A média anual do número de carros vendidos pela marca A, nos anos representados no gráfico, foi de

- A** 192.
- B** 240.
- C** 252.
- D** 320.
- E** 420.

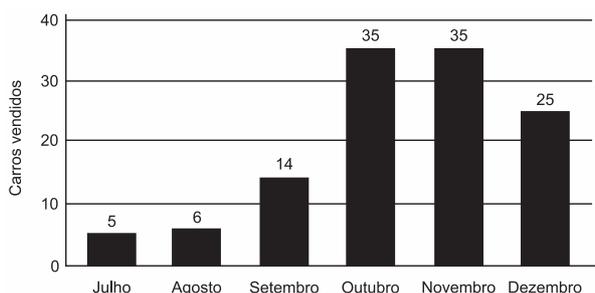
63. (Enem 2ª aplicação 2016) A diretoria de uma empresa de alimentos resolve apresentar para seus acionistas uma proposta de novo produto. Nessa reunião, foram apresentadas as notas médias dadas por um grupo de consumidores que experimentaram o novo produto e dois produtos similares concorrentes (A e B).



A característica que dá a maior vantagem relativa ao produto proposto e que pode ser usada, pela diretoria, para incentivar a sua produção é a

- A** textura.
- B** cor.
- C** tamanho.
- D** sabor.
- E** odor.

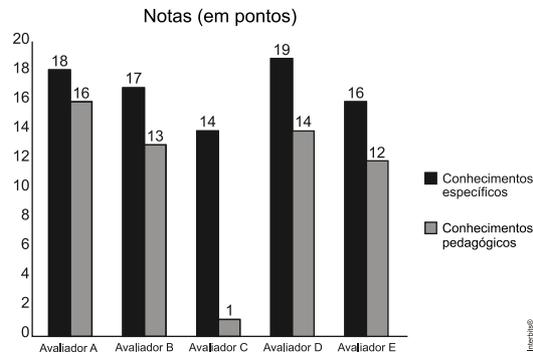
64. (Enem PPL 2014) Após encerrar o período de vendas de 2012, uma concessionária fez um levantamento das vendas de carros novos no último semestre desse ano. Os dados estão expressos no gráfico:



Ao fazer a apresentação dos dados aos funcionários, o gerente estipulou como meta para o mês de janeiro de 2013 um volume de vendas 20% superior à média mensal de vendas do semestre anterior. Para atingir essa meta, a quantidade mínima de carros que deveriam ser vendidos em janeiro de 2013 seria

- A** 17.
- B** 20.
- C** 21.
- D** 24.
- E** 30.

65. (Enem 2013) As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribuiu duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é

- A 0,25 ponto maior.
- B 1,00 ponto maior.
- C 1,00 ponto menor.
- D 1,25 ponto maior.
- E 2,00 pontos menor.

MÉDIA ARITMÉTICA PONDERADA

A média aritmética ponderada dos n números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ com pesos $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, respectivamente, indicada por \bar{x} , é dada por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + \dots + x_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n}$$

A média aritmética ponderada é bastante similar à média aritmética comum. A diferença, entretanto, é que na média aritmética simples, todos os valores contribuem com peso igual, enquanto que no cálculo da média aritmética ponderada se leva em consideração a contribuição (peso) de cada termo, uma vez que existem termos que contribuem mais que outros.

Entenda-se por peso, a frequência com a qual cada elemento aparece, ou ainda a quantidade de vezes que o elemento deve ser considerado no cálculo da média.

A melhor forma de apresentarmos o cálculo da média ponderada é através de um exemplo.

EX20:

Uma empresa é constituída de 40 funcionários, sendo os seus salários representados pela tabela a seguir:

Nº de Funcionários	Salário em R\$
20	465
15	930
5	1395

Qual o salário médio dos funcionários dessa empresa?

Solução:

Vamos calcular o valor total gasto com todos os salários:

20 funcionários recebem R\$ 465,00, cada, totalizando $20 \cdot 465,00 = R\$9.300,00$.

15 funcionários recebem R\$ 930,00, cada, totalizando $15 \cdot 930,00 = R\$13.950,00$.

5 funcionários recebem R\$ 1.395,00, cada, totalizando $5 \cdot 1.395,00 = R\$6.975,00$.

Total = $9.300,00 + 13.950,00 + 6.975,00 = R\$30.225,00$

Os 40 funcionários da empresa geram um custo de R\$ 30.225,00.

Para sabermos o salário médio da empresa devemos dividir o valor da folha salarial pelo número de funcionários:

$$M_{salarial} = \frac{30.225,00}{40} = R\$755,62$$

O salário médio dos funcionários é de R\$ 755,62.

Se fôssemos montar uma expressão para o cálculo da média, teríamos:

$$M_{\text{ salarial }} = \frac{\text{Somatório dos Salários}}{\text{Total de Funcionários}}$$

$$M_{\text{ salarial }} = \frac{20 \cdot 465,00 + 15 \cdot 930,00 + 5 \cdot 1.395,00}{20 + 15 + 5}$$

$$M_{\text{ salarial }} = \frac{9.300,00 + 13.950,00 + 6.975,00}{40}$$

$$M_{\text{ salarial }} = \frac{30.225,00}{40} = R\$755,62$$

Os números em vermelho acima são chamados de pesos, eles representam a quantidade de vezes que determinado elemento aparece. São esses pesos que fazem toda a diferença no cálculo da média aritmética ponderada.

Um **ERRO** muito comum é calcular a média somando os três salários e dividindo por três:

$$M_{\text{ ERRADA }} = \frac{465,00 + 930,00 + 1.395,00}{3}$$

$$M_{\text{ ERRADA }} = R\$930,00$$

NÃO FAÇA ISSO! Perceba que todos os salários contribuíram igualmente para o cálculo da média, no entanto, temos diferentes pesos e na média aritmética ponderada, os pesos devem ser levados em consideração!

EX₂₁:

Em uma cidade foi realizada uma entrevista com os usuários do transporte coletivo a fim de avaliar o nível de satisfação. Foram entrevistadas 1000 pessoas e os dados foram organizados em uma tabela.

Notas	Número de Entrevistados
0	10
1	12
2	25
3	35
4	150
5	340
6	170
7	136
8	80
9	40
10	2
Total	1000

Com base nos dados, determine a nota que representa a média geral de satisfação dos usuários do transporte coletivo da cidade.

Solução:

Muita atenção para que você leve em consideração os pesos de cada nota, ou seja, a quantidade de vezes que cada nota apareceu. Segue em vermelho o peso de cada uma.

$$M = \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 12 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 35 + 4 \cdot 150 + 5 \cdot 340 + 6 \cdot 170 + 7 \cdot 136 + 8 \cdot 80 + 9 \cdot 40 + 10 \cdot 2}{1000}$$

$$M = \frac{0 + 12 + 50 + 105 + 600 + 1700 + 1020 + 952 + 640 + 360 + 20}{1000}$$

$$M = \frac{5459}{1000} = 5,459$$

Deste modo, a nota que representa a média geral de satisfação dos usuários do transporte coletivo da cidade é aproximadamente 5,5.

Vamos exercitar um pouco?

66. (QUADRIX 2019) O departamento comercial de uma empresa metalúrgica, localizada na cidade de São Bernardo do Campo, possui 30 funcionários, com a seguinte distribuição salarial:

Número de funcionários	Salário (R\$)
9	2.000,00
12	3.600,00
5	4.500,00
4	6.000,00

Com base nas informações dadas, pode-se afirmar que a média salarial dos funcionários do referido departamento é igual a:

- A R\$ 3.550,00
- B R\$ 3.560,00
- C R\$ 3.570,00
- D R\$ 3.580,00
- E R\$ 3.590,00

67. (Enem 2018) A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.

Os resultados obtidos estão no quadro.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é

- A** 0,15.
- B** 0,30.
- C** 0,50.
- D** 1,11.
- E** 2,22.

68. (Enem 2017) A avaliação de rendimento de alunos de um curso universitário baseia-se na média ponderada das notas obtidas nas disciplinas pelos respectivos números de créditos, como mostra o quadro:

Avaliação	Média de notas (M)
Excelente	$9 < M \leq 10$
Bom	$7 \leq M \leq 9$
Regular	$5 \leq M < 7$
Ruim	$3 \leq M < 5$
Péssimo	$M < 3$

Quanto melhor a avaliação de um aluno em determinado período letivo, maior sua prioridade na escolha de disciplinas para o período seguinte.

Determinado aluno sabe que se obtiver avaliação “Bom” ou “Excelente” conseguirá matrícula nas disciplinas que deseja. Ele já realizou as provas de 4 das 5 disciplinas em que está matriculado, mas ainda não realizou a prova da disciplina I, conforme o quadro.

Disciplinas	Notas	Número de créditos
I		12
II	8,00	4
III	6,00	8
IV	5,00	8
V	7,50	10

Para que atinja seu objetivo, a nota mínima que ele deve conseguir na disciplina I é

- A** 7,00.
- B** 7,38.
- C** 7,50.
- D** 8,25.
- E** 9,00.

69. (Enem 2ª aplicação 2016) Um vendedor de assinaturas de TV a cabo teve, nos 7 primeiros meses do ano, uma média mensal de 84 assinaturas vendidas. Devido a uma reestruturação da empresa, foi exigido que todos os vendedores tivessem, ao final do ano, uma média mensal de 99 assinaturas vendidas.

Diante disso, o vendedor se viu forçado a aumentar sua média mensal de vendas nos 5 meses restantes do ano.

Qual deverá ser a média mensal de vendas do vendedor, nos próximos 5 meses, para que ele possa cumprir a exigência da sua empresa?

- A** 91
- B** 105
- C** 114
- D** 118
- E** 120

70. (Enem 2014) Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas química e física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas. O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de química para vencer a competição é

- A 18.
- B 19.
- C 22.
- D 25.
- E 26.

71. (Enem PPL 2012) Uma aluna registrou as notas de matemática obtidas nos 3 primeiros bimestres do ano letivo e seus respectivos pesos no quadro a seguir.

Bimestre	Nota	Peso
1	2,5	1
2	5,8	2
3	7,4	3

Ela ainda não sabe qual será sua nota de matemática no quarto bimestre, mas sabe que o peso dessa nota na média final é 4. As notas variam de zero a dez, sendo permitida apenas uma casa na parte decimal (caso contrário, a nota será arredondada, usando como critério “se o algarismo da segunda casa decimal é maior ou igual a 5, então o algarismo na primeira casa decimal será acrescido de uma unidade”). A média final mínima para aprovação na escola dessa aluna é 7. Se ela obtiver média final inferior a 7, precisará realizar uma outra prova que substitua a menor das notas bimestrais, de modo a alcançar a média 7 (mantidos os mesmos pesos anteriores).

Se essa aluna precisar realizar uma prova para substituir a nota que obteve no primeiro bimestre, e tal nota precisar ser igual a 4,8, é porque a nota que ela obteve no quarto bimestre foi

- A 2,3.
- B 7,3.
- C 7,9.
- D 9,2.
- E 10,0.

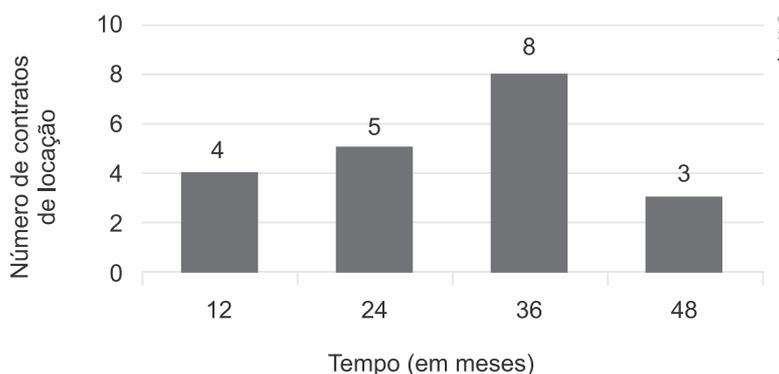
72. (Enem 2ª aplicação 2010) O IGP-M é um índice da Fundação Getúlio Vargas, obtido por meio da variação dos preços de alguns setores da economia, do dia vinte e um do mês anterior ao dia vinte do mês de referência. Ele é calculado a partir do Índice de Preços por Atacado (IPA-M), que tem peso de 60% do índice, do Índice de Preços ao Consumidor (IPC-M), que tem peso de 30%, e do Índice Nacional de Custo de Construção (INCC), representando 10%. Atualmente, o IGP-M é o índice para a correção de contratos de aluguel e o indexador de algumas tarifas, como energia elétrica.

INCC		IPC-M		IPA-M	
Mês/Ano	Índice do mês (em %)	Mês/Ano	Índice do mês (em %)	Mês/Ano	Índice do mês (em %)
Mar/2010	0,45	Mar/2010	0,83	Mar/2010	1,07
Fev/2010	0,35	Fev/2010	0,88	Fev/2010	1,42
Jan/2010	0,52	Jan/2010	1,00	Jan/2010	0,51

A partir das informações, é possível determinar o maior IGP-M mensal desse primeiro trimestre, cujo valor é igual a

- A 7,03%.
- B 3,00%.
- C 2,65%.
- D 1,15%.
- E 0,66%.

73. (G1 - cp2 2019) O edifício Duque de Caxias é um prédio comercial de 4 andares, com 5 escritórios em cada andar. Sabe-se que nem todos os contratos de locação (aluguel) desses escritórios têm o mesmo tempo de vigência, conforme é apresentado na tabela a seguir:



Com base nessa tabela, o tempo médio de vigência, em meses, desses contratos de locação é igual a

- A 20.
- B 25.
- C 30.
- D 35.

74. (G1 - cp2 2019) Atualmente, o sistema de avaliação do Colégio Pedro II considera aprovado o estudante que tenha, no mínimo, 75% de presença nas aulas e obtenha média anual ponderada (MA), nas três avaliações trimestrais (certificações), respectivamente com pesos 3, 3 e 4, igual ou superior a 7,0 (sete). Caso não consiga essa média anual, o estudante deve fazer uma prova final de verificação (PFV). Nesse caso, a média final ponderada (MF) é calculada com peso 3 para a média anual e peso 2 para prova final, e será aprovado o estudante que obtiver média final igual ou superior a 5,0 (cinco).

Desta forma, por exemplo, um estudante com notas 4,0; 8,0 e 5,0 respectivamente, nas três primeiras certificações de Matemática, fica com uma média anual

$$MA = \frac{3 \times 4 + 3 \times 8 + 4 \times 5}{3 + 3 + 4} = \frac{56}{10} = 5,6.$$

Esse estudante deve fazer a prova final de verificação e precisa tirar 4,1 nesta avaliação para obter a média final mínima para ser aprovado. Ou seja,

$$MF = \frac{3 \times 5,6 + 2 \times 4,1}{3 + 2} = \frac{25}{5} = 5,0.$$

Se Geisa tirou, nas três primeiras certificações, 2,0; 6,0 e 9,0, respectivamente, quanto ela precisa tirar na prova final de verificação, para obter a média final mínima para ser aprovada?

- A** 3,1.
- B** 3,5.
- C** 4,1.
- D** 5,0.

75. (Ueg 2017) Um artesão fabrica certo tipo de peças a um custo de R\$ 10,00 cada e as vende no mercado de artesanato com preço variável que depende da negociação com o freguês. Num certo dia, ele vendeu 2 peças por R\$ 25,00 cada, 4 peças por R\$ 22,50 cada e mais 4 peças por R\$ 20,00 cada.

O lucro médio do artesão nesse dia foi de

- A** R\$ 22,50
- B** R\$ 22,00
- C** R\$ 19,20
- D** R\$ 12,50
- E** R\$ 12,00

MODA

Por definição, a moda de um conjunto de dados é o valor que aparece mais vezes, ou seja, é aquele que apresenta a maior frequência. Pode ocorrer de dois ou mais valores apresentarem a mesma frequência, nestes casos, teremos distribuições bimodais (duas modas), trimodais ou multimodais. Também é possível acontecer que todos os elementos tenham apresentado exatamente o mesmo número de ocorrências. Isso significa que não há moda, pois nenhum dado se destacou. Dessa forma, o conjunto é, então, chamado amodal.

Dentre as três medidas de tendência central, a moda é a única que pode ser usada quando as variáveis são qualitativas nominais: se distribuíssemos os alunos de engenharia por sexo e obtivéssemos que 70% são meninos, poderíamos dizer que a moda é o sexo masculino, pois essa categoria apresentou a maior frequência.

Para obtermos a moda faremos uma simples inspeção em relação às repetições dos valores. No caso das tabelas, observaremos as frequências absolutas simples. Procuramos, então, qual(is) o(s) valor(es) que apresenta(m) o maior número de ocorrências (repetições). Este(s) valor(es) é (são) denominado(s) moda.

Em termos de ENEM, todas as distribuições abordadas vieram com uma única moda, e é aí que vamos nos concentrar.

EX₂₂:

As idades dos atletas que participaram da Seleção Brasileira Masculina de Basquete, convocados para a preparação dos Jogos Olímpicos 2016, variaram de 24 a 36 anos, como se pode observar na tabela a seguir:

Idade (anos)	24	26	28	30	32	33	35	36
Número de atletas	3	1	1	1	1	4	1	2

De acordo com a tabela, qual é a *moda* dessas idades?

Solução:

Perceba que a idade mais frequente é 33 anos, pois possui 4 ocorrências (repetições). Portanto, a moda das idades é 33 anos.

Um **ERRO** muito comum é dizer que a moda é 1, alegando que o número 1 apareceu 5 vezes. Este erro acontece, pois algumas vezes organizamos as frequências ao invés de organizarmos os dados:

3, 1, 1, 1, 1, 4, 1, 2

Cuidado! O 1 é a frequência com a qual as idades 26, 28, 30, 32 e 35 aparecem.

O correto é organizar nossas idades em ROL, assim, teríamos:

24, 24, 24, 26, 28, 30, 32, 33, 33, 33, 33, 35, 36, 36

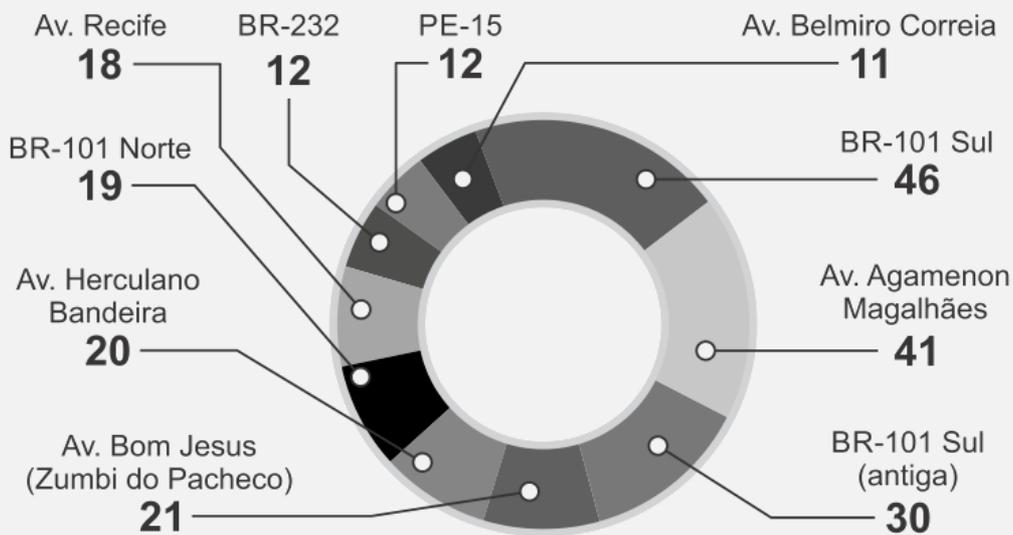
O que nos mostra que realmente o 33 tem maior frequência, ou seja, é a idade que aparece mais vezes.

EX23:

Segundo matéria do Caderno Cidades do *Jornal do Commercio*, publicada em 8 de maio de 2016, um relatório oficial de assaltos a coletivos entre janeiro e abril de 2016 apontou os locais e as linhas de ônibus que mais sofreram esse tipo de violência no período citado.

Com base nessas informações, analise o gráfico publicado na referida matéria.

● **Locais mais assaltados**



ARTE JC

De acordo com o gráfico, qual é a moda do número de assaltos por local?

Solução:

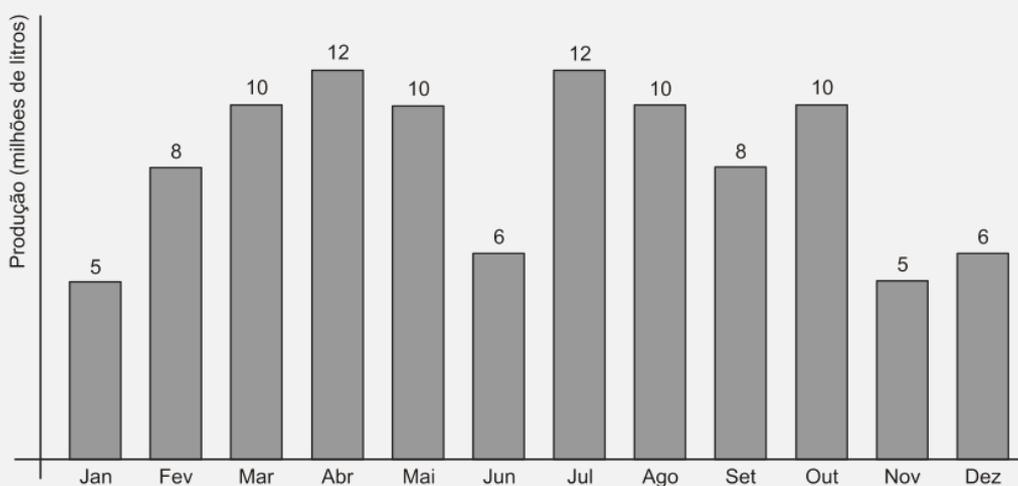
Colocando os números de assaltos por local em ROL, temos:

11, 12, 12, 18, 19, 20, 21, 30, 41, 46

O número 12 aparece duas vezes, que é a maior frequência. Logo, 12 é a moda do número de assaltos por local.

EX24:

O uso de biodiesel gera uma série de efeitos ambientais, tais como a redução da emissão de gases do efeito estufa e a diminuição da poluição atmosférica. O gráfico mostra a produção de biodiesel (em milhões de litros) em uma usina, durante o período de um ano.



De acordo com os dados, qual a moda (em milhões de litros)?

Solução:

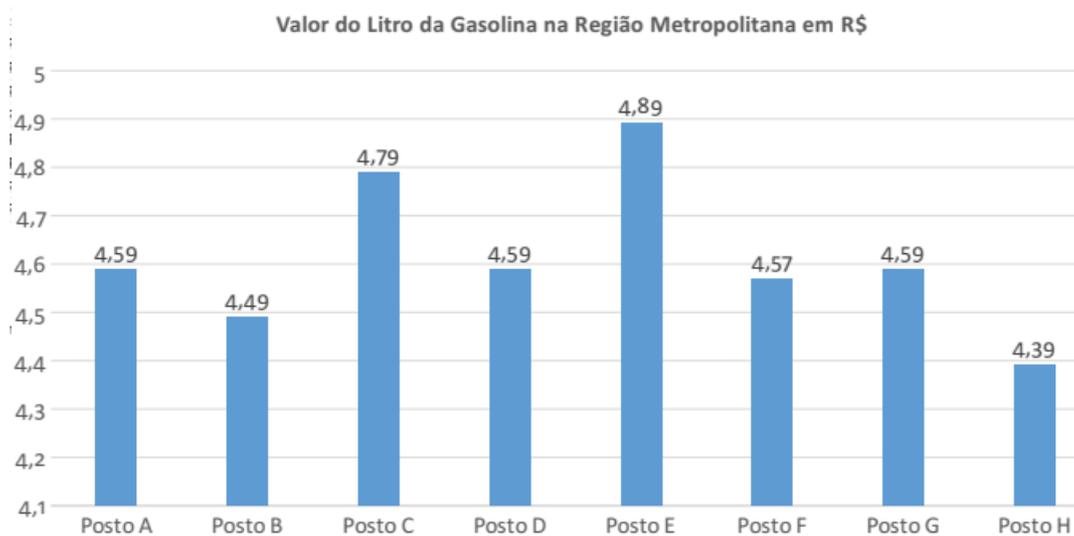
O primeiro passo é colocar os números que representam as produções em ROL:

5, 5, 6, 6, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 12, 12

Perceba que o número 10 aparece 4 vezes, que é a maior frequência, logo o 10 é a moda das produções mensais de biodiesel, em milhões de litros.

Vamos exercitar um pouco?

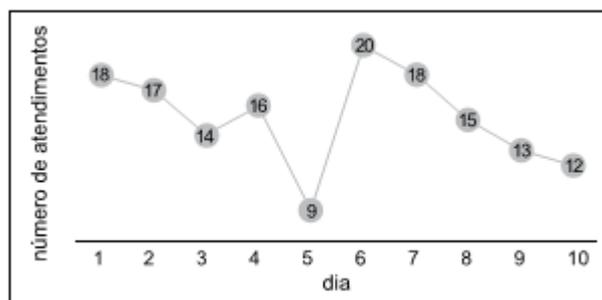
76. (IFES 2019) Devido à alta no preço dos combustíveis, em particular da gasolina, um consumidor resolveu fazer uma pesquisa de preços referente à variação do valor do litro da gasolina comum em alguns postos da região metropolitana de uma determinada capital. O levantamento de preços está representado no gráfico.



Analisando os dados obtidos na pesquisa realizada, pode-se afirmar que o modal, em reais, é igual a:

- A 4,39
- B 4,49
- C 4,59
- D 4,79
- E 4,89

77. (VUNESP 2017) Ricardo registrou o número de pessoas que ele atendeu nos últimos 10 dias em um gráfico.



A partir dos dados do gráfico, a moda do número de atendimentos é

- A 20
- B 18
- C 17
- D 16
- E 15

78. (PMES 2013). A tabela que segue é demonstrativa do levantamento realizado por determinado batalhão de Polícia Militar, no que se refere às idades dos policiais integrantes do grupo especial desse batalhão:

Idade	Número de Policiais
25	12
28	15
30	25
33	15
35	10
40	8

A moda, dessa distribuição é igual a

- A 15
- B 25
- C 30
- D 33
- E 35

79. Em um determinado setor de uma empresa, trabalham 1 coordenador, 3 técnicos administrativos, 2 assistentes administrativos e 2 estagiários, que ganham, respectivamente: R\$ 4.500,00, R\$ 3.000,00, R\$ 2.250,00 e R\$ 1.000,00.

Pode-se afirmar que o salário modal, em reais, desse setor é igual a:

- A R\$ 4.500,00
- B R\$ 3.000,00
- C R\$ 2.250,00
- D R\$ 1.000,00.

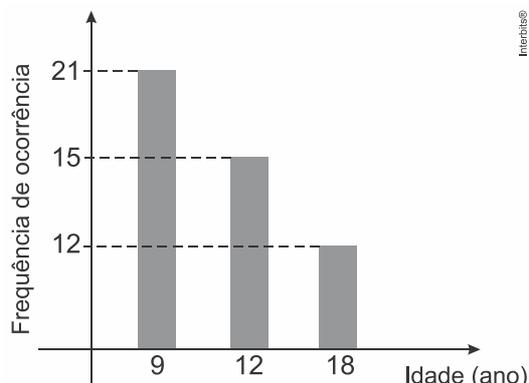
80. (CESPE 2018) A distribuição das notas dos 20 alunos de uma sala de aula na prova de matemática está mostrada na tabela a seguir.

nota do aluno	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0
número de alunos	3	3	1	7	6

Nessa situação, a moda dessas notas é igual a

- A 6,0.
- B 6,5.
- C 7,0.
- D 7,5.
- E 8,0.

81. (Enem PPL 2015) Uma pessoa, ao fazer uma pesquisa com alguns alunos de um curso, coletou as idades dos entrevistados e organizou esses dados em um gráfico.



Qual a moda das idades, em anos, dos entrevistados?

- A** 9
- B** 12
- C** 13
- D** 15
- E** 21

82. (FCC 2016) Os registros da temperatura máxima diária dos primeiros 6 dias de uma semana foram:

25°C;
26°C;
28,5°C;
26°C;
25°C;
25,6°C.

Incluindo também o registro da temperatura máxima diária do 7º dia dessa semana, o conjunto dos sete dados numéricos será unimodal com moda igual a 25°C.

De acordo com os dados, é correto afirmar que, necessariamente, a temperatura máxima diária do 7º dia foi

- A** Abaixo de 25°C
- B** Exatamente 25°C
- C** Maior do que 25°C e menor do que 26°C
- D** Exatamente 26°C
- E** Maior do que 26°C

83. (CESPE 2018) Na revisão de um livro, o editor contou 20 páginas que tiveram 0, 1, 2, 3 ou 4 erros; 36 páginas que tiveram 5, 6, 7, 8 ou 9 erros. Prosseguindo, ele obteve os valores mostrados na tabela a seguir.

quantidade de erros	quantidade de páginas
de 0 a 4	20
de 5 a 9	36
de 10 a 14	14
de 15 a 19	12
de 20 a 24	8

Nesse caso, a frequência relativa para os dados da classe modal da tabela é de

- A 9%
- B 13%
- C 15%
- D 22%
- E 40%

84. (Unep 2014) **DANOS DE ALIMENTOS ÁCIDOS** - O esmalte dos dentes dissolve-se prontamente em contato com substâncias cujo pH (medida da acidez) seja menor do que 5,5. Uma vez dissolvido, o esmalte não é repostado, e as partes mais moles e internas do dente logo apodrecem. A acidez de vários alimentos e bebidas comuns é surpreendentemente alta; as substâncias listadas a seguir, por exemplo, podem causar danos aos seus dentes com contato prolongado.

(BREWER. 2013, p. 64).

COMIDA/BEBIDA	PH
SUCO DE LIMÃO/LIMA	1,8 - 2,4
CAFÉ PRETO	2,4 - 3,2
VINAGRE	2,4 - 3,4
REFRIGERANTES DE COLA	2,7
SUCO DE LARANJA	2,8 - 4,0
MAÇÃ	2,9 - 3,5
UVA	3,3 - 4,5
TOMATE	3,7 - 4,7
MAIONESE/MOLHO DE SALADA	3,8 - 4,0
CHÁ PRETO	4,0 - 4,2

Considerando-se que os valores do pH na tabela variem unicamente com um incremento de 0,1, pode-se afirmar que o valor modal do pH, nessa tabela, é igual a

- A 3,2
- B 3,4
- C 3,6
- D 3,8
- E 4,0

85. (Enem 2016) Ao iniciar suas atividades, um ascensorista registra tanto o número de pessoas que entram quanto o número de pessoas que saem do elevador em cada um dos andares do edifício onde ele trabalha. O quadro apresenta os registros do ascensorista durante a primeira subida do térreo, de onde partem ele e mais três pessoas, ao quinto andar do edifício.

Número de pessoas	Térreo	1º andar	2º andar	3º andar	4º andar	5º andar
que entram no elevador	4	4	1	2	2	2
que saem do elevador	0	3	1	2	0	6

Com base no quadro, qual é a moda do número de pessoas no elevador durante a subida do térreo ao quinto andar?

- A** 2
- B** 3
- C** 4
- D** 5
- E** 6

MEDIANA

Das medidas de tendência central, a **MEDIANA** é uma das mais importantes para o Enem, seu papel é dividir uma distribuição de termos, ordenada de forma crescente ou decrescente, em duas partes de mesmo tamanho, é como se a MEDIANA fosse o valor que dividisse o conjunto “ao meio”. Se contarmos todos os termos que são menores ou iguais à mediana, obteremos um resultado igual ao encontrado quando contamos todos os termos que são maiores ou iguais à mediana. Mas não esqueça! Para determinar a mediana de um conjunto de dados é necessário, primeiro, ordenar o conjunto de dados de forma crescente ou decrescente.

A MEDIANA tem uma vantagem em relação à média aritmética, ela pode nos dar uma ideia melhor de um valor típico da distribuição pelo fato de não ser distorcida por valores discrepantes ou atípicos. Como a obtenção da MEDIANA é baseada na posição dos elementos e o que nos interessa é o centro da distribuição, não é necessário tomar ciência dos valores mais extremos para encontrá-la.

Caso existam alguns termos com valores extremamente baixos ou extremamente altos, a média aritmética será afetada fortemente, no entanto, a MEDIANA não será distorcida, por isso torna-se mais robusta do que a média aritmética.

Uma outra vantagem é o fato de que ainda que não possamos mensurar alguns dados extremos, a obtenção da MEDIANA continua viável. Suponha que estamos avaliando o tempo necessário para que algumas crianças desempenhem uma atividade de construção com blocos, mesmo que um pequeno número de crianças não consiga terminar a atividade, ainda assim podemos calcular a MEDIANA, por outro lado, não conseguiríamos calcular a média aritméticas desses tempos. Daí, a aplicação da MEDIANA é fortemente recomendada em distribuições distorcidas, por conseguirem resumir a tendência central diferentemente da média aritmética, se mostrando fácil de calcular e simples de entender.

Tanto o valor que representa a mediana pode não pertencer ao conjunto de dados, quanto podem existir vários termos iguais que representem a MEDIANA. Em ambos os casos a interpretação continua válida!

Então, para que possamos compreender todas as situações que envolvem mediana no ENEM, basta considerarmos dois casos:

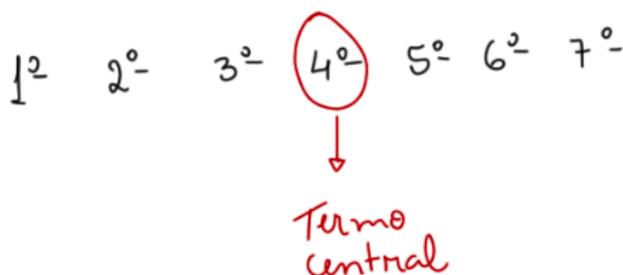
- Distribuição com quantidade ÍMPAR de dados;
- Distribuição com quantidade PAR de dados.

QUANTIDADE ÍMPAR DE DADOS

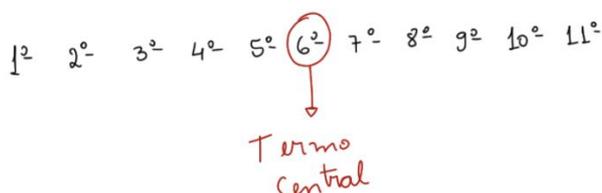
A mediana de uma distribuição, com uma quantidade ímpar de termos, é o termo central dessa distribuição quando organizamos os dados em ordem crescente. (Pode ser em ordem decrescente também, mas a ordem crescente é mais natural de se trabalhar, por isso, optarei por ela).

Se a distribuição possui n elementos organizados em ordem crescente e n é ímpar, a posição do termo central é $\frac{n+1}{2}$.

Por exemplo, se uma distribuição tiver sete termos, o termo central será o quarto, já que $\frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$.



Por outro lado, se uma distribuição tiver onze termos, o termo central será o sexto, já que $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$.



Em ambos os casos, o termo central é dito mediana da distribuição. Perceba que do termo central para esquerda existe a mesma quantidade de elementos quando pegamos os do termo central para direita.

Vamos analisar um exemplo contextualizado com uma quantidade ímpar de termos...

Considere a altura, em metros, dos 11 jogadores de um time de futebol juvenil:



Geralmente, temos acesso aos dados desorganizados e o primeiro passo é organizá-los. A ordem crescente é, sem dúvida, a maneira mais escolhida para organizar, uma vez que é mais natural e temos mais habilidade em fazer.

POSIÇÃO	ALTURA (m)
1°	1,48
2°	1,52
3°	1,60
4°	1,61
5°	1,62
6°	1,64
7°	1,66
8°	1,66
9°	1,66
10°	1,68
11°	1,69

Perceba que, por termos uma quantidade ímpar de termos, existe um termo central, e este é denominado mediana.

