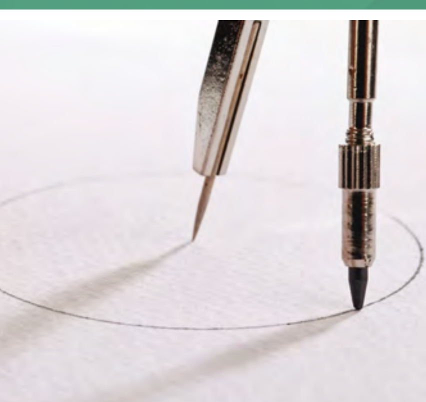
SEP

SISTEMA DE ENSINO
PREPARAENEM

MATEMÁTICA



3

SISTEMA DE ENSINO
PREPARAENEM

MATEMÁTICA

Volume 3 - 1ª Edição

Goiânia
CLASSIS EDITORA
2015

SISTEMA DE ENSINO PREPARAENEM - MATEMÁTICA

Volume 3

AUTORES

Alexandre Pullig Corrêa

Cristiano Siqueira

DIREÇÃO EDITORIAL

Alexandre Pullig Corrêa

COORDENAÇÃO DE ARTE

Gedson Clei Ribeiro Alves

CAPA

Gedson Clei Ribeiro Alves

IMAGEM DE CAPA

shutterstock.com

EDIÇÃO DE ARTE

Alex Alves da Silva

Gedson Clei Ribeiro Alves

Luiz Felipe Magalhães

REVISÃO

Alex Alves da Silva

Alexandre Pullig Corrêa

Cristiano Siqueira

Danielle Pullig Corrêa

Gedson Clei Ribeiro Alves

PREPARAÇÃO DE TEXTOS

Alexandre Pullig Corrêa

Cristiano Siqueira

PROJETO GRÁFICO

Gedson Clei Ribeiro Alves

Alexandre Pullig Corrêa

DIAGRAMAÇÃO

Gedson Clei Ribeiro Alves

Goiânia - 1ª edição - 2015

CLASSIS EDITORA

Av. Eng. Eurico Miranda, Qd. 04, Lt. 12/14 - Sala 209

Ed. Concept Office - Vila Maria José

CEP: 74815465 - Goiânia - Goiás - Brasil

Fone: +55 (62) 3877 3214

classiseditora@gmail.com

ISBN: 978-85-88249-28-8

IMPRESSÃO E ACABAMENTO

POLIGRÁFICA

APRESENTAÇÃO

> "Competência é a faculdade de mobilizar um conjunto de recursos cognitivos – como saberes, habilidades e informações – para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações. Pensar em termos de competência significa pensar a sinergia, a orquestração de recursos cognitivos e afetivos diversos para enfrentar um conjunto de situações que apresentam analogias de estrutura."
>
> *Philippe Perrenoud*

Caro estudante,

Os novos desafios e mudanças propostas para a melhoria da educação brasileira têm provocado significativas transformações, exigindo mudanças tanto por parte da escola como por parte dos estudantes do ensino médio.

Nossa tradição escolar ainda tem muito do enciclopedismo iluminista. Muitos educadores ainda acreditam que devem fazer com que os alunos absorvam todo o conhecimento que existe no mundo, o que é impossível.

O novo aprendizado deve promover, não apenas a mera reprodução de dados, mas sim ajudá-lo a responder às transformações da sociedade e da cultura em que está inserido, desenvolvendo a capacidade cognitiva de interpretar textos, solucionar problemas e relacionar diferentes áreas do conhecimento.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), desde a sua criação em 1998, procura avaliar as competências e habilidades adquiridas pelos estudantes ao término do ensino médio. Em 2009 o ENEM foi reformulado e, a partir de então, ganhou maior importância no cenário nacional, tornando-se o principal instrumento de seleção para as universidades no país. Ademais, ainda é o primeiro passo na promoção de um novo currículo para o ensino médio do Brasil.

A adoção do ENEM por todas as instituições federais de ensino superior do país em 2013 e o número recorde de inscritos em 2014 (que superou os 9,5 milhões de candidatos), revela que, além de ser hoje a forma principal de conquistar a tão sonhada vaga no curso superior, o exame está cada vez mais concorrido.

Com o intuito de oferecer condições mais efetivas para o aprendizado e o desenvolvimento das competências e habilidades estabelecidas pelo exame, o Sistema de Ensino PreparaEnem (SEP), apresenta os conteúdos de forma a desvendar os mistérios do exame, e de outros vestibulares, para garantir a você uma preparação completa e eficaz.

Grupo PREPARAENEM

SUMÁRIO

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM

FRENTE A – GEOMETRIA ESPACIAL

FRENTE B – GEOMETRIA ANALÍTICA

FRENTE C – GEOMETRIA PLANA

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. Dominar linguagens (DL)	dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
II. Compreender fenômenos (CF)	construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
III. Enfrentar situações-problema (SP)	selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
IV. Construir argumentação (CA)	relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
V. Elaborar propostas (EP)	recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Competência de área 1	
Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.	
H1	Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
H2	Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
H3	Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
H4	Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
H5	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2	
Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.	
H6	Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3	
Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	
H10	Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11	Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12	Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13	Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14	Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4	
Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	
H15	Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16	Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17	Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18	Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5	
Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.	
H19	Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20	Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21	Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22	Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6	
Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	
H24	Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
H25	Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
H26	Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7	
Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.	
H27	Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29	Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
H30	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

OBJETOS DE CONHECIMENTO ASSOCIADOS À MATRIZ DE REFERÊNCIA

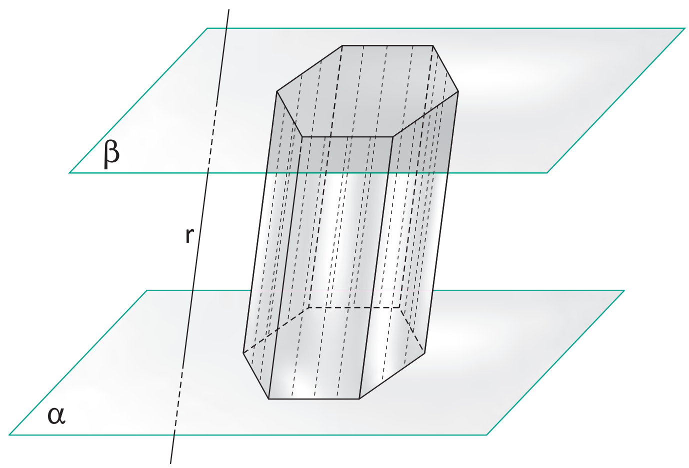
Conhecimentos numéricos	operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
Conhecimentos geométricos	características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
Conhecimentos de estatística e probabilidade	representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.
Conhecimentos algébricos	gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.
Conhecimentos algébricos/ geométricos	plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em : 28 jul. 2014.

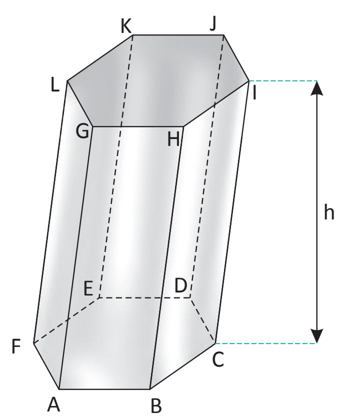
PRISMAS

DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Dados dois planos α e β paralelos, uma superfície poligonal P contida em α e uma reta r secante a esses dois esses planos. Dá-se o nome de prisma, à figura geométrica espacial obtida pela união de todos os segmentos paralelos à r com uma extremidade em P e outra em β. Observe a figura a seguir:



Note que prisma é um sólido delimitado por faces planas. Na figura a seguir, podemos destacar os seus principais elementos.



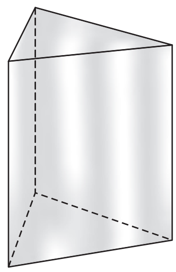
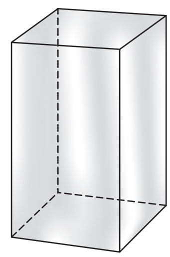
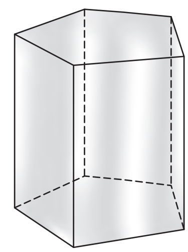
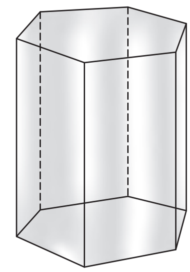
- Os polígonos ABCDEF e GHIJKL são as bases do prisma.
- As demais faces são as faces laterais do prisma.
- Os lados das bases são as arestas das bases do prisma.
- Os lados das faces laterais são as arestas laterais do prisma.
- Os vértices das faces também são os vértices do prisma.
- A distância h entre os planos α e β paralelos é a altura do prisma.

OBSERVAÇÕES:

- Todas as faces laterais de um prisma são paralelogramos.
- Todo segmento de extremos em vértices de faces diferentes é chamado de diagonal do prisma.

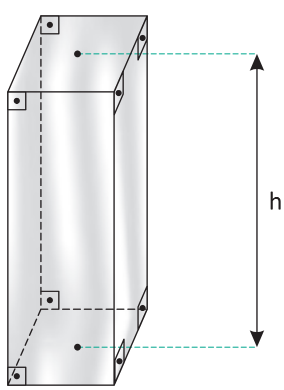
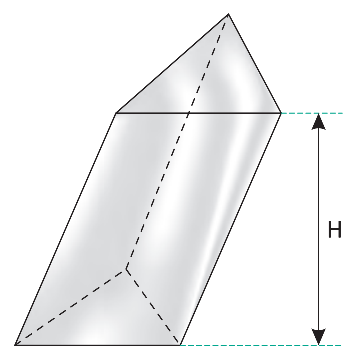
NOMENCLATURA DOS PRISMAS

Os prismas recebem nomes diferentes de acordo com os polígonos que formam as suas bases. Observe as figuras a seguir:

Prisma triangular	Prisma quadrangular	Prisma pentagonal	Prisma hexagonal
			

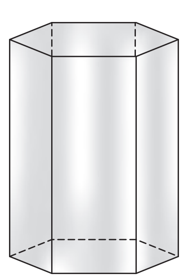
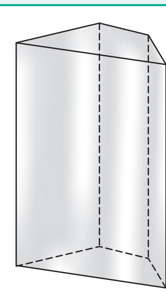
PRISMA RETO E PRISMA OBLÍQUO

Um prisma será reto quando as arestas laterais forem perpendiculares aos planos das bases. Quando isso não ocorrer, classificaremos o prisma em oblíquo. Observe as figuras a seguir:

Prisma reto	Prisma oblíquo
 Note que a medida da altura é igual às medidas das arestas laterais.	 Note que a medida da altura não é igual às medidas das arestas laterais.

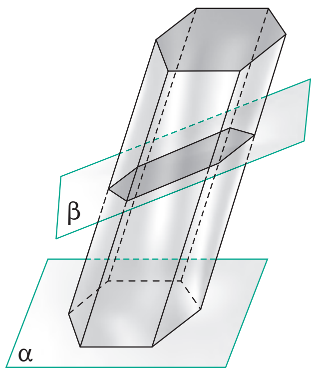
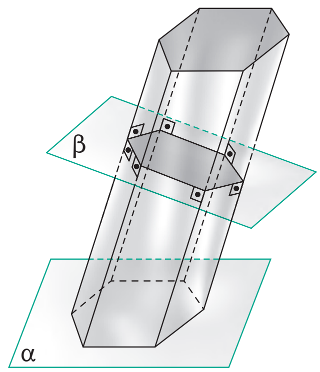
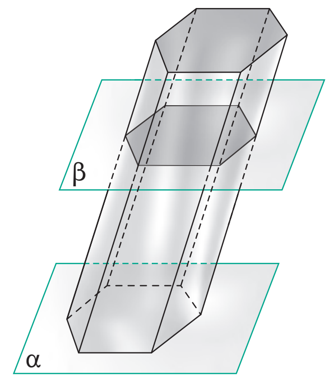
PRISMA REGULAR

Denomina-se prisma regular todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares (lados e ângulos congruentes). Observe as figuras a seguir:

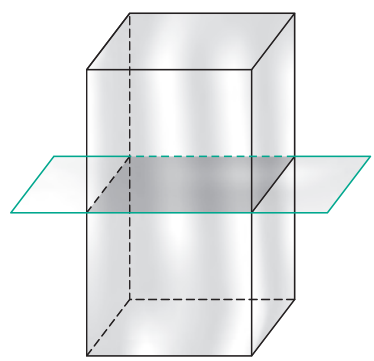
Prisma hexagonal regular	Prisma quadrangular irregular
	

SECÇÕES DE UM PRISMA

Denomina-se secção do prisma ao plano que o intercepta em todas as suas arestas laterais. Observe as figuras a seguir:

Secção	Secção reta	Secção transversal
		

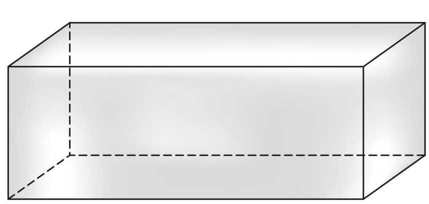
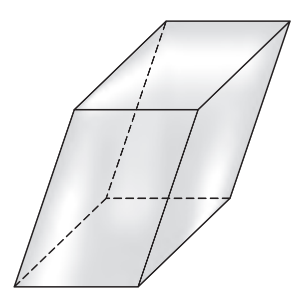
Note que no caso do prisma reto, as secções transversais e as secções retas são coincidentes e congruentes às bases. Observe a figura a seguir:



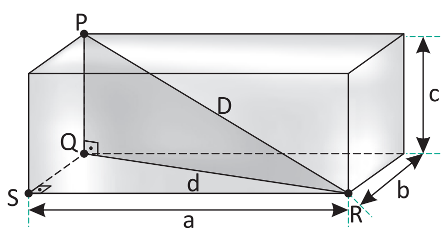
PARALELEPÍPEDO

Todo prisma cujas bases são paralelogramos é chamado de paralelepípedo. Se suas faces laterais são perpendiculares às bases, então o chamamos de paralelepípedo reto.

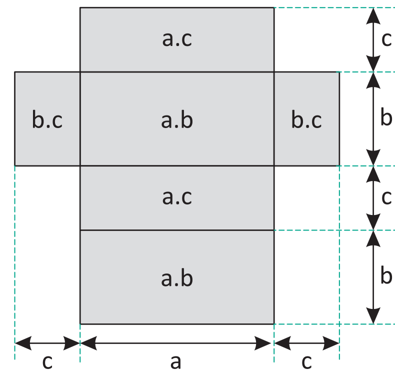
Já um paralelepípedo reto cujas bases são retângulos, é chamado de paralelepípedo reto-retângulo, ou simplesmente, paralelepípedo retângulo. Observe as figuras a seguir:

Paralelepípedo retângulo ou reto-retângulo	Paralelepípedo oblíquo
	

Dado o paralelepípedo retângulo abaixo e sua respectiva planificação, vamos determinar expressões para calcular a sua área total, diagonal da base, diagonal do paralelepípedo e volume.



Planificação do paralelepípedo



ÁREA TOTAL

A área total (A_T) do paralelepípedo retângulo é igual a soma das áreas de suas seis faces retangulares, ou seja, dois retângulos de área ab, dois retângulos de área ac e dois retângulos de área bc. Assim, temos que:

$$A_T = 2ab + 2ac + 2bc$$

Portanto:

$$\boxed{A_T = 2(ab + ac + bc)}$$

DIAGONAL DA BASE

A diagonal da base (d) do paralelepípedo retângulo é obtida aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo SQR. Assim, temos:

$$d^2 = a^2 + b^2$$

Portanto:

$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

DIAGONAL DO PARALELEPÍPEDO

A diagonal (D) do paralelepípedo retângulo é obtida aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo PQR. Assim, temos:

$$D^2 = d^2 + c^2 \Rightarrow D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Portanto:

$$\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

VOLUME

O volume (V) do paralelepípedo retângulo é dado pelo produto da área da base pela altura. Assim, temos que:

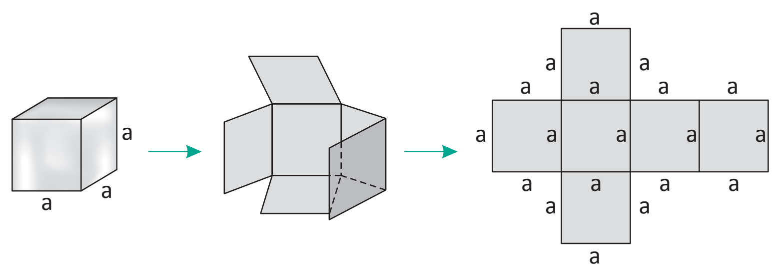
$$V = A_B \,.\, h = (a \,.\, b) \,.c$$

Portanto:

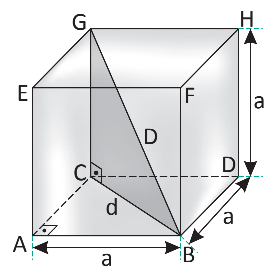
$$\boxed{V = a.b.c}$$

CUBO OU HEXAEDRO REGULAR

Cubo é um paralelepípedo retângulo com seis faces quadradas. Assim, o cubo possui todas as arestas e faces congruentes.



Dado o cubo da figura a seguir, vamos determinar expressões para calcular a sua área total, diagonal da base, diagonal do cubo e volume.



ÁREA TOTAL

A área total (A_T) do cubo é igual a soma das áreas de suas seis faces quadradas. Portanto:

$$A_T = 2a^2 + 2a^2 + 2a^2$$

Portanto:

$$\boxed{A_T = 6a^2}$$

DIAGONAL DA BASE

A diagonal da base (d) do cubo é obtida aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC. Assim, temos:

$$d^2 = a^2 + a^2$$

Portanto:

$$\boxed{d = a\sqrt{2}}$$

DIAGONAL DO PARALELEPÍPEDO

A diagonal (D) do cubo é obtida aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo BCG. Assim, temos:

$$D^2 = d^2 + a^2 \Rightarrow D^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

Portanto:

$$\boxed{D = a\sqrt{3}}$$

VOLUME

O volume (V) do paralelepípedo retângulo é dado pelo produto da área da base pela altura. Assim, temos que:

$$V = A_B \,.\, h = (a \,.\, a)\,.a$$

Portanto:

$$\boxed{V = a^3}$$

ÁREAS DA SUPERFÍCIE DE UM PRISMA

- **Área da base (A_B):** a área da base de um prisma é a área delimitada pelo polígono que compõe a base.
- **Área lateral (A_L):** a área lateral de um prisma é a soma das áreas de todas as suas faces laterais.
- **Área total (A_T):** a área total de um prisma é a soma das áreas de todas as suas faces, ou seja, a soma das áreas das bases com a área lateral.

OBSERVAÇÃO:

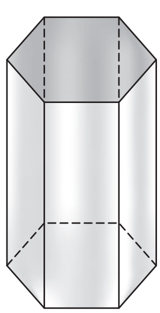
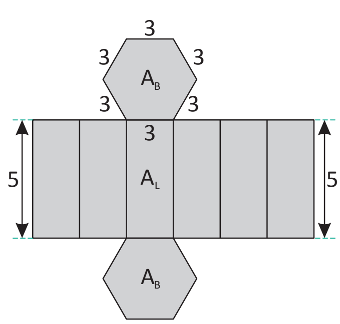
Se o prisma for regular, a área lateral é dada por:

$$A_L = n.A_F$$

Sendo n o número de arestas da base e A_F a área de uma das faces laterais.

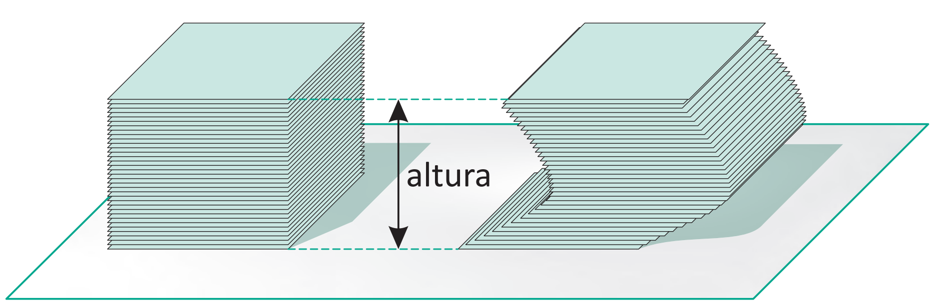
Por exemplo:

- Vamos calcular a área lateral, a área da base e área total do prisma hexagonal regular a seguir, com medidas em metros.

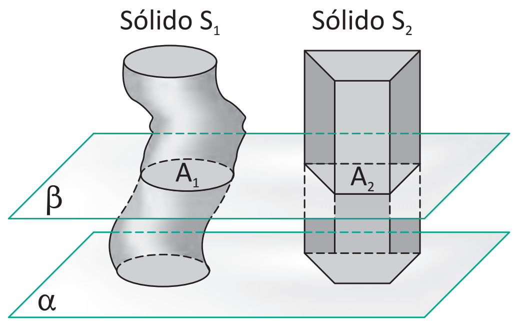
Prisma Hexagonal Regular	Planificação	Área da base (A_B)	Área lateral (A_L)	Área Total (A_T)
		$A_B = 6.\frac{3^2\sqrt{3}}{4}$ $A_B = \frac{27\sqrt{3}}{2}\,m^2$	$A_L = 6.(5.3)$ $A_L = 90\,m^2$	$A_T = 2A_B + A_L$ $A_T = 2.\frac{27\sqrt{3}}{2} + 90$ $A_T = 9(10 + 3\sqrt{3})\,m^2$

PRINCÍPIO (OU POSTULADO) DE CAVALIERI

Tomemos, sobre uma mesa, uma pilha com certa quantidade de cartões retangulares idênticos. Se modificamos a forma da pilha sem retirar nem pôr cartão algum, é fácil concluir que o volume da pilha modificada é idêntico ao volume da pilha original. É nessa observação que se baseia o postulado de Cavaliere. Observe a figura a seguir:



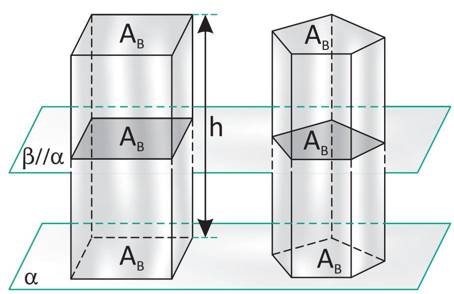
De maneira geral podemos assim enunciar tal princípio: Sejam dois sólidos espaciais, S_1 e S_2, apoiados num plano α e contidos num mesmo semiespaço. Se todo plano β, paralelo a α, secciona os dois sólidos determinando secções de mesma área, então os dois sólidos, obrigatoriamente, têm o mesmo volume.



$A_1 = A_2$

VOLUME DE UM PRISMA

O cálculo do volume de um prisma se dá a partir do princípio de Cavaliere. Dado um prisma qualquer, de área da base A_B e altura h, é sempre possível encontrar um paralelepípedo reto-retângulo de área da base A_B e altura h.



Como as secções determinadas no prisma e no paralelepípedo por um plano têm a mesma área, os sólidos têm o mesmo volume. Assim, o volume do prisma é igual ao volume do paralelepípedo retângulo de mesma área da base e altura.

Logo, o volume de um prisma é dado pelo produto de sua área da base por sua altura. Assim, temos que:

$$V = A_B . h$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Uma caixa de papelão em forma de paralelepípedo retângulo tem as dimensões da base iguais a 20 dm e 5 dm. Sabendo que a altura da caixa é de 2 dm, calcule a sua a área total e o seu volume.

Resolução:

A área total do paralelepípedo retângulo é dada por:

$A_T = 2(ab + bc + ac)$

$A_T = 2(5.20 + 20.2 + 5.2) = 300\ dm^2$

O volume de um paralelepípedo retângulo é dado por:

$V = a\ .\ b\ .\ c = 20\ .\ 5\ .\ 2 = 200\ dm^3$

Portanto, a área total é 300 dm^2 e o volume é 200 dm^3.

02| Qual o volume e a diagonal de um cubo de área total igual a 54 cm^2?

Resolução:

A área total de um cubo é dada por:

$A_T = 6a^2 \Rightarrow 54 = 6a^2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3\ cm$

A diagonal do cubo é dada por:

$D = a\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\ cm$

O volume do cubo é dado por:

$V = a^3 = 3^3 = 27\ cm^3$

Portanto, a diagonal é $3\sqrt{3}$ cm e o volume é 27 cm^3.

03| A diagonal da face de um cubo tem medida $5\sqrt{2}$ cm. Qual a área total desse cubo?

Resolução:

A diagonal da face de um cubo é dada por:

$d = a \Rightarrow 5\sqrt{2} = a \Rightarrow a = 5$ cm.

A área total de um cubo é dada por:

$A_T = 6a^2 = 6.5^2 = 150$ cm^2.

Portanto, a área total do cubo é 150 cm^2.

04| Um prisma triangular regular tem 10 cm de altura. Sabendo que a medida da aresta da base é de 6 cm, calcule a área total do prisma.

Resolução:

A área da base de um prisma triangular regular é dada por:

$$A_B = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}\ cm^2$$

Esse prisma possui três faces laterais retangulares. Logo, a área lateral desse prisma é dada por:

$A_L = 3.6.10 = 180\ cm^2$

Assim, a área total é dada por:

$A_T = 180 + 2.9\sqrt{3} = 18.(10 + \sqrt{3})\ cm^2$

Portanto, a área total é $18.(10 + \sqrt{3})\ cm^2$.

05| Em um prisma hexagonal regular, a aresta da base mede 10 cm e a aresta lateral, 20 cm. Calcule a área lateral e a área total.

Resolução:

A área lateral desse prisma é dada por:

$A_L = 6.10.20 = 1200\ cm^2$

A área da base desse prisma é dada por:

$$A_B = 6.\frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 6.\frac{100\sqrt{3}}{4} = 150\sqrt{3}\ cm^2$$

Assim, a área total é dada por:

$A_T = 1200 + 2.150\sqrt{3} = 300.(4 + \sqrt{3})\ cm^2$

Portanto, a área total é $300.(4 + \sqrt{3})\ cm^2$.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| As arestas de um paralelepípedo retângulo medem 2 cm, 3 cm e 4 cm. Calcule a sua diagonal, a sua área total e o seu volume.

02| As arestas de um paralelepípedo reto-retângulo têm medidas proporcionais a 3, 4 e 12. Sabendo que a sua diagonal mede 26 dm, calcule:

- **A** As medidas de suas arestas.
- **B** O seu volume.
- **C** A sua área total.

03| A diagonal e a área total de um paralelepípedo retângulo são, respectivamente, $\sqrt{93}$ m e 132 m^2. Se as dimensões de suas arestas estão em progressão aritmética, determine sua capacidade em litros.

04| As medidas das arestas de um paralelepípedo reto-retângulo são expressas por três números inteiros e consecutivos. Calcule o volume desse paralelepípedo, sendo que $\sqrt{14}$ m é a medida de sua diagonal.

05| A área total e o volume de uma caixa de papelão no formato de paralelepípedo retângulo são, respectivamente, 112 dm^2 e 64 dm^3. Calcule as medidas de suas dimensões sabendo que as mesmas estão em progressão geométrica.

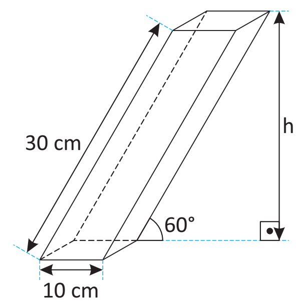
06| A aresta da base e a altura de um prisma triangular regular medem 3 cm. Determine o volume e a área lateral desse prisma.

07| Sabe-se que o volume de um prisma triangular regular é $7\sqrt{3}$ m^3. Determine a altura do prisma se a aresta de sua base mede 2 m.

08| Seja um prisma triangular regular de aresta da base igual a 3 cm e altura igual a 5 cm, determine:

- **A** A área da base.
- **B** A área lateral.
- **C** A área total.
- **D** O volume.

09| Calcule a área total da superfície do prisma oblíquo de base quadrada representado abaixo. Sabe-se que as suas faces laterais são congruentes.



10| A base de um prisma é um quadrado de área 150 m^2. Sabendo que a diagonal da base mede m, calcule a amplitude do ângulo que uma diagonal desse sólido espacial forma com o plano da base quadrada.

T ENEM E VESTIBULARES

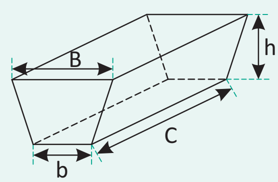
01| ESCS Em uma loja de pedras preciosas, o preço de uma pedra preciosa é proporcional a sua massa. Certa pedra, na forma de um paralelepípedo retângulo custa R$ 200,00. Uma outra pedra, do mesmo material da primeira, tem as suas dimensões multiplicadas por 2,5.

O preço da nova pedra deverá ser:

A) R$ 500,00
B) R$ 1.250,00
C) R$ 2.250,00
D) R$ 2.625,00
E) R$ 3.125,00

02| ENEM Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma trapezoidal, conforme mostrado na figura.

Legenda:
b - largura do fundo
B - largura do topo
C - comprimento do silo
h - altura do silo



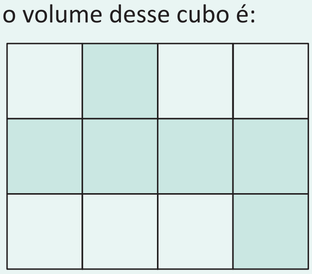
Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m^3 desse tipo de silo.

EMBRAPA. Gado de corte. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2.012. (adaptado)

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é:

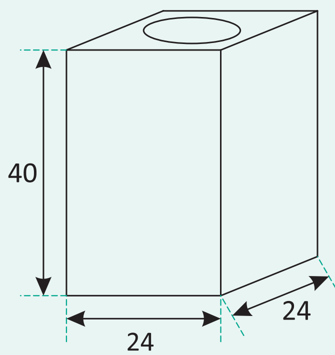
A) 110
B) 125
C) 130
D) 220
E) 260

03| ESCS Com a parte escurecida da folha retangular abaixo, pode-se montar um cubo. Se a área da folha vale 192 cm^2, então o volume desse cubo é:



A) 27 cm^3
B) 32 cm^3
C) 64 cm^3
D) 96 cm^3
E) 128 cm^3

04| ENEM Uma lata de tinta, com a forma de uma paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.



Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura atual deve ser reduzida em:

A) 14,4%
B) 20,0%
C) 32,0%
D) 36,0%
E) 64,0%

05| UFGD Uma piscina de ladrilhos quadrados tem 6 ladrilhos de profundidade, 16 ladrilhos de largura e 30 ladrilhos de comprimento. Um conjunto de 16 ladrilhos justapostos tem área igual a 1 m^2. Cada 100 litros de água custa R$ 2,36, então, o custo para encher a piscina será de:

A) R$ 104,20
B) R$ 108,80
C) R$ 206,80
D) R$ 106,80
E) R$ 106,20

06| ENEM Durante uma epidemia de uma gripe viral, o secretário de saúde de um município comprou 16 galões de álcool em gel, com 4 litros de capacidade cada um, para distribuir igualmente em recipientes para 10 escolas públicas do município. O fornecedor dispõe à venda diversos tipos de recipientes, com suas respectivas capacidades listadas:

- Recipiente I: 0,125 litro
- Recipiente II: 0,250 litro
- Recipiente III: 0,320 litro
- Recipiente IV: 0,500 litro
- Recipiente V: 0,800 litro

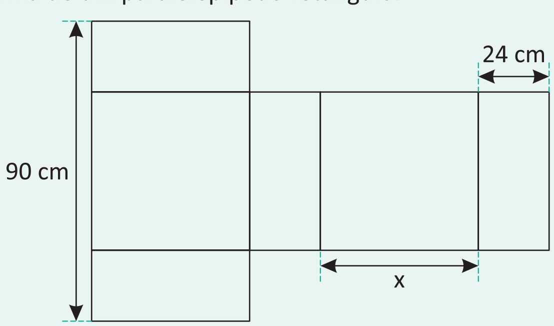
O secretário de saúde comprará recipientes de um mesmo tipo, de modo a instalar 20 deles em cada escola, abastecidos com álcool em gel na sua capacidade máxima, de forma a utilizar todo o gel dos galões de uma só vez.

Que tipo de recipiente o secretário de saúde deve comprar?

A I
B II
C III
D IV
E V

07| ENEM Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura) não pode ser superior a 115 cm.

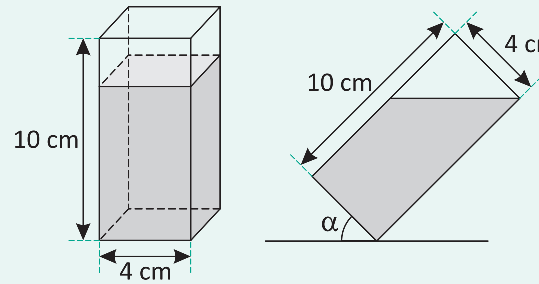
A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é:

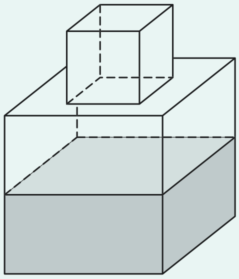
A 25
B 33
C 42
D 45
E 49

08| UFLA Um copo de base quadrada está com 80% de sua capacidade com água. O maior ângulo possível que esse copo pode ser inclinado, sem que a água se derrame é:



A 45°
B 30°
C 60°
D 15°

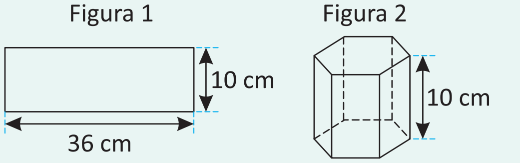
09| ENEM Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

A 8
B 10
C 16
D 18
E 24

10| UFTM Um rótulo de forma retangular (figura 1) será colado em toda a superfície lateral de um recipiente com a forma de um prisma hexagonal regular (figura 2), sem haver superposição.



Considerando $\sqrt{3} = 1,73$, é correto afirmar que a capacidade desse recipiente é, em mℓ, aproximadamente:

A 934

B 1.150

C 650

D 865

E 1.350

11| UFMS Para fazer uma caixa sem tampa com um único pedaço de papelão, utilizou-se um retângulo de 16 cm de largura e 30 cm de comprimento. De cada um dos quatro cantos desse retângulo, foram retirados quadrados idênticos de lados com x cm de comprimento $(0 < x < 8)$. Depois, foram dobradas para cima as abas resultantes. A expressão que representa a área lateral da caixa é:

A $92x - 8x^2$ cm^2

B $62x - 6x^2$ cm^2

C $72x - 6x^2$ cm^2

D $46x - 4x^2$ cm^2

E $32x - 4x^2$ cm^2

12| UFPEL O mundo mineral nos brinda com inúmeros exemplos matemáticos no que se refere a sólidos geométricos. Um dos mais famosos de todo mundo é a chamada Calçada dos Gigantes, um vasto aglomerado de colunas de rochas basálticas vulcânicas, em forma de prismas de diferentes alturas, na sua maioria hexagonais, mas também pentagonais e ainda polígonos irregulares com 4, 7, 8, 9 e 10 lados, que se erguem junto à costa setentrional do Planalto de Antrim, na Irlanda do Norte.

http:/www.educ.fc.ul.pt/ism/ism2002/ism/2003geometria.htm

Com base no texto e em seus conhecimentos, é correto afirmar que:

A a área total de um prisma reto é dada pelo produto da área lateral pela área da base.

B o cubo é um prisma particular, denominado hexaedro regular, sendo que sua diagonal mede $a\sqrt{2}$, sendo a a medida da aresta lateral.

C o volume de um prisma hexagonal é o produto da área lateral pela altura.

D o volume de um prisma de base triangular é o duplo produto da área da base pela altura.

E prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases e cujas faces laterais são retângulos.

13| PUC Um aquário, que tem a forma de um prisma retangular reto com 1,50 m de comprimento e 0,80 m de largura, fica completamente cheio com 1.080 litros de água. A medida da altura desse aquário, em centímetros, é:

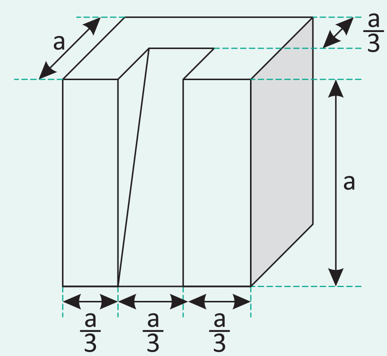
A 70

B 90

C 110

D 130

14| CEFET Observando-se o esquema gráfico, podemos afirmar que o volume do sólido retirado do cubo de aresta a é:



A $\frac{2a^3}{9}$

B $\frac{a^3}{9}$

C $\frac{a^3}{6}$

D $\frac{2a^2}{9}$

E $\frac{9a^3}{2}$

15| PUC Tem-se um prisma reto de base hexagonal, cuja altura é $h = \sqrt{3}$ e cujo raio do círculo que circunscreve a base é $R = 2$. A área total deste prisma é:

A $\sqrt{3}$

B $24\sqrt{3}$

C 30

D $10\sqrt{2}$

E 8

16| UNISC Ao comprar um determinado produto, um consumidor sem muito conhecimento matemático ficou em dúvida na hora de escolher uma, dentre duas embalagens feitas com mesmo material, custando o mesmo preço e contendo produto de mesma qualidade. Se uma dessas embalagens (embalagem A) tem a forma de um cubo de aresta 5 cm e a outra (embalagem B) tem a forma de um prisma hexagonal regular de mesma altura do cubo, mas com aresta da base 3 cm, pode-se afirmar que:

I. é mais vantajoso comprar a embalagem A.

II. não há vantagem entre uma ou outra embalagem.

III. a embalagem B contém em torno de 10% a mais de produto em relação à embalagem A.

Assinale a alternativa correta em relação à situação apresentada acima.

A) Somente a afirmativa I está correta.

B) Todas as afirmativas acima estão corretas.

C) Somente a afirmativa II está correta.

D) Somente as afirmativas I e III estão corretas.

E) Nenhuma afirmativa está correta.

17| UNIOESTE Considere-se uma lixeira sem tampa, com as quatro laterais semelhantes. As laterais da lixeira têm formato de trapézio isósceles com a base menor voltada para baixo. A base maior mede 40 cm e esta tem o dobro da medida da base menor. Em cada trapézio a altura mede 15 cm. Desprezando-se a espessura das placas efetivamente utilizadas para construir a lixeira, pode-se afirmar que a área da superfície externa é de:

A) 1.800 cm^2

B) 2.000 cm^2

C) 2.600 cm^2

D) 1.500 cm^2

E) 2.200 cm^2

18| UFABC Para fabricar um único microchip de 32 megabites de memória (figura 1) usam-se 1,6 kg de combustível fóssil e 72 gramas de substâncias químicas (Enciclopédia do Estudante, Estadão). É necessária ainda toda a água contida em um prisma reto de base quadrada (figura 2), com sua capacidade total preenchida.

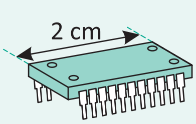


Figura 1

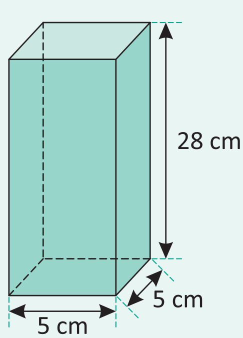


Figura 2

Sabendo-se que a densidade da água, ou massa por unidade de volume, é de 1 g/mℓ, pode-se concluir que a massa da água usada para fabricar esse microchip é igual a:

A) 400 g

B) 500 g

C) 550 g

D) 600 g

E) 700 g

19| UNISC Uma barra de chocolate, na forma de paralelepípedo retângulo, de dimensões 60 cm, 40 cm e 5 cm, é derretida para fazer chocolate com crocante. Para isso, ao chocolate derretido é acrescentado 25% do seu volume em castanhas, nozes e açúcar caramelizado. Com essa mistura, quantas barrinhas na forma de prismas hexagonais, de aresta da base medindo 2 cm e altura 10 cm, podem ser feitas aproximadamente? (Considere $\sqrt{3} = 1,73$)

A) 144

B) 115

C) 114

D) 867

E) 864

20| UERJ Uma embalagem em forma de prisma octogonal regular contém uma pizza circular que tangencia as faces do prisma.

Desprezando a espessura da pizza e do material usado na embalagem, a razão entre a medida do raio da pizza e a medida da aresta da base do prisma é igual a:

A) $2\sqrt{2}$

B) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

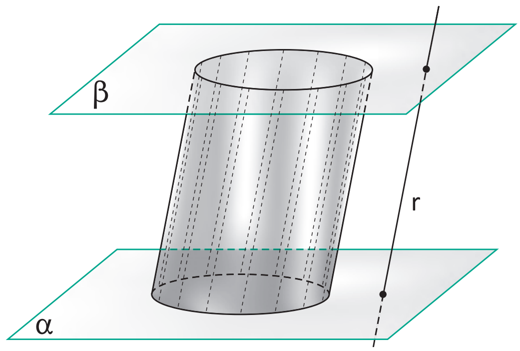
C) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

D) $2(\sqrt{2}-1)$

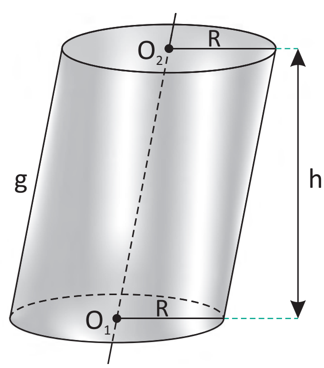
CILINDROS

DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Dados dois planos α e β paralelos, um círculo contido em α e uma reta r secante a esses dois esses planos. Dá-se o nome de cilindro, à figura geométrica espacial obtida pela união de todos os segmentos paralelos à r com uma extremidade no círculo e outra em β. Observe a figura a seguir:



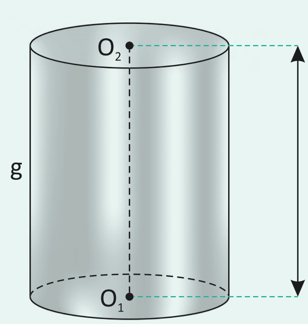
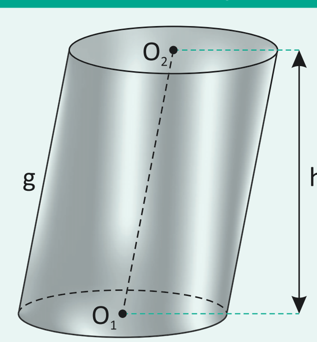
Na figura a seguir, podemos destacar os seus principais elementos.



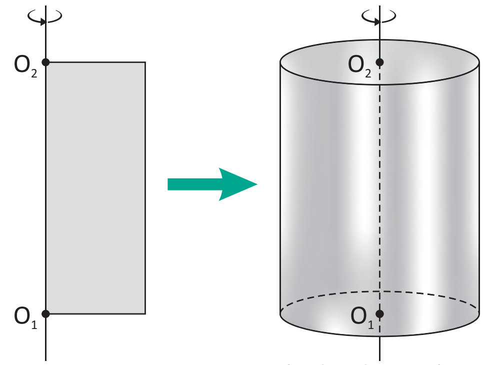
- Os círculos de centros O_1 e O_2 e raio R são as bases do cilindro.
- A reta que passa por O_1 e O_2 é o eixo do cilindro.
- Os segmentos paralelos ao eixo com extremidades nas bases são as geratrizes do cilindro.
- A distância h entre os planos α e β paralelos é a altura do prisma.

CILINDRO RETO E CILINDRO OBLÍQUO

Um cilindro será reto quando as geratrizes forem perpendiculares aos planos das bases. Quando isso não ocorrer, classificaremos o cilindro em oblíquo. Observe as figuras a seguir:

Cilindro reto	Cilindro oblíquo
	
Note que a medida da altura é igual à medida da geratriz.	Note que a medida da altura não é igual à medida da geratriz.

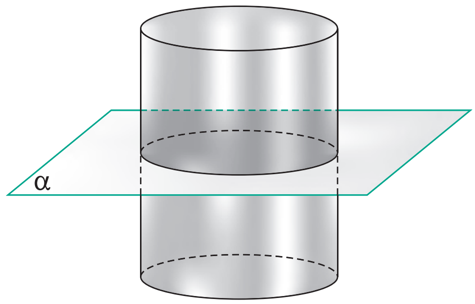
O cilindro reto também é chamado de **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido através da revolução (rotação) de 360° de uma região limitada por um retângulo em torno de um dos seus lados. Observe as figuras a seguir:



Cilindro de revolução

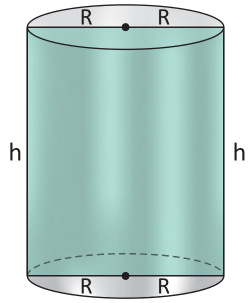
SECÇÃO TRANSVERSAL DO CILINDRO

A secção transversal de um cilindro é um círculo obtido através da intersecção do cilindro e um plano paralelo à sua base. Observe a figura a seguir:



SECÇÃO MERIDIANA DO CILINDRO RETO

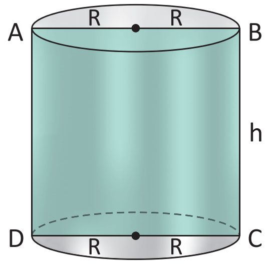
A secção meridiana de um cilindro reto é um retângulo obtido através da intersecção do cilindro e um plano que contém o eixo desse cilindro. Observe a figura a seguir:



Secção meridiana

CILINDRO EQUILÁTERO

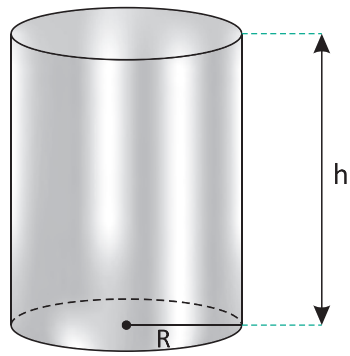
Um cilindro reto é equilátero quando sua secção meridiana for um quadrado. Observe a figura a seguir



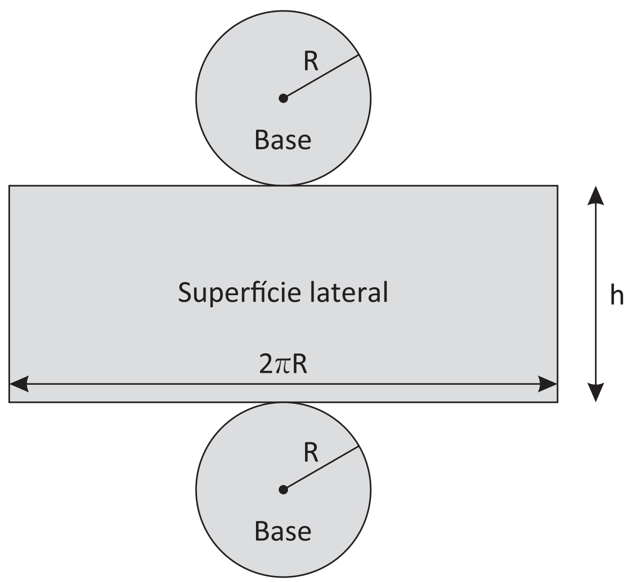
Nessa situação, temos que o quadrilátero ABCD é um quadrado, portanto $h = 2R$.

ÁREAS DO CILINDRO RETO

A superfície total de um cilindro é formada pela superfície da duas bases mais a superfície lateral. Na figura a seguir, temos um cilindro reto cuja altura mede h e raio da base mede R.



Para obtermos as expressões que fornecem as áreas dessas superfícies, vamos retirar as bases desse cilindro, recortar sua superfície lateral e, em seguida, planificar (colocar sobre um plano) as três regiões obtidas. Observe a figura a seguir:



ÁREA DA BASE

A área da base (A_B) do cilindro é dada pela área do círculo que compõe a superfície da base. Assim, temos que:

$$A_B = \pi R^2$$

ÁREA LATERAL

A área lateral (A_L) do cilindro é dada pela área do retângulo de base $2\pi R$ e altura h. Assim, temos que:

$$A_L = 2\pi Rh$$

ÁREA TOTAL

A área total (A_T) é dada pela soma das áreas das bases e da área lateral. Assim, temos que:

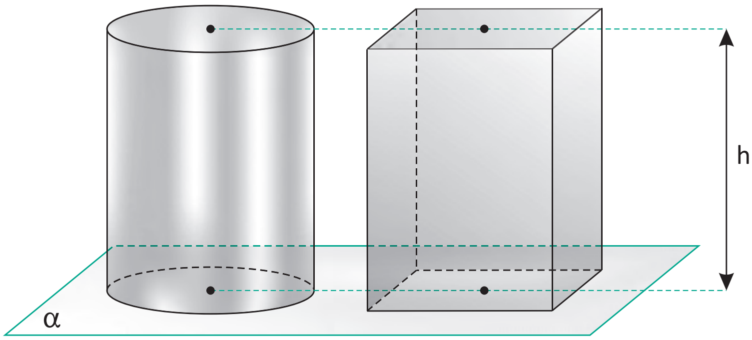
$A_L = 2A_B + A_L = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$

Portanto, temos que:

$$A_T = 2\pi R(R + h)$$

VOLUME DO CILINDRO

Utilizando o princípio de Cavalieri, temos que o volume (V) de um cilindro de altura (h) e área da base (A_B), é igual ao volume de um prisma de altura (h) e base equivalente (mesma área). Observe a figura a seguir.



Assim, o volume (V) de um cilindro é dado por:

$$V = A_B.h$$

Portanto, temos que:

$$V = \pi R^2 h$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Calcule a área total de um cilindro circular reto cujo diâmetro da base é 12 cm e a altura é 5 cm. Use $\pi = 3,14$.

Resolução:

Se a medida do diâmetro vale 12 cm, então o raio mede 6 cm.

Sua área lateral é dada por:

$A_L = 2\pi r.h = 2.\pi.6.5 = 60\pi$

Sua área da base é dada por:

$A_B = \pi r^2 = \pi.6^2 = 36\pi$

Sua área total é dada por:

$A_T = \pi(60 + 2.36) = 132\pi = 414,48\ cm^2$

Portanto, a área total é 414,48 cm².

02| Qual a capacidade, em litros, de um reservatório de água que tem o formato de um cilindro reto com 16 m de altura e 4 m de raio da base? Use $\pi = 3,14$.

Resolução:

Convertendo as unidades para decímetros, temos:

Altura: h = 16 m = 160 dm

Raio da base: R = 4 m = 40 dm

O volume é dado por:

$V = A_B.h = \pi.40^2.160 = 256.000\pi = 803.840\ dm^3$

Portanto, a capacidade é de 803.840 litros.

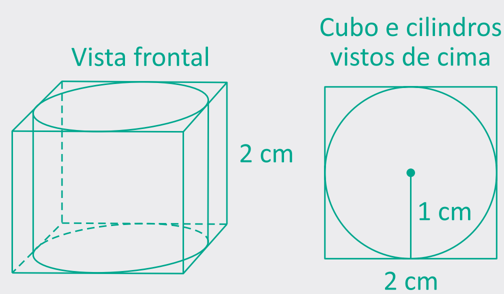
03| Calcule o volume de um cilindro inscrito num cubo de 24 m² de área total.

Resolução:

A área total do cubo de aresta a é dada por:

$A_T = 6a^2 \Rightarrow 24 = 6a^2 \Rightarrow a = 2\ m$

Observe as figuras a seguir:



Note que:

- *A medida do raio da base R do cilindro é a metade da medida da aresta a do cubo, ou seja, R = 1 cm.*
- *A altura do cilindro tem a mesma medida da aresta do cubo.*

O volume do cilindro é dado por:

$V = A_B.h = \pi.1^2.2 = 2\pi\ cm^3.$

Portanto, o volume é $2\pi\ cm^3$.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Determine a área lateral e o volume de um cilindro reto de 6 m de altura e raio da base igual a 3 m.

02| Considerando um cilindro reto de 10 m de altura e área da base é igual à área lateral, calcule:

A A área lateral

B A área da secção meridiana

03| Dado um cilindro equilátero de raio R, calcule:

A A sua área lateral.

B A sua área total.

C O seu volume.

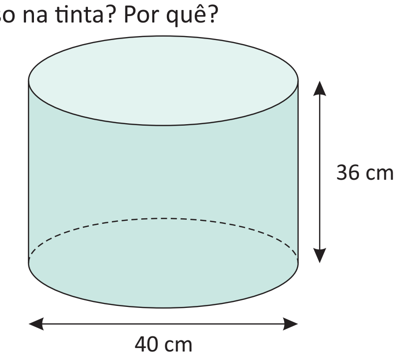
04| Calcule a razão entre as áreas total e lateral de um cilindro equilátero.

