# MATEMÁTICA

**FRENTE:** MATEMÁTICA IV

**PROFESSOR(A):** ISAAC LUÍS

**EAD – ITA**

**AULAS 08 A 11**

**ASSUNTO:** PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS E PROPRIEDADES

## Resumo Teórico

## Progressão Geométrica – Definições

Exemplos:

Uma progressão geométrica (ou PG, abreviadamente) é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por uma constante q, denominada razão da PG.

A sequência numérica abaixo, por exemplo, é uma PG de razão q = 2:

$$(2,4,8,16,32,64,128,\ldots).$$

## A Propriedade Fundamental das PG´S

**Teorema:** Sejam a, b e c números reais, com $a \neq 0$. Então, (a,b,c) é uma PG se, e somente se, $b^2 = ac$.

Prova. ($\Rightarrow$) Suponha que (a,b,c) é uma PG de razão q. Se q = 0, devemos ter b = c = 0, de modo que $0^2 = 0 = a \times 0$, e o resultado segue. Suponha $q \neq 0$. Nesse caso, temos b = aq e c = bq, com b e c não nulos. Daí, note que

$$\frac{b}{c} = \frac{aq}{bq} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = ac$$

($\Leftarrow$) Se $b^2 = ac$ (*), com $a \neq 0$, afirmamos que (a,b,c) é uma PG de razão $b/a$. De fato, basta notar que

$$\begin{cases} a \times \dfrac{b}{a} = b; \\ b \times \dfrac{b}{a} = \dfrac{b^2}{a} \overset{(*)}{=} \dfrac{ac}{a} = c. \end{cases}$$

**Exemplo 1:** (Professor Isaac Luís) Mostre que não existem três ou mais *repunits* em PG não constante com razão inteira.

Solução: Utilizaremos o seguinte

Lema: Se $1_m$ e $1_n$ são *repunits*, então o produto $1_m \times 1_n$ possui exatamente m + n – 1 algarismos.

Prova. Note que $1_m < 2 \times 10^{m-1}$ e $1_n < 2 \times 10^{n-1}$, de modo que

$$1_m \times 1_n < 4 \times 10^{m+n-2} < 10^{m+n-1},$$

donde concluímos que $1_m \times 1_n$ possui, no máximo, m + n – 1 algarismos. Por outro lado, temos $1_m > 10^{m-1}$ e $1_n > 10^{n-1}$; daí,

$$1_m \times 1_n > 10^{m+n-2}$$

de maneira que $1_m \times 1_n$ possui, no mínimo, m + n – 1 algarismos, o que encerra a prova.

Agora, suponha, por absurdo, que existem três *repunits* em PG não constante com razão inteira **q**, digamos $(1_m, 1_n, 1_p)$. Perceba que $0 < q \neq 1$, e assim, a PG em questão é crescente, de modo que m < n < p. Pela