Como são 11 termos, o termo central será o da posição $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

Nesta distribuição, o 6° termo (1,64m) tem um papel importante. Não só existem 6 alturas iguais ou inferiores a 1,64m, como também existem 6 alturas iguais ou superiores a 1,64m.

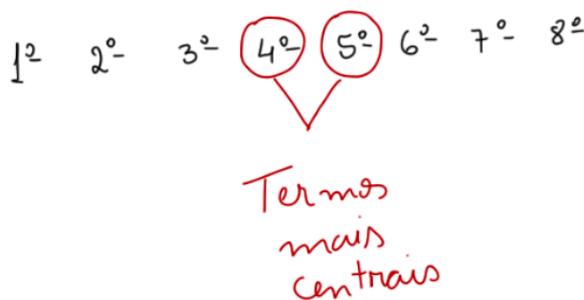
O 1,64m exerce o papel de termo central da distribuição. 1,64m é a mediana da distribuição.

QUANTIDADE PAR DE DADOS

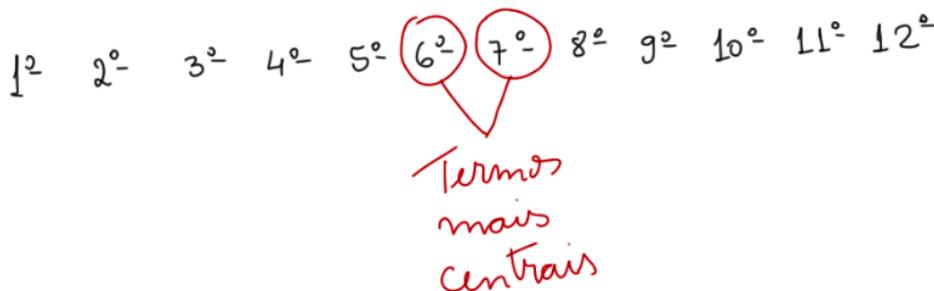
A obtenção da mediana em uma distribuição com uma quantidade par de termos é um pouco diferente, já que não existirá o termo central. Neste caso, ao organizar os dados em ordem crescente, devemos calcular a média aritmética dos dois elementos mais centrais, esta média será chamada de mediana.

Se a distribuição possui n elementos organizados em ordem crescente e n é par, as posições dos termos mais centrais são $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2} + 1$, esses termos devem ser utilizados para o cálculo da média e, conseqüentemente, da mediana.

Por exemplo, se uma distribuição tiver oito termos, os termos mais centrais serão o quarto e o quinto, já que $\frac{8}{2} = 4$ e $\frac{8}{2} + 1 = 5$.



Por outro lado, se uma distribuição tiver doze termos, os termos mais centrais serão o sexto e o sétimo, já que $\frac{12}{2} = 6$ e $\frac{12}{2} + 1 = 7$.



Em ambos os casos, a **MEDIANA** será dada pela média aritmética desses dois termos mais centrais.

Vamos analisar um exemplo contextualizado com uma quantidade par de termos...

Observe abaixo as alturas dos dez maiores atletas da delegação brasileira que participaram das olimpíadas no Rio de Janeiro:

Atleta	Esporte	Altura (m)
Anderson Varejão	Basquete	2,11
Augusto Lima	Basquete	2,08
Éder	Vôlei	2,05
Evandro	Vôlei de praia	2,10
Evandro	Vôlei	2,07
Lucão	Vôlei	2,10
Marquinho	Basquete	2,07
Maurício Souza	Vôlei	2,06
Nenê	Basquete	2,11
Rafael	Basquete	2,08

Lembre-se que o primeiro passo é colocar os dados em ordem crescente!

POSIÇÃO	ALTURA (m)
1°	2,05
2°	2,06
3°	2,07
4°	2,07
5°	2,08
6°	2,08
7°	2,10
8°	2,10
9°	2,11
10°	2,11

Por termos uma quantidade par de termos, não existe termo central, devemos encontrar os dois termos mais centrais. Neste caso, os mais centrais são $\frac{10}{2} = 5$ e $\frac{10}{2} + 1 = 6$, o quinto e o sexto termos. A mediana será dada pela média aritmética desses dois termos mais centrais:

$$\text{Mediana} = \text{Média Aritmética} = \frac{2,08+2,08}{2} = 2,08$$

A altura 2,08m é a mediana das alturas dos 10 atletas brasileiros mais altos que participaram da Olimpíada do Rio de Janeiro. Perceba que do mesmo modo que existem seis alturas iguais ou inferiores a 2,08m, existem seis alturas iguais ou superiores a 2,08m. Esse é o papel da MEDIANA, dividir o conjunto total em duas partes com a mesma quantidade de elementos!

Vamos exercitar um pouco?

86. (Enem PPL 2014) Para as pessoas que não gostam de correr grandes riscos no mercado financeiro, a aplicação em caderneta de poupança é indicada, pois, conforme a tabela (período 2005 até 2011), a rentabilidade apresentou pequena variação.

Ano	Rentabilidade %
2005	7,0
2006	4,9
2007	6,4
2008	6,2
2009	7,2
2010	6,8
2011	7,0

Com base nos dados da tabela, a mediana dos percentuais de rentabilidade, no período observado, é igual a

- A 6,2
- B 6,5
- C 6,6
- D 6,8
- E 7,0

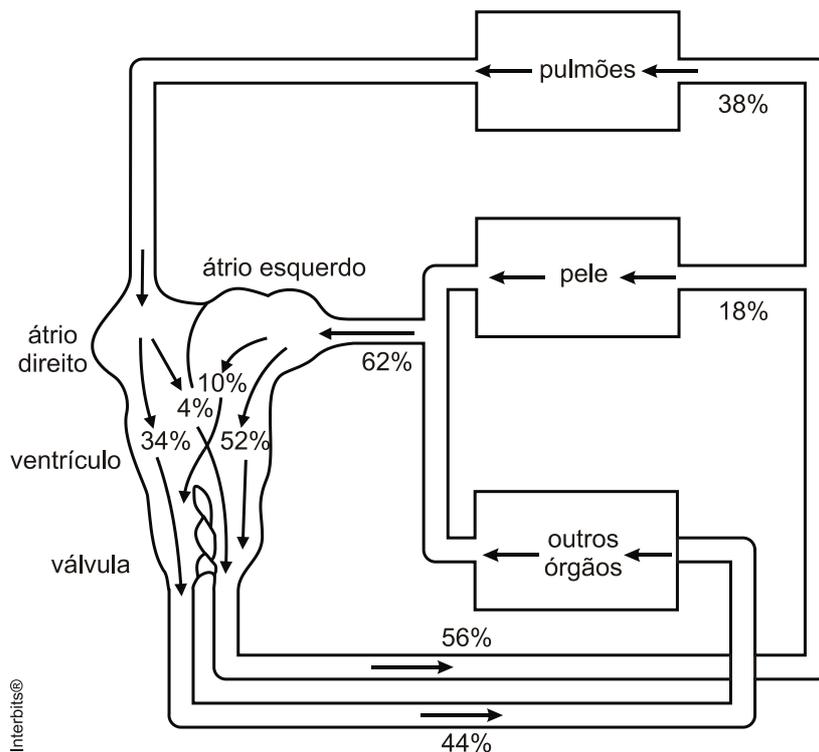
87. (Enem 2009) Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2007 e 2008.

Mês	Cotação	Ano
Outubro	R\$ 83,00	2007
Novembro	R\$ 73,10	2007
Dezembro	R\$ 81,60	2007
Janeiro	R\$ 82,00	2008
Fevereiro	R\$ 85,30	2008
Março	R\$ 84,00	2008
Abril	R\$ 84,60	2008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a

- A R\$ 73,10.
- B R\$ 81,50.
- C R\$ 82,00.
- D R\$ 83,00.
- E R\$ 85,30.

88. (UNB 2012 - Adaptada) Considere a figura abaixo, que ilustra o mecanismo de funcionamento de um coração:



A mediada de todos os percentuais que são apresentados na figura é

- A** 18%
- B** 34%
- C** 36%
- D** 38%
- E** 44%

89. (Fcmmg 2017) O aparecimento de problemas hepáticos na população mundial. O fígado é um órgão vital, responsável por inúmeras funções no nosso organismo, como a produção de enzimas digestivas e de proteínas. É também responsável pela metabolização de nutrientes absorvidos pelos intestinos e pela limpeza de toxinas circulantes. Diversos fatores podem contribuir para o aumento da incidência de danos hepáticos aos sujeitos, entre eles, a alimentação e a utilização inadequadas de medicamentos. Alguns dos exames de acompanhamento da função hepática realizam-se a partir de dosagens laboratoriais, como as referenciadas a seguir:

EXAME	VALORES DE REFERÊNCIA
Alanina Transaminase (ALT) ou (TGP)	Normal: até 38 unidades por litro de sangue (U/L)
Aspartato Transaminase (AST) ou (TGO)	Normal: até 38 unidades por litro de sangue (U/L)
Colesterol Total	Normal: até 200 miligramas por decilitro de sangue (mg/dL)

Objetivando-se acompanhar a função hepática em um grupo de 16 pacientes, foram registrados os valores relacionados aos resultados da dosagem para a taxa de TGP, TGO e Colesterol Total:

PACIENTE	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
TGP (U/L)	124	94	107	135	36	95	53	48	60	70	70	67	80	90	15	50
TGO (U/L)	57	70	80	18	20	22	19	65	95	74	102	106	80	33	104	94
Colesterol Total (mg/dL)	274	258	230	265	194	236	210	205	180	265	174	168	174	196	196	210

Nesse grupo, a mediana dos níveis da enzima Aspartato Transaminase (TGO) fornece como resultado, em U/L, é

- A** 42
- B** 65
- C** 72
- D** 80
- E** 95

90. (Enem 2ª aplicação 2016) Uma pessoa está disputando um processo de seleção para uma vaga de emprego em um escritório. Em uma das etapas desse processo, ela tem de digitar oito textos. A quantidade de erros dessa pessoa, em cada um dos textos digitados, é dada na tabela.

Texto	Número de erros
I	2
II	0
III	2
IV	2
V	6
VI	3
VII	4
VIII	5

Nessa etapa do processo de seleção, os candidatos serão avaliados pelo valor da mediana do número de erros.

A mediana dos números de erros cometidos por essa pessoa é igual a

- A 2,0
- B 2,5
- C 3,0
- D 3,5
- E 4,0

91. (Enem 2015) Em uma seletiva para a final dos 100 metros livres de natação, numa olimpíada, os atletas, em suas respectivas raias, obtiveram os seguintes tempos:

Raia	1	2	3	4	5	6	7	8
Tempo (segundo)	20,90	20,90	20,50	20,80	20,60	20,60	20,90	20,96

A mediana dos tempos apresentados no quadro é

- A 20,70
- B 20,77
- C 20,80
- D 20,85
- E 20,90

92. (UFJF 2017) Observe abaixo as alturas dos dez maiores atletas da delegação brasileira que participaram das olimpíadas no Rio de Janeiro.

Atleta	Esporte	Altura (m)
Anderson Varejão	Basquete	2,11
Augusto Lima	Basquete	2,08
Éder	Vôlei	2,05
Evandro	Vôlei de praia	2,10
Evandro	Vôlei	2,07
Lucão	Vôlei	2,10
Marquinho	Basquete	2,07
Maurício Souza	Vôlei	2,06
Nenê	Basquete	2,11
Rafael	Basquete	2,08

Dados disponíveis em: <<http://migre.me/uYvbm>>. Acesso em: 13 set. 2016.

A mediana das alturas desses atletas, em metros, é:

- A 2,05
- B 2,07
- C 2,08
- D 2,10
- E 2,11

93. (UFPR 2018 - Adaptada) Leonardo fez uma pesquisa sobre o preço da jarra de suco de laranja em algumas lanchonetes da região e obteve os seguintes valores:

Lanchonete	Preço
A	R\$ 10,75
B	R\$ 6,00
C	R\$ 9,50
D	R\$ 11,00
E	R\$ 5,25
F	R\$ 7,00
G	R\$ 10,50
H	R\$ 8,00

A mediana dos preços apresentados na tabela é

- A R\$ 8,00
- B R\$ 8,75
- C R\$ 9,50
- D R\$ 10,00
- E R\$ 10,50

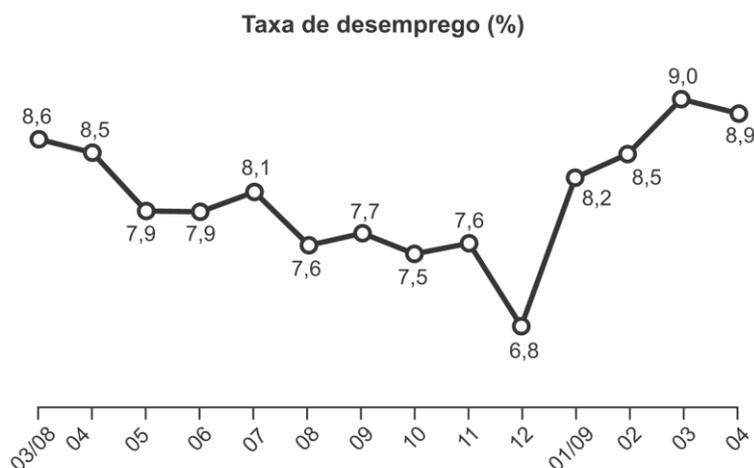
94. (UFJF 2006 - Adaptada) Um professor de Física aplicou uma prova, valendo 100 pontos, em seus 22 alunos e obteve, como resultado, a distribuição das notas vista no quadro seguinte:

40	20	10	20	70	60
90	80	30	50	50	70
50	20	50	50	10	40
30	20	60	60		

A mediana dos valores das notas apresentadas no quadro é

- A** 30
- B** 40
- C** 50
- D** 55
- E** 60

95. (Enem 2017) O gráfico apresenta a taxa de desemprego (em %) para o período de março de 2008 a abril de 2009, obtida com base nos dados observados nas regiões metropolitanas de Recife, Salvador, Belo Horizonte, Rio de Janeiro, São Paulo e Porto Alegre.

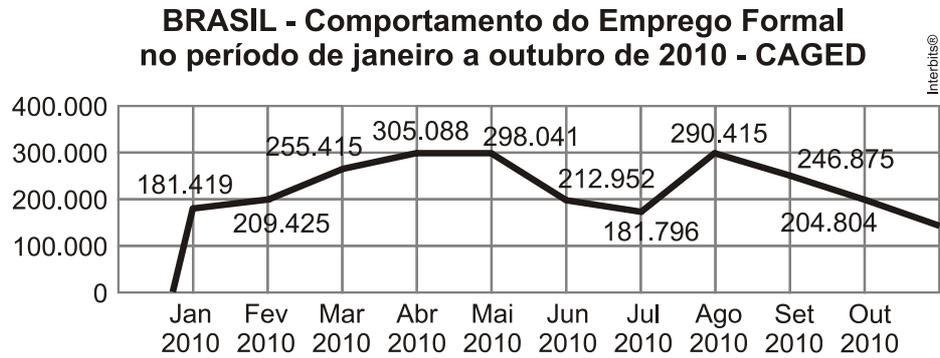


IBGE. Pesquisa mensal de emprego. Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 30 jul. 2012 (adaptado).

A mediana dessa taxa de desemprego, no período de março de 2008 a abril de 2009, foi de

- A** 8,1%
- B** 8,0%
- C** 7,9%
- D** 7,7%
- E** 7,6%

96. (Enem 2012) O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010.

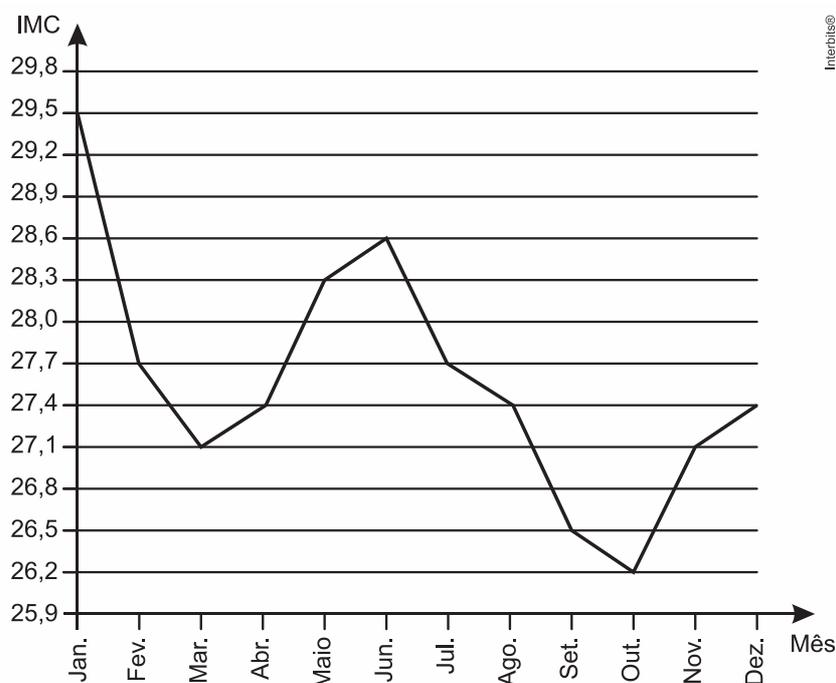


Disponível em: www.mte.gov.br. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado)

Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é

- A 212 952.
- B 229 913.
- C 240 621.
- D 255 496.
- E 298 041.

97. (Enem PPL 2018) O índice de massa corporal (IMC) de uma pessoa é definido como o quociente entre a massa dessa pessoa, medida em quilograma, e o quadrado da sua altura, medida em metro. Esse índice é usado como parâmetro para verificar se indivíduo está ou não acima do peso ideal para a sua altura. Durante o ano de 2011, uma pessoa foi acompanhada por um nutricionista e passou por um processo de reeducação alimentar. O gráfico indica a variação mensal do IMC dessa pessoa, durante o referido período. Para avaliar o sucesso do tratamento, o nutricionista vai analisar as medidas estatísticas referentes à variação do IMC.

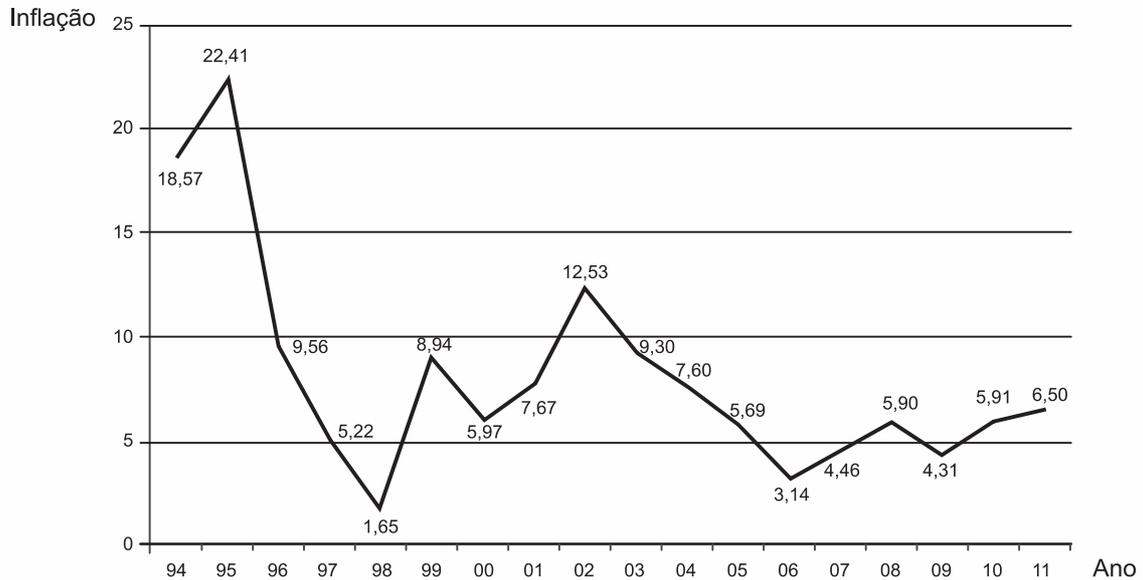


De acordo com o gráfico, podemos concluir que a mediana da variação mensal do IMC dessa pessoa é igual a

- A** 27,40
- B** 27,55
- C** 27,70
- D** 28,15
- E** 28,45

98. (Enem PPL 2017) Um dos principais indicadores de inflação é o Índice Nacional de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA). O gráfico apresenta os valores do IPCA nos anos de 1994 a 2011.

Inflação Anual - IPCA



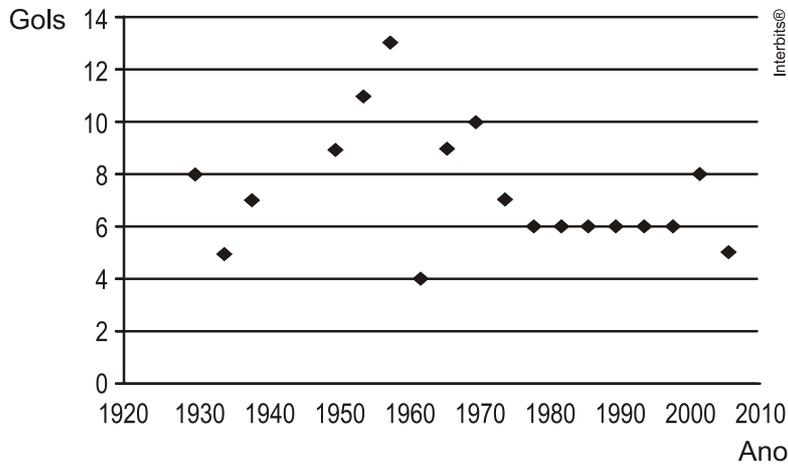
Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

O valor mais próximo da mediana de todos os valores da inflação indicados no gráfico é

- A** 5,97
- B** 6,24
- C** 6,50
- D** 8,07
- E** 10,10

99. (Enem 2010) O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1930 até a de 2006.

Quantidade de Gols dos Artilheiros das Copas do Mundo



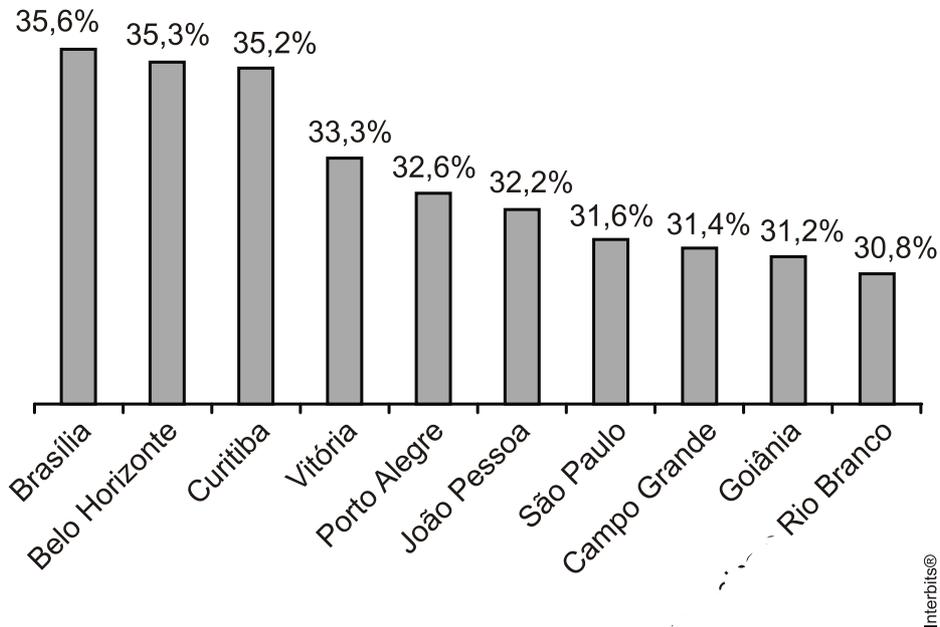
Disponível em: <http://www.suapesquisa.com>.
Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

- A** 6,0 gols
- B** 6,5 gols
- C** 7,0 gols
- D** 7,3 gols
- E** 8,5 gols

100. (UEPA 2012) Um levantamento, realizado pelo *IBGE* em diversas escolas das capitais brasileiras, apurou onde a prática de *bullying* é mais comum, conforme indicado no gráfico abaixo:

Capitais onde os estudantes sofrem mais bullying

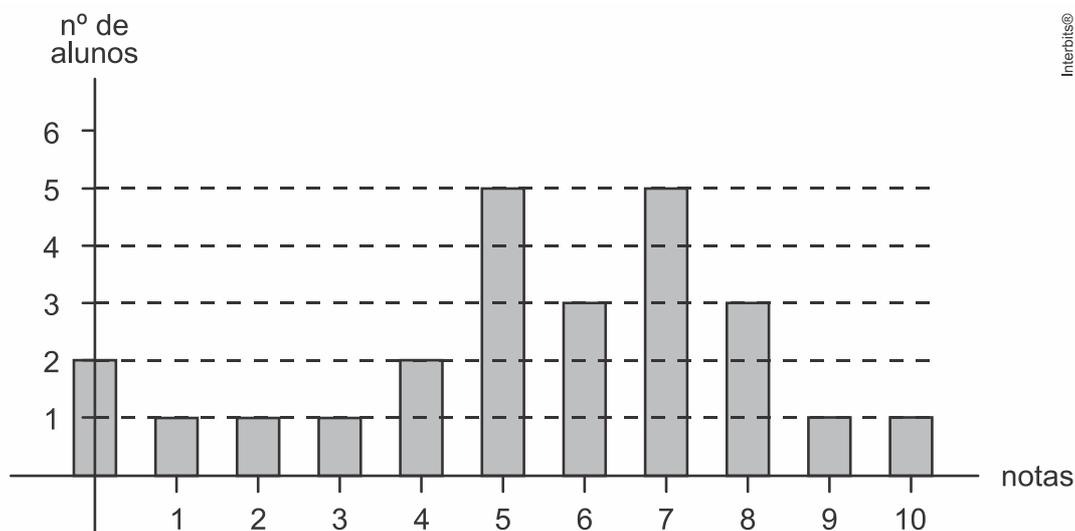


(Fonte: <http://hipnosecuritiba.com.br>)

Observando os dados apresentados no gráfico anterior, é possível afirmar, em relação ao valor da mediana que:

- A** terá valor correspondente a 33,2%.
- B** terá valor correspondente ao da cidade de Porto Alegre.
- C** terá valor correspondente a 32,4%.
- D** terá valor correspondente ao da cidade de João Pessoa.
- E** terá valor correspondente a 31,2%.

101. (PUCRJ 2018 - Adaptada) O gráfico de barras abaixo mostra a distribuição das notas de uma turma de alunos em uma prova de matemática. A nota é sempre um número inteiro de 0 a 10.



Assim, por exemplo, 2 alunos tiraram zero, e 1 aluno tirou dez.

Qual é a mediana das notas dos alunos desta turma?

- A 5,0
- B 5,5
- C 6,0
- D 6,5
- E 7,0

102. (Enem PPL 2014) Os salários, em reais, dos funcionários de uma empresa são distribuídos conforme o quadro:

Valor do salário (R\$)	622,00	1.244,00	3.110,00	6.220,00
Número de funcionários	24	1	20	3

A mediana dos valores dos salários dessa empresa é, em reais,

- A 622,00
- B 933,00
- C 1.244,00
- D 2.021,50
- E 2.799,00

103. (Fuvest 1993 - Adaptada) A distribuição dos salários de uma empresa é dada na tabela a seguir:

Salário (em Cr\$)	Nº de funcionários
500.000,00	10
1.000.000,00	5
1.500.000,00	1
2.000.000,00	10
5.000.000,00	4
10.500.000,00	1
Total	31

Qual é a mediana dos salários dessa empresa, em reais?

- A 1 milhão
- B 1 milhão e 500 mil
- C 2 milhões
- D 3 milhões e 500 mil
- E 5 milhões

104. (UFU 1999) O Departamento de Comércio Exterior do Banco Central possui 30 funcionários com a seguinte distribuição salarial em reais.

Nº de funcionários	Salários em R\$
10	2.000,00
12	3.600,00
5	4.000,00
3	6.000,00

Quantos funcionários que recebem R\$3.600,00 devem ser demitidos para que a mediana desta distribuição de salários seja de R\$2.800,00?

- A 7
- B 8
- C 9
- D 10
- E 11

105. (Enem PPL 2017) Cinco regiões de um país estão buscando recursos no Governo Federal para diminuir a taxa de desemprego de sua população. Para decidir qual região receberia o recurso, foram colhidas as taxas de desemprego, em porcentagem, dos últimos três anos. Os dados estão apresentados na tabela.

Taxa de desemprego (%)					
	Região A	Região B	Região C	Região D	Região E
Ano I	12,1	12,5	11,9	11,6	8,2
Ano II	11,7	10,5	12,7	9,5	12,6
Ano III	12,0	11,6	10,9	12,8	12,7

Ficou decidido que a região contemplada com a maior parte do recurso seria aquela com a maior mediana das taxas de desemprego dos últimos três anos.

A região que deve receber a maior parte do recurso é a

- A. A.
- B. B.
- C. C.
- D. D.
- E. E.

106. (Enem PPL 2016) Uma partida de voleibol entre Brasil e Itália foi decidida em cinco *sets*. As pontuações do jogo estão descritas na tabela.

	1° set	2° set	3° set	4° set	5° set
Brasil	25	25	24	25	18
Itália	16	20	26	27	16

Nessa partida, a mediana dos pontos obtidos por set pelo time da Itália foi igual a

- A. 16.
- B. 20.
- C. 21.
- D. 23.
- E. 26.

QUESTÕES: MÉDIA, MEDIANA E MODA

107. (Enem 2014) Uma loja que vende sapatos recebeu diversas reclamações de seus clientes relacionadas à venda de sapatos de cor branca ou preta. Os donos da loja anotaram as numerações dos sapatos com defeito e fizeram um estudo estatístico com o intuito de reclamar com o fabricante.

A tabela contém a média, a mediana e a moda desses dados anotados pelos donos.

Estatísticas sobre as numerações dos sapatos com defeito			
	Média	Mediana	Moda
Numerações dos sapatos com defeito	36	37	38

Para quantificar os sapatos pela cor, os donos representaram a cor branca pelo número 0 e a cor preta pelo número 1. Sabe-se que a média da distribuição desses zeros e uns é igual a 0,45.

Os donos da loja decidiram que a numeração dos sapatos com maior número de reclamações e a cor com maior número de reclamações não serão mais vendidas.

A loja encaminhou um ofício ao fornecedor dos sapatos, explicando que não serão mais encomendados os sapatos de cor

- A** branca e os de número 38.
- B** branca e os de número 37.
- C** branca e os de número 36.
- D** preta e os de número 38.
- E** preta e os de número 37.

108. (Enem 2011) Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos. As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a

- Ⓐ 17°C, 17°C e 13,5°C
- Ⓑ 17°C, 18°C e 13,5°C
- Ⓒ 17°C, 13,5°C e 18°C
- Ⓓ 17°C, 18°C e 21,5°C.
- Ⓔ 17°C, 13,5°C e 21,5°C.

109. (Enem 2010) O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no último campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então

- Ⓐ $X = Y < Z$.
- Ⓑ $Z < X = Y$.
- Ⓒ $Y < Z < X$.
- Ⓓ $Z < X < Y$.
- Ⓔ $Z < Y < X$.

110. (Enem 2009) Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0.

Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe

- A teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
- B seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.
- C seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.
- D permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.
- E empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

111. (Enem cancelado 2009) Depois de jogar um dado em forma de cubo e de faces numeradas de 1 a 6, por 10 vezes consecutivas, e anotar o número obtido em cada jogada, construiu-se a seguinte tabela de distribuição de frequências.

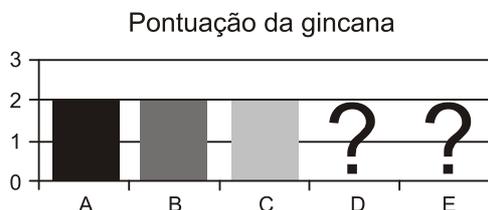
Número obtido	Frequência
1	4
2	1
4	2
5	2
6	1

A média, mediana e moda dessa distribuição de frequências são, respectivamente

- A 3, 2 e 1
- B 3, 3 e 1
- C 3, 4 e 2
- D 5, 4 e 2
- E 6, 2 e 4

112. (Enem cancelado 2009) Cinco equipes A, B, C, D e E disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos.

As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir, entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe D e da equipe E.



Mesmo sem aparecer as notas das equipes D e E, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente,

- Ⓐ 1,5 e 2,0.
- Ⓑ 2,0 e 1,5.
- Ⓒ 2,0 e 2,0.
- Ⓓ 2,0 e 3,0.
- Ⓔ 3,0 e 2,0.

113. (Upe-ssa 2 2018) A nutricionista de uma escola fez a medição da massa (peso) de alguns alunos para analisar o cardápio escolar e montou a tabela a seguir.

Número de Alunos	Pesos (kg)
1	50
2	40
3	80
4	60
5	65
6	55
7	75
8	45

Com base nessa tabela, determine a moda e a média das massas (pesos) desses estudantes.

- Ⓐ Moda = 80 kg e média = 58,75 kg
- Ⓑ moda = 80 kg e média = 59,72 kg
- Ⓒ moda = 45 kg e média = 59,72 kg
- Ⓓ moda = 45 kg e média = 58,72 kg
- Ⓔ moda = 80 kg e média = 59,75 kg

114. (Ufjf-pism 2 2018) Uma professora fez uma pesquisa com 10 alunos de uma de suas turmas, sobre quanto tempo em média, em horas, eles passavam na internet por dia. Os dados foram colocados na tabela abaixo:

Aluno	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Horas	4	6	8	2	3	4	6	5	6	3

Marque a alternativa com os valores corretos da média, moda e mediana.

- A** média 4; moda 4; mediana 5.
- B** média 4,5; moda 6; mediana 4,7.
- C** média 4,7; moda 4; mediana 4,5.
- D** média 4,7; moda 6; mediana 4,5.
- E** média 4,5; moda 6; mediana 5.

115. (Fgv 2018) A média aritmética das notas de cinco provas de estatística é 6,4. Retirando-se a prova com a menor nota, a nova média aritmética sobe para 7,0. Agora, retirando-se a prova com a maior nota, a nova média aritmética das três provas remanescentes abaixa para 6,5.

Se a moda das notas das cinco provas é 6,0, então, necessariamente, a nota de uma das cinco provas é

- A** 6,8.
- B** 7,2.
- C** 7,4.
- D** 7,5.
- E** 8,0.

116. (Fgv-rj 2016) Em uma prova de História, 20% dos alunos tiraram 5,0, 45% tiraram 6,0, 20% tiraram 7,5 e os demais tiraram 10,0.

A diferença entre a média e a mediana das notas dos alunos nessa prova foi

- A** 0,5.
- B** 0,1.
- C** 0,7.
- D** 0,0.
- E** 0,3.

117. (Enem 2018) Um rapaz estuda em uma escola que fica longe de sua casa, e por isso precisa utilizar o transporte público. Como é muito observador, todos os dias ele anota a hora exata (sem considerar os segundos) em que o ônibus passa pelo ponto de espera. Também notou que nunca consegue chegar ao ponto de ônibus antes de 6h15min da manhã. Analisando os dados coletados durante o mês de fevereiro, o qual teve 21 dias letivos, ele concluiu que 6h21min foi o que mais se repetiu, e que a mediana do conjunto de dados é 6h22min.

A probabilidade de que, em algum dos dias letivos de fevereiro, esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6h21min da manhã é, no máximo,

- A $\frac{4}{21}$
- B $\frac{5}{21}$
- C $\frac{6}{21}$
- D $\frac{7}{21}$
- E $\frac{8}{21}$

MEDIDAS DE DISPERSÃO

São medidas utilizadas para medir o grau de variabilidade, ou dispersão dos valores observados em torno da média aritmética. Servem para medir a representatividade da média e proporcionam conhecer o nível de homogeneidade ou heterogeneidade dentro de cada grupo analisado.