05| Um pluviômetro cilíndrico tem um diâmetro de 30 cm. A água colhida pelo pluviômetro depois de um temporal é colocada em um recipiente também cilíndrico, cuja circunferência da base mede 20π cm.

Que altura havia alcançado a água no pluviômetro sabendo que no recipiente alcançou 180 mm?

06| Um combustível líquido ocupa uma altura de 8 m em um reservatório cilíndrico. Por motivos técnicos, deseja-se transferir o combustível para outro reservatório, também cilíndrico, com raio igual a 2,5 vezes o do primeiro. Qual a altura ocupada pelo combustível nesse segundo reservatório?

07| FGV Uma lata de tinta está cheia em $\frac{5}{6}$ de sua capacidade. Dentro da lata caiu um pincel de 45 cm de comprimento. É certo que o pincel ficará completamente submerso na tinta? Por quê?



08| Determine a área lateral de um cilindro de revolução que possui 16π m^2 de área total e que o seu raio é a terça parte da altura.

09| A secção meridiana de um cilindro de revolução é equivalente à área da base. Sabendo que o diâmetro da base é 4 cm, determine a sua área total.

10| Determinar o raio da base de um cilindro equilátero sabendo-se que a área lateral excede em 4π cm^2 a área da secção meridiana.

T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura. Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível. Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

A πd

B $2\pi d$

C $4\pi d$

D $5\pi d$

E $10\pi d$

02| UNIUBE A secção transversal de um cilindro circular reto é um quadrado com área de 4 m^2. O volume desse cilindro, em m^3, é:

A $\frac{\pi}{4}$

B $\frac{\pi}{2}$

C $\frac{2}{\pi}$

D 2π

E $4\sqrt{2}\,\pi$

03| ENEM Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre 10 mm de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado. Um medicamento é produzido em pílulas com 5 mm de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para 4 mm, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas. Use 3 como valor aproximado para π. A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a:

A) 168

B) 304

C) 306

D) 378

E) 514

04| ENEM É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Ciência Hoje das Crianças. FNDE; Instituto Ciência Hoje, n. 166, mar 1.996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de: (utilize $\pi = 3$)

A) 20 mℓ

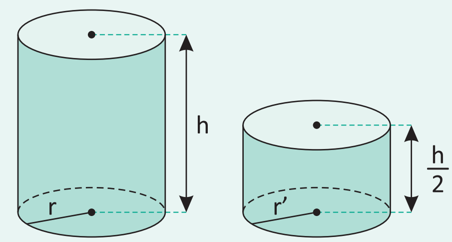
B) 24 mℓ

C) 100 mℓ

D) 120 mℓ

E) 600 mℓ

05| ENEM Um fabricante de bebidas, numa jogada de marketing, quer lançar no mercado novas embalagens de latas de alumínio para os seus refrigerantes. As atuais latas de 350 mℓ devem ser substituídas por uma nova embalagem com metade desse volume, conforme mostra a figura:



De acordo com os dados anteriores, qual a relação entre o raio r' da embalagem de 175 mℓ e o raio r da embalagem de 350 mℓ?

A) $r' = \sqrt{r}$

B) $r' = \frac{r}{2}$

C) $r' = r$

D) $r' = 2r$

E) $r' = \sqrt[3]{2}$

06| ENEM João tem uma loja onde fabrica e vende moedas de chocolate com diâmetro de 4 cm e preço de R$ 1,50 a unidade. Pedro vai a essa loja e, após comer várias moedas de chocolate, sugere ao João que ele faça moedas com 8 cm de diâmetro e mesma espessura e cobre R$ 3,00 a unidade. Considerando que o preço da moeda depende apenas da quantidade de chocolate, João:

A) aceita a proposta de Pedro, pois, se dobra o diâmetro, o preço também deve dobrar.

B) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 12,00.

C) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 7,50.

D) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 6,00.

E) rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 4,50.

07| UFSCAR Em um reservatório cilíndrico, com 2 metros de diâmetro, foram colocados 12.000 litros de água, fazendo com que a água atingisse 80% da altura total do reservatório. Considerando $\pi = 3$, pode-se concluir que a altura, em metros, desse reservatório é:

A) 4,5

B) 5,0

C) 5,5

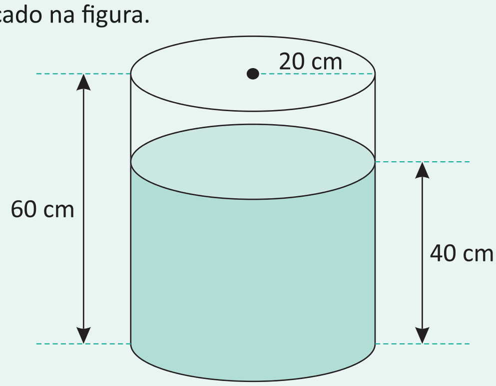
D) 6,0

E) 6,5

08| UNIR Uma caixa d'água tem a forma de um cilindro circular reto com raio da base medindo 1 metro e altura h metros. Fora colocada nessa caixa, anteriormente vazia, uma quantidade de água até que atingisse $\frac{1}{3}$ de sua altura. Em seguida, colocou-se um objeto sólido e a altura da água atingiu a metade da altura da caixa. Nessas condições, é correto afirmar que o volume do objeto sólido é igual:

- **A** à sexta parte do volume de água colocado na caixa.
- **B** à metade do volume de água colocado na caixa.
- **C** à terça parte do volume da caixa.
- **D** ao dobro do volume de água colocado na caixa.
- **E** à metade do volume da caixa.

09| UERJ Um recipiente cilíndrico de 60 cm de altura e base com 20 cm de raio está sobre uma superfície plana horizontal e contém água até a altura de 40 cm, conforme indicado na figura.



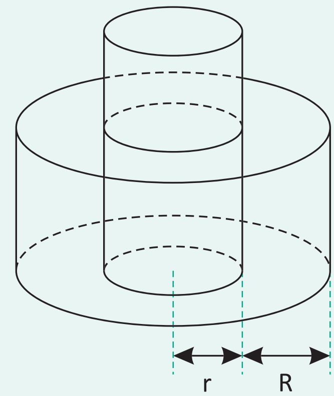
Imergindo-se totalmente um bloco cúbico no recipiente, o nível da água sobe 25%. Considerando π igual a 3, a medida, em cm, da aresta do cubo colocado na água é igual a:

- **A** $10\sqrt{2}$
- **B** $10\sqrt[3]{2}$
- **C** $10\sqrt{12}$
- **D** $10\sqrt[3]{12}$

10| UFOP Num cilindro circular reto, o raio da base e a altura medem $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm e $\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Então podemos afirmar que o valor de sua área lateral em cm é:

- **A** π
- **B** $\sqrt{6}\,\pi$
- **C** 2π
- **D** $\sqrt{2}\,\pi$
- **E** $\frac{6}{\sqrt{3}}\pi$

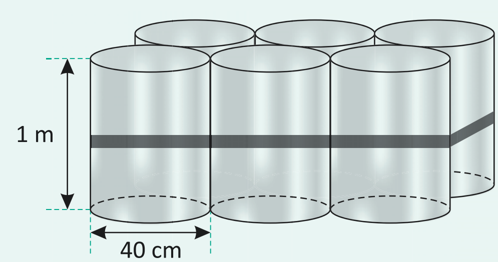
11| ENEM Em uma praça pública, há uma fonte que é formada por dois cilindros, um de raio r e altura h_1, e o outro de raio R e altura h_2. O cilindro do meio enche e, após transbordar, começa a encher o outro.



Se $R = r\sqrt{2}$ e $h_2 = \frac{h_1}{3}$ e, para encher o cilindro do meio, foram necessários 30 minutos, então, para se conseguir encher essa fonte e o segundo cilindro, de modo que fique completamente cheio, serão necessários:

- **A** 20 minutos
- **B** 30 minutos
- **C** 40 minutos
- **D** 50 minutos
- **E** 60 minutos

12| ENEM O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou kits com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R$ 2,50 por metro cúbico utilizado.



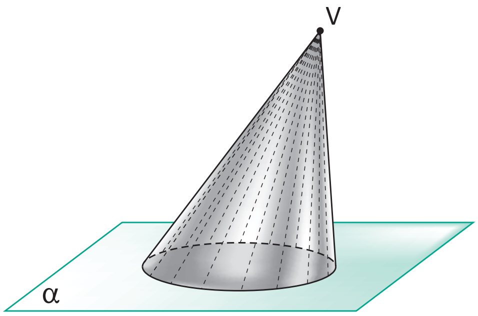
Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do kit em um mês pagará a quantia de: (considere $\pi = 3$)

- **A** R$ 86,40
- **B** R$ 21,60
- **C** R$ 8,64
- **D** R$ 7,20
- **E** R$ 1,80

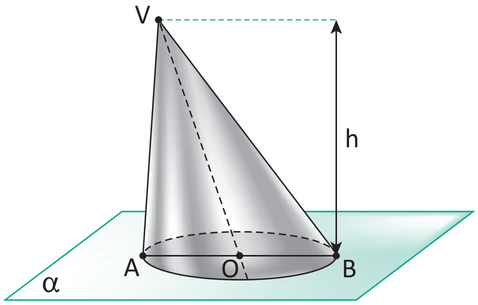
CONES

DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Dado um plano α, um círculo C contido em α e um ponto V fora de α. Dá-se o nome de cone circular, ou simplesmente cone, à figura geométrica espacial obtida pela união de todos os segmentos com uma extremidade no ponto V outra extremidade no círculo. Observe a figura a seguir:



Na figura a seguir, podemos destacar os principais elementos de um cone.



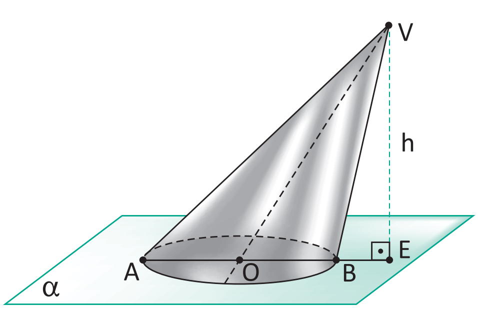
- O ponto V é o seu vértice.
- O círculo de centro O é a sua base.
- Os segmentos VA e VB são suas geratrizes.
- O segmento AB é o diâmetro da sua base.
- O segmento VO é o seu eixo.
- A distância h entre V e α é a sua altura.

CLASSIFICAÇÃO

Quanto a inclinação do seu eixo, um cone pode se classificar em:

CONE OBLÍQUO

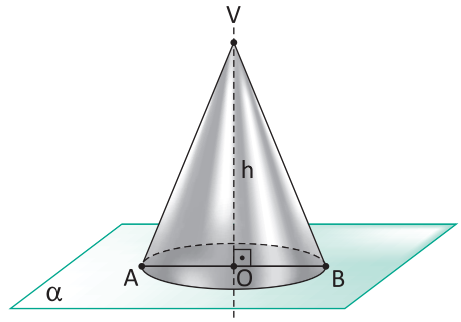
Um cone é oblíquo quando seu eixo VO for oblíquo ao plano que contém sua base. Observe a figura a seguir:



Nessa situação, a altura (h) do cone é a medida do segmento VE.

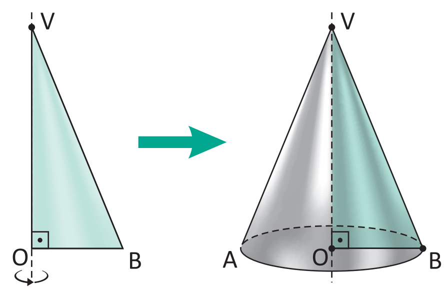
CONE RETO

Um cone é reto quando seu eixo VO for perpendicular ao plano que contém sua base. Observe a figura a seguir:



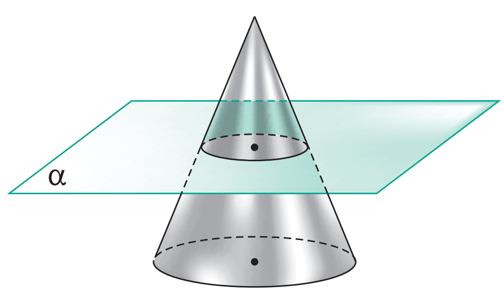
Nessa situação, a altura (h) do cone é a medida do segmento VO.

O cone reto também é chamado de **cone de revolução**, pois pode ser obtido através da revolução (rotação) de 360° de uma região limitada por um triângulo retângulo em torno de um dos seus catetos. Observe as figuras a seguir:



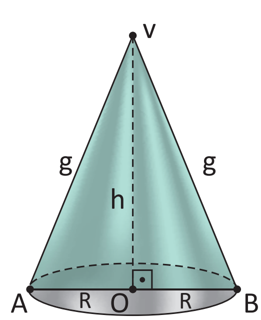
SECÇÃO TRANSVERSAL DO CONE

A secção transversal de um cone é um círculo obtido através da intersecção do cone e um plano paralelo à sua base. Observe a figura a seguir:



SECÇÃO MERIDIANA DO CONE RETO

A secção meridiana de um cone reto é um triângulo isósceles obtido através da intersecção do cone e de um plano que contém seu eixo. Observe a figura a seguir:



Nessa situação, temos que:

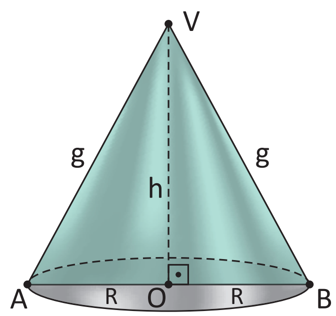
- O triângulo VAB é a secção meridiana do cone.
- g é a medida das geratrizes VA e VB.
- h é a medida da altura VO.
- r é a medida do raio OB.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo VOB, temos que:

$$g^2 = h^2 + R^2$$

CONE EQUILÁTERO

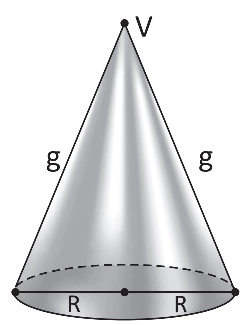
Um cone reto é equilátero quando sua secção meridiana for um triângulo equilátero. Observe a figura a seguir



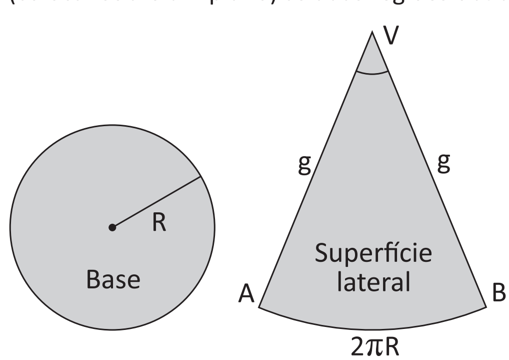
Nessa situação, temos que o triângulo VAB é equilátero, portanto $g = 2R$.

ÁREAS DO CONE RETO

A superfície total de um cone é formada pela superfície da base mais a superfície lateral. Na figura a seguir, temos um cone reto cuja geratriz mede g e raio da base mede R.



Para obtermos as expressões que fornecem as áreas dessas superfícies, vamos retirar a base desse cone, recortar sua superfície lateral e, em seguida, planificar (colocar sobre um plano) as duas regiões obtidas. Observe a figura a seguir:



ÁREA DA BASE

A área da base (A_B) do cone é dada pela área do círculo que compõe a superfície da base. Assim, temos que:

$$A_B = \pi R^2$$

ÁREA LATERAL

A área lateral (A_L) do cone é dada pela área do setor circular que compõe a superfície lateral.

Para obtê-la deve-se observar que o comprimento do arco A_B é proporcional à área do setor circular V_{AB}. Assim, podemos estabelecer a seguinte regra de três simples:

Comprimento do arco	Área
$2\pi g$	πg^2
$2\pi R$	A_L

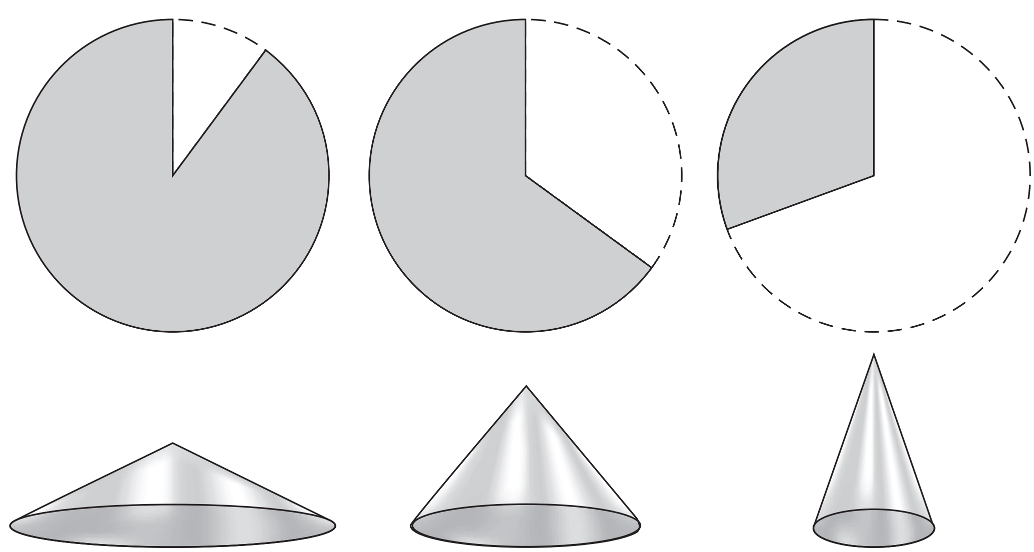
Logo, temos que:

$$2\pi g . A_L = 2\pi R . \pi g^2$$

Portanto, temos que:

$$A_L = \pi R g$$

A figura abaixo relaciona a amplidão de um setor circular e o tamanho da área lateral que ele pode definir. Observe que a altura do cone varia de acordo com a variação do setor:



ÁREA TOTAL

A área total (A_T) é dada pela soma da área da base e da área lateral. Assim, temos que:

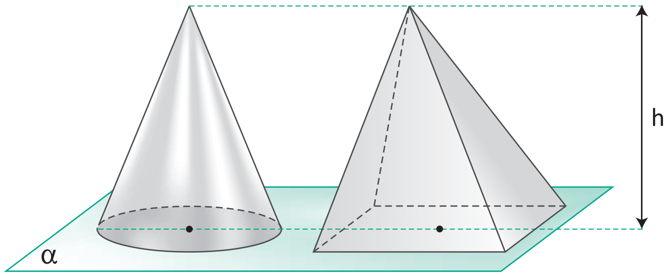
$$A_L = A_B + A_L = \pi R^2 + \pi R g$$

Portanto, temos que:

$$A_L = \pi R(R + g)$$

VOLUME DO CONE

Utilizando o princípio de Cavalieri, temos que o volume (V) de um cone de altura (h) e área da base (A_B), é igual ao volume de uma pirâmide de altura (h) e base equivalente (mesma área). Observe a figura a seguir.



Assim, o volume (V) de um cone é dado por:

$$V = \frac{A_B . h}{3}$$

Portanto, temos que:

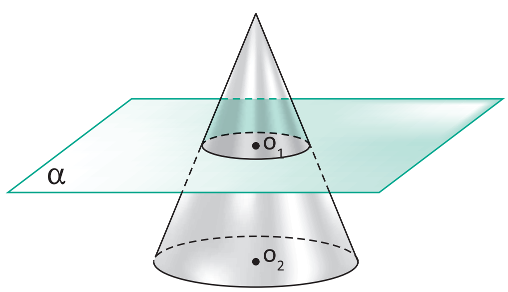
$$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

OBSERVAÇÃO:

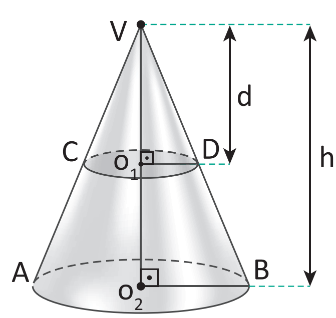
- O volume de um cone de mesma área da base e mesma altura de um cilindro é igual a um terço do volume desse cilindro.

CONES SEMELHANTES

Ao interceptar um cone reto por um plano α que não contém seu vértice V, paralelo à sua base, obteremos dois novos sólidos. Um cone acima do plano α e um sólido abaixo do plano α chamado de tronco de cone. Observe a figura a seguir:



Assim, temos que o cone cuja base é o círculo de centro O_1 e o cone cuja base é o círculo de O_2 são sólidos semelhantes. Logo, podemos estabelecer relações de proporção entre seus elementos. Observe a figura a seguir:



Nessa figura, considere que:

- O cone C_1 é aquele cuja base é o círculo de centro O_1 e altura cuja medida é d.
- O cone C_2 é aquele cuja base é o círculo de centro O_2 e altura cuja medida é h.

Como esses dois cones são sólidos semelhantes, temos as seguintes relações:

- Relação entre os raios das bases:

$$\frac{r}{R} = \frac{d}{h}$$

- Relação entre as áreas das bases:

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{d}{h}\right)^2$$

Sendo A_1 a área da base do cone C_1 e A_2 a área da base do cone C_2.

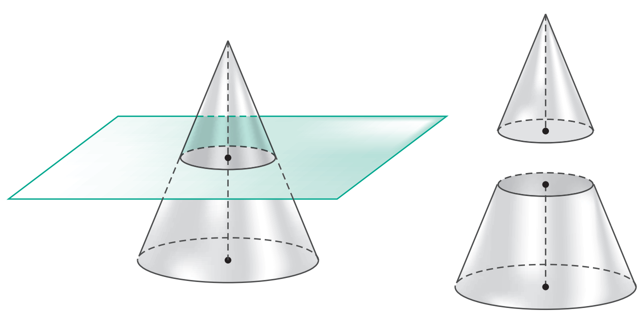
- Relação entre os volumes:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{d}{h}\right)^3$$

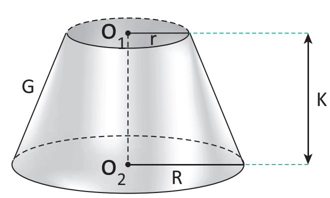
Sendo V_1 o volume do cone C_1 e V_2 o volume do cone C_2.

TRONCO DE CONE

Já sabemos que ao interceptar um cone por um plano α paralelo à sua base obteremos um novo cone acima de α e um tronco de cone abaixo de α. Observe as figuras a seguir.



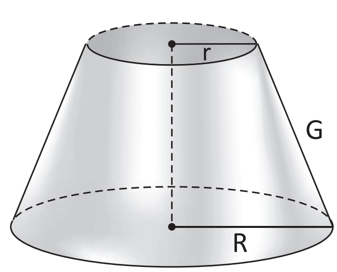
Na figura a seguir, podemos destacar os principais elementos de um tronco de cone.



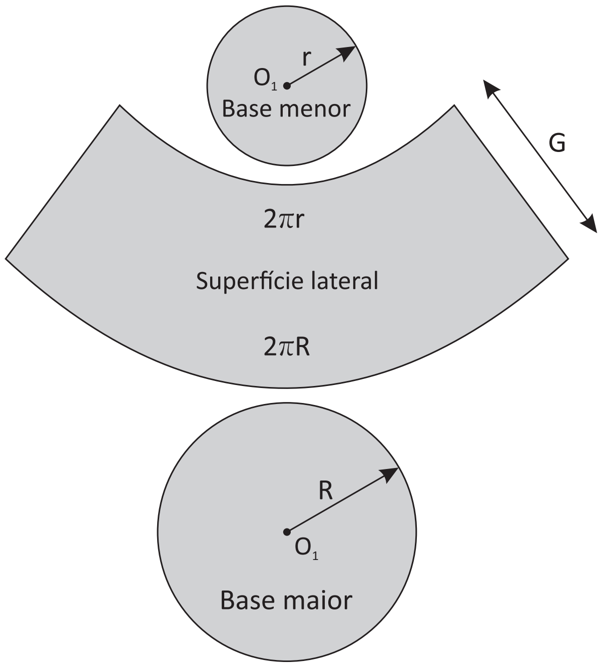
- r é a medida do raio de sua base menor.
- R é a medida do raio de sua base maior.
- G é a medida de sua geratriz.
- k a medida de sua altura.

ÁREAS DO TRONCO DE CONE

A superfície total de um tronco de cone é formada pela superfície da base maior mais a superfície da base menor mais a superfície lateral. Na figura a seguir, temos um tronco de cone reto cuja geratriz mede G, o raio da base maior mede R e raio da base menor mede r.



Para obtermos as expressões que fornecem as áreas dessas superfícies, vamos retirar as bases desse tronco, recortar sua superfície lateral e, em seguida, planificar (colocar sobre um plano) as três regiões obtidas. Observe a figura a seguir:



ÁREA DA BASE MAIOR

A área da base maior (A_B) do tronco de cone é dada pela área do círculo que compõe a superfície da base. Assim, temos que:

$$A_B = \pi R^2$$

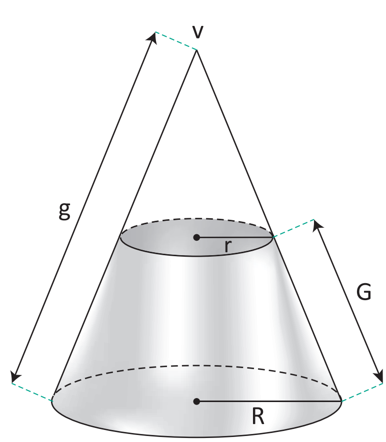
ÁREA DA BASE MENOR

A área da base menor (A_b) do tronco de cone é dada pela área do círculo que compõe a superfície dessa base. Assim, temos que:

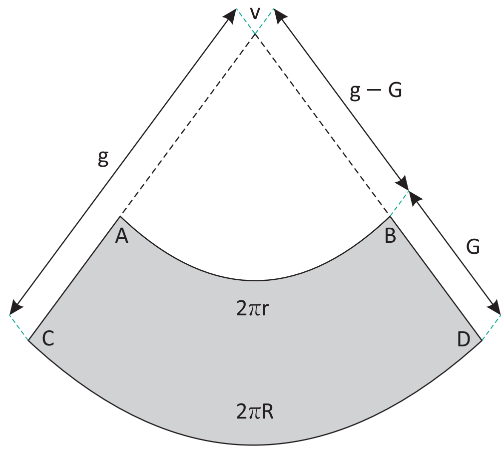
$$A_b = \pi r^2$$

ÁREA LATERAL

Prolongando-se as geratrizes do tronco de cone, obtermos um cone de vértice V e geratriz cuja medida é g. Observe a figura a seguir:



Planificando a superfície lateral, temos que a área lateral (A_L) do tronco de cone é dada pela diferença entre as áreas dos setores circulares VCD e VAB. Observe a figura a seguir:



Inicialmente, estabelecer uma relação entre as geratrizes cujas medidas são g e G através de uma regra de três simples:

Medida do raio	Medida do arco
g	$2\pi R$
$g - G$	$2\pi r$

Assim, temos que $\dfrac{g}{g-G} = \dfrac{2\pi R}{2\pi r} \Rightarrow g = \dfrac{GR}{R-r}$.

Para obter a área de do setor circular VAB, podemos estabelecer a seguinte regra de três simples:

Comprimento do arco	Área
$2\pi(g-G)$	$\pi(g-G)^2$
$2\pi r$	A_1

Assim, temos que $A_1 = \pi r(g - G)$

Para obter a área do setor circular VCD, podemos estabelecer a seguinte regra de três simples:

Comprimento do arco	Área
$2\pi g$	πg^2
$2\pi R$	A_2

Assim, temos que $A_2 = \pi Rg$.

A área da superfície lateral (A_L) é dada por:

$A_L = A_2 - A_1 = \pi Rg - \pi r(g - G) = \pi Rg - \pi rg - \pi rG$

Substituindo $g = \dfrac{GR}{R-r}$ na expressão anterior, temos:

$$A_L = \frac{\pi R^2 G}{R-r} - \frac{\pi GRr}{R-r} + \pi Gr$$

$$A_L = \frac{\pi R^2 G - \pi GRr + \pi GRr - \pi Gr^2}{R-r}$$

$$A_L = \frac{\pi R^2 G - \pi Gr^2}{R-r} = \frac{\pi G(R^2 - r^2)}{R-r} = \frac{\pi G(R-r)(R+r)}{R-r}$$

Portanto, temos que:

$$A_L = \pi G(R + r)$$

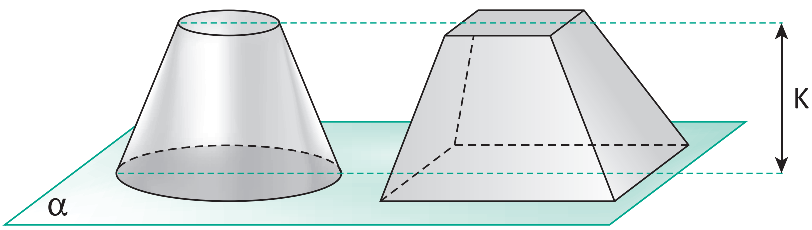
ÁREA TOTAL

A área total (A_T) é dada pela soma das áreas das bases maior e menor com a área lateral. Portanto, temos que:

$$A_T = A_B + A_b + A_L$$

VOLUME DO TRONCO DE CONE

Utilizando o princípio de Cavalieri, temos que o volume (V) de um tronco de cone de altura (k), área da base maior (A_B) e área da base menor (A_b), é igual ao volume de um tronco de pirâmide de altura (k) e bases equivalentes (mesmas áreas). Observe a figura a seguir.



Logo, o volume do tronco de cone, assim como o volume do tronco de pirâmide, é dado por:

$$V = \frac{K}{3}\left(A_B + \sqrt{A_B . A_b} + A_b\right)$$

Sendo R a medida do raio da base maior e r a medida do raio da base menor, desenvolvendo essa expressão, temos:

$$V = \frac{K}{3}.\left(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 . \pi r^2} + \pi r^2\right) = \frac{K}{3}.\left(\pi R^2 + \pi Rr + \pi r^2\right)$$

Portanto, o volume de um tronco de cone também pode dado por:

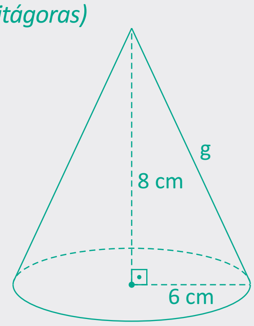
$$V = \frac{K\pi}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Se o diâmetro da base de um cone reto é 12 cm e a altura do cone é 8 cm, qual é a medida de sua geratriz?

Resolução:

Para um cone reto da figura a seguir, temos que $g^2 = h^2 + r^2$ (teorema de Pitágoras)



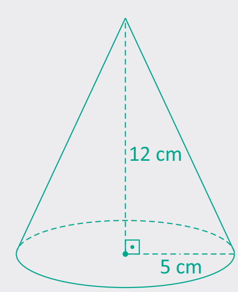
Substituindo os dados do enunciado, temos:

$g^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow g = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ cm}$

Portanto, a medida da geratriz é 10 cm.

02. Calcule o volume de um cone reto sabendo que o raio da base é 5 cm e a sua altura é 12 cm.

Resolução:



O volume de um cone é dado por:

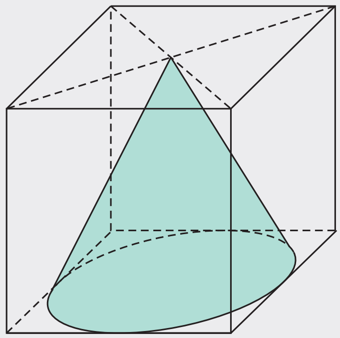
$V = \frac{\pi r^2 . h}{3}$

Substituindo os dados do enunciado, temos

$v = \frac{\pi 5^2 . 12}{3} = 100\pi \text{ cm}^3$

Portanto, o volume do cone é 100π cm^3.

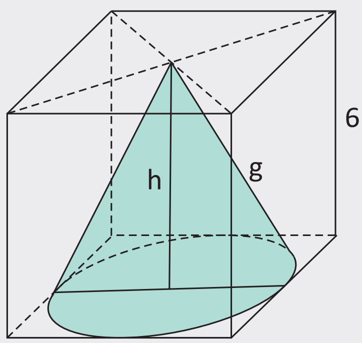
03. Um cubo cuja aresta mede 6 cm circunscreve um cone reto, conforme a figura a seguir.



Nessas condições, para o cone, determine a sua área da base, volume e a área lateral.

Resolução:

Analisando a figura a seguir, temos que:



A aresta do cubo é igual ao diâmetro da base, logo o raio da base mede 3 cm. Assim, temos que:

$A_B = \pi r^2 = \pi.3^2 = 9\pi \ cm^2$

A altura do cone tem a mesma medida da aresta do cubo. Assim, temos que:

$V = \dfrac{\pi 3^2.6}{3} = 18\pi \ cm^3$

A geratriz do cone é dada por:

$g^2 = 3^2 + 6^2 = 45 \Rightarrow g = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \ cm$

Assim, a área lateral será:

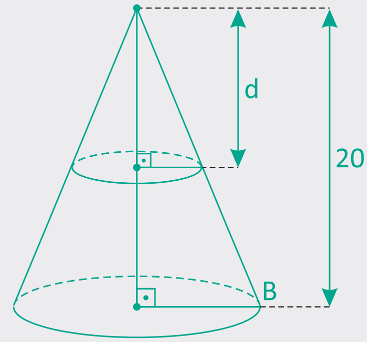
$A_l = \pi.3.3\sqrt{5} = 9\pi\sqrt{5} \ cm^2$

Portanto, o volume do cone é $18\pi \ cm^3$ e a área lateral é $9\pi\sqrt{5} \ cm^2$.

04. Um cone circular reto tem altura 20 cm. A que distância do vértice se deve traçar um plano paralelo à base, de forma que o volume do tronco de cone obtido seja igual a metade do volume do cone original?

Resolução:

Para tronco de cone da figura a seguir, temos:



Sendo V_1 o volume do cone original e V_2 o volume do cone menor, podemos estabelecer que:

$\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow V_1 = 2V_2$

$\dfrac{V_2}{V_1} = \left(\dfrac{d}{20}\right)^3 \Rightarrow \dfrac{V_2}{2V_2} = \left(\dfrac{d}{20}\right)^3$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{d^3}{8.000} \Rightarrow d^3 = 4.000 \Rightarrow d = 10\sqrt[3]{4} \ cm$

Portanto, a distância é $d = 10\sqrt[3]{4}$ cm.

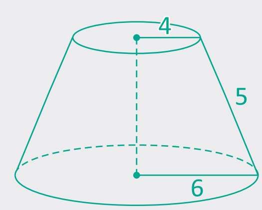
05. Considere um tronco de cone com as seguintes características:

- Raio da base maior igual a 6 m.
- Raio da base menor igual a 4 m.
- Geratriz igual a 5 m.

Nessas condições, determine sua área lateral e sua área total.

Resolução:

Para tronco de cone da figura a seguir, temos:



A área lateral do tronco é dada por:

$A_L = \pi G.(R + r) = \pi.5(6 + 4) = 50\pi \ cm^2$

A área total do tronco é dada por:

$A_B = \pi R^2 = \pi.6^2 = 36\pi \ cm^2$

$A_b = \pi r^2 = \pi.4^2 = 16\pi \ cm^2$

$A_T = A_B + A_b + A_L = 36\pi + 16\pi + 50\pi$

$A_T = 102\pi \ cm^2$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Um cone de revolução tem altura de 4 cm e raio da base 3 cm. Para esse cone determine:

A) A medida da geratriz.

B) A área da base.

C) A área lateral.

D) A área total.

E) O volume.

F) O ângulo central θ do setor circular obtido da planificação da superfície lateral.

02| Determine a área lateral e o volume de um cone equilátero, sabendo que o diâmetro da base mede 10 m.

03| Em um cone circular reto, o raio da base e a altura medem, respectivamente, 5 dm e 12 dm. Calcule a sua área lateral, a sua área total e o seu volume.

04| Num cone reto, a área lateral é igual a 48π cm^2 e o raio da base mede 6 cm. Calcule a sua geratriz.

05| Num cone circular reto, o raio da base é a metade da medida da geratriz e a área lateral mede 18π cm^2. Calcule o raio da base e o volume do cone.

06| Seja um tronco de cone reto. Determine a área lateral, a área total e o volume desse tronco, sabendo que o mesmo possui geratriz de medida 10 cm e raios das bases de 8 cm e 2 cm.

07| Secciona-se um cone circular reto de altura 12 cm e diâmetro 8 cm. Se a secção do cone aconteceu por um plano paralelo à base e distante 3 cm do vértice, determine o raio da secção, a área da secção e o volume do tronco de cone obtido após o seccionamento transversal.

08| Em um trapézio retângulo ABCD, as bases menor AB e maior CD medem, 1 cm e 4 cm respectivamente. O lado oblíquo AD tem medida de 5 cm. Determine o volume e a área lateral do tronco de cone obtido pela rotação do trapézio em torno do eixo central BC.

09| Uma embalagem tem a forma de um tronco de cone cujas medidas são 24 cm para o diâmetro da base maior e 6 cm para o raio da base menor. Determine o volume de líquido que essa embalagem pode comportar quando estiver 50% de sua capacidade total.

10| Um cone é seccionado por um plano paralelo à sua base. Considere h para a altura do cone original e $\frac{h}{2}$ para a altura do tronco. Qual é a relação existente entre o volume do cone original é o volume do cone originado pela secção?

T ENEM E VESTIBULARES

01| CEFET O raio de um cone equilátero cujos valores numéricos de sua área total e de seu volume se equivalem, em unidades de comprimento (u.c.), é:

A) $3\sqrt{3}$

B) 3

C) $\sqrt{3}$

D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

E) 1

02| OSEC O volume de um sólido gerado pela rotação de um triângulo retângulo e isósceles, de hipotenusa igual a 1, em torno de um eixo que contém a hipotenusa é igual a:

A) $\frac{\pi}{3}$

B) $\frac{\pi}{6}$

C) $\frac{\pi}{12}$

D) $\frac{\pi}{24}$

E) $\frac{2\pi}{3}$

03| UFAM A geratriz de um cone circular reto mede 10 cm e sua área total é 75π cm^2. Então o raio da base é igual a:

A) 15 cm

B) 5 cm

C) 10 cm

D) 6 cm

E) 8 cm

04| UEFS Um tronco de cone reto T tem altura h, raio da base menor r e raio da base maior R. Retirando-se de T um cone reto de altura h e base coincidente com a base menor do tronco, obtém-se um sólido cujo volume é igual ao volume do sólido retirado. Nessas condições, pode-se afirmar que:

A $Rr + r^2 - R^2 = 0$

B $Rr - r^2 + R^2 = 0$

C $2Rr - r^2 + R^2 = 0$

D $Rr - 2r^2 + 2R^2 = 0$

E $2R^2 - Rr - 2r^2 = 0$

05| UFPI Um cone de revolução de altura 6 cm é cortado por um plano paralelo à base, formando um novo cone de volume $\frac{1}{27}$ do anterior. A distância do vértice ao plano é:

A 1 cm

B $\frac{3}{2}$ cm

C 2 cm

D $\frac{4}{3}$ cm

E $\frac{4}{27}$ cm

06| UEL Um cone circular tem volume V. Interceptando-o na metade de sua altura por um plano paralelo à base, obtém-se um novo cone cujo volume é:

A $\frac{V}{2}$

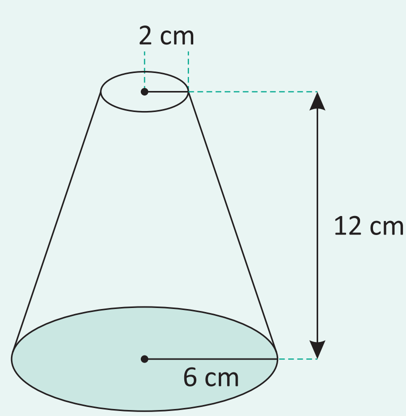
B $\frac{V}{3}$

C $\frac{V}{4}$

D $\frac{V}{8}$

E $\frac{V}{16}$

07| UFRN Um recipiente cônico foi projetado de acordo com o desenho ao lado, no qual o tronco do cone foi obtido de um cone de altura igual a 18 cm. O volume desse recipiente, em cm^3, é igual a:



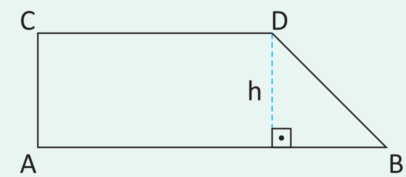
A 216π

B 208π

C 224π

D 200π

08| UFTM Um trapézio de bases AB = 7, CD = 5 e altura h = 3, tal como apresentado na figura, é girado em torno de AB. O Volume do sólido que se obtém é igual a:



A 21π

B 45π

C 51π

D 63π

E 73π

09| UNESP Seja C um cone circular reto de altura H e raio R. Qual a altura h, a medir a partir da base, tal que a razão entre os volumes do cone e do tronco de altura h do cone seja 2?

A $\frac{(1-\sqrt{2})}{2}H$

B $2\sqrt{2}\,H$

C $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}H$

D $\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)H$

E $\frac{(2-\sqrt{2})H}{2}$

10| UFOP Um triângulo retângulo possui catetos de comprimento a e b. Sejam V_a e V_b os volumes dos cones obtidos pela rotação do triângulo em torno, respectivamente, dos catetos a e b. O quociente $\frac{V_a}{V_b}$ vale:

A $\frac{ab}{a^2 + b^2}$

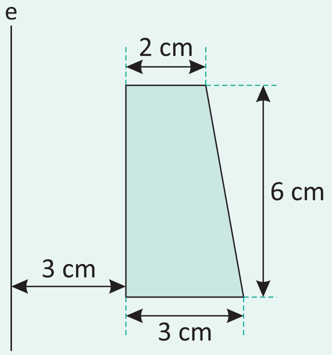
B $\frac{a}{a + b}$

C $\frac{a}{b}$

D $\frac{a + 1}{b + 1}$

E $\frac{a^2 + b^2}{\pi ab}$

11| INTEGRADO O volume do sólido gerado pela rotação completa da figura a seguir, em torno do eixo e, é, em cm^3:



A) 38π

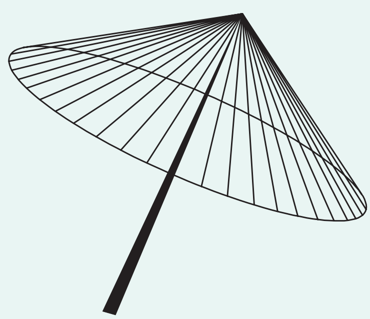
B) 54π

C) 92π

D) 112π

E) 128π

12| ENEM A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.



Disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br. Acesso em 1 maio 2.010.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de:

A) pirâmide

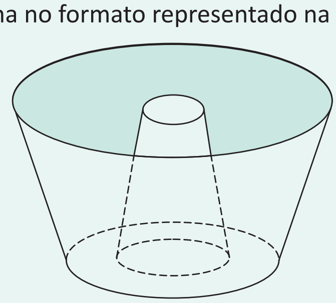
B) semiesfera

C) cilindro

D) tronco de cone

E) cone

13| ENEM Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais.

Essas figuras são:

A) um tronco de cone e um cilindro.

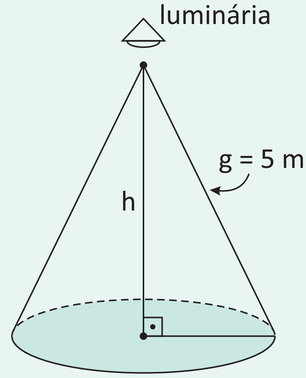
B) um cone e um cilindro.

C) um tronco de pirâmide e um cilindro.

D) dois troncos de cone.

E) dois cilindros.

14| ENEM Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura:



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de 28,26 cm^2, considerando $\pi = 3,14$, a altura h será igual a:

A) 3 m

B) 4 m

C) 5 m

D) 9 m

E) 16 m

15| ENEM Nas empresas em geral, são utilizados dois tipos de copos plásticos descartáveis, ambos com a forma de troncos de cones circulares retos:

- copos pequenos, para a ingestão de café: raios das bases iguais a 2,4 cm e 1,8 cm e altura igual a 3,6 cm.
- copos grandes, para a ingestão de água: raios das bases iguais a 3,6 cm e 2,4 cm e altura igual a 8,0 cm.

Uma dessas empresas resolve substituir os dois modelos de copos descartáveis, fornecendo para cada um de seus funcionários canecas com a forma de um cilindro circular reto de altura igual a 6 cm e raio da base de comprimento igual a y centímetros. Tais canecas serão usadas tanto para beber café como para beber água.

Sabe-se que o volume de um tronco de cone circular reto, cujos raios das bases são respectivamente iguais a R e r e a altura é h, é dado pela expressão:

$$V_{\text{tronco de cone}} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

O raio y da base dessas canecas deve ser tal que y^2 seja, no mínimo, igual a:

- **A** 2,664 cm
- **B** 7,412 cm
- **C** 12,160 cm
- **D** 14,824 cm
- **E** 19,840 cm

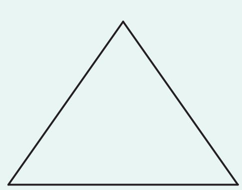
16| UFRGS Um cone circular reto é tal que cada seção obtida pela interseção de um plano que passa por seu vértice e pelo centro da sua base é um triângulo retângulo de catetos iguais. Se cortarmos esse cone ao longo de uma geratriz, abrindo e planificando sua superfície lateral, será obtido um setor circular cujo ângulo central tem medida x. Então:

- **A** $x < 180°$
- **B** $180° \leq x < 200°$
- **C** $200° \leq x < 220°$
- **D** $220° \leq x < 240°$
- **E** $x \geq 240°$

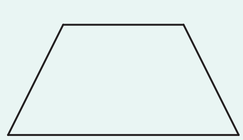
17| ENEM Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

Qual deverá ser a forma do adesivo?

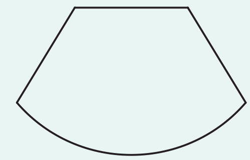
A



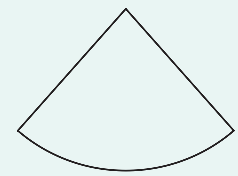
B



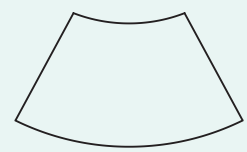
C



D



E



18| ENEM Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.

Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

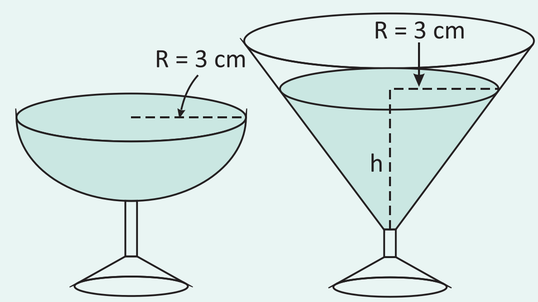


Figura 1 Figura 2

Considere:

$$V_{\text{esfera}} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério e servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

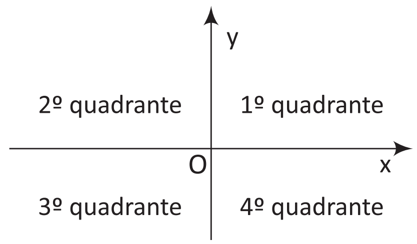
- **A** 1,33.
- **B** 6,00.
- **C** 12,00.
- **D** 56,52.
- **E** 113,04.

B GEOMETRIA ANALÍTICA

PONTO

SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

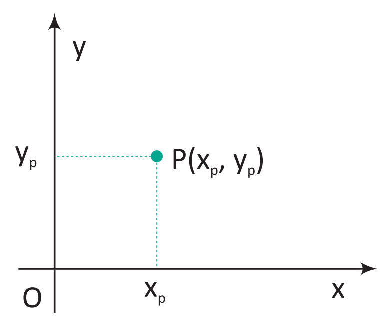
Criado por René Descartes, o sistema cartesiano ortogonal, ou simplesmente sistema cartesiano, é constituído por um par de eixos numerados e perpendiculares. Esses eixos se interceptam num ponto O, chamado de origem do sistema, e dividem o plano em quatro regiões chamadas de quadrantes. Observe a figura a seguir:



Assim, temos que:

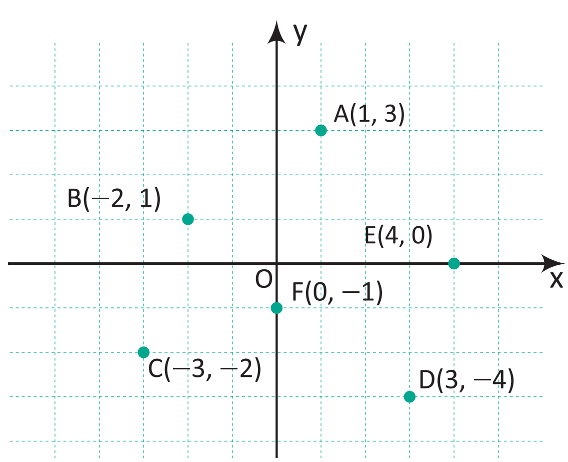
- O eixo horizontal $(\overrightarrow{Ox})$ é chamado de eixo das abscissas e o eixo vertical $(\overrightarrow{Oy})$ é chamado de eixo das ordenadas.
- O ponto O de intersecção dos dois eixos representa o zero nos dois eixos.
- No eixo das abscissas, os pontos à direita de O representam os números reais positivos e os pontos à esquerda de O representam os números negativos.
- No eixo das ordenadas, os pontos acima de O representam os números reais positivos e os pontos abaixo de O representam os números negativos.

A cada ponto P do sistema cartesiano podemos associar uma abscissa x_p e uma ordenada y_p, ou seja, um par de números reais escritos nessa ordem como $P(x_p, y_p)$. Esse par de valores é chamado de par ordenado e representam as coordenadas do ponto P no sistema cartesiano. Observe a figura a seguir:



Por exemplo:

- A representação dos pares ordenados A(1, 3), B(−2, 1), C(−3, −2), D(3, −4), E(4, 0) e F(0, −1) no sistema cartesiano é dada por:



OBSERVAÇÃO:

Dado um ponto $P(x_p, y_p)$ do sistema cartesiano ortogonal, temos que:

- Se $x_p > 0$ e $y_p > 0$, então P pertence ao 1º quadrante.
- Se $x_p < 0$ e $y_p > 0$, então P pertence ao 2º quadrante.
- Se $x_p < 0$ e $y_p < 0$, então P pertence ao 3º quadrante.
- Se $x_p > 0$ e $y_p < 0$, então P pertence ao 4º quadrante.
- Se $x_p = 0$ e $y_p \in \mathbb{R}$, então P pertence ao eixo das ordenadas.
- Se $x_p \in 0$ e $y_p = \mathbb{R}$, então P pertence ao eixo das abscissas.
- Se $x_p = y_p = 0$, então P é a origem.

PROPRIEDADE DOS PARES ORDENADOS

Dados os pares ordenados (a, b) e (c, d), temos que, (a, b) = (c, d) se, e somente se, a = c e b = d.

Por exemplo:

- Para que A(p + 1, 6) e B(4, q − 5) representem o mesmo ponto no sistema cartesiano, deve-se ter as seguintes igualdades:

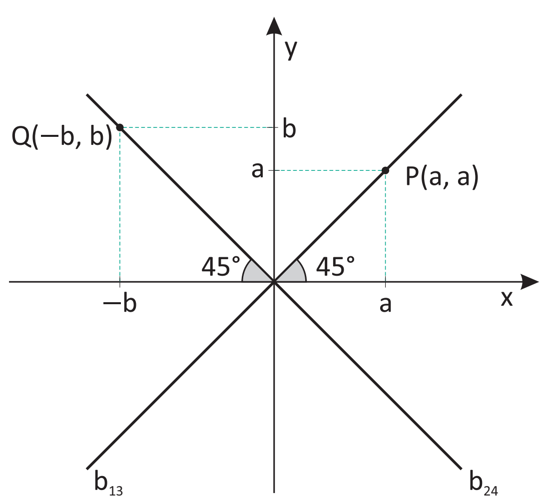
$$\begin{cases} p + 1 = 4 \\ q - 5 = 6 \end{cases} \therefore p = 3 \text{ e } q = 11$$

BISSETRIZES DOS QUADRANTES

A reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes, indicada por b_{13}, é chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares. Todo ponto P que pertence a essa reta é da forma P(a, a), ou seja, suas coordenadas são iguais.

A reta que contém as bissetrizes do 2º e 4º quadrantes, indicada por b_{24}, é chamada de bissetriz dos quadrantes pares. Todo ponto P que pertence a essa reta é da forma P(−b, b), ou seja, suas coordenadas são opostas.

Observe a figura a seguir:

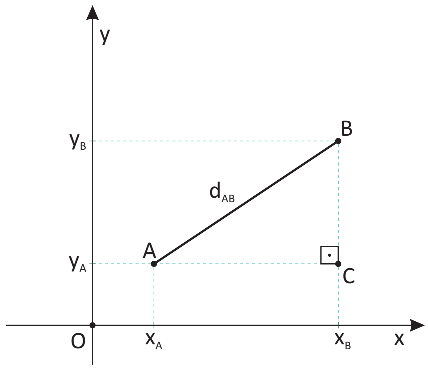


OBSERVAÇÃO:

- A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares é y = x e a equação da bissetriz dos quadrantes pares é y = −x.

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano, a distância entre eles, indicada por d_{AB}, é a medida do segmento de reta AB. Observe a figura a seguir:



Como o segmento AB é a hipotenusa do triângulo retângulo ABC e a medida de AB corresponde à distância entre esses dois pontos, através do teorema de Pitágoras, é possível demonstrar que:

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Por exemplo:

- Para calcular a distância entre os pontos A(–1, 4) e B(6, –5), temos que:

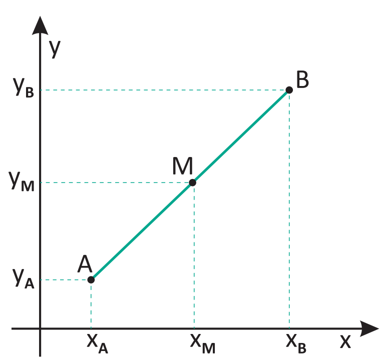
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{[6-(-1)]^2 + (-5-4)^2} = \sqrt{49+81} = \sqrt{130}$$

- Para calcular a distância entre os pontos C(3, 0) e D(0, –2), temos que:

$$d_{CD} = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

PONTO MÉDIO DE UM SEGMENTO

Dados dois pontos distintos $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$ do plano cartesiano, o ponto $M(x_M,y_M)$ que divide o segmento AB tal que, a medida do segmento AM é igual a medida do segmento BM é chamado de ponto médio do segmento AB.



Para determinar as coordenadas do ponto M, basta aplicar o teorema de Tales. Assim, é possível demonstrar que $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$. Portanto, o ponto M, médio do segmento AB, é dado por:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Por exemplo:

- Para determinar as coordenadas do ponto M, médio do segmento AB, sendo A(4, –3) e B(–8, 15), temos que:

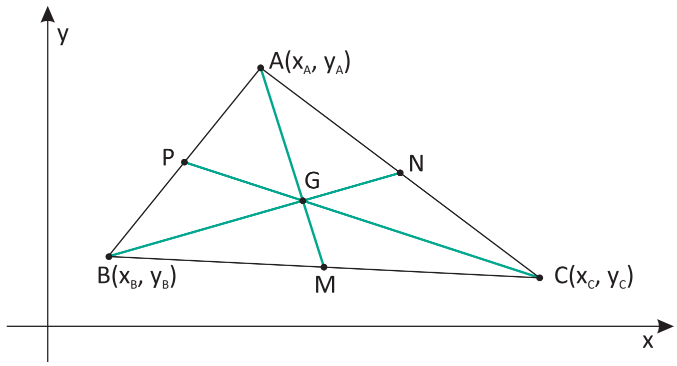
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{4+(-8)}{2} = -2$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3+15}{2} = 6$$

Portanto, o ponto médio do segmento AB é M(–2, 6).

MEDIANA E BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

Denomina-se mediana de um triângulo, o segmento de reta cujas extremidades são um vértice do triângulo e o ponto médio do lado oposto a esse vértice. Todo triângulo possui três medianas que se interceptam em um único ponto, indicado por G, denominado baricentro. Observe a figura a seguir:



Dados os pontos $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ e $C(x_C,y_C)$ do plano cartesiano, não colineares, utilizando o teorema de Tales, é possível demonstrar que o baricentro do triângulo ABC, indicado por $G(x_G,y_G)$, é dado por:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

Por exemplo:

- Para determinar o baricentro do triângulo de vértices A(1, 2), B(–4, 2) e C(0, 8), temos que:

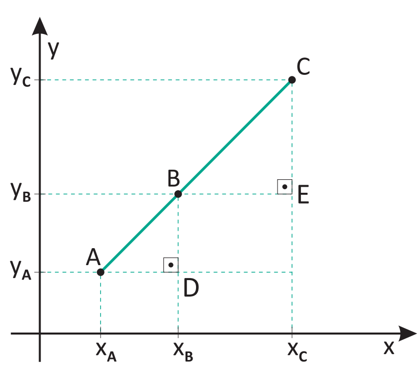
$$x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} = \frac{1+(-4)+0}{3} = -1$$

$$y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} = \frac{2+2+8}{3} = 4$$

Portanto, o baricentro é G(–1, 4).

CONDIÇÃO DE ALINHAMENTO DE TRÊS PONTOS

Dizemos que três pontos estão alinhados se, somente se, existe uma reta que passa por esses três pontos. Observe a figura a seguir:



Os pontos $A(x_A,y_A)$, $B(x_B,y_B)$ e $C(x_C,y_C)$ do plano cartesiano, pertencem a uma mesma reta, logo os triângulos ABD e BCE são semelhantes. A partir da proporcionalidade de seus lados, é possível demonstrar que:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Por exemplo:

- Para verificar se os pontos A(1, –2), B(4, –11) e C(–2, 7) são colineares, basta desenvolver o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -11 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -11 + 28 + 4 - 22 - 7 + 8 = 0$$

Portanto, os pontos A, B e C são colineares.

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

Já vimos, que é possível verificar se três pontos de um sistema de coordenadas cartesianas estão ou não alinhados calculando um determinante D constituído por suas coordenadas. Esse determinante também determina a área do triângulo formado pelos três pontos, caso eles não estejam alinhados. Assim temos que:

A área **A** de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2}, \text{ em que D é o determinante } \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Por exemplo:

- Para calcular a área do triângulo de vértices P(1, 2), Q(2, 4) e R(0, 7), temos que:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 14 + 0 - 0 - 7 - 4 = 7$$

Assim, a área do triângulo PQR é dada por:

$$A = \frac{|D|}{2} = \frac{|7|}{2} = 3,5 \text{ unidades de área.}$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Determine a distância entre A(2, 3) e B(5, 1).

Resolução:

Aplicando a relação da distância entre dois pontos, temos:

- $d_{AB} = \sqrt{(2-5)^2 + (3-1)^2}$
- $d_{AB} = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Assim, a distância entre A e B vale $\sqrt{13}$ unidades.

02| Dados os pontos A(3, –2) e $B\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$, determine as coordenadas da ponto médio do segmento AB.

Resolução:

Aplicando a relação das coordenadas do ponto médio de um segmento de reta de extremos A e B, temos:

- $x_M = \dfrac{3 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \dfrac{\frac{5}{2}}{2} = \dfrac{\frac{5}{2}}{2} = \dfrac{5}{4}$
- $y_M = \dfrac{-2 + (-4)}{2} = -\dfrac{6}{2} = -3$

Assim, $M\left(\frac{5}{4}, -3\right)$ é o ponto médio do segmento AB.

03| Verifique se os pontos A(–4, –6), B(3, 15) e C(–2, 0) estão alinhados.

Resolução:

Para que os pontos A, B e C estejam alinhados, basta que o determinante abaixo seja nulo:

$$\begin{vmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 3 & 15 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Calculando esse determinante, temos:

$-60 + 12 + 0 + 30 + 18 + 0 = -60 + 60 = 0$

Como o determinante é nulo, podemos afirmar que os pontos A, B e C são colineares.

04| Determine o valor de m de modo que (−2, 7), (m, −11) e (1, −2) estejam alinhados.

Resolução:

Condição de alinhamento:

$$\begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 \\ m & -11 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Logo:

$22 + 7 - 2m + 11 - 4 - 7m = 0$

$9m = 36.$

Portanto, $m = 4.$

05| Calcule a área do triângulo cujos vértices são os pontos A(−2, 3), B(1, −4) e C(3,2).

Resolução:

A área A do triângulo ABC será: $A = \frac{|D|}{2}$*, em que D é o determinante* $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Calculando o determinante, temos:

$8 + 2 + 9 + 12 + 4 - 3 = 35 - 3 = 32$

Logo, $A = \frac{32}{2} = 16$ *unidades de área.*

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Sendo x um número real negativo e y um número real positivo, determine em que quadrante se encontra cada um dos pontos:

A A (x, y)

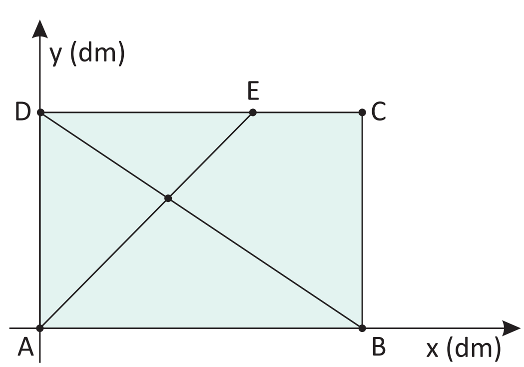
B B (−x, y)

C C (2x, −y)

D D (−x, −y)

02| Sabendo-se que os pontos A(1, 1) e B(3, 2) são vértices de um quadrado ABCD localizado no 1º quadrante, determine as coordenadas dos outros dois vértices.

03| UERJ Em uma folha de fórmica retangular ABCD, com 15 dm de comprimento AB por 10 dm de largura AD, um marceneiro traça dois segmentos de reta, AE e BD. No ponto F, onde o marceneiro pretende fixar um prego, ocorre a interseção desses segmentos. A figura abaixo representa a folha de fórmica no primeiro quadrante de um sistema de eixos coordenados.



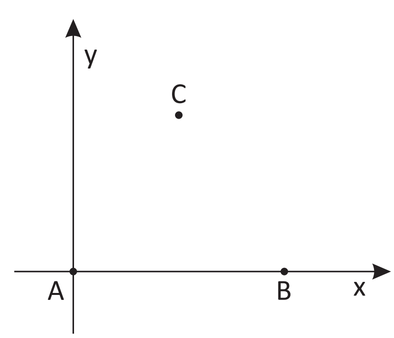
Considerando a medida do segmento EC igual a 5 dm, determine as coordenadas do ponto F.

04| UNIRIO Considere um triângulo cujos vértices são A (0, 0) B (3, 4) e C (6, 0). Qual a classificação deste triângulo quanto às medidas de seus ângulos internos?

05| PUC Classifique quanto aos lados e ângulos o triângulo de vértices A(4, 3), B(6, −2) e C(−11, −3).

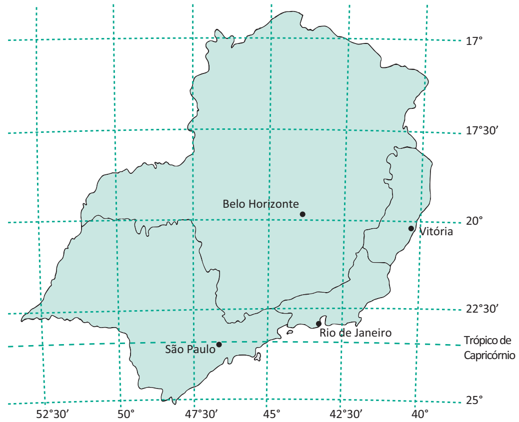
06| Determine y, sabendo que P(3, y) equidista 10 unidades de A(−3, 6).

07| FGV Um funcionário do setor de planejamento de uma distribuidora de materiais escolares verifica que as lojas dos seus três clientes mais importantes estão localizadas nos pontos A(0, 0), B(6, 0) e C(3, 4). Todas as unidades são dadas em quilômetros.



O setor de planejamento decidiu instalar um depósito no ponto P(x, y) de modo que as distâncias entre o depósito e as três lojas sejam iguais: PA = PB = PC. Determine a quantos quilômetros da Loja A deverá ser instalado o depósito da distribuidora de materiais escolares. Aproxime a resposta para um número inteiro de quilômetros.

08| **UERJ** Observe o mapa da região Sudeste.



(Adapt. e BOCHICCHIO, V. R. Atlas atual: geografia. São Paulo: Atual, 1.999.)

Considere o Trópico de Capricórnio como o eixo das abscissas e o meridiano de 45° como o eixo das ordenadas.

Neste sistema cartesiano, as coordenadas das cidades de São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte e Vitória são, respectivamente, $\left(-\frac{3}{2},0\right)$, $\left(2,\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2},4\right)$e $\left(5,\frac{7}{2}\right)$ todas medidas em centímetros.

Determine as coordenadas de uma cidade que fique equidistante das cidades de São Paulo, Rio de Janeiro e Belo Horizonte.

09| **UFRJ** Sejam $M_1(1, 2)$, $M_2(3, 4)$ e $M_3(1,-1)$ os pontos médios dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo.

10| **MACK** Até que ponto o segmento de extremos A(1, −1) e B(4, 5) deve ser prolongado, no sentido AB, para que seu comprimento seja triplicado?

T ENEM E VESTIBULARES

01| **UFRGS** Sendo os pontos A(− 1, 5) e B(2, 1) vértices consecutivos de um quadrado, o comprimento da diagonal desse quadrado é:

- **A** 2
- **B** $2\sqrt{2}$
- **C** $3\sqrt{2}$
- **D** 5
- **E** $5\sqrt{2}$

02| **UDESC** Considere num sistema de coordenadas cartesianas o polígono com vértices nos pontos A (−3, −3), B(3, 1), C(−3, −3) e D(−1, −1). O quadrilátero determinado pelos pontos médios dos segmentos AB, BC, CD e DA, nesta ordem, é um:

- **A** losango
- **B** retângulo
- **C** trapézio
- **D** quadrado
- **E** paralelogramo

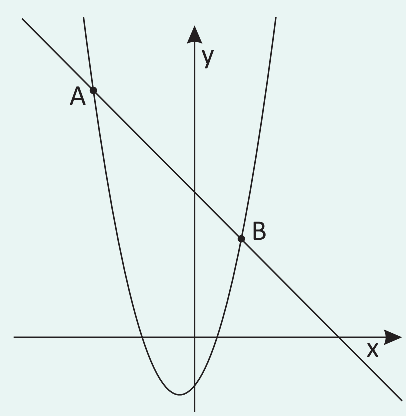
03| **UNESP** O triângulo PQR, no plano cartesiano, de vértices P(0, 0), Q(6, 0) e R(3, 5), é:

- **A** equilátero
- **B** isósceles, mas não equilátero
- **C** escaleno
- **D** retângulo
- **E** obtusângulo

04| **UNIFESP** Um ponto do plano cartesiano é representado pelas coordenadas (x + 3y, − x − y) e também por (4 + y, 2x + y), em relação a um mesmo sistema de coordenadas. Nestas condições, x^y é igual a:

- **A** −8
- **B** −6
- **C** 1
- **D** 8
- **E** 9

05| **UFRGS** Considere os gráficos das funções f e g, definidas por $f(x) = x^2 + x - 2$ e $g(x) = 6 - x$ representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, e os pontos A e B, interseção dos gráficos das funções f e g, como na figura abaixo.



A distância entre os pontos A e B é:

- **A** $2\sqrt{2}$
- **B** $3\sqrt{2}$
- **C** $4\sqrt{2}$
- **D** $5\sqrt{2}$
- **E** $6\sqrt{2}$

06| CFT Os pontos A(– 5, 2) e C(3, – 4) são extremidades de uma diagonal de um quadrado. O perímetro desse quadrado é:

- **A** $18\sqrt{2}$
- **B** $20\sqrt{2}$
- **C** $24\sqrt{2}$
- **D** $28\sqrt{2}$

07| PUC Sejam A e B os pontos (1, 1) e (5, 7) no plano. O ponto médio do segmento AB é:

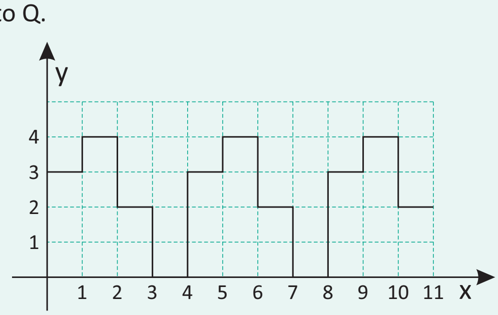
- **A** (3, 4)
- **B** (4, 6)
- **C** (–4, –6)
- **D** (1, 7)
- **E** (2, 3)

08| UFF A palavra "perímetro" vem da combinação de dois elementos gregos: o primeiro, perí, significa "em torno de", e o segundo, metron, significa "medida".

O perímetro do trapézio cujos vértices têm coordenadas (–1, 0), (9, 0), (8, 5) e (1, 5) é:

- **A** $10 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$
- **B** $16 + \sqrt{29 + \sqrt{26}}$
- **C** $22 + \sqrt{26}$
- **D** $17 + 2\sqrt{26}$
- **E** $17 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$

09| FATEC No plano cartesiano da figura, considere que as escalas nos dois eixos coordenados são iguais e que a unidade de medida linear é 1 cm. Nele, está representada parte de uma linha poligonal que começa no ponto P(0, 3) e, mantendo-se o mesmo padrão, termina em um ponto Q.



Na figura, a linha poligonal é formada por segmentos de reta:

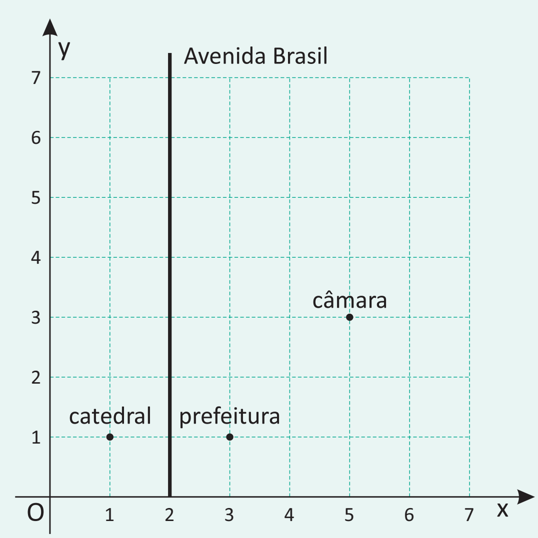
- que são paralelos aos eixos coordenados e
- cujas extremidades têm coordenadas inteiras não negativas.

Sabendo que o comprimento da linha poligonal, do ponto P até o ponto Q, é igual a 94 cm, as coordenadas do ponto Q são:

- **A** (25, 2)
- **B** (28, 1)
- **C** (32, 1)
- **D** (33, 1)
- **E** (34, 2)

10| UNICAMP A figura a seguir apresenta parte do mapa de uma cidade, no qual estão identificadas a catedral, a prefeitura e a câmara de vereadores. Observe que o quadriculado não representa os quarteirões da cidade, servindo apenas para a localização dos pontos e retas no plano cartesiano.

Nessa cidade, a Avenida Brasil é formada pelos pontos equidistantes da catedral e da prefeitura, enquanto a Avenida Juscelino Kubitschek (não mostrada no mapa) é formada pelos pontos equidistantes da prefeitura e da câmara de vereadores.



Sabendo que a distância real entre a catedral e a prefeitura é de 500 m, podemos concluir que a distância real, em linha reta, entre a catedral e a câmara de vereadores é de:

- **A** 1.500 m
- **B** $500\sqrt{5}$ m
- **C** $1.000\sqrt{2}$ m
- **D** $500 + 500\sqrt{2}$ m

11| **PUC** O ponto B(3, b) é equidistante dos pontos A(6, 0) e C(0, 6). Logo o ponto B é:

A) (3, 1)

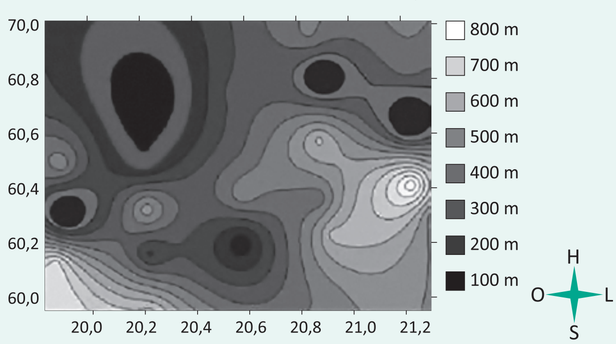
B) (3, 6)

C) (3, 3)

D) (3, 2)

E) (3, 0)

12| **ENEM** A figura a seguir é a representação de uma região por meio de curvas de nível, que são curvas fechadas representando a altitude da região, com relação ao nível do mar. As coordenadas estão expressas em graus de acordo com a longitude, no eixo horizontal, e a latitude, no eixo vertical. A escala em tons de cinza desenhada à direita está associada à altitude da região.



Um pequeno helicóptero usado para reconhecimento sobrevoa a região a partir do ponto X = (20; 60). O helicóptero segue o percurso:

0,8°L → 0,5°N → 0,2° O → 0,1° S → 0,4° N → 0,3 °L

De acordo com as orientações, o helicóptero pousou em um local cuja altitude é:

A) menor ou igual a 200 m.

B) maior que 200 m e menor ou igual a 400 m.

C) maior que 400 m e menor ou igual a 600 m.

D) maior que 600 m e menor ou igual a 800 m.

E) maior que 800 m.

13| **FGV** No plano cartesiano, M(3, 3), N(7, 3) e P(4, 0) são os pontos médios respectivamente dos lados AB, BC e AC de um triângulo ABC. A abscissa do vértice C é:

A) 6

B) 7

C) 8

D) 9

E) 0

14| **FUVEST** Se (m + 2n, m − 4) e (2 − m, 2n) representam o mesmo ponto do plano cartesiano, então m^n é igual a:

A) -2

B) 0

C) $\sqrt{2}$

D) 1

E) $\frac{1}{2}$

15| **PUC** Os pontos (0, 8), (3, 1) e (1, y) do plano são colineares. O valor de y é igual a:

A) 5

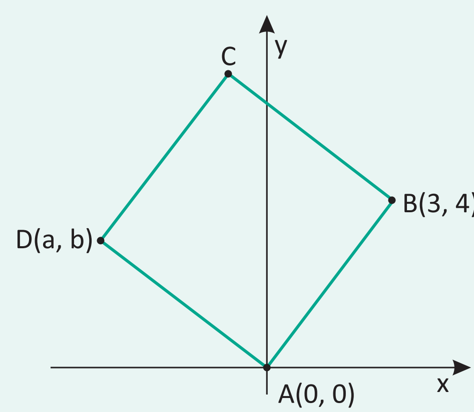
B) 6

C) $\frac{17}{3}$

D) $\frac{11}{2}$

E) 5,3

16| **UFMG** Nesta figura, está representado um quadrado de vértices ABCD:



Sabe-se que as coordenadas cartesianas dos pontos A e B são A(0, 0) e B(3, 4). Então, é correto afirmar que o resultado da soma das coordenadas do vértice D é:

A) -2

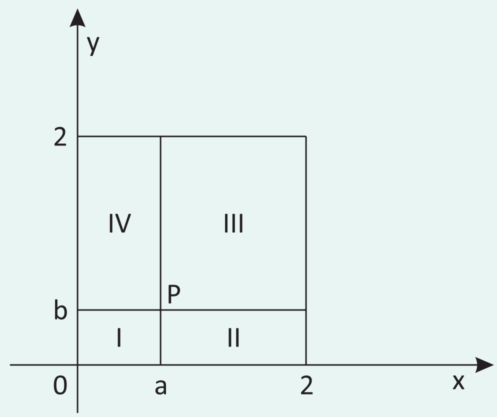
B) -1

C) $-\frac{1}{2}$

D) $-\frac{3}{2}$

17| **UFMG** Seja P(a, b) um ponto no plano cartesiano tal que $0 < a < 1$ e $0 < b < 1$.

As retas paralelas aos eixos coordenados que passam por P dividem o quadrado de vértices (0, 0), (2, 0), (0, 2) e (2, 2) nas regiões I, II, III e IV, como mostrado nesta figura:



Considere o ponto $Q\left(\sqrt{a^2+b^2}, ab\right)$.

Então, é correto afirmar que o ponto Q está na região:

A I
B II
C III
D IV

18| UFG Para medir a área de uma fazenda de forma triangular, um agrimensor, utilizando um sistema de localização por satélite, encontrou como vértices desse triângulo os pontos A(2, 1), B(3, 5) e C(7, 4) do plano cartesiano, com as medidas em km. A área dessa fazenda, em km^2, é de:

A $\frac{17}{2}$
B 17
C $2\sqrt{17}$
D $4\sqrt{17}$
E $\frac{\sqrt{17}}{2}$

19| FGV No plano cartesiano, o triângulo de vértices A(1, −2), B(m, 4) e C(0, 6) é retângulo em A. O valor de m é igual a:

A 47
B 48
C 49
D 50
E 51

20| ITA A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos A(2, 1) e B(3, −2). Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abcissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são:

A $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ou (5, 0)
B $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ ou (4, 0)
C $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ ou (5, 0)
D $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ ou (4, 0)
E $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$ ou (3, 0)

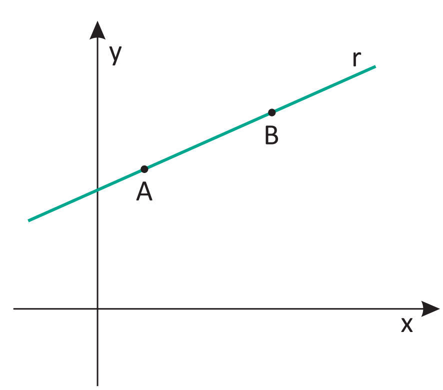
RETA

Existem diferentes formas de se apresentar a equação de uma reta. Essas equações estabelecem a relação entre as coordenadas de cada ponto que pertence a essa reta.

Basicamente, podemos determinar a equação de fuma reta de duas formas:

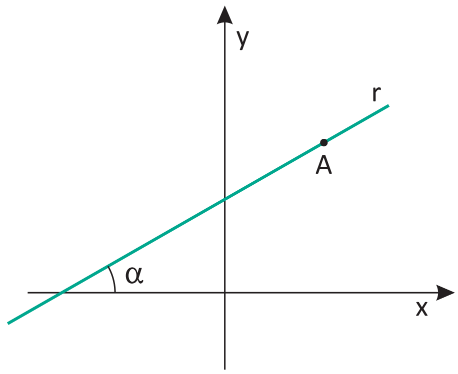
- **Dados dois pontos distintos:**

Só existe uma reta r que passa por dois pontos A e B distintos. Observe a figura a seguir:



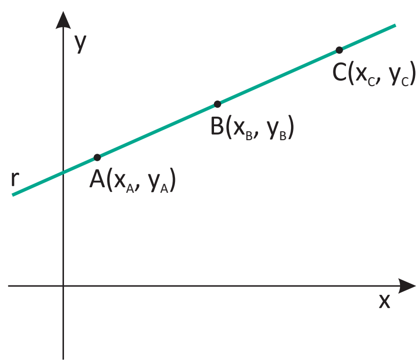
- **Dados um ponto e uma direção:**

Só existe uma reta r que passa por um ponto A e que forma um ângulo α com o eixo das abscissas no seu sentido positivo. Observe a figura a seguir:



EQUAÇÃO GERAL

Dados dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ do plano cartesiano, sabemos que só existe uma reta r, que passa por esses pontos. Observe a figura a seguir:



Para determinar a equação da reta r, basta considerar um ponto P(x, y) genérico de r e impor a condição de alinhamento para A, B e P, ou seja:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo, temos:

$$y_Ax + x_Ay_B + x_By - x_By_A - x_Ay - y_Bx = 0 \Rightarrow (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + (x_Ay_B - x_By_A) = 0$$

Fazendo $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $x_Ay_B - x_By_A = c$, temos:

$$ax + by + c = 0$$

Sendo $\{a, b, c\} \subset IR$, com a e b não simultaneamente nulos, essa é a **equação geral** da reta r.

Por exemplo:

- Para determinar a equação da reta r que passa por A(−1, 4) e B(5, −2), basta resolver o seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + 5y + 2 - 20 + y + 2x = 0 \Rightarrow 6x + 6y - 18 = 0 \Rightarrow x + y - 3 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta r é dada por $x + y - 3 = 0$.

OBSERVAÇÃO:

Dada a reta r: $ax + by + c = 0$, temos que:

- Um ponto P pertence à reta r se, e somente se, as coordenadas de P satisfazem sua equação.
- Para determinar as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o eixo das abscissas basta fazer $y = 0$ em sua equação e determinar o ponto $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.
- Para determinar as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o eixo das ordenadas basta fazer $x = 0$ em sua equação determinar o ponto $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$.

Por exemplo:

- Dada a reta de equação $2x + 3y - 6 = 0$ e o ponto $A(6, -2)$, temos que:

  Substituindo as coordenadas do ponto $A(6, -2)$ na equação de r, temos:

$$2.6 + 3.(-2) - 6 = 12 - 6 - 6 = 0$$

Logo, o ponto A pertence à reta r.

- Fazendo $y = 0$ na equação de r, temos:

$$2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Logo, a reta r intercepta o eixo das abscissas no ponto (3, 0).

- Fazendo $x = 0$ na equação de r, temos:

$$3y - 6 = 0 \Rightarrow y = 2$$

Logo, a reta r intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 2).

INTERSECÇÃO ENTRE RETAS

O ponto $P(x_0, y_0)$ é a intersecção de duas retas se, e somente se, suas coordenadas satisfazem as equações das duas retas. Portanto, essas coordenadas são as soluções do sistema linear formado pelas equações dessas retas.

Por exemplo:

- Para determinar o ponto P de intersecção das retas r: $2x - y - 1 = 0$ e s: $4x + 3y - 17 = 0$, temos que resolver o seguinte sistema:

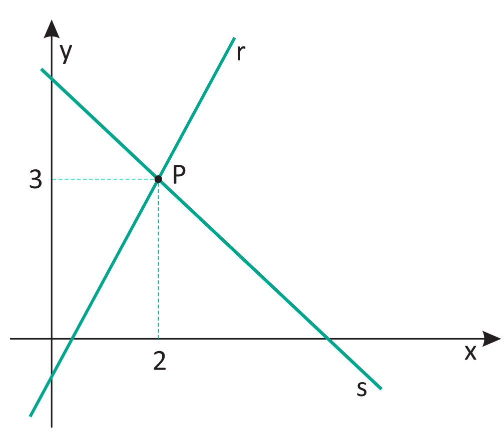
$$\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x + 3y - 17 = 0 \end{cases}$$

Isolando y na primeira equação temos $y = 2x - 1$, que substituímos na segunda equação:

$$4x + 3(2x - 1) - 17 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ e } y = 3$$

Portanto, o ponto P(2, 3) é o ponto comum às retas r e s.

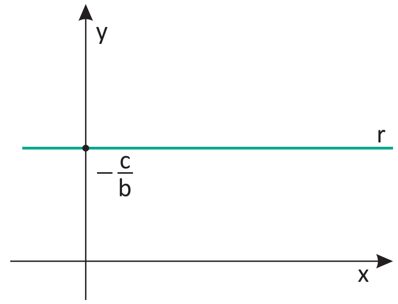
Graficamente, temos:



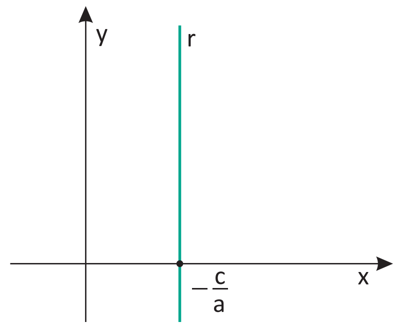
CASOS PARTICULARES

Dada a reta r: $ax + by + c = 0$, temos os seguintes casos particulares:

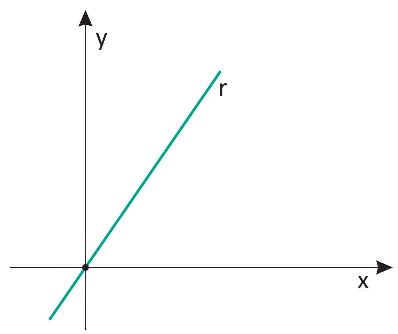
- Se $a = 0 \Rightarrow by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$ é a equação de uma reta paralela ao eixo das abscissas. Observe a figura a seguir:



- Se $b = 0 \Rightarrow ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$ é a equação de uma reta paralela ao eixo das ordenadas. Observe a figura a seguir:

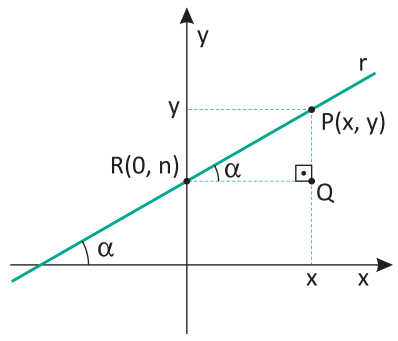


- Se $c = 0 \Rightarrow ax + by = 0$ é a equação de uma reta que passa pela origem do plano cartesiano. Observe a figura a seguir:



EQUAÇÃO REDUZIDA

Considere que uma reta r que forma um ângulo α com eixo das abscissas no seu sentido positivo e intercepta o eixo das ordenadas no ponto R(0, n). Observe a figura a seguir:



Para determinar a equação reduzida da reta r, basta considerar um ponto P(x, y) genérico de r e calcular a tangente do ângulo α no triângulo PQR.

Assim, temos que:

$$tg\alpha = \frac{PQ}{QR} = \frac{y - n}{x}$$

Fazendo tg $\alpha = m$, temos que $m = \frac{y - n}{x}$, portanto:

$$y = mx + n$$

Sendo $\{m, n\} \in \mathbb{R}$, essa é a **equação reduzida** da reta r.

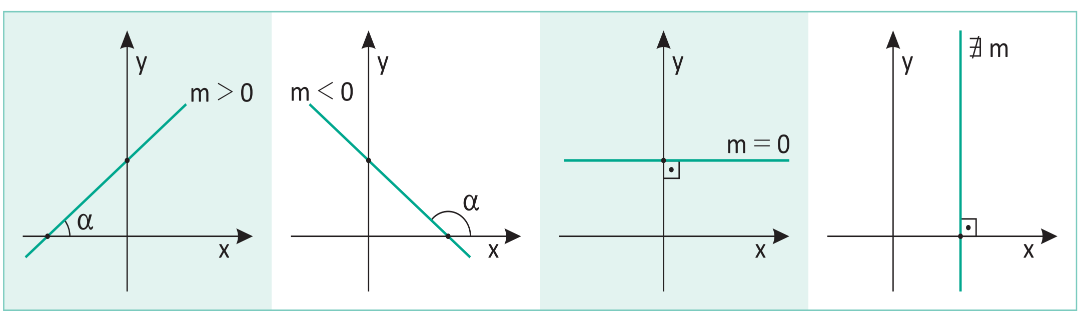
Nessa equação, temos que:

- **m** é a tangente do ângulo α que a reta faz com o eixo das abscissas no seu sentido positivo. Essa constante é chamada de **coeficiente angular**, ou ainda, **declividade** da reta.
- **n** é a ordenada do ponto de intersecção da reta r e o eixo das ordenadas. Essa constante é chamada de c**oeficiente linear**.
- α é o ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas no seu sentido positivo. Esse ângulo é chamado de **inclinação** da reta.

Graficamente, o coeficiente angular indica o crescimento ou decrescimento da reta, veja:

- Se a reta for crescente, o coeficiente angular é a tangente de um ângulo agudo, portanto, ele é positivo.
- Se a reta for decrescente, o coeficiente angular é a tangente de um ângulo obtuso, portanto, ele é negativo.
- Se a reta for paralela ao eixo das abscissas, o coeficiente angular é a tangente de 0°, portanto, ele é nulo.
- Se a reta for paralela ao eixo das ordenadas, o coeficiente angular é a tangente de 90°, portanto, ele não existe.

Observe as figuras a seguir:



OBSERVAÇÃO:

- Podemos obter a equação de uma reta na forma reduzida a partir de sua forma geral. Para isso, basta isolar a variável y na equação geral. Observe:

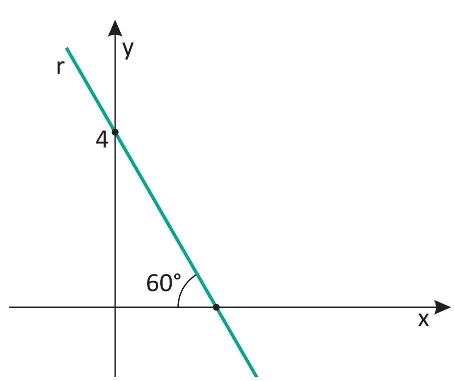
$$ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x + \left(-\frac{c}{b}\right)$$

Assim, temos que:

$$m = -\frac{a}{b} \text{ e } n = -\frac{c}{b}$$

Por exemplo:

- Para determinar a equação reduzida da reta r da figura a seguir, temos que:



A inclinação α da reta r é o suplemento de 60°, ou seja, $\alpha = 180° - 60° = 120°$.

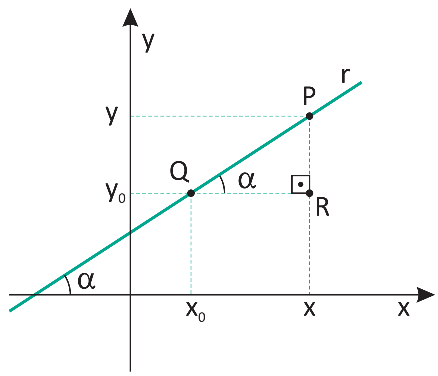
O coeficiente angular da reta r é $m = \text{tg}\,120° = -\sqrt{3}$.

O coeficiente linear da reta r é $n = 4$.

Portanto, a equação reduzida da reta r é $y = -\sqrt{3}x + 4$.

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL

Considere que uma reta r que forma um ângulo α com eixo das abscissas no seu sentido positivo e que passa pelo ponto $Q(x_0, y_0)$. Observe a figura a seguir:



Para determinar a equação fundamental da reta r, basta considerar um ponto P(x, y) genérico de r e calcular a tangente do ângulo α no triângulo PQR.

Assim, temos que:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{PR}{QR} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Fazendo $\text{tg}\,\alpha = m$, temos que $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$, portanto:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Essa é a **equação fundamental** da reta r.

Por exemplo:

- Vamos obter a equação geral da reta que passa pelo ponto P(2, −5) e tem inclinação 135°.

  Seu coeficiente angular é $m = \text{tg}\,135° = -1$.

  Substituindo em $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos que:

$$y - (-5) = -1(x - 2) \Rightarrow y + 5 = -x + 2 \Rightarrow y = -x - 3$$

Portanto, a equação geral da reta r é $x + y + 3 = 0$.

OBSERVAÇÕES:

- Sendo $S(x_1, y_1)$ um outro ponto da reta $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos que:

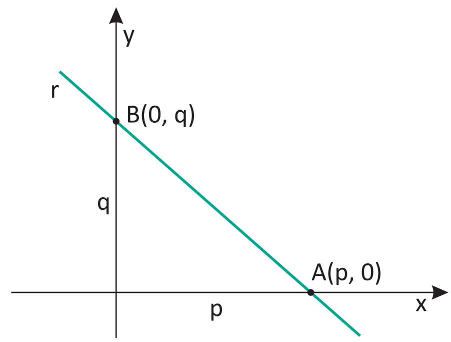
$$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0) \Rightarrow m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \therefore m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

  Note que existem três maneiras de se determinar o coeficiente angular de uma reta:

- Dada a equação geral da reta $ax + by + c = 0$, temos que $m = -\frac{a}{b}$.
- Dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ da reta, temos que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.
- Dada a inclinação α da reta, temos que $m = \text{tg}\,\alpha$.

EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA

Considere uma reta r que intercepta o eixo das abscissas no ponto A(p, 0) e o eixo das ordenadas no ponto B(0, q), com p e q não nulos. Observe a figura a seguir:



Para determinar a equação da reta r, basta considerar um ponto P(x, y) genérico de r e impor a condição de alinhamento para A, B e P, ou seja:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo, temos:

$$pq - qx - py = 0 \Rightarrow qx + py = pq$$

Dividindo os membros da última equação por pq, obtemos:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Essa é a **equação segmentária** da reta r.

Por exemplo:

- Para obter a forma segmentária da equação $3x + 4y - 12 = 0$, temos que:

$$3x + 4y - 12 = 0 \Rightarrow 3x + 4y = 12$$

Dividindo todos os termos dessa equação por 12, obtemos a equação $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$, na forma segmentária.

- O denominador do x indica a abscissa do ponto que a reta intercepta o eixo das abscissas, ou seja, o ponto (4, 0).
- O denominador do y indica a ordenada do ponto que a reta intercepta o eixo das ordenadas, ou seja, o ponto (0, 3).

EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS

A equação de uma reta escrita em função de uma terceira variável, também denominada parâmetro, é chamada de equação paramétrica da reta.

Normalmente utiliza-se a letra t para identificar o parâmetro mas, a notação pode variar de acordo com o a situação em questão. Assim, a reta r pode ser expressa através da parametrização da equação, da seguinte forma:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

Para encontrar a equação geral ou reduzida, a partir das equações paramétricas, basta eliminar o parâmetro t.

Por exemplo:

- Vamos determinar a equação geral da seguinte reta de equações paramétricas.

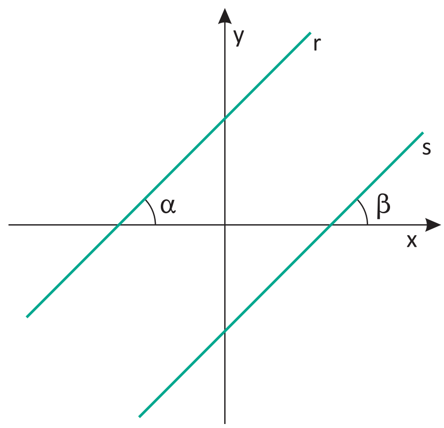
$$\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 6 + t \end{cases}$$

Adicionando as duas equações membro a membro, obtemos a equação $x + y = 10$, na forma geral.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS RETAS

PARALELAS

Duas retas, $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$, são paralelas se, e somente se, têm os coeficientes angulares iguais. Observe a figura a seguir:



Como as retas r e s são paralelas, temos que $\alpha = \beta \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\beta$

Portanto, temos que:

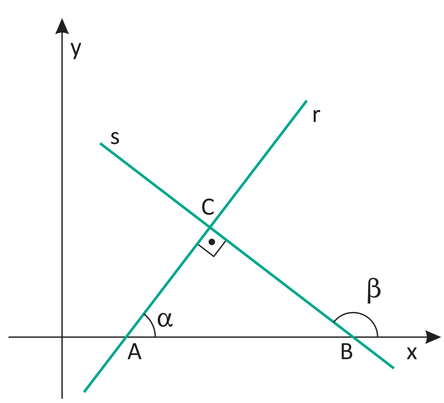
$$m_r = m_s$$

Observações:

- Duas retas r e são paralelas e distintas se, e somente se, possuem coeficientes lineares diferentes, ou seja, $n_r \neq n_s$.
- Duas retas r e são paralelas e coincidentes se, e somente se, possuem coeficientes lineares iguais, ou seja, $n_r = n_s$.
- Duas retas r e s são concorrentes se, e somente se, possuem coeficientes angulares diferentes, ou seja, $m_r \neq m_s$.

PERPENDICULARES

Duas retas, $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$, são perpendiculares se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é -1. Observe a figura a seguir:



Note que as duas retas são perpendiculares e β é ângulo externo do triângulo retângulo, então:

$$\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow \text{tg}(-\alpha) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \Rightarrow -\text{tg}\,\alpha = \text{cotg}\,\beta$$

$$\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{\text{tg}\,\beta} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha . \text{tg}\,\beta = -1$$

Fazendo $\text{tg}\alpha = m_r$ e $\text{tg}\,\beta = m_s$, temos que:

$$m_1 . m_s = -1$$

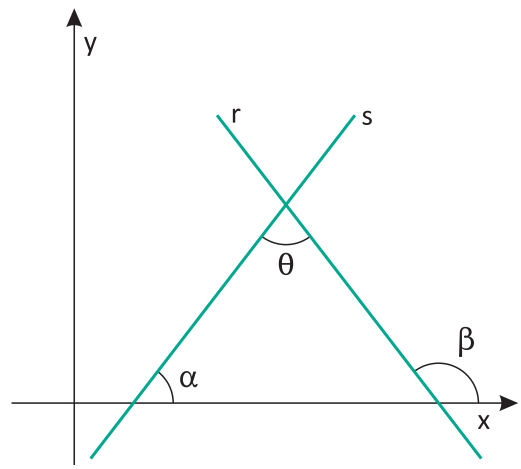
Por exemplo:

- As retas r: $2x - 3y - 1 = 0$ e s: $-4x + 6y + 3 = 0$ são paralelas, pois $m_r = m_s = \frac{2}{3}$.
- As retas r: $3x + 2y - 5 = 0$ e s: $-2x + 3y + 7 = 0$ são perpendiculares, pois $m_r = -\frac{3}{2}$ e $m_s = \frac{2}{3}$. Assim, $m_1 . m_s = -1$.

ÂNGULO ENTRE RETAS

Duas retas coplanares podem ser paralelas ou concorrentes. Já vimos um caso particular de concorrência, que é o perpendicularismo. Agora veremos o caso geral, em que as retas se interceptam formando um ângulo qualquer.

Assim, considere duas retas coplanares r e s, cujos coeficientes angulares são, m_r e m_s, respectivamente, que se interceptam segundo o ângulo $\theta \neq 90°$. Observe a figura a seguir:



Observe que β é ângulo externo do triângulo, então $\beta = \alpha + \theta \Rightarrow \theta = \beta - \alpha$.

Assim, temos que:

$$\text{tg}\theta = \text{tg}(\beta - \alpha)$$

Daí, temos que:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\text{tg}\beta - \text{tg}\alpha}{1 + \text{tg}\beta . \text{tg}\alpha}$$

Fazendo $\text{tg}\,\alpha = m_r$ e $\text{tg}\,\beta = m_s$, temos que:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s}$$

Dependendo da posição das duas retas no plano, o ângulo θ pode ser agudo ou obtuso. Se ângulo for agudo, temos que:

$$\text{tg}\,\theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s} \right|$$

O ângulo obtuso será o suplemento de θ obtido por essa expressão.

Por exemplo:

- Vamos calcular o ângulo agudo formado pelas retas r: $2x + y - 5 = 0$ e s: $x + y - 2 = 0$.

$$m_r = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2$$

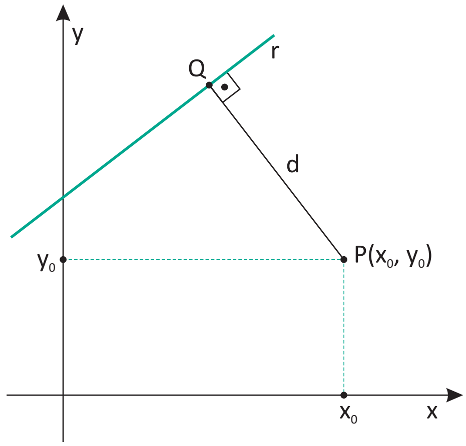
$$m_s = -\frac{a}{b} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\text{tg}\,\theta = \left| \frac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s} \right| = \left| \frac{-2 - (-1)}{1 + (-2)(-1)} \right| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3}$$

Portanto, o ângulo agudo formado pelas retas é $\theta = \text{arc tg}\left(\frac{1}{3}\right)$.

DISTÂNCIA DE PONTO À RETA

Considere um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta r: $ax + by + c = 0$. Observe a figura a seguir:



Nessa situação, é possível demonstrar através da distância entre os ponto P e Q, que a distância (d) entre o ponto P e a reta r é dada por:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Por exemplo:

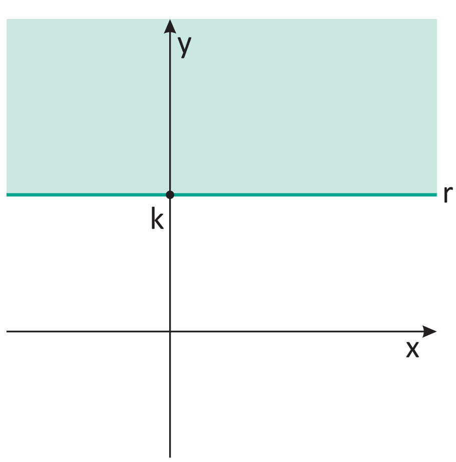
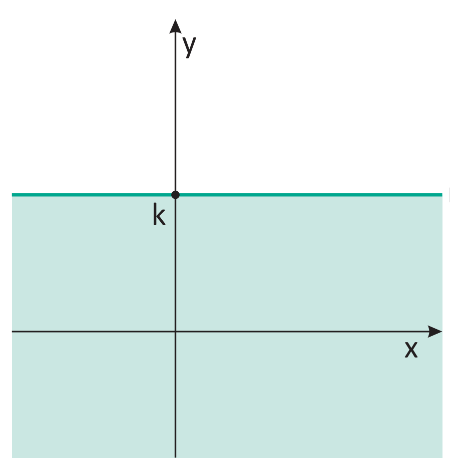
- Vamos calcular a distância entre o ponto P(1, 6) e a reta r: $-3x + 4y + 4 = 0$.

$$d = \frac{|-3.1 + 4.6 + 4|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = d = \frac{|25|}{\sqrt{25}} = 5$$

SEMIPLANOS – INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

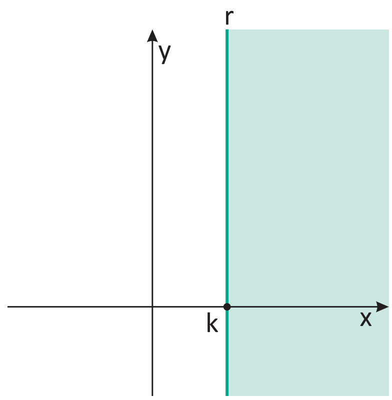
Toda reta r contida em um plano α, divide esse plano em duas regiões que chamadas de semiplanos, ambos com origem na própria reta. Cada um desses semiplanos podem ser representados por inequações do 1º grau com uma ou duas incógnitas. Observe os casos a seguir:

Se a reta r é paralela ao eixo das abscissas, então sua equação do tipo $y = k$. O semiplano acima da reta é representado por $y > k$ e o semiplano abaixo da reta é representado por $y < k$. Observe as figuras a seguir:

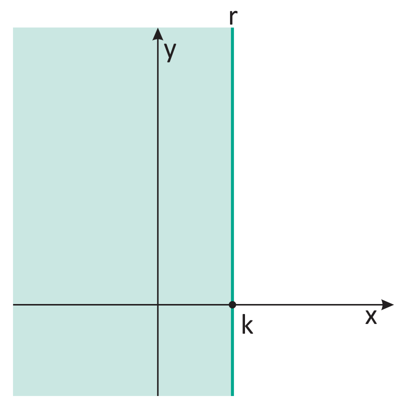
$y > k$	$y < k$
	

Se a reta r é paralela ao eixo das ordenadas, então sua equação do tipo $x = k$. O semiplano à direita da reta é representado por $x > k$ e o semiplano à esquerda da reta é representado por $x < k$. Observe as figuras a seguir:

$x > k$

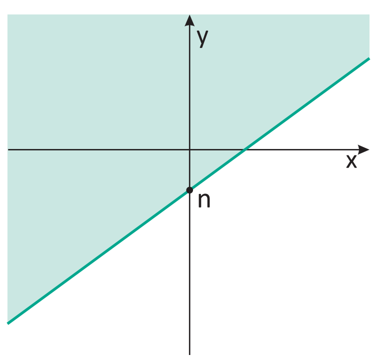


$x < k$

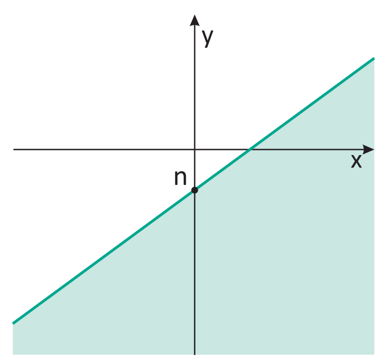


Se reta r é oblíqua em relação aos eixos coordenados, então sua equação do tipo $y = mx + n$. O semiplano acima da reta é representado por $y > mx + n$ e o semiplano abaixo da reta é representado por $y < mx + n$. Observe as figuras a seguir:

$y > mx + n$



$y < mx + n$



R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 5)$.