AMPLITUDE

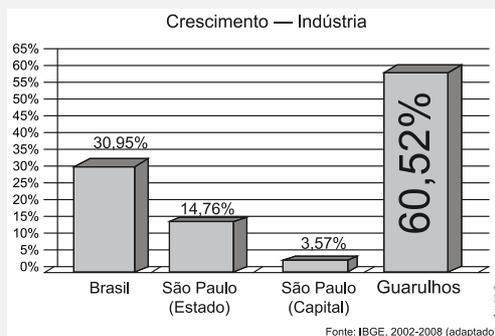
Amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor observado. A intenção inicial da amplitude é nos dizer se os dados estão muito ou pouco dispersos.

Uma amplitude baixa nos indicaria que os dados estão pouco dispersos, por estarem mais próximos.

Uma amplitude alta nem sempre nos passaria uma informação adequada, já que sofre muita influência dos dados extremos. Poderíamos ter um único elemento distante dos demais e isso tornaria a amplitude alta, mas a dispersão não seria alta. Poderíamos, inclusive, ter termos realmente distantes e uma dispersão elevada. Essa dubiedade de interpretações, faz com que a amplitude não seja uma medida tão confiável para avaliar a dispersão dos dados.

EX27:

A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

Solução:

De acordo com o gráfico, o polo com maior crescimento foi o de Guarulhos, e o menor, a capital de São Paulo. Por conseguinte, a diferença entre o maior e o menor valores é denominada amplitude.

Neste caso, a amplitude é:

$$A = 60,52\% - 3,57\% = 56,95\%$$

EX28:

Ao analisarmos os tempos de dez voltas de um carro de fórmula 1, temos:

Volta	Tempo (s)
1ª	105
2ª	107
3ª	104
4ª	240
5ª	104
6ª	105
7ª	104
8ª	103
9ª	107
10ª	107

O menor tempo obtido foi na 8ª volta e o maior tempo foi na 4ª volta, a diferença entre esses valores é denominada amplitude, que neste caso, é:

$$A_{10 \text{ termos}} = 240 - 103 = 137s$$

Perceba que a amplitude foi altíssima, e inicialmente poderíamos pensar que o piloto é extremamente irregular. O que não é verdade! O carro apenas apresentou problemas elétricos durante a 4ª volta, fazendo com que o tempo para essa volta fosse muito ruim (só essa volta foi afetada).

Se desconsiderássemos essa 4ª volta, a amplitude seria totalmente diferente. O menor tempo obtido continuaria sendo o da 8ª volta e o maior tempo seria o da 2ª, 9ª ou 10ª volta. A amplitude seria então:

$$A_{9 \text{ termos}} = 107 - 103 = 4s$$

Um único termo pode mudar completamente o valor da amplitude. Com uma amplitude de 4s, avaliamos o piloto como extremamente regular, já com uma amplitude de 137s, julgamos o piloto como altamente irregular. E este é o principal motivo para não usarmos a amplitude como parâmetro de avaliação da dispersão dos dados.

DESVIO INDIVIDUAL X DESVIO MÉDIO

Chamamos de *desvio individual* o quanto cada valor da distribuição se afasta da média, se tomarmos o módulo desse valor, temos o *desvio absoluto*.

O desvio médio é a média aritmética entre os desvios absolutos, ou seja, o quanto, em média, os valores apresentados se distanciam da média.

Sendo \bar{x} a média aritmética de uma amostra de números $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, chama-se Desvio Médio e indica-se por Dm , o número

$$Dm = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

Considere a altura, em cm, de cinco pessoas:

Nome	Altura (cm)
Alfredo	175
Bárbara	165
Carlos	175
Daniel	170
Eduardo	190

A média das alturas dessas cinco pessoas é:

$$\bar{x} = \frac{175 + 165 + 175 + 170 + 190}{5} = \frac{875}{5} = 175cm$$

Sabendo da média, podemos calcular o desvio individual, ou seja, o quanto cada indivíduo se afasta da média. O desvio individual é calculado através da diferença entre o dado e a média.

Nome	Altura (cm)	Média (cm)	Desvio Individual (cm)
Alfredo	175	175	0
Bárbara	165	175	-10
Carlos	175	175	0
Daniel	170	175	-5
Eduardo	190	175	+15

A diferença entre o dado e a média pode ser negativa, se o dado for menor que a média, pode ser zero, se o valor for igual a média e pode ser positivo, caso o valor seja maior que a média.

É importante perceber, que como estamos tomando a média como o centro, o valor total que houver de desvio acima da média, deve haver também abaixo da média. Afinal, média vem de meio. E quem está no meio, está centralizado, não se pode estar no meio e ter mais desvio para cima do que para baixo, nem ter mais desvio para baixo do que para cima.

No caso acima, temos 15 cm de desvio para cima e 15 cm de desvio para baixo.

Mas por que levar isto em consideração? O problema aparece quando queremos saber quanto, em média, cada indivíduo de desvia do centro (média). Devemos, então, calcular a média dos desvios individuais. Porém, para obtê-la, é necessário somar todos os desvios e dividir pela quantidade.

Lembra que o valor total de desvios para cima (positivo) era igual ao total de desvios para baixo (negativo)? Ao somarmos os desvios individuais para calcular a média, os desvios se anulariam e a média seria zero! Este é o problema!

$$\bar{x} = \frac{0 + (-10) + 0 + (-5) + 15}{5} = \frac{-15 + 15}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

Como resolver este problema?

Fazendo com que os desvios não se anulem ao serem somados.

Existem duas maneiras, com as quais os desvios individuais não se anulem no cálculo da média:

- “Colocar” o módulo em cada desvio individual (obter o valor absoluto de cada desvio individual);
- Elevar cada desvio individual ao quadrado.

Quando colocamos o módulo em cada desvio individual, obtemos os desvios absolutos:

Nome	Altura (cm)	Média (cm)	Desvio Individual (cm)	Desvio Absoluto (cm)
Alfredo	175	175	0	0
Bárbara	165	175	-10	10
Carlos	175	175	0	0
Daniel	170	175	-5	5
Eduardo	190	175	+15	15

A vantagem de trabalhar com os desvios absolutos é que se formos calcular a média deles, não chegaremos sempre ao zero, já que por não haver desvios negativos, eles jamais se anulariam.

A desvantagem é que perdemos a orientação dos desvios individuais. Por não haver mais desvios negativos, não sabemos se os desvios absolutos representam desvios para cima ou para baixo, não sabemos se o dado específico estava acima da média ou abaixo da média.

A média aritmética dos desvios absolutos é chamada de desvio médio.

Portanto, para a situação ilustrada, o desvio médio será:

$$D_m = \frac{|0| + |-10| + |0| + |-5| + |15|}{5} = 0$$

$$D_m = \frac{0 + 10 + 0 + 5 + 15}{5}$$

$$D_m = \frac{30}{5}$$

$$D_m = 6\text{cm}$$

Um desvio médio de 6cm indica que, em média, as pessoas têm alturas que se desviam 6cm para mais ou para menos de 175cm que é a média das alturas.

É importante frisar que:

“O Desvio Médio é a média aritmética dos módulos dos desvios individuais”.

Ou ainda:

“O Desvio Médio é a média aritmética dos desvios absolutos”.

VARIÂNCIA

Uma outra maneira de evitar o cancelamento dos desvios individuais durante o cálculo da média é elevá-los ao quadrado.

Nome	Altura (cm)	Desvio Individual (cm)	Quadrado do Desvio Individual (cm ²)
Alfredo	175	0	0
Bárbara	165	-10	100
Carlos	175	0	0
Daniel	170	-5	25
Eduardo	190	+15	225

Uma desvantagem de elevar os desvios individuais ao quadrado é que perdemos completamente a interpretação de desvio: um desvio individual de 10cm para menos se transforma em 100cm², um desvio individual de 15cm para mais se transforma em 225cm².

Se calcularmos a média aritmética dos quadrados dos desvios individuais, obteremos a Variância:

$$\sigma^2 = \frac{0^2 + (-10)^2 + 0^2 + (-5)^2 + 15^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{0 + 100 + 0 + 25 + 225}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{350}{5}$$

$$\sigma^2 = 70\text{cm}^2$$

A Variância σ^2 das alturas dessas cinco pessoas é 70 cm².

A variância é uma medida que mostra o quão longe os dados estão da média. Quanto menor a variância, mais próximos os dados estão da média. Quanto maior a variância, mais longe os dados estão da média.

Para obter a variância, tivemos que elevar os desvios individuais ao quadrado, deste modo, três situações distintas são possíveis.

O desvio **não se altera** quando elevamos ao quadrado:

$$0^2 = 0, \text{ zero ao quadrado continua sendo zero.}$$

$$1^2 = 1, \text{ um ao quadrado continua sendo um.}$$

O desvio **diminui** quando elevamos ao quadrado:

$$(0,5)^2 = 0,25$$

$$(0,9)^2 = 0,81$$

Se o desvio estiver entre zero e um, ao elevarmos ao quadrado, ele diminui.

O desvio **aumenta** quando elevamos ao quadrado:

$2^2 = 4$, era 2 e virou 4, aumentou pouco.

$10^2 = 100$, era 10 e virou 100, aumentou consideravelmente.

$30^2 = 900$, era 30 e virou 900, aumentou exorbitantemente.

Em linhas gerais, quanto maior for desvio (acima de 1) maior será o aumento quando elevarmos ao quadrado.

Dizemos, pois, que elevar ao quadrado supervaloriza quem está muito distante da média. Ao supervalorizar um valor discrepante, criamos um método para detectar quem se afasta muito. Perceba que quem está muito próximo da média, ou não é alterado ou é alterado minimamente quando são elevados ao quadrado (desvios de zero a um).

É aí que percebemos a importância da variância, como ela é obtida através da média aritmética dos quadrados dos desvios individuais, ela serve para detectar valores discrepantes, uma vez que o quadrado supervaloriza aqueles que estão muito distantes.

Formalmente falando, define-se variância, representada por σ^2 , como a média aritmética entre os quadrados dos desvios dos elementos da amostra, isto é,

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

PROPRIEDADES

P₅: Se acrescentarmos um valor constante a cada um dos termos da sequência, a variância não se altera.

Suponha que as cinco pessoas do nosso exemplo fossem 5 cm mais altas, vimos na propriedade **P₃**, na página 8, que a média das idades também ficaria acrescida do mesmo valor.

Nome	Altura (cm)	Média (cm)	Desvio Individual (cm)	Quadrado do Desvio Individual (cm ²)
Alfredo	175 + 5 = 180	180	0	0
Bárbara	165 + 5 = 170	180	-10	100
Carlos	175 + 5 = 180	180	0	0
Daniel	170 + 5 = 175	180	-5	25
Eduardo	190 + 5 = 195	180	+15	225

Dados 5cm maiores e média 5cm maior fazem com que o desvio individual não se altere. Produzindo o mesmo resultado quando os elevamos ao quadrado e conseqüentemente produzindo a mesma variância.

$$\sigma^2 = \frac{0^2 + (-10)^2 + 0^2 + (-5)^2 + 15^2}{5} = \frac{350}{5} = 70\text{cm}^2$$

P₆: Se multiplicarmos todos os termos da sequência por um valor constante, a variância desses termos fica multiplicada pelo quadrado desse valor.

Imagine agora que todas as pessoas do nosso exemplo fossem gigantes com o dobro da altura. 😄

Nome	Altura (cm)	Média (cm)	Desvio Individual (cm)	Quadrado do Desvio Individual (cm ²)
Alfredo	175 x 2 = 350	350	0	0
Bárbara	165 x 2 = 330	350	-20	400
Carlos	175 x 2 = 350	350	0	0
Daniel	170 x 2 = 340	350	-10	100
Eduardo	190 x 2 = 380	350	+30	900

Usando a propriedade **P₄** da página 10, sabemos que ao dobrar as idades, a média também dobraria, daí todos os desvios individuais ficariam dobrados, mas como para obter a variância tivemos que elevar os desvios individuais que estavam dobrados, o resultado ficou quadruplicado ($2^2 = 4$).

$$\sigma^2 = \frac{0^2 + (-20)^2 + 0^2 + (-10)^2 + 30^2}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{0 + 400 + 0 + 100 + 900}{5}$$

$$\sigma^2 = \frac{1400}{5}$$

$$\sigma^2 = 280\text{cm}^2$$

Que é o quadruplo da variância com as alturas originais!

Já falamos sobre as vantagens da variância, mas nem tudo são flores, a maior desvantagem da variância é que ela está em uma unidade diferente da que os dados estão.

No exemplo que citamos, as alturas estão em cm e a variância em cm²; enquanto que os dados estão em unidade de comprimento, a variância está em unidade de área.

O fato de termos elevado os desvios individuais ao quadrado para obter a variância, alterou a unidade e isso prejudica a comparação.

Este é o motivo pelo qual fora criada uma nova medida estatística, o desvio padrão.

DESVIO PADRÃO

O desvio padrão foi criado na simples intenção de voltar à unidade original, corrigindo assim qualquer dificuldade na interpretação ocasionada pela mudança de unidade na obtenção da variância.

Quando elevamos ao quadrado os desvios individuais para obter a variância, elevamos também a unidade, e se estivamos em cm, agora estaremos em cm². O que fazer para voltar para unidade original? Basta aplicar a operação inversa, a raiz quadrada!

“O **Desvio Padrão** (σ) nada mais é do que a raiz quadrada da **Variância** (σ^2)”.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

Tomando como base o exemplo das alturas das cinco pessoas:

Nome	Altura (cm)	Desvio Individual (cm)	Quadrado do Desvio Individual (cm ²)
Alfredo	175	0	0
Bárbara	165	-10	100
Carlos	175	0	0
Daniel	170	-5	25
Eduardo	190	+15	225

$$\sigma = \sqrt{\frac{0^2 + (-10)^2 + 0^2 + (-5)^2 + 15^2}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0 + 100 + 0 + 25 + 225}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{350}{5}}$$

$$\sigma = \sqrt{70}$$

$$\sigma \cong 8,37\text{cm}$$

O desvio padrão das alturas das cinco pessoas é de aproximadamente 8,37 cm.

CUIDADO! Isto **NÃO** quer dizer que em média as alturas desviam 8,37cm, esta interpretação é exclusiva do **DESVIO MÉDIO**. O desvio médio é a média aritmética dos desvios absolutos, por isso podemos interpretá-lo “desvia em média ..., para mais ou para menos”, já o desvio padrão é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados dos desvios individuais, o que não nos permite ter ideia de quanto se desvia para mais ou para menos.

PROPRIEDADES

P₇: Se acrescentarmos um valor constante a cada um dos termos da sequência, o desvio padrão não se altera.

Volta lá para propriedade P₅ e perceba que se acrescentarmos um valor constante a cada um dos termos da sequência, a variância não se altera. Como o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, e a variância não se alterou, então o desvio padrão também não vai ser alterado.

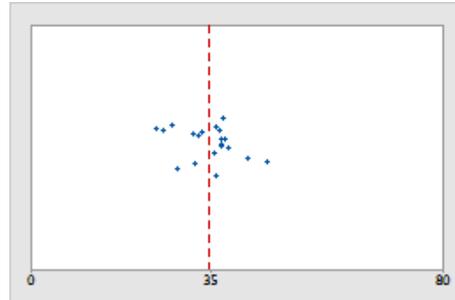
P₈: Se multiplicarmos todos os termos da sequência por um valor constante, o desvio padrão desses termos fica multiplicado pelo mesmo valor.

Volta lá para propriedade P₆ e perceba que se multiplicarmos todos os termos da sequência por um valor constante, a variância desses termos fica multiplicada pelo quadrado desse valor. Como o desvio padrão é a raiz quadrada da variância, e a variância estaria multiplicada pelo quadrado da constante, ao calcularmos a raiz quadrada, o desvio padrão ficaria multiplicado pela constante.

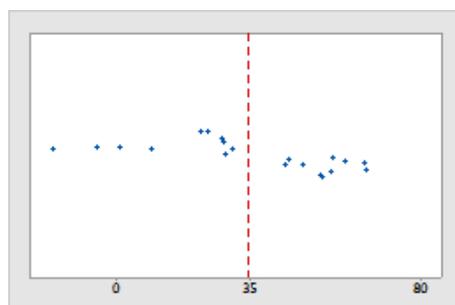
No entanto, existem inúmeras aplicações práticas para o desvio padrão, umas das maiores aplicações é avaliar a regularidade comparativa entre duas situações.

O desvio padrão pode ser usado também para estabelecer um *benchmark* (processo de busca das melhores práticas numa determinada indústria e que conduzem ao desempenho superior) para estimativa da variação global de um processo.

Considere os tempos de alta de dois hospitais:



Hospital A



Hospital B

Os administradores controlam o tempo gasto na alta de pacientes tratados nos departamentos de emergência de dois hospitais. Apesar de os tempos médios de alta serem os mesmos (35 minutos), os desvios padrão são significativamente diferentes. O desvio padrão do Hospital A é de cerca de 6. O desvio padrão do hospital B é de cerca de 20.

É importante ressaltar que, não é pelo fato do desvio padrão do Hospital A ser 6 que os tempos do Hospital A vão variar, em média, 6 minutos. Isso é papel do desvio médio. Se o desvio médio fosse 6, aí sim os tempos variariam, em média, 6 minutos para mais ou para menos.

Analogamente, não é pelo fato do desvio padrão do Hospital B ser 20 que os tempos do Hospital B vão variar, em média, 20 minutos. Isso é papel do desvio médio. Se o desvio médio fosse 20, aí sim os tempos variariam, em média, 20 minutos para mais ou para menos.

Qual interpretação atribuiremos ao desvio padrão? Avaliaremos a regularidade dos dados que nos forem fornecidos. Para tanto, deveremos levar em consideração dois parâmetros: a **média aritmética** e o **desvio padrão** dos dados.

O primeiro parâmetro a ser avaliado é a média. Se as médias forem iguais a regularidade é avaliada apenas comparando os valores dos desvios, caso as médias sejam distintas a regularidade é avaliada através do coeficiente de variação.

Neste caso em específico, atente para o fato de que as **médias** dos tempos de alta dos dois hospitais são **iguais**. Quando as **médias** são **iguais**, é possível avaliar a regularidade comparando os valores dos desvios.

“Para médias iguais, quanto MENOR o desvio padrão, MAIS REGULAR é a distribuição de dados”.

“Para médias iguais, quanto MAIOR o desvio padrão, MAIS IRREGULAR é a distribuição de dados”.

Podemos concluir que, já que ambos os hospitais possuem **médias iguais** de 35 minutos em seus tempos de alta, o Hospital A tem os tempos de alta **mais regulares** por ter um **desvio padrão menor** do que o Hospital B (enquanto o desvio padrão deste é 20 o daquele é 6).

Mas e se as **médias** fossem **diferentes**?

A regularidade precisaria ser avaliada pelo **coeficiente de variação**.

COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

O Coeficiente de Variação (C_V), também conhecido como Desvio Padrão Relativo, nada mais é do que a razão entre o desvio padrão (σ) e a média (\bar{x}):

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

Como o C_V é utilizado em distribuições com médias distintas, os denominadores das frações seriam diferentes, o que nos faz expressá-lo em porcentagem para facilitar a interpretação.

Uma pergunta que pode surgir é: o desvio padrão calculado é grande ou pequeno?



Esta questão é relevante por exemplo, na avaliação da precisão de métodos. Um desvio padrão pode ser considerado grande ou pequeno dependendo da ordem de grandeza da variável.

Uma maneira de se expressar a variabilidade dos dados tirando a influência da ordem de grandeza da variável é através do **coeficiente de variação**.

Interpretado como a variabilidade dos dados em relação à média:

*“Quanto **menor** o coeficiente de variação, mais **homogêneo** é o conjunto de dados”.*

*“Quanto **maior** o coeficiente de variação, mais **heterogêneo** é o conjunto de dados”.*

Pode ser difícil classificar um coeficiente de variação como baixo, médio, alto ou muito alto, mas este pode ser bastante útil na comparação de duas variáveis ou dois grupos que a princípio não são comparáveis.



Atenção para alguns sinônimos!

Homogêneo = Regular = Estável

Heterogêneo = Irregular = Instável

Ex₂₉:

Em um grupo de pacientes foram tomadas as pulsações (batimentos por minuto) e dosadas as taxas de ácido úrico (mg/100ml).

As médias e os desvios foram:

Variável	Média (\bar{x})	Desvio Padrão (σ)
Pulsação	68,7	8,7
Ácido Úrico	5,46	1,03

O que é mais estável neste paciente? As pulsações ou o nível de ácido úrico? Inicialmente é complicado comparar as duas situações, principalmente pelas médias e desvios serem completamente distintos. A avaliação sobre a regularidade desses valores deve ser feita através do coeficiente de variação.

Pulsação

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

$$C_V = \frac{8,7}{68,7} \cdot 100\%$$

$$C_V = 0,12663755 \dots \cdot 100\%$$

$$C_V \cong 12,7\%$$

Ácido Úrico

$$C_V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$$

$$C_V = \frac{1,03}{5,46} \cdot 100\%$$

$$C_V = 0,18864469 \dots \cdot 100\%$$

$$C_V \cong 18,9\%$$

Como o C_V da pulsação é menor do que o C_V do Ácido Úrico, concluímos que a pulsação é mais estável.

Mas o que significa o C_V da pulsação ser 12,7%? Isso quer dizer que o desvio padrão das pulsações representa 12,7% da média de pulsações. O C_V mostra o quanto o desvio padrão representa quando comparado com a média.

Do mesmo modo, um C_V do ácido úrico de 18,9%, diz que o desvio padrão do ácido úrico representa 18,9% dos níveis de ácido úrico.

É aí que percebemos que o desvio dos níveis de ácido úrico é mais representativo para média, muito embora seu valor absoluto seja menor que o desvio das pulsações. Mesmo o desvio das pulsações sendo maior que o desvio do ácido úrico, é menos representativo para a média das pulsações. Isso nos mostra que realmente, as pulsações são mais estáveis do que os níveis de ácido úrico.

118. (Enem 2012) Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de suas propriedades. Os talhões têm a mesma área de $30\,000\text{ m}^2$ e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão . O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare ($10\,000\text{ m}^2$).

A variância das produções dos talhões expressa em (sacas/hectare)² é

- A 20,25.
- B 4,50.
- C 0,71.
- D 0,50.
- E 0,25.

119. (Enem 2010) Marco e Paulo foram classificados em um concurso. Para a classificação no concurso o candidato deveria obter média aritmética na pontuação igual ou superior a 14. Em caso de empate na média, o desempate seria em favor da pontuação mais regular. No quadro a seguir são apresentados os pontos obtidos nas provas de Matemática, Português e Conhecimentos Gerais, a média, a mediana e o desvio padrão dos dois candidatos.

Dados dos candidatos no concurso

	Matemática	Português	Conhecimentos Gerais	Média	Mediana	Desvio Padrão
Marco	14	15	16	15	15	0,32
Paulo	8	19	18	15	18	4,97

O candidato com pontuação mais regular, portanto mais bem classificado no concurso, é

- A Marco, pois a média e a mediana são iguais.
- B Marco, pois obteve menor desvio padrão.
- C Paulo, pois obteve a maior pontuação da tabela, 19 em Português
- D Paulo, pois obteve maior mediana.
- E Paulo, pois obteve maior desvio padrão.

120. (Enem 2ª aplicação 2010) Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas

Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)

Equipes	Média	Moda	Desvio-Padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe

- A** I.
- B** II.
- C** III.
- D** IV.
- E** V.

121. (Enem 2016) O procedimento de perda rápida de “peso” é comum entre os atletas dos esportes de combate. Para participar de um torneio, quatro atletas da categoria até 66 kg, Peso-Pena, foram submetidos a dietas balanceadas e atividades físicas. Realizaram três “pesagens” antes do início do torneio. Pelo regulamento do torneio, a primeira luta deverá ocorrer entre o atleta mais regular e o menos regular quanto aos “pesos”. As informações com base nas pesagens dos atletas estão no quadro.

Atleta	1ª pesagem (kg)	2ª pesagem (kg)	3ª pesagem (kg)	Média	Mediana	Desvio-padrão
I	78	72	66	72	72	4,90
II	83	65	65	71	65	8,49
III	75	70	65	70	70	4,08
IV	80	77	62	73	77	7,87

Após as três “pesagens”, os organizadores do torneio informaram aos atletas quais deles se enfrentariam na primeira luta.

A primeira luta foi entre os atletas

- A** I e III.
- B** I e IV.
- C** II e III.
- D** II e IV.
- E** III e IV.

122. (Enem PPL 2014) Em uma escola, cinco atletas disputam a medalha de ouro em uma competição de salto em distância. Segundo o regulamento dessa competição, a medalha de ouro será dada ao atleta mais regular em uma série de três saltos. Os resultados e as informações dos saltos desses cinco atletas estão no quadro.

Atleta	1° salto	2° salto	3° salto	Média	Mediana	Desvio padrão
I	2,9	3,4	3,1	3,1	3,1	0,25
II	3,3	2,8	3,6	3,2	3,3	0,40
III	3,6	3,3	3,3	3,4	3,3	0,17
IV	2,3	3,3	3,4	3,0	3,3	0,60
V	3,7	3,5	2,2	3,1	3,5	0,81

A medalha de ouro foi conquistada pelo atleta número

- A I.
- B II.
- C III.
- D IV.
- E V.

123. Para movimentar o mercado de venda de automóveis, as empresas devem adotar estratégias de marketing agressivas, identificar os pontos fortes do seu produto e os pontos fracos da concorrência, explorando-os da melhor maneira possível. Por isso, constantemente, as montadoras atentam para os números de vendas. A tabela abaixo apresenta a quantidade dos cinco carros leves mais vendidos nos últimos três meses:

	Jul	Ago	Set	Média	Desvio Padrão
Ônix	15.234	18.513	17.236	16.994,33	1349,51
HB20	9.312	10.377	8.530	9.406,33	756,98
KA	7.248	7.631	8.727	7.868,67	626,75
Gol	6.236	6.824	6.026	6.362,00	337,75
Sandero	6.663	6.064	3.967	5.564,67	1155,88

Disponível em: < <https://www.noticiasautomotivas.com.br/os-carros-mais-vendidos-em-setembro-de-2017/> >

Ao analisar os dados apresentados, uma empresa percebe que deve mudar as estratégias de marketing, uma vez que possui a maior irregularidade no número de vendas dentre os cinco carros mais vendidos nos três últimos meses.

A empresa em questão é responsável pela produção do

- A Ônix
- B HB20
- C KA
- D Gol
- E Sandero

124. "Cheira mal", declara Rassi sobre pênaltis marcados contra o Goiás

Confira parte da entrevista exclusiva do presidente Sérgio Rassi para a Rádio 730;

O Goiás tem o pior saldo de pênaltis na competição, como o senhor vê essa situação?

- Esses dados chamam atenção. Nós avaliamos esses números ontem, nosso analista de desempenho fez uma boa observação sobre o caso. A estatística é uma ciência que não permite situação muito dispares. Se pegarmos o Internacional ele está com mais oito de saldo e o Goiás está com saldo de menos seis. Eu não acredito em regra estatística que explique um desvio padrão muito elevado como esse de quatorze pontos. Esse é um número aberrante, cheira mal. Acho que a comissão de arbitragem deveria usar sempre os mesmos critérios para nós não nos depararmos com situações alarmantes como essas. Mas não é por isso que estamos em uma situação muito ruim no campeonato.

Depois de muita insistência, a CBF decidiu analisar a regularidade das equipes em relação a marcação de pênaltis para decidir se era problema de arbitragem. Um processo seria instaurado a favor da equipe mais irregular para apurar com mais clareza os fatos.

Time	Média de Pênaltis Marcados Contra a Equipe	Desvio Padrão
Goiás	42	14,0
Internacional	12	4,2
São Paulo	10	2,8
Santos	8	2,1
Flamengo	10	2,5

Analisando a tabela, o processo instaurado será a favor do time do

- A Goiás
- B Internacional
- C São Paulo
- D Santos
- E Flamengo

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	C
02	E
03	E
04	C
05	B
06	A
07	A
08	C
09	B
10	D
11	C
12	E
13	E
14	B
15	B
16	A
17	E
18	D
19	C
20	E
21	C
22	D
23	B
24	D
25	A
26	E
27	B
28	C
29	E
30	E
31	C
32	C
33	B
34	D
35	E
36	A
37	B
38	E
39	B
40	A

41	B
42	D
43	D
44	B
45	D
46	E
47	C
48	B
49	C
50	B
51	B
52	C
53	A
54	C
55	B
56	C
57	C
58	D
59	E
60	A
61	C
62	D
63	D
64	D
65	B
66	E
67	D
68	D
69	E
70	A
71	C
72	D
73	C
74	B
75	E
76	C
77	B
78	C
79	B
80	E
81	A
82	B

83	E
84	E
85	D
86	D
87	D
88	D
89	C
90	B
91	D
92	C
93	B
94	C
95	B
96	B
97	A
98	B
99	B
100	C
101	C
102	B
103	B
104	D
105	E
106	B
107	A
108	B
109	E
110	D
111	B
112	C
113	C
114	D
115	D
116	C
117	D
118	E
119	B
120	C
121	C
122	C
123	E
124	B

ANÁLISE

COM
BINA
TÓRIA



ANDERSON
MATEMÁTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

A análise combinatória é o conjunto de ferramentas e raciocínios que utilizamos para efetuar uma contagem. Nosso objetivo é encontrar a maneira mais rápida de contar uma certa quantidade de elementos, lançando mão de técnicas que aceleram esse processo. Sendo assim, iniciaremos nossa conversa com o Princípio Fundamental da Contagem, conhecido também como PFC.

O PFC diz que se uma atividade A puder ser dividida em duas etapas sucessivas e independentes, a primeira puder ser realizada de m modos e independente da escolha que for feita na primeira etapa, a segunda puder ser realizada de n modos, então, a quantidade de modos que a atividade A pode ser realizada é $m \times n$.

Para ficar mais claro, vamos analisar alguns exemplos:

Ex: Carolina está superindecisa em relação à roupa de banho que usará para ir à praia, para isso colocou todas as peças que mais gosta em cima da cama para ver quantas combinações são possíveis e escolher a que mais ficar bonita. Ela dispõe de três partes de cima e de duas partes de baixo:



Obviamente, Carolina precisa escolher uma parte de cima e uma parte de baixo para poder vestir e ir à praia. Sendo assim, quantas combinações são possíveis?

Iniciaremos nossa análise, fazendo a árvore das possibilidades:



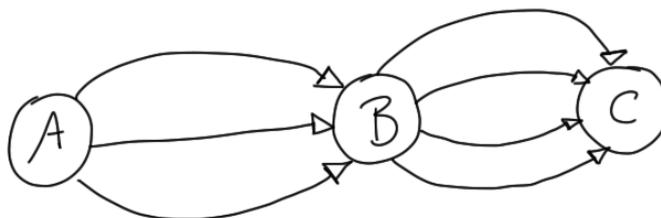
Observe que o ato de vestir um biquíni pode ser dividido em duas etapas, na primeira, vestiremos a parte de cima e em seguida, vestiremos a parte de baixo. As duas etapas são sucessivas e independentes. Independente da escolha da parte de cima, posso escolher qualquer parte de baixo. Não sabemos se ficará bonito, mas podemos escolher! Desse modo, existem 3 maneiras de escolher a parte de cima e existem 2 maneiras de escolher a parte de baixo, portanto, pelo PFC, o número total de maneiras que Carol pode combinar uma parte de cima com uma parte de baixo é $3 \times 2 = 6$.

A saber:



E aí, qual combinação você mais gostou? ;D

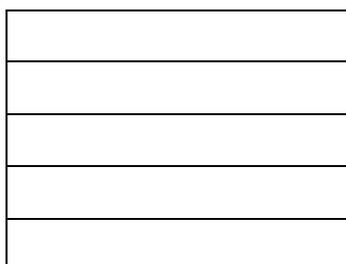
Ex₂: Agora, imagine que Fernando queira se deslocar de uma cidade A para uma cidade C, tendo que passar por B. Existem 3 estradas que levam de A para B e 4 estradas que levam de B para C.



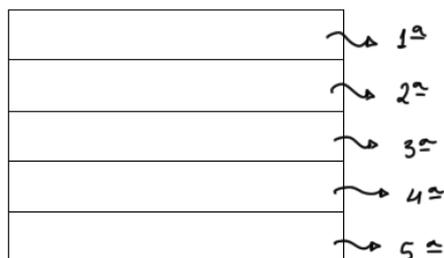
Por quantos caminhos diferentes Fernando poderá ir de A para C, passando por B?

A percurso que Fernando irá fazer, pode ser dividido em duas etapas, a primeira será o deslocamento de A para B, que possui 3 possibilidades e independente da estrada que ele escolha, existem 4 possibilidades para se deslocar de B para C, sendo assim, pelo PFC, existem $3 \times 4 = 12$ caminhos diferentes para Fernando ir de A para C, passando por B.

Ex₃: Dispomos das cores Vermelho, Azul e Cinza, de quantas maneiras podemos colorir um bandeira de cinco faixas de forma que listras adjacentes não podem ter a mesma cor?



A bandeira em questão possui 5 listras, por isso, dividiremos sua pintura em 5 etapas sucessivas e independentes, enumerando cada faixa de acordo com a ordem em que vai ser pintada:



Existem 3 possibilidades para colorir a primeira faixa: vermelho, azul ou cinza;

Se escolhermos vermelho para a primeira faixa, a segunda só pode ser azul ou cinza, se escolhermos azul para a primeira faixa, a segunda só pode ser vermelho ou cinza, se escolhermos cinza para a primeira faixa, a segunda só pode ser vermelho ou azul, sendo assim, independente da escolha da cor para a primeira listra, só existem duas cores disponíveis para a segunda listra, logo:

Existem 2 possibilidades para colorir a segunda faixa;

O raciocínio para a terceira faixa é exatamente igual ao da segunda, daí...

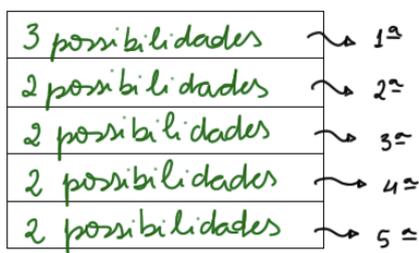
Existem 2 possibilidades para colorir a terceira faixa;

O mesmo vale para quarta e quinta faixas...

Existem 2 possibilidades para colorir a quarta faixa;

Existem 2 possibilidades para colorir a quinta faixa;

Portanto, pelo PFC, basta multiplicarmos a quantidade de possibilidades de cada listra:



$$\frac{3}{1^{\text{a}}} \times \frac{2}{2^{\text{a}}} \times \frac{2}{3^{\text{a}}} \times \frac{2}{4^{\text{a}}} \times \frac{2}{5^{\text{a}}} = 48$$

Existem 48 possibilidades de colorir essa bandeira.

Vamos exercitar um pouco?

1. (Ifal 2018) Em uma civilização antiga, o alfabeto tinha apenas três letras. Na linguagem dessa civilização, as palavras tinham de uma a quatro letras.

Quantas palavras existiam na linguagem dessa civilização?

- A** 4
- B** 12
- C** 16
- D** 40
- E** 120

2. (Enem 2017) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o **slogan** "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



JUNTOS NUM SÓ RITMO

Disponível em: www.pt.fifa.com.
Acesso em: 19 nov. 2013
(adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

- A** 15
- B** 30
- C** 108
- D** 360
- E** 972

3. (Enem PPL 2017) Desde 1999 houve uma significativa mudança nas placas dos carros particulares em todo o Brasil. As placas, que antes eram formadas apenas por seis caracteres alfanuméricos, foram acrescidas de uma letra, passando a ser formadas por sete caracteres, sendo que os três primeiros caracteres devem ser letras (dentre as 26 letras do alfabeto) e os quatro últimos devem ser algarismos (de 0 a 9). Essa mudança possibilitou a criação de um cadastro nacional unificado de todos os veículos licenciados e ainda aumentou significativamente a quantidade de combinações possíveis de placas. Não são utilizadas placas em que todos os algarismos sejam iguais a zero.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 14 jan. 2012 (adaptado).