Resolução:

Seja r a reta determinada pelos pontos $A(-1, 2)$ e $B(3, 5)$ e $P(x, y)$. Pela condição de alinhamento entre três pontos, temos:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, temos:

$$-5 + 3y + 2x - 5x + y - 6 = 0$$

Portanto, a equação geral da reta r é dada por

$$-3x + 4y - 11 = 0.$$

02| Escreva a equação geral da reta r paralela ao eixo das abscissas que passa pelo ponto $(2,-1)$.

Resolução:

Se a reta r é paralela ao eixo Ox , então sua equação é do tipo $y = k$, sendo k uma constante real. Como r passa pelo ponto de ordenada -1, podemos concluir que sua equação será $y = -1$. Na forma geral, temos $y + 1 = 0$.

03| Determine o valor de p para que as retas de equações, $y = 2x + 2$ e $4x - py - 3 = 0$ sejam paralelas.

Resolução:

Sabemos que duas retas, r e s são paralelas se, e somente se, têm os coeficientes angulares iguais. Assim:

$r: y = 2x + 2 \Rightarrow m_r = 2$

$s: 4x - py - 3 = 0 \Rightarrow y = \dfrac{4x - 3}{p} \Rightarrow m_s = \dfrac{4}{p}$

Como $m_r = m_s$, *então:* $\dfrac{4}{p} = 2 \therefore p = 2.$

04| Determine a equação geral da reta s que passa pelo ponto A(3, 1) e é perpendicular a reta r de equação y = 2x − 1.

Resolução:

Sabemos que duas retas, r e s são perpendiculares se, e somente se, seus coeficientes angulares são opostos e inversos, ou seja, $m_r \,.\, m_s = -1$. *Assim:*

$$2 \,.\, ms = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{2}$$

Como a reta s passa pelo ponto A(3, 1), temos:

$y - 1 = -\dfrac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y - 2 = -x + 3$

Portanto, a equação geral da reta s é dada por $x + 2y - 5 = 0$.

05| Determine a distância entre o ponto P(1, 2) e a reta r de equação 4x + 3y − 2 = 0 .

Resolução:

Sabemos que a distância d do ponto $P(x_0, y_0)$ *a uma reta* $r: ax + by + c = 0$, *é dada por:*

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Logo:

$d = \dfrac{|4.1 + 3.2 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \dfrac{8}{5} = 1,6$

Portanto, a distância é de 1,6 u.c.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos:

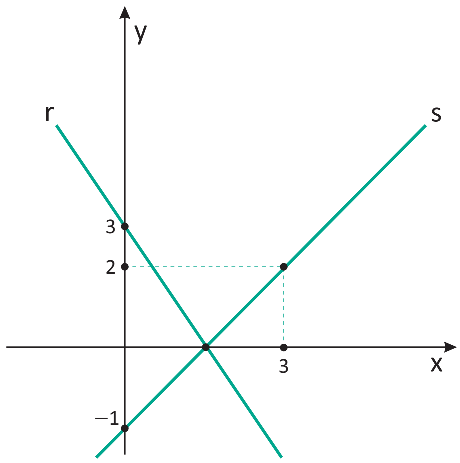
A (0, 3) e (2, 5)

B (−1, 3) e (−2, 4)

C $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ e (−2, 2)

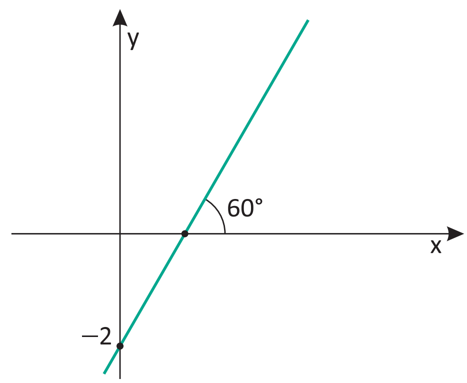
02| Escreva a equação geral da reta que passa pela origem e pelo ponto A(−2, 5).

03| Escreva a equação geral da reta r destacada abaixo:

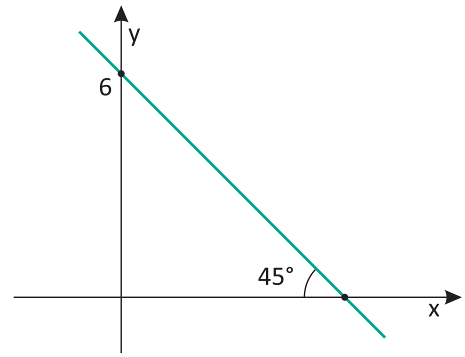


04| Escreva a equação reduzida de cada uma das retas representadas abaixo:

A

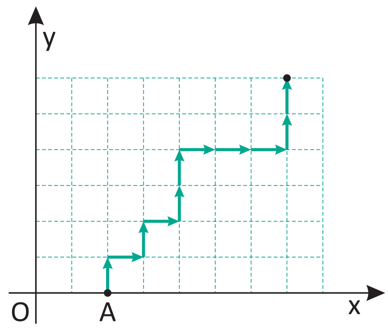


B



05| **UERJ** Uma partícula parte do ponto A(2, 0), movimentando-se para cima (C) ou para a direita (D), com velocidade de uma unidade de comprimento por segundo no plano cartesiano.

O gráfico a seguir exemplifica uma trajetória dessa partícula, durante 11 segundos, que pode ser descrita pela sequência de movimentos CDCDCCDDDCC.



Admita que a partícula faça outra trajetória composta somente pela sequência de movimentos CDD, que se repete durante 5 minutos, partindo de A. Determine a equação da reta que passa pela origem O (0, 0) e pelo último ponto dessa nova trajetória.

06| Determine a posição relativa entre as retas de equações:

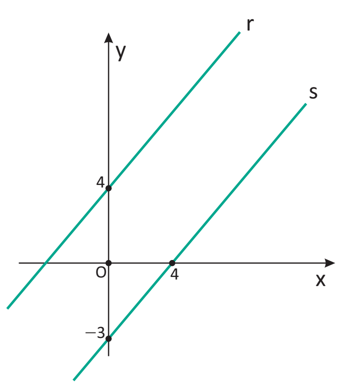
A $y = 3x - 1$ e $6x - 2y + 1 = 0$

B $3x - y + 4 = 0$ e $2x + y - 7 = 0$

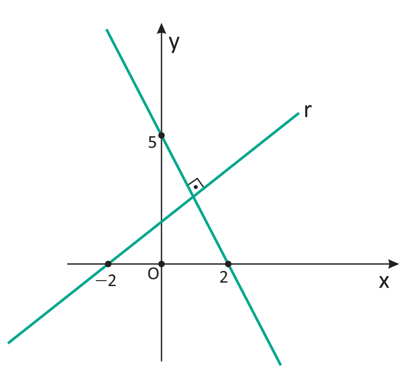
C $y = -\frac{2x}{3} + 5$ e $6x - 4y + 5 = 0$

07| Determine a equação geral da reta r nos seguintes casos:

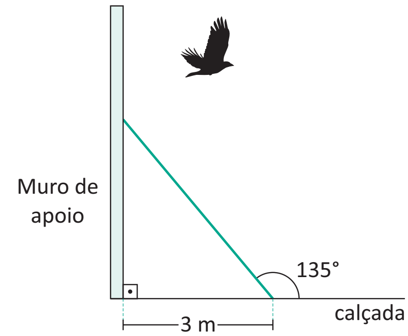
A



B



08| UEL Um pássaro sobrevoa uma rampa conforme mostra a figura. A ave faz seu voo em linha reta e paralela à calçada.

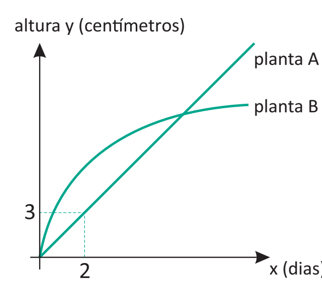


A Sabendo-se que a rampa forma um ângulo de 135° com a calçada, conforme mostra a figura, e que a distância do muro de apoio até o pé da rampa é de 3 metros, calcule o comprimento da rampa.

B Determine a menor distância entre o pássaro e a rampa no instante em que o pássaro se encontra a 5 metros do muro e a 6 metros da calçada em que se apoia a rampa. Apresente os cálculos realizados na resolução de cada item.

09| UNESP Duas plantas de mesma espécie, A e B, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, destas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta A é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta B pode ser descrito pela lei matemática $y = \frac{(24x - x^2)}{12}$.

Um esboço desses gráficos está apresentado na figura.



Determine:

A a equação da reta;

B o dia em que as plantas A e B atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

10| FGV Um mapa é localizado sobre um sistema de eixos cartesianos ortogonal, de modo que a posição de uma cidade é dada pelo ponto P(1, 3). Um avião descreve uma trajetória retilínea segundo a equação $x + 2y = 20$.

A Em qual ponto da trajetória, o avião se encontra mais próximo da cidade?

B Nas condições do item anterior, qual a distância da cidade ao avião?

T ENEM E VESTIBULARES

01| **CFT** A tabela seguinte mostra o número de ovos postos, por semana, pelas galinhas de um sítio

Semana	Número de galinhas (x)	Número de ovos (y)
1ª	2	11
2ª	3	18
3ª	4	25
4ª	5	32

Considerando-se esses dados, é correto afirmar que os pares ordenados (x, y) satisfazem a relação:

A) $y = 4x + 3$

B) $y = 6x - 1$

C) $y = 7x - 3$

D) $y = 5x + 7$

02| **PUC** Arquimedes, candidato a um dos cursos da Faculdade de Engenharia, visitou a PUC-RS para colher informações. Uma das constatações que fez foi a de que existe grande proximidade entre Engenharia e Matemática. Em uma aula de Geometria Analítica, o professor salientava a importância do estudo de triângulos em Engenharia, e propôs a seguinte questão:

O triângulo determinado pelos pontos A(0, 0), B(5, 4) e C(3, 8) do plano cartesiano tem área igual a.

Feitos os cálculos, os alunos concluíram que a resposta correta era:

A) 2

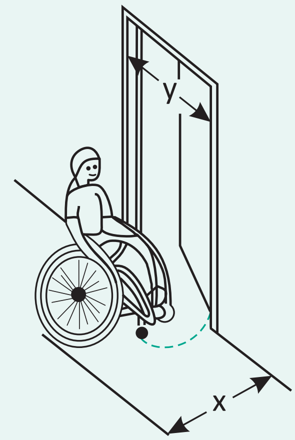
B) 4

C) 6

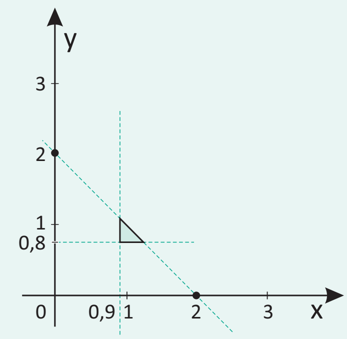
D) 14

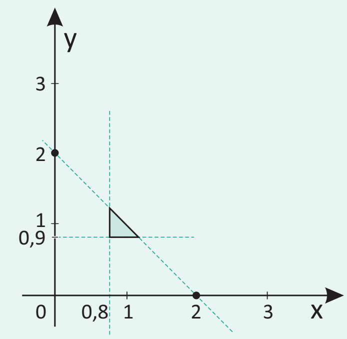
E) 28

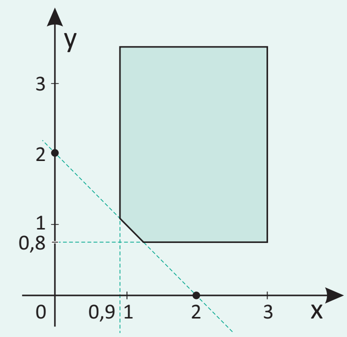
03| **UFTM** Uma pessoa em cadeira de rodas necessita de espaço mínimo para a rotação da sua cadeira em um corredor que dá acesso a uma porta. De acordo com as normas técnicas da obra, a largura mínima (x) do corredor deve ser de 90 cm, a da porta (y) de 80 cm e, além disso, é necessário que a soma dessas duas medidas seja igual ou maior que 2 m.



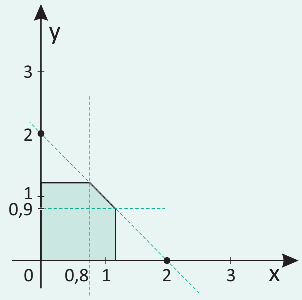
Uma representação no plano cartesiano ortogonal apenas dos pares (x, y), com ambas coordenadas dadas em metros, que atendem às normas técnicas da obra, é:

A)


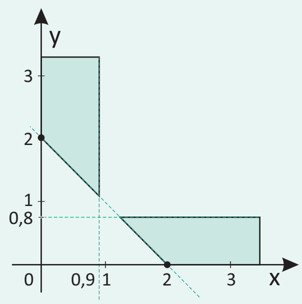
B)


C)


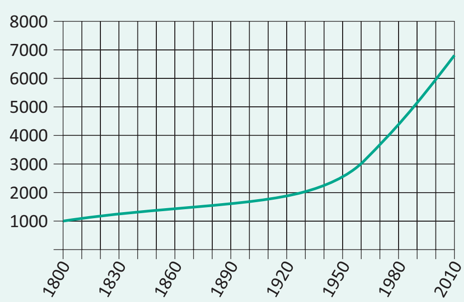
D



E



04| **UFG** Analise o gráfico a seguir, que representa a população mundial, em milhões, entre os anos de 1.800 e 2.010.



Denotando por p(t) a população mundial, em milhões, no ano t, é possível aproximar diferentes trechos do gráfico por funções afins. Com relação à dinâmica histórico-demográfica, representada no gráfico, observa-se, no período em que p(t) aproxima-se de:

A) $75t - 144.000$ um aumento da estabilidade política mundial, evidenciado pela inexistência de conflitos internacionais.

B) $75t - 144.000$ uma redução das desigualdades socioeconômicas, com a coletivização dos meios de produção nos países socialistas.

C) $\frac{20t}{3} - 11.000$ um aumento da expectativa de vida da população, com o desenvolvimento científico e tecnológico decorrente das corridas espacial e armamentista.

D) $\frac{20t}{3} - 11.000$ uma redução da fome nos países africanos em decorrência do processo de descolonização, além da melhora das condições sanitárias e de saúde pública.

E) $\frac{20t}{3} - 11.000$ uma redução das taxas de mortalidade nos países onde iniciou-se a Revolução Industrial, além da manutenção de elevadas taxas de natalidade.

05| **ENEM** Os procedimentos de decolagem e pouso de uma aeronave são os momentos mais críticos de operação, necessitando de concentração total da tripulação e da torre de controle dos aeroportos. Segundo levantamento da Boeing, realizado em 2.009, grande parte dos acidentes aéreos com vítimas ocorre após iniciar-se a fase de descida da aeronave. Desta forma, é essencial para os procedimentos adequados de segurança monitorar-se o tempo de descida da aeronave.

A tabela mostra a altitude y de uma aeronave, registrada pela torre de controle, t minutos após o início dos procedimentos de pouso.

tempo t (em minutos)	0	5	10	15	20
altitude y (em metros)	10000	8000	6000	4000	2000

Considere que, durante todo o procedimento de pouso, a relação entre y e t é linear.

Disponível em www.meioaereo.com.br

De acordo com os dados apresentados, a relação entre y e t é dada por:

A) $y = -400t$

B) $y = -2.000t$

C) $y = 8.000 - 400t$

D) $y = 10.000 - 400t$

E) $y = 10.000 - 2.000t$

06| **UDESC** A prefeitura de uma cidade planeja construir um terminal rodoviário em um ponto estratégico da cidade. Para isso será necessário construir duas novas estradas, uma ligando o novo terminal ao aeroporto e outra à principal rodovia de acesso à cidade. Sabe-se que o aeroporto está localizado 8 km a oeste e 6 km ao sul do novo terminal, enquanto que em um trecho sem curvas da rodovia são conhecidos dois pontos de referência A e B. O ponto A dista 2 km a leste e 14 km ao norte do terminal a ser construído, enquanto o ponto B está localizado 8 km a leste e 4 km ao sul do mesmo terminal. Nessas condições, a quantidade mínima x em km de estradas a ser construída pertence ao intervalo:

A) $9,5 < x < 10,5$

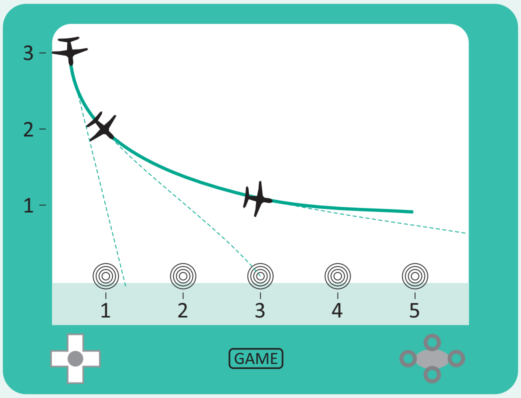
B) $16,5 < x < 17,5$

C) $15,5 < x < 16,5$

D) $30 < x < 31$

E) $31 < x < 32$

07| UFSM A figura mostra um jogo de videogame, em que aviões disparam balas visando a atingir o alvo. Quando o avião está no ponto (1, 2), dispara uma bala e atinge o alvo na posição (3, 0).



Sendo r a reta determinada pela trajetória da bala, observe as seguintes afirmativas:

I. O ponto $P\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ pertence a r.

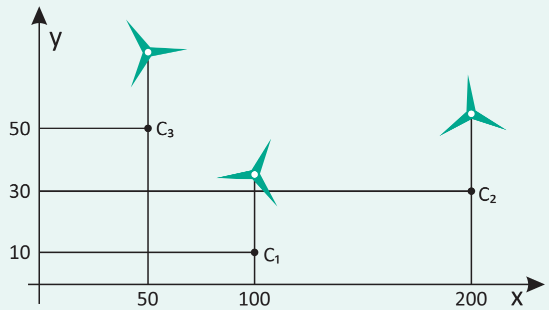
II. A reta r é perpendicular à reta que passa pela origem e pelo ponto médio do segmento AB, onde A(0, 3) e B(3, 0).

III. A reta r é paralela à reta s: $2x - 2y + 5 = 0$.

Está(ão) correta(s):

- **A** apenas I
- **B** apenas I e II
- **C** apenas III
- **D** apenas II e III
- **E** I, II e III

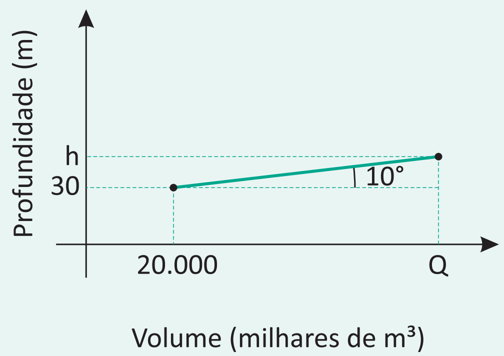
08| UFSM O uso de fontes de energias limpas e renováveis, como a energia eólica, geotérmica e hidráulica, é uma das ações relacionadas com a sustentabilidade que visa a diminuir o consumo de combustíveis fósseis, além de preservar os recursos minerais e diminuir a poluição do ar. Em uma estação de energia eólica, os cata-ventos C_1, C_2 e C_3 estão dispostos conforme o gráfico a seguir.



Para que um cata-vento de coordenadas (x, y) esteja alinhado com o cata-vento C_1 e com o ponto médio do segmento $\overline{C_2C_3}$ é necessário e suficiente que:

- **A** $2x + 15y = 850$
- **B** $5y - x + 50 = 0$
- **C** $55y - 26x + 2050 = 0$
- **D** $4x + 5y = 450$
- **E** $5y - 6x + 550 = 0$

09| UFG Durante um ciclo hidrológico completo, considera-se que o volume total de água que passa por uma determinada seção do rio no exutório de uma bacia hidrográfica é igual ao volume de água precipitado na bacia menos o volume de água que volta para a atmosfera por evapotranspiração. Em determinado ano, o volume total de água que passou por essa seção do rio foi de 20 milhões de metros cúbicos e a profundidade média anual nesse ponto do rio foi de 30 metros. No ano seguinte, nesta mesma seção, o volume de água e a profundidade média foram Q e h, respectivamente, como indica o gráfico a seguir.

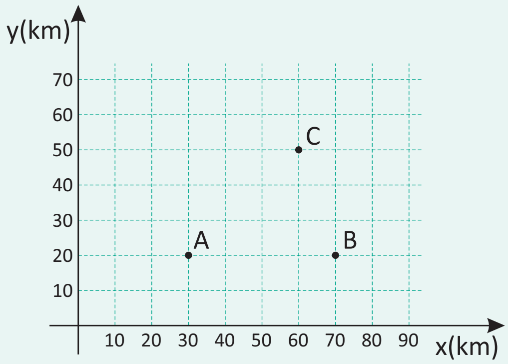


Sabendo-se que tanto o volume de água precipitado quanto a perda por evapotranspiração aumentaram, de um ano para o outro, em 0,49% e que o gráfico utiliza a mesma escala para os dois eixos, o valor da profundidade de h, em metros, foi de, aproximadamente:

Dados: $\text{sen}(10°) \approx 0,17$, $\cos(10°) \approx 0,98$

- **A** 30,15
- **B** 31,47
- **C** 44,70
- **D** 47,00
- **E** 98,00

10| ENEM Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:

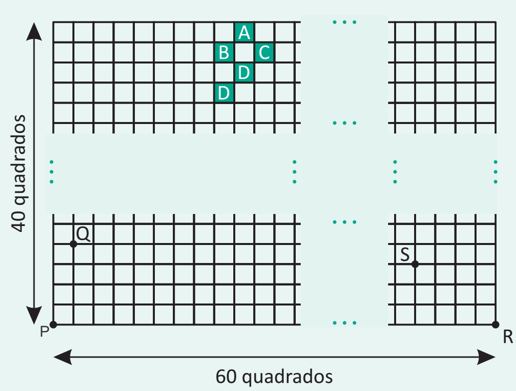


A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas:

- **A** (65, 35)
- **B** (53, 30)
- **C** (45, 35)
- **D** (50, 20)
- **E** (50, 30)

11| INSPER Na malha quadriculada 40×60 esquematizada na figura a seguir, estão marcados os pontos P, Q, R e S.



A reta $\overleftrightarrow{PQ}$ intercepta a reta $\overleftrightarrow{RQ}$ em um ponto que pertence ao interior de um dos quadrados sombreados. Esse quadrado está identificado pela letra:

- **A** A
- **B** B
- **C** C
- **D** D
- **E** E

12| UEL Números totais de transferências de jogadores brasileiros de futebol por região de destino (2.007—2.009)

Região de Destino	2007	2008	2009*	Total
África	16	14	19	49
América do Central	27	35	14	76
América do Norte	23	34	29	86
América do Sul	72	105	62	239
Ásia	213	152	127	492
Europa Oriental	135	149	60	344
Europa Ocidental	500	565	185	1250
Oceania	10	10	8	28
Oriente Médio	89	112	27	228
Total	1085	1176	531	2792

*Dados referentes ao primeiro semestre do ano.

(RUGGI, L. ; RESENDE, R.; CARNIEL, F. Em campo com passaporte: notas sobre as transferências internacionais de jogadores de futebol brasileiros.

Disponível em: <www.humanas.ufpr.br/evento/SociologiaPolitica>. Acesso em: 27 jun. de 2.010.)

Observe, na tabela, os dados referentes às transferências de jogadores para o Oriente Médio.

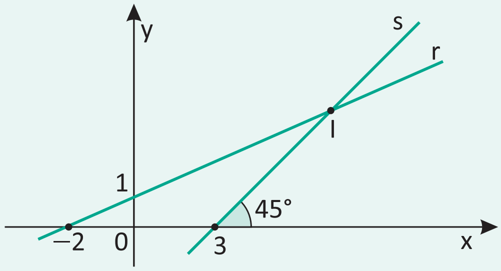
Assinale a alternativa que preenche corretamente as lacunas a seguir.

A reta de equação ______ passa pelos pontos (2.007,89) e (2.008,112). Se utilizássemos essa reta para prever o número de transferências em todo o ano de 2.009, teríamos ______ transferências.

Nota: Os dados referentes a 2.009 são parciais, portanto não devem ser considerados.

- **A** $y = 16(x - 2.007) + 70$ e 118
- **B** $y = 21(x - 2.007) + 70$ e 85
- **C** $y = 23(x - 2.007) + 89$ e 135
- **D** $y = 21(x - 2.007) + 89$ e 126
- **E** $y = 23(x - 2.007) + 89$ e 133

13| PUC Suponha que no plano cartesiano mostrado na figura abaixo, em que a unidade de medida nos eixos coordenados é o quilômetro, as retas r e s representam os trajetos percorridos por dois navios, N_1 e N_2, antes de ambos atracarem em uma ilha, localizada no ponto I.



Considerando que, no momento em que N_1 e N_2 se encontravam atracados em I, um terceiro navio, N3, foi localizado no ponto de coordenadas (26, 29), a quantos quilômetros N_3 distava de I?

A 28

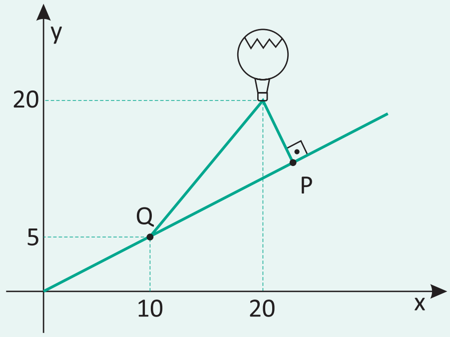
B 30

C 34

D 36

E 40

14| UFPR Um balão de ar quente foi lançado de uma rampa inclinada. Utilizando o plano cartesiano, a figura ao lado descreve a situação de maneira simplificada.



Ao ser lançado, o balão esticou uma corda presa aos pontos P e Q, mantendo-se fixo no ar. As coordenadas do ponto P, indicado na figura, são, então:

A (21, 7)

B (22, 8)

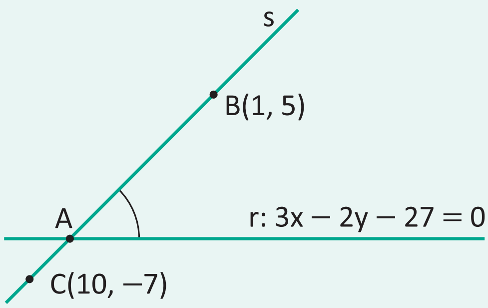
C (24, 12)

D (25, 13)

E (26, 15)

15| CEFET Numa "caça ao tesouro" promovida por uma escola, a equipe azul recebeu a seguinte instrução:

"A próxima pista se encontra numa das cartas numeradas fixadas no edital da cantina. A referida carta tem o número correspondente à distância entre os pontos A e B da figura a seguir".



O número contido na carta era:

A 14

B $2\sqrt{5}$

C 15

D 10

E 5

16| ENEM Uma família deseja realizar um jantar comemorativo de um casamento e dispõe para isso de um salão de festas de um clube, onde a área disponível para acomodação das mesas é de 500 m^2. As 100 mesas existentes no salão encontram-se normalmente agrupadas duas a duas, comportando 6 cadeiras. A área de cada mesa é de 1 m^2 e o espaço necessário em torno deste agrupamento, para acomodação das cadeiras e para circulação, é de 6 m^2. As mesas podem ser dispostas de maneira isolada, comportando 4 pessoas cada. Nessa situação, o espaço necessário para acomodação das cadeiras e para circulação é de 4 m^2. O número de convidados previsto para o evento é de 400 pessoas.

Para poder acomodar todos os convidados sentados, com as mesas existentes e dentro da área disponível para acomodação das mesas e cadeiras, como deverão ser organizadas as mesas?

A Todas deverão ser separadas.

B Todas mantidas no agrupamento original de duas mesas.

C Um terço das mesas separadas e dois terços agrupadas duas a duas.

D Um quarto das mesas separadas e o restante em agrupamento de duas a duas.

E Sessenta por cento das mesas separadas e quarenta por cento agrupadas duas a duas.

CONCEITOS BÁSICOS

Euclides de Alexandria

Geometria Euclidiana, o nome se deve a **Euclides**, foi ele quem sistematizou os conhecimentos geométricos que, em parte, já eram do domínio dos matemáticos da Antiguidade Clássica. Apesar de sabermos muito pouco sobre a vida de Euclides, matemático que viveu por volta do ano 300 a.C., frequentemente atribuímos a ele o título de **"pai da geometria"** devido às suas importantes contribuições ao estudo desse ramo da matemática, contidas na monumental obra ***Os Elementos***. Acredita-se que o livro de Euclides, escrito originalmente em 13 volumes, tenha sido a segunda obra mais editada na história do homem, perdendo apenas para o número de edições da Bíblia. Durante várias gerações, a obra foi usada como manual para o ensino de geometria devido ao rigor matemático com que tratava o assunto.

NOÇÕES PRIMITIVAS

As noções (conceitos) geométricas são estabelecidas por meio de definição.

As noções primitivas são aceitas sem definição. Aceitaremos sem definir as noções de: PONTO, RETA e PLANO, de cada um desses termos temos conhecimento intuitivo, vindos da experiência e observação.

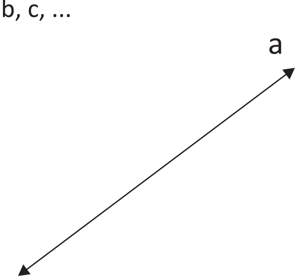
Adotaremos as seguintes notações:

PONTO (letras maiúsculas do nosso alfabeto): A, B, C, ...

A

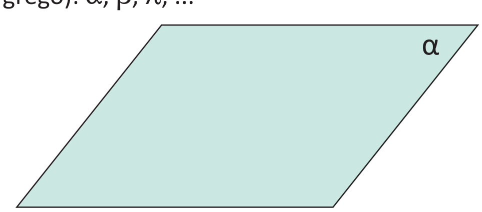
(O ponto A)

RETA (letras minúsculas do nosso alfabeto): a, b, c, ...



(A reta a)

PLANO (letras minúsculas do alfabeto grego): α, β, λ, ...



(O plano α)

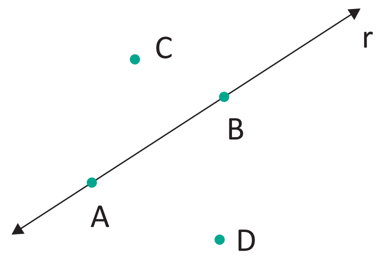
Conheça o alfabeto grego, pronúncia, maiúsculas e minúsculas no apêndice da página 268.

PROPOSIÇÕES PRIMITIVAS

As proposições (propriedades) geométricas são aceitas por meio de demonstrações.

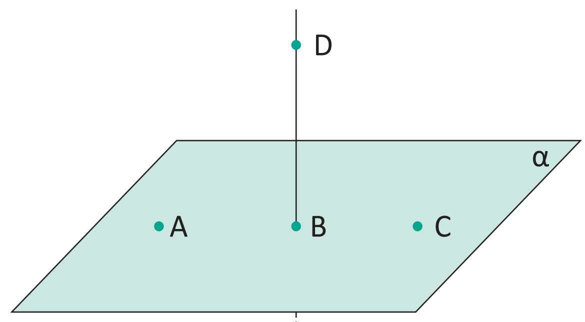
As proposições primitivas (postulados, axiomas) são aceitas sem demonstração. Vejamos alguns postulados relacionando o ponto, a reta e o plano:

POSTULADO 1 | Em uma reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.



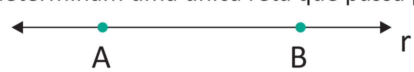
$A \in r, B \in r, C \notin r$ e $D \notin r$

POSTULADO 2 | Em um plano há infinitos pontos.



$A \in \alpha, B \in \alpha, C \in \alpha$ e $D \notin \alpha$

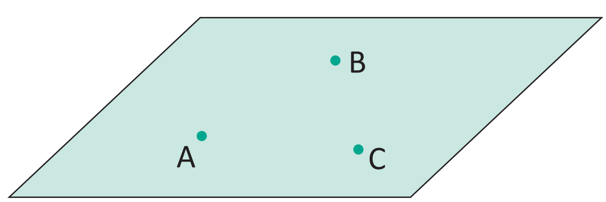
POSTULADO 3 | Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.



A reta r é a única reta que passa por A e B

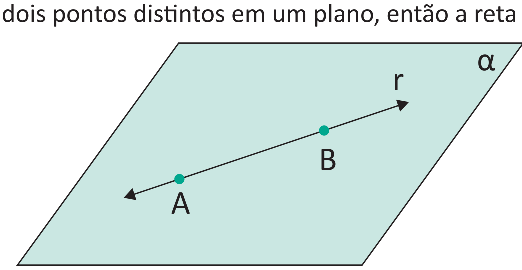
(retas coincidentes se equivalem a uma única reta)

POSTULADO 4 | Três pontos não colineares (não pertencentes a uma mesma reta) determinam um único plano que passa por eles.



O plano α é o único plano que passa por A, B e C

POSTULADO 5 | Se uma reta tem dois pontos distintos em um plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.

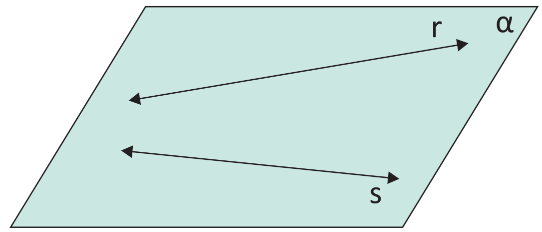


$A \in \alpha, B \in \alpha \Rightarrow r \subset \alpha$

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETAS

COPLANARES

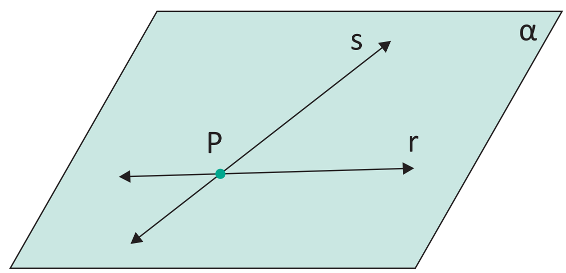
Duas retas que estão contidas no mesmo plano são chamadas de retas coplanares.



$r \subset \alpha, s \subset \alpha \Rightarrow$ r e s (coplanares)

CONCORRENTES

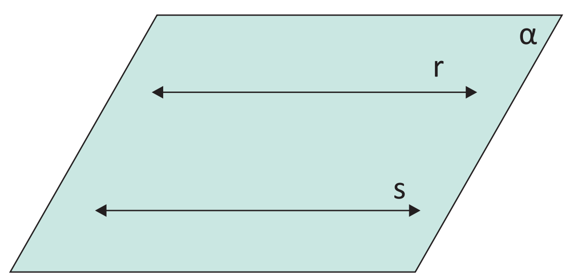
Duas retas coplanares são concorrentes quando possuem um único ponto em comum.



$r \cap s = \{P\}$

PARALELAS

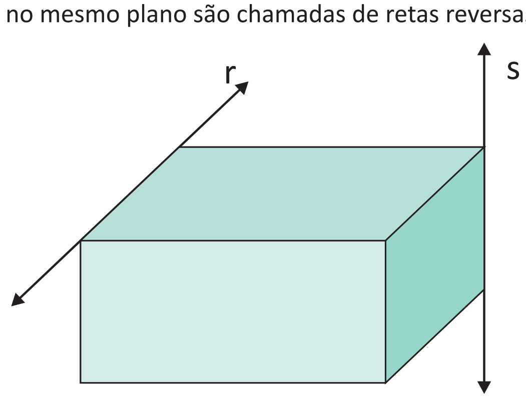
Duas retas coplanares são paralelas quando não possuem ponto em comum.



$r \cap s = \varnothing$

REVERSAS

Duas retas que não estão contidas no mesmo plano são chamadas de retas reversas.



Não existe um único plano que contenha as retas r e s

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| UNICAMP É comum encontrarmos mesas com 4 pernas que, mesmo apoiadas em um piso plano, balançam e nos obrigam a colocar um calço em uma das pernas se a quisermos firme. Explique usando argumentos de geometria, por que isso não acontece com uma mesa de 3 pernas.

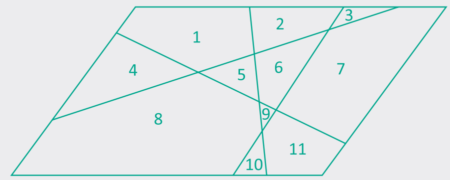
Resolução:

As mesas de três "pernas" não balançam, pois os seus três "pés" determinam um único plano.

02| UFPE Em quantas regiões quatro retas distintas dividem o plano, sabendo-se que não há duas retas paralelas nem três concorrentes no mesmo ponto?

Resolução:

11 regiões, veja:



F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Julgue os itens:

- **A** ( ) Por um ponto passam infinitas retas.
- **B** ( ) Em uma reta e fora dela existem infinitos pontos.
- **C** ( ) Por dois pontos distintos passa uma reta.
- **D** ( ) Por três pontos dados passa uma só reta.
- **E** ( ) Uma reta contém dois pontos distintos.

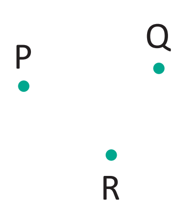
02| Considerando dois pontos distintos A e B, responda:

- **A** Quantas retas você pode traçar passando pelo ponto A?
- **B** Quantas retas você pode traçar passando pelo ponto B?
- **C** Quantas retas você pode traçar passando pelos pontos A e B simultaneamente?

03| Julgue os itens:

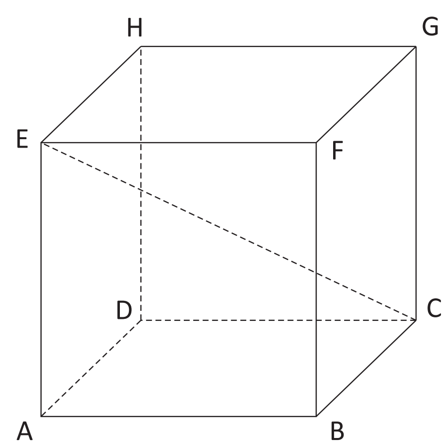
- **A** ( ) Três pontos distintos são sempre não colineares.
- **B** ( ) Três pontos distintos são sempre não coplanares.
- **C** ( ) Quatro pontos todos distintos determinam duas retas.
- **D** ( ) Se uma reta tem dois pontos distintos em um plano, então a reta está contida nesse mesmo plano.
- **E** ( ) Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

04| Considerando os pontos P, Q e R da figura seguinte, responda:



- **A** Quantas retas você pode traçar passando por dois desses pontos?
- **B** Quantas retas você pode traçar passando pelos três pontos simultaneamente?

05| UEG As arestas do hexaedro regular (cubo) representado abaixo estão identificadas pelos vértices. Para cada par de arestas existem três possibilidades de posição entre elas: concorrentes, paralelas ou reversas. Identifique, em cada item, a posição dos pares solicitados.



$\overline{AB}$ e $\overline{HG}$ ____________________

$\overline{FB}$ e $\overline{BC}$ ____________________

$\overline{EA}$ e $\overline{HD}$ ____________________

$\overline{HG}$ e $\overline{EA}$ ____________________

$\overline{EC}$ e $\overline{HG}$ ____________________

$\overline{CG}$ e $\overline{AE}$ ____________________

06| Millôr Fernandes, em uma bela homenagem à Matemática, escreveu:

Poesia Matemática
Às folhas tantas
do livro matemático
um Quociente apaixonou-se
um dia
doidamente
por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
e viu-a do ápice à base
uma figura ímpar;
olhos romboides, boca trapezoide,
corpo retangular, seios esferoides.
Fez de sua uma vida
paralela à dela
até que se encontraram
no infinito.
“Quem és tu?”, indagou ele
em ânsia radical.
“Sou a soma do quadrado dos catetos.
Mas pode me chamar de Hipotenusa.”
E de falarem descobriram que eram
(o que em aritmética corresponde
a almas irmãs)
primos entre si.
E assim se amaram
ao quadrado da velocidade da luz
numa sexta potenciação
traçando
ao sabor do momento
e da paixão
retas, curvas, círculos e linhas sinoidais
nos jardins da quarta dimensão.
Escandalizaram os ortodoxos das fórmulas euclidiana
e os exegetas do Universo Finito.
Romperam convenções newtonianas e pitagóricas.
E enfim resolveram se casar
constituir um lar,
mais que um lar,
um perpendicular.
Convidaram para padrinhos
o Poliedro e a Bissetriz.
E fizeram planos, equações e diagramas para o futuro
sonhando com uma felicidade
integral e diferencial.
E se casaram e tiveram uma secante e três cones
muito engraçadinhos.
E foram felizes
até aquele dia
em que tudo vira afinal
monotonia.
Foi então que surgiu
O Máximo Divisor Comum
frequentador de círculos concêntricos,
viciosos.
Ofereceu-lhe, a ela,
uma grandeza absoluta
e reduziu-a a um denominador comum.
Ele, Quociente, percebeu
que com ela não formava mais um todo,
uma unidade.
Era o triângulo,
tanto chamado amoroso.
Desse problema ela era uma fração,
a mais ordinária.
Mas foi então que Einstein descobriu a Relatividade
e tudo que era espúrio passou a ser
moralidade
como aliás em qualquer
sociedade.

Texto extraído do livro Tempo e Contratempo, Edições O Cruzeiro – Rio de Janeiro, 1954, pág. sem número, publicado com o pseudônimo de Vão Gogo.

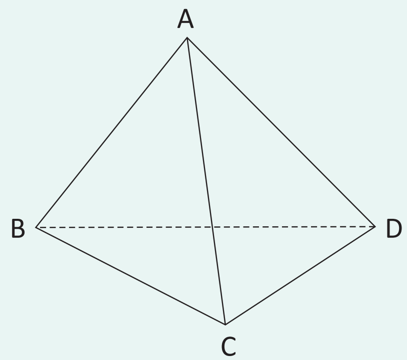
Em: “Fez da sua uma vida paralela à dela, até que se encontraram no Infinito.”, Millôr comete um erro geométrico, baseado em seus conhecimentos de geometria plana, explique esse erro.

07| UFAL Analise as afirmativas abaixo.

- **A** ( ) Duas retas que não têm pontos comuns sempre são paralelas.
- **B** ( ) Duas retas distintas sempre determinam um plano.
- **C** ( ) Uma reta pertence a infinitos planos distintos.
- **D** ( ) Três pontos distintos sempre determinam um único plano.
- **E** ( ) Duas retas coplanares distintas são paralelas.

T ENEM E VESTIBULARES

01| UNIFESP Dois segmentos dizem-se reversos quando não são coplanares. Neste caso, o número de pares de arestas reversas num tetraedro, como o da figura, é:



- **A** 6.
- **B** 3.
- **C** 2.
- **D** 1.
- **E** 0.

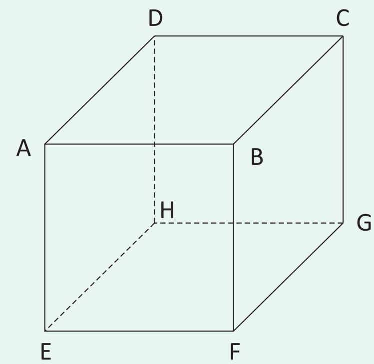
02| MACK r, s e t são retas distintas tais que s é perpendicular a r e t é perpendicular a r. Relativamente às retas s e t, podemos afirmar que:

- **A** Elas podem ser unicamente paralelas ou concorrentes.
- **B** Elas podem ser unicamente paralelas ou reversas.
- **C** Elas podem ser unicamente concorrentes ou reversas.
- **D** Elas podem ser paralelas, concorrentes ou reversas.
- **E** Elas podem ser unicamente reversas.

03| UNESP Entre todas as retas suportes das arestas de um certo cubo, considere duas, r e s, reversas. Seja t a perpendicular comum a r e a s. Então:

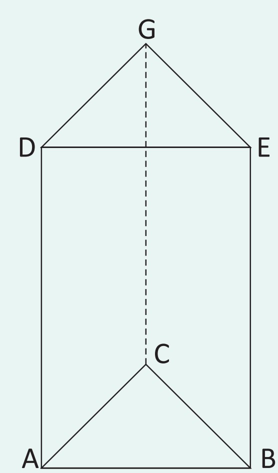
- **A** t é a reta suporte de uma das diagonais de uma das faces do cubo.
- **B** t é a reta suporte de uma das diagonais do cubo.
- **C** t é a reta suporte de uma das arestas do cubo.
- **D** t é a reta que passa pelos pontos médios das arestas contidas em r e s.
- **E** t é a reta perpendicular a duas faces do cubo, por seus pontos médios.

04| UNESP Considere o cubo da figura adiante. Das alternativas a seguir, aquela correspondente a pares de vértices que determinam três retas, duas a duas reversas, é:



- **A** (A,D); (C,G); (E,H).
- **B** (A,E); (H,G); (B,F).
- **C** (A,H); (C,F); (F,H).
- **D** (A,E); (B,C); (D,H).
- **E** (A,D); (C,G); (E,F).

05| FUVEST Uma formiga resolveu andar de um vértice a outro do prisma reto de bases triangulares ABC e DEG, seguindo um trajeto especial. Ela partiu do vértice G, percorreu toda a aresta perpendicular à base ABC, para em seguida caminhar toda a diagonal da face ADGC e, finalmente, completou seu passeio percorrendo a aresta reversa a CG. A formiga chegou ao vértice:



- **A** A
- **B** B
- **C** C
- **D** D
- **E** E

06| FAAP Duas retas são reversas quando:

- **A** Não existe plano que contém ambas.
- **B** Existe um único plano que as contém.
- **C** Não se interceptam.
- **D** Não são paralelas.
- **E** São paralelas, mas pertencem a planos distintos.

07| PUC Assinale a alternativa correta:

- **A** Num plano, se duas retas são paralelas, então toda reta perpendicular a uma delas é paralela à outra.
- **B** Num plano, se duas retas são perpendiculares, então toda reta paralela a uma delas é paralela à outra.
- **C** Num plano, se duas retas são perpendiculares, então toda reta perpendicular a uma delas é perpendicular à outra.
- **D** Num plano, se duas retas são paralelas, então toda reta paralela a uma delas é perpendicular à outra.
- **E** Num plano, se duas retas são perpendiculares, então toda reta paralela a uma delas é perpendicular à outra.

08| UFMG Os pontos A, B, C, D são colineares e tais que AB = 6 cm, BC = 2 cm, AC = 8 cm e BD = 1 cm. Nessas condições uma possível disposição desses pontos é:

- **A** A D B C
- **B** A B C D
- **C** A C B D
- **D** B A C D
- **E** B C D A

09| UEL Considere uma reta s, contida em um plano α, e uma reta r perpendicular a s. Então, necessariamente:

- **A** r é perpendicular a α.
- **B** r e s são coplanares.
- **C** r é paralela a α.
- **D** r está contida em α.
- **E** Todas as retas paralelas a r interceptam s.

10| ENEM O símbolo internacional de acesso, mostrado na figura, anuncia local acessível para o portador de necessidades especiais. Na concepção desse símbolo, foram empregados elementos gráficos geométricos elementares.

Regras de acessibilidade ao meio físico para o deficiente.

Disponível em: www.ibdd.org.br. Acesso em: 28 jun. 2011 (adaptado).

Os elementos geométricos que constituem os contornos das partes claras da figura são

- **A** retas e círculos.
- **B** retas e circunferências.
- **C** arcos de circunferências e retas.
- **D** coroas circulares e segmentos de retas.
- **E** arcos de circunferências e segmentos de retas.

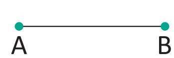
ÂNGULOS

INTRODUÇÃO

Para entendermos a definição de ângulo, devemos inicialmente entender as definições de segmento de reta, semirreta e região convexa.

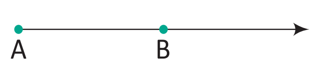
SEGMENTO DE RETA

Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta AB (indicado por $\overline{AB}$).



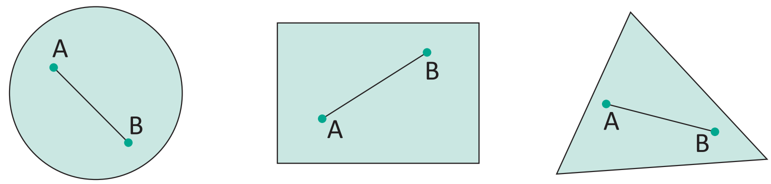
SEMIRRETA

Dados dois pontos distintos A e B, a reunião do segmento de reta $\overline{AB}$ com o conjunto dos pontos X tais que B está entre A e X é a semirreta AB (indicada por $\overrightarrow{AB}$).

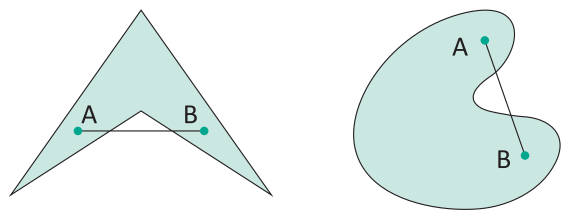


REGIÃO CONVEXA

Um conjunto de pontos Σ é convexo (região convexa) se, e somente se, dois pontos distintos de Σ são extremidades de um segmento $\overline{AB}$ contido em Σ, ou se Σ é unitário ou vazio. São exemplos de regiões convexas:

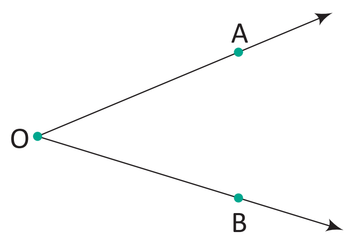


Se uma região não é convexa, ela é uma região côncava. São exemplos de regiões côncavas:



ÂNGULO

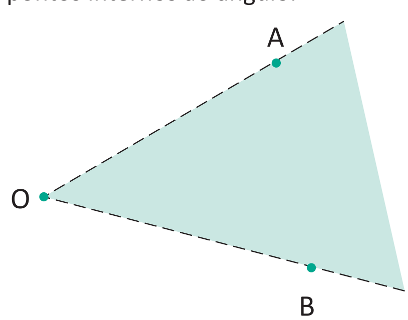
Chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas em uma mesma reta (não colineares).



$$A\hat{O}B = \overrightarrow{OA} \cup \overrightarrow{OB}$$

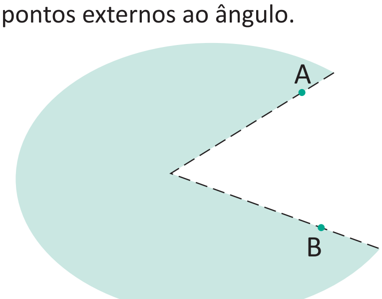
O interior de um ângulo é convexo.

Os pontos do interior de um ângulo são pontos internos ao ângulo.



O exterior de um ângulo é côncavo.

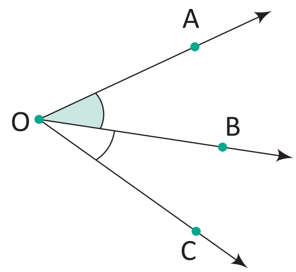
Os pontos do exterior de um ângulo são pontos externos ao ângulo.



ÂNGULOS CONSECUTIVOS E ADJACENTES

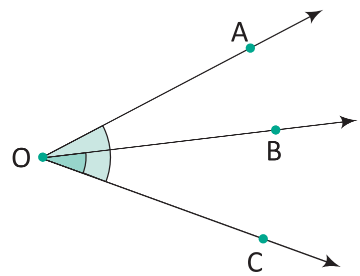
ÂNGULOS CONSECUTIVOS

Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles é também lado do outro.



AÔB e BÔC são consecutivos

($\overrightarrow{OB}$ é o lado comum)

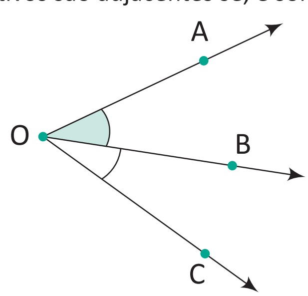


AÔC e BÔC são consecutivos

($\overrightarrow{OC}$ é o lado comum)

ÂNGULOS ADJACENTES

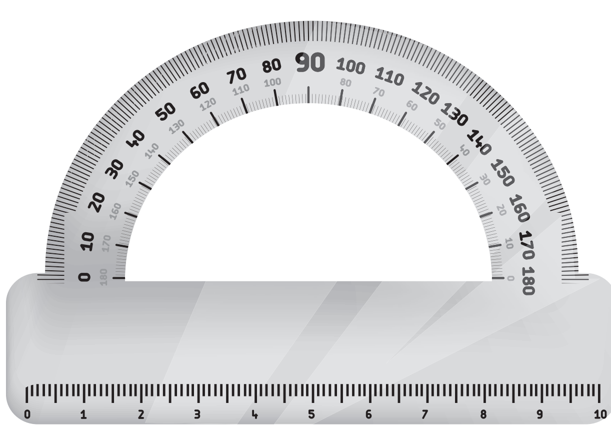
Dois ângulos consecutivos são adjacentes se, e somente se, não tem pontos internos comuns.

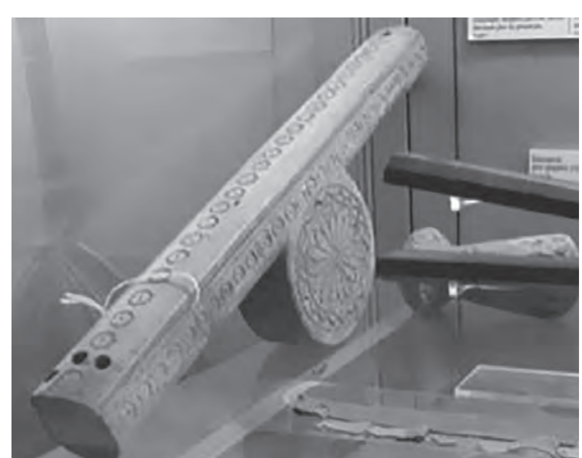


AÔB e BÔC são adjacentes

UNIDADES DE MEDIDA DE ÂNGULOS

O instrumento utilizado para medir ângulos é o transferidor, que tem o grau como unidade de medida.





Com base em números codificados nas inscrições da superfície do objeto egípcio, acredita-se que poderia ter sido usado para determinar a inclinação de certos ângulos (o primeiro exemplar mundial de um transferidor).

O número de graus de um ângulo é a sua medida.

Estendendo-se o conceito de ângulo convenientemente, a medida α de um ângulo é tal que:

$$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

SUBMÚLTIPLOS DO GRAU

Ângulo de um minuto (1’) é o ângulo submúltiplo segundo 60 de um ângulo de um grau, ou seja:

$$1^\circ = 60'$$

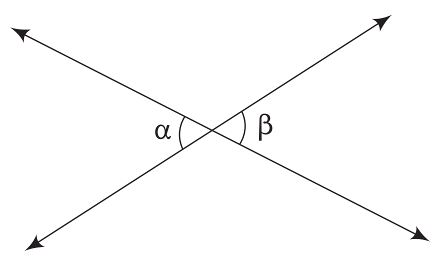
Ângulo de um segundo (1’’) é o ângulo submúltiplo segundo 60 de um ângulo de um minuto, ou seja:

$$1' = 60''$$

ÂNGULOS OPOSTOS PELO VÉRTICE (O.P.V.)

Dois ângulos são opostos pelo vértice se, e somente se, os lados de um deles são as respectivas semirretas opostas aos lados do outro.

Ângulos opostos pelo vértice são congruentes, ou seja, dois ângulos de mesma medida.

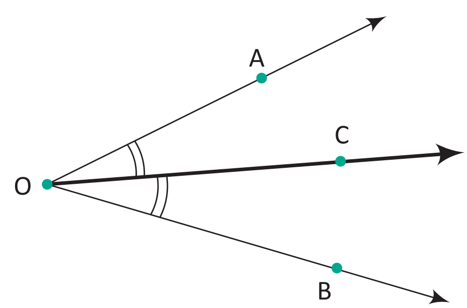


α e β são opostos pelo vértice

$$\alpha \equiv \beta$$

BISSETRIZ DE UM ÂNGULO

A bissetriz de um ângulo é a semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos de mesma medida (congruentes).



$\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$

$$A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$$

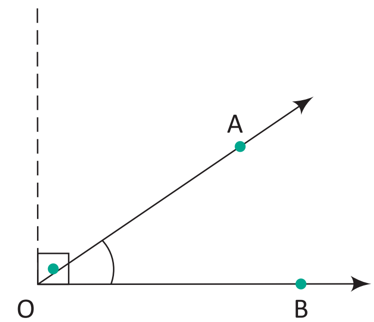
ÂNGULOS: NULO, AGUDO, RETO, OBTUSO, E RASO

ÂNGULO NULO

É o ângulo cujos lados são coincidentes.

ÂNGULO AGUDO

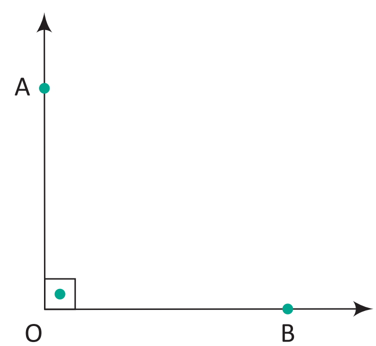
É o ângulo cuja medida é maior que 0° e menor que 90°.



AÔB é agudo

ÂNGULO RETO

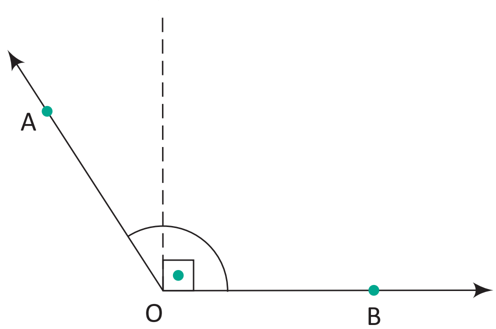
É o ângulo cuja medida é 90°.



AÔB é reto

ÂNGULO OBTUSO

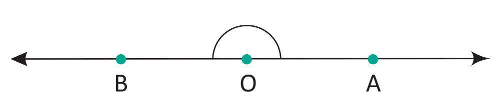
É o ângulo cuja medida é maior que 90° e menor que 180°.



AÔB é obtuso

ÂNGULO RASO

É o ângulo cuja medida é 180°.



AÔB é raso

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Determine:

A) $30°40' + 15°37'$

B) $20°50'45'' - 5°45'54''$

C) $2.(12°40'52'')$

D) $(46°49'51''):3$

Resolução:

A)

$$\begin{array}{r} 30°40' \\ +15°37' \\ \hline 45°77' \end{array} \Rightarrow 46°17'$$

B)

$$\begin{array}{r} 20°50'45'' \\ -5°45'54'' \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 20°49'105'' \\ -5°45'54'' \\ \hline 15°4'51'' \end{array}$$

C)

$$\begin{array}{r} 12°40'52'' \\ 2 \\ \hline 24°80'104'' \end{array} \Rightarrow 24°81'44''$$

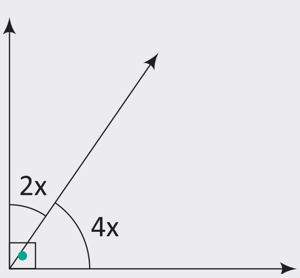
$$\Rightarrow 25°21'44''$$

D)

$$\begin{array}{r|l} 46°49'51'' & 3 \\ \cline{2-2} -45° & 15°36'37'' \\ \cline{1-1} 1°49'51'' & \\ \Rightarrow 109'51'' & \\ -108' & \\ \cline{1-1} 1'51'' & \\ \Rightarrow 111'' & \\ -111'' & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

02| Determine o valor de x:

A)



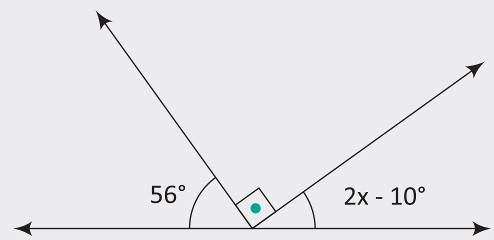
Resolução:

$2x + 4x = 90°$

(ângulos complementares)

$\Rightarrow 6x = 90° \Rightarrow x = 15°$

B)

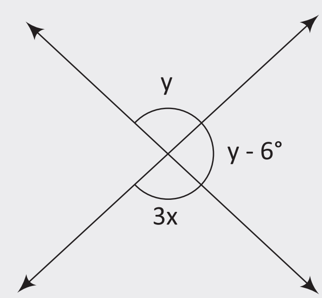


Resolução:

$2x - 10° + 90° + 56° = 180°$

$\Rightarrow 2x = 44° \Rightarrow x = 22°$

C)



Resolução:

$y + y - 6 = 180°$

(ângulos suplementares)

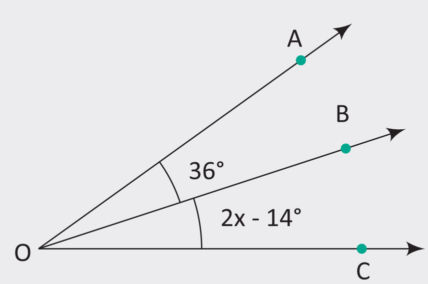
$\Rightarrow 2y = 186° \Rightarrow y = 93°$

$3x = y = 93°$

(ângulos opostos pelo vértice)

$\Rightarrow x = 31°$

03| Se $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, determine x.



Resolução:

$2x - 14° = 36°$

$\Rightarrow 2x = 50° \Rightarrow x = 25°$

04| Calcule o suplemente e o complemento dos ângulos seguintes:

Ⓐ 37°

Ⓑ α

Resolução:

Ⓐ *$90° - 37° = 53°$ (complemento)*

$180° - 37° = 143°$ (suplemento)

Ⓑ *$90° - \alpha$ (complemento)*

$180° - \alpha$ (suplemento)

05| Determine o ângulo que vale o triplo de seu complemento.

Resolução:

Sendo x, o ângulo, temos:

$x = 3\,.(90° - x)$

$\Rightarrow x = 270° - 3x \Rightarrow 4x = 270°$

$\Rightarrow x = \dfrac{270°}{4} \Rightarrow x = 67°\,30'$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Efetue as operações indicadas:

Ⓐ 25° 54' + 17° 36'

Ⓑ 12° 32' 25'' + 19° 27' 58''

Ⓒ 20° 45' 32''- 6° 33' 54''

Ⓓ 90° – 50° 42' 28''

Ⓔ 2 . (10° 36' 48'')

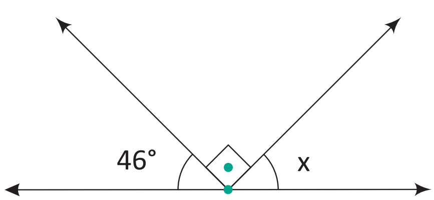
Ⓕ 5 . (7° 15' 30'')

Ⓖ (42° 54' 48'') : 2

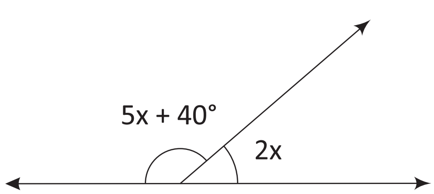
Ⓗ (34° 35' 12'') : 3

02| Determine o valor de x:

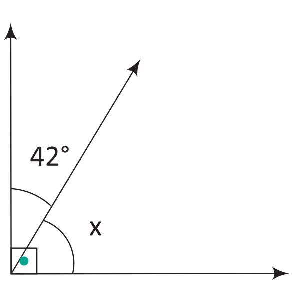
Ⓐ



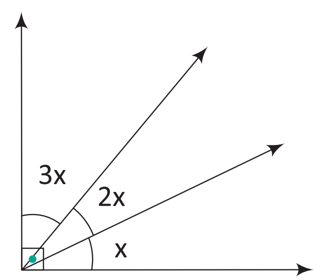
Ⓑ



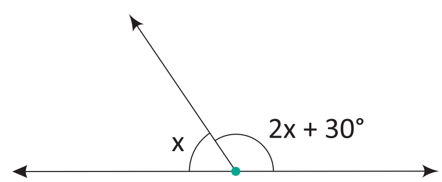
Ⓒ



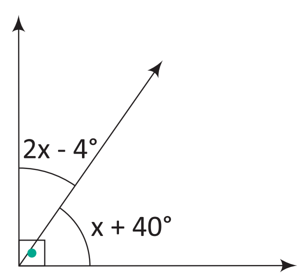
Ⓓ



Ⓔ

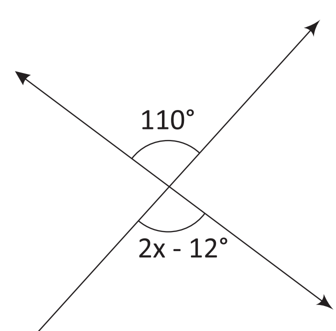


Ⓕ

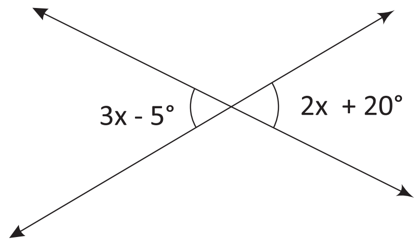


03| Determine o valor de x:

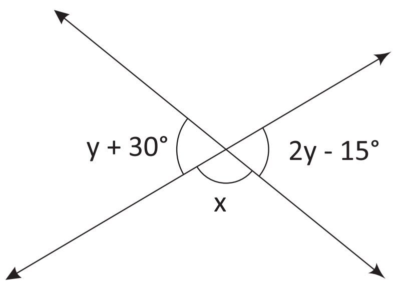
Ⓐ



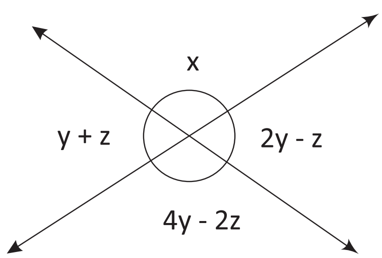
B



C

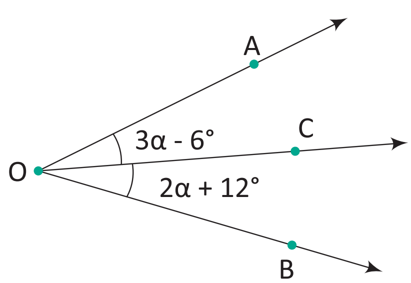


D

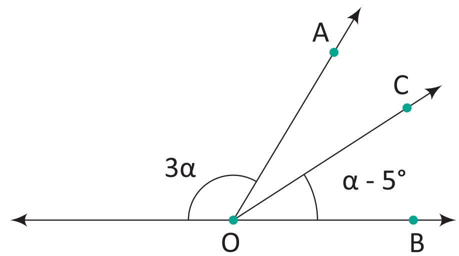


04| Se $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de $A\hat{O}B$, determine α:

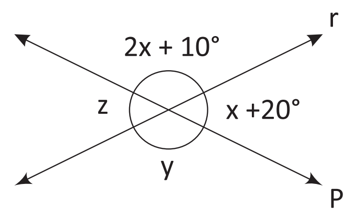
A



B



05| Determine x, y, z na figura a seguir:



06| UNESP Calcular em graus e minutos a medida do ângulo descrito pelo ponteiro dos minutos de um relógio, durante o tempo de 135 segundos.

07| A razão de dois ângulos suplementares é igual a $\frac{2}{3}$. Determine o complemento do menor.

08| IFTCE Dois ângulos são suplementares. Os $\frac{2}{3}$ do maior excedem os $\frac{3}{4}$ do menor em 69°. Determine os ângulos.

09| Responda as questões à seguir:

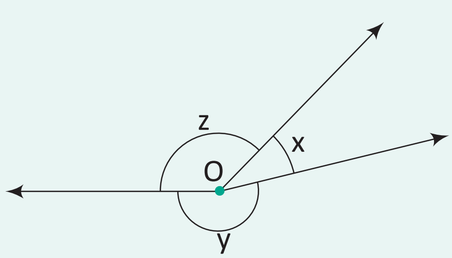
A A metade de um ângulo menos a quinta parte do seu complemento mede 17°. Qual é esse ângulo?

B $\frac{2}{3}$ do complemento de um ângulo mais $\frac{1}{5}$ do suplemento do mesmo ângulo perfazem 70°. Qual é esse ângulo?

10| Sabendo que dois ângulos são complementares e que o dobro da medida do menor ângulo é igual a medida do maior aumentada de 30°, determine-os.

T ENEM E VESTIBULARES

01| UEL Na figura a seguir, as medidas x, y e z são diretamente proporcionais aos números 5, 20 e 25, respectivamente.



O suplemento do ângulo de medida x tem medida igual a:

A 144°

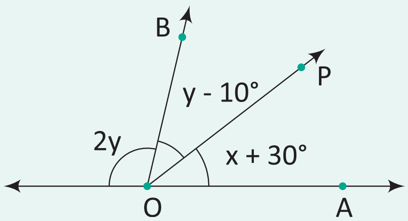
B 128°

C 116°

D 82°

E 54°

02| CFTSC Na figura abaixo, OP é bissetriz do ângulo AÔB. Determine o valor de x e y.



A) x = 13 e y = 49

B) x = 15 e y = 35

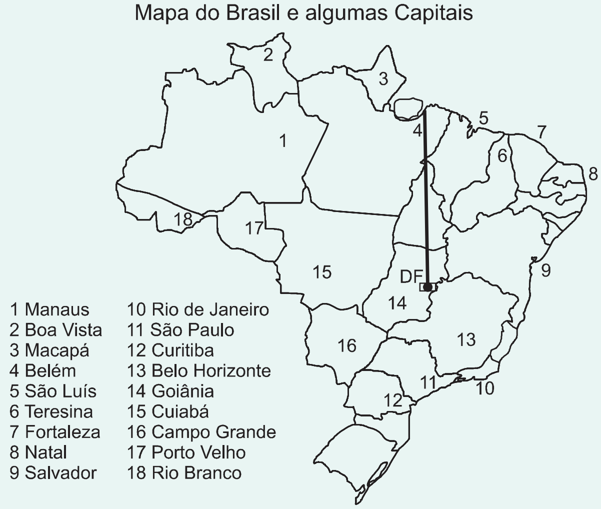
C) x = 12 e y = 48

D) x = 17 e y = 42

E) x = 10 e y = 50

03| ENEM Rotas aéreas são como pontes que ligam cidades, estados ou países. O mapa a seguir mostra os estados brasileiros e a localização de algumas capitais identificadas pelos números. Considere que a direção seguida por um avião AI que partiu de Brasília – DF, sem escalas, para Belém, no Pará, seja um segmento de reta com extremidades em DF e em 4.

Mapa do Brasil e algumas Capitais



SIQUEIRA, S. *Brasil Regiões*. Disponível em: www.santiagosiqueira.pro.br. Acesso em: 28 jul. 2009 (adaptado).

Suponha que um passageiro de nome Carlos pegou um avião AII, que seguiu a direção que forma um ângulo de 135° graus no sentido horário com a rota Brasília – Belém e pousou em alguma das capitais brasileiras. Ao desembarcar, Carlos fez uma conexão e embarcou em um avião AIII, que seguiu a direção que forma um ângulo reto, no sentido anti-horário, com a direção seguida pelo avião AII ao partir de Brasília-DF. Considerando que a direção seguida por um avião é sempre dada pela semirreta com origem na cidade de partida e que passa pela cidade destino do avião, pela descrição dada, o passageiro Carlos fez uma conexão em:

A) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Curitiba.

B) Belo Horizonte, e em seguida embarcou para Salvador.

C) Boa Vista, e em seguida embarcou para Porto Velho.

D) Goiânia, e em seguida embarcou para o Rio de Janeiro.

E) Goiânia, e em seguida embarcou para Manaus.

04| PUC Dois ângulos complementares A e B, sendo A < B, têm medidas na razão de 13 para 17. Consequentemente, a razão da medida do suplemento do ângulo A para o suplemento do ângulo B vale:

A) $\frac{43}{47}$

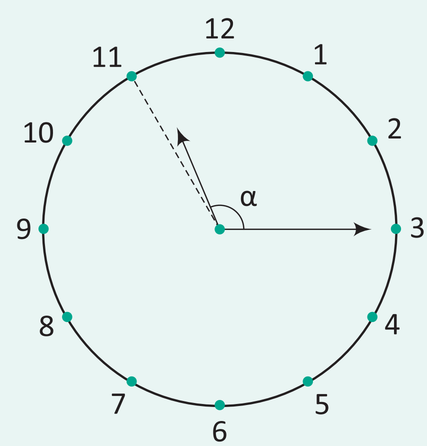
B) $\frac{17}{13}$

C) $\frac{13}{17}$

D) $\frac{119}{48}$

E) $\frac{47}{43}$

05| UFLAVRAS Às 11 horas e 15 minutos, o ângulo α formado pelos ponteiros de um relógio mede:



A) 90°

B) 112° 30'

C) 82° 30'

D) 120°

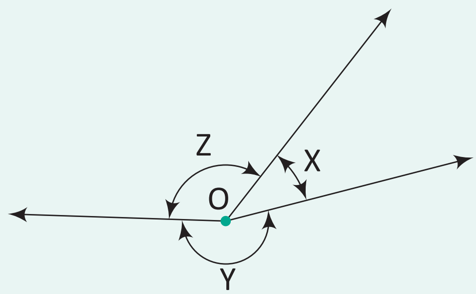
E) 127° 30'

06| UPFRS Considere as medidas dos ângulos X, Y e Z da figura, que são diretamente proporcionais aos números 4, 12 e 9, respectivamente, e as seguintes afirmativas:

I) O complemento do ângulo X é igual ao suplemento do ângulo Y.

II) O complemento do ângulo Z é igual ao ângulo X.

III) O suplemento do ângulo Z é 50°24'.



É correto apenas o que se afirma em:

A) I
B) II
C) III
D) I e II
E) I e III

07| IFRJ Sejam A, B e C respectivamente as medidas do complemento, suplemento e replemento do ângulo de 40°, têm-se:

A) A = 30°; B = 60°; C = 90°
B) A = 30°; B = 45°; C = 60°
C) A = 320°; B= 50°; C = 140°
D) A = 50°; B = 140°; C = 320°
E) A = 140°; B = 50°; C = 320°

08| IFCE O ângulo cujo suplemento excede de 6° o quádruplo do seu complemento, é:

A) 58°
B) 60°
C) 62°
D) 64°
E) 68°

09| UFSE A medida do suplemento de um ângulo é o triplo da medida do ângulo. Nessas condições:

A) O maior desses ângulos mede 140°.
B) O maior desses ângulos mede 135°.
C) O maior desses ângulos mede 120°.
D) O menor desses ângulos mede 50°.
E) O menor desses ângulos mede 40°.

10| UEL Um relógio marca que faltam 20 minutos para o meio-dia. Então, o menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos é:

A) 90°
B) 100°
C) 110°
D) 115°
E) 125°

11| IFCE Sabendo-se que a soma de dois ângulos é 78° e um deles vale $\frac{3}{5}$ do complemento do outro, os valores são:

A) 10° e 68°
B) 15° e 63°
C) 16° e 62°
D) 18° e 60°
E) 20° e 58°

12| UEL A medida α de um ângulo é igual ao triplo da medida do seu suplemento. Nestas condições, tgα é igual a:

A) 1
B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C) 0
D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
E) -1

13| ENEM Em 20 de fevereiro de 2011 ocorreu a grande erupção do vulcão Bulusan nas Filipinas. A sua localização geográfica no globo terrestre é dada pelo GPS (sigla em inglês para Sistema de Posicionamento Global) com longitude de 124° 3′ 0″ a leste do Meridiano de Greenwich.

Dado: 1° equivale a 60′ e 1′ equivale a 60″.

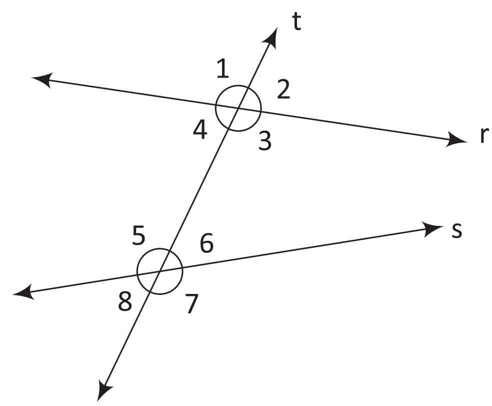
PAVARIN, G. Galileu, fev. 2012 (adaptado)

A representação angular da localização do vulcão com relação a sua longitude da forma decimal é

A) 124,02°.
B) 124,05°.
C) 124,20°.
D) 124,30°.
E) 124,50°.

ÂNGULOS DE DUAS RETAS E UMA TRANSVERSAL

Duas retas distintas r e s coplanares, paralelas ou não, e uma reta t concorrente com r e s (dizemos que t é uma reta transversal de r e s), determinam os oito ângulos destacados na figura abaixo:



Assim denominados:

CORRESPONDENTES:

1 e 5; 2 e 6; 3 e 7; 4 e 8

ALTERNOS:

INTERNOS: 3 e 5; 4 e 6 EXTERNOS: 1 e 7; 2 e 8

COLATERAIS:

INTERNOS: 3 e 6; 4 e 5 EXTERNOS: 1 e 8; 2 e 7

ÂNGULOS DE DUAS RETAS PARALELAS E UMA TRANSVERSAL

Se r e s são paralelas, então:

PROPRIEDADE 1

Os ângulos correspondentes são congruentes.

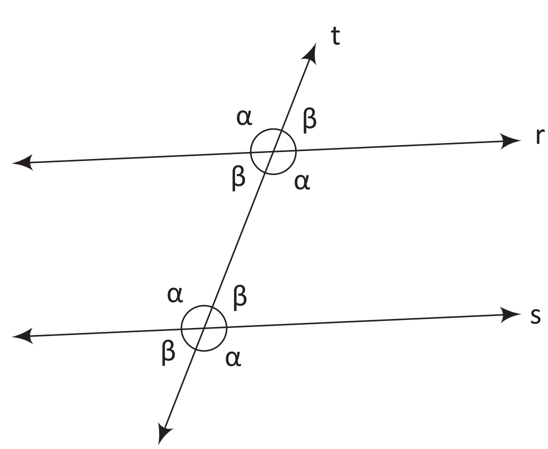
PROPRIEDADE 2

Os ângulos alternos são congruentes.

PROPRIEDADE 3

Os ângulos colaterais são suplementares.

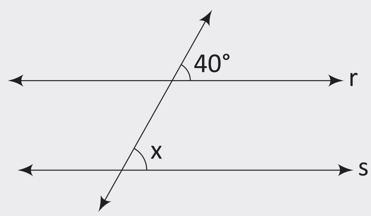
Veja:



R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Nas figuras seguintes as retas r e s são paralelas, determine o valor de x:

A

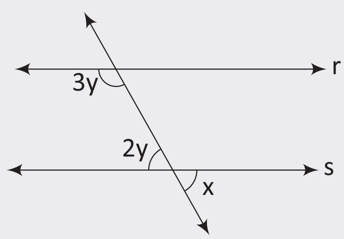


Resolução:

40° e x são ângulos correspondentes, logo:

$x = 40°$

B



Resolução:

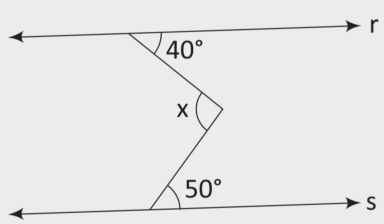
2y e 3y são ângulos colaterais internos, logo:

$2y + 3y = 180° \Rightarrow y = 36°$

x e 2y são opostos pelo vértice, logo:

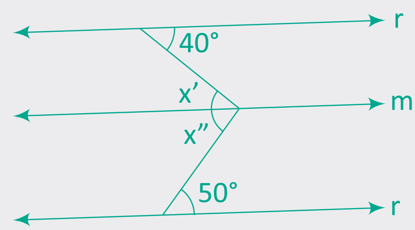
$x = 2y \Rightarrow x = 72°$

C



Resolução:

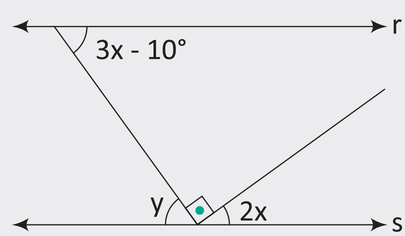
Traçando uma reta m paralela as retas r e s que passa pelo vértice do ângulo x, temos:



$x = x' + x'' \Rightarrow x = 40° + 50° = 90°$

(alternos internos)

02| As retas r e s da figura são paralelas. Determine $2x + y$.



Resolução:

y e 3x − 10° são arternos internos, logo:

$y = 3x - 10°$ *e* $y + 90° + 2x = 180°$*, portanto:*

$3x - 10° + 90° + 2x = 180°$

$\Rightarrow 5x = 100° \Rightarrow x = 20°$

Consequentemente:

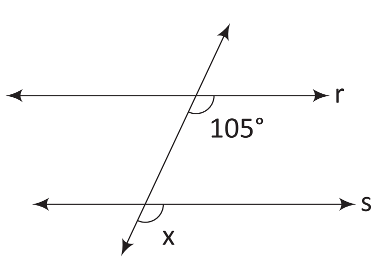
$y = 3 \,.\, 20° - 10° = 50°$

e $2x + y = 2 \,.\, 20° + 50° = 90°$

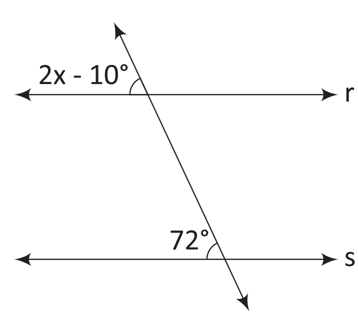
F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Se r e s são retas paralelas e os ângulos destacados são correspondentes, determine x.

A

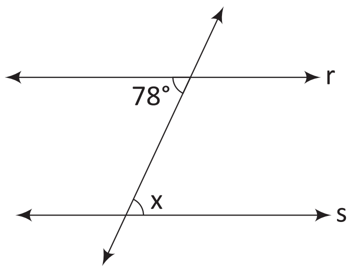


B

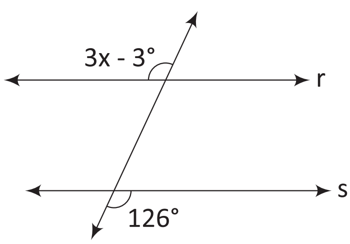


02| Se r e s são retas paralelas e os ângulos destacados são alternos, determine x.

A

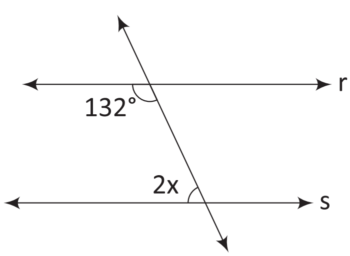


B

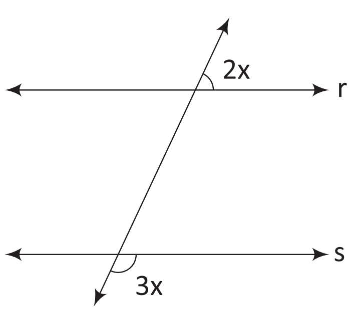


03| Se r e s são retas paralelas e os ângulos destacados são colaterais, determine x.

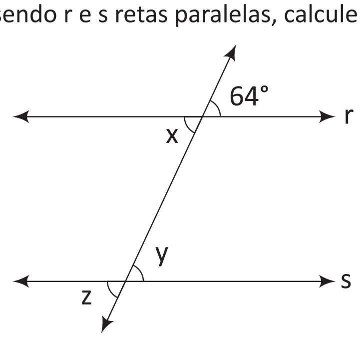
A



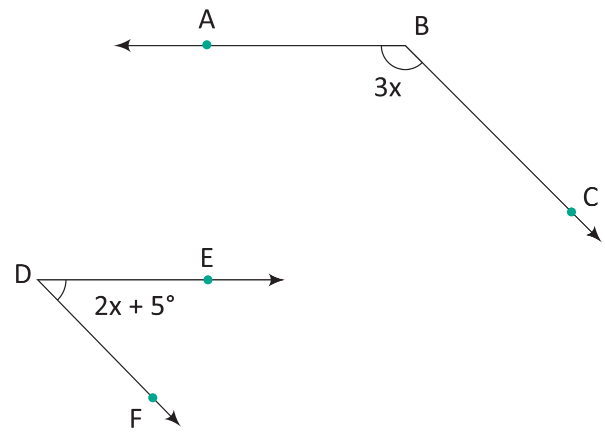
B



04| Na figura, sendo r e s retas paralelas, calcule $x + 2y - z$.

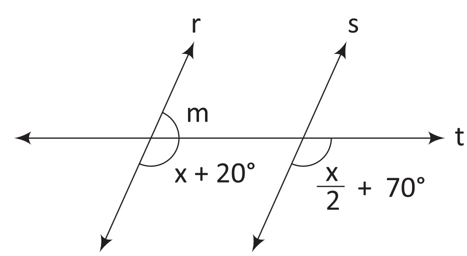


05| Calcule o valor de x, sendo AB//DE e BC//DF.



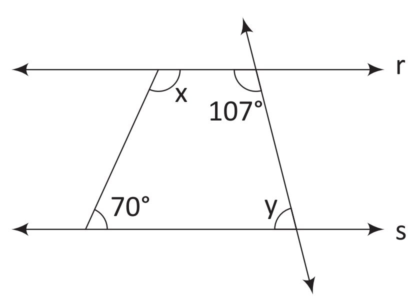
06| A soma dos quatro ângulos obtusos formados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal é igual a 420°. Determine a medida de um ângulo agudo.

07| Sendo r//s, calcule o ângulo m.

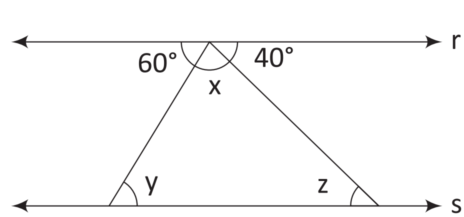


08| As retas r e s destacadas abaixo são paralelas, determine:

A $x + y$

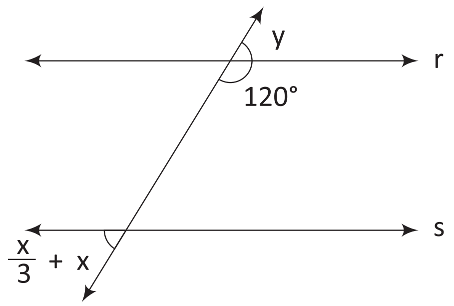


B $x + y + z$

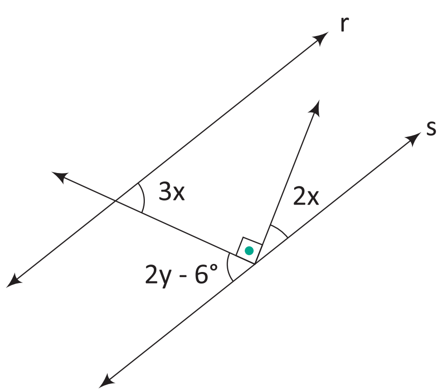


09| Nas figuras, sendo r e s retas paralelas, calcule:

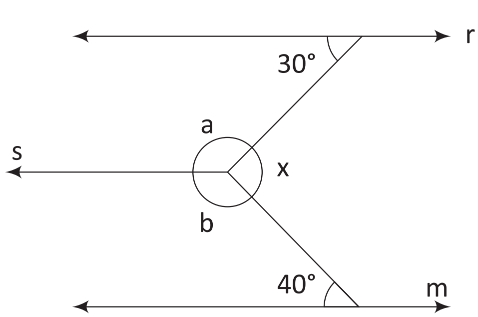
A x + y



B x e y

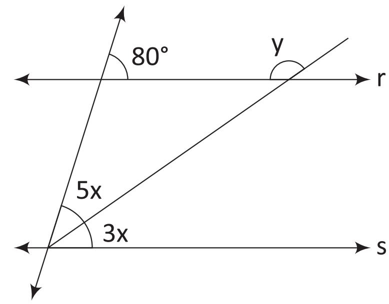


10| Na figura a seguir determine x sabendo que r//s e s//m.

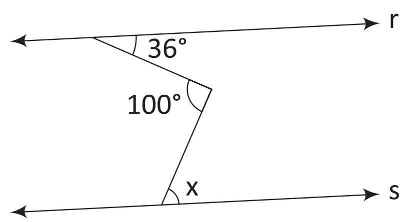


11| As retas r e s destacadas abaixo são paralelas, determine:

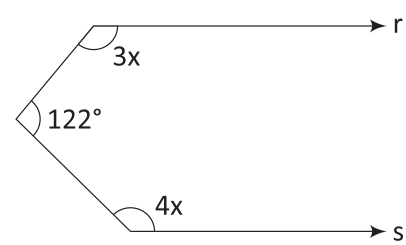
A x e y



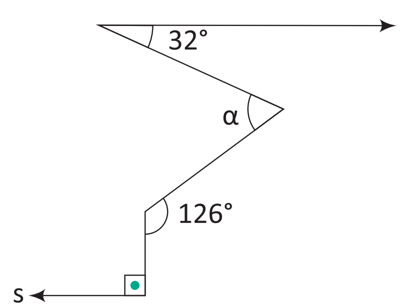
B x



C x

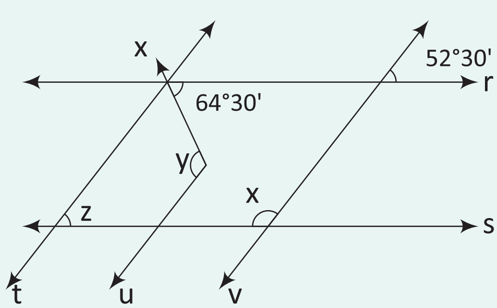


D α



T ENEM E VESTIBULARES

01| UFPR Na figura a seguir, temos r//s e t//u//v.



Com base nos estudos dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, pode-se afirmar que:

I) O ângulo X mede 127° 30'.

II) O ângulo Y mede 117°.

III) O ângulo Z mede 64° 30'.

Analise as proposições acima e assinale a alternativa correta.

A) Somente as afirmações I e II estão corretas.

B) Somente as afirmações I e III estão corretas.

C) Somente a afirmação I está correta.

D) As afirmações I, II e III estão corretas.

E) As afirmações I, II e III estão incorretas.

02| CESGRANRIO Duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, de modo que a soma de dois dos ângulos agudos formados vale 72°. Então, qualquer dos ângulos obtusos formados mede:

A) 142°

B) 144°

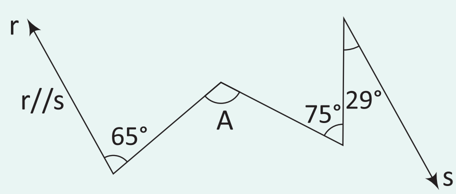
C) 148°

D) 150°

E) 152°

03| IFPR Numa gincana, a equipe "Já Ganhou" recebeu o seguinte desafio:

Na cidade de Curitiba, fotografar a construção localizada na rua Marechal Hermes no número igual à nove vezes o valor do ângulo Â da figura a seguir:



Se a Equipe resolver corretamente o problema, irá fotografar a construção localizada no número:

A) 990

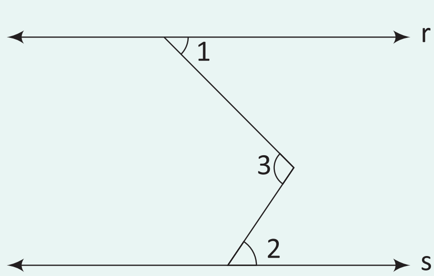
B) 261

C) 999

D) 1026

E) 1260

04| FUVEST Na figura adiante, as retas r e s são paralelas, o ângulo 1 mede 45° e o ângulo 2 mede 55°. A medida, em graus, do ângulo 3 é:



A) 50

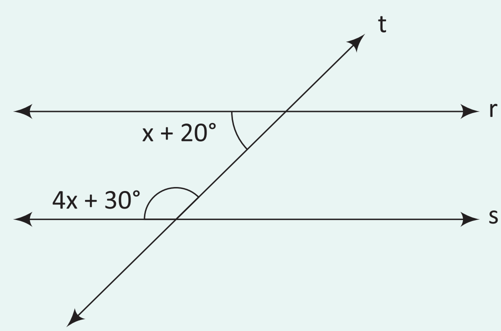
B) 55

C) 60

D) 80

E) 100

05| UNAERP As retas r e s são interceptadas pela transversal "t", conforme a figura. O valor de x para que r e s sejam, paralelas é:



A) 20°

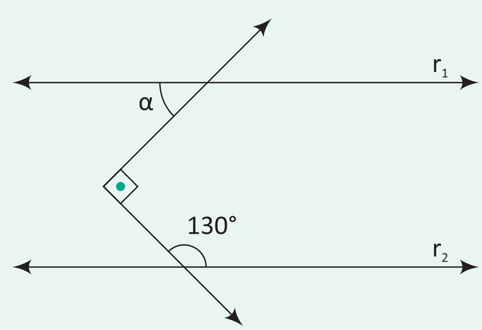
B) 26°

C) 28°

D) 30°

E) 35°

06| UNIRIO As retas r_1 e r_2 são paralelas. O valor do ângulo α, apresentado na figura a seguir, é:



A) 40°

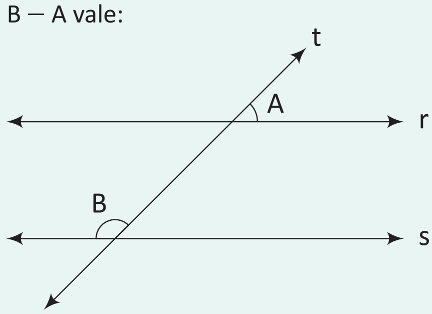
B) 45°

C) 50°

D) 65°

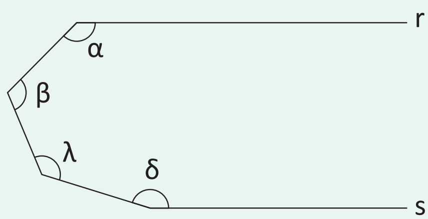
E) 130°

07| CESGRANRIO As retas r e s da figura são paralelas cortadas pela transversal t. Se o ângulo B é o triplo de A, então B − A vale:



- **A** 90°
- **B** 85°
- **C** 80°
- **D** 75°
- **E** 60°

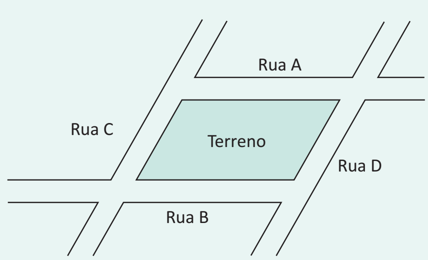
08| UFES Na figura abaixo, as retas r e s são paralelas.



A soma de $\alpha + \beta + \lambda + \delta$ das medidas dos ângulos indicados na figura é:

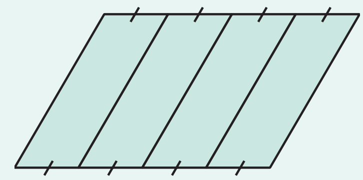
- **A** 180°
- **B** 270°
- **C** 360°
- **D** 480°
- **E** 540°

09| ENEM Um terreno com o formato mostrado na figura foi herdado por quatro irmãos e deverá ser dividido em quatro lotes de mesma área. Um dos irmãos fez algumas propostas de divisão para que fossem analisadas pelos demais herdeiros. Dos esquemas a seguir, onde lados de mesma medida têm símbolos iguais, o único em que os quatro lotes não possuem, necessariamente, a mesma área é:

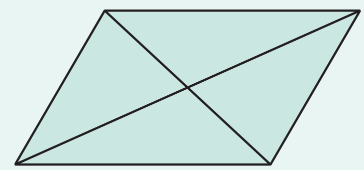


As ruas **A** e **B** são paralelas.
As ruas **C** e **D** são paralelas.

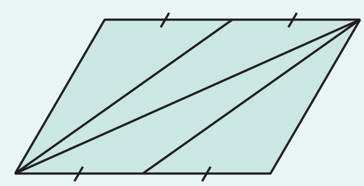
A



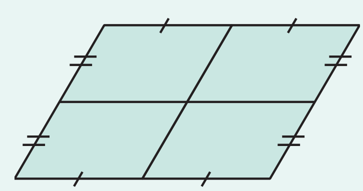
B



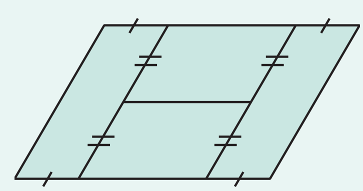
C



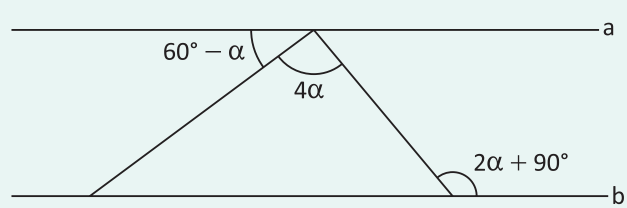
D



E



10| MACK Na figura abaixo, a e b são retas paralelas.



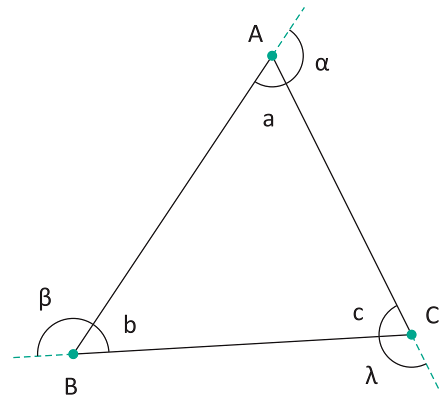
A afirmação correta a respeito do número que expressa, em graus, a medida do ângulo α é

- **A** um número primo maior que 23.
- **B** um número ímpar.
- **C** um múltiplo de 4.
- **D** um divisor de 60.
- **E** um múltiplo comum entre 5 e 7.

TRIÂNGULO

DEFINIÇÃO

Dados três pontos A, B e C não colineares, à reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ denominamos triângulo.



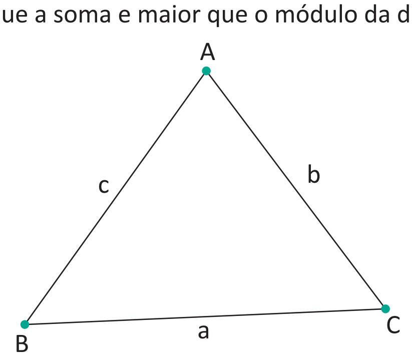
ELEMENTOS

- Os pontos A, B e C são os vértices do triângulo ABC.
- Os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ são os lados do triângulo ABC.
- Os ângulos a, b e c são os ângulos internos do triângulo ABC.
- Os ângulos α, β e λ são os ângulos externos do triângulo ABC.

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO

DESIGUALDADE TRIANGULAR

Em todo triângulo, cada lado é menor que a soma e maior que o módulo da diferença dos outros dois lados.

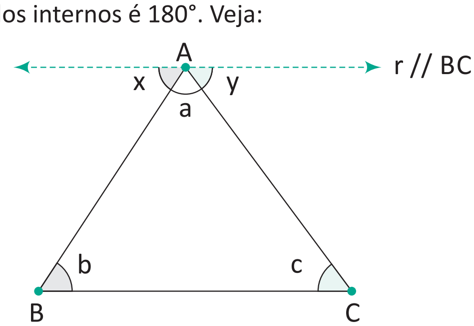


$$|b - c| < a < b + c$$

OBSERVAÇÃO: Em todo triângulo, o maior lado opõe-se ao maior ângulo interno e o menor lado ao menor ângulo interno e vice-versa.

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO

Em todo triângulo, a soma dos ângulos internos é 180°. Veja:



Sendo r paralela a $\overline{BC}$, verifica-se:

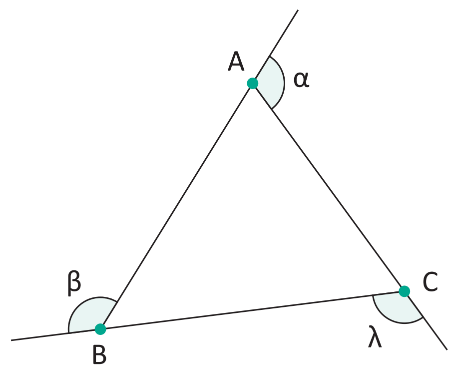
$$x + a + y = 180°$$

Como: $b \equiv x$ e $c \equiv y$ (alternos internos), temos

$$b + a + c = 180° \text{ ou } a + b + c = 180°$$

SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS DE UM TRIÂNGULO

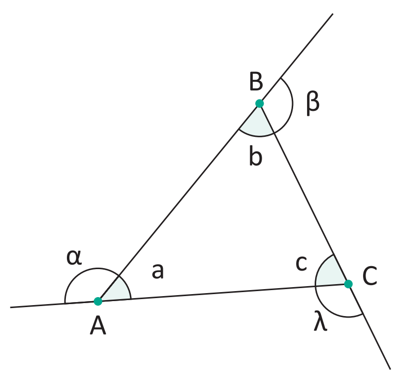
Em todo triângulo, a soma dos ângulos externos é 360°.



$$\alpha + \beta + \lambda = 360°$$

ÂNGULO EXTERNO DE UM TRIÂNGULO

Em todo triângulo, um ângulo externo é igual a soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.



$\alpha = b + c$

ou

$\beta = a + c$

ou

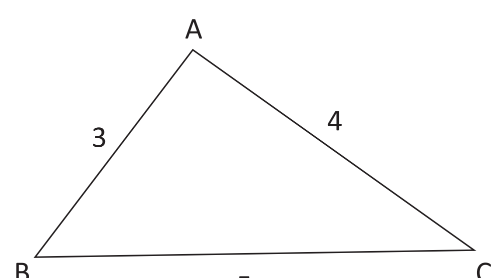
$\gamma = a + b$

CLASSIFICAÇÃO DE UM TRIÂNGULO QUANTO AOS LADOS

Quanto aos lados, um triângulo pode ser:

ESCALENO

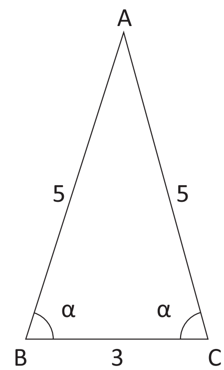
Se, e somente se, dois quaisquer lados são não congruentes. Exemplo:



ISÓSCELES

Se, e somente se, têm dois quaisquer lados congruentes.

Exemplo:



OBSERVAÇÃO:

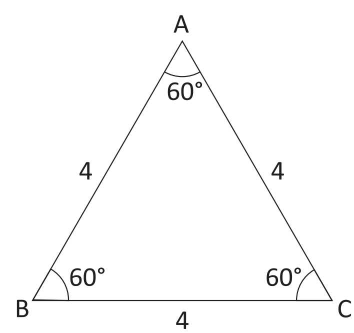
Nos triângulos isósceles, o lado de medida diferente é chamado de base e seu ângulo oposto de vértice.

PROPRIEDADE:

Nos triângulos isósceles, os ângulos internos adjacentes à base são congruentes.

EQUILÁTERO

Se, e somente se, têm os três lados congruentes.



OBSERVAÇÃO:

Todo triângulo equilátero é isósceles.

PROPRIEDADE:

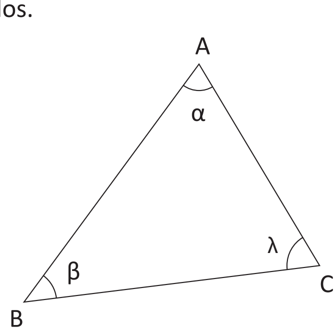
Todo triângulo equilátero é equiângulo, ou seja, seus ângulos internos são congruentes (60°).

CLASSIFICAÇÃO DE UM TRIÂNGULO QUANTO AOS ÂNGULOS

Quanto aos ângulos, um triângulo pode ser:

ACUTÂNGULO

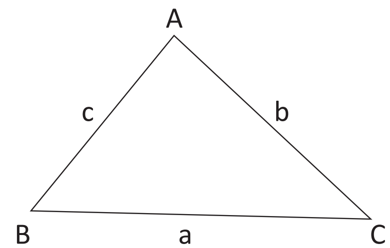
Se, e somente se, têm os três ângulos agudos.