Nessas condições, a quantidade de placas que podem ser utilizadas é igual a

- A** $26^3 + 9^4$
- B** $26^3 \times 9^4$
- C** $26^3(10^4 - 1)$
- D** $(26^3 + 10^4) - 1$
- E** $(26^3 \times 10^4) - 1$

4. (Enem 2017) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

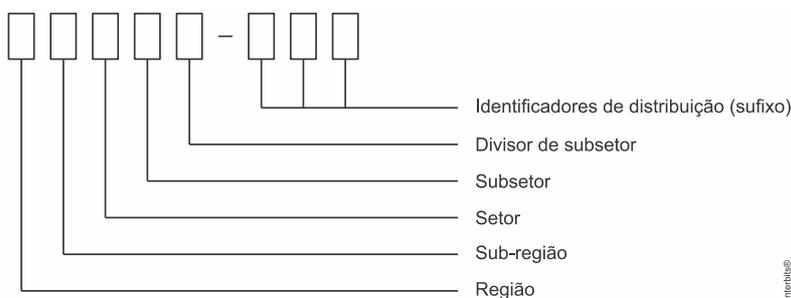
As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é

- A** I.
- B** II.
- C** III.
- D** IV.
- E** V.

5. (Enem (Libras) 2017) O Código de Endereçamento Postal (CEP) código numérico constituído por oito algarismos. Seu objetivo é orientar e acelerar o encaminhamento, o tratamento e a distribuição de objetos postados nos Correios. Ele está estruturado segundo o sistema métrico decimal, sendo que cada um dos algarismos que o compõe codifica região, sub-região, setor, subsetor, divisor de subsetor e identificadores de distribuição conforme apresenta a ilustração.



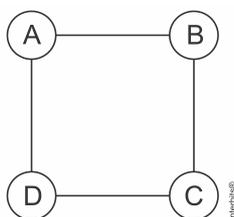
O Brasil encontra-se dividido em dez regiões postais para fins de codificação. Cada região foi dividida em dez sub-regiões. Cada uma dessas, por sua vez, foi dividida em dez setores. Cada setor, dividido em dez subsetores. Por fim, cada subsetor foi dividido em dez divisores de subsetor. Além disso, sabe-se que os três últimos algarismos após o hífen são denominados de sufixos e destinam-se à identificação individual de localidades, logradouros, códigos especiais e unidades dos Correios. A faixa de sufixos utilizada para codificação dos logradouros brasileiros inicia em 000 e termina em 899.

Disponível em: www.correios.com.br Acesso em: 22 ago. 2017 (adaptado).

Quantos CEPs podem ser formados para a codificação de logradouros no Brasil?

- A** $5 \cdot 0 + 9 \cdot 10^2$
- B** $10^5 + 9 \cdot 10^2$
- C** $2 \cdot 9 \cdot 10^7$
- D** $9 \cdot 10^2$
- E** $9 \cdot 10^7$

6. (Enem 2ª aplicação 2016) Para estimular o raciocínio de sua filha, um pai fez o seguinte desenho e o entregou à criança juntamente com três lápis de cores diferentes. Ele deseja que a menina pinte somente os círculos, de modo que aqueles que estejam ligados por um segmento tenham cores diferentes.



De quantas maneiras diferentes a criança pode fazer o que o pai pediu?

- A** 6
- B** 12
- C** 18
- D** 24
- E** 72

7. (Enem PPL 2014) Um procedimento padrão para aumentar a capacidade do número de senhas de banco é acrescentar mais caracteres a essa senha. Essa prática, além de aumentar as possibilidades de senha, gera um aumento na segurança. Deseja-se colocar dois novos caracteres na senha de um banco, um no início e outro no final. Decidiu-se que esses novos caracteres devem ser vogais e o sistema conseguirá diferenciar maiúsculas de minúsculas.

Com essa prática, o número de senhas possíveis ficará multiplicado por

- A** 100.
- B** 90.
- C** 80.
- D** 25.
- E** 20.

8. (Enem 2013) Um banco solicitou aos seus clientes a criação de uma senha pessoal de seis dígitos, formada somente por algarismos de 0 a 9, para acesso à conta-corrente pela internet. Entretanto, um especialista em sistemas de segurança eletrônica recomendou à direção do banco recadastrar seus usuários, solicitando, para cada um deles, a criação de uma nova senha com seis dígitos, permitindo agora o uso das 26 letras do alfabeto, além dos algarismos de 0 a 9. Nesse novo sistema, cada letra maiúscula era considerada distinta de sua versão minúscula. Além disso, era proibido o uso de outros tipos de caracteres. Uma forma de avaliar uma alteração no sistema de senhas é a verificação do coeficiente de melhora, que é a razão do novo número de possibilidades de senhas em relação ao antigo.

O coeficiente de melhora da alteração recomendada é

- A** $\frac{62^6}{10^6}$
- B** $\frac{62!}{10!}$
- C** $\frac{62! 4!}{10! 56!}$
- D** $62! - 10!$
- E** $62^6 - 10^6$

9. (Enem 2012) O **designer** português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de Sao Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012. (adaptado)

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

- A** 14
- B** 18
- C** 20
- D** 21
- E** 23

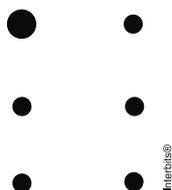
10. (Enem 2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

- A** 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- B** 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- C** 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- D** 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- E** 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

11. (Enem 2005) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.

Por exemplo, a letra A é representada por



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é

- A** 12.
- B** 31.
- C** 36.
- D** 63.
- E** 720.

12. (Enem 2004) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.

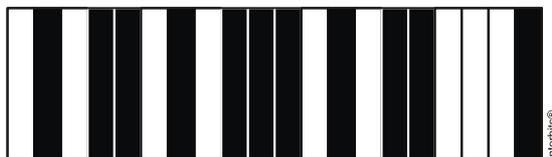


O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde.

Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é

- A** 6.
- B** 7.
- C** 8.
- D** 9.
- E** 10.

13. (Enem 2002) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.



Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001

Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é

- A** 14.
- B** 12.
- C** 8.
- D** 6.
- E** 4.

14. (Upe-ssa 1 2018) A prova final de Geografia de uma escola é composta de 10 itens com alternativas do tipo "verdadeiro ou falso".

De quantas maneiras diferentes um estudante poderá responder esta prova, de forma que ele só assinale apenas uma alternativa em cada questão?

- A** 20
- B** 64
- C** 256
- D** 512
- E** 1024

15. (Espcex (Aman) 2018) Duas instituições financeiras fornecem senhas para seus clientes, construídas segundo os seguintes métodos:

1ª instituição: 5 caracteres distintos formados por elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

2ª instituição: 6 caracteres distintos formados por duas letras, dentre as vogais, na primeira e segunda posições da senha, seguidas por 4 algarismos dentre os elementos do conjunto $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Para comparar a eficiência entre os métodos de construção das senhas, medindo sua maior ou menor vulnerabilidade, foi definida a grandeza "força da senha", de forma que, quanto mais senhas puderem ser criadas pelo método, mais "forte" será a senha.

Com base nessas informações, pode-se dizer que, em relação à 2ª instituição, a senha da 1ª instituição é

- A** 10% mais fraca.
- B** 10% mais forte.
- C** De mesma força.
- D** 20% mais fraca.
- E** 20% mais forte.

16. (Insper 2018) LOTOGOL é um jogo de loteria em que o apostador marca seu palpite de placar em 5 jogos de futebol de uma rodada. Ganha premiação aquele que acerta 3, 4 ou 5 dos palpites. Estas são as instruções do jogo: Acerte a quantidade de gols feitos pelos times de futebol na rodada e concorra a uma bolada. Para apostar, basta marcar no volante o número de gols de cada time de futebol participante dos 5 jogos do concurso. Você pode assinalar 0, 1, 2, 3 ou mais gols (esta opção está representada pelo sinal +). Os clubes participantes estão impressos nos bilhetes emitidos pelo terminal.

Jogo	Placar
1 VITÓRIA/BA X AVAÍ/SC	0 1 2 3 + 0 1 2 3 +
2 ATLÉTICO/MG X FLAMENGO/RJ	0 1 2 3 + 0 1 2 3 +
3 INTERNACIONAL/RS X LONDRINA/PR	0 1 2 3 + 0 1 2 3 +
4 CEARÁ/CE X CRB/AL	0 1 2 3 + 0 1 2 3 +
5 CSA/ALE X REMO/PA	0 1 2 3 + 0 1 2 3 +

(<http://loterias.caixa.gov.br>, Adaptado)

Laura acredita que, nos 5 jogos da rodada, serão marcados um total de 4 gols. Além disso, ela também acredita que em apenas um dos jogos o placar será zero a zero. O número de apostas diferentes que Laura poderá fazer, seguindo sua crença, é

- A** 64.
- B** 96.
- C** 80.
- D** 84.
- E** 75.

17. (Famema 2017) Uma pessoa dispõe de 5 blocos de papel colorido nas cores azul, amarelo, verde, branco e rosa, sendo cada um deles de uma única cor, e irá utilizar 3 folhas para anotações.

O número total de maneiras possíveis de essa pessoa escolher essas 3 folhas, sendo pelo menos 2 delas de uma mesma cor, é

- A 22.
- B 12.
- C 15.
- D 18.
- E 25.

18. (G1 - ifpe 2017) Um **pixel** é o menor elemento de uma imagem digital e, em casos de imagens coloridas, é composto por um conjunto de 3 pontos: vermelho, verde e azul. Cada um desses pontos é capaz de exibir 256 tonalidades distintas.

Combinando tonalidades desses três pontos, quantas cores diferentes podem ser exibidas?

- A 3^{256}
- B $3 \cdot 256$
- C 256^3
- D 256
- E $27 \cdot 256$

19. (Uemg 2016) “Genius era um brinquedo muito popular na década de 1980 (...). O brinquedo buscava estimular a memorização de cores e sons. Com formato semelhante a um OVNI, possuía 4 botões de cores distintas que emitiam sons harmônicos e se iluminavam em sequência. Cabia aos jogadores repetir o processo sem errar”.

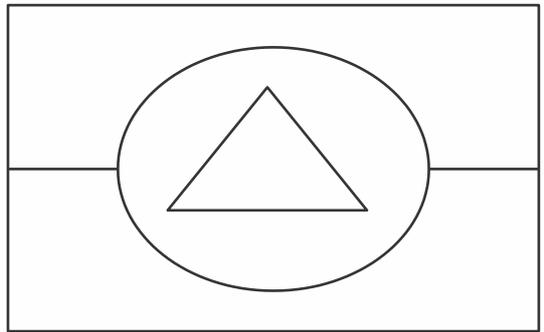


Considerando uma fase do jogo em que 3 luzes irão acender de forma aleatória e em sequência, podendo cada cor acender mais de uma vez.

O número máximo de formas que essa sequência de 3 luzes poderá acender é:

- A 12.
- B 24.
- C 36.
- D 64.

20. (Unisinos 2016) A bandeira a seguir está dividida em 4 regiões. Cada região deverá ser pintada com uma cor, e regiões que fazem fronteira devem ser pintadas com cores diferentes.



Sabendo que dispomos de 6 cores, de quantas maneiras distintas podemos pintar essa bandeira?

- A** 20.
- B** 24.
- C** 120.
- D** 600.
- E** 720.

Pronto para aprender as características dos quatro principais temas de Análise Combinatória? Caracterizaremos, nessa aula, a Permutação Simples, a Permutação com Repetição, o Arranjo Simples e a Combinação Simples.

Você já parou para pensar em como diferenciar cada um desses temas? Você consegue identificar quando a questão está abordando um ou outro? Pode descansar! Hoje é o dia de aprender de uma vez por todas quando e como aplicá-los!

Vamos começar caracterizando a Permutação Simples...

PERMUTAÇÃO SIMPLES

Para que uma questão de Análise Combinatória seja classificada como Permutação Simples, **DUAS** características devem ser obedecidas:

A **PRIMEIRA** é que todos os elementos disponíveis serão utilizados, você não precisa escolher alguns elementos em um grupo... Apareceu na questão, vai ter que utilizar. Numa Permutação Simples, não fica ninguém de fora! Não tem esse negócio de sobrar... Tá na questão? Então, utiliza!

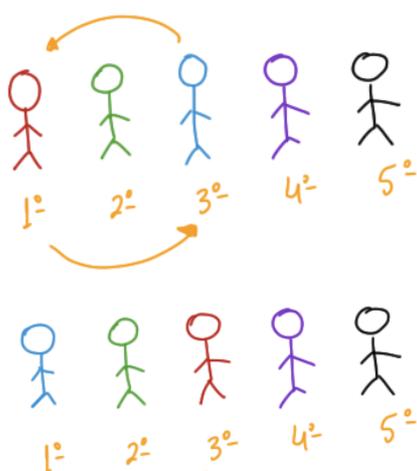
A **SEGUNDA** é que toda vez que mudarmos de posição dois elementos utilizados, sempre geraremos um novo resultado, uma nova organização.

Vamos analisar uma situação:

De quantas maneiras podemos formar uma fila indiana com 5 pessoas?

Essa questão é classificada como Permutação Simples, existem 5 lugares disponíveis na fila e as 5 pessoas serão utilizadas. Não preciso escolher 5 pessoas dentro de um grupo, apareceram essas 5, vou utilizá-las!

Bom, a primeira característica já foi obedecida, vamos para a segunda...



Quando mudamos de posição a primeira pessoa da fila com a terceira, certamente a fila ficou diferente. Isso acontecerá com quaisquer duas pessoas que trocarmos de lugar, sempre a troca irá gerar uma nova fila, uma nova organização, um novo resultado.

Uma vez obedecidas as duas características, estamos diante de uma Permutação Simples. E agora? Reconhecida a Permutação Simples, como resolver a questão?

O primeiro lugar da fila pode ser ocupado por qualquer uma das 5 pessoas, o segundo lugar pode ser ocupado por qualquer uma das outras 4, o terceiro lugar por 3, o quarto lugar por 2 e o quinto, somente pela última pessoa. Utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, o número total de possibilidades de formarmos a fila é 5!

$$\frac{5}{1^{\circ}} \times \frac{4}{2^{\circ}} \times \frac{3}{3^{\circ}} \times \frac{2}{4^{\circ}} \times \frac{1}{5^{\circ}} = 5!$$

É bom que você perceba que como todos os elementos serão utilizados, sempre a nossa resposta vai ser o número de elementos fatorial. Se tivermos 5 pessoas, a resposta será 5! Se tivermos 6, a resposta será 6! = 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1, seis para primeira posição, cinco para a segunda, ... , até um para a última posição. Do mesmo modo, se tivermos 10, a resposta será 10! = 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1, dez para a primeira posição, nove para a segunda, oito para a terceira, ... , até um para a última posição.

Podemos generalizar, dizendo que o número de Permutação Simples de **n** elementos é **n!**

Vamos exercitar um pouco?

21. (Uemg 2010) Observe a tirinha de quadrinhos, a seguir:



Copyright ©1999 Mauricio de Sousa Produções Ltda. Todos os direitos reservados.

5445

A Mônica desafia seus amigos, numa brincadeira de “cabo de guerra”.

Supondo que a posição da Mônica pode ser substituída por qualquer um de seus amigos, e que ela pode ocupar o outro lado, junto com os demais, mantendo-se em qualquer posição, o número de maneiras distintas que podem ocorrer nessa brincadeira será igual a

- A** 5
- B** 24
- C** 60
- D** 120
- E** 720

22. (Ucs 2014) Rose não anotou o número de celular que seu novo amigo lhe informou. Agora ela tem dúvidas em relação aos últimos quatro dígitos. Sabe quais são os dígitos e sabe que são todos distintos, porém não sabe a ordem em que eles aparecem no número do telefone.

Quantas são as diferentes possibilidades para a ordem desses quatros dígitos?

- A** 8
- B** 16
- C** 24
- D** 36
- E** 120

23. (Cesgranrio 1997) Um fiscal do Ministério do Trabalho faz uma visita mensal a cada uma das cinco empresas de construção civil existentes no município. Para evitar que os donos dessas empresas saibam quando o fiscal as inspecionará, ele varia a ordem de suas visitas.

De quantas formas diferentes esse fiscal pode organizar o calendário de visita mensal a essas empresas?

- A** 180
- B** 120
- C** 100
- D** 48
- E** 24

24. (Fuvest 1991) Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem.

Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas serão necessários aproximadamente:

- A** 100 dias.
- B** 10 anos.
- C** 1 século.
- D** 10 séculos.
- E** 100 séculos.

25. (Fac. Albert Einstein - Medicina 2017) Oito adultos e um bebê irão tirar uma foto de família. Os adultos se sentarão em oito cadeiras, um adulto por cadeira, que estão dispostas lado a lado e o bebê sentará no colo de um dos adultos.

O número de maneiras distintas de dispor essas 9 pessoas para a foto é

- A** $8 \times 8!$
- B** $9!$
- C** $9 \times 8!$
- D** 8^9
- E** 9^8

26. (Pucrs 2015) Um fotógrafo foi contratado para tirar fotos de uma família composta por pai, mãe e quatro filhos. Organizou as pessoas lado a lado e colocou os filhos entre os pais.

Mantida essa configuração, o número de formas em que poderão se posicionar para a foto é

- A** 4
- B** 6
- C** 24
- D** 36
- E** 48

27. (Uespi 2012) De quantas maneiras podemos enfileirar 5 mulheres e 3 homens de tal modo que os 3 homens permaneçam juntos?

- A 8!
- B 6!
- C $6!3!$
- D 7!
- E 9!

28. (Ufmg 2010) Para montar a programação de uma emissora de rádio, o programador musical conta com 10 músicas distintas, de diferentes estilos, assim agrupadas: **4 de MPB, 3 de Rock e 3 de Pop**. Sem tempo para fazer essa programação, ele decide que, em cada um dos programas da emissora, serão tocadas, de forma aleatória, todas as 10 músicas.

Assim sendo, é CORRETO afirmar que o número de programas distintos em que as músicas vão ser tocadas **agrupadas por estilo** é dado por

- A $4! \times 3! \times 3! \times 3!$
- B $10! / 7!$
- C $4! \times 3! \times 3!$
- D $10! / (7! \times 3!)$

29. (Unisc 2016) Newton possui 7 livros distintos, sendo 3 de Álgebra, 2 de Cálculo e 2 de Geometria.

O número de maneiras diferentes que Newton pode organizar esses livros em uma estante, de forma que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos, é

- A 24
- B 36
- C 56
- D 72
- E 144

30. (Enem 2014) Um cliente de uma videolocadora tem o hábito de alugar dois filmes por vez. Quando os devolve, sempre pega outros dois filmes e assim sucessivamente. Ele soube que a videolocadora recebeu alguns lançamentos, sendo 8 filmes de ação, 5 de comédia e 3 de drama e, por isso, estabeleceu uma estratégia para ver todos esses 16 lançamentos. Inicialmente alugará, em cada vez, um filme de ação e um de comédia. Quando se esgotarem as possibilidades de comédia, o cliente alugará um filme de ação e um de drama, até que todos os lançamentos sejam vistos e sem que nenhum filme seja repetido.

De quantas formas distintas a estratégia desse cliente poderá ser posta em prática?

- A $20 \times 8! + (3!)^2$
- B $8! \times 5! \times 3!$
- C $(8! \times 5! \times 3!) / 2^8$
- D $(8! \times 5! \times 3!) / 2^2$
- E $16! / 2^8$

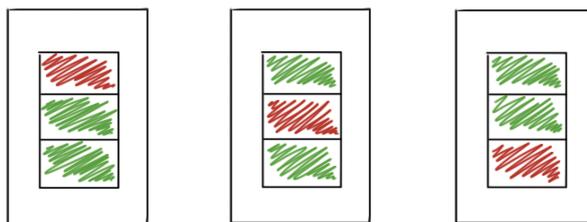
PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO

Para que uma questão de Análise Combinatória seja classificada como Permutação com Repetição, **DUAS** características devem ser obedecidas:

A **PRIMEIRA** é equivalente à Permutação Simples, em que todos os elementos disponíveis serão utilizados, você não precisa escolher alguns elementos em um grupo... Apareceu na questão, vai ter que utilizar. Numa Permutação com Repetição, não fica ninguém de fora! Não tem esse negócio de sobrar... Tá na questão? Então, utiliza! A **SEGUNDA** muda um pouquinho, na Permutação com Repetição, nem sempre geraremos um novo resultado (uma nova organização) quando mudarmos de posição dois elementos utilizados. Você deve analisar bem essas trocas de posição, algumas vão produzir novos resultados e outras não. E é exatamente aí que está a diferença principal de uma Permutação Simples para uma com Repetição. Por causa dessas trocas que não geram um novo resultado é que precisamos efetuar alguns cancelamentos... Enfim, não esqueça de cancelar as trocas que não geram um novo resultado!

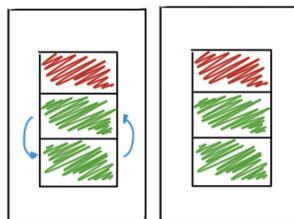
Vamos analisar uma situação: **De quantas maneiras três interruptores em uma tomada podem se apresentar com dois ligados e um desligado?**

Representando ligado por verde e desligado por vermelho, veremos que existem apenas três possibilidades.



Observe que a primeira característica é obedecida, os três interruptores sempre serão utilizados em todas as nossas situações, ora desligados, ora ligados, mas sempre são utilizados.

Em relação à segunda característica, perceba que quando mudamos a posição de um ligado com outro ligado, nada se altera. Na primeira imagem abaixo o segundo e o terceiro estão ligados, na imagem vizinha estão o terceiro e o segundo ligados, ou seja, apesar de trocarmos as posições, a situação é a mesma. Existem trocas que não geram um novo resultado e elas precisam ser canceladas.



Se pensássemos como na Permutação Simples, em que o número de permutações é $n!$, teríamos feito $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, mas $3!$ Não é a resposta para o número de permutações, precisamos cancelar as trocas que não geram um novo resultado. Nesse caso, as trocas a serem canceladas são verde com verde, ou seja, permutação de dois elementos, ou ainda $2!$

Então, como podemos resolver uma questão como essa?

Você precisa fazer uma divisão, no numerador, em cima, você coloca o número total de interruptores e no denominador, embaixo, você coloca as trocas que não geram um novo resultado, que no nosso caso é a quantidade de interruptores verdes:

$$\frac{3!}{2!}$$

Handwritten notes: "quantidade total de interruptores" with an arrow pointing to the numerator 3!, and "Trocas que não geram um novo resultado" with an arrow pointing to the denominator 2!.

Desenvolvendo essa divisão, temos:

$$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 3$$

Três permutações possíveis como havíamos visto.

Sintetizando, na Permutação com Repetição, o número de permutações possíveis é dado por uma divisão em que o numerador é composto pelo fatorial do número de elementos e o denominador contém o fatorial dos elementos que trocados entre si não geram um novo resultado.

Parece complexo, não é? Vamos ver mais um exemplo:

Quantos anagramas possui a palavra BATATA?

Primeiro, o que é um anagrama? É uma transposição de letras de palavra ou frase para formar outra palavra ou frase diferente que tenha ou não sentido, Natercia é um dos anagramas de Caterina; amor, de Roma ; Celia, de Alice.

Bom, sabendo o que é um anagrama, podemos alterar a ordem das letras da palavra BATATA e analisar anagrama por anagrama... Mas qual a maneira mais rápida de fazer?

BATATA tem seis letras e todas elas serão utilizadas nos anagramas, primeira característica obedecida! Observe que se trocarmos A com A a palavra não muda, o mesmo acontece se trocarmos T com T. Segunda característica obedecida.

Para saber a quantidade total de anagramas da palavra BATATA, basta fazermos aquela divisão, lembra? Em cima fica o fatorial do total de letras e embaixo o fatorial das trocas que não geram um novo resultado.

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!}$$

total de letras

trocas entre os A_s

Trocas entre os T_s

Desenvolvendo, temos:

$$\frac{6!}{3! \cdot 2!} = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Existem 60 anagramas para a palavra BATATA.

Vamos exercitar um pouco?

31. (IFPE 2018) Os alunos do curso de Computação Gráfica do campus Olinda estão desenvolvendo um vídeo com todos os anagramas da palavra CARNAVAL.

Se cada anagrama é mostrado durante 0,5s na tela, a animação completa dura

- A menos de 1 minuto.
- B menos de 1 hora.
- C menos de meia hora.
- D menos de 10 minutos.
- E mais de 1 hora.

32. (Uerj 2015) Uma criança ganhou seis picolés de três sabores diferentes: baunilha, morango e chocolate, representados, respectivamente, pelas letras B, M e C. De segunda a sábado, a criança consome um único picolé por dia, formando uma sequência de consumo dos sabores. Observe estas sequências, que correspondem a diferentes modos de consumo:

(B, B, M, C, M, C) ou (B, M, M, C, B, C) ou (C, M, M, B, B, C)

O número total de modos distintos de consumir os picolés equivale a:

- A 6
- B 90
- C 180
- D 720

33. (Fatec 2016) No Boxe, um dos esportes olímpicos, um pugilista tem à sua disposição quatro golpes básicos: o **jab**, o **direto**, o **cruzado** e o **gancho**. Suponha que um pugilista, preparando-se para os Jogos Olímpicos do Rio, em 2016, queira criar uma sequência com 6 golpes, empregando necessariamente dois **jabs**, dois **diretos**, um **cruzado** e um **gancho**.

Assim, o número máximo de sequências que ele poderá criar será de

- A 180
- B 160
- C 140
- D 120
- E 100

34. (Fgv 2014) Uma senha de internet é constituída de seis letras e quatro algarismos em que a ordem é levada em consideração.

Eis uma senha possível: (a, a, b, 7, 7, b, a, 7, a, 7).

Quantas senhas diferentes podem ser formadas com quatro letras "a", duas letras "b" e quatro algarismos iguais a 7?

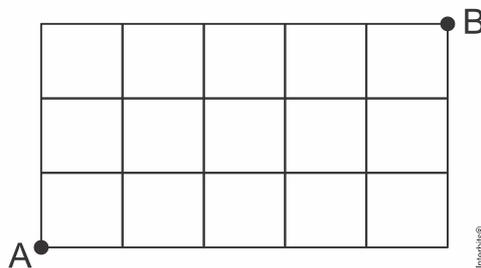
- A 10!
- B 2 520
- C 3 150
- D 6 300
- E $10! / (4! \times 6!)$

35. (Esc. Naval 2014) A Escola Naval irá distribuir 4 viagens para a cidade de Fortaleza, 3 para a cidade de Natal e 2 para a cidade de Salvador.

De quantos modos diferentes podemos distribuí-las entre 9 aspirantes, dando somente uma viagem para cada um?

- A** 288
- B** 1260
- C** 60800
- D** 80760
- E** 120960

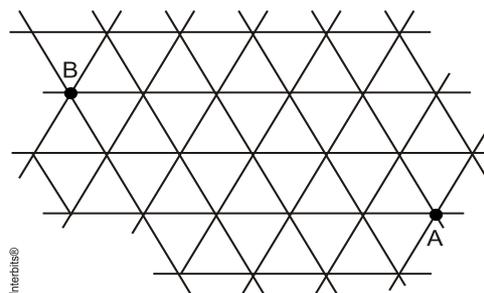
36. (Upf 2016) Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões.



A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B é:

- A** 40.320
- B** 6.720
- C** 256
- D** 120
- E** 56

37. (Uerj 2011) Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo.

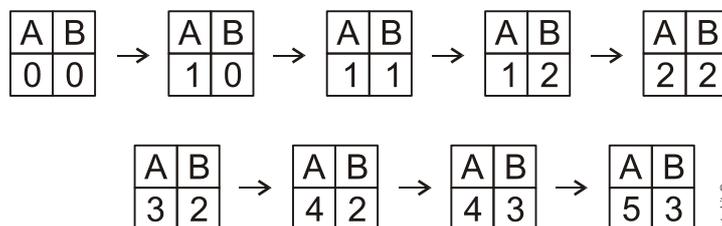


Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a **d**.

Sabendo que **d** corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, X equivale a:

- A** 20
- B** 15
- C** 12
- D** 10

38. (Ufrgs 2008) Se uma partida de futebol termina com o resultado de 5 gols para o time A e 3 gols para o time B, existem diversas maneiras de o placar evoluir de 0×0 a 5×3 . Por exemplo, uma evolução poderia ser



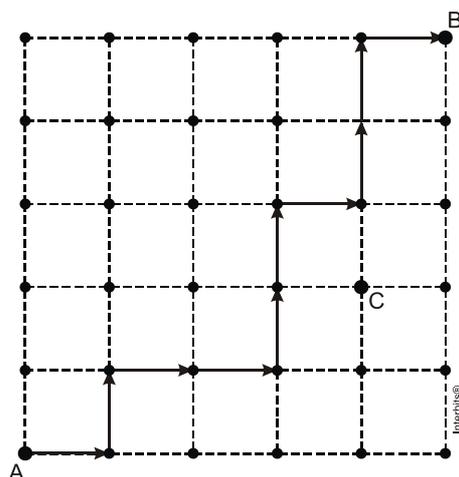
Quantas maneiras, no total, tem o placar de evoluir de 0×0 a 5×3 ?

- A** 16.
- B** 24.
- C** 36.
- D** 48.
- E** 56.

39. (Ufu 2012) Um projeto piloto desenvolvido em um curso de Engenharia Mecânica prevê a construção do robô “Eddie”, cujos movimentos estão limitados apenas a andar para frente (F) e para a direita (D).

Suponha que Eddie está na posição **A** e deseja-se que ele se desloque até chegar à posição **B**, valendo-se dos movimentos que lhe são permitidos.

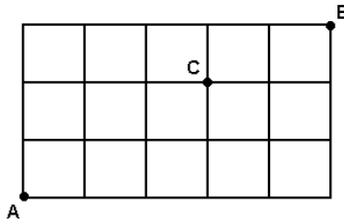
Admita que cada movimento feito por Eddie o leve a uma posição consecutiva, conforme ilustra um esquema a seguir, em que foram realizados 10 movimentos (as posições possíveis estão marcadas por pontos e o percurso executado de **A** até **B**, é representado pela sequência ordenada de movimentos D F D D F F D F F D).



Com base nas informações acima, o número de maneiras possíveis de Eddie se deslocar de **A** até **B**, sem passar pelo ponto **C**, é igual a

- A** 192
- B** 60
- C** 15
- D** 252

40. (Ufrgs 1998) No desenho a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas, e os quadrados representam quarteirões.



A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A e B que passam por C é

- A** 12
- B** 13
- C** 15
- D** 24
- E** 30

ARRANJO SIMPLES

Como saber se um questão envolve Arranjo Simples? Assim como nos temas anteriores, precisamos que **DUAS** características sejam obedecidas:

A **PRIMEIRA** já é diferente das permutações, no Arranjo Simples, você precisa escolher alguns elementos dentre os disponíveis, isso indica que nem todos os elementos serão utilizados, daí você precisa cancelar, jogar fora os não utilizados.

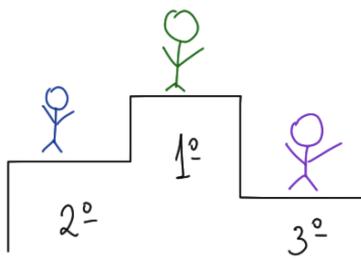
A **SEGUNDA** é que toda vez que mudarmos de posição dois elementos utilizados, sempre geraremos um novo resultado, uma nova organização. Muita gente acaba decorando essa característica através da frase “a ordem importa”, muito cuidado, você precisa saber o significado dessa frase... Quando dizemos que a ordem importa, queremos dizer que ao trocarmos os termos de lugar, sempre obteremos um novo resultado.

Vamos ver na prática como isso funciona?

De quantas maneiras podemos premiar os três primeiros nadadores, com ouro, prata ou bronze respectivamente, dentre os oito que participam de uma competição?

Inicialmente, perceba que existem oito nadadores, no entanto, apenas três serão premiados, temos que escolher três dentre os oito disponíveis. Isso satisfaz à nossa primeira característica! Lembre-se que ao escolher três dentre os oito, precisaremos cancelar os outros cinco que não serão utilizados. Essa é a chave do Arranjo Simples, cancelar quem não é utilizado!

Levando em consideração à segunda característica, imagine se trocássemos o primeiro lugar de posição com o terceiro? O pódio seria o mesmo? Certamente não. A troca de posição dos premiados gera um novo pódio.



E como fazer para efetuar os cálculos de um Arranjo Simples?

Você pode optar por utilizar o Princípio Fundamental da Contagem:

$$\frac{8}{1^{\circ}} \cdot \frac{7}{2^{\circ}} \cdot \frac{6}{3^{\circ}}$$

Existem oito possibilidades para o nadador que ocupará a primeira posição, sete nadadores para a segunda posição e seis para a terceira, o número total de possibilidades será dado por $8 \times 7 \times 6 = 336$.

Esquemáticamente, é mais interessante montarmos a expressão do Arranjo, mais uma vez, o número total de possibilidades será dado por uma divisão. No numerador, ficará o fatorial do número total de nadadores e no denominador, cancelaremos os nadadores que não foram premiados:

$$\frac{8!}{5!}$$

n = total de nadadores (green text pointing to 8!)

não premiados (red text pointing to 5!)

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Generalizando, para calcularmos a quantidade de possibilidades para um Arranjo Simples, basta efetuarmos uma divisão, no numerador colocamos o fatorial do total de elementos disponíveis e no denominador colocamos o fatorial do número de elementos não utilizados.

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

total de elementos disponíveis (red text pointing to n!)

elementos utilizados (green text pointing to p in the denominator)

não utilizados (blue text pointing to n-p in the denominator)

elementos disponíveis (red text pointing to n!)

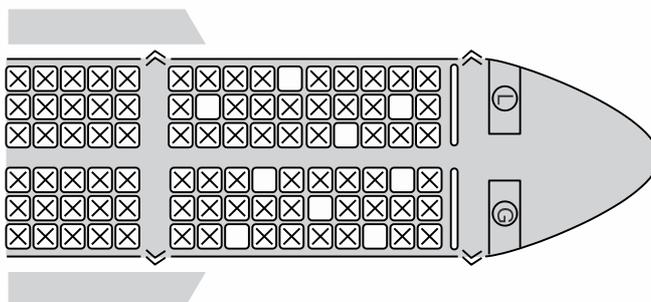
Vamos exercitar?

41. (Ufjf-pism 3 2017) Para concorrer à eleição a diretor e a vice-diretor de uma escola, há 8 candidatos. O mais votado assumirá o cargo de diretor e o segundo mais votado, o de vice-diretor.

Quantas são as possibilidades de ocupação dos cargos de diretor e vice-diretor dessa escola?

- A 15
- B 27
- C 34
- D 56
- E 65

42. (Enem 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o **site** de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo **site** as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

- A $\frac{9!}{2!}$
- B $\frac{9!}{7! \times 2!}$
- C $7!$
- D $\frac{5!}{2!} \times 4!$
- E $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

43. (Fatec 2008) Para mostrar aos seus clientes alguns dos produtos que vende, um comerciante reservou um espaço em uma vitrine, para colocar exatamente 3 latas de refrigerante, lado a lado.

Se ele vende 6 tipos diferentes de refrigerante, de quantas maneiras distintas pode expô-los na vitrine?

- A** 144
- B** 132
- C** 120
- D** 72
- E** 20

44. (Ueg 2017) Uma comissão será composta pelo presidente, tesoureiro e secretário. Cinco candidatos se inscrevem para essa comissão, na qual o mais votado será o presidente, o segundo mais votado o tesoureiro e o menos votado o secretário.

Dessa forma, de quantas maneiras possíveis essa comissão poderá ser formada?