$\alpha < 90°$, $\beta < 90°$ e $\lambda < 90° \Rightarrow \Delta ABC$ acutângulo

PROPRIEDADE:

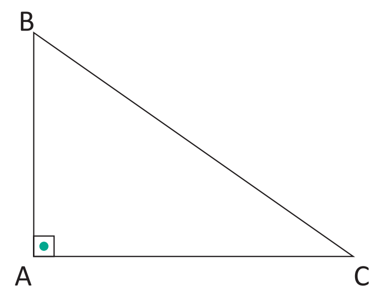
Em todo triângulo acutângulo o quadrado do maior lado é menor que a soma dos quadrados dos outros dois lados.



Sendo a o maior lado do triângulo ABC (acutângulo), temos: $a^2 < b^2 + c^2$

RETÂNGULO

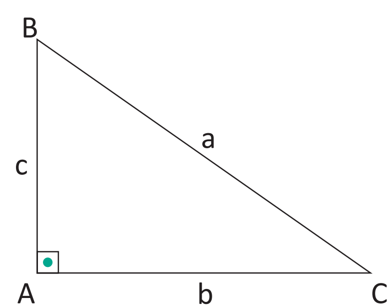
Se, e somente se, têm um ângulo reto.



$B\hat{A}C = 90° \Rightarrow \Delta ABC$ retângulo

PROPRIEDADE:

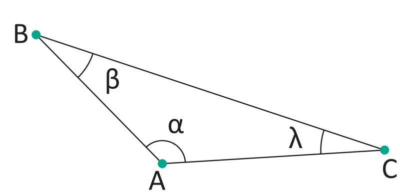
Em todo triângulo retângulo o quadrado do maior lado é igual a soma dos quadrados dos outros dois lados (Teorema de PITÁGORAS).



Sendo a o maior lado do triângulo retângulo ABC, temos: $a^2 = b^2 + c^2$

OBTUSÂNGULO

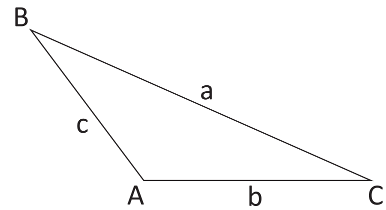
Se, e somente se, têm um ângulo obtuso.



$B\hat{A}C > 90° \Rightarrow \Delta ABC$ obtusângulo

PROPRIEDADE:

Em todo triângulo obtusângulo o quadrado do maior lado é maior que a soma dos quadrados dos outros dois lados.



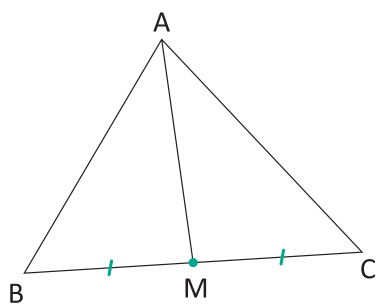
Sendo a o maior lado do triângulo obtusângulo ABC, temos: $a^2 > b^2 + c^2$

PONTOS NOTÁVEIS DE UM TRIÂNGULO

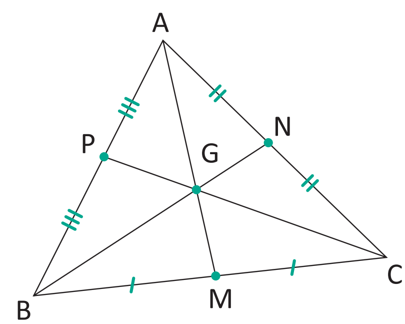
BARICENTRO (G) – MEDIANAS

A mediana de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto a este vértice.

As três medianas de um triângulo são concorrentes em um único ponto, denominado baricentro do triângulo.



$\overline{AM}$ é mediana do Δ ABC



G é o baricentro do Δ ABC

OBSERVAÇÃO:

Um ponto M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ se, e somente se, a medida do segmento de reta $\overline{AM}$ é igual a medida do segmento de reta $\overline{MB}$.

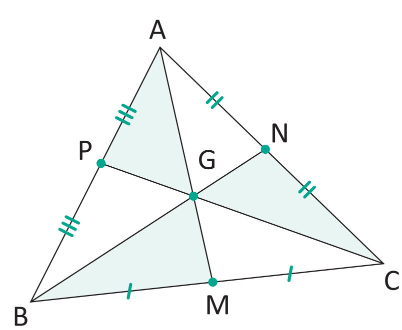
PROPRIEDADES:

PROPRIEDADE 1 | O baricentro de um triângulo divide suas medianas na razão de 2:1, ou seja, a distância do baricentro ao vértice é o dobro da distância do baricentro ao ponto médio.

PROPRIEDADE 2 | As medianas de um triângulo o divide em seis triângulos menores de mesma área.

PROPRIEDADE 3 | O baricentro é um ponto interno do triângulo.

Veja:



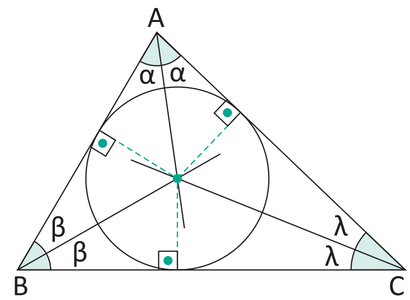
Sendo M, N e P os pontos médios do triângulo ABC, G é seu baricentro, logo:

$$\frac{AG}{GM} = \frac{BG}{GN} = \frac{CG}{GP} = \frac{2}{1}$$

$$\textbf{Área(GMB)} = \textbf{Área(GBP)} = \textbf{Área(GPA)} = \textbf{Área(GAN)} = \textbf{Área(GNC)} = \textbf{Área(GCM)} = \frac{\textbf{Área (ABC)}}{\textbf{6}}$$

INCENTRO (I) – BISSETRIZES INTERNAS

As três bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um único ponto, denominado incentro do triângulo.



PROPRIEDADES:

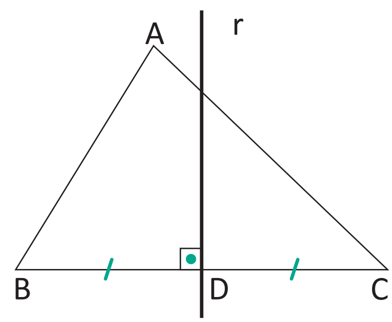
PROPRIEDADE 1 | O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo, ou seja, que tangencia os três lados do triângulo.

PROPRIEDADE 2 | O incentro é um ponto interno do triângulo.

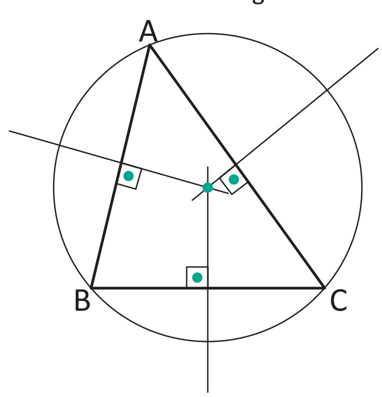
CIRCUNCENTRO (O) – MEDIATRIZES

A mediatriz de um triângulo é a reta perpendicular a um de seus lados, traçada pelo seu ponto médio.

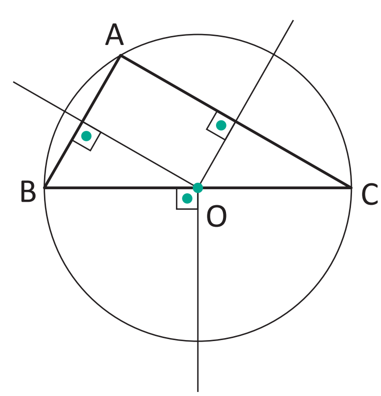
Na figura r é mediatriz do triângulo ABC, relativa ao lado $\overline{BC}$.



As três mediatrizes de um triângulo se encontram em um único ponto, denominado circuncentro do triângulo.



ΔABC é acutângulo



ΔABC é retângulo

PROPRIEDADES:

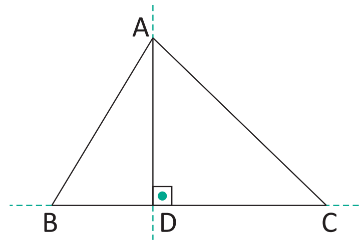
PROPRIEDADE 1 | O circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, ou seja, que passa pelos três vértices do triângulo.

PROPRIEDADE 2 | O circuncentro de um triângulo pode ser um ponto: interno ao triângulo

(Δ Acutângulo), pertencente ao triângulo (Δ Retângulo) ou externo ao triângulo (Δ Obtusângulo).

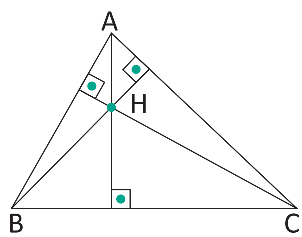
ORTOCENTRO (H) – ALTURAS

A altura de um triângulo é um segmento de reta perpendicular a um lado do triângulo ou ao seu prolongamento, traçado pelo vértice oposto. Esse lado é chamado de base da altura, e o ponto onde a altura encontra a base é chamado de pé da altura.

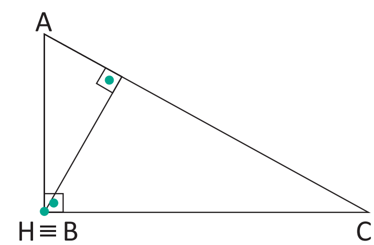


$\overline{AD}$ é a altura do ΔABC (relativa ao lado $\overline{BC}$)

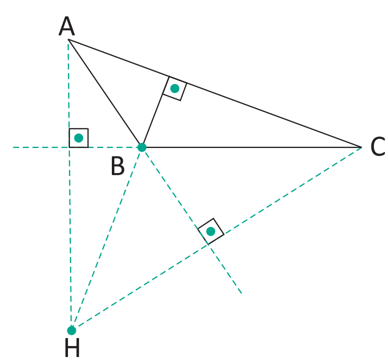
As retas suportes das três alturas de um triângulo se encontram em um único ponto, denominado ortocentro (H).



ΔABC é acutângulo



ΔABC é retângulo

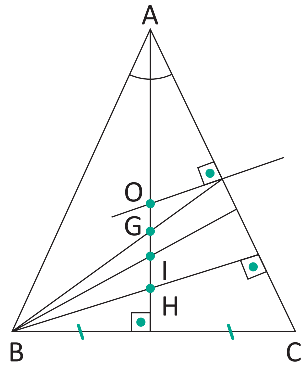


ΔABC é obtusângulo

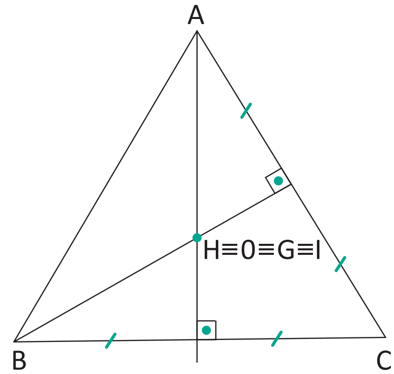
PROPRIEDADE: No triângulo acutângulo, o ortocentro é interno ao triângulo; no triângulo retângulo, é o vértice do ângulo reto; e no triângulo obtusângulo, é externo ao triângulo.

PONTOS NOTÁVEIS NOS TRIÂNGULOS ISÓSCELES E EQUILÁTERO

- Em um triângulo isóceles, o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro são colineares.



- Em um triângulo equilátero, os quatros pontos notáveis são coincidentes.



R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| É possível construir triângulos com os segmentos indicados abaixo? Por quê?

A 5 cm, 6 cm e 10 cm

B 5 cm, 7 cm e 12 cm

C 5 cm, 8 cm e 15 cm

Resolução:

A *Sim, pois:* $10 < 5 + 6$

B *Não, pois:* $12 = 5 + 7$

C *Não, pois:* $15 > 5 + 8$

02| Classifique o triângulo cujos lados medem 6 cm, 7 cm e 9 cm, quanto aos lados e aos ângulos.

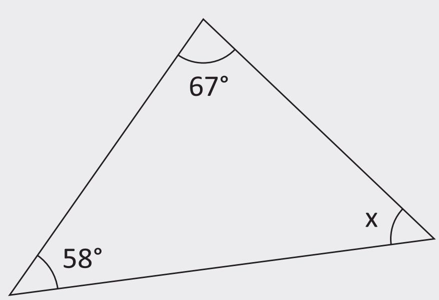
Resolução:

Quanto aos lados o triângulo é Escaleno.

Quanto aos ângulos o triângulo é Acutângulo, pois: $9^2 < 6^2 + 7^2\,(81 < 85)$.

03| Determine o valor de x.

A

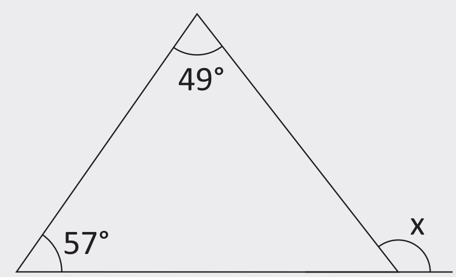


Resolução:

$x + 58° + 67° = 180°$

$\Rightarrow x = 55°$

B

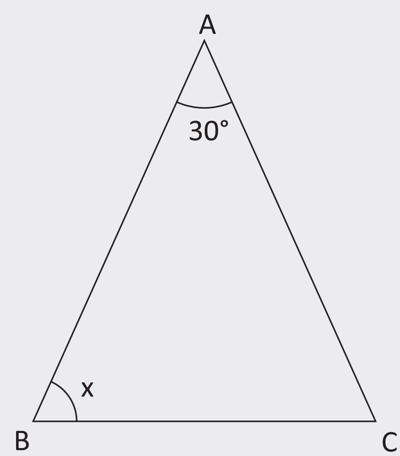


Resolução:

$X = 49° + 57°$

$\Rightarrow x = 106°$

C $\overline{AB} \equiv \overline{AC}$



Resolução:

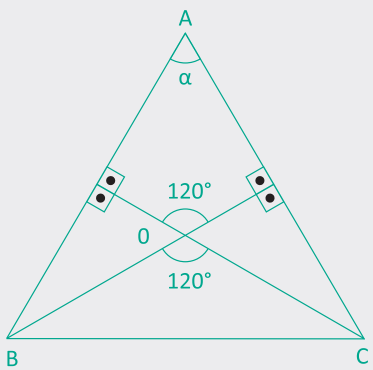
Como o ΔABC *é isósceles, os ângulos adjacentes à sua base são congruentes, logo:* $A\hat{C}B = x$, *portanto:*

$x + x + 30° = 180°$

$\Rightarrow x = 75°$

04| Sendo O o ortocentro de um triângulo ABC e BÔC = 120°: Determine BÂC.

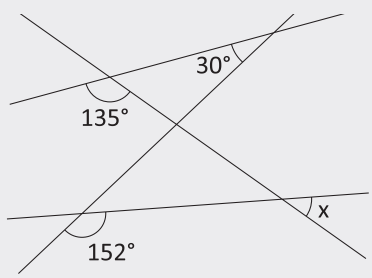
Resolução:



$\alpha + 90^\circ + 90^\circ + 120^\circ = 360^\circ$

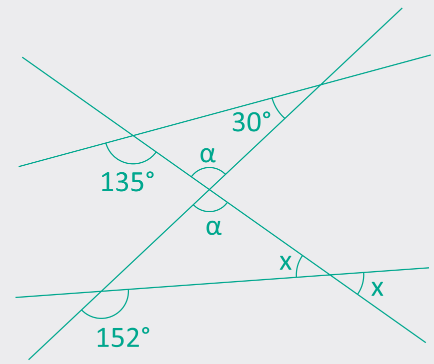
$\Rightarrow \alpha = 60^\circ$

05| Na figura seguinte, determine x.



Resolução:

Acrecentando o ângulo α na figura e seu O.P.V., temos:



$135^\circ = \alpha + 30^\circ (I)$

$152^\circ = \alpha + x\ (II)$

Fazendo $(II) - (I)$

$152^\circ - 135^\circ = \alpha + x - \alpha - 30^\circ \Rightarrow x = 47^\circ$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Com segmentos de 10 cm, 7 cm e 21 cm pode-se construir um triângulo? Por quê?

02| Dois lados, AB e BC, de um triângulo ABC medem respectivamente 7 cm e 16 cm. Quanto poderá medir o terceiro lado, sabendo que é múltiplo de 5?

03| Se dois lados de um triângulo isósceles medem 15 cm e 32 cm, qual poderá ser a medida do terceiro lado?

04| UNICAMP

A Quantos são os triângulos não congruentes cujas medidas dos lados são NÚMEROS INTEIROS e cujos perímetros medem 11 metros?

B Quantos dos triângulos considerados no item anterior são equiláteros? E quantos são isósceles?

05| Classifique quanto aos lados e ângulos, os triângulos cujas medidas dos lados estão indicadas abaixo:

A 8 cm, 8 cm e 8 cm.

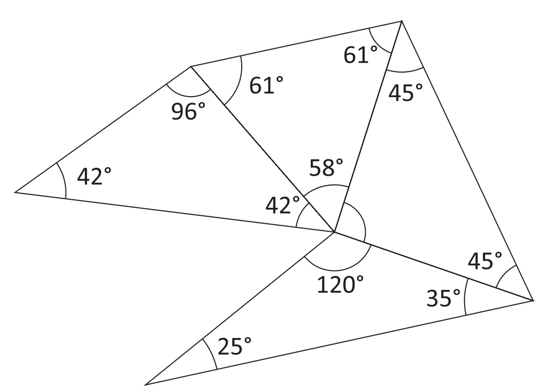
B 10 cm, 10 cm e 7 cm.

C 5 cm, 12 cm e 13 cm.

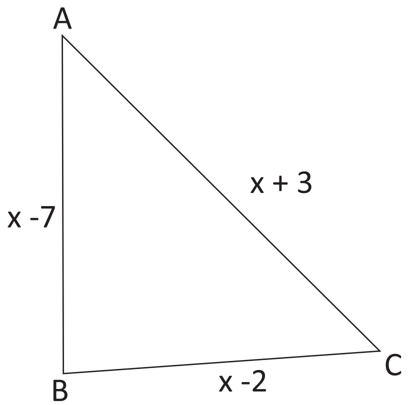
D 17 cm, 10 cm e 8 cm.

06| Os três ângulos de um triângulo têm para expressões, respectivamente, $5x - 40°$, $2x + 20°$, $3x$. Verifique se este triângulo é equilátero.

07| UFPE Na figura a seguir determine o ângulo que é oposto ao lado de menor comprimento.

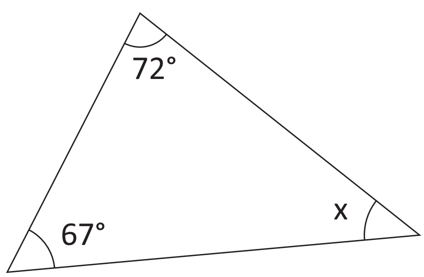


08| Determine os lados do triângulo da figura sabendo que ele tem 60 cm de perímetro.

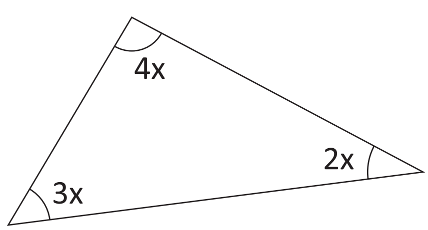


09| Determine o valor de x:

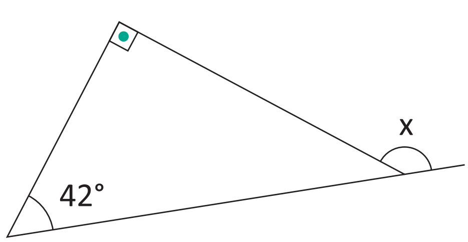
A



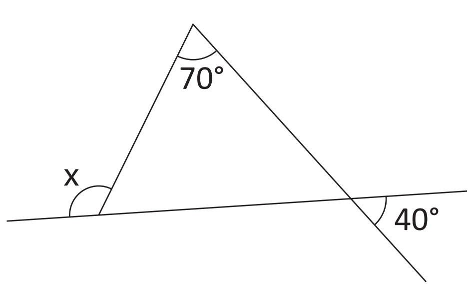
B



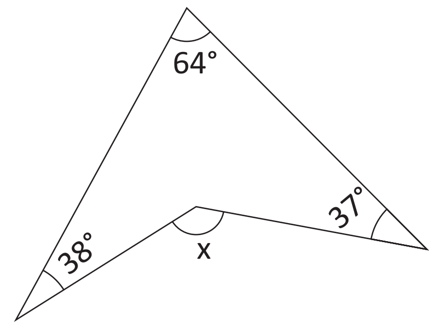
C



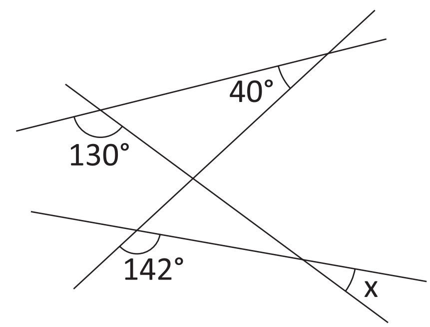
D



E

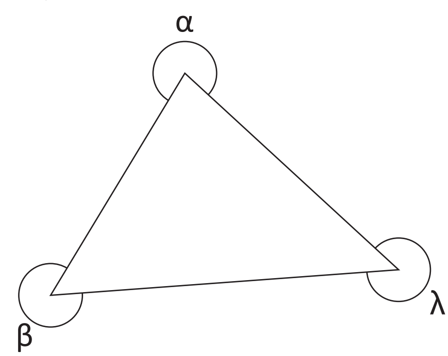


F

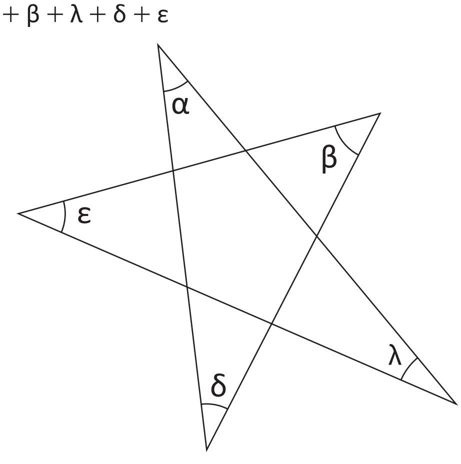


10| Determine as somas indicadas:

A $\alpha + \beta + \lambda$

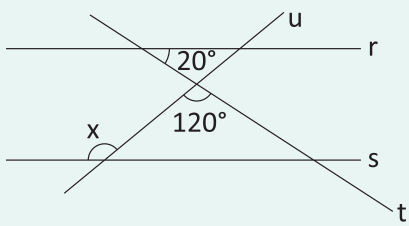


B $\alpha + \beta + \lambda + \delta + \varepsilon$



T ENEM E VESTIBULARES

01| IFPE Júlia começou a estudar Geometria na sua escola. Com dúvida em um exercício passado pelo professor de matemática, ela pediu ajuda ao seu tio. O enunciado era: "As retas r e s são paralelas; as retas u e t, duas transversais. Encontre o valor do ângulo x na figura abaixo". Portanto, o valor de x é:



A) 120°
B) 125°
C) 130°
D) 135°
E) 140°

02| UFRGS Assinale a alternativa que apresenta corretamente os valores, na mesma unidade de medida, que podem representar as medidas dos lados de um triângulo.

A) 1 – 2 – 4
B) 3 – 2 – 6
C) 8 – 4 – 3
D) 3 – 9 – 4
E) 6 – 4 – 5

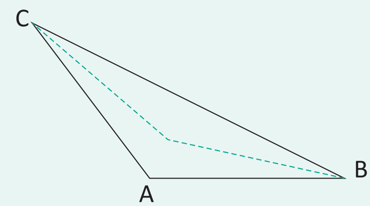
03| UECE Se as medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo são, respectivamente, $3x$, $x + 15$ e $75 - x$, então este triângulo é:

A) Escaleno.
B) Retângulo e não isósceles.
C) Retângulo e isósceles.
D) Isósceles e não retângulo.

04| UECE Sabe-se que, em um triângulo, a medida de cada lado é menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados. Uma afirmativa equivalente a essa é:

A) A menor distância entre dois pontos é igual ao comprimento do segmento de reta que os une.
B) Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é o maior dos lados.
C) Ao lado menor de um triângulo, opõe-se o menor ângulo.
D) Em um triângulo isósceles, a altura relativa à base divide-a em dois segmentos de mesmo comprimento.

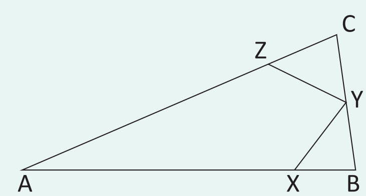
05| FGV Num triângulo isósceles ABC, de vértice A, a medida do ângulo obtuso formado pelas bissetrizes dos ângulos B e C é 140°.



Então, as medidas dos ângulos A, B e C são, respectivamente:

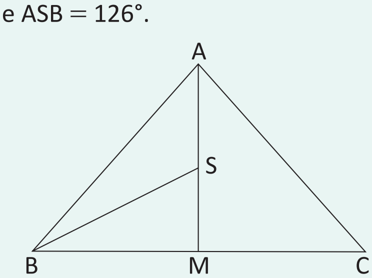
A) 120°, 30° e 30°
B) 80°, 50° e 50°
C) 100°, 40° e 40°
D) 90°, 45° e 45°
E) 140°, 20° e 20°

06| FUVEST Na figura adiante, $AB = AC$, $BX = BY$ e $CZ = CY$. Se o ângulo A mede 40°, então o ângulo XYZ mede:



A) 40°
B) 50°
C) 60°
D) 70°
E) 90°

07| IFMG Na figura, $A = 90°$, $BM = CM$, BS é bissetriz do ângulo B e $ASB = 126°$.



Nessas condições, o ângulo C mede:

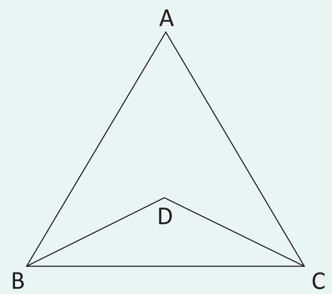
A) 30°
B) 36°
C) 44°
D) 54°

08| UFF O triângulo MNP é tal que ângulo M = 80° e ângulo P = 60°.

A medida do ângulo formado pela bissetriz do ângulo interno N com a bissetriz do ângulo externo P é:

A) 20°
B) 30°
C) 40°
D) 50°
E) 60°

09| IFMG Na figura a seguir, AB = AC, D é o ponto de encontro das bissetrizes do triângulo ABC e o ângulo BDC é o triplo do ângulo A.



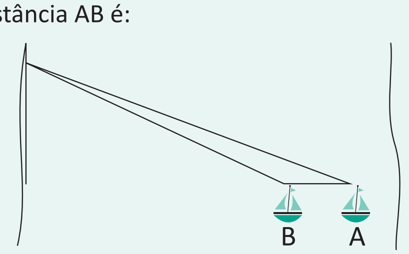
Então, a medida do ângulo B é:

A) 54°
B) 60°
C) 72°
D) 84°

10| ITA Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo BÂC é igual a:

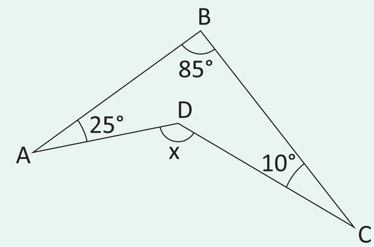
A) 23°
B) 32°
C) 36°
D) 40°
E) 45°

11| UFPE Um barco está sendo rebocado para a margem de um porto por um cabo de aço. Inicialmente, o barco está no ponto A da ilustração, quando o cabo tem comprimento de 100m. Após puxar o cabo de 20m, o barco ocupa a posição B. Nessas condições, podemos afirmar que a distância AB é:



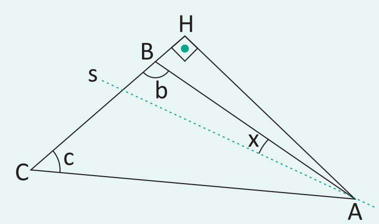
A) Maior que 20m.
B) Igual a 20m.
C) Igual a 19m.
D) Igual a 18m.
E) Menor que 18m.

12| IFCE Na figura, tg(x) é:



A) 0
B) 1
C) $\sqrt{3}$
D) $-\sqrt{3}$
E) $\dfrac{(\sqrt{3})}{3}$

13| FGV Na figura a seguir, o triângulo AHC é retângulo em H e s é a reta suporte da bissetriz do ângulo CÂH.



Se c = 30° e b = 110°, então:

A) x = 15°
B) x = 30°
C) x = 20°
D) x = 10°
E) x = 5°

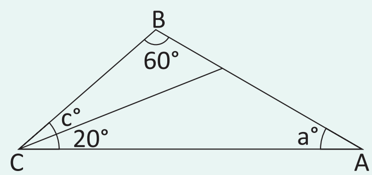
14| IFCE A altura e a mediana traçadas do vértice do ângulo reto de um triângulo retângulo formam um ângulo de 24°. Sendo assim, os ângulos agudos do triângulo são:

A) 33° e 57°
B) 34° e 56°
C) 35° e 55°
D) 36° e 54°
E) 37° e 53°

15| UFES Um dos ângulos internos de um triângulo isósceles mede 100°. Qual é a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos outros ângulos internos?

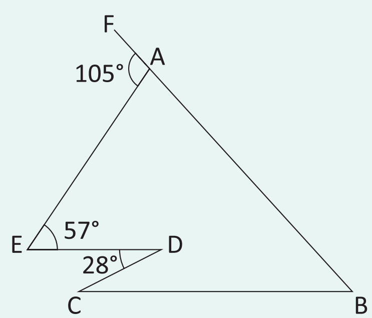
- **A** 20°
- **B** 40°
- **C** 60°
- **D** 80°
- **E** 140°

16| IFMG Na figura a seguir, o valor de a em função de c, em graus, é:



- **A** 100 – c
- **B** c – 20
- **C** $\frac{c}{2}$
- **D** c – 40

17| UFMG Observe esta figura:

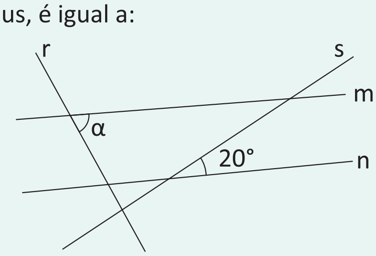


Nesta figura, os pontos F, A e B estão em uma reta e as retas CB e ED são paralelas.

Assim sendo, o ângulo $A\hat{B}C$ mede:

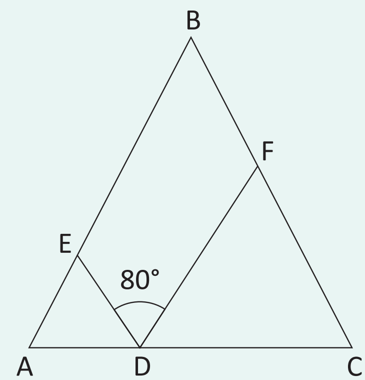
- **A** 39°
- **B** 44°
- **C** 47°
- **D** 48°

18| UFJF Na figura a seguir, as retas r e s são perpendiculares e as retas m e n são paralelas. Então, a medida do ângulo α, em graus, é igual a:



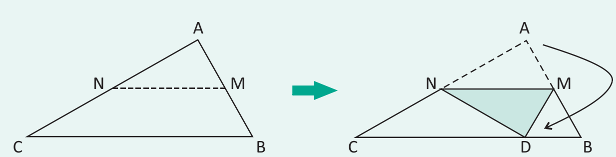
- **A** 70
- **B** 60
- **C** 45
- **D** 40
- **E** 30

19| FUVEST Na figura a seguir, tem-se que AD=AE, CD=CF e BA=BC. Se o ângulo EDF mede 80°, então o ângulo ABC mede:



- **A** 20°
- **B** 30°
- **C** 50°
- **D** 60°
- **E** 90°

20| ENEM Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC, e D, ponto do lado BC, indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC.



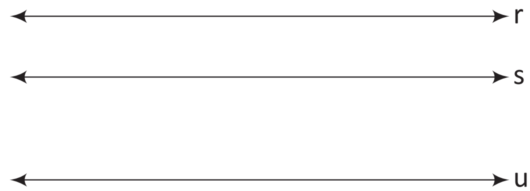
Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos

- **A** CMA e CMB.
- **B** CAD e ADB.
- **C** NAM e NDM.
- **D** CND e DMB.
- **E** CND e NDM.

TEOREMA DE TALES

FEIXE DE RETAS PARALELAS

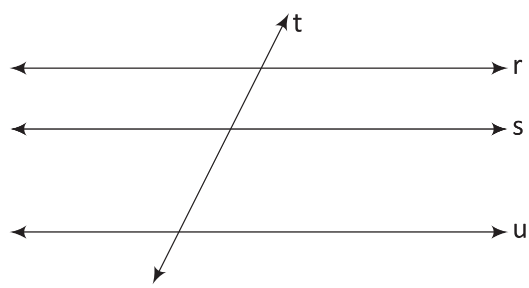
Feixe de retas paralelas é um conjunto de retas coplanares paralelas entre si.



r // s // u (feixe de paralelas)

TRANSVERSAL DO FEIXE DE RETAS PARALELAS

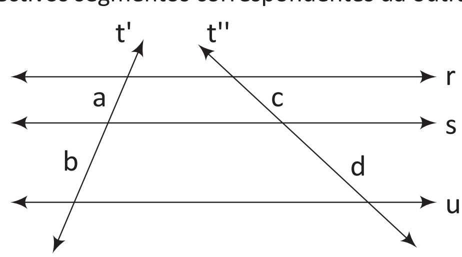
Transversal do feixe de retas paralelas é uma reta do plano do feixe que concorre com todas as retas do feixe.



t é uma transversal do feixe de paralelas

TEOREMA DE TALES

Se duas retas são transversais (t' e t'') de um feixe de retas paralelas (r, s e u), então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

PROPRIEDADES DAS PROPORÇÕES

Considerando que os números a, b, c e d formam ordenadamente uma proporção, temos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

Lê-se: o produto dos extremos é igual ao produto dos produtos do meio.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

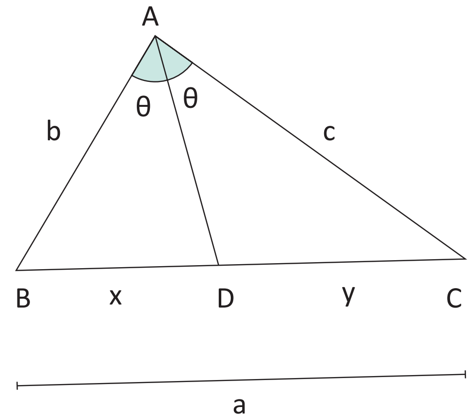
Lê-se: a soma dos dois primeiros está para o segundo, bem como a soma dos dois últimos está para o último.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Lê-se: a soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, bem como cada antecedente está para o correspondente consequente.

TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

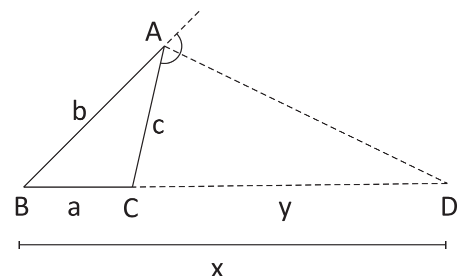
Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em segmentos (aditivos) proporcionais aos lados adjacentes.



$$\frac{b}{x} = \frac{c}{y} \quad (x + y = a)$$

TEOREMA DA BISSETRIZ EXTERNA

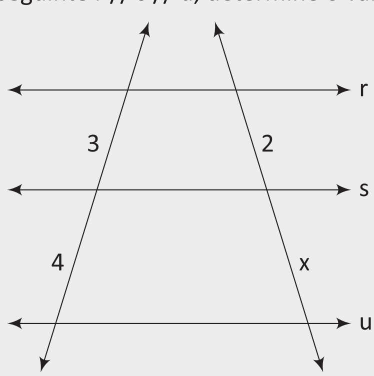
Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos (subtrativos) proporcionais aos lados adjacentes.



$$\frac{b}{x} = \frac{c}{y} \quad (x - y = a)$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Na figura seguinte r // s // u, determine o valor de x.

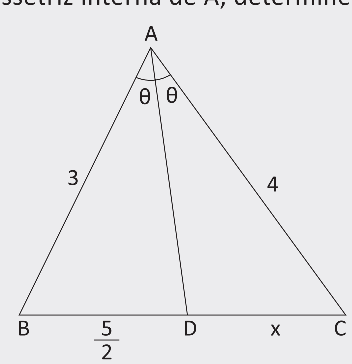


Resolução:

Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{x} \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

02| Se $\overline{AD}$ é bissetriz interna de Â, determine x.

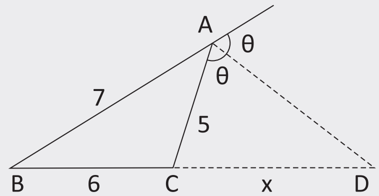


Resolução:

Pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos:

$$\frac{3}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{x} \Rightarrow 3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

03| Se $\overline{AD}$ é bissetriz externa de Â, determine x.



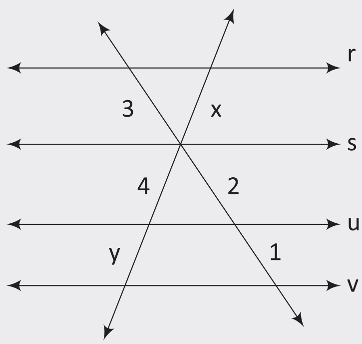
Resolução:

Pelo Teorema da Bissetriz Externa, temos:

$$\frac{5}{x} = \frac{7}{6+x} \Rightarrow 7x = 30 + 5x$$

$$\Rightarrow 2x = 30 \Rightarrow x = 15$$

04| Sendo r // s // u // v determine x^y.



Resolução:

Pelo Teorema de Tales, temos:

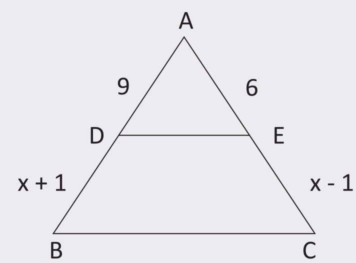
$$\frac{x}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{4}{y} = \frac{2}{1} \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$$

Logo:

$$x^y = 6^2 = 36$$

05| No triângulo da figura a seguir, DE//BC. Nessas condições determine a medida x.



Resolução:

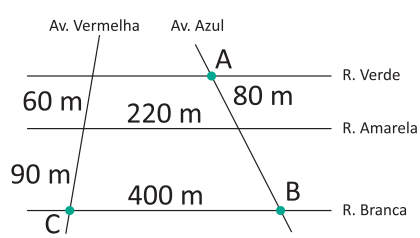
Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{9}{x+1} = \frac{6}{x-1} \Rightarrow 9x - 9 = 6x + 6 \Rightarrow x = 5$$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo ABC determina sobre o lado $\overline{AB}$ segmentos de 5 cm e 15 cm. Calcule as medidas dos segmentos que esta reta determina sobre o lado $\overline{AC}$, de medida 40 cm.

02| As ruas Verde, Amarela e Branca são paralelas e as avenidas Azul e Vermelha são transversais a essas ruas.



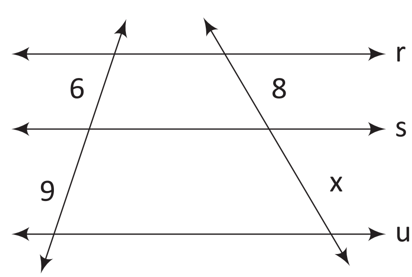
Pedro mora na esquina da Rua Verde com a Avenida Azul indicada na figura pelo ponto A.

A Para ir à padaria situada na esquina da Rua Branca com a Avenida Azul, indicada pelo ponto B, quantos metros, no mínimo, Pedro percorre?

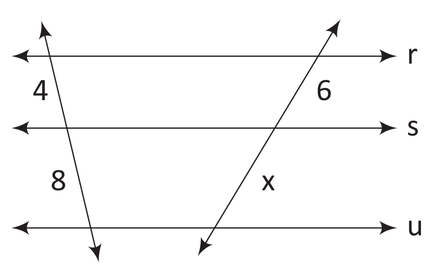
B Pedro faz uma caminhada de 200 metros em 4 minutos. Para ir à sua escola, situada na esquina da Rua Branca com a Avenida Vermelha, indicada pelo ponto C, ele anda pela Avenida Azul e vira na Rua Branca. Quanto tempo Pedro demora para chegar à escola?

03| Sendo r//s//u, determine o valor de x:

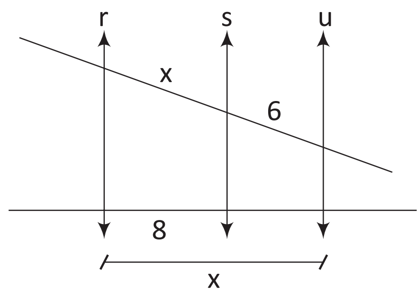
A



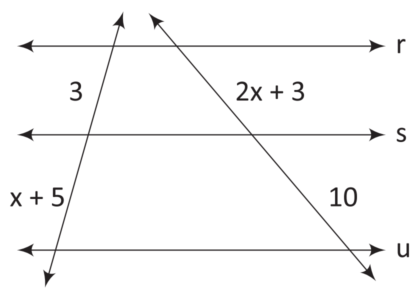
B



C



D



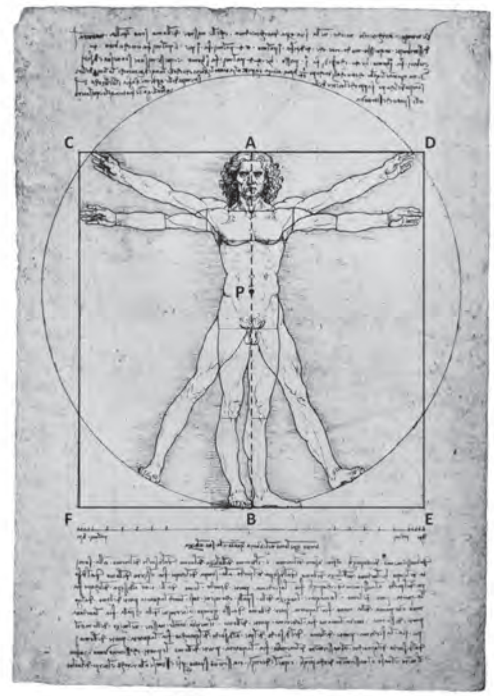
04| UFRJ Observe a figura a seguir que demonstra um padrão de harmonia, segundo os gregos.

Há muito tempo os gregos já conheciam o número de ouro $\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$, que é aproximadamente 1,618. Tal número foi durante muito tempo "padrão de harmonia".

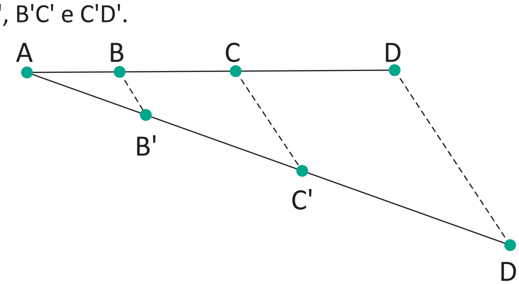
Por exemplo, ao se tomar a medida de uma pessoa (altura) e dividi-la pela medida que vai da linha umbilical até o chão, vê-se que a razão é a mesma que a da medida do queixo até a testa, em relação à medida da linha dos olhos até o queixo, e é igual ao número de ouro. Considere a cantora Ivete Sangalo, harmoniosa, segundo os padrões gregos.

Assumindo que a sua distância da linha umbilical até o chão é igual a $\frac{22.(\sqrt{5}-1)}{25}$ metros, determine a altura da mesma.

05| Na figura abaixo, temos o famoso desenho de Leonardo da Vinci conhecido como o *Homem Vitruviano*. Leonardo utilizou a razão áurea na construção do desenho em vários momentos. Por exemplo, o segmento que une o ponto A (extremidade da cabeça) ao ponto B (pé) está dividido na razão áurea pelo ponto P (umbigo), sendo PB maior que AP. Sabendo que o lado do quadrado CDEF mede 16,2 cm, utilize a razão de ouro para calcular o comprimento do segmento PB (a distância do umbigo até o pé). Considere: $\sqrt{5} \cong 2,24$

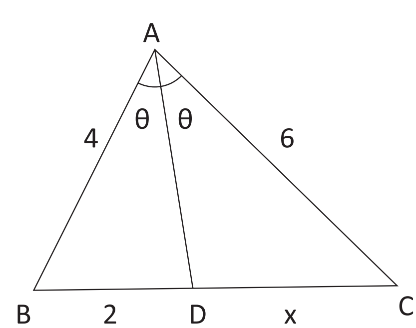


06| UNICAMP A figura a seguir mostra um segmento AD dividido em três partes: AB = 2 cm, BC = 3 cm e CD = 5 cm. O segmento AD' mede 13 cm e as retas BB' e CC' são paralelas a DD'. Determine os comprimentos dos segmentos AB', B'C' e C'D'.

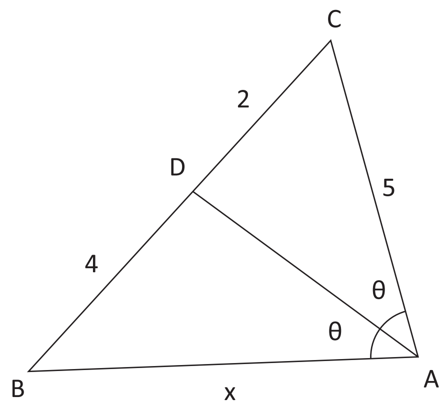


07| Se $\overline{AD}$ é bissetriz interna de Â, determine x:

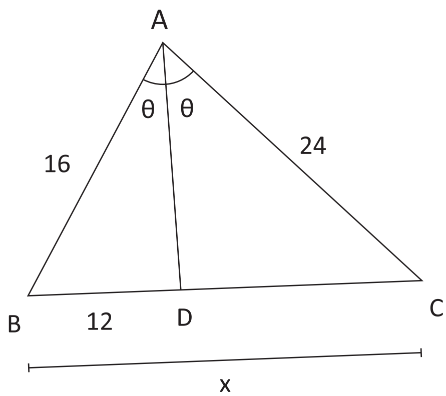
A



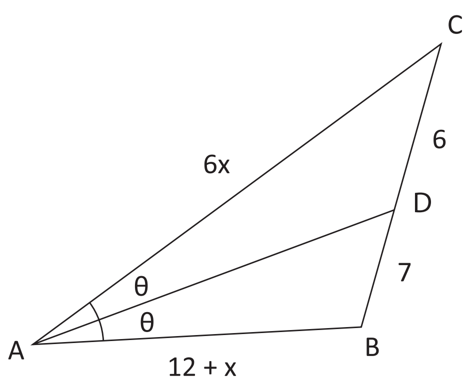
B



C

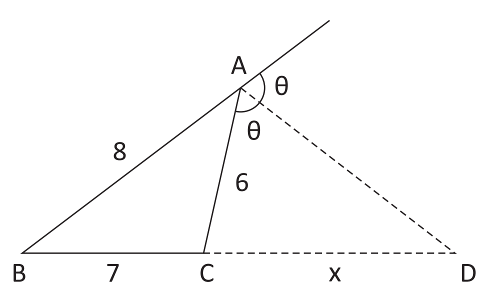


D

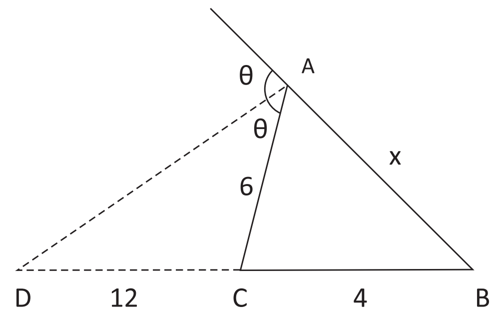


08| Se $\overline{AD}$ é bissetriz externa de Â, determine x:

A

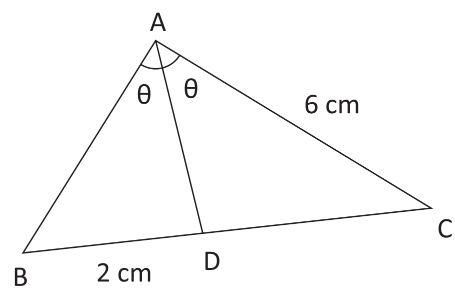


B

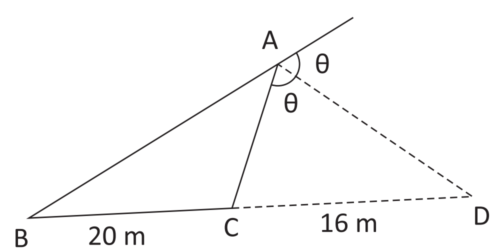


09| Determine a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC, sabendo que:

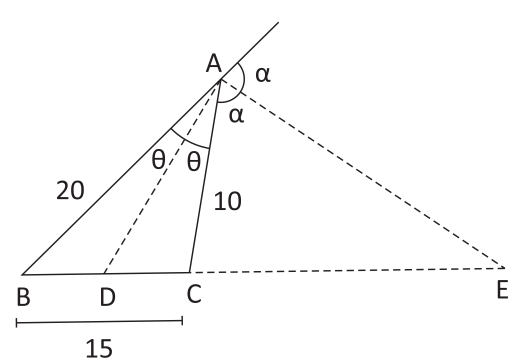
A $\overline{AD}$ é bissetriz e o perímetro do triângulo. ABC é 15 cm.



B $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo externo em A e o perímetro do triângulo ABC é 46 m.

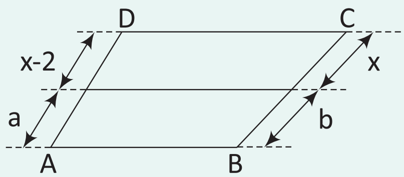


10| No triângulo ABC destacado abaixo, $\overline{AD}$ é bissetriz interna de Â, e $\overline{AE}$ é bissetriz externa de Â. Determine a medida do segmento $\overline{DE}$.



T ENEM E VESTIBULARES

01| IFMG A figura representa um perfil de um reservatório d´água com lado AB paralelo a CD.



Se a é o menor primo e b é 50% maior que a, então, o valor de x é:

A) 4
B) 6
C) 8
D) 10

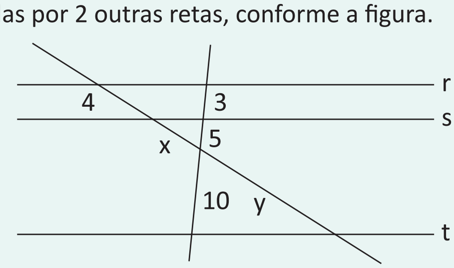
02| UECE O ponto P é interior a um segmento de reta, cuja medida é $x = 2m$, e o divide em dois segmentos cujas medidas são y e z e satisfazem a relação $y^2 = xz$. A razão x/y (denominada número de ouro ou razão áurea) é igual a:

A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
C) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

03| PUCRIO Uma reta paralela ao lado BC de um triângulo ABC intercepta os lados AB e AC do triângulo em P e Q, respectivamente, onde $AQ = 4$, $PB = 9$ e $AP = QC$. Então o comprimento de AP é:

A) 5
B) 6
C) 8
D) 2
E) 1

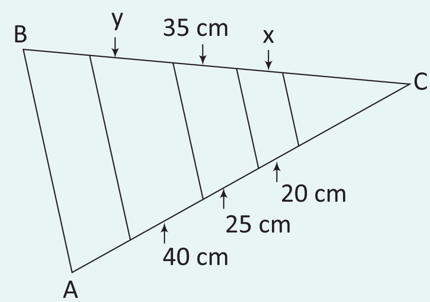
04| UNESP Considere 3 retas coplanares paralelas, r, s e t, cortadas por 2 outras retas, conforme a figura.



Os valores dos segmentos identificados por x e y são, respectivamente:

A) $\frac{3}{20}$ e $\frac{3}{40}$
B) 6 e 11
C) 9 e 13
D) 11 e 6
E) $\frac{20}{3}$ e $\frac{40}{3}$

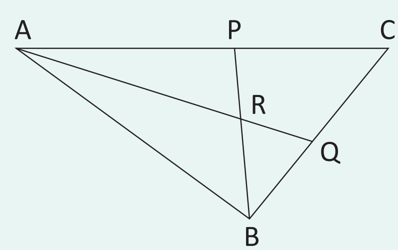
05| IFPR O jardineiro do Sr. Artur fez um canteiro triangular composto por folhagens e flores onde as divisões são todas paralelas à base AB do triângulo ABC, conforme figura.