- A** 120
- B** 60
- C** 40
- D** 20
- E** 10

45. (Ueg 2016) Um aluno terá que escrever a palavra PAZ utilizando sua caneta de quatro cores distintas, de tal forma que nenhuma letra dessa palavra tenha a mesma cor.

O número de maneiras que esse aluno pode escrever essa palavra é

- A** 64
- B** 24
- C** 12
- D** 4

46. (Pucsp 2015) No vestiário de uma Academia de Ginástica há exatamente 30 armários, cada qual para uso individual.

Se, no instante em que dois alunos dessa Academia entram no vestiário para mudar suas roupas, apenas 8 dos armários estão desocupados, quantas opções eles terão para escolher seus respectivos armários?

- A** 14
- B** 28
- C** 48
- D** 56
- E** 112

47. (CFTMG 2004) Em um campeonato de tênis de mesa, com dez participantes, em que todos jogam contra todos, um dos participantes vence todas as partidas, as classificações possíveis para os três primeiros colocados é

- A** 72
- B** 78
- C** 82
- D** 90

48. (Ufmg 1995) Duas das cinquenta cadeiras de uma sala serão ocupadas por dois alunos. O número de maneiras distintas possíveis que esses alunos terão para escolher duas das cinquenta cadeiras, para ocupá-las, é

- A** 1225
- B** 2450
- C** 2^{50}
- D** $49!$
- E** $50!$

49. (Pucmg 2007) Em um campeonato de dois turnos, do qual participam dez equipes, que jogam entre si uma vez a cada turno, o número total de jogos previstos é igual a:

- A** 45
- B** 90
- C** 105
- D** 115

50. (Liquigás – CESGRANRIO 2012). Em uma pequena sala de projeção, há cinco cadeiras dispostas em linha, lado a lado, e numeradas de 1 a 5.



Quatro pessoas vão ocupar quatro dessas cadeiras. As possíveis ocupações das cadeiras distinguem-se não só pela cadeira vazia, mas, também, pela disposição das pessoas nas cadeiras ocupadas.

De quantos modos as cadeiras podem ser ocupadas pelas quatro pessoas?

- A** 5
- B** 20
- C** 24
- D** 120
- E** 1.024

COMBINAÇÃO SIMPLES

Como saber se um questão envolve Combinação Simples? Assim como em todos os temas anteriores, precisamos que **DUAS** características sejam obedecidas:

A **PRIMEIRA** é equivalente à obedecida pelo Arranjo Simples, você precisa escolher alguns elementos dentre os disponíveis, isso indica que nem todos os elementos serão utilizados, daí você precisa cancelar, jogar fora os não utilizados.

A **SEGUNDA** é que toda vez que mudarmos de posição dois elementos utilizados, NUNCA geraremos um novo resultado, NUNCA será gerada uma nova organização. Muita gente acaba decorando essa característica através da frase “a ordem NÃO importa”, muito cuidado, você precisa saber o significado dessa frase... Quando dizemos que a ordem NÃO importa, queremos dizer que ao trocarmos os termos de lugar, NUNCA obteremos um novo resultado. Portanto, não esqueça de cancelar todas as trocas que não geram esse novo resultado.

A Combinação Simples exige dois cancelamentos: um para a quantidade de elementos que não foram escolhidos e outro para as trocas que não geram um novo resultado.

Vamos ver na prática como isso funciona?

De quantas maneiras podemos formar uma comissão sem hierarquia com três dos cinco funcionários de uma empresa?

Inicialmente, perceba que precisamos escolher três funcionários dos cinco disponíveis, isso nos mostra que alguns funcionários não serão escolhidos para compor a comissão, os não escolhidos devem ser cancelados.

Por não haver hierarquia ou diferença entre as funções da comissão, ao trocarmos a posição dos escolhidos, sempre a comissão será a mesma. Qualquer que seja a troca de posição dos escolhidos jamais alterará a composição da comissão. Daí, a ordem dos escolhidos não importa.



A comissão permanece a mesma, ainda que haja trocas de posição entre os escolhidos.

Mas como calcular a quantidade de combinações obtidas no exemplo anterior?

Efetuada uma divisão do fatorial da quantidade total de elementos disponíveis pelo fatorial do número de elementos não utilizados e pelo fatorial do número de trocas que não geram um novo resultado.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! p!}$$

total de elementos disponíveis (pointing to $n!$)
elementos utilizados (pointing to $(n-p)!$)
elementos disponíveis (pointing to $n!$)
não utilizados (pointing to $(n-p)!$)
trocas que não geram um novo resultado (pointing to $p!$)

Nesse exemplo, queremos efetuar uma Combinação Simples de cinco tomados três a três ($C_{5,3}$):

$$C_{5,3} = \frac{5!}{2! 3!}$$

5 pessoas disponíveis (pointing to $5!$)
2 não serão escolhidas (pointing to $2!$)
trocar as 3 escolhidas de posição não vai gerar uma nova comissão (pointing to $3!$)

Desenvolvendo a expressão, temos:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{2! 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Podem ser formadas 10 comissões distintas escolhendo-se 3 pessoas dentre as 5 disponíveis.

Vamos exercitar?

51. (IFPE 2017) Oito amigos decidiram brincar de telefone. Para isso, dispuseram-se em um terreno de modo que cada um estivesse no vértice de um octógono regular de lado medindo 20 metros, conforme figura 1.

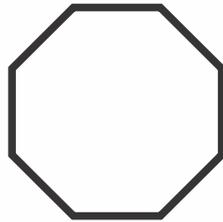


Figura 1

Interbase®

Decidiram montar os telefones utilizando barbante e copos descartáveis, conforme figura 2.

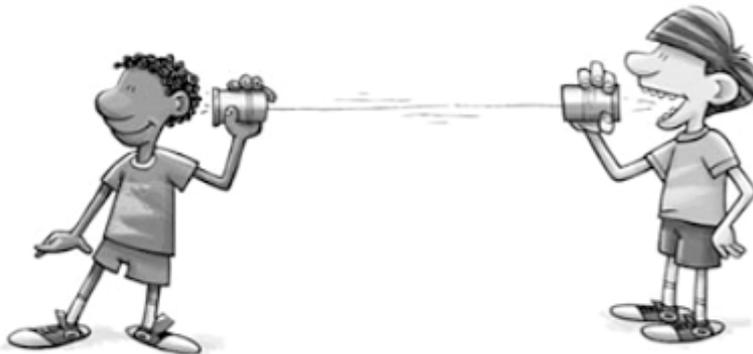


Figura 2

Disponível em: <<http://www.beaba.com.br/brincadeira-infantil-telefone-sem-fio/>>. Acesso: 05 de out. 2016.

Disponível em: <<http://www.beaba.com.br/brincadeira-infantil-telefone-sem-fio/>>. Acesso: 05 de out. 2016.

Cada telefone, que é intransferível, liga apenas dois dos amigos e é formado por dois copos, que não podem estar em dois telefones simultaneamente, e um barbante. Para que todos possam falar com todos através de um telefone desses, incluindo os amigos em vértices consecutivos, quantos telefones eles precisarão confeccionar?

- A** 20
- B** 28
- C** 12
- D** 10
- E** 8

52. (Enem 2017) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando **videogame**. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

- A** 64
- B** 56
- C** 49
- D** 36
- E** 28

53. (Enem 2ª aplicação 2010) Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus nacionais	Museus internacionais
Masp — São Paulo	Louvre — Paris
MAM — São Paulo	Prado — Madri
Ipiranga — São Paulo	British Museum — Londres
Imperial — Petrópolis	Metropolitan — Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

- A** 6
- B** 8
- C** 20
- D** 24
- E** 36

54. (Pucrs 2018) Uma família mudou-se da zona rural para uma cidade grande, onde os pais e seus 10 filhos deverão morar numa casa de três quartos. Os dez filhos deverão ocupar dois quartos, sendo 6 filhos num quarto e 4 filhos em outro quarto.

De quantos modos os filhos poderão ser separados dessa forma?

- A** $6! + 4!$
- B** $6!4!$
- C** $\frac{10!}{6!4!}$
- D** $\frac{10!}{6!}$

55. (IFPE 2017) O coordenador de Matemática do campus Recife conta com 7 professores para lecionar aulas em um programa do PROIFPE. São aulas semanais e a cada semana um novo trio de professores é selecionado para ministrá-las.

Considerando um mês equivalente a 4 semanas, em quanto tempo esse programa estará finalizado

- A** 6 meses.
- B** 4 meses e 1 semana.
- C** 1 ano, 8 meses e 2 semanas.
- D** 2 anos e 3 meses.
- E** 8 meses e 3 semanas.

56. (Ucs 2012) Um professor apresenta 10 questões, das quais os seus alunos poderão escolher 8 para serem respondidas.

De quantas maneiras diferentes um aluno pode escolher as 8 questões?

- A** 90
- B** 80
- C** 45
- D** 40
- E** 8

57. (Ucs 2016) Um supermercado está selecionando, entre 15 candidatos que se apresentaram, 3 funcionários para desempenhar a função de "caixa".

De quantas maneiras diferentes pode ser feita essa escolha?

- A** 5
- B** 45
- C** 215
- D** 360
- E** 455

58. (Pucrs 2013) Para a escolha de um júri popular formado por 21 pessoas, o juiz-presidente de uma determinada Comarca dispõe de uma listagem com nomes de trinta homens e de vinte mulheres.

O número de possibilidades de formar um júri popular composto por exatamente 15 homens é

- A** $C_{30}^{15} \cdot C_{20}^6$
- B** $A_{30}^{15} \cdot A_{20}^6$
- C** $C_{30}^{15} + C_{20}^6$
- D** $A_{30}^{15} + A_{20}^6$
- E** C_{50}^{21}

59. (Uemg 2013) O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos de 1 a 60. Um apostador, depois de vários anos de análise, deduziu que, no próximo sorteio, os 6 números sorteados estariam entre os 10 números que tinha escolhido. Sendo assim, com a intenção de garantir seu prêmio na Sena, ele resolveu fazer todos os possíveis jogos com 6 números entre os 10 números escolhidos.

Quantos reais ele gastará para fazê-los, sabendo que cada jogo com 6 números custa R\$ 2,00?

- A** R\$ 540,00.
- B** R\$ 302.400,00.
- C** R\$ 420,00.
- D** R\$ 5.040,00.

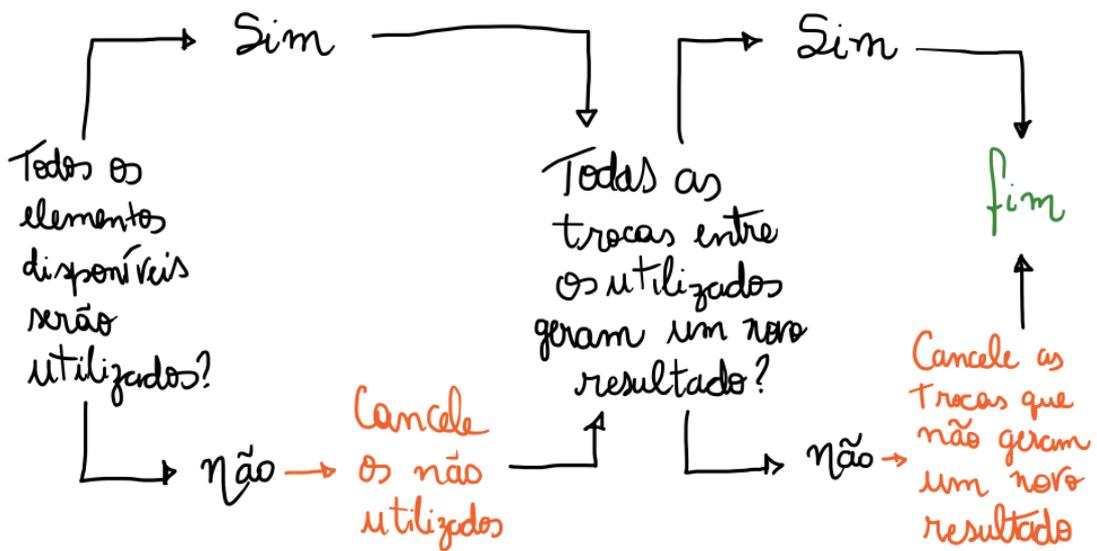
60. (Ufsm 2013) As doenças cardiovasculares aparecem em primeiro lugar entre as causas de morte no Brasil. As cirurgias cardíacas são alternativas bastante eficazes no tratamento dessas doenças. Supõe-se que um hospital dispõe de 5 médicos cardiologistas, 2 médicos anestesistas e 6 instrumentadores que fazem parte do grupo de profissionais habilitados para realizar cirurgias cardíacas.

Quantas equipes diferentes podem ser formadas com 3 cardiologistas, 1 anestesista e 4 instrumentadores?

- A** 200.
- B** 300.
- C** 600.
- D** 720.
- E** 1.200.

RESUMO

	PERMUTAÇÃO SIMPLES	PERMUTAÇÃO COM REPETIÇÃO	ARRANJO SIMPLES	COMBINAÇÃO SIMPLES
TODOS OS ELEMENTOS DISPONÍVEIS SERÃO UTILIZADOS?	SIM	SIM	NÃO	NÃO
TODAS AS TROCAS ENTRES OS UTILIZADOS GERAM UM NOVO RESULTADO?	SIM	NÃO	SIM	NÃO



Permutação Simples
 $n!$

Permutação com Repetição
 $\frac{n!}{R_1! R_2! \dots R_k!}$

Arranjo Simples
 $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$

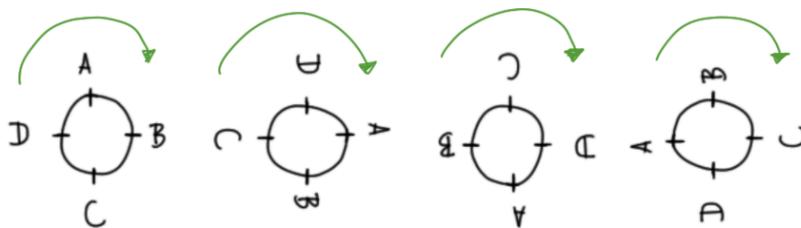
Combinação Simples
 $C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

O número de permutações circulares de n objetos distintos é o número de modos de colocar esses n objetos em círculo, de forma que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais.

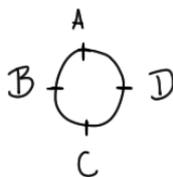
Para entendermos melhor, vamos analisar uma situação em que quatro pessoas A, B, C e D necessitem sentar em quatro lugares pré-determinados em uma mesa.

Observe que as quatro posições abaixo, obtidas por rotação, são coincidentes e devem ser consideradas iguais:



Em todas as situações anteriores, quem está à direita do A é o B, quem está à esquerda do A é o D e que está oposto ao A é o C. NÃO há uma nova configuração, NÃO há uma nova organização. Todas as quatro possibilidades são equivalentes por rotação.

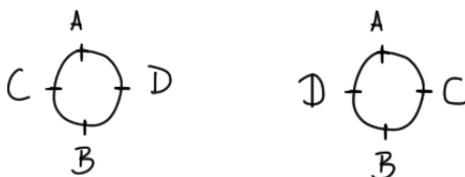
Uma nova organização seria gerada, se trocássemos B e D de lugar. Desse modo, à direita do A já não estaria o B, mas sim o D. o B estaria à esquerda do A:



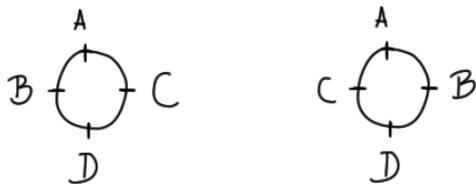
Já esgotamos todas as possibilidades em que A e C estão opostos, veja que não é possível obter um a partir do outro, apenas com rotações, uma vez que eles representam organizações diferentes:



Vamos agora, analisar os casos em que A e B são opostos:

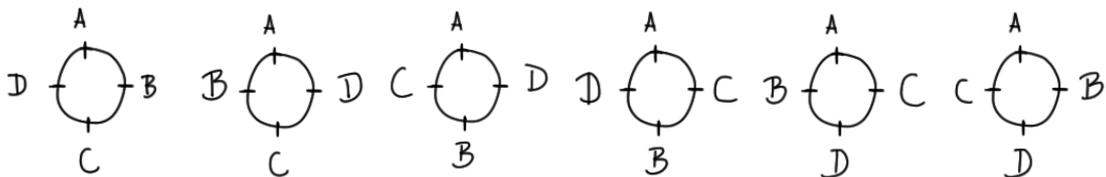


Finalmente, analisaremos os casos em que A e D são opostos:



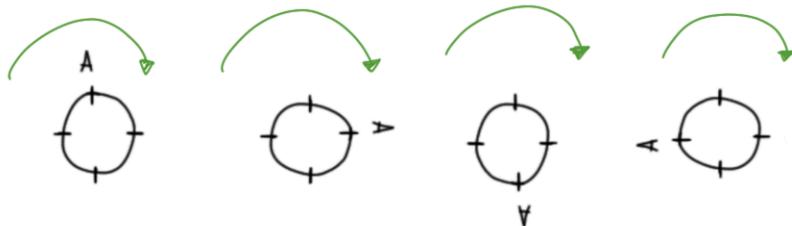
Sendo assim, o número de permutações circulares de **4** objetos distintos, ou seja, o número de modos de colocar esses **4** objetos em círculo, de forma que disposições que possam coincidir por rotação sejam consideradas iguais é igual a **6**.

A saber:



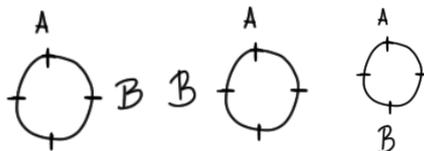
Mas como chegar a 6 possibilidades através de cálculos?

Inicialmente, vamos usar o PFC. Quantas possibilidades temos para o A se sentar? Sei que você pensou em 4, mas essa resposta não está correta. Lembre-se que falamos que disposições coincidentes por rotação devem ser consideradas iguais:

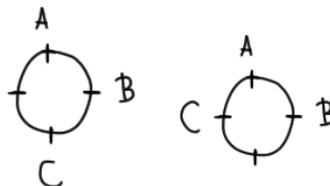


É possível obter as quatro posições em que A pode se sentar apenas por rotação. Esta é a razão pela qual, essas quatro possibilidades são consideradas como apenas uma, já que todas são equivalentes.

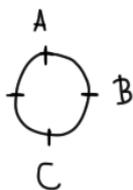
Uma vez que o A tomou o seu lugar, temos três possibilidades para o B, sentar à direita de A, sentar à esquerda de A ou sentar oposto à A.



Sentados o A e o B, o C tem duas possibilidades.



Quando o C sentar, só sobrá uma possibilidade para o D sentar:



Usando o PFC, temos:

$$\frac{1}{A} \times \frac{3}{B} \times \frac{2}{C} \times \frac{1}{D} = 3! = 6$$

Observe que a permutação circular de 4 elementos é igual a $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

E se fosse uma permutação circular de 5 elementos A, B, C, D e E, qual seria a resposta?

Existe apenas 1 possibilidade para o A, lembra? Todas são iguais por rotação! Existem 4 para B, 3 para C, 2 para D e 1 para E. Utilizando o PFC, temos:

$$\frac{1}{A} \times \frac{4}{B} \times \frac{3}{C} \times \frac{2}{D} \times \frac{1}{E} = 4! = 24$$

E se fosse uma permutação circular de 6 elementos A, B, C, D, E e F, qual seria a resposta?

Existe apenas 1 possibilidade para o A, lembra? Todas são iguais por rotação! Existem 5 para B, 4 para C, 3 para D e 2 para E e 1 para F. Utilizando o PFC, temos:

$$\frac{1}{A} \times \frac{5}{B} \times \frac{4}{C} \times \frac{3}{D} \times \frac{2}{E} \times \frac{1}{F} = 5! = 120$$

Não sei se você percebeu, mas a permutação circular de 4 elementos resultou em $3!$, a de 5 elementos resultou em $4!$ e a de 6 elementos resultou em $5!$

Podemos, então, generalizar e dizer que a permutação circular de n elementos é dada por $(n-1)!$

$$P_{C_n} = (n-1)!$$

Questões para treino:

61. Dois colares de pérolas serão considerados iguais se um deles puder ser obtido através de uma rotação do outro, como ilustra a figura 1.

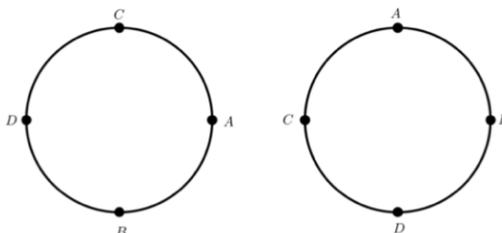


Figura 1: Colares Iguais.

De quantas formas 4 pérolas distintas (A, B, C e D) podem ser usadas para formar um colar circular?

62. Um grupo de 6 pessoas, incluindo Nilton e Lucimar, decide jogar cartas com rodadas circulares. Após a vez de um jogador, o próximo a jogar é aquele que está à sua direita.

a) Por questões estratégicas, Nilton decide se posicionar sempre imediatamente à direita de Lucimar. De quantas formas esses 6 jogadores podem sentar ao redor da mesa?

b) Suponha que agora Nilton deseja ficar em qualquer um dos dois lados de Lucimar. A resposta anterior muda?

63. De quantas maneiras 6 pessoas podem se sentar em torno de uma mesa circular?

64. Um grupo de 6 crianças decide brincar de ciranda dando as mãos e fazendo uma roda. Dentre elas estão Aline, Bianca e Carla que são muito amigas e querem sempre ficar juntas. Nessa condição, qual o número de rodas distintas que podem ser formadas?

65. De quantos modos podemos formar uma roda com 7 crianças de modo que duas determinadas dessas crianças não fiquem juntas?

66. De quantos modos 7 crianças, entre elas João e Maria, podem brincar de roda, ficando João sempre ao lado de Maria?

67. Em uma brincadeira em um programa de TV, 6 casais devem se sentar em bancos arrumados de modo circular com a seguinte restrição: homens e mulheres devem se sentar de modo alternado, cada homem ao lado apenas de mulheres e vice-versa. De quantas maneiras esses casais podem se arrumar para a brincadeira?

68. Fábio, Denise e Ledo vão brincar de roda, juntamente com outras 5 pessoas. De quantas formas essa roda poderá ser formada, de modo que os três fiquem juntos, mas com Denise entre Fábio e Ledo?

69. Um grupo constituído por 4 casais se sentará em torno de uma mesa com 8 cadeiras. As pessoas sentarão de modo alternado divididas pelo seu gênero e, além disso, João e Maria estão brigados e não querem sentar-se lado a lado. Quantas arrumações diferentes poderão ser feitas com essas pessoas sentando-se nos lugares disponíveis?

70. De quantos modos 5 meninos e 5 meninas podem formar um roda com as crianças dos mesmo sexo todas juntas?

COMBINAÇÃO COMPLETA

Se eu te perguntasse quantos pares ordenados (x, y) são soluções inteiras não negativas para a equação $x + y = 3$, como você resolveria esse problema?

Vamos listar cada uma das soluções:

$$x = 0 \text{ e } y = 3, \text{ veja que } 0 + 3 = 3;$$

$$x = 1 \text{ e } y = 2, \text{ veja que } 1 + 2 = 3;$$

$$x = 2 \text{ e } y = 1, \text{ veja que } 2 + 1 = 3;$$

$$x = 3 \text{ e } y = 0, \text{ veja que } 3 + 0 = 3;$$

Temos 4 soluções:

$$(0, 3); (1, 2); (2, 1); (3, 0).$$

Será que esse tipo de questão precisa ser resolvida sempre listando as possíveis soluções? De forma alguma... Vamos representar as soluções de uma maneira bem inusitada:

$x = 0$ e $y = 3$, será representado assim: $x = \dots$ e $y = \dots$ daí, $0 + 3$ seria $\dots + \dots$

$x = 1$ e $y = 2$, será representado assim: $x = \cdot$ e $y = \dots$ daí, $1 + 2$ seria $\dots + \dots$

$x = 2$ e $y = 1$, será representado assim: $x = \dots$ e $y = \cdot$ daí, $2 + 1$ seria $\dots + \dots$

$x = 3$ e $y = 0$, será representado assim: $x = \dots$ e $y = \dots$ daí, $3 + 0$ seria $\dots + \dots$

Passamos a representar cada unidade por uma bolinha \cdot .

Desse modo, as quatro soluções seriam:

$$\underbrace{\quad} + \underbrace{\cdot\cdot\cdot} = 3$$

$$0 + 3 = 3$$

$$\underbrace{\cdot} + \underbrace{\cdot\cdot} = 3$$

$$1 + 2 = 3$$

$$\underbrace{\cdot\cdot} + \underbrace{\cdot} = 3$$

$$2 + 1 = 3$$

$$\underbrace{\cdot\cdot\cdot} + \underbrace{\quad} = 3$$

$$3 + 0 = 3$$

Perceba que as soluções são dadas através de permutações com repetição de “três bolinhas” e um “mais”. Sendo assim:

$$P^{\dots +} = \frac{4!}{3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$$

Ou seja, é possível encontrar a solução para a equação sem necessariamente listar todas as possibilidades, basta apenas que identifiquemos qual a permutação com repetição associada.

E para a equação $x + y + z = 6$, quantas são as soluções com x, y e z inteiros não negativos?

Uma solução possível é $x = 1, y = 2$ e $z = 3$, por exemplo, já que $1 + 2 + 3 = 6$.

Representando essa solução com mais e bolinhas, temos:

•+••+•••

Perceba que nesse caso, temos um total de 8 elementos, 6 bolinhas e 2 mais e qualquer solução pode ser obtida através da permutação com repetição desses elementos:

$$P_{\dots}^{++} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

São 28 soluções inteiras não negativas para a equação $x + y + z = 6$.

A saber:

0 + 0 + 6	1 + 0 + 5	2 + 0 + 4	3 + 0 + 3	4 + 0 + 2	5 + 0 + 1	6 + 0 + 0
0 + 1 + 5	1 + 1 + 4	2 + 1 + 3	3 + 1 + 2	4 + 1 + 1	5 + 1 + 0	
0 + 2 + 4	1 + 2 + 3	2 + 2 + 2	3 + 2 + 1	4 + 2 + 0		
0 + 3 + 3	1 + 3 + 2	2 + 3 + 1	3 + 3 + 0			
0 + 4 + 2	1 + 4 + 1	2 + 4 + 0				
0 + 5 + 1	1 + 5 + 0					
0 + 6 + 0						

Bom e como contextualizar uma situação como essa? Vamos lá...

Você vai a uma loja de material escolar para comprar canetas e acaba comprando 6 canetas, na loja só havia canetas azuis, vermelhas e pretas. De quantas maneiras diferentes pode ter sido feita a sua compra?

Não sei se você percebeu, mas é exatamente o exemplo anterior...

Seja x quantidade de canetas azuis que você comprou, y a quantidade de canetas vermelhas e z a quantidade de canetas pretas. Quando somarmos x, y e z , o total de canetas compradas será 6.

$$x + y + z = 6$$

Não podemos comprar uma quantidade negativa de canetas e precisamos comprar uma quantidade inteira de canetas, por isso, as soluções devem ser inteiras não negativas. O próximo passo é encontrar a permutação com repetição associada à essa equação, para isso transforme 6 em seis “bolinhas” e os dois “mais” da equação permanecem:

•••••+•+

Fazendo a permutação com repetição associada,

$$P_{\dots}^{++} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

Essa compra pode ter sido realizada de 28 maneiras distintas!

Mas por que o nome desse conteúdo é Combinação Completa? Porque existe uma fórmula que resulta exatamente nessa permutação com repetição. Como ela é muito complicada para decorar, prefiro que você analise caso a caso e encontre a permutação com repetição associada. Mas se você é daqueles que tem facilidade para decorar fórmulas, meta bronca e decore essa danada!

$$C_{c(n,p)} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

Nesse exemplo, $n = 3$ tipos de canetas, $p = 6$ canetas compradas.

$$C_{c(n,p)} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

$$C_{c(3,6)} = \frac{(3+6-1)!}{6!(3-1)!} = \frac{8!}{6!2!} = C_{8,2}$$

$$C_{8,2} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{8 \cdot 7}{2} = \frac{56}{2} = 28 = P_{\dots}^{++}$$

Exatamente igual ao que tínhamos feito com a permutação com repetição.

E se mudássemos um pouco a pergunta. E se agora, você tivesse comprado seis canetas, mas comprou pelo menos uma de cada cor? Como ficaria a solução para esse problema?

No exemplo anterior, utilizamos $x + y + z = 6$, mas naquele caso, x , y ou z poderiam ser zero, já aqui, não. Então precisamos reescrever essa equação. Existe uma quantidade a de canetas azuis compradas, além daquela que obrigatoriamente foi comprada, existe uma quantidade v de canetas vermelhas compradas, além da obrigatória e existe uma quantidade p de canetas compradas, além da obrigatória. Sendo assim, a nossa equação ficará:

$$(a+1) + (v+1) + (p+1) = 6$$

$$a + v + p + 3 = 6$$

$$a + v + p = 3$$

Esta última equação faz muito sentido. Afinal, se dentre as seis canetas compradas, obrigatoriamente temos uma azul, uma vermelha e uma preta, só podemos decidir a cor das outras três canetas que ainda não foram compradas. Por isso, ficamos com:

$$a + v + p = 3$$

Basta encontrarmos a permutação com repetição correspondente. Lembre-se de transformar as três canetas em “bolinhas” e permanecer com os dois “mais” da equação:

$$\dots^{++}$$

Temos 5 elementos, dos quais, 3 são “bolinhas” e 2 são “mais”:

$$P_{\dots}^{++} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Existem 10 possibilidades para comprar seis canetas, sendo pelo menos uma de cada cor.

Vamos exercitar um pouco?

71. Uma fábrica possui 3 cores diferentes para pintar 6 carros iguais, cada um com uma cor. De quantos modos isso pode ser feito?

72. Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito.

a) Sabendo que podem ser compradas de zero a seis empadas de cada tipo, de quantas maneiras distintas essa compra pode ser feita?

b) Sabendo que ele quer provar todos os sabores das empadas, de quantas maneiras distintas essa compra pode ser feita?

73. De quantas formas podemos colocar 6 anéis iguais em 4 dedos?

74. Há seis modos distintos de guardar dois cadernos iguais em três gavetas, são eles:

- guardar os dois na primeira gaveta;
- guardar os dois na segunda gaveta;
- guardar os dois na terceira gaveta;
- guardar um na primeira gaveta e o outro, na segunda;
- guardar um na primeira gaveta e o outro, na terceira; e
- guardar um na segunda gaveta e o outro, na terceira.

Qual o número de modos distintos de guardar três cadernos iguais em três gavetas?

75. Calcule o número de maneiras diferentes pelas quais podemos repartir uma dúzia de balas iguais entre três crianças, de modo que cada uma receba pelo menos uma bala.

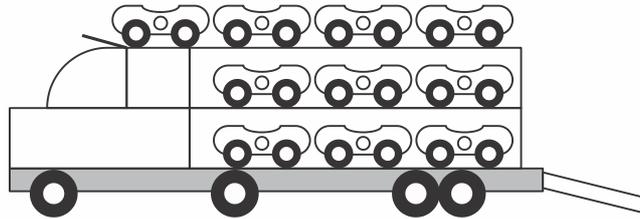
76. Uma loja vende barras de chocolate de diversos sabores. Em uma promoção era possível comprar três barras de chocolate com descontos, desde que essas fossem dos seguintes sabores: ao leite, amargo, branco ou com amêndoas. As três barras escolhidas podem ou não ter sabores repetidos. Assim, um cliente para comprar as três barras na promoção poderá escolher os sabores de n modos distintos. Qual o valor de n ?

77. Uma pessoa dispõe de balas de hortelã, caramelo e coco, cada uma com apenas um sabor. Ele pretende "montar" saquinhos com 13 balas cada, de modo que em cada saquinho haja no mínimo 3 balas de cada sabor. Um saquinho se diferencia do outro pelas quantidades de balas de cada sabor. Sendo assim, quantos saquinhos diferentes podem ser "montados"?

78. Um mercadinho tem 6 marcas diferentes de café no estoque. De quantas formas uma compra de 8 pacotes de café pode ser feita?

79. De quantas maneiras podemos colocar 20 bolas da mesma cor em 5 caixas de modo que nenhuma caixa fique vazia?

80. (Enem 2017) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

- A** $C_{6,4}$
- B** $C_{9,3}$
- C** $C_{10,4}$
- D** 6^4
- E** 4^6

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	E
02	E
03	C
04	E
05	E
06	C
07	A
08	A
09	C
10	A
11	D
12	B
13	D
14	E
15	A
16	C
17	E
18	C
19	D
20	D
21	D
22	C
23	B
24	E
25	A
26	E
27	C
28	A
29	E
30	B
31	B
32	B
33	A
34	C
35	B
36	E
37	B
38	E
39	A
40	E
41	D

42	A
43	C
44	B
45	B
46	D
47	A
48	B
49	B
50	D
51	B
52	E
53	D
54	C
55	E
56	C
57	E
58	A
59	C
60	B
61	6
62	a) 24 b) Sim, 48
63	120
64	36
65	480
66	240
67	86400
68	240
69	72
70	14400
71	28
72	a) 84 b) 10
73	84
74	10
75	55
76	20
77	15
78	1287
79	3876
80	B

LISTA EXTRA - ANÁLISE COMBINATÓRIA

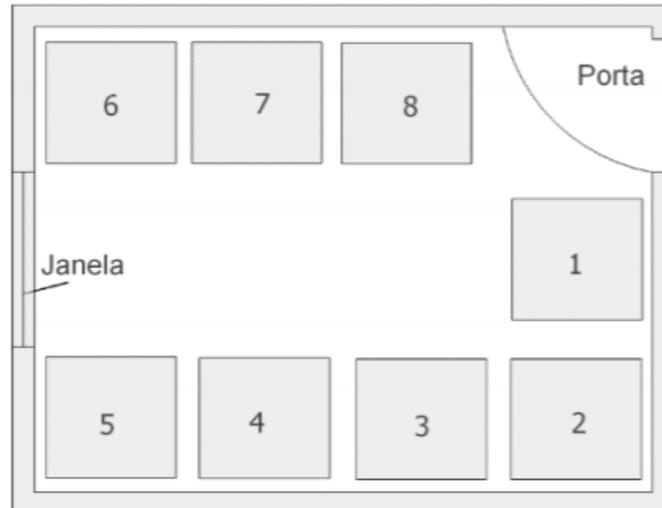
Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Permutação com Repetição, Permutação Circular, Arranjo Simples, Combinação Simples e Combinação Completa

81. (UFAL 2017) Sabe-se que um time de futebol de salão é composto por quatro jogadores e um goleiro. Sabe-se também que, de um grupo de 9 pessoas, três jogam apenas na posição de goleiro enquanto as demais jogam apenas se não forem goleiros.

Considerando apenas duas posições (ser ou não goleiro), de quantas formas distintas é possível formar um time?

- A 12
- B 15
- C 18
- D 30
- E 45

82. (UFAL 2015) Para evitar a monotonia no ambiente de trabalho, um grupo de funcionários decidiu que, de tempos em tempos, iriam alterar a disposição do mobiliário na sala em que trabalham. A sala é dividida em 8 espaços que são ocupados por: três armários distintos, três mesas pessoais, um vaso de plantas e um geláguo. Entretanto, todos concordaram que em pelo menos um dos lados da porta sempre deve existir uma mesa e que o bebedouro sempre deve estar próximo à janela. A figura mostra o *layout* da sala, com os 8 espaços numerados para a distribuição pretendida.



De quantas formas possíveis os funcionários podem alterar a disposição do mobiliário da sala?

- A 720
- B 1 440
- C 2 880
- D 4 320
- E 8 640

83. (UFAL 2015) Quatro médicos e oito enfermeiros trabalham num Posto de Saúde.

Quantas equipes diferentes com dois médicos e quatro enfermeiros podem ser montadas para os plantões?

- A** 76
- B** 280
- C** 420
- D** 1 692
- E** 20 160

84. (UFAL 2019) Uma certa identificação fictícia é composta por dois tipos de caracteres: letras (de um total de 26) e algarismos (de 0 a 9). Tais caracteres podem ser combinados de qualquer forma, desde que totalizem 12, tal como 23ABTU2UPP3Z.

Quantas identificações diferentes que contenham a sequência 56AGRF podem ser formadas?

- A** $5 \cdot 36^6$
- B** $6 \cdot 36^6$
- C** $7 \cdot 36^6 - 1$
- D** $7 \cdot 36^5 - 1$
- E** $(6 \cdot 36)^6 - 1$

85. (UFGD 2019) Em um aquário, serão colocados cinco peixes, cada um de uma cor.

Se há oito opções de cores de peixes para serem escolhidas, quantas combinações de cores de peixes podem ser formadas para esse aquário?

- A** 12.
- B** 24.
- C** 42.
- D** 56.
- E** 120.

86. (IADES 2019) Uma obra é composta por 3 ambientes. O projeto prevê que as paredes de um ambiente devem ser pintadas sempre da mesma cor e cada um desses ambientes possui cor diferente dos demais.

Sabendo que estão disponíveis 5 cores diferentes de tinta, de quantas maneiras diferentes o projeto poderá ser executado?

- A** 15
- B** 60
- C** 30
- D** 45
- E** 90

87. (UFGD 2019) Laura levou na viagem 5 pares de sapatos (dois vermelhos, dois pretos e um rosa), 5 saias (uma vermelha, três pretas e uma rosa) e 5 camisas (uma vermelha, três brancas e uma rosa).

De quantas formas diferentes ela poderá se vestir se ela sempre usa sapatos e saia da mesma cor, mas nunca tudo da mesma cor?

- A** 26.
- B** 30.
- C** 34.
- D** 38.
- E** 42.

88. (FEMPERJ 2012) Num campeonato de futebol, todos os times jogaram entre si duas vezes, em turno e retorno. Houve 132 jogos.

O número de times participando do campeonato era de:

- A** 8;
- B** 9;
- C** 10;
- D** 11;
- E** 12.

89. (INAZ 2019) Uma sorveteria estava dando desconto na compra de três picolés, mas teriam que ser nos sabores de morango, chocolate, tapioca ou açaí, sendo que poderiam ser repetidos.

Uma família que comprou os três picolés, com o desconto, teria quantas maneiras diferentes para escolher os sabores dos picolés?

- A** 5.
- B** 8.
- C** 16.
- D** 20.
- E** 24.

90. (FCC 2019) Ana e Beatriz são as únicas mulheres que fazem parte de um grupo de 7 pessoas.

O número de comissões de 3 pessoas que poderão ser formadas com essas 7 pessoas, de maneira que Ana e Beatriz não estejam juntas em qualquer comissão formada, é igual a

- A** 20.
- B** 15.
- C** 30.
- D** 18.
- E** 25.

91. (FCC 2019) Os quatro funcionários de uma repartição trabalham cada um em uma mesa, todos na mesma sala. O chefe da repartição determinou que os funcionários trocassem de mesa entre si.

Os funcionários podem ser realocados na sala de modo que nenhum funcionário passe a ocupar a mesa que ocupava antes da realocação

- A** de 4 maneiras diferentes.
- B** de 24 maneiras diferentes.
- C** de 9 maneiras diferentes.
- D** de 6 maneiras diferentes.
- E** de 12 maneiras diferentes.

92. Uma determinada secretaria municipal conta com dois assessores (A1 e A2) e cinco supervisores (S1, S2, S3, S4 e S5). Deseja-se formar uma comissão formada por quatro membros, pelo menos um dos quais deve ser um assessor e os demais, supervisores. Ainda, se A1 for membro da comissão, S1 não deve ser.

Nessas condições, podem ser formadas

- A** 15 comissões diferentes.
- B** 30 comissões diferentes.
- C** 20 comissões diferentes.
- D** 44 comissões diferentes.
- E** 60 comissões diferentes.

93. (FEPESE 2019) Em um grupo de 10 funcionários de uma empresa, três falam inglês fluentemente e os outros não sabem inglês.

De quantos modos diferentes pode-se formar uma equipe com 4 destes funcionários, de maneira que ao menos um dos escolhidos saiba falar inglês fluentemente?

- A** Menos do que 300
- B** Mais do que 300 e menos que 350
- C** Mais do que 350 e menos que 400
- D** Mais do que 400 e menos que 450
- E** Mais do que 450

94. (FEPESE 2019) Durante a programação diária de um canal de televisão, os intervalos são preenchidos com 6 comerciais diferentes. A cada intervalo, os seis comerciais são apresentados, mas sempre em ordem diferente e uma ordem não é repetida até que todas as outras possíveis ordens tenham sido apresentadas.

Após quantos intervalos, no mínimo, todas as possíveis ordens dos comerciais terão sido apresentadas?

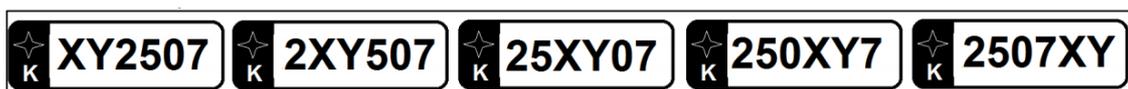
- A** Mais do que 800
- B** Mais do que 750 e menos que 800
- C** Mais do que 700 e menos que 750
- D** Mais do que 650 e menos que 700
- E** Menos do que 650

95. Um país utiliza placas com 3 algarismos e 2 letras para identificar as motos em circulação. Devido ao esgotamento das possíveis placas distintas, o país decide substituir um dos algarismos por letras, sendo que as placas passam a contar com 2 algarismos e 3 letras. Assim, todas as placas antigas, com 3 algarismos e 2 letras são recolhidas.

Considerando que as letras são escolhidas em um alfabeto com 23 letras, quantas placas a mais ficarão disponíveis com a mudança de 3 algarismos e 2 letras para 2 algarismos e 3 letras?

- A Mais que 685.000
- B Mais que 670.000 e menos que 685.000
- C Mais que 655.000 e menos que 670.000
- D Mais que 640.000 e menos que 655.000
- E Menos que 640.000

96. (FADESP 2019) Em um fictício país K, a identificação das placas dos veículos é constituída por duas das 26 letras do alfabeto e quatro algarismos de zero a nove, sendo que as duas letras devem sempre estar juntas, como nos exemplos abaixo.



A quantidade máxima de placas do país K que não possuem letras repetidas nem algarismos repetidos é igual a

- A 33.800.000.
- B 16.380.000.
- C 10.280.000.
- D 6.760.000.
- E 3.276.000.

97. (IADES 2019) Suponha que, no Conselho Federal de Farmácia, trabalhem 5 analistas de tecnologia da informação. Uma nova rede de computadores será projetada e implementada para modernização dos processos. Para tanto, será montada uma equipe com 4 analistas, sendo 2 responsáveis unicamente por projetar a rede e outros 2 responsáveis unicamente por instalar e configurar a rede.

Quantas equipes distintas podem ser formadas para a execução da tarefa?

- A 20
- B 40
- C 35
- D 30
- E 25

98. (IADES 2019) Geraldo tem 4 porta-arquivos de mesa de cores diferentes (azul, verde, amarelo e vermelho) para organizar os processos administrativos da própria repartição. Ele pretende colocar os porta-arquivos lado a lado sobre uma escrivaninha.

De quantas maneiras diferentes ele pode organizar esses porta-arquivos?

- A** 36
- B** 12
- C** 24
- D** 48
- E** 8

99. (IFMS 2019) A partir de 2018, o Brasil modificou o formato das placas de veículos; seguindo uma determinação acordada pelos países do Mercosul. A principal mudança está no padrão visual, que será sempre com fundo branco e uma faixa azul na parte superior. A sequência de letras e números também foi alterada. O sistema atual, com três letras e quatro números (BAF-0007), foi substituído por quatro letras e três números, conforme exemplos a seguir.



Fonte: <https://veja.abril.com.br/economia/novo-modelo-de-placa-de-carro-com-chip-comeca-a-valer-em-2018/>

Acesso em: 15/11/2018.

As alterações no sistema de emplacamento permitirão a criação de um cadastro veicular compartilhado pelos países do Mercosul, dificultando a falsificação de placas e aumentando a quantidade de placas possíveis de serem criadas. Admitindo-se todas as possibilidades placas atuais que começam com quatro letras e em seguida possuem três algarismos, a taxa de aumento em relação à quantidade possível de placas no sistema antigo é?

- A** 10 vezes mais placas.
- B** 26 vezes mais placas.
- C** 0,38461538 vezes mais placas.
- D** 2,6 vezes mais placas.
- E** O dobro de placas.

100. (UFGD 2016) Uma escola de samba tem seis carros alegóricos a serem apresentados em fila na avenida de uma cidade. A ordem de apresentação será decidida por uma comissão que avaliará todas as possíveis ordenações dos carros na fila.

Quantas ordenações diferentes são possíveis?

- A** 210.
- B** 360.
- C** 530.
- D** 660.
- E** 720.

101. (INAZ 2019) Um professor de Matemática, em sua primeira aula do ano, resolveu presentear dois alunos com um jogo de esquadros para usarem nas aulas de Geometria. Para isso, primeiro sorteou dez alunos e entre os dez, ganhariam aqueles que soubessem resolver a seguinte problemática proposta por ele: “De quantas maneiras eu posso escolher dois alunos entre vocês dez para presentear com o jogo de esquadro?”.

Quem foram os alunos que ganharam o presente?

- A** Ívila e Kaleu, que responderam: “45 maneiras”.
- B** Pedro e Miguel, que responderam: “60 maneiras”.
- C** Cris e Lucas, que responderam: “75 maneiras”.
- D** Gaspar e Hanna, que responderam: “90 maneiras”.
- E** Vitor e Jamilly, que responderam: “120 maneiras”.

102. Um restaurante serve três tipos de refeições executivas. De quantas maneiras um grupo de analistas pode comprar seis refeições executivas?

- A** 120
- B** 216
- C** 28
- D** 60
- E** 18

103. Uma equipe com seis analistas deve ser formada a partir de um grupo de dez analistas previdenciários (entre eles Marcos e Gabriel).

O número total de equipes que se pode formar, se Marcos e Gabriel devem necessariamente fazer parte, é:

- A** 60.
- B** 35.
- C** 70.
- D** 65.
- E** 90.

104. (FADESP 2018) Oito crianças são dispostas em duas rodas em salas A e B, cada roda com 4 [quatro] crianças.

O número de modos diferentes de dispor as 8 [oito] crianças é

- A** 40320.
- B** 70.
- C** 630.
- D** 2520.
- E** 5040.

105. (UERR 2018) Sabendo que cada anagrama da palavra IPERON é uma ordenação das letras I, P, E, R, O, N.

A probabilidade de ser sorteado um anagrama da palavra IPERON e se obter as três vogais separadas será:

- A** 1,25%.
- B** 0,25%.
- C** 10%.
- D** 12,5%.
- E** 25%.

106. (IFGO 2018) Num processo seletivo para o cargo de assistente administrativo de uma empresa multinacional, é necessário que o candidato faça um teste objetivo, respondendo a cinco questões, assinalando, para cada uma, uma única opção escolhida entre “sim”, “não” e “talvez”.

Dessa forma, de quantas maneiras distintas esse teste poderá ser respondido?

- A** 243 maneiras.
- B** 167 maneiras.
- C** 201 maneiras.
- D** 155 maneiras.

107. (UFES 2018) Uma estante de uma biblioteca contém 5 livros: V, W, X, Y e Z, que são arrumados do jeito usual, isto é, um ao lado do outro, em pé e com a lombada visível.

O número de maneiras possíveis de arrumá-los, de modo que os livros V e W fiquem sempre juntos, é

- A** 40
- B** 42
- C** 44
- D** 46
- E** 48

108. (CESPE 2018) Sete pessoas se dirigem para formar uma fila em frente ao único caixa de atendimento individual em uma agência bancária. Dessas sete pessoas, quatro são idosos. Um servidor da agência deverá organizar a fila de modo que os idosos sejam atendidos antes dos demais.

Nessa situação, a quantidade de maneiras distintas de se organizar a fila é igual a

- A** 5.040.
- B** 720.
- C** 576.
- D** 288.
- E** 144.

109. (CESPE 2018) Se 7 kg de feijão forem distribuídos para até quatro famílias, de modo que cada uma delas receba um número inteiro de quilos, então, nesse caso, a quantidade de maneiras distintas de se distribuírem esses 7 kg de feijão para essas famílias será igual a

- A** 30.
- B** 120.
- C** 330.
- D** 820.
- E** 1.320.

110. (IDECAN 2018) Para uma excursão ao museu, foram selecionados 8 meninos e 10 meninas. A coordenação da escola achou prudente formar uma comissão de liderança entre os estudantes selecionados, sendo que seriam escolhidos 2 meninos e 3 meninas.

Quantas comissões podem ser formadas?

- A** $A_{10,3} \cdot A_{8,2}$
- B** $A_{10,3} + A_{8,2}$
- C** $C_{10,3} \cdot C_{8,2}$
- D** $C_{10,3} + C_{8,2}$

111. (IDECAN 2018) Uma equipe mista de vôlei de quadra amador conta com um plantel de 15 jogadores, sendo 8 mulheres e 7 homens.

Considerando que todos os jogadores podem jogar em todas as posições, a quantidade de equipes distintas que se pode formar com exatamente 3 homens e 3 mulheres é de

- A** 1960.
- B** 1920.
- C** 1980.
- D** 1950.
- E** 1990.

112. (CPII) Abrão, Arão, Calebe, Davi, Eli, Isaque, Ismael e Israel são 8 irmãos. Eles têm um cofre em sua casa e decidiram criar uma senha para o cofre com 8 letras, utilizando a letra inicial de cada um de seus nomes, na quantidade exata em que aparecem. Por exemplo, AACDEIII e uma senha válida e ACDDEEII não o é.

O total de senhas distintas possíveis é

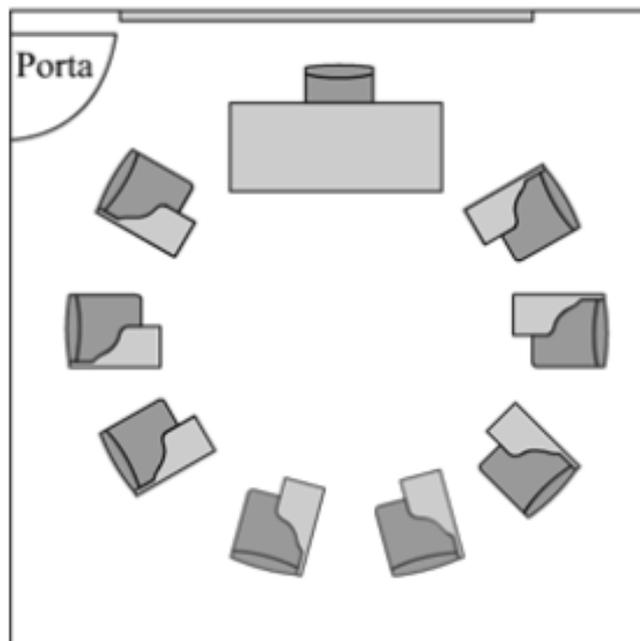
- A 1.680.
- B 3.360.
- C 6.720.
- D 40.320.

113. (UECE 2018) Os colaboradores de uma empresa são identificados com uma senha formada por três algarismos sendo exatamente dois destes algarismos iguais. Por exemplo: (003) e (030) são senhas diferentes.

O número de senhas que podem ser criadas é

- A 135.
- B 90.
- C 270.
- D 180.

114. (UFAL 2017) Para promover uma discussão com sete alunos e o tutor da disciplina, um professor arrumou a sala como mostra a figura.



Se o tutor sentar em uma cadeira ao lado da mesa do professor, de quantas formas distintas ele e os alunos podem ser distribuídos nas cadeiras a eles destinadas?

- A 5 040
- B 10 080
- C 40 320
- D 80 640
- E 181 440

115. (UFG 2016) Em um certo site da internet, qualquer link clicado pelo leitor sempre o conduz a outra página diferente das demais, que contém sempre dois links. Dependendo dos links que o leitor clicar, ele faz uma sequência de leitura diferente. Por exemplo, na página inicial, há os links “Viagens” e “Cultura”. Se ele clicar em “Cultura”, na próxima página encontrará os links “Comidas” e “Tradições”. Considere um leitor que, a partir da página inicial desse site, faz 10 cliques, sempre escolhendo um link de cada página.

Quantas sequências de leitura diferentes ele poderá fazer?

- A** 2^{10}
- B** 10^2
- C** 2.10
- D** 10

116. (FGV 2018) Helena entra em uma sorveteria que oferece sorvetes de 8 sabores diferentes. Helena deseja escolher uma casquinha com duas bolas de sorvete não necessariamente de sabores diferentes. A ordem em que as bolas forem colocadas na casquinha não fará a escolha de Helena ser diferente.

O número de maneiras de Helena escolher sua casquinha é

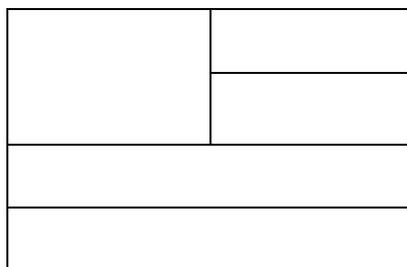
- A** 64.
- B** 56.
- C** 36.
- D** 28.
- E** 16.

117. (CPII 2017) Uma pizzaria oferece a seus clientes 8 sabores distintos, sendo 6 salgados e 2 doces, que podem ser utilizados numa mesma pizza. Um cliente pediu uma pizza de 4 sabores distintos, com apenas um deles doce.

A quantidade de maneiras distintas com que ele pode fazer o pedido é de

- A** 40.
- B** 80.
- C** 120.
- D** 240.

118. (FGV 2018) Manoel possui tintas de 5 cores diferentes e deve pintar a bandeira abaixo de forma que cada região será pintada com uma única cor e duas regiões vizinhas não podem ter a mesma cor.



O número de maneiras diferentes que Manoel pode pintar essa bandeira é

- A 120.
- B 180.
- C 240.
- D 360.
- E 720.

119. (Enem 2018) O Salão do Automóvel de São Paulo é um evento no qual vários fabricantes expõem seus modelos mais recentes de veículos, mostrando, principalmente, suas inovações em *design* e tecnologia.

Disponível em: <http://g1.globo.com>. Acesso em: 4 fev. 2015 (adaptado).

Uma montadora pretende participar desse evento com dois estandes, um na entrada e outro na região central do salão, expondo, em cada um deles, um carro compacto e uma caminhonete. Para compor os estandes, foram disponibilizados pela montadora quatro carros compactos, de modelos distintos, e seis caminhonetes de diferentes cores para serem escolhidos aqueles que serão expostos. A posição dos carros dentro de cada estande é irrelevante.

Uma expressão que fornece a quantidade de maneiras diferentes que os estandes podem ser compostos é

- A A_{10}^4
- B C_{10}^4
- C $C_4^2 \times C_6^2 \times 2 \times 2$
- D $A_4^2 \times A_6^2 \times 2 \times 2$
- E $C_4^2 \times C_6^2$

120. (Enem 2016) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro. Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

A $\frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!}$

B $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$

C $\frac{10!}{2! \times 8!} - 2$

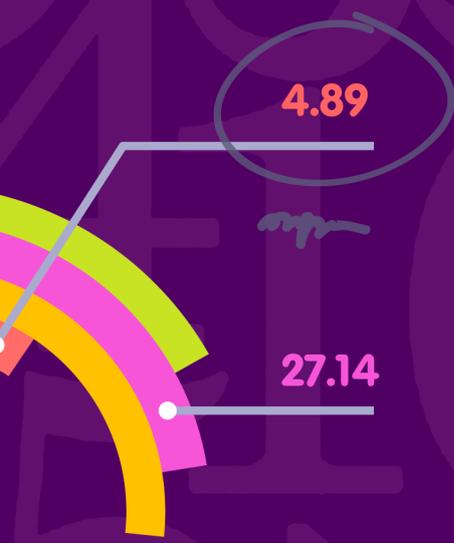
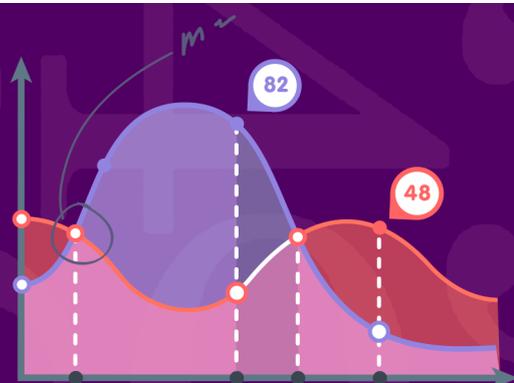
D $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$

E $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$

GABARITO - LISTA EXTRA

QUESTÃO	ALTERNATIVA
81	E
82	E
83	C
84	C
85	D
86	B
87	E
88	E
89	D
90	C
91	C
92	C
93	A
94	C
95	A
96	B
97	D
98	C
99	D
100	E
101	A
102	C
103	C
104	D
105	C
106	A
107	E
108	E
109	B
110	C
111	A
112	B
113	C
114	B
115	A
116	C
117	A
118	E
119	C
120	A

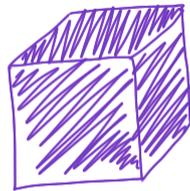
PROBABILIDADE



Antes de chegarmos ao conceito de PROBABILIDADE, precisamos conhecer um pouco sobre alguns termos imprescindíveis. Conversaremos, inicialmente, sobre dois tipos de experimentos, os determinísticos e os aleatórios.

EXPERIMENTOS DETERMINÍSTICOS

Você sabe o que são experimentos determinísticos?



Considere um cubo feito de madeira em que todas as faces são pintadas de roxo. Ao lançarmos esse cubo sobre uma mesa, qual será a cor da face voltada para cima? Com certeza a cor será roxo. Se todas as faces são roxas, não há outra possibilidade para o que vamos encontrar quando o cubo for lançado. Sendo assim, estamos diante de um experimento determinístico: sabemos exatamente qual será o resultado do nosso experimento. Só para descontrair um pouco, já viu experimento mais determinístico do que quando uma mãe fala alguma coisa? kkkk Sempre que ela fala, acaba acontecendo! Assim são os experimentos determinísticos, já sabemos tudo que vai acontecer, e antes mesmo de acontecer, já sabemos qual será o resultado do experimento!

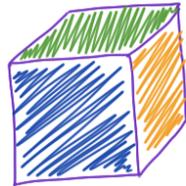
Um outro exemplo de experimento determinístico é uma moeda em que ambos os lados são “cara”, se você lançar a moeda, com certeza, ao olhar para a face voltada para cima você verá a “cara” e mesmo antes de lançar a moeda, você sabe que obterá uma cara.



○ **Experimento Determinístico** é aquele que sabemos exatamente qual será o resultado obtido no experimento.

EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS

Agora, imagine um cubo semelhante ao do exemplo anterior, mas dessa vez, duas faces opostas estão pintadas de azul, duas outras faces opostas pintadas de verde e finalmente, as duas faces opostas restantes pintadas de amarelo. Ao jogarmos esse cubo sobre a mesa, qual será a cor da face voltada para cima?



Bom, neste caso, sabemos quais são todas as possíveis cores que podemos obter, ou a face voltada para cima será verde ou será amarela ou será azul, mas não sabemos exatamente o resultado para o nosso experimento. Temos uma ideia do que é possível acontecer, mas não sabemos o que vai acontecer.

Suponha que na primeira vez que lançamos a cor da face voltada para cima foi azul, decidimos então lançar uma segunda vez e a cor foi azul novamente, lançamos uma terceira vez e surpreendentemente a cor foi azul de novo, fizemos isso por nove vezes e em todas as nove vezes a cor foi azul. Aí eu te pergunto e na décima vez? Qual será a cor? Ficamos tentados a responder azul, mas quem garante que no décimo lançamento teremos uma face azul voltada para cima mais uma vez? Continuamos com três possibilidades para a cor da face voltada para cima, mesmo nos nove lançamentos anteriores obtendo azul, o décimo lançamento pode nos fazer obter qualquer uma das cores: azul, verde ou amarelo.

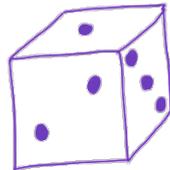
Sendo assim, o que é um experimento aleatório?

O **Experimento Aleatório** é aquele que mesmo sendo repetido sob as mesmas condições, do mesmo modo, não conseguimos ter a certeza absoluta do que será obtido como resultado para o experimento. Temos uma ideia do que é possível acontecer, mas não podemos garantir que será aquele resultado específico.

Apesar de não garantirmos qual será o resultado, no experimento aleatório, é possível elencar todos os possíveis resultados, os quais serão reunidos em um conjunto denominado Espaço Amostral.

Espaço amostral é o conjunto que reúne todos os possíveis resultados para um experimento aleatório.

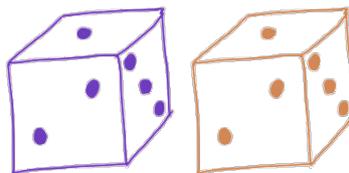
Por exemplo, se lançarmos um dado honesto, qual será o número que está na face voltada para cima?



Inicialmente, classificamos este experimento como sendo aleatório, uma vez que sabemos que a face voltada para cima poderá ser a que contém o número 1 ou a que contém o 2 ou o 3 ou o 4 ou o 5 ou o 6. Mas não sabemos com exatidão o número que vamos obter como resultado do experimento. Desse modo, dizemos que o Espaço Amostral (S) desse Experimento Aleatório tem seis elementos, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

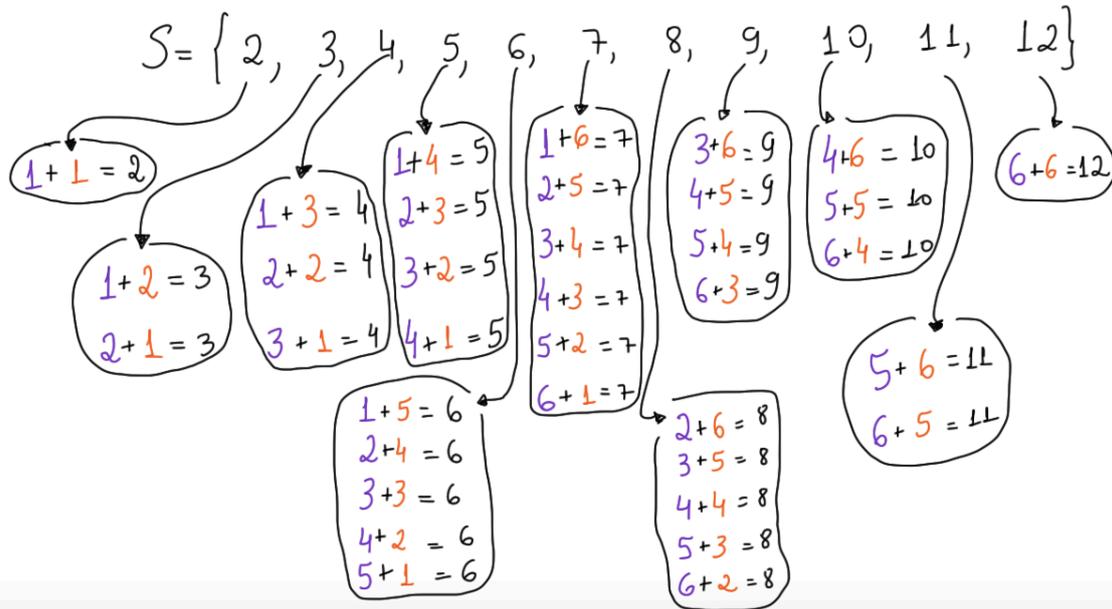
Nesse caso, dizemos que o Espaço Amostral é **equiprovável**, pois cada um dos seis resultados possíveis tem a mesma probabilidade de acontecer.

E se ao invés de lançarmos um único dado, lançarmos dois? Qual será a soma dos números encontrados nas faces voltadas para cima?



Mais uma vez, classificamos este experimento como sendo aleatório, sabemos quais são os resultados possíveis para a soma dos dois números, mas não podemos garantir o resultado que será obtido. O espaço amostral aqui será dado por $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, veja que a menor soma possível ($1 + 1 = 2$) será obtida quando no dado roxo, na face voltada para cima estiver o número 1 e no dado laranja, na face voltada para cima estiver o número 1. Analogamente, a maior soma possível ($6 + 6 = 12$) será obtida quando no dado roxo, na face voltada para cima estiver o número 6 e no dado laranja, na face voltada para cima estiver o número 6. Os demais casos serão intermediários.

Observe, no entanto, que o espaço amostral obtido com esse experimento **NÃO** é **equiprovável**. Ou seja, as somas não possuem sempre a mesma probabilidade de acontecer.



Como podemos ver, no esquema acima:

- A soma dois só pode ser obtida de 1 maneira;
- A soma três pode ser obtida de 2 maneiras;
- A soma quatro pode ser obtida de 3 maneiras;
- A soma cinco pode ser obtida de 4 maneiras;
- A soma seis pode ser obtida de 5 maneiras;
- A soma sete pode ser obtida de 6 maneiras;
- A soma oito pode ser obtida de 5 maneiras;
- A soma nove pode ser obtida de 4 maneiras;
- A soma dez pode ser obtida de 3 maneiras;
- A soma onze pode ser obtida de 2 maneiras;
- A soma doze só pode ser obtida de 1 maneira.

Assim a soma mais provável de ser obtida é a soma sete enquanto que as somas dois e dozes são as menos prováveis de ser obtidas. Daí, constata-se que no espaço amostral acima os elementos possuem diferentes probabilidades de acontecer.

Podemos transformar esse espaço amostral não equiprovável em um que é equiprovável, devemos procurar eventos que possuem a mesma probabilidade de ocorrer.

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); \\ (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); \\ (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); \\ (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6); \\ (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6); \\ (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6) \end{array} \right\}$$

Soma 2 *Soma 3* *Soma 4* *Soma 5* *Soma 6* *Soma 7*
Soma 8 *Soma 9* *Soma 10* *Soma 11* *Soma 12*

Esse novo espaço amostral possui 36 elementos e cada um deles tem a mesma probabilidade de acontecer. Sair (1, 1) tem a mesma probabilidade de sair (6, 3). Sair a soma 2 não tem a mesma probabilidade de sair a soma 9.

É importante perceber a diferença entre espaços amostrais equiprováveis e espaços amostrais não equiprováveis, já que o conceito de probabilidade é estabelecido primordialmente sobre espaços amostrais equiprováveis!

EVENTO

Popularmente dizemos que evento é o que queremos que aconteça em um experimento aleatório, matematicamente, evento é um subconjunto do espaço amostral. Para tanto, selecionamos alguns elementos do espaço amostral e formamos um novo conjunto, chamado evento.

Se quisermos obter a soma 5 com os números das faces voltadas para cima no lançamento dos dois dados, precisamos selecionar os resultados cuja soma dá 5 no espaço amostral para criarmos o evento:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); \\ (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); \\ (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); \\ (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6); \\ (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6); \\ (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6) \end{array} \right\}$$

Sendo assim, o Evento (E) possuirá 4 elementos e será dado por $E = \{(1, 4); (2, 3); (3, 2); (4, 1)\}$.

PROBABILIDADE

Mas e aí? Qual o conceito de probabilidade?

Dizemos que a PROBABILIDADE de um evento ocorrer nada mais é do que a divisão da quantidade de elementos que o conjunto EVENTO possui pela quantidade de elementos que o conjunto ESPAÇO AMOSTRAL possui, desde que o espaço amostral seja equiprovável. Podemos dizer também que a probabilidade é dada pela razão entre a quantidade de casos favoráveis pela quantidade de casos possíveis, sempre em espaços amostrais equiprováveis.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Probabilidade de um evento ocorrer (pointing to $P(E)$)
número de elementos do conjunto evento (pointing to $n(E)$) ↔ *Casos favoráveis*
número de elementos do espaço amostral equiprovável (pointing to $n(S)$) ↔ *Casos possíveis*

No exemplo que estamos abordando, qual a probabilidade da soma dos números contidos nas faces voltadas para cima dos dois dados lançados ser 5?

Analisando o espaço amostral equiprovável gerado pelo experimento aleatório, vemos que estamos diante de 36 elementos equiprováveis, dentre os quais, quatro compõem o evento:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); \\ (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); \\ (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); \\ (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6); \\ (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6); \\ (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6) \end{array} \right\}$$

Sendo assim, a probabilidade da soma dos números contidos nas faces voltadas para cima dos dois dados lançados ser 5 será dada por:

$$P(\text{soma } 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \cong 0,1111 = 11,11\%$$

Quando a probabilidade de um evento acontecer é de 0%, dizemos que o evento é impossível de acontecer. Por outro lado, quando a probabilidade de um evento ocorrer é de 100%, dizemos que o evento é certo. A probabilidade de um evento acontecer deve estar sempre entre 0% e 100% inclusive, não existem probabilidades negativas nem probabilidades maiores que 100%.

PROBABILIDADE DE UM EVENTO COMPLEMENTAR

Dizemos que dois eventos disjuntos A e A' são complementares quando a soma da probabilidade de A acontecer com a probabilidade de A' acontecer é igual a 100%. (Lembre-se que $100\% = 100/100 = 1$).

$$P(A) + P(A') = 1$$

ou

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Vejamos um exemplo em que inicialmente usaremos a definição clássica de probabilidade e em seguida usaremos a probabilidade de um evento complementar...

Qual a probabilidade de no lançamento de um dado honesto não sair o número 5?

O espaço amostral equiprovável para esse experimento aleatório será $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, com seis elementos, ou ainda, seis casos possíveis.

O evento será $E = S = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, com cinco elementos, ou ainda, cinco casos favoráveis.

A probabilidade de não sair o número 5 será dada por:

$$P(\text{não sair cinco}) = \frac{5}{6}$$

Essa probabilidade poderia ter sido encontrado através do conceito de eventos complementares, ou seja, a probabilidade de não sair o número cinco é 100% menos a probabilidade de sair o número cinco.

$$P(\text{não sair cinco}) = 1 - P(\text{sair cinco})$$

$$P(\text{não sair cinco}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

Na probabilidade condicional, devemos atentar para o espaço amostral que é alterado à medida que algumas condições são impostas. Sendo assim, a probabilidade do evento ocorrer vai sendo modificada de acordo com essas condições.

Por exemplo, qual a probabilidade de no lançamento de um dado sair o número 3, sabendo que o número que está na face voltada para cima é ímpar?

Inicialmente, pensamos que o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tendo seis elementos, o que não é verdade, uma vez que sabemos que o número da face voltada para cima é ímpar. Essa condição imposta restringe o espaço amostral para $S' = \{1, 3, 5\}$ passando a ter apenas três elementos e o evento é $E = \{3\}$. Desse modo, a probabilidade de no lançamento de um dado sair o número 3, sabendo que o número da face voltada para cima já é ímpar será dada por:

$$P(3|\text{ímpar}) = \frac{1}{3}$$

Você deve ter estranhado a notação que utilizamos $P(A|B)$, mas ela significa a probabilidade de um evento A acontecer, dado que um B já ocorreu. No nosso exemplo, A é sair o número 3 e B é sair um número ímpar. A probabilidade de sair o número 3, sabendo que o número que saiu é ímpar é $1/3$.

PROBABILIDADE DE EVENTOS INDEPENDENTES

Dizemos que dois eventos A e B são independentes, quando a probabilidade de A ocorrer não depende, nem é alterada pela ocorrência de B. Sendo assim, a probabilidade de que A e B aconteçam é dada pela multiplicação de suas probabilidades individuais:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$$

Qual a probabilidade de ao lançarmos dois dados, no dado roxo sair o número 2 e no dado laranja sair o número 5?