Sendo assim, as medidas x e y dos canteiros de flores são, respectivamente:

A) 30 cm e 50 cm
B) 28 cm e 56 cm
C) 50 cm e 30 cm
D) 56 cm e 28 cm
E) 40 cm e 20 cm

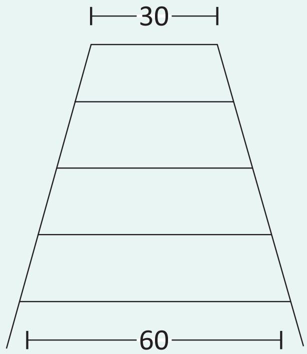
06| FGV Na figura, ABC é um triângulo com $AC = 20$ cm, $AB = 15$ cm e $BC = 14$ cm.



Sendo AQ e BP bissetrizes interiores do triângulo ABC, o quociente $\frac{QR}{AR}$ é igual a:

A) 0,3
B) 0,35
C) 0,4
D) 0,45
E) 0,5

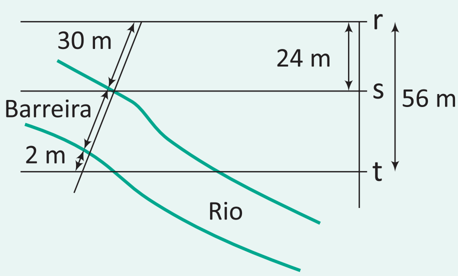
07| ENEM Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura:



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

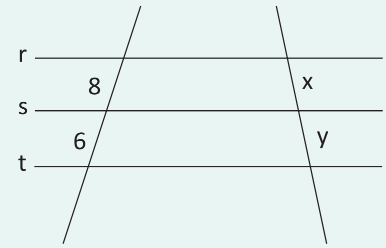
- **A** 144
- **B** 180
- **C** 210
- **D** 225
- **E** 240

08| UFSM A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscarem alternativas na geração de energia elétrica para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações. Observando a figura e admitindo que as linhas retas r, s e t sejam paralelas, pode-se afirmar que a barreira mede:



- **A** 33 m
- **B** 38 m
- **C** 43 m
- **D** 48 m
- **E** 53 m

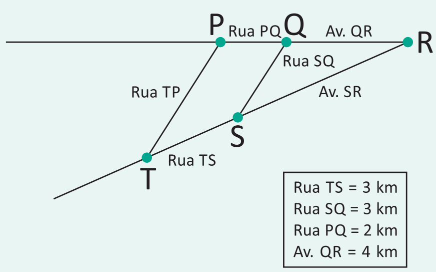
09| UFRJ Pedro está construindo uma fogueira representada pela figura abaixo. Ele sabe que a soma de x com y é 42 e que as retas r, s e t são paralelas.



A diferença x – y é:

- **A** 2
- **B** 4
- **C** 6
- **D** 10
- **E** 12

10| UFF O circuito triangular de uma corrida está esquematizado na figura a seguir:

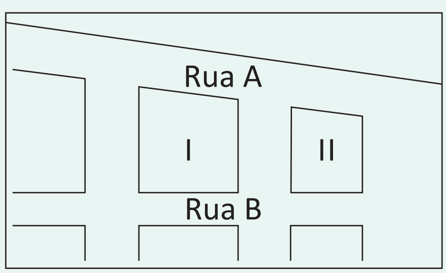


As ruas TP e SQ são paralelas. Partindo de S, cada corredor deve percorrer o circuito passando, sucessivamente, por R, Q, P, T, retornando, finalmente, a S.

Assinale a opção que indica o perímetro do circuito.

- **A** 4,5 km
- **B** 19,5 km
- **C** 20,0 km
- **D** 22,5 km
- **E** 24,0 km

11| UNIRIO

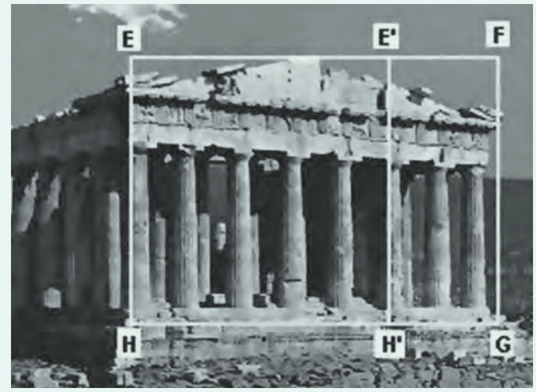


No desenho anterior apresentado, as frentes para a Rua A dos quarteirões I e II medem, respectivamente, 250 m e 200 m, e a frente do quarteirão I para a

Rua B mede 40 m a mais que a frente do quarteirão II para a mesma rua. Sendo assim, pode-se afirmar que a medida, em metros, da frente do menor dos dois quarteirões para a rua B é:

- A) 160
- B) 180
- C) 200
- D) 220
- E) 240

12| **UFRN** Phidias, um arquiteto grego que viveu no século quinto a.C., construiu o Parthenon com medidas que obedeceram à proporção áurea, o que significa dizer que EE'H'H é um quadrado e que os retângulos EFGH e E'FGH' são semelhantes, ou seja, o lado maior do primeiro retângulo está para o lado maior do segundo retângulo assim como o lado menor do primeiro retângulo está para o lado menor do segundo retângulo. Veja a figura abaixo.

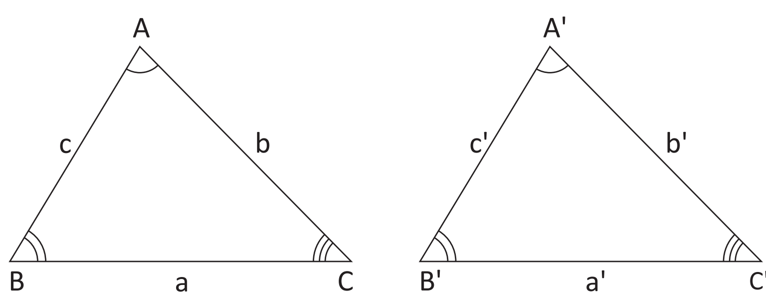


Assim, podemos afirmar que a razão da medida da base do Parthenon pela medida da sua altura é uma raiz do polinômio:

- A) $x^2 + x + 1$
- B) $x^2 + x - 1$
- C) $x^2 - x - 1$
- D) $x^2 - x + 1$

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos proporcionais.



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{A} \equiv \hat{A}' & \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' & \text{e } \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' & \end{pmatrix}$$

RAZÃO DE SEMELHANÇA

A razão entre dois lados homólogos k, de dois triângulos semelhantes, será chamada razão de semelhança.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

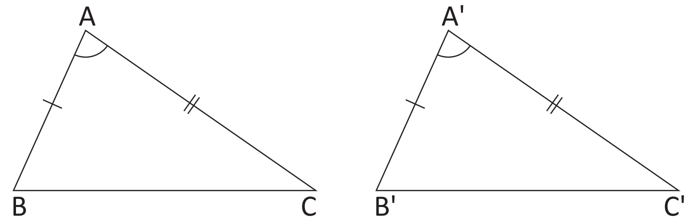
CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Se dois triângulos são semelhantes e $k = 1$, então dizemos que os triângulos são congruentes, ou seja, admitirão os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogos também congruentes.

CASOS DE CONGRUÊNCIA

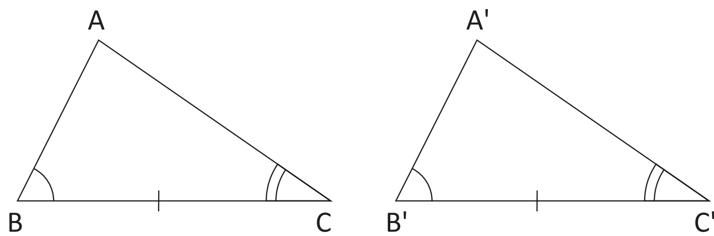
1° CASO – L.A.L.

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.



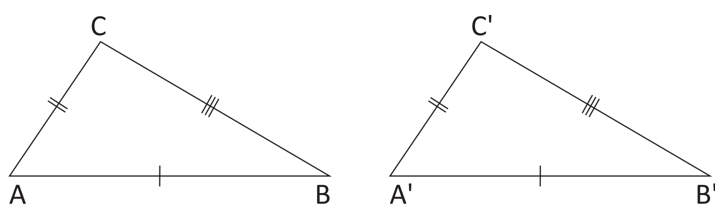
2° CASO – A.L.A.

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então esses triângulos são congruentes.



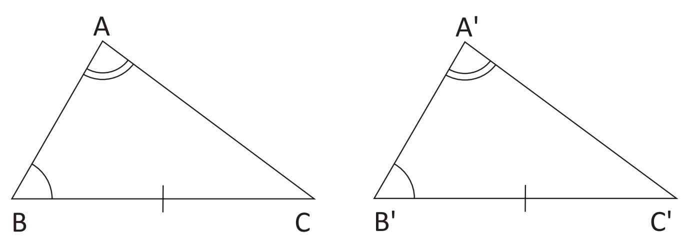
3° CASO – L.L.L.

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então esses triângulos são congruentes.



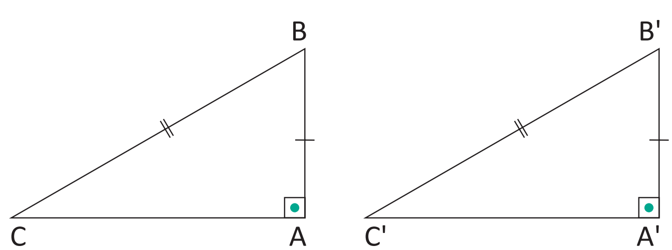
4° CASO – L.A.A_O.

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado, então esses triângulos são congruentes.



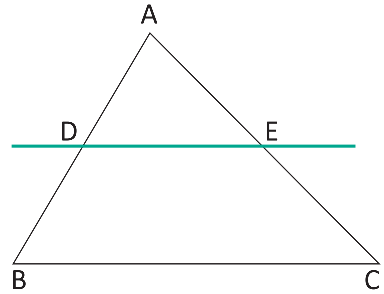
5° CASO – ESPECIAL PARA TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então esses triângulos são congruentes.



TEOREMA FUNDAMENTAL DA SEMELHANÇA

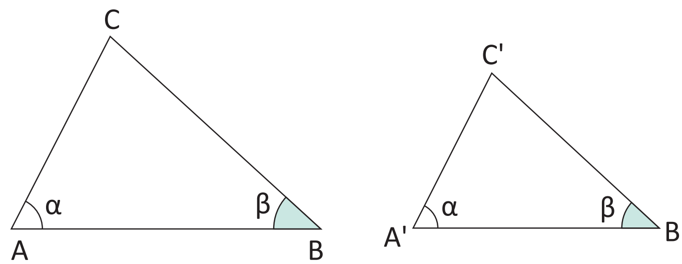
Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.



CASOS DE SEMELHANÇA

1° CASO – A.A.

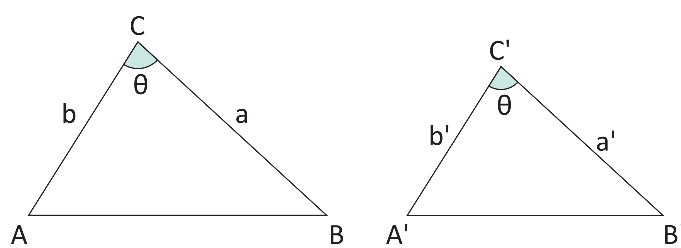
Se dois triângulos admitem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes.



$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

2° CASO – L.A.L.

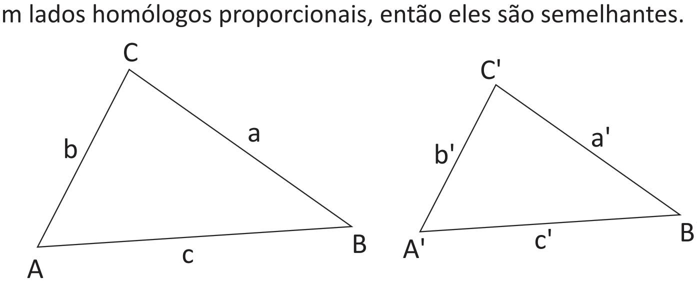
Se dois triângulos admitem dois lados homólogos proporcionais e os ângulos compreendidos entre eles congruentes, então eles são semelhantes.



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

3° CASO – L.L.L.

Se dois triângulos admitem lados homólogos proporcionais, então eles são semelhantes.

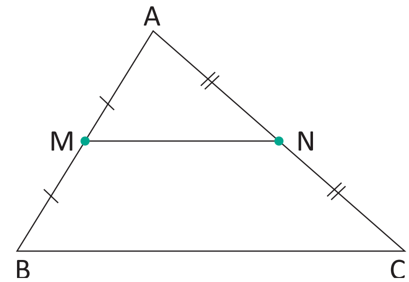


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

OBSERVAÇÃO: Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então a razão entre dois elementos lineares (unidimensionais) homólogos é k e os ângulos homólogos são congruentes.

BASE MÉDIA DE UM TRIÂNGULO

A base média de um triângulo qualquer é o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados. Veja:



Pelo 2º caso de semelhança, podemos garantir que os triângulos AMN e ABC são semelhantes na razão de $\frac{1}{2}$, logo:

$$\overline{MN} = \frac{\overline{BC}}{2}$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

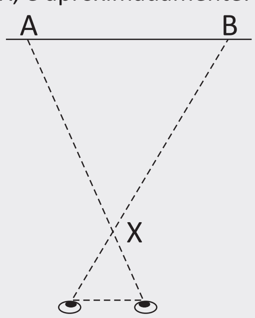
01| Quando olhamos para um ambiente qualquer, a percepção de profundidade é possível devido a nossa visão binocular. Por estarem separados em média em adultos, cada um dos nossos olhos registra uma imagem de um ângulo ligeiramente diferente. Ao interpretar essas imagens ao mesmo tempo, o cérebro forma um "mapa" dessas diferenças, tornando possível estimar a distância dos objetos em relação a nós.

A estereoscopia (popularmente conhecida como "imagem 3D") é uma técnica que consiste em exibir imagens distintas para cada olho do observador, representando o que se observaria em uma situação real. Assim, o cérebro pode ser "enganado" a interpretar os objetos representados como se estivessem flutuando diante da tela ou atrás dela.

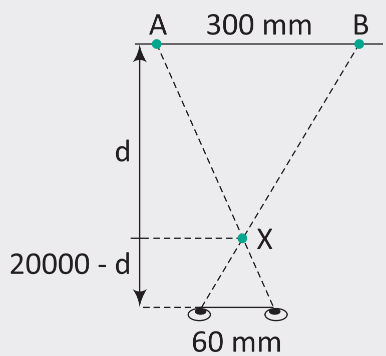
Diversas tecnologias existem atualmente para conseguir isso. A mais comum delas, usada nas salas de cinema 3D, funciona com o uso de óculos polarizadores que filtram a imagem projetada na tela, permitindo que cada olho receba somente a imagem correspondente.

Um observador está em uma sala de cinema 3D usando óculos polarizadores e sobre a tela são projetados dois pontos A e B a uma distância de um do outro, com A à esquerda de B. Os filtros polarizadores dos óculos fazem com que o ponto A seja visto apenas por seu olho direito e o ponto B apenas por seu olho esquerdo, de forma que as linhas de visão de cada um dos olhos se interseccionem em um ponto X, conforme a figura. O observador verá apenas um único ponto, resultado da junção em seu cérebro dos pontos A e B, localizado em X.

Sabendo que a reta imaginária que passa por seus olhos é paralela àquela que passa pelos pontos A e B e estas distam entre si, e que sua distância interocular é de a distância da tela em que ele verá a imagem virtual, formada no ponto X, é aproximadamente:



Resolução:



Como os triângulos ABX e EDX são semelhantes, temos que:

$$\frac{20000-d}{d} = \frac{60}{300} \Rightarrow d = 100000 - 5d$$

$$\Rightarrow d = \frac{100000}{6}$$

$$\Rightarrow d \cong 16666,7 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow d \cong 16,7 \text{ m}$$

02| Numa festa junina, além da tradicional brincadeira de roubar bandeira no alto do pau de sebo, quem descobrisse a sua altura ganharia um prêmio. O ganhador do desafio fincou, paralelamente a esse mastro, um bastão de 1m. Medindo-se as sombras projetadas no chão pelo bastão e pelo pau, ele encontrou, respectivamente, 25 dm e 125 dm. Qual é, em metros, a altura do "pau de sebo"?

Resolução:

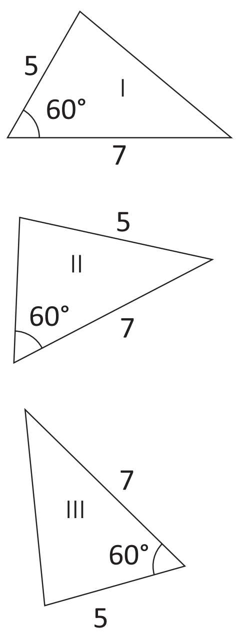
Sabendo que a altura é proporcional ao comprimento da sombra projetada, segue-se que a altura do pau de sebo é dada por

$\frac{h}{125} = \frac{1}{25} \Leftrightarrow h = 5m$

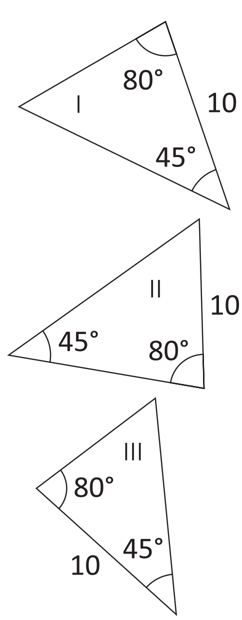
F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Nos itens abaixo, selecione os triângulos congruentes e indique o caso de congruência.

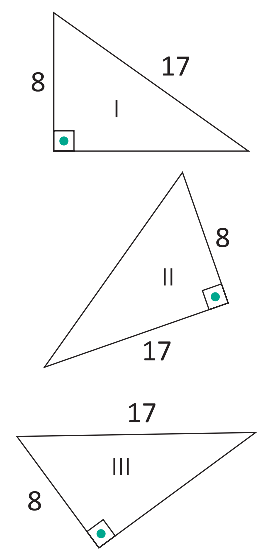
A



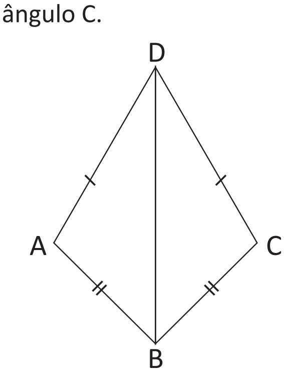
B



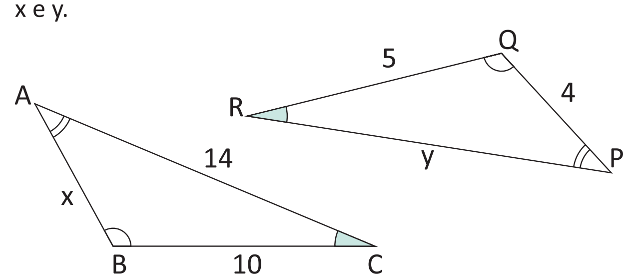
C



02| Na figura a seguir, temos o segmento AD que é idêntico a CD e AB que é idêntico a BC. Prove que o ângulo A é idêntico ao ângulo C.

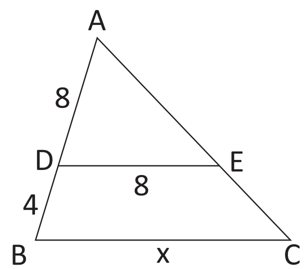


03| Os triângulos ABC e PQR são semelhantes, determine x e y.

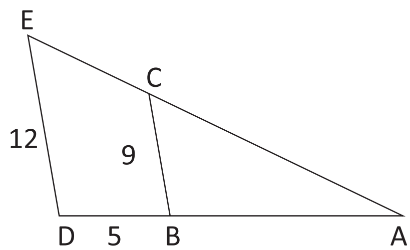


04| Sabendo que $\overline{BC}$ é paralelo a $\overline{DE}$, determine x.

A

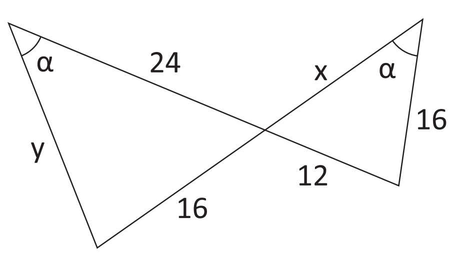


B $x = \overline{AD}$

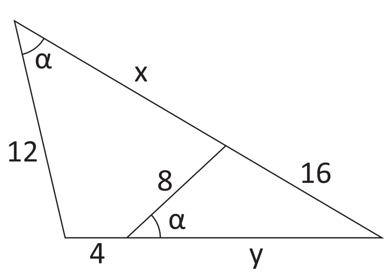


05| Determine x e y.

A

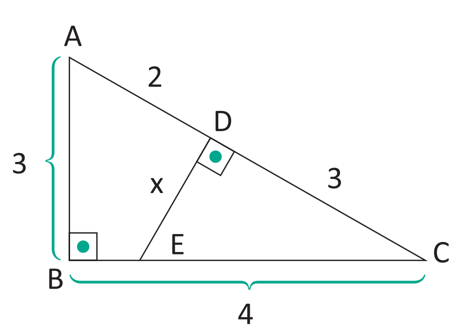


B

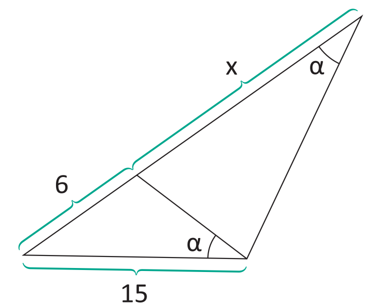


06| Determine x.

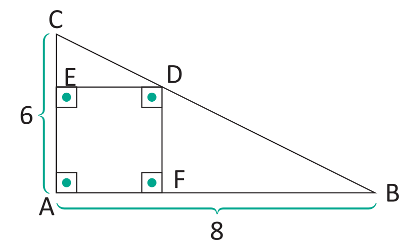
A



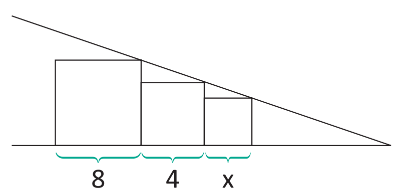
B



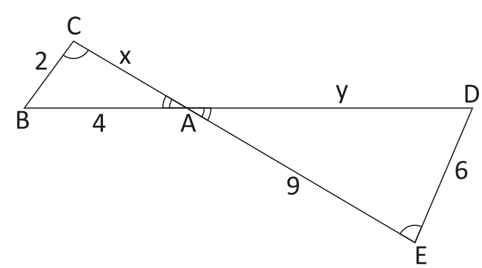
07| Determine o lado do quadrado AEDF.



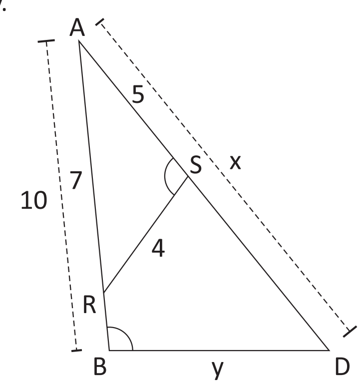
08| Sabendo que os lados dos quadrados destacados abaixo medem x, 4 e 8, determine o perímetro do quadrado de lado x.



09| Na figura a seguir, os ângulos com mesma indicação são congruentes, BC = 2 cm, AB = 4 cm, DE = 6 cm e AE = 9 cm. Calcule AC = x e AD = y.



10| Na figura, sabe-se que $\hat{S}$ e $\hat{B}$ são congruentes, AR = 7cm, AS = 5 cm, SR = 4 cm e AB = 10 cm. Determine AD = x e BD = y.



T ENEM E VESTIBULARES

01| UFRN Numa projeção de filme, o projetor foi colocado a 12 m de distância da tela. Isto fez com que aparecesse a imagem de um homem com 3 m de altura. Numa sala menor, a projeção resultou na imagem de um homem com apenas 2 m de altura. Nessa nova sala, a distância do projetor em relação à tela era de:

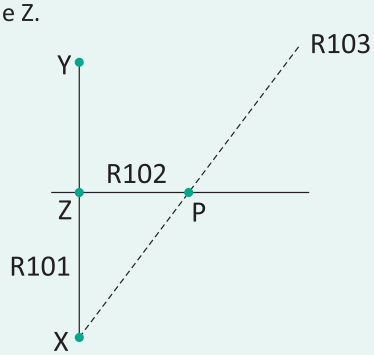
A) 18 m
B) 8 m
C) 36 m
D) 9 m

02| IFCE Sobre os lados AB e AC do triângulo ABC, são marcados os pontos D e E, respectivamente, de tal forma que: DE // BC,

AE = 6 cm, DB = 2 cm, EC = 3 cm e DE = 8 cm. Nessas condições, a soma das medidas dos segmentos AD e BC, em centímetros, vale:

A) 12
B) 16
C) 18
D) 24
E) 30

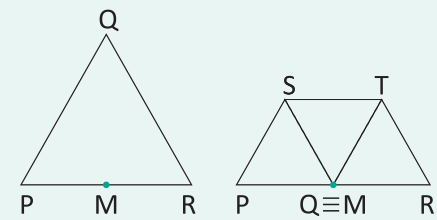
03| INSPER Duas cidades X e Y são interligadas pela rodovia R101, que é retilínea e apresenta 300 km de extensão. A 160 km de X, à beira da R101, fica a cidade Z, por onde passa a rodovia R102, também retilínea e perpendicular à R101. Está sendo construída uma nova rodovia retilínea, a R103, que ligará X à capital do estado. A nova rodovia interceptará a R102 no ponto P, distante 120 km da cidade Z.



O governo está planejando, após a conclusão da obra, construir uma estrada ligando a cidade Y até a R103. A menor extensão, em quilômetros, que esta ligação poderá ter é:

A) 250
B) 240
C) 225
D) 200
E) 180

04| UFF Um pedaço de papel tem a forma do triângulo equilátero PQR, com 7cm de lado, sendo M o ponto médio do lado PR.



Dobra-se o papel de modo que os pontos Q e M coincidam, conforme ilustrado acima.

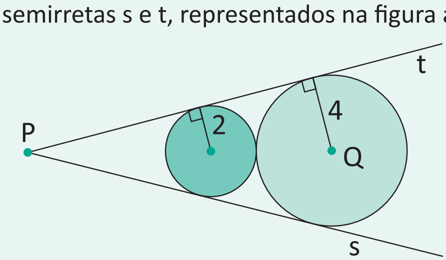
O perímetro do trapézio PSTR, em cm, é igual a:

A) 9
B) 17,5
C) 24,5
D) 28
E) 49

05| UEL Para medir a altura de um edifício, um engenheiro utilizou o seguinte procedimento: mediu a sombra do prédio obtendo 10,0 metros. Em seguida, mediu sua própria sombra que resultou em 0,5 metros. Sabendo que sua altura é de 1,8 metros, ele pôde calcular a altura do prédio, obtendo:

A) 4,5 metros
B) 10,0 metros
C) 18,0 metros
D) 36,0 metros
E) 45,0 metros

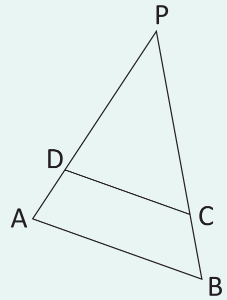
06| UFRGS Observe os discos de raios 2 e 4, tangentes entre si e às semirretas s e t, representados na figura abaixo.



A distância entre os pontos P e Q é:

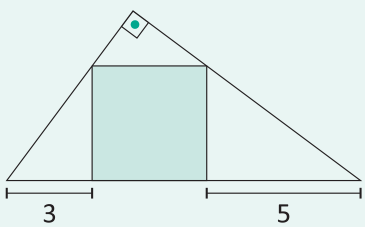
A) 9
B) 10
C) 11
D) 12
E) 13

07| PUC Em um mapa, o parque turístico P e as cidades A, B, C e D estão dispostos conforme a figura a seguir, sendo AB paralelo a CD. Sabendo-se que, na realidade, AB = 40 km, AD = 30 km e DC = 25 km, a distância da cidade A até o parque P, em quilômetros, é:



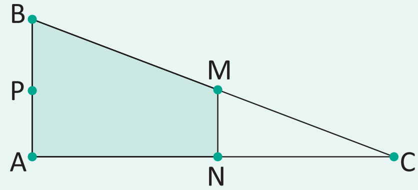
- **A** 65
- **B** 70
- **C** 75
- **D** 80

08| MACK A área do quadrado assinalado na figura é igual a:



- **A** 15
- **B** 20
- **C** 12
- **D** 18
- **E** 16

09| ENEM Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.

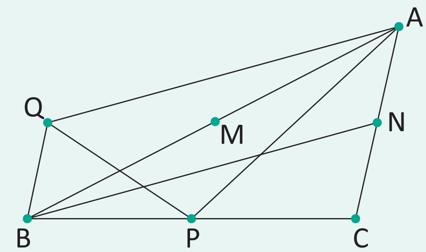


A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde:

- **A** A mesma área do triângulo AMC.
- **B** A mesma área do triângulo BNC.
- **C** A metade da área formada pelo triângulo ABC.
- **D** Ao dobro da área do triângulo MNC.
- **E** Ao triplo da área do triângulo MNC.

10| UFU Na figura a seguir, ABC é um triângulo e suas medianas AP, BN e CM medem, respectivamente, 8 cm, 10 cm e 4 cm.



Se BQ é paralelo ao lado AC com 2BQ = AC, então, o perímetro do triângulo APQ é igual a:

- **A** 24 cm
- **B** 22 cm
- **C** 20 cm
- **D** 18 cm

11| ENEM A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro.

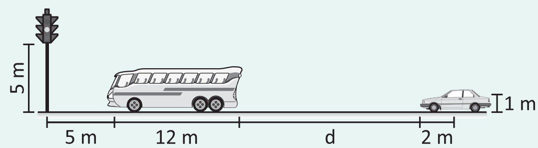
A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é:

- **A** 1,16 metros
- **B** 3,0 metros
- **C** 5,4 metros
- **D** 5,6 metros
- **E** 7,04 metros

12| IFSC Sabendo que uma pessoa de 1,80 m projeta uma sombra de 1,60 m, calcule a altura de uma árvore que projeta uma sombra de 20 m nas mesmas condições.

- **A** 22 m
- **B** 22,50 m
- **C** 24 m
- **D** 28,80 m
- **E** 17,80 m

13| UFPR Em uma rua, um ônibus com 12 m de comprimento e 3 m de altura está parado a 5 m de distância da base de um semáforo, o qual está a 5 m do chão. Atrás do ônibus para um carro, cujo motorista tem os olhos a 1 m do chão e a 2 m da parte frontal do carro, conforme indica a figura a seguir. Determine a menor distância (d) que o carro pode ficar do ônibus de modo que o motorista possa enxergar o semáforo inteiro.



Ⓐ 13,5 m

Ⓑ 14,0 m

Ⓒ 14,5 m

Ⓓ 15,0 m

Ⓔ 15,5 m

14| UFJF Seja o triângulo de base igual a 10 m e altura igual a 5 m com um quadrado inscrito, tendo um lado contido na base do triângulo. O lado do quadrado é, em metros, igual a:

Ⓐ $\frac{10}{3}$

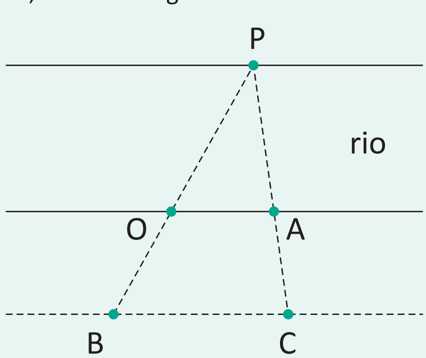
Ⓑ $\frac{5}{2}$

Ⓒ $\frac{20}{7}$

Ⓓ $\frac{15}{4}$

Ⓔ $\frac{15}{2}$

15| UNESP Um observador situado num ponto O, localizado na margem de um rio, precisa determinar sua distância até um ponto P, localizado na outra margem, sem atravessar o rio. Para isso marca, com estacas, outros pontos do lado da margem em que se encontra, de tal forma que P, O e B estão alinhados entre si e P, A e C também. Além disso, OA é paralelo a BC, OA = 25 m, BC = 40 m e OB = 30 m, conforme figura.



A distância, em metros, do observador em O até o ponto P, é:

Ⓐ 30

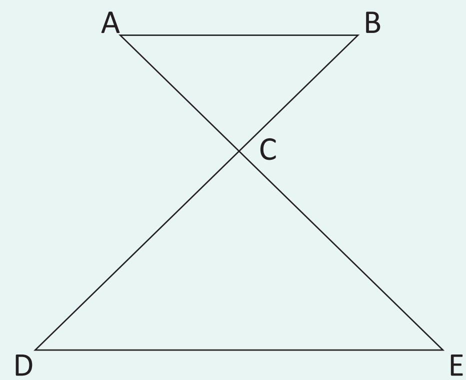
Ⓑ 35

Ⓒ 40

Ⓓ 45

Ⓔ 50

16| IFCE Sendo, na figura a seguir, AB//DE, AB = 5 cm, AC = 6 cm e DE = 10 cm, o valor de CD e CE, nesta ordem, em cm, é:



Ⓐ 14 e 12

Ⓑ 12 e 10

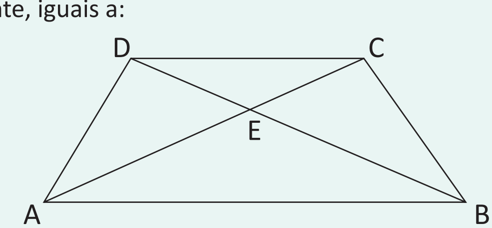
Ⓒ 10 e 8

Ⓓ 16 e 14

Ⓔ 8 e 6

17| IFCE Considere o trapézio escaleno indicado na figura a seguir. Sabendo-se que a diagonal AC mede 9 cm e os lados

$\overline{DC} = 8$ cm e $\overline{AB} = 10$ cm, tendo a informação de que a diagonal AC intercepta a diagonal BD no ponto E, os comprimentos dos segmentos AE e EC são, respectivamente, iguais a:



Ⓐ 4 cm e 5 cm

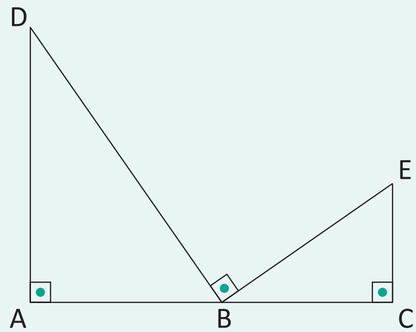
Ⓑ 5 cm e 4 m

Ⓒ 2 cm e 7 cm

Ⓓ 7 cm e 2 cm

Ⓔ 6,5 cm e 2,5 cm

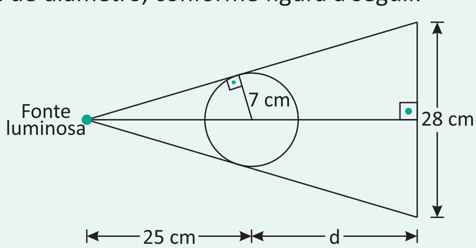
18| UNESP Na figura, B é um ponto do segmento de reta AC e os ângulos DAB, DBE e BCE são retos.



Se o segmento AD = 6 dm, o segmento AC = 11 dm e o segmento EC = 3 dm, as medidas possíveis de AB, em dm, são:

- **A** 4,5 e 6,5
- **B** 7,5 e 3,5
- **C** 8 e 3
- **D** 7 e 4
- **E** 9 e 2

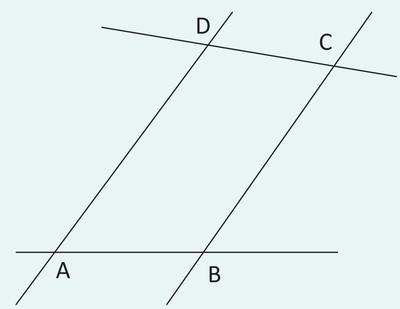
19| UFG Uma fonte luminosa a 25 cm do centro de uma esfera projeta sobre uma parede uma sombra circular de 28 cm de diâmetro, conforme figura a seguir.



Se o raio da esfera mede 7 cm, a distância (d) do centro da esfera até a parede, em cm, é:

- **A** 23
- **B** 25
- **C** 28
- **D** 32
- **E** 35

20| UFMG Observe a figura.



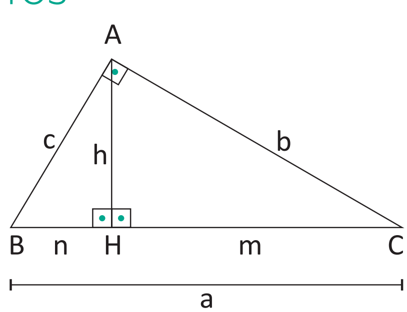
Nessa figura, os segmentos AD e BC são paralelos, AD = 8, AB = 3 e BC = 7.

Sendo P o ponto de interseção das retas AB e DC, a medida do segmento BP é:

- **A** 23
- **B** 22
- **C** 24
- **D** 21

TRIÂNGULO RETÂNGULO

ELEMENTOS



$\overline{BC} = a$: hipotenusa

$\overline{AC} = b$: cateto

$\overline{AB} = c$: cateto

$\overline{BH} = n$: projeção do cateto c sobre a hipotenusa

$\overline{CH} = m$: projeção do cateto b sobre a hipotenusa

$\overline{AH} = h$: altura relativa à hipotenusa

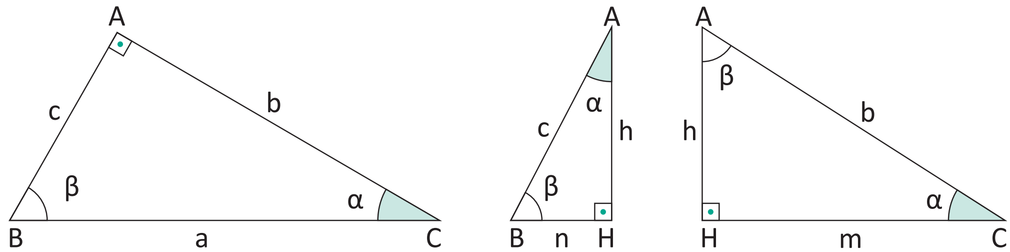
MÉDIA PROPORCIONAL DE DOIS SEGMENTOS

Média proporcional (média geométrica) dos segmentos a e b dados é o segmento x que, com os segmentos dados, forma a seguinte proporção:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \text{ ou } \frac{x}{a} = \frac{b}{x} \text{ ou } x^2 = a.b$$

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Como os triângulos destacados abaixo admitem dois ângulos ordenadamente congruentes, eles são semelhantes.



À partir da proporcionalidade de seus lados homólogos, podemos concluir as seguintes relações:

1ª RELAÇÃO:

Cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa.

$$b^2 = a \, . \, m \qquad c^2 = a \, . \, n$$

2ª RELAÇÃO:

A altura relativa à hipotenusa é média proporcional (ou média geométrica) entre os segmentos que determina sobre a hipotenusa.

$$h^2 = m \, . \, n$$

3ª RELAÇÃO:

O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

$$b \, . \, c = a \, . \, h$$

4ª RELAÇÃO:

O produto de um cateto pela altura relativa à hipotenusa é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro sobre a hipotenusa.

$$b \, . \, h = c \, . \, m \qquad c \, . \, h = b \, . \, n$$

5ª RELAÇÃO: TEOREMA DE PITÁGORAS

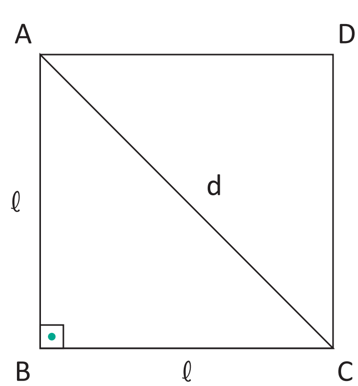
A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

APLICAÇÕES DO TEOREMA DE PITÁGORAS

NO QUADRADO

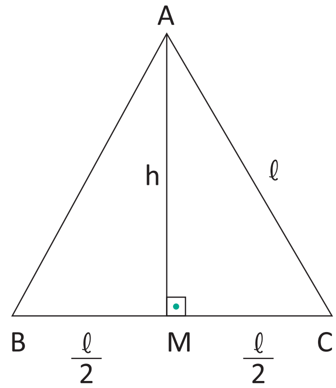
Sendo ABCD um quadrado de lado ℓ e diagonal d, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos:



$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow d = \ell\sqrt{2}$$

NO TRIÂNGULO EQUILÁTERO

Sendo ABC um triângulo equilátero de lado ℓ, M o ponto médio do lado $\overline{BC}$ e altura h, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AMC, temos:



$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS

Triângulos pitagóricos são triângulos retângulos, cujos lados são números inteiros.

Um terno pitagórico é formado por três números naturais a, b e c tais que $a^2 = b^2 + c^2$. Se (b,c,a) é um terno pitagórico, então (kb,kc,ka) também é um terno pitagórico, para qualquer número natural k. Um terno pitagórico primitivo é um terno pitagórico em que os três números são primos entre si.

Euclides, demonstrou que existe uma infinidade de ternos pitagóricos primitivos. Além disso, encontrou uma fórmula que gera todos os ternos pitagóricos primitivos. Dados dois números naturais m > n, o terno (b,c,a), sendo:

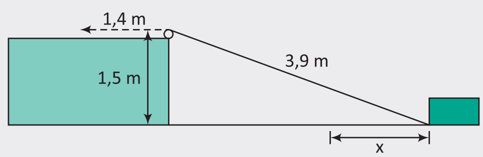
b	c	a
$m^2 - n^2$	2mn	$m^2 + n^2$

É pitagórico e primitivo, se, e somente se, m e n são primos entre si e possuem paridades distintas, ou seja: se m é par, então n é ímpar ou m é ímpar e n é par. Veja alguns exemplos de ternos pitagóricos primitivos:

m	n	Cateto: $b = m^2 - n^2$	Cateto: $c = 2mn$	Hipotenusa: $a = m^2 + n^2$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
...	...	...	...	...

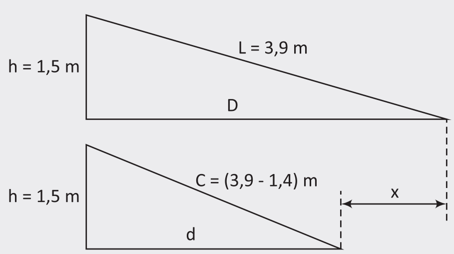
R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Uma corda de 3,9 m de comprimento conecta um ponto na base de um bloco de madeira a uma polia localizada no alto de uma elevação, conforme o esquema abaixo. Observe que o ponto mais alto dessa polia está 1,5 m acima do plano em que esse bloco desliza. Caso a corda seja puxada 1,4 m, na direção indicada abaixo, a distância x que o bloco deslizará será de:



Destaquemos os triângulos retângulos formados nas situações inicial e final.

Resolução:



Aplicando Pitágoras no primeiro triângulo:

$D^2 + h^2 = L^2 \Rightarrow D^2 + 2,25 = 15,21$

$\Rightarrow D = \sqrt{12,96} \Rightarrow D = 3,6\ m$

Aplicando Pitágoras no segundo triângulo:

$d^2 + h^2 + C^2 \Rightarrow d^2 + 1,5^2 = 2,5^2$

$\Rightarrow d^2 = 6,25 - 2,25 = 4 \Rightarrow d = 2\ m$

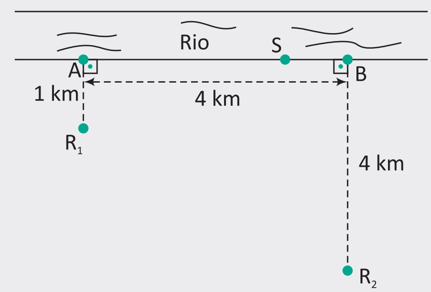
Comparando os dois triângulos:

$x = D - d = 3,6 - 2 \Rightarrow$

$x = 1,6\ m$

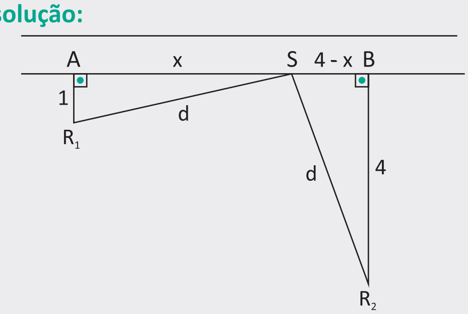
02| Duas vilas da zona rural de um município localizam-se na mesma margem de um trecho retilíneo de um rio. Devido a problemas de abastecimento de água, os moradores fizeram várias reivindicações à prefeitura, solicitando a construção de uma estação de bombeamento de água para sanar esses problemas. Um desenho do projeto, proposto pela prefeitura para a construção da estação, está mostrado na figura a seguir. No projeto, estão destacados:

- Os pontos R_1 e R_2, representando os reservatórios de água de cada vila, e as distâncias desses reservatórios ao rio.
- Os pontos A e B, localizados na margem do rio, respectivamente, mais próximos dos reservatórios R_1 e R_2.
- O ponto S, localizado na margem do rio, entre os pontos A e B, onde deverá ser construída a estação de bombeamento.



Com base nesses dados, para que a estação de bombeamento fique a uma mesma distância dos dois reservatórios de água das vilas, determine a distância entre os pontos A e S.

Resolução:



$d^2 = x^2 + 1^2$ e $d^2 = (x-4)^2 + 4^2$

Logo, $x^2 + 1^2 = (x-4)^2 + 4^2$

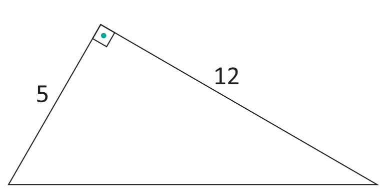
$8x = 31$

$x = 3,875$

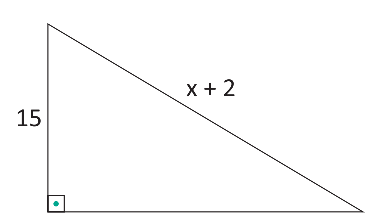
F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Determine o valor de x:

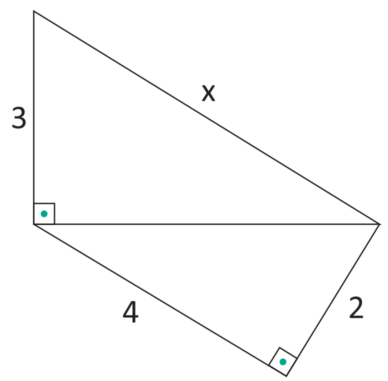
A



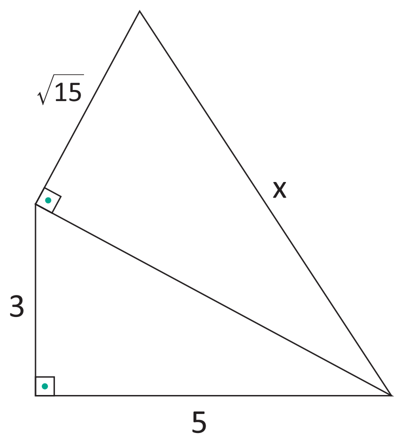
B



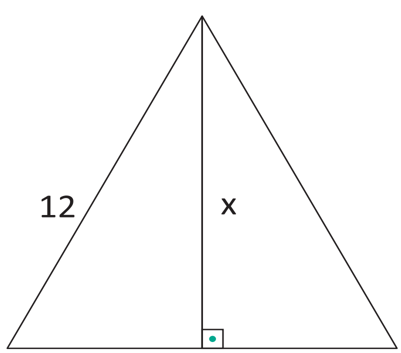
C



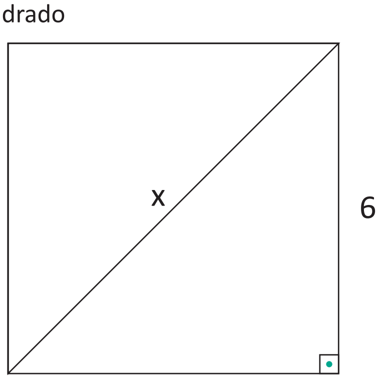
D



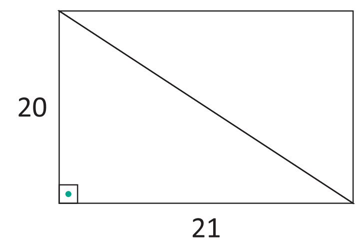
E Triângulo Equilátero



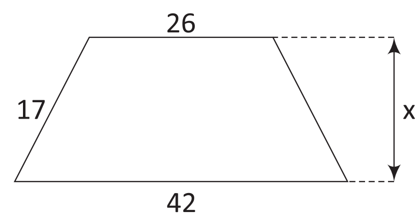
F Quadrado



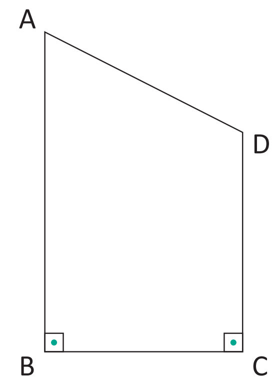
G Retângulo



H Trapézio Isósceles



02| UFC Considere a figura a seguir na qual os segmentos de reta AB e CD são perpendiculares ao segmento de reta BC. Se $\overline{AB} = 19$ cm, $\overline{BC} = 12$ cm e $\overline{CD} = 14$ cm, determine a medida, em centímetros, do segmento de reta AD.

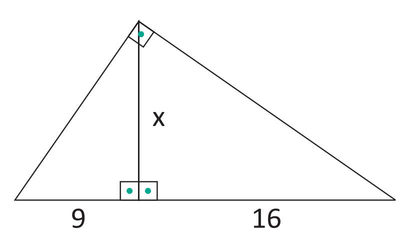


03| UFPE Seja ABC um triângulo tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = 5$ cm e $\overline{AC} = 8$ cm. Quanto mede, em mm, a altura deste triângulo com relação ao lado AC?

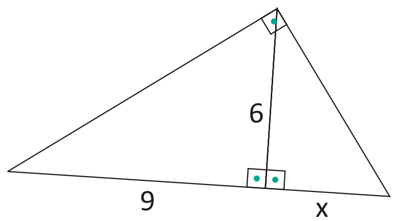
04| UFPE Caminhando em uma região plana e partindo do ponto A, João caminha 7 m na direção nordeste, fazendo um ângulo de 33° com o leste e, em seguida, caminha 24 m na direção noroeste, fazendo um ângulo de 57° com o oeste, chegando ao ponto B. Qual a distância, em metros, entre A e B?

05| Determine o valor de x:

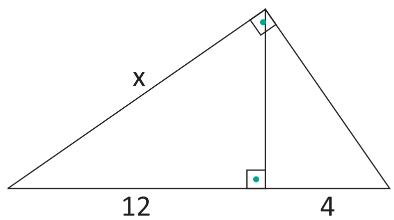
A



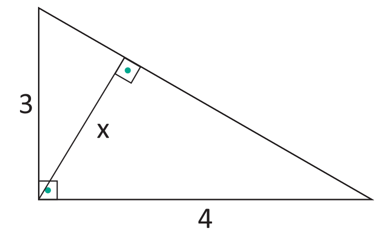
B



C

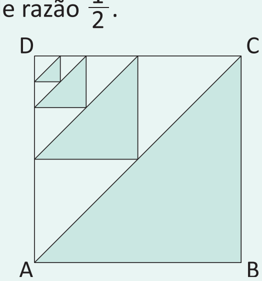


D



T ENEM E VESTIBULARES

01| UFRGS Na figura abaixo, ABCD é um quadrado e os triângulos sombreados são triângulos semelhantes tais que as alturas correspondentes formam uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$.



Se o perímetro do triângulo ABC é 1, a soma dos perímetros dos quatro triângulos sombreados é:

A) $\frac{9}{8}$

B) $\frac{11}{8}$

C) $\frac{13}{8}$

D) $\frac{15}{8}$

E) $\frac{17}{8}$

02| UNEMAT Em um triângulo retângulo, a hipotenusa é $\frac{5}{3}$ o tamanho do cateto menor. O cateto maior tem tamanho igual a $\frac{4}{3}$ do cateto menor.
Sendo 60 cm o perímetro desse triângulo, sua área será de:

A) 135 cm^2

B) 120 cm^2

C) 150 cm^2

D) 100 cm^2

E) 187,5 cm^2

03| PUCRJ Ao meio dia, a formiga A está 3 km a oeste da formiga B. A formiga A está se movendo para o oeste a 3 km/h e a formiga B está se movendo para o norte com a mesma velocidade. Qual a distância entre as duas formigas às 14h?

A) $\sqrt{17}$ km

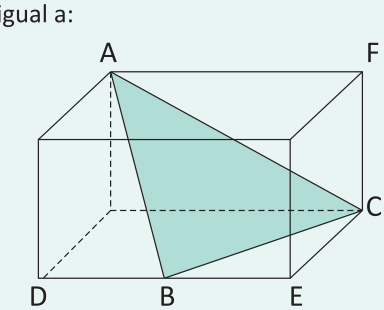
B) 17 km

C) $\sqrt{51}$ km

D) $\sqrt{117}$ km

E) 117 km

04| ESPM A figura abaixo representa um paralelepípedo reto-retângulo de medidas AF = 4, FC = 3 e CE = $2\sqrt{3}$, sendo B o ponto médio de $\overline{DE}$. O perímetro do triângulo ABC é igual a:



A) 12

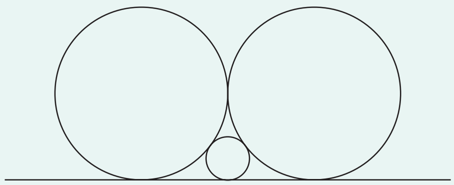
B) 14

C) 13

D) 15

E) 11

05| UFMG Nesta figura, estão representadas três circunferências, tangentes duas a duas, e uma reta tangente às três circunferências:



Sabe-se que o raio de cada uma das duas circunferências maiores mede 1 cm.

Então, é CORRETO afirmar que a medida do raio da circunferência menor é:

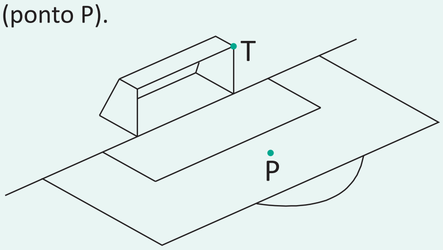
A) $\frac{1}{3}$ cm

B) $\frac{1}{4}$ cm

C) $\frac{(\sqrt{2})}{2}$ cm

D) $\frac{(\sqrt{2})}{4}$ cm

06| INSPER A figura mostra parte de um campo de futebol, em que estão representados um dos gols e a marca do pênalti (ponto P).



Considere que a marca do pênalti equidista das duas traves do gol, que são perpendiculares ao plano do campo, além das medidas a seguir, que foram aproximadas para facilitar as contas.

- Distância da marca do pênalti até a linha do gol: 11 metros.
- Largura do gol: 8 metros.
- Altura do gol: 2,5 metros.

Um atacante chuta a bola da marca do pênalti e ela, seguindo uma trajetória reta, choca-se contra a junção da trave esquerda com o travessão (ponto T). Nessa situação, a bola terá percorrido, do momento do chute até o choque, uma distância, em metros, aproximadamente igual a:

A) 12

B) 14

C) 16

D) 18

E) 20

07| UECE Se E_1 e E_2 são duas circunferências concêntricas cujas medidas dos raios são respectivamente 3 m e 5 m e se uma reta tangente a E_1 intercepta E_2 nos pontos X e Y, então a medida, em metros, do segmento de reta XY é:

A) 4

B) 6

C) 8

D) 10

08| IFSC O lado de um quadrado mede $\sqrt{2}$ cm. Quanto mede sua diagonal?

A) 2 cm

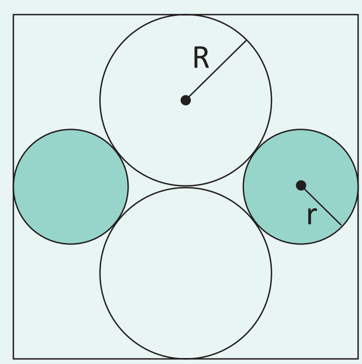
B) $\sqrt{3}$ cm

C) $\sqrt{6}$ cm

D) $2\sqrt{3}$ cm

E) $2\sqrt{2}$ cm

09| ESPM A figura mostra um quadrado, dois círculos claros de raios R e dois círculos escuros de raios r, tangentes entre si e aos lados do quadrado.



A razão entre R e r é igual a:

A) $\sqrt{2}$

B) $\sqrt{3}$

C) $\frac{3}{2}$

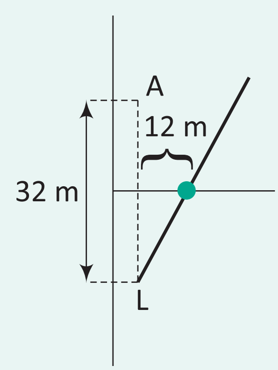
D) 2

E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

10| PUC Dois navios navegavam pelo Oceano Atlântico, supostamente plano: X, à velocidade constante de 16 milhas por hora, e Y à velocidade constante de 12 milhas por hora. Sabe-se que às 15 horas de certo dia Y estava exatamente 72 milhas ao sul de X e que, a partir de então, Y navegou em linha reta para o leste, enquanto que X navegou em linha reta para o sul, cada qual mantendo suas respectivas velocidades. Nessas condições, às 17 horas e 15 minutos do mesmo dia, a distância entre X e Y, em milhas, era:

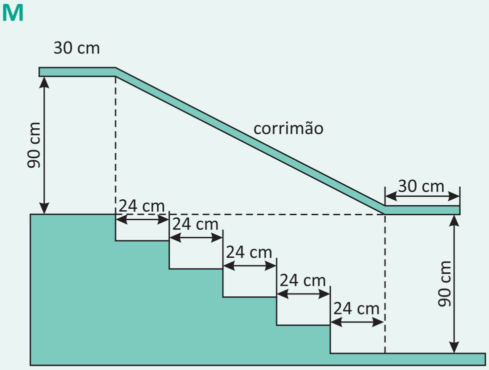
- **A** 45
- **B** 48
- **C** 50
- **D** 55
- **E** 58

11| FUVEST Um lateral L faz um lançamento para um atacante A, situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e quando passa pela linha de meio do campo está a uma distância de 12 m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de:



- **A** 18,8 m
- **B** 19,2 m
- **C** 19,6 m
- **D** 20 m
- **E** 20,4 m

12| ENEM



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

- **A** 1,8 m
- **B** 1,9 m
- **C** 2,0 m
- **D** 2,1 m
- **E** 2,2 m

13| ENEM Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40 km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D. A nova estação deve ser localizada:

- **A** No centro do quadrado.
- **B** Na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15 km dessa estrada.
- **C** Na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25 km dessa estrada.
- **D** No vértice de um triângulo equilátero de base AB oposto a essa base.
- **E** No ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

14| UERJ Millôr Fernandes, em uma bela homenagem à Matemática, escreveu um poema do qual extraímos o fragmento a seguir:

Às folhas tantas de um livro de Matemática, um Quociente apaixonou-se um dia doidamente por uma Incógnita.

Olhou-a com seu olhar inumerável e viu-a do ápice à base: uma figura ímpar;

olhos romboides, boca trapezoide, corpo retangular, seios esferoides.

Fez da sua uma vida paralela à dela, até que se encontraram no Infinito.

"Quem és tu?" — indagou ele em ânsia radical.

Sou a soma dos quadrados dos catetos.

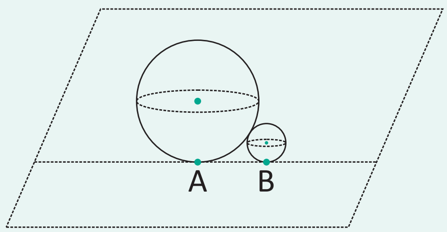
Mas pode me chamar de hipotenusa."

(Millôr Fernandes. Trinta Anos de Mim Mesmo.)

A Incógnita se enganou ao dizer quem era. Para atender ao Teorema de Pitágoras, deveria dar a seguinte resposta:

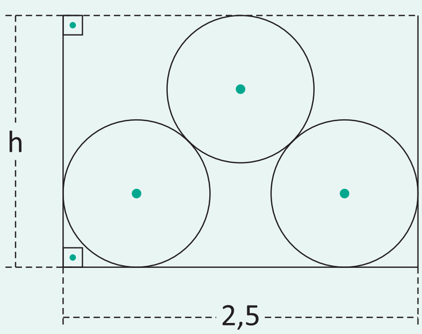
- **A** "Sou a soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa."
- **B** "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa."
- **C** "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa."
- **D** "Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa."

15| FUVEST No jogo de bocha, disputado num terreno plano, o objetivo é conseguir lançar uma bola de raio 8 o mais próximo possível de uma bola menor, de raio 4. Num lançamento, um jogador conseguiu fazer com que as duas bolas ficassem encostadas, conforme ilustra a figura a seguir. A distância entre os pontos A e B, em que as bolas tocam o chão, é:



- **A** 8
- **B** $6\sqrt{2}$
- **C** $8\sqrt{2}$
- **D** $4\sqrt{3}$
- **E** $6\sqrt{3}$

16| FUVEST Um lenhador empilhou 3 troncos de madeira num caminhão de largura 2,5 m, conforme a figura a seguir. Cada tronco é um cilindro reto, cujo raio da base mede 0,5 m. Logo, a altura h, em metros, é:

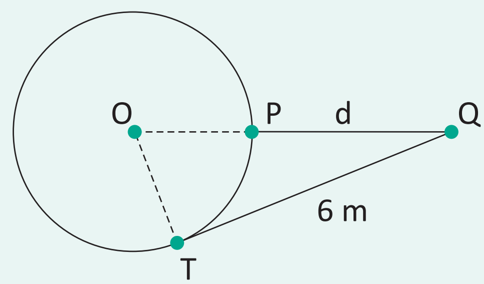


- **A** $\dfrac{(1+\sqrt{7})}{2}$
- **B** $\dfrac{(1+\sqrt{7})}{3}$
- **C** $\dfrac{(1+\sqrt{7})}{4}$
- **D** $1+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$
- **E** $1+\left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$

17| UNESP Duas rodovias retilíneas A e B se cruzam formando um ângulo de 45°. Um posto de gasolina se encontra na rodovia A, a 4 km do cruzamento. Pelo posto passa uma rodovia retilínea C, perpendicular à rodovia B. A distância do posto de gasolina à rodovia B, indo através de C, em quilômetros, é:

- **A** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$
- **B** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
- **C** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- **D** $\sqrt{2}$
- **E** $2\sqrt{2}$

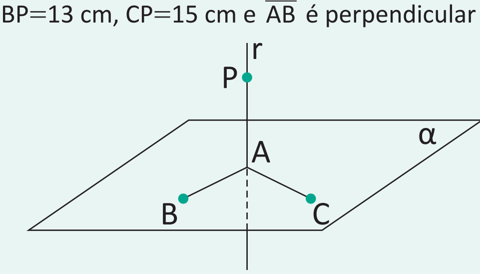
18| UNESP Em uma residência, há uma área de lazer com uma piscina redonda de 5 m de diâmetro. Nessa área há um coqueiro, representado na figura por um ponto Q.



Se a distância de Q (coqueiro) ao ponto de tangência T (da piscina) é 6 m, a distância d = QP, do coqueiro à piscina, é:

- **A** 4 m
- **B** 4,5 m
- **C** 5 m
- **D** 5,5 m
- **E** 6 m

19| UEL Na figura a seguir, tem-se o ponto P que dista 12cm do plano α. Traça-se por P a reta r, perpendicular a α e que o intercepta em A. Os pontos B e C, de α, são tais que BP=13 cm, CP=15 cm e $\overline{AB}$ é perpendicular a $\overline{AC}$.



Nessas condições, a medida de $\overline{BC}$, em centímetros, é igual a:

- **A** $3\sqrt{5}$
- **B** $\sqrt{93}$
- **C** $\sqrt{106}$
- **D** 11
- **E** 12

INTRODUÇÃO

Uma função f: IR → IR é chamada de função exponencial de base **a** se, e somente se, for expressa pela seguinte lei de formação.

$$f(x) = a^x, \text{ com } a \in IR_+^* \text{ e } a \neq 1$$

Assim, são exemplos de funções exponenciais:

$f(x) = 2^x$

$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$f(x) = (\sqrt{5})^x$

OBSERVAÇÕES:

- A exigência da base **a** ser diferente de 1 para se definir a função $f(x) = a^x$ está no fato de que para $a = 1$, teríamos $f(x) = 1^x = 1$, ou seja, uma função constante.
- A exigência da base **a** ser positiva para se definir a função $f(x) = a^x$ está no fato de que se, por exemplo, para $a = -4$ e $x = \frac{1}{2}$, teríamos $f(x) = (-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$, que não é um número real.

A partir das funções exponenciais do tipo $f(x) = a^x$, podemos obter outras funções exponenciais mais complexas.

Por exemplo:

$f(x) = 2^{x-1}$

$g(x) = 2 + 3^x$

$h(x) = 3.\left(\frac{1}{2}\right)^{5x}$

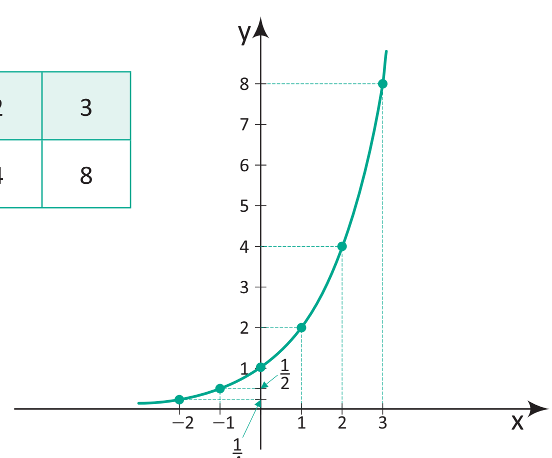
GRÁFICO CARTESIANO

O formato do gráfico cartesiano de uma função do tipo $f(x) = a^x$, com $a \in IR_+^*$ e $a \neq 1$, é chamado de curva exponencial. Para ilustrá-lo, considera-se dois casos:

- **1º caso:** $a > 1$, por exemplo, a função $f(x) = 2^x$.

Para esboçar esse gráfico, pode-se montar uma tabela numérica escolhendo alguns valores arbitrários para x e calculando os correspondentes valores de y.

x	−2	−1	0	1	2	3
$f(x) = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

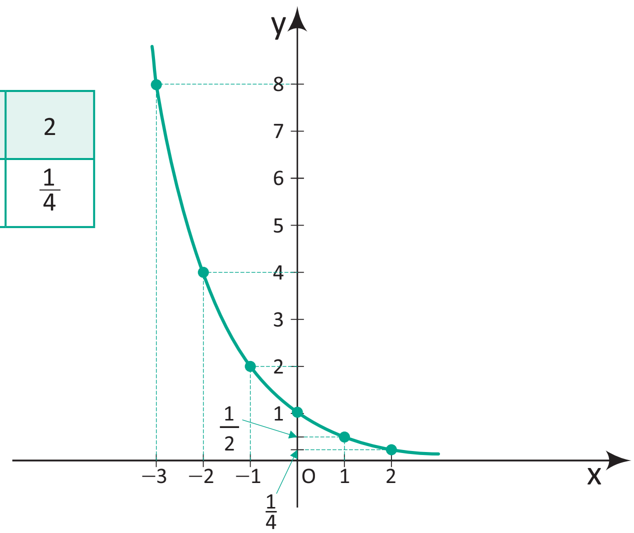


Assim, para o gráfico de $f(x) = 2^x$, temos que:

- O seu domínio é o conjunto D(f) = IR.
- A sua imagem é o conjunto $Im(f) = IR_+^*$.
- É uma função crescente e injetora.
- Passa pelo ponto (0, 1).
- Quando x aumenta indefinidamente, temos que y = f(x) também aumenta indefinidamente.
- Quando x diminui indefinidamente, temos que y = f(x) se aproxima cada vez mais de zero.
- **2º caso:** $0 < a < 1$, por exemplo, a função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Para esboçar esse gráfico, pode-se montar uma tabela numérica escolhendo alguns valores arbitrários para x e calculando os correspondentes valores de y.

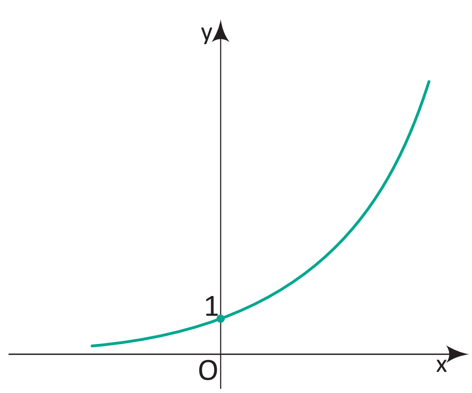
x	−3	−2	−1	0	1	2
$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



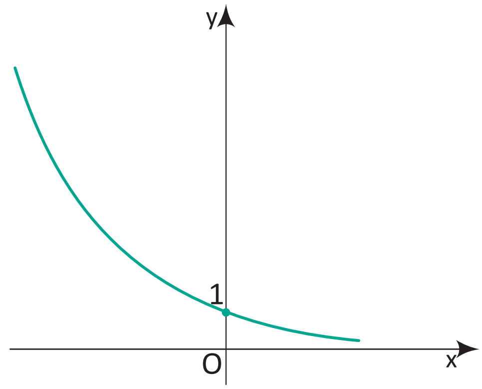
- Assim, para o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, temos que:
- O seu domínio é o conjunto D(f) = IR.
- A sua imagem é o conjunto $Im(f) = IR_+^*$.
- É uma função decrescente e injetora.
- Passa pelo ponto (0, 1).
- Quando x aumenta indefinidamente, temos que y = f(x) se aproxima cada vez mais de zero.
- Quando x diminui indefinidamente, temos que y = f(x) aumenta indefinidamente.

Assim, de maneira geral, os gráficos de funções do tipo $f(x) = a^x$, comportam-se de acordo com as ilustrações a seguir:

- Para $a > 1$



- Para $0 < a < 1$



Portanto, para a função exponencial f: IR → IR expressa por $f(x) = a^x$, são válidas as seguintes propriedades:

- O gráfico de f é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.
- O gráfico de f intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1), pois $f(0) = a^0 = 1$.
- O gráfico de f não intercepta o eixo das abscissas, pois $f(x) = a^x > 0$ para todo $x \in D(f)$.
- $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, para todo $\{x_1, x_2\} \subset D(f)$ pois, f é uma função injetora.
- Para $a > 1$, os valores de $y = f(x)$ se aproximam cada vez de zero quando x assume valores negativos cada vez menores.
- Para $0 < a < 1$, os valores de $y = f(x)$ se aproximam cada vez de zero quando x assume valores positivos cada vez maiores.
- A imagem de f é o conjunto $Im(f) = \{y \in IR \mid y > 0\}$.

OBSERVAÇÃO:

- e = 2,71828... é um número irracional conhecido por número de Euler. As funções exponenciais que envolvem as potências de e são extremamente importantes pois, descrevem vários fenômenos estudados nas Ciências Sociais, Economia e Ciências Naturais.

EQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Equação exponencial na variável x é toda equação que possui a variável x no expoente de pelo menos uma potência.

São exemplos de equações exponenciais:

A) $5^x = 25$

B) $3^{x+1} = 27^x$

C) $4^x - 2^x - 7 = 0$

De maneira geral, para resolver as equações exponenciais, temos que transformá-la numa igualdade de potências de mesma base, e em seguida, utilizar a seguinte propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2, \text{ com } a \in IR_+^* \text{ e } a \neq 1$$

INEQUAÇÕES EXPONENCIAIS

Inequação exponencial na variável x é toda inequação que possui a variável x no expoente de pelo menos uma potência. São exemplos de inequações exponenciais:

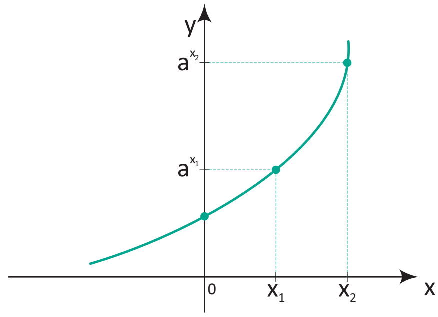
A) $2^x > 128$

B) $5^{x+1} \leq 125^{-x}$

C) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{243}{32}$

De maneira geral, para resolver as inequações exponenciais, temos que transformá-la numa igualdade de potências de mesma base, e em seguida, utilizar uma das seguintes propriedades:

- **1º caso:** Para a função exponencial $f(x) = a^x$, com $a > 1$, temos o seguinte gráfico:

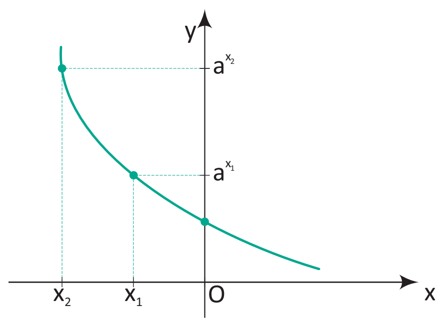


Nesse caso, observe que a função f é crescente, assim, temos que:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$$

Portanto, para resolver uma inequação de base $a > 1$, basta conservar a desigualdade.

- **2º caso:** Para a função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 a < 1$, temos o seguinte gráfico:



Nesse caso, observe que a função f é decrescente, assim, temos que:

$$a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1$$

Portanto, para resolver uma inequação de base $0 < a < 1$, basta inverter a desigualdade.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Estudos indicam que o valor de certo modelo de automóvel zero, em reais, daqui a t anos é dado pela função exponencial $V(t) = 40.000.(0,8)^t$.

Nessas condições, determine:

A O seu valor inicial, em reais.

B O seu valor daqui a 3 anos, em reais.

Resolução:

A *Para determinar seu valor inicial, basta fazer $t = 0$.*
Assim, temos $V(0) = 40.000.0,8^0 = 40.000$ reais.

B *Para determinar seu valor daqui a 3 anos, basta fazer $t = 3$.*
Assim, $V(3) = 40.000.0,8^3 = 20.480$ reais.

02. Na função $f(x) = b.a^x$, com a e b constantes reais positivas, temos que $f(1) = 6$ e $f(3) = 54$, determine:

A Os valores numéricos das constantes a e b.

B O valor de $f(-1)$.

C O valor de x para $f(x) = \frac{2}{81}$.

Resolução:

A *Na função $f(x) = b.a^x$, temos que:*

$f(1) = 6 \Rightarrow b.a^1 = 6 \Rightarrow b.a = 6$

$f(3) = 54 \Rightarrow b.a^3 = 54 \Rightarrow b.a.a^2 = 54 \Rightarrow 6a^2 = 54\ a = \pm 3$
$\therefore a = 3$ e $b = 2$

B *Na função $f(x) = 2.3^x$, temos que:*

$$f(-1) = 2.(3)^{-1} = 2.\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

C *Na função $f(x) = 2.3^x$, temos que:*

$$2.3^x = \frac{2}{81} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{81} \Rightarrow 3^x = 3^{-4} \Rightarrow x = -4$$

03. Resolva, em IR, as seguintes equações exponenciais:

A $2^x = 128$

B $125^x = 5^{x+8}$

C $(\sqrt{10})^x = 0{,}001$

D $6^{2x-1} = 3^x.2^x$

Resolução:

A *Na equação exponencial $2^x = 128$, observe que $128 = 2^7$. Daí, temos:*

$$2^x = 2^7 \Rightarrow x = 7 \therefore S = \{7\}$$

B *Na equação exponencial $125^x = 5^{x+8}$, observe que $125^x = (5^3)^x = 5^{3x}$. Daí, temos que:*

$$5^{3x} = 5^{x+8} \Rightarrow 3x = x + 8 \Rightarrow x = 4 \therefore S = \{4\}$$

C *Na equação exponencial $(\sqrt{10})^x = 0{,}001$, observe que $(\sqrt{10})^x = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^x = 10^{\frac{x}{2}}$ e que $0{,}001 = 10^{-3}$. Daí, temos que:*

$$10^{\frac{x}{2}} = 10^{-3} \Rightarrow \frac{x}{2} = -3 \Rightarrow x = -6 \therefore S = \{-6\}$$

D *Na equação exponencial $6^{2x-1} = 3^x.2^x$, observe que $3^x.2^x = (3.2)^x = 6^x$. Daí, temos:*

$$6^{2x-1} = 6^x \Rightarrow 2x - 1 = x \Rightarrow x = 1 \therefore S = \{1\}$$

04. Calcule os valores de x e y no sistema de equações a seguir:

$$\begin{cases} 2^x.2^y = 1 \\ 3^x.9^y = \frac{1}{9} \end{cases}$$

Resolução:

Na primeira equação do sistema, temos:

$$2^x.2^y = 1 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^0 \Rightarrow x + y = 0$$

Na segunda equação do sistema, temos:

$$3^x.9^y = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x.(3^2)^y = 3^{-2} \Rightarrow 3^x.3^{2y} = 3^{-2}$$

$$3^{x+2y} = 3^{-2} \Rightarrow x + 2y = -2$$

Assim, podemos obter os valores de x e y resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

Portanto, temos que $x = 2$ e $y = -2$.

05. Determine o conjunto solução da inequação exponencial $2^{2x+2} - 5.2^x + 1 \leq 0$.

Resolução:

$$2^{2x+2} - 5.2^x + 1 \leq 0 \Rightarrow 2^{2x}.2^2 - 5.2^x + 1 \leq 0$$

$$4.(2^x)^2 - 5.2^x + 1 \leq 0$$

Fazendo $2^x = y$, temos que:

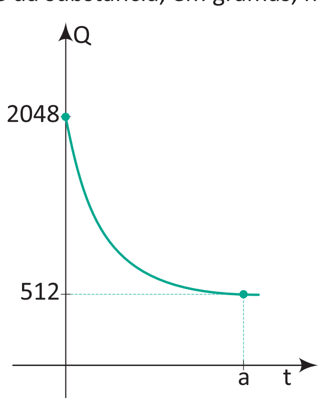
$$4y^2 - 5y + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq y \leq 1$$

$$\frac{1}{4} \leq 2^x \leq 1 \Rightarrow 2^{-2} \leq 2^x \leq 2^0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0.$$

Portanto, $S = [-2, 0]$.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| VUNESP Uma certa substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = k.2^{-0,5t}$, em que k é uma constante, t indica o tempo em minutos e Q(t) indica a quantidade da substância, em gramas, no instante t.



Considerando os dados desse processo mostrados no gráfico, determine os valores de K e de a.

02| Certa população de insetos cresce de acordo com a expressão $N = 300.2^{\frac{t}{5}}$, sendo t o tempo em meses e N o número de insetos na população após o tempo t.

Nessa situação, responda os itens a seguir.

A Qual é a quantidade inicial de insetos.

B Qual é a quantidade de insetos após 10 meses?

C Quantos meses são necessários para que a população de insetos atinja 4.800 indivíduos?

03| UNICAMP Suponha que o número de indivíduos de uma determinada população seja dado pela função: $F(t) = a.2^{-bt}$, onde a variável t é dada em anos e a e b são constantes.

A Encontre as constantes a e b de modo que a população inicial ($t = 0$) seja igual a 1.024 indivíduos e a população após 10 anos seja a metade da população inicial.

B Qual o tempo mínimo para que a população se reduza a $\frac{1}{8}$ da população inicial?

C Esboce o gráfico da função F(t) para $t \in [0, 40]$

04| Resolva as seguintes equações exponenciais:

A $2^x = 32$

B $10^{x+1} = 0{,}001$

C $8^x = 9^x$

D $36^x = 216$

E $9^x = 243$

F $5^{2x-8} = 1$

05| Bruna observou que o número de bactérias de uma cultura, t horas após do início de certo experimento, é dada pela expressão a seguir:

$N(t) = 1.500.2^{0{,}2t}$

Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 24.000 bactérias?

06| UERJ Em um município, após uma pesquisa de opinião, constatou-se que o número de eleitores dos candidato A e B variava em função do tempo t, em anos, de acordo com as seguintes funções:

$A(t) = 2.10^5.(1{,}6)^t$ e $B(t) = 4.10^5.(0{,}4)^t$

Considere as estimativas corretas e que $t = 0$ refere-se ao dia 1 de janeiro de 2.000.

A Calcule o número de eleitores dos candidatos A e B em 1 de janeiro de 2.000.

B Determine em quantos meses os candidatos terão o mesmo número de eleitores.

C Mostre que, em 1 de outubro de 2.000, a razão entre os números de eleitores de A e B era maior que 1.

07| UNICAMP O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha.3^{\beta t}$ onde T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de −18°C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0°C após 90 minutos e chegou a −16°C após 270 minutos.

A Encontre os valores numéricos das constantes α e β.

B Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$°C superior à temperatura ambiente.

08| Resolva as seguintes inequações exponenciais:

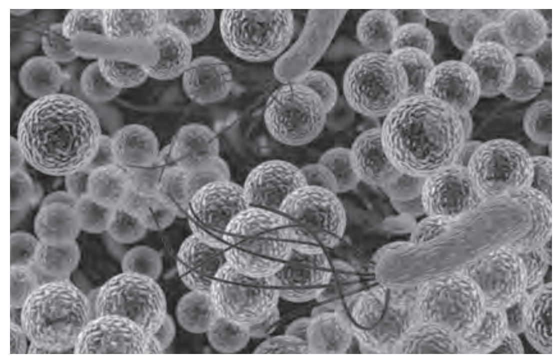
A $3^{2x-3} > 3^{x+2}$

B $\left(\frac{1}{3}\right)^{4x-1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{5x-9}$

C $4^{x^2} < 4^{25}$

D $(0{,}3)^{x^2-x} \leq (0{,}3)^{12}$

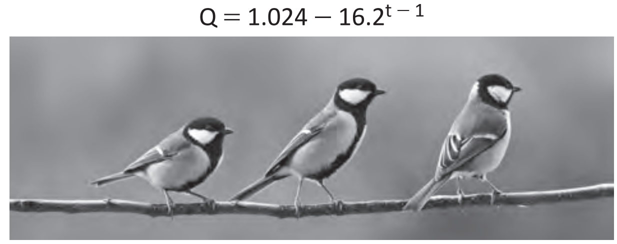
09| A quantidade N de micro-organismos patogênicos de uma cultura é dada em função do tempo t, em horas, pela função exponencial $N(t) = 200.3^{0{,}4t}$.



Após quantas horas inteiras essa cultura será superior à 5.400 indivíduos?

10| A população de pássaros de uma região de Goiânia está diminuindo em devido a construção de um condomínio horizontal. Suponha que a quantidade Q de pássaros após t semanas do início das obras seja dada pela seguinte função:

$$Q = 1.024 - 16.2^{t-1}$$



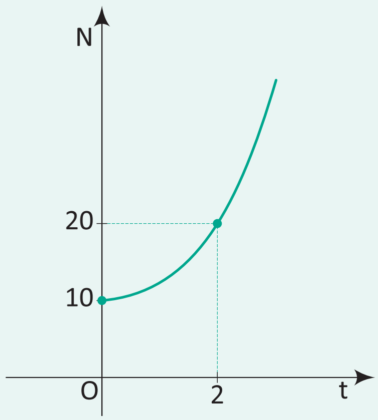
Nessas condições, responda os itens a seguir.

A Quantos pássaros viviam nessa região antes do início das obras desse condomínio?

B Qual é quantidade mínima de semanas são necessárias para que a população de pássaros não seja maior que 768 pássaros?

T ENEM E VESTIBULARES

01| **UFRN** A pedido do seu orientador, um bolsista de um laboratório de biologia construiu o gráfico a seguir a partir dos dados obtidos no monitoramento do crescimento de uma cultura de micro-organismos.



Analisando o gráfico, o bolsista informou ao orientador que a cultura crescia segundo o modelo matemático, $N = k.2^{at}$ com t em horas e N em milhares de micro-organismos. Para constatar que o modelo matemático apresentado pelo bolsista estava correto, o orientador coletou novos dados com $t = 4$ horas e $t = 8$ horas. Para que o modelo construído pelo bolsista esteja correto, nesse período, o orientador deve ter obtido um aumento na quantidade de micro-organismos de:

- **A** 80.000
- **B** 160.000
- **C** 40.000
- **D** 120.000

02| **ESPCEX** Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão $N(t) = N_0.2^{kt}$, sendo N_0 a população no início do tratamento, N(t), a população após t dias de tratamento e k uma constante, que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial. Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a:

- **A** 5^{-1}
- **B** -5^{-1}
- **C** 10
- **D** 10^{-1}
- **E** -10^{-1}

03| **ESPCEX** A inequação

$$10^x + 10^{x+1} + 10^{x+2} + 10^{x+3} + 10^{x+4} < 11111$$

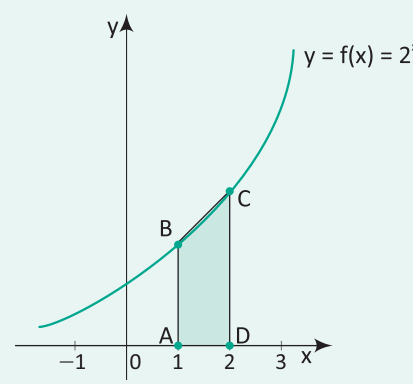
em que x é um número real:

- **A** Não tem solução.
- **B** Tem apenas uma solução.
- **C** Tem apenas soluções positivas.
- **D** Tem apenas soluções negativas.
- **E** Tem soluções positivas e negativas.

04| **ACAFE** Um dos perigos da alimentação humana são os micro-organismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a Salmonella. Atitudes simples como lavar as mãos, armazenar os alimentos em locais apropriados ajudam a prevenir a contaminação pelos mesmos. Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos, pode-se concluir que o tempo que a população de 100 micro-organismos passará a ser composta de 3.200 indivíduos é:

- **A** 1 h e 35 min
- **B** 1 h e 40 min
- **C** 1 h e 50 min
- **D** 1 h e 55 min

05| **UFJF** Seja f: IR → IR uma função definida por $f(x) = 2^x$. Na figura abaixo está representado, no plano cartesiano, o gráfico de f e um trapézio ABCD, retângulo nos vértices A e D e cujos vértices B e C estão sobre o gráfico de f.



A medida da área do trapézio ABCD é igual a:

- **A** 2
- **B** $\frac{8}{3}$
- **C** 3
- **D** 4
- **E** 6

06| UFSJ A intersecção dos gráficos das funções $h(x) = 2^x + 1$ e $s(x) = 2^{x+1}$ é o ponto que tem a soma de suas coordenadas igual a:

A) 2 e pertence à reta $y = x + 2$
B) 1 e pertence à reta $y = x + 1$
C) 2 e pertence à reta $y = x - 2$
D) 1 e pertence à reta $y = x - 1$

07| UDESC Se x é solução da equação $3^{4x-1} + 9^x = 6$, então x^2 é igual a:

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{1}{2}$
D) 1
E) 27

08| PUC A equação $2^{x^2-14} = \frac{1}{1024}$ tem duas soluções reais. A soma das duas soluções é:

A) -5
B) 0
C) 2
D) 14
E) 1.024

09| UFU O conjunto dos números reais x que satisfazem a inequação: $\left(\frac{1}{2^x}\right)^{3x+1} .4^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}$ é:

A) $\left\{x \in IR \mid \frac{1}{5} \leq x \leq 1\right\}$
B) $\varnothing$
C) $\{x \in IR \mid 1 \leq x \leq 5\}$
D) $\{x \in IR \mid x \leq 1 \text{ ou } x \geq 5\}$
E) $\left\{x \in IR \mid x \leq \frac{1}{5} \text{ ou } x \geq 1\right\}$

10| UNESP A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água $(t = 0)$ até o instante em que mergulhou $(t = T)$, foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático

$$h(t) = 4t - t.2^{0,2t}$$

com t em segundos, h(t) em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi:

A) 1
B) 2
C) 4
D) 8
E) 10

11| FUVEST Seja $f(x) = a + 2^{bx+c}$, em que a, b e c são números reais. A imagem de f é a semirreta $]-1, \infty[$ e o gráfico de f intercepta os eixos coordenados nos pontos (1, 0) e $\left(0, -\frac{3}{4}\right)$. Então, o produto abc vale:

A) 4
B) 2
C) 0
D) -2
E) -4

12| ESPM O valor de y no sistema $\begin{cases}(0,2)^{5x+y} = 5 \\ (0,5)^{2x-y} = 2\end{cases}$ é igual a:

A) $\frac{-5}{2}$
B) $\frac{2}{7}$
C) $\frac{-2}{5}$
D) $\frac{3}{5}$
E) $\frac{3}{7}$

13| PUC O valor de certo equipamento, comprado por R$ 60.000,00, é reduzido à metade a cada 15 meses. Assim, a equação $V(t) = 60.000.2^{-\frac{t}{15}}$, onde t é o tempo de uso em meses e V(t) é o valor em reais, representa a variação do valor desse equipamento. Com base nessas informações, é correto afirmar que o valor do equipamento após 45 meses de uso será igual a:

A) R$ 3.750,00
B) R$ 7.500,00
C) R$ 10.000,00
D) R$ 20.000,00

14| MACK O valor de x na equação $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{2x-2} = \frac{1}{27}$

A) Tal que $2 < x < 3$.
B) Negativo.
C) Tal que $0 < x < 1$.
D) Múltiplo de 2.
E) 3.

15| UDESC O Conjunto solução da inequação $\left[\sqrt[3]{(2^{x-2})}\right]^{x+3} > 4^x$ é:

A) $S = \{x \in IR \mid -1 < x < 6\}$

B) $S = \{x \in IR \mid x < -6 \text{ ou } x > 1\}$

C) $S = \{x \in IR \mid x < -1 \text{ ou } x > 6\}$

D) $S = \{x \in IR \mid -6 < x < 1\}$

E) $S = \{x \in IR \mid x < -\sqrt{6} \text{ ou } x > \sqrt{6}\ \}$

16| CFTCE O conjunto verdade da equação $2^x - 2^{-x} = 5(1 - 2^{-x})$ é:

A) {1, 4}

B) {1, 2}

C) {0, 1}

D) {0, 2}

E) { }

17| FGV A raiz da equação exponencial

$(5^x - 5\sqrt{3})(5^x + 5\sqrt{3}) = 50$ é:

A) $-\frac{2}{3}$

B) $-\frac{3}{2}$

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{1}{2}$

18| UFJF Dada a equação $2^{3x-2} \cdot 8^{x+1} = 4^{x-1}$, podemos afirmar que sua solução é um número:

A) Natural

B) Maior que 1

C) De módulo maior do que 1

D) Par

E) De módulo menor do que 1

19| UFPB O total de indivíduos, na n-ésima geração, de duas populações P e Q, é dado, respectivamente, por $P(n) = 4^n$ e $Q(n) = 2^n$. Sabe-se que, quando $P(n)/Q(n) \geq 1.024$, a população Q estará ameaçada de extinção. Com base nessas informações, essa ameaça de extinção ocorrerá a partir da:

A) Décima geração.

B) Nona geração.

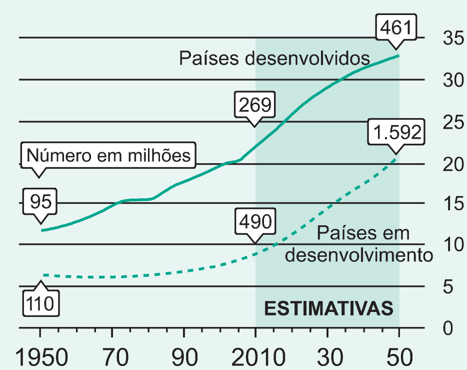
C) Oitava geração.

D) Sétima geração.

E) Sexta geração.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO

A população mundial está ficando mais velha, os índices de natalidade diminuíram e a expectativa de vida aumentou. No gráfico seguinte, são apresentados dados obtidos por pesquisa realizada pela Organização das Nações Unidas (ONU), a respeito da quantidade de pessoas com 60 anos ou mais em todo o mundo. Os números da coluna da direita representam as faixas percentuais. Por exemplo, em 1.950 havia 95 milhões de pessoas com 60 anos ou mais nos países desenvolvidos, número entre 10% e 15% da população total nos países desenvolvidos.



Fonte: Perspectivas da População mundial, ONU, 2009

Disponível em: www.economist.com.

Acesso em: 9 jul. 2.009 (adaptado).

20| ENEM Suponha que o modelo exponencial $y = 363\ e^{0,03x}$, em que $x = 0$ corresponde ao ano 2.000, $x = 1$ corresponde ao ano 2.001, e assim sucessivamente, e que y é a população em milhões de habitantes no ano x, seja usado para estimar essa população com 60 anos ou mais de idade nos países em desenvolvimento entre 2.010 e 2.050. Desse modo, considerando $e^{0,3} = 1,35$, estima-se que a população com 60 anos ou mais estará, em 2.030, entre:

A) 490 e 510 milhões

B) 550 e 620 milhões

C) 780 e 800 milhões

D) 810 e 860 milhões

E) 870 e 910 milhões

GABARITOS

FRENTE A

PRISMAS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 18)

01| $D = \sqrt{29}$ cm; $A_T = 52$ cm²; $V = 24$ cm³

02|

a) 6 dm, 8 dm e 24 dm

b) 1.152 dm³

c) 768 dm²

03| 80.000 litros

04| 6 m³

05| 2 dm, 4 dm e 8 dm

06| $V = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm³ ; $A_L = 27$ cm²

07| 7 m

08|

a) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ cm²

b) 45 cm²

c) $\frac{90 + 9\sqrt{3}}{2}$ cm²

d) $\frac{45\sqrt{3}}{4}$ cm³

09| $200(1 + 3\sqrt{3})$ cm²

10| 60°

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 19)

01| E	06| C	11| A	16| A
02| A	07| E	12| E	17| E
03| C	08| A	13| B	18| E
04| D	09| B	14| B	19| A
05| E	10| A	15| B	20| C

FRENTE A

CILINDROS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 27)

01| $A_L = 9\pi$ m²; $V = 54\pi$ m³

02|

a) 400π m²

b) 400 m²

03|

a) $4\pi R^2$

b) $6\pi R^2$

c) $2\pi R^3$

04| $\frac{3}{2}$

05| 8 cm

06| $4 - \sqrt{7}$ m

07| ficará totalmente submerso

08| 12π m²

09| $4\pi(\pi + 2)$ cm²

10| $\sqrt{\frac{\pi}{\pi - 1}}$ cm

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 27)

01| D	04| C	07| B	10| E
02| D	05| C	08| B	11| C
03| E	06| D	09| D	12| B

FRENTE A

CONES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 40)

01|

a) 5 cm

b) 9π cm²

c) 15π cm²

d) 24π cm²

e) 12π cm³

f) $\frac{6\pi}{5}$

02| $A_L = 50r$ m² e $V = \frac{125\pi\sqrt{3}}{3}$ m³

03| $A_L = 65\pi$ dm², $A_T = 90\pi$ dm² e $V = 100\pi$ dm²

04| 8 cm

05| $R = 3$ cm e $V = 9\pi\sqrt{3}$ cm³

06| $A_L = 100\pi$ cm², $A_T = 168\pi$ cm² e $V = 224\pi$ cm³

07| $R = 1$ cm, $A_S = \pi$ cm² e $V = 63\pi$ cm³

08| $V = 28\pi$ cm³ e $A_L = 42\pi$ cm²

09| 378π cm³

10| o volume do cone original é 8 vezes do cone obtido

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 40)

01| A	06| D	11| E	16| E
02| C	07| B	12| E	17| E
03| B	08| C	13| D	18| B
04| B	09| D	14| B	
05| C	10| C	15| C	

FRENTE B

PONTO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 49)

01|

a) 2° quadrante

b) 1° quadrante

c) 3° quadrante

d) 4° quadrante

02| C(2, 5) e D(0, 3)

03| F(6, 6)

04| acutângulo

05| retângulo

06| 14 ou −2

07| 3 km

08| (0,2)

09| (−1, −3) (3, 7) (3, 1)

10| (10, 17)

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 50)

01| E	06| B	11| C	16| B
02| E	07| A	12| A	17| B
03| B	08| E	13| C	18| A
04| A	09| C	14| E	19| C
05| E	10| B	15| C	20| C

FRENTE B

RETA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 64)

01|

a) $x - y + 3 = 0$

b) $x + y - 2 = 0$

c) $6x + 5y + 2 = 0$

02| $5x + 2y = 0$

03| $3x + y - 3 = 0$

04|

a) $y = \sqrt{3}x - 2$

b) $y = -x + 6$

05| $y = \frac{50}{101}x$

06|

a) Paralelas

b) Concorrentes

c) Perpendiculares

07|

a) $3x - 4y + 16 = 0$

b) $2x - 5y + 4 = 0$

08|

a) $3\sqrt{2}$ m

b) $4\sqrt{2}$ m

09|

a) $y = \frac{3}{2}x$

b) 6° dia e 9 cm

10|

a) $\left(\frac{18}{5}, \frac{41}{5}\right)$

b) $\frac{13\sqrt{5}}{5}$ unidades de comprimento

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 66)

01| C	05| D	09| D	13| B
02| D	06| C	10| E	14| C
03| C	07| B	11| D	15| A
04| E	08| E	12| C	16| E

FRENTE C

CONCEITOS BÁSICOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 74)

01|

a) V

b) V

c) V

d) F

e) V

02|

a) Infinitas retas.

b) Infinitas retas.

c) Uma única reta.

03|

a) F
b) F
c) V
d) V
e) V

04|

a) 3 retas
b) Nenhuma

05|

Paralelas
Concorrentes
Paralelas
Reversas
Reversas
Paralelas

06|

Duas retas paralelas não possuem ponto em comum, logo, não se encontram.

07|

a) F
b) F
c) V
d) F
e) F

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 76)

01|	B	05|	E	09|	B
02|	B	06|	A	10|	E
03|	C	07|	E		
04|	E	08|	A		

FRENTE C

ÂNGULOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 83)

01|

a) $43° 30'$
b) $32° 23''$
c) $14° 11' 38''$
d) $39° 17' 32''$
e) $21° 13' 36''$
f) $36° 17' 30''$
g) $21° 27' 24''$
h) $11° 31' 44''$

02|

a) $x = 44°$
b) $x = 20°$
c) $x = 48°$
d) $x = 15°$
e) $x = 50°$
f) $x = 18°$

03|

a) $x = 61°$
b) $x = 25°$
c) $x = 105°$
d) $x = 120°$

04|

a) $\alpha = 18°$
b) $\alpha = 38°$

05|

$x = 50°$, $y = 110°$ e $z = 70°$

06|

$13° 30'$

07|

18°

08|

144° e 36°

09|

a) 50°
b) 30°

10|

40° e 50°

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 84)

01|	A	05|	B	09|	B	13|	B
02|	E	06|	C	10|	C		
03|	B	07|	D	11|	D		
04|	E	08|	C	12|	E		

FRENTE C

ÂNGULOS DE DUAS RETAS E UMA TRANSVERSAL

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 87)

01|

a) $x = 105°$
b) $x = 41°$

02|

a) $x = 78°$
b) $x = 43°$

03|

a) $x = 24°$
b) $x = 36°$

04|

128°

05|

$x = 35°$

06|

75°

07|

60°

08|

a) 183°
b) 180°

09|

a) 105°
b) $x = 18°$ e $y = 30°$

10|

$x = 70°$

11|

a) $x = 10°$ e $y = 150°$
b) $x = 64°$
c) $x = 34°$
d) $\alpha = 68°$

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 90)

01|	A	04|	E	07|	A	10|	D
02|	B	05|	B	08|	E		
03|	C	06|	A	09|	E		

FRENTE C

TRIÂNGULOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 101)

01|

Não, pois, $21 > 10 + 7$.

02|

10, 15 ou 20

03|

32

04|

a) 4 triângulos.
b) Nenhum triângulo é equilátero e dois são isósceles.

05|

a) Equilátero e acutângulo.
b) Isósceles e acutângulo.
c) Escaleno e retângulo.
d) Escaleno e Obtusângulo.

06|

$x = 20°$, o triângulo é equilátero.

07|

58°

08|

15, 20 e 25

09|

a) $x = 41°$
b) $x = 20°$
c) $x = 132°$
d) $x = 110°$
e) $x = 139°$
f) $x = 52°$

10|

a) 900°
b) 180°

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 103)

01|	E	06|	D	11|	A	16|	A
02|	E	07|	D	12|	D	17|	D
03|	C	08|	C	13|	D	18|	A
04|	A	09|	C	14|	A	19|	A
05|	C	10|	C	15|	B	20|	E

GABARITOS

FRENTE C

TEOREMA DE TALES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 108)

01|

10 e 30

02|

a) 200 m

b) 12 minutos

03|

a) $x = 12$

b) $x = 12$

c) $x = 12$

d) $x = 1$

04|

1,76 m

05|

10 cm

06|

2,6; 3,9 e 6,5

07|

a) $x = 3$

b) $x = 10$

c) $x = 30$

d) $x = 2$

08|

a) $x = 21$

b) $x = 8$

09|

a) $\overline{AB} = 4$ cm

b) $\overline{AB} = 18$ cm

10|

20

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 111)

01|	B	04|	E	07|	D	10|	B
02|	B	05|	B	08|	B	11|	A
03|	B	06|	C	09|	C	12|	C

FRENTE C

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 117)

01|

a) I e III (L. A. L.)

b) I e III (A. L. A.)

c) I e III (caso especial – hipotenusa cateto)

02|

Os triângulos ABD e BCD, são congruentes, pois admitem os três lados congruentes (L. L. L.).

03|

$x = 8$ e $y = 7$

04|

a) $x = 12$

b) $x = 15$

05|

a) $x = 12$ e $y = \frac{64}{3}$

b) $x = 14$ e $y = 20$

06|

a) $x = \frac{9}{4}$

b) $x = \frac{63}{2}$

07|

$\frac{24}{7}$

08|

$2p = 8$

09|

$x = 3$ e $y = 12$

10|

$x = 14$ e $y = 8$

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 119)

01|	B	06|	D	11|	D	16|	A
02|	B	07|	D	12|	B	17|	B
03|	E	08|	A	13|	D	18|	E
04|	B	09|	E	14|	A	19|	A
05|	D	10|	B	15|	E	20|	D

FRENTE C

RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 125)

01|

a) $x = 13$

b) $x = \frac{221}{4}$

c) $x = \sqrt{29}$

d) $x = 7$

e) $x = 6\sqrt{3}$

f) $x = 6\sqrt{2}$

g) $x = 29$

h) $x = 15$

02|

AD = 13 cm

03|

30 mm

04|

25 m

05|

a) $x = 12$

b) $x = 4$

c) $x = 8\sqrt{3}$

d) $x = \frac{12}{5}$

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 127)

01|	D	06|	A	11|	B	16|	E
02|	C	07|	C	12|	D	17|	E
03|	D	08|	A	13|	C	18|	A
04|	B	09|	C	14|	E	19|	C
05|	B	10|	A	15|	C	20|	A

FRENTE D

FUNÇÃO EXPONENCIAL

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (PÁG. 135)

01| $k = 2.048$ e $a = 4$

02|

a) 300 insetos

b) 1.200 insetos

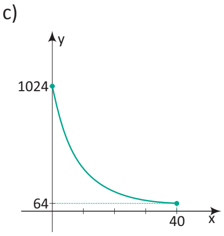
c) 20 meses

03|

a) $a = 1.024$ e $b = 0{,}1$

b) 30 anos

c)



04|

a) $S = \{5\}$

b) $S = \{-4\}$

c) $S = \{0\}$

d) $S = \{1{,}5\}$

e) $S = \{2{,}5\}$

f) $S = \{4\}$

05| 20 horas

06|

a) A: 200.000 eleitores e B: 400.000 eleitores

b) 6 meses

c) demostração

07|

a) $\beta = -\frac{1}{90}$ e $\alpha = 54$

b) 360 minutos

08|

a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 8\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < 5\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 4\}$

09|

8 horas

10|

a) 1.016 pássaros

b) 5 semanas

ENEM E VESTIBULARES (PÁG. 137)

01|	D	06|	A	11|	A	16|	D
02|	B	07|	B	12|	E	17|	C
03|	D	08|	B	13|	B	18|	E
04|	B	09|	A	14|	D	19|	A
05|	C	10|	E	15|	C	20|	E

"Conte-me e eu esqueço.
Mostre-me e eu apenas me lembro.
Envolva-me e eu compreendo."

Confúcio

prepara enem

62 3877 3223 | 3877 3222

WWW.GRUPOPREPARAENEM.COM.BR

ISBN 978-85-88249-28-8

CLASSIS EDITORA