A probabilidade de sair o número 2 no roxo é de $1/6$ e ela não interfere nem é interferida pela probabilidade de sair o número 5 no laranja que é de $1/6$, daí a probabilidade de que no dado roxo saia o número 2 e no dado laranja saia o número 5 é de $1/36$:

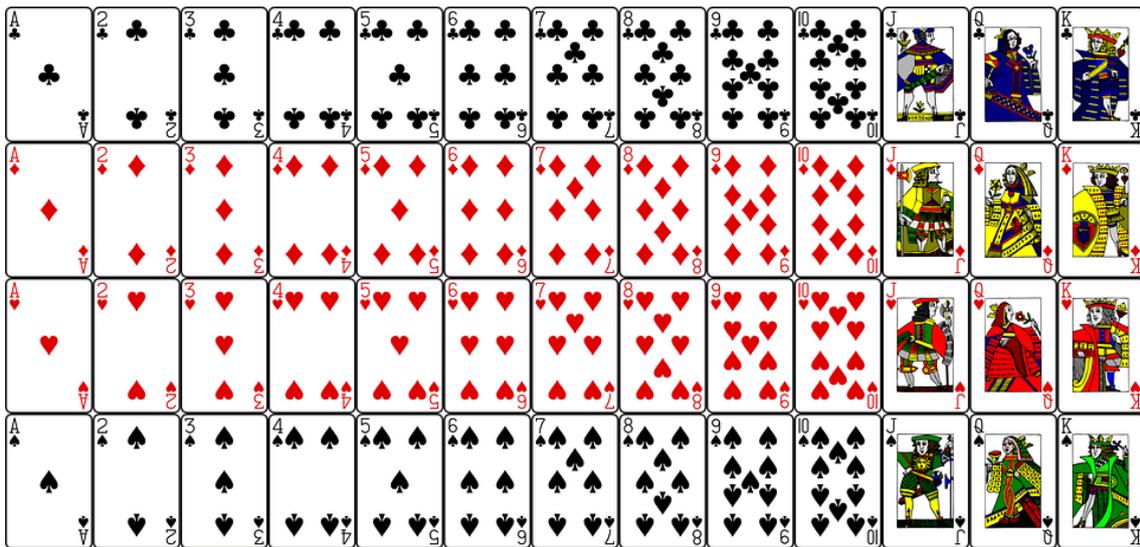
$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

PROBABILIDADE DA UNIÃO DE EVENTOS

Quando existem elementos comuns a dois eventos A e B, eles são contabilizados tanto na probabilidade de A acontecer, quanto na probabilidade de B acontecer, por isso, quando queremos calcular a probabilidade de A ou B acontecer, precisamos subtrair a probabilidade da interseção para que ela não seja contabilizada duas vezes. Vimos uma situação bem semelhante em conjuntos, ocasião em que utilizamos a técnica do BOTA e TIRA. Bota a probabilidade de A, bota a probabilidade de B e retira a probabilidade de interseção de A e B.

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$

Qual a probabilidade de retirarmos uma carta de um baralho e ela ser um A ou uma carta de copas?



Um baralho tem 52 cartas, ou seja, o espaço amostral tem 52 elementos.

Seja A o evento sair um A, temos quatro possibilidades para o evento: A de paus, A de ouros, A de copas e A de espadas, logo $P(A) = 4/52$. Agora, seja C o evento sair uma carta de copas, temos 13 possibilidades, logo $P(C) = 13/52$. Na interseção desses eventos, existe apenas o A de Copas, logo $P(A \text{ e } C) = 1/52$. Daí,

$$P(A \text{ ou } C) = P(A) + P(C) - P(A \text{ e } C)$$

$$P(A \text{ ou } C) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52}$$

$$P(A \text{ ou } C) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \cong 0,3077 = 30,77\%$$

PROBABILIDADE BINOMIAL

Fernando pratica tiro esportivo e acerta o alvo em 90% dos tiros que desfere. Ele atirá ao alvo 3 vezes. Assuma que os resultados dos três tiros são independentes entre si.

Qual a probabilidade de acertar o alvo em exatamente 2 dos 3 tiros?

Para pensar nesse problema, vamos dividi-lo em pequenas partes:

Se ele acertar 2 vezes o alvo, quantos tiros significa que ele precisa errar? Ele precisa errar 1 tiro!

Qual a probabilidade de ele acertar os dois primeiros tiros e errar o terceiro?

$$P(\text{acertar, acertar, errar}) = 0,9 \times 0,9 \times 0,1 = 0,081 = 8,1\%$$

Observe que “Acerto, acerto, erro” não é a única maneira que Fernando pode acertar 2 tiros em 3 tentativas.

Qual a probabilidade de ele acertar o primeiro tiro, errar o segundo e, em seguida, acertar o terceiro?

$$P(\text{acertar, errar, acertar}) = 0,9 \times 0,1 \times 0,9 = 0,081 = 8,1\%$$

Perceba que Fernando também poderia acertar 2 tiros se seus resultados fossem “erro, acerto, acerto”.

Qual a probabilidade de ele errar o primeiro tiro e acertar os seus próximos 2 tiros?

$$P(\text{errar, acertar, acertar}) = 0,1 \times 0,9 \times 0,9 = 0,081 = 8,1\%$$

Perceba que a quantidade de possibilidades de acertar exatamente 2 tiros dentre os 3 é dada por uma permutação com repetição:

$$N^{\circ} \text{ de possibilidades} = \frac{3!}{2!1!} = 3 \text{ que são (AAE, AEA, EAA).}$$

3! Refere-se ao total de experimentos, 2! à quantidade de acertos e 1! à quantidade de erros.

Reunindo as informações obtidas, teremos que a probabilidade de acertar 2 dos 3 tiros é

$$P(\text{acertar 2 dos 3}) = P(A, A, E) + P(A, E, A) + P(E, A, A)$$

$$P(\text{acertar 2 dos 3}) = 0,9 \times 0,9 \times 0,1 + 0,9 \times 0,1 \times 0,9 + 0,1 \times 0,9 \times 0,9$$

$$P(\text{acertar 2 dos 3}) = 3 \times (0,9)^2 \times (0,1)^1$$

$$P(\text{acertar 2 dos 3}) = 0,243 = 24,3\%$$

Generalizando, a partir do problema anterior, vimos que ordens diferentes do mesmo resultado têm a mesma probabilidade, sendo assim, podemos construir uma fórmula para esse tipo de problema, que é chamado de modelo binomial. Um problema de probabilidade binomial tem as seguintes características:

- Um número fixo de experimentos;
- Cada experimento deve ser classificado como “sucesso” ou “fracasso”;
- A probabilidade de obter sucesso é a mesma para cada experimento;
- Os resultados para cada experimento são independentes entre si.

Sendo assim, a nossa estratégia para montar a expressão que nos permite calcular uma probabilidade binomial será:

$$P \left(\begin{array}{l} \text{obter exatamente} \\ s \text{ sucessos e} \\ f \text{ fracassos em } n \\ \text{experimentos} \end{array} \right) = \frac{n!}{s! f!} \times \left(\begin{array}{l} \text{probabilidade} \\ \text{de sucesso} \end{array} \right)^s \times \left(\begin{array}{l} \text{probabilidade} \\ \text{de fracasso} \end{array} \right)^f$$

Tomando como base o exemplo anterior, são 3 experimentos (tiros), acertar o alvo é o sucesso, que tem probabilidade de 90% e errar o alvo é o fracasso, que tem probabilidade de 10%, como Fernando que acertar exatamente 2 tiros, ele irá errar 1, logo, $s = 2$ e $f = 1$, montando a expressão, teríamos:

$$P(\text{acertar 2 e errar 1}) = \frac{3!}{2! 1!} \times (0,9)^2 \times (0,1)^1$$

$$P(\text{acertar 2 e errar 1}) = 3 \times 0,81 \times 0,1$$

$$P(\text{acertar 2 e errar 1}) = 0,243$$

$$P(\text{acertar 2 e errar 1}) = 24,3\%$$

Vamos praticar?

1. (Enem 2018) Para ganhar um prêmio, uma pessoa deverá retirar, sucessivamente e sem reposição, duas bolas pretas de uma mesma urna.

Inicialmente, as quantidades e cores das bolas são como descritas a seguir:

- Urna A – Possui três bolas brancas, duas bolas pretas e uma bola verde;
- Urna B – Possui seis bolas brancas, três bolas pretas e uma bola verde;
- Urna C – Possui duas bolas pretas e duas bolas verdes;
- Urna D – Possui três bolas brancas e três bolas pretas.

A pessoa deve escolher uma entre as cinco opções apresentadas:

- Opção 1 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 2 – Retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna B;
- Opção 3 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna A; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna A;
- Opção 4 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna D para a urna C; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna C;
- Opção 5 – Passar, aleatoriamente, uma bola da urna C para a urna D; após isso, retirar, aleatoriamente, duas bolas da urna D.

Com o objetivo de obter a maior probabilidade possível de ganhar o prêmio, a pessoa deve escolher a opção

- A** 1.
- B** 2.
- C** 3.
- D** 4.
- E** 5.

2. (Enem 2018) Um rapaz estuda em uma escola que fica longe de sua casa, e por isso precisa utilizar o transporte público. Como é muito observador, todos os dias ele anota a hora exata (sem considerar os segundos) em que o ônibus passa pelo ponto de espera. Também notou que nunca consegue chegar ao ponto de ônibus antes de 6h15min da manhã. Analisando os dados coletados durante o mês de fevereiro, o qual teve 21 dias letivos, ele concluiu que 6h21min foi o que mais se repetiu, e que a mediana do conjunto de dados é 6h22min.

A probabilidade de que, em algum dos dias letivos de fevereiro, esse rapaz tenha apanhado o ônibus antes de 6h21min da manhã é, no máximo,

- A** $\frac{4}{21}$
- B** $\frac{5}{21}$
- C** $\frac{6}{21}$
- D** $\frac{7}{21}$
- E** $\frac{8}{21}$

3. (Enem PPL 2018) O gerente de uma empresa sabe que 70% de seus funcionários são do sexo masculino e foi informado de que a porcentagem de empregados fumantes nessa empresa é de 5% dos homens e de 5% das mulheres. Selecionando, ao acaso, a ficha de cadastro de um dos funcionários, verificou tratar-se de um fumante.

Qual a probabilidade de esse funcionário ser do sexo feminino?

- A** 50,0%
- B** 30,0%
- C** 16,7%
- D** 5,0%
- E** 1,5%

4. (Enem 2018) O salto ornamental é um esporte em que cada competidor realiza seis saltos. A nota em cada salto é calculada pela soma das notas dos juízes, multiplicada pela nota de partida (o grau de dificuldade de cada salto). Fica em primeiro lugar o atleta que obtiver a maior soma das seis notas recebidas. O atleta 10 irá realizar o último salto da final. Ele observa no Quadro 1, antes de executar o salto, o recorte do quadro parcial de notas com a sua classificação e a dos três primeiros lugares até aquele momento.

Quadro 1

Classificação	Atleta	6° Salto	Total
1°	3	135,0	829,0
2°	4	140,0	825,2
3°	8	140,4	824,2
6°	10		687,5

Ele precisa decidir com seu treinador qual salto deverá realizar. Os dados dos possíveis tipos de salto estão no Quadro 2.

Quadro 2

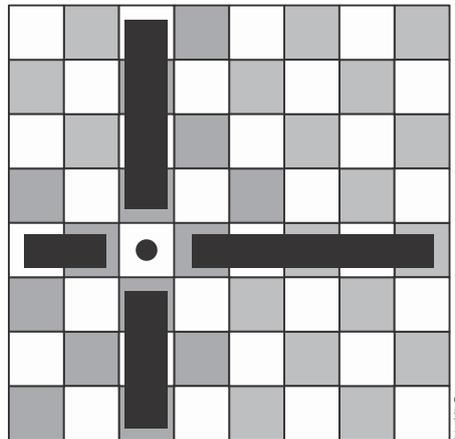
Tipo de salto	Nota de partida	Estimativa da soma das notas dos juízes	Probabilidade de obter a nota
T1	2,2	57	89,76%
T2	2,4	58	93,74%
T3	2,6	55	91,88%
T4	2,8	50	95,38%
T5	3,0	53	87,34%

O atleta optará pelo salto com a maior probabilidade de obter a nota estimada, de maneira que lhe permita alcançar o primeiro lugar.

Considerando essas condições, o salto que o atleta deverá escolher é o de tipo

- A** T1.
- B** T2.
- C** T3.
- D** T4.
- E** T5.

5. (Enem 2018) Um **designer** de jogos planeja um jogo que faz uso de um tabuleiro de dimensão $n \times n$, com $n \geq 2$, no qual cada jogador, na sua vez, coloca uma peça sobre uma das casas vazias do tabuleiro. Quando uma peça é posicionada, a região formada pelas casas que estão na mesma linha ou coluna dessa peça é chamada de zona de combate dessa peça. Na figura está ilustrada a zona de combate de uma peça colocada em uma das casas de um tabuleiro de dimensão 8×8 .



O tabuleiro deve ser dimensionado de forma que a probabilidade de se posicionar a segunda peça aleatoriamente, seguindo a regra do jogo, e esta ficar sobre a zona de combate da primeira, seja inferior a $\frac{1}{5}$.

A dimensão mínima que o designer deve adotar para esse tabuleiro é

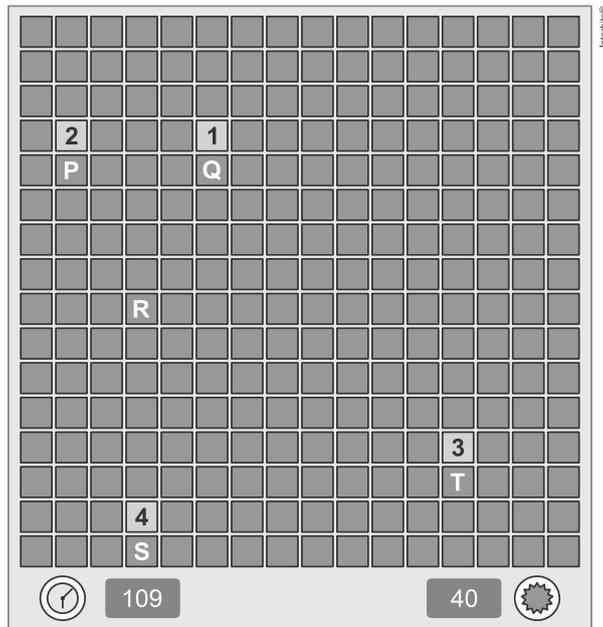
- A** 4×4 .
- B** 6×6 .
- C** 9×9 .
- D** 10×10 .
- E** 11×11 .

6. (Enem PPL 2018) Uma senhora acaba de fazer uma ultrassonografia e descobre que está grávida de quadrigêmeos.

Qual é a probabilidade de nascerem dois meninos e duas meninas?

- A** $\frac{1}{16}$
- B** $\frac{3}{16}$
- C** $\frac{1}{4}$
- D** $\frac{3}{8}$
- E** $\frac{1}{2}$

7. (Enem 2017) A figura ilustra uma partida de Campo Minado, o jogo presente em praticamente todo computador pessoal. Quatro quadrados em um tabuleiro 16×16 foram abertos, e os números em suas faces indicam quantos dos seus 8 vizinhos contêm minas (a serem evitadas). O número 40 no canto inferior direito é o número total de minas no tabuleiro, cujas posições foram escolhidas ao acaso, de forma uniforme, antes de se abrir qualquer quadrado.



Em sua próxima jogada, o jogador deve escolher dentre os quadrados marcados com as letras P, Q, R, S e T um para abrir, sendo que deve escolher aquele com a menor probabilidade de conter uma mina.

O jogador deverá abrir o quadrado marcado com a letra

- A** P.
- B** Q.
- C** R.
- D** S.
- E** T.

8. (Enem 2017) Um morador de uma região metropolitana tem 50% de probabilidade de atrasar-se para o trabalho quando chove na região; caso não chova, sua probabilidade de atraso é de 25%. Para um determinado dia, o serviço de meteorologia estima em 30% a probabilidade da ocorrência de chuva nessa região.

Qual é a probabilidade de esse morador se atrasar para o serviço no dia para o qual foi dada a estimativa de chuva?

- A** 0,075
- B** 0,150
- C** 0,325
- D** 0,600
- E** 0,800

9. (Enem (Libras) 2017) Um laboratório está desenvolvendo um teste rápido para detectar a presença de determinado vírus na saliva. Para conhecer a acurácia do teste é necessário avaliá-lo em indivíduos sabidamente doentes e nos saudáveis. A acurácia de um teste é dada pela capacidade de reconhecer os verdadeiros positivos (presença de vírus) e os verdadeiros negativos (ausência de vírus). A probabilidade de o teste reconhecer os verdadeiros negativos é denominada especificidade, definida pela probabilidade de o teste resultar negativo, dado que o indivíduo é saudável. O laboratório realizou um estudo com 150 indivíduos e os resultados estão no quadro.

Resultado do teste da saliva	Doentes	Saudáveis	Total
Positivo	57	10	67
Negativo	3	80	83
Total	60	90	150

Considerando os resultados apresentados no quadro, a especificidade do teste da saliva tem valor igual a

- A** 0,11.
- B** 0,15.
- C** 0,60.
- D** 0,89.
- E** 0,96.

10. (Enem PPL 2017) Um programa de televisão criou um perfil em uma rede social, e a ideia era que esse perfil fosse sorteado para um dos seguidores, quando esses fossem em número de um milhão. Agora que essa quantidade de seguidores foi atingida, os organizadores perceberam que apenas 80% deles são realmente fãs do programa. Por conta disso, resolveram que todos os seguidores farão um teste, com perguntas objetivas referentes ao programa, e só poderão participar do sorteio aqueles que forem aprovados. Estatísticas revelam que, num teste dessa natureza, a taxa de aprovação é de 90% dos fãs e de 15% dos que não são fãs.

De acordo com essas informações, a razão entre a probabilidade de que um fã seja sorteado e a probabilidade de que o sorteado seja alguém que não é fã do programa é igual a

- A** 1.
- B** 4.
- C** 6.
- D** 24.
- E** 96.

11. (Enem 2017) Numa avenida existem 10 semáforos. Por causa de uma pane no sistema, os semáforos ficaram sem controle durante uma hora, e fixaram suas luzes unicamente em verde ou vermelho. Os semáforos funcionam de forma independente; a probabilidade de acusar a cor verde é de $\frac{2}{3}$ e a de acusar a cor vermelha é de $\frac{1}{3}$. Uma pessoa percorreu a pé toda essa avenida durante o período da pane, observando a cor da luz de cada um desses semáforos.

Qual a probabilidade de que esta pessoa tenha observado exatamente um sinal na cor verde?

- A $\frac{10 \times 2}{3^{10}}$
- B $\frac{10 \times 2^9}{3^{10}}$
- C $\frac{2^{10}}{3^{100}}$
- D $\frac{2^{90}}{3^{100}}$
- E $\frac{2}{3^{10}}$

12. (Enem (Libras) 2017) Um projeto para incentivar a reciclagem de lixo de um condomínio conta com a participação de um grupo de moradores, entre crianças, adolescentes e adultos, conforme dados do quadro.

Participantes	Número de pessoas
Crianças	x
Adolescentes	5
Adultos	10

Uma pessoa desse grupo foi escolhida aleatoriamente para falar do projeto. Sabe-se que a probabilidade de a pessoa escolhida ser uma criança é igual a dois terços.

Diante disso, o número de crianças que participa desse projeto é

- A 6.
- B 9.
- C 10.
- D 30.
- E 45.

13. (Enem PPL 2017) Uma aluna estuda numa turma de 40 alunos. Em um dia, essa turma foi dividida em três salas, A, B e C, de acordo com a capacidade das salas. Na sala A ficaram 10 alunos, na B, outros 12 alunos e na C, 18 alunos. Será feito um sorteio no qual, primeiro, será sorteada uma sala e, posteriormente, será sorteado um aluno dessa sala.

Qual é a probabilidade de aquela aluna específica ser sorteada, sabendo que ela está na sala C?

- A $\frac{1}{3}$
- B $\frac{1}{18}$
- C $\frac{1}{40}$
- D $\frac{1}{54}$
- E $\frac{7}{18}$

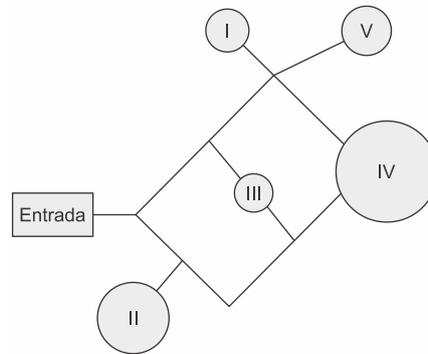
14. (Enem PPL 2016) O quadro apresenta cinco cidades de um estado, com seus respectivos números de habitantes e quantidade de pessoas infectadas com o vírus da gripe. Sabe-se que o governo desse estado destinará recursos financeiros a cada cidade, em valores proporcionais à probabilidade de uma pessoa, escolhida ao acaso na cidade, estar infectada.

Cidade	I	II	III	IV	V
Habitantes	180.000	100.000	110.000	165.000	175.000
Infectados	7.800	7.500	9.000	6.500	11.000

Qual dessas cidades receberá maior valor de recursos financeiros?

- A I
- B II
- C III
- D IV
- E V

15. (Enem 2016) Um adolescente vai a um parque de diversões tendo, prioritariamente, o desejo de ir a um brinquedo que se encontra na área IV, dentre as áreas I, II, III, IV e V existentes. O esquema ilustra o mapa do parque, com a localização da entrada, das cinco áreas com os brinquedos disponíveis e dos possíveis caminhos para se chegar a cada área. O adolescente não tem conhecimento do mapa do parque e decide ir caminhando da entrada até chegar à área IV.



Suponha que relativamente a cada ramificação, as opções existentes de percurso pelos caminhos apresentem iguais probabilidades de escolha, que a caminhada foi feita escolhendo ao acaso os caminhos existentes e que, ao tomar um caminho que chegue a uma área distinta da IV, o adolescente necessariamente passa por ela ou retorna.

Nessas condições, a probabilidade de ele chegar à área IV sem passar por outras áreas e sem retornar é igual a

- A** $\frac{1}{96}$
- B** $\frac{1}{64}$
- C** $\frac{5}{24}$
- D** $\frac{1}{4}$
- E** $\frac{5}{12}$

16. (Enem 2ª aplicação 2016) Um casal, ambos com 30 anos de idade, pretende fazer um plano de previdência privada. A seguradora pesquisada, para definir o valor do recolhimento mensal, estima a probabilidade de que pelo menos um deles esteja vivo daqui a 50 anos, tomando por base dados da população, que indicam que 20% dos homens e 30% das mulheres de hoje alcançarão a idade de 80 anos.

Qual é essa probabilidade?

- A** 50%
- B** 44%
- C** 38%
- D** 25%
- E** 6%

17. (Enem PPL 2016) Em um campeonato de futebol, a vitória vale 3 pontos, o empate 1 ponto e a derrota zero ponto. Ganha o campeonato o time que tiver maior número de pontos. Em caso de empate no total de pontos, os times são declarados vencedores.

Os times R e S são os únicos com chance de ganhar o campeonato, pois ambos possuem 68 pontos e estão muito à frente dos outros times. No entanto, R e S não se enfrentarão na rodada final.

Os especialistas em futebol arriscam as seguintes probabilidades para os jogos da última rodada:

- R tem 80% de chance de ganhar e 15% de empatar;
- S tem 40% de chance de ganhar e 20% de empatar.

Segundo as informações dos especialistas em futebol, qual é a probabilidade de o time R ser o único vencedor do campeonato?

- A** 32%
- B** 38%
- C** 48%
- D** 54%
- E** 57%

18. (Enem 2ª aplicação 2016) Uma caixa contém uma cédula de R\$ 5,00, uma de R\$ 20,00 e duas de R\$ 50,00 de modelos diferentes. Retira-se aleatoriamente uma cédula dessa caixa, anota-se o seu valor e devolve-se a cédula à caixa. Em seguida, repete-se o procedimento anterior.

A probabilidade de que a soma dos valores anotados seja pelo menos igual a R\$ 55,00 é

- A** $\frac{1}{2}$
- B** $\frac{1}{4}$
- C** $\frac{3}{4}$
- D** $\frac{2}{9}$
- E** $\frac{5}{9}$

19. (Enem 2015) Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

- A $\frac{1}{100}$
- B $\frac{19}{100}$
- C $\frac{20}{100}$
- D $\frac{21}{100}$
- E $\frac{80}{100}$

20. (Enem PPL 2015) Um protocolo tem como objetivo firmar acordos e discussões internacionais para conjuntamente estabelecer metas de redução de emissão de gases de efeito estufa na atmosfera. O quadro mostra alguns dos países que assinaram o protocolo, organizados de acordo com o continente ao qual pertencem.

Países da América do Norte	Países da Ásia
Estados Unidos da América	China
Canadá	Índia
México	Japão

Em um dos acordos firmados, ao final do ano, dois dos países relacionados serão escolhidos aleatoriamente, um após o outro, para verificar se as metas de redução do protocolo estão sendo praticadas.

A probabilidade de o primeiro país escolhido pertencer à América do Norte e o segundo pertencer ao continente asiático é

- A $\frac{1}{9}$
- B $\frac{1}{4}$
- C $\frac{3}{10}$
- D $\frac{2}{3}$
- E 1

21. (Enem 2015) Em uma escola, a probabilidade de um aluno compreender e falar inglês é de 30%. Três alunos dessa escola, que estão em fase final de seleção de intercâmbio, aguardam, em uma sala, serem chamados para uma entrevista. Mas, ao invés de chamá-los um a um, o entrevistador entra na sala e faz, oralmente, uma pergunta em inglês que pode ser respondida por qualquer um dos alunos.

A probabilidade de o entrevistador ser entendido e ter sua pergunta oralmente respondida em inglês é

- A** 23,7%
- B** 30,0%
- C** 44,1%
- D** 65,7%
- E** 90,0%

22. (Enem 2015) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância proibida.

Os organizadores, então, decidiram fazer um exame **antidoping**. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:

Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;

Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;

Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.

Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que $P(I)$, $P(II)$ e $P(III)$ sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida seja um dos escolhidos para o exame no caso do sorteio ser feito pelo modo I, II ou III.

Comparando-se essas probabilidades, obtém-se

- A** $P(I) < P(III) < P(II)$
- B** $P(II) < P(I) < P(III)$
- C** $P(I) < P(II) = P(III)$
- D** $P(I) = P(II) < P(III)$
- E** $P(I) = P(II) = P(III)$

23. (Enem PPL 2015) No próximo final de semana, um grupo de alunos participará de uma aula de campo. Em dias chuvosos, aulas de campo não podem ser realizadas. A ideia é que essa aula seja no sábado, mas, se estiver chovendo no sábado, a aula será adiada para o domingo. Segundo a meteorologia, a probabilidade de chover no sábado é de 30% e a de chover no domingo é de 25%.

A probabilidade de que a aula de campo ocorra no domingo é de

- A** 5,0%
- B** 7,5%
- C** 22,5%
- D** 30,0%
- E** 75,0%

24. (Enem 2015) O HPV é uma doença sexualmente transmissível. Uma vacina com eficácia de 98% foi criada com o objetivo de prevenir a infecção por HPV e, dessa forma, reduzir o número de pessoas que venham a desenvolver câncer de colo de útero. Uma campanha de vacinação foi lançada em 2014 pelo SUS, para um público-alvo de meninas de 11 a 13 anos de idade. Considera-se que, em uma população não vacinada, o HPV acomete 50% desse público ao longo de suas vidas. Em certo município, a equipe coordenadora da campanha decidiu vacinar meninas entre 11 e 13 anos de idade em quantidade suficiente para que a probabilidade de uma menina nessa faixa etária, escolhida ao acaso, vir a desenvolver essa doença seja, no máximo, de 5,9%. Houve cinco propostas de cobertura, de modo a atingir essa meta:

Proposta I: vacinação de 90% do público-alvo.

Proposta II: vacinação de 55,8% do público-alvo.

Proposta III: vacinação de 88,2% do público-alvo.

Proposta IV: vacinação de 49% do público-alvo.

Proposta V: vacinação de 95,9% do público-alvo.

Para diminuir os custos, a proposta escolhida deveria ser também aquela que vacinasse a menor quantidade possível de pessoas.

Disponível em: www.virus HPV.com.br. Acesso em: 30 ago. 2014 (adaptado)

A proposta implementada foi a de número

- A** I.
- B** II.
- C** III.
- D** IV.
- E** V.

25. (Enem PPL 2015) Um bairro residencial tem cinco mil moradores, dos quais mil são classificados como vegetarianos. Entre os vegetarianos, 40% são esportistas, enquanto que, entre os não vegetarianos, essa porcentagem cai para 20%. Uma pessoa desse bairro, escolhida ao acaso, é esportista.

A probabilidade de ela ser vegetariana é

- A** $\frac{2}{25}$
- B** $\frac{1}{5}$
- C** $\frac{1}{4}$
- D** $\frac{1}{3}$
- E** $\frac{5}{6}$

26. (Enem 2014) O psicólogo de uma empresa aplica um teste para analisar a aptidão de um candidato a determinado cargo. O teste consiste em uma série de perguntas cujas respostas devem ser verdadeiro ou falso e termina quando o psicólogo fizer a décima pergunta ou quando o candidato der a segunda resposta errada. Com base em testes anteriores, o psicólogo sabe que a probabilidade de o candidato errar uma resposta é 0,20.

A probabilidade de o teste terminar na quinta pergunta é

- A** 0,02048.
- B** 0,08192.
- C** 0,24000.
- D** 0,40960.
- E** 0,49152.

27. (Enem PPL 2014) A probabilidade de um empregado permanecer em uma dada empresa particular por 10 anos ou mais é de $\frac{1}{6}$. Um homem e uma mulher começam a trabalhar nessa companhia no mesmo dia. Suponha que não haja nenhuma relação entre o trabalho dele e o dela, de modo que seus tempos de permanência na firma são independentes entre si.

A probabilidade de ambos, homem e mulher, permanecerem nessa empresa por menos de 10 anos é de

- A** $\frac{60}{36}$
- B** $\frac{25}{36}$
- C** $\frac{24}{36}$
- D** $\frac{12}{36}$
- E** $\frac{1}{36}$

28. (Enem 2014) Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1. Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
2. Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
3. Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
4. Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do Teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. *Epidemiologia*: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de

- A** 47,5%
- B** 85,0%
- C** 86,3%
- D** 94,4%
- E** 95,0%

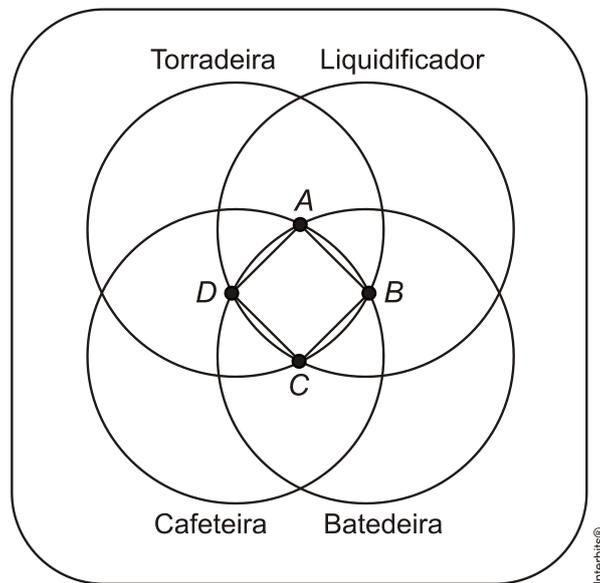
29. (Enem PPL 2014) O número de frutos de uma determinada espécie de planta se distribui de acordo com as probabilidades apresentadas no quadro.

Número de frutos	Probabilidade
0	0,65
1	0,15
2	0,13
3	0,03
4	0,03
5 ou mais	0,01

A probabilidade de que, em tal planta, existam, pelo menos, dois frutos é igual a

- A** 3%.
- B** 7%.
- C** 13%.
- D** 16%.
- E** 20%.

30. (Enem PPL 2013) Ao realizar uma compra em uma loja de departamentos, o cliente tem o direito de participar de um jogo de dardo, no qual, de acordo com a região do alvo acertada, ele pode ganhar um ou mais prêmios. Caso o cliente acerte fora de todos os quatro círculos, ele terá o direito de repetir a jogada, até que acerte uma região que dê o direito de ganhar pelo menos um prêmio. O alvo é o apresentado na figura:

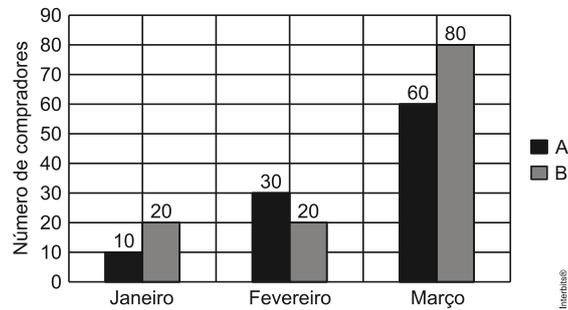


Ao acertar uma das regiões do alvo, ele terá direito ao(s) prêmio(s) indicado(s) nesta região. Há ainda o prêmio extra, caso o cliente acerte o quadrado **ABCD**. João Maurício fez uma compra nessa loja e teve o direito de jogar o dardo.

A quantidade de prêmios que João Maurício tem a menor probabilidade de ganhar, sabendo que ele jogou o dardo aleatoriamente, é exatamente:

- A** 1.
- B** 2.
- C** 3.
- D** 4.
- E** 5.

31. (Enem 2013) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B.

Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

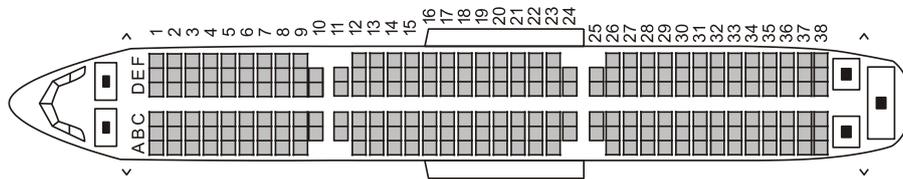
- A $\frac{1}{20}$
- B $\frac{3}{242}$
- C $\frac{5}{22}$
- D $\frac{6}{25}$
- E $\frac{7}{15}$

32. (Enem PPL 2013) Uma fábrica possui duas máquinas que produzem o mesmo tipo de peça. Diariamente a máquina M produz 2.000 peças e a máquina N produz 3.000 peças. Segundo o controle de qualidade da fábrica, sabe-se que 60 peças, das 2.000 produzidas pela máquina M, apresentam algum tipo de defeito, enquanto que 120 peças, das 3.000 produzidas pela máquina N, também apresentam defeitos. Um trabalhador da fábrica escolhe ao acaso uma peça, e esta é defeituosa.

Nessas condições, qual a probabilidade de que a peça defeituosa escolhida tenha sido produzida pela máquina M?

- A $\frac{3}{100}$
- B $\frac{1}{25}$
- C $\frac{1}{3}$
- D $\frac{3}{7}$
- E $\frac{2}{3}$

33. (Enem PPL 2013) Uma empresa aérea lança uma promoção de final de semana para um voo comercial. Por esse motivo, o cliente não pode fazer reservas e as poltronas serão sorteadas aleatoriamente. A figura mostra a posição dos assentos no avião:



Avião com 38 fileiras de poltronas.

Por ter pavor de sentar entre duas pessoas, um passageiro decide que só viajará se a chance de pegar uma dessas poltronas for inferior a 30%.

Avaliando a figura, o passageiro desiste da viagem, porque a chance de ele ser sorteado com uma poltrona entre duas pessoas é mais aproximada de

- A** 31%.
- B** 33%.
- C** 35%.
- D** 68%.
- E** 69%.

34. (Enem 2013) Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol. Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

- A** $\frac{1}{2}$
- B** $\frac{5}{8}$
- C** $\frac{1}{4}$
- D** $\frac{5}{6}$
- E** $\frac{5}{14}$

35. (Enem 2013) Uma fábrica de parafusos possui duas máquinas, I e II, para a produção de certo tipo de parafuso. Em setembro, a máquina I produziu $\frac{54}{100}$ do total de parafusos produzidos pela fábrica. Dos parafusos produzidos por essa máquina, $\frac{25}{1000}$ eram defeituosos. Por sua vez, $\frac{38}{1000}$ dos parafusos produzidos no mesmo mês pela máquina II eram defeituosos.

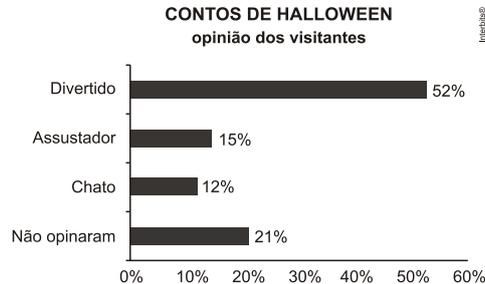
O desempenho conjunto das duas máquinas é classificado conforme o quadro, em que P indica a probabilidade de um parafuso escolhido ao acaso ser defeituoso.

$0 \leq P < \frac{2}{100}$	Excelente
$\frac{2}{100} \leq P < \frac{4}{100}$	Bom
$\frac{4}{100} \leq P < \frac{6}{100}$	Regular
$\frac{6}{100} \leq P < \frac{8}{100}$	Ruim
$\frac{8}{100} \leq P \leq 1$	Péssimo

O desempenho conjunto dessas máquinas, em setembro, pode ser classificado como

- A** excelente.
- B** bom.
- C** regular.
- D** ruim.
- E** péssimo.

36. (Enem 2012) Em um **blog** de variedades, músicas, mantras e informações diversas, foram postados “Contos de Halloween”. Após a leitura, os visitantes poderiam opinar, assinalando suas reações em “Divertido”, “Assustador” ou “Chato”. Ao final de uma semana, o **blog** registrou que 500 visitantes distintos acessaram esta postagem. O gráfico a seguir apresenta o resultado da enquete.



O administrador do **blog** irá sortear um livro entre os visitantes que opinaram na postagem “Contos de Halloween”.

Sabendo que nenhum visitante votou mais de uma vez, a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso entre as que opinaram ter assinalado que o conto “Contos de Halloween” é “Chato” é mais aproximada por

- A** 0,09.
- B** 0,12.
- C** 0,14.
- D** 0,15.
- E** 0,18.

37. (Enem PPL 2012) Uma coleta de dados em mais de 5 mil sites da internet apresentou os conteúdos de interesse de cada faixa etária. Na tabela a seguir, estão os dados obtidos para a faixa etária de 0 a 17 anos.

Preferências	Porcentagem
Música	22,5
Blogs	15,0
Serviços Web*	10,2
Games	10,0
Horóscopo	9,0
Game on-line	7,4
Educação **	6,5
Teen	4,0
Compras	3,4
Outras	12,0

Considere que esses dados refletem os interesses dos brasileiros desta faixa etária.

Disponível em: www.navegg.com. Acesso em: 12 nov. 2012 (adaptado).

Selecionando, ao acaso, uma pessoa desta faixa etária, a probabilidade de que ela não tenha preferência por horóscopo é

- A** 0,09.
- B** 0,10.
- C** 0,11.
- D** 0,79.
- E** 0,91.

38. (Enem 2012) Em um jogo há duas urnas com 10 bolas de mesmo tamanho em cada uma. A tabela a seguir indica as quantidades de bolas de cada cor em cada urna.

Cor	Urna 1	Urna 2
Amarela	4	0
Azul	3	1
Branca	2	2
Verde	1	3
Vermelha	0	4

Uma jogada consiste em:

- 1º) o jogador apresenta um palpite sobre a cor da bola que será retirada por ele da urna 2;
- 2º) ele retira, aleatoriamente, uma bola da urna 1 e a coloca na urna 2, misturando-a com as que lá estão;
- 3º) em seguida ele retira, também aleatoriamente, uma bola da urna 2;
- 4º) se a cor da última bola retirada for a mesma do palpite inicial, ele ganha o jogo.

Qual cor deve ser escolhida pelo jogador para que ele tenha a maior probabilidade de ganhar?

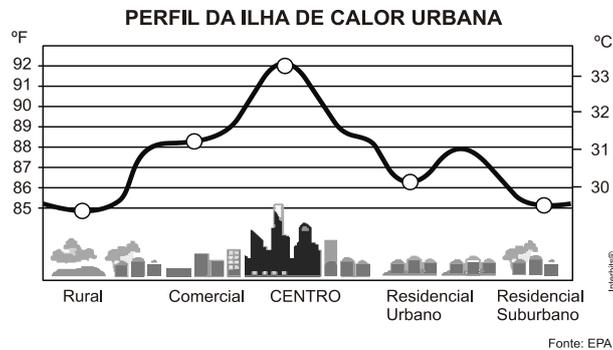
- A** Azul
- B** Amarela
- C** Branca
- D** Verde
- E** Vermelha

39. (Enem 2012) José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

- A** Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.
- B** José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.
- C** José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.
- D** José, já que ha 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.
- E** Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

40. (Enem 2011) Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

- A** $\frac{1}{5}$
 B $\frac{1}{4}$
 C $\frac{2}{5}$
 D $\frac{3}{5}$
 E $\frac{3}{4}$

41. (Enem 2011) Todo o país passa pela primeira fase de campanha de vacinação contra a gripe suína (H1N1). Segundo um médico infectologista do Instituto Emilio Ribas, de São Paulo, a imunização “deve mudar”, no país, a história da epidemia. Com a vacina, de acordo com ele, o Brasil tem a chance de barrar uma tendência do crescimento da doença, que já matou 17 mil no mundo. A tabela apresenta dados específicos de um único posto de vacinação.

Campanha de vacinação contra a gripe suína

Datas da vacinação	Público-alvo	Quantidade de pessoas vacinadas
8 a 19 de março	Trabalhadores da saúde e indígenas	42
22 de março a 2 de abril	Portadores de doenças crônicas	22
5 a 23 de abril	Adultos saudáveis entre 20 e 29 anos	56
24 de abril a 7 de maio	População com mais de 60 anos	30
10 a 21 de maio	Adultos saudáveis entre 30 e 39 anos	50

Disponível em: <http://img.terra.com.br>. Acesso em 26 abr. 2010 (adaptado).

Escolhendo-se aleatoriamente uma pessoa atendida nesse posto de vacinação, a probabilidade de ela ser portadora de doença crônica é

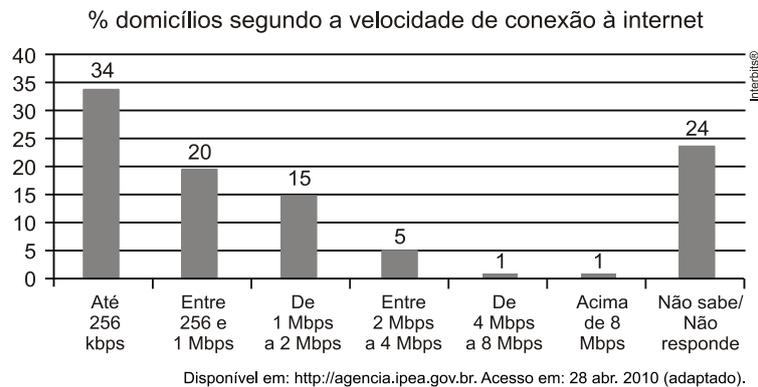
- A** 8%.
B 9%.
C 11%.
D 12%.
E 22%.

42. (Enem 2011) Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida). O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do início da jogada.

Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é

- A** Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.
- B** Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
- C** Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
- D** Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 8 possibilidades para a escolha de Bernardo.
- E** Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

43. (Enem 2011) O gráfico mostra a velocidade de conexão à internet utilizada em domicílios no Brasil. Esses dados são resultado da mais recente pesquisa, de 2009, realizada pelo Comitê Gestor da Internet (CGI).



Escolhendo-se, aleatoriamente, um domicílio pesquisado, qual a chance de haver banda larga de conexão de pelo menos 1 Mbps neste domicílio?

- A** 0,45
- B** 0,42
- C** 0,30
- D** 0,22
- E** 0,15

44. (Enem 2ª aplicação 2010) Grandes times nacionais e internacionais utilizam dados estatísticos para a definição do time que sairá jogando numa partida. Por exemplo, nos últimos treinos, dos chutes a gol feito pelo jogador I, ele converteu 45 chutes em gol. Enquanto isso, o jogador II acertou 50 gols. Quem deve ser selecionado para estar no time no próximo jogo, já que os dois jogam na mesma posição?

A decisão parece simples, porém deve-se levar em conta quantos chutes a gol cada um teve oportunidade de executar. Se o jogador I chutou 60 bolas a gol e o jogador II chutou 75, quem deveria ser escolhido?

- A O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.
- B O jogador I, porque acertou $\frac{4}{3}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.
- C O jogador I, porque acertou $\frac{3}{4}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.
- D O jogador I, porque acertou $\frac{12}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{3}$ dos chutes.
- E O jogador I, porque acertou $\frac{9}{25}$ dos chutes, enquanto o jogador II acertou $\frac{2}{5}$ dos chutes.

45. (Enem 2ª aplicação 2010) Um experimento foi conduzido com o objetivo de avaliar o poder germinativo de duas culturas de cebola, conforme a tabela.

Germinação de sementes de duas culturas de cebola

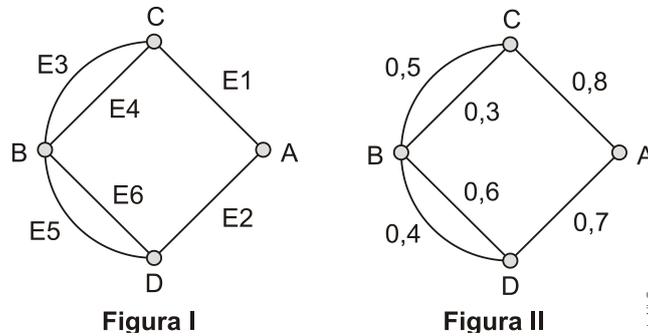
Culturas	Germinação		TOTAL
	Germinaram	Não Germinaram	
A	392	8	400
B	381	19	400
TOTAL	773	27	800

BUSSAB, W. O.; MORETIN, L. G. *Estatística para as ciências agrárias e biológicas* (adaptado).

Desejando-se fazer uma avaliação do poder germinativo de uma das culturas de cebola, uma amostra foi retirada ao acaso. Sabendo-se que a amostra escolhida germinou, a probabilidade de essa amostra pertencer à Cultura A é de

- A $\frac{8}{27}$
- B $\frac{19}{27}$
- C $\frac{381}{773}$
- D $\frac{392}{773}$
- E $\frac{392}{800}$

46. (Enem 2010) A figura I abaixo mostra um esquema das principais vias que interligam a cidade A com a cidade B. Cada número indicado na figura II representa a probabilidade de pegar um engarrafamento quando se passa na via indicada, Assim, há uma probabilidade de 30% de se pegar engarrafamento no deslocamento do ponto C ao o ponto B, passando pela estrada E4, e de 50%, quando se passa por E3. Essas probabilidades são independentes umas das outras.



Paula deseja se deslocar da cidade A para a cidade B usando exatamente duas das vias indicadas, percorrendo um trajeto com a menor probabilidade de engarrafamento possível.

O melhor trajeto para Paula é

- A** E1E3.
- B** E1E4.
- C** E2E4.
- D** E2E5.
- E** E2E6.

47. (Enem 2ª aplicação 2010) Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1 132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves.

Disponível em: <http://www.wwf.org.br>. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

- A** 63,31%
- B** 60,18%
- C** 56,52%
- D** 49,96%
- E** 43,27%

48. (Enem 2ª aplicação 2010) Os estilos musicais preferidos pelos jovens brasileiros são o samba, o **rock** e a MPB. O quadro a seguir registra o resultado de uma pesquisa relativa à preferência musical de um grupo de 1 000 alunos de uma escola. Alguns alunos disseram não ter preferência por nenhum desses três estilos.

Preferência musical	rock	samba	MPB	rock e samba
número de alunos	200	180	200	70

Preferência musical	rock e MPB	samba e MPB	rock , samba e MPB
número de alunos	60	50	20

Se for selecionado ao acaso um estudante no grupo pesquisado, qual é a probabilidade de ele preferir somente MPB?

- A** 2%
- B** 5%
- C** 6%
- D** 11%
- E** 20%

49. (Enem 2ª aplicação 2010) Para verificar e analisar o grau de eficiência de um teste que poderia ajudar no retrocesso de uma doença numa comunidade, uma equipe de biólogos aplicou-o em um grupo de 500 ratos, para detectar a presença dessa doença. Porém, o teste não é totalmente eficaz podendo existir ratos saudáveis com resultado positivo e ratos doentes com resultado negativo. Sabe-se, ainda, que 100 ratos possuem a doença, 20 ratos são saudáveis com resultado positivo e 40 ratos são doentes com resultado negativo.

Um rato foi escolhido ao acaso, e verificou-se que o seu resultado deu negativo. A probabilidade de esse rato ser saudável é

- A** $\frac{1}{5}$
- B** $\frac{4}{5}$
- C** $\frac{19}{21}$
- D** $\frac{19}{25}$
- E** $\frac{21}{25}$

50. (Enem 2010) O diretor de um colégio leu numa revista que os pés das mulheres estavam aumentando. Há alguns anos, a média do tamanho dos calçados das mulheres era de 35,5 e, hoje, é de 37,0. Embora não fosse uma informação científica, ele ficou curioso e fez uma pesquisa com as funcionárias do seu colégio, obtendo o quadro a seguir:

TAMANHO DOS CALÇADOS	NUMERO DE FUNCIONÁRIAS
39,0	1
38,0	10
37,0	3
36,0	5
35,0	6

Escolhendo uma funcionária ao acaso e sabendo que ela tem calçado maior que 36,0, a probabilidade de ela calçar 38,0 é

- A $\frac{1}{3}$
- B $\frac{1}{5}$
- C $\frac{2}{5}$
- D $\frac{5}{7}$
- E $\frac{5}{14}$

51. (Enem cancelado 2009) Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R\$ 1,00 de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia R\$ 2,00 de desconto.

Qual é a probabilidade de um consumidor **não** ganhar qualquer desconto?

- A $\frac{3}{8}$
- B $\frac{3}{24}$
- C $\frac{1}{3}$
- D $\frac{1}{4}$
- E $\frac{1}{2}$

52. (Enem cancelado 2009) Um casal decidiu que vai ter 3 filhos. Contudo, quer exatamente 2 filhos homens e decide que, se a probabilidade fosse inferior a 50%, iria procurar uma clínica para fazer um tratamento específico para garantir que teria os dois filhos homens.

Após os cálculos, o casal concluiu que a probabilidade de ter exatamente 2 filhos homens é

- A** 66,7%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
- B** 50%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
- C** 7,5%, assim ele não precisará fazer um tratamento.
- D** 25%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.
- E** 37,5%, assim ele precisará procurar uma clínica para fazer um tratamento.

53. (Enem 2009) O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

- A** $2 \times (0,2\%)^4$.
- B** $4 \times (0,2\%)^2$.
- C** $6 \times (0,2\%)^2 \times (99,8\%)^2$.
- D** $4 \times (0,2\%)$.
- E** $6 \times (0,2\%) \times (99,8\%)$.

54. (Enem cancelado 2009) Em um determinado semáforo, as luzes completam um ciclo de verde, amarelo e vermelho em 1 minuto e 40 segundos. Desse tempo, 25 segundos são para a luz verde, 5 segundos para a amarela e 70 segundos para a vermelha. Ao se aproximar do semáforo, um veículo tem uma determinada probabilidade de encontrá-lo na luz verde, amarela ou vermelha. Se essa aproximação for de forma aleatória, pode-se admitir que a probabilidade de encontrá-lo com uma dessas cores é diretamente proporcional ao tempo em que cada uma delas fica acesa. Suponha que um motorista passa por um semáforo duas vezes ao dia, de maneira aleatória e independente uma da outra.

Qual é a probabilidade de o motorista encontrar esse semáforo com a luz verde acesa nas duas vezes em que passar?

- A** $\frac{1}{25}$
- B** $\frac{1}{16}$
- C** $\frac{1}{9}$
- D** $\frac{1}{3}$
- E** $\frac{1}{2}$

55. (Enem cancelado 2009) No quadro seguinte, são informados os turnos em que foram eleitos os prefeitos das capitais de todos os estados brasileiros em 2004.

	cidade	turno
1	Aracaju (SE)	1°
2	Belém (PA)	2°
3	Belo Horizonte (MG)	1°
4	Boa Vista (RR)	1°
5	Campo Grande (MS)	1°
6	Cuiabá (MT)	2°
7	Curitiba (PR)	2°
8	Florianópolis (SC)	2°
9	Fortaleza (CE)	2°
10	Goiânia (GO)	2°
11	João Pessoa (PB)	1°
12	Macapá (AP)	1°
13	Maceió (AL)	2°

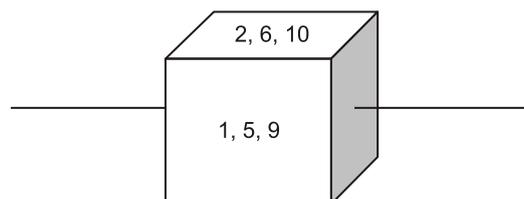
	cidade	turno
14	Manaus (AM)	2°
15	Natal (RN)	2°
16	Palmas (TO)	1°
17	Porto Alegre (RS)	2°
18	Porto Velho (RO)	2°
19	Recife (PE)	1°
20	Rio Branco (AC)	1°
21	Rio de Janeiro (RJ)	1°
22	Salvador (BA)	2°
23	São Luís (MA)	1°
24	São Paulo (SP)	2°
25	Terezina (PI)	2°
26	Vitória (ES)	2°

Fonte: TSE. **Almanaque ABRIL:** Brasil 2005. São Paulo: Abril, 2005.

Na região Norte, a frequência relativa de eleição dos prefeitos no 2° turno foi, aproximadamente,

- A** 42,86%.
- B** 44,44%.
- C** 50,00%.
- D** 57,14%.
- E** 57,69%.

56. (Enem simulado 2009) Em um cubo, com faces em branco, foram gravados os números de 1 a 12, utilizando-se o seguinte procedimento: o número 1 foi gravado na face superior do dado, em seguida o dado foi girado, no sentido anti-horário, em torno do eixo indicado na figura abaixo, e o número 2 foi gravado na nova face superior, seguinte, conforme o esquema abaixo.



O procedimento continuou até que foram gravados todos os números. Observe que há duas faces que ficaram em branco.

Ao se jogar aleatoriamente o dado apresentado, a probabilidade de que a face sorteada tenha a soma máxima é

- A** $\frac{1}{6}$.
- B** $\frac{1}{4}$.
- C** $\frac{1}{3}$.
- D** $\frac{1}{2}$.
- E** $\frac{2}{3}$.

57. (Enem 2009) Um médico está estudando um novo medicamento que combate um tipo de câncer em estágios avançados. Porém, devido ao forte efeito dos seus componentes, a cada dose administrada há uma chance de 10% de que o paciente sofra algum dos efeitos colaterais observados no estudo, tais como dores de cabeça, vômitos ou mesmo agravamento dos sintomas da doença. O médico oferece tratamentos compostos por 3, 4, 6, 8 ou 10 doses do medicamento, de acordo com o risco que o paciente pretende assumir.

Se um paciente considera aceitável um risco de até 35% de chances de que ocorra algum dos efeitos colaterais durante o tratamento, qual é o maior número admissível de doses para esse paciente?

- A** 3 doses.
- B** 4 doses.
- C** 6 doses.
- D** 8 doses.
- E** 10 doses.

58. (Enem cancelado 2009) Dados do Instituto de Pesquisas Econômicas Aplicadas (IPEA) revelaram que no biênio 2004/2005, nas rodovias federais, os atropelamentos com morte ocuparam o segundo lugar no ranking de mortalidade por acidente. A cada 34 atropelamentos, ocorreram 10 mortes. Cerca de 4 mil atropelamentos/ano, um a cada duas horas, aproximadamente.

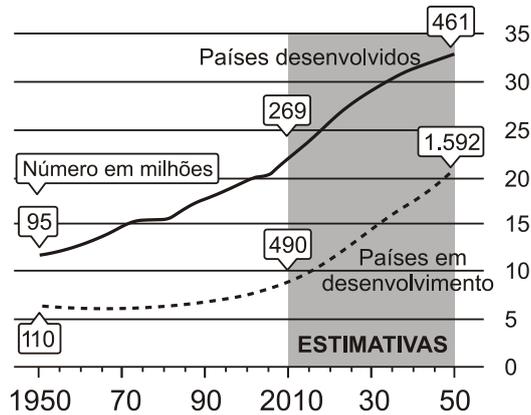
Disponível em: <http://www.ipea.gov.br>. Acesso em: 6 jan. 2009.

De acordo com os dados, se for escolhido aleatoriamente para investigação mais detalhada um dos atropelamentos ocorridos no biênio 2004/2005, a probabilidade de ter sido um atropelamento sem morte é

- A** $\frac{2}{17}$
- B** $\frac{5}{17}$
- C** $\frac{2}{5}$
- D** $\frac{3}{5}$
- E** $\frac{12}{17}$

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: *Perspectivas da População Mundial*, ONU, 2009.

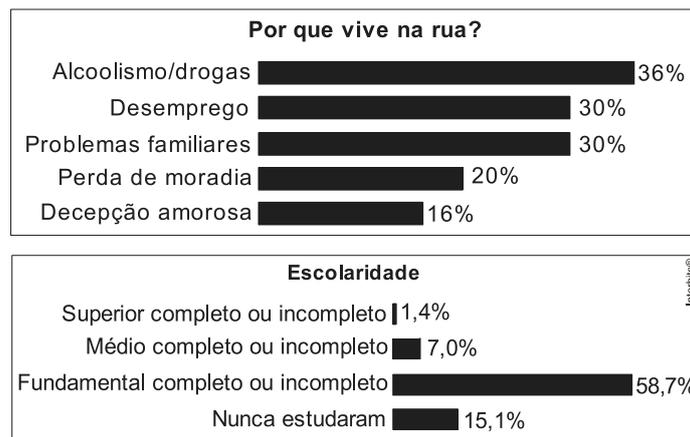
Disponível em: www.economist.com.
Acesso em: 9 jul. 2009 (adaptado).

59. (Enem 2009) Em 2050, a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa com 60 anos ou mais de idade, na população dos países desenvolvidos, será um número mais próximo de

- A $\frac{1}{2}$
- B $\frac{7}{20}$
- C $\frac{8}{25}$
- D $\frac{1}{5}$
- E $\frac{3}{25}$

60. (Enem 2008) **A vida na rua como ela é**

O Ministério do Desenvolvimento Social e Combate à Fome (MDS) realizou, em parceria com a ONU, uma pesquisa nacional sobre a população que vive na rua, tendo sido ouvidas 31.922 pessoas em 71 cidades brasileiras. Nesse levantamento, constatou-se que a maioria dessa população sabe ler e escrever (74%), que apenas 15,1% vivem de esmolas e que, entre os moradores de rua que ingressaram no ensino superior, 0,7% se diplomou. Outros dados da pesquisa são apresentados nos quadros a seguir.



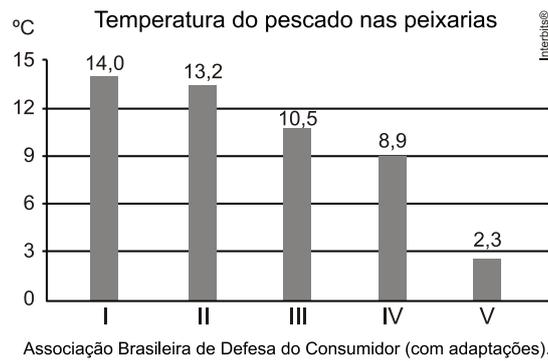
Istoé, 7/5/2008, p. 21 (com adaptações).

No universo pesquisado, considere que P seja o conjunto das pessoas que vivem na rua por motivos de alcoolismo/drogas e Q seja o conjunto daquelas cujo motivo para viverem na rua é a decepção amorosa.

Escolhendo-se ao acaso uma pessoa no grupo pesquisado e supondo-se que seja igual a 40% a probabilidade de que essa pessoa faça parte do conjunto P ou do conjunto Q , então a probabilidade de que ela faça parte do conjunto interseção de P e Q é igual a

- A** 12%.
- B** 16%.
- C** 20%.
- D** 36%.
- E** 52%.

61. (Enem 2007)



Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre 2 °C e 4 °C.

Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a

- A $\frac{1}{2}$.
- B $\frac{1}{3}$.
- C $\frac{1}{4}$.
- D $\frac{1}{5}$.
- E $\frac{1}{6}$.

62. (Enem 2007) A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela adiante apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima da cana.

pacientes	problemas respiratórios causados pelas queimadas	problemas respiratórios resultantes de outras causas	outras doenças	total
idosos	50	150	60	260
crianças	150	210	90	450

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a

- A** 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.
- B** 0,50, o que comprova ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões das queimadas.
- C** 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.
- D** 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.
- E** 0,75, o que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

63. (Enem 2006) Um time de futebol amador ganhou uma taça ao vencer um campeonato. Os jogadores decidiram que o prêmio seria guardado na casa de um deles. Todos quiseram guardar a taça em suas casas. Na discussão para se decidir com quem ficaria o troféu, travou-se o seguinte diálogo:

Pedro, camisa 6: — Tive uma ideia. Nós somos 11 jogadores e nossas camisas estão numeradas de 2 a 12. Tenho dois dados com as faces numeradas de 1 a 6. Se eu jogar os dois dados, a soma dos números das faces que ficarem para cima pode variar de 2 (1+1) até 12 (6+6). Vamos jogar os dados, e quem tiver a camisa com o número do resultado vai guardar a taça.

Tadeu, camisa 2: - Não sei não... Pedro sempre foi muito esperto... Acho que ele está levando alguma vantagem nessa proposta...

Ricardo, camisa 12: - Pensando bem... Você pode estar certo, pois, conhecendo o Pedro, é capaz que ele tenha mais chances de ganhar que nós dois juntos...

Desse diálogo conclui-se que

- A** Tadeu e Ricardo estavam equivocados, pois a probabilidade de ganhar a guarda da taça era a mesma para todos.
- B** Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham mais chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
- C** Tadeu tinha razão e Ricardo estava equivocado, pois, juntos, tinham a mesma chance que Pedro de ganhar a guarda da taça.
- D** Tadeu e Ricardo tinham razão, pois os dois juntos tinham menos chances de ganhar a guarda da taça do que Pedro.
- E** não é possível saber qual dos jogadores tinha razão, por se tratar de um resultado probabilístico, que depende exclusivamente da sorte.

64. (Enem 2006) A tabela a seguir indica a posição relativa de quatro times de futebol na classificação geral de um torneio, em dois anos consecutivos. O símbolo • significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2004, à frente do indicado na coluna. O símbolo * significa que o time indicado na linha ficou, no ano de 2005, à frente do indicado na coluna.

	A	B	C	D
A				*
B	•*		•	•*
C	•*	*		*
D	•		•	

A probabilidade de que um desses quatro times, escolhido ao acaso, tenha obtido a mesma classificação no torneio, em 2004 e 2005, é igual a

- A** 0,00.
- B** 0,25.
- C** 0,50.
- D** 0,75.
- E** 1,00.

65. (Enem 2005) Um aluno de uma escola será escolhido por sorteio para representá-la em uma certa atividade. A escola tem dois turnos. No diurno há 300 alunos, distribuídos em 10 turmas de 30 alunos. No noturno há 240 alunos, distribuídos em 6 turmas de 40 alunos.

Em vez do sorteio direto envolvendo os 540 alunos, foram propostos dois outros métodos de sorteio:

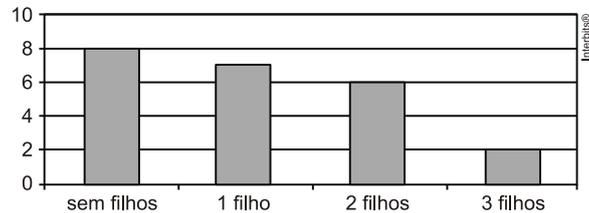
Método I: escolher ao acaso um dos turnos (por exemplo, lançando uma moeda) e, a seguir, sortear um dos alunos do turno escolhido.

Método II: escolher ao acaso uma das 16 turmas (por exemplo, colocando um papel com o número de cada turma em uma urna e sorteando uma delas) e, a seguir, sortear um dos alunos dessa turma.

Sobre os métodos I e II de sorteio é correto afirmar:

- A** em ambos os métodos, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados.
- B** no método I, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método II a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.
- C** no método II, todos os alunos têm a mesma chance de serem sorteados, mas, no método I, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior que a de um aluno do noturno.
- D** no método I, a chance de um aluno do noturno ser sorteado é maior do que a de um aluno do diurno, enquanto no método II ocorre o contrário.
- E** em ambos os métodos, a chance de um aluno do diurno ser sorteado é maior do que a de um aluno do noturno.

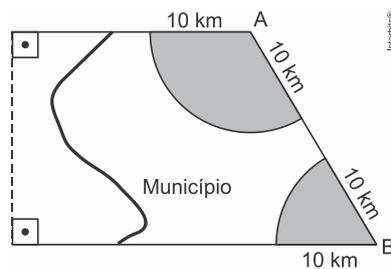
66. (Enem 2005) As 23 ex-alunas de uma turma que completou o Ensino Médio há 10 anos se encontraram em uma reunião comemorativa. Várias delas haviam se casado e tido filhos. A distribuição das mulheres, de acordo com a quantidade de filhos, é mostrada no gráfico a seguir.



Um prêmio foi sorteado entre todos os filhos dessas ex-alunas. A probabilidade de que a criança premiada tenha sido um(a) filho(a) único(a) é

- A $\frac{1}{3}$.
- B $\frac{1}{4}$.
- C $\frac{7}{15}$.
- D $\frac{7}{23}$.
- E $\frac{7}{25}$.

67. (Enem 2001) Um município de 628 km^2 é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançam um raio de 10 km do município, conforme mostra a figura:



Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras.

Essa probabilidade é de, aproximadamente,

- A 20%.
- B 25%.
- C 30%.
- D 35%.
- E 40%.

68. (Enem 2001) Uma empresa de alimentos imprimiu em suas embalagens um cartão de apostas do seguinte tipo:

Frente do cartão	Verso do cartão																				
<table border="1"> <tr> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td style="text-align: center;">○</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td style="text-align: center;">○</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">3</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td style="text-align: center;">○</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">4</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td style="text-align: center;">○</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">5</td> <td style="text-align: center;">○</td> <td style="text-align: center;">○</td> </tr> </table>	1	○	○	○	2	○	○	○	○	3	○	○	○	4	○	○	○	5	○	○	<p>Como jogar:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Inicie raspando apenas uma das alternativas da linha de início (linha 1). - Se achar uma bola de futebol, vá para a linha 2 e raspe apenas uma das alternativas. Continue raspando dessa forma até o fim do jogo. - Se encontrar um "X" em qualquer uma das linhas, o jogo está encerrado e você não terá direito ao prêmio. - Se você encontrar uma bola de futebol em cada uma das linhas terá direito ao prêmio.
1	○	○	○																		
2	○	○	○	○																	
3	○	○	○																		
4	○	○	○																		
5	○	○																			

Cada cartão de apostas possui 7 figuras de bolas de futebol e 8 sinais de "X" distribuídos entre os 15 espaços possíveis, de tal forma que a probabilidade de um cliente ganhar o prêmio nunca seja igual a zero. Em determinado cartão existem duas bolas na linha 4 e duas bolas na linha 5.

Com esse cartão, a probabilidade de o cliente ganhar o prêmio é

- A** $\frac{1}{27}$.
- B** $\frac{1}{36}$.
- C** $\frac{1}{54}$.
- D** $\frac{1}{72}$.
- E** $\frac{1}{108}$.

69. (Enem 2001) Num determinado bairro há duas empresas de ônibus, ANDABEM e BOMPASSEIO, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela.

Horário dos ônibus	
ANDABEM	BOMPASSEIO
...	...
6h00min	6h10min
6h30min	6h40min
7h00min	7h10min
7h30min	7h40min
...	...

Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho e nem preferência por qualquer das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal.

Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa ANDABEM é

- A** um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
- B** um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
- C** metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
- D** duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
- E** três vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

Um apostador tem três opções para participar de certa modalidade de jogo, que consiste no sorteio aleatório de um número dentre dez.

1ª opção: comprar três números para um único sorteio.

2ª opção: comprar dois números para um sorteio e um número para um segundo sorteio.

3ª opção: comprar um número para cada sorteio, num total de três sorteios.

70. (Enem 2000) Escolhendo a 2ª opção, a probabilidade de o apostador NÃO GANHAR em qualquer dos sorteios é igual a:

- A** 90%.
- B** 81%.
- C** 72%.
- D** 70%.
- E** 65%.

71. (Enem 2000) Se X , Y , Z representam as probabilidades de o apostador GANHAR ALGUM PRÊMIO, escolhendo, respectivamente, a 1ª, a 2ª ou a 3ª opções, é correto afirmar que:

- A** $X < Y < Z$.
- B** $X = Y = Z$.
- C** $X > Y = Z$.
- D** $X = Y > Z$.
- E** $X > Y > Z$.

72. (Enem 1999) Uma estação distribuidora de energia elétrica foi atingida por um raio. Este fato provocou escuridão em uma extensa área. Segundo estatísticas, ocorre em média a cada 10 anos um fato desse tipo. Com base nessa informação, pode-se afirmar que

- A** a estação está em funcionamento há no máximo 10 anos.
- B** daqui a 10 anos deverá cair outro raio na mesma estação.
- C** se a estação já existe há mais de 10 anos, brevemente deverá cair outro raio na mesma.
- D** a probabilidade de ocorrência de um raio na estação independe do seu tempo de existência.
- E** é impossível a estação existir há mais de 30 anos sem que um raio já a tenha atingido anteriormente.

TEXTO PARA AS PRÓXIMAS 2 QUESTÕES:

Em um concurso de televisão, apresentam-se ao participante três fichas voltadas para baixo, estando representadas em cada uma delas as letras T, V e E. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. O participante deve ordenar as fichas a seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a sigla TVE. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta ganhará um prêmio de R\$200,00.

73. (Enem 1998) A probabilidade de o CONCORRENTE ganhar exatamente o valor de R\$400,00 é igual a:

- A** 0
- B** $1/3$
- C** $1/2$
- D** $2/3$
- E** $1/6$

74. (Enem 1998) A probabilidade de o PARTICIPANTE não ganhar qualquer prêmio é igual a:

- A** 0
- B** $1/3$
- C** $1/4$
- D** $1/2$
- E** $1/6$

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	E
02	D
03	B
04	C
05	D
06	D
07	B
08	C
09	D
10	D
11	A
12	D
13	D
14	C
15	C
16	B
17	D
18	C
19	C
20	C
21	D
22	E
23	C
24	A
25	D
26	B
27	B
28	E
29	E
30	D
31	A
32	C
33	A
34	A
35	B
36	D
37	E

QUESTÃO	ALTERNATIVA
38	E
39	D
40	E
41	C
42	C
43	D
44	A
45	D
46	D
47	D
48	D
49	C
50	D
51	A
52	E
53	C
54	B
55	A
56	A
57	B
58	E
59	C
60	A
61	D
62	E
63	D
64	A
65	D
66	E
67	B
68	C
69	D
70	C
71	E
72	D
73	A
74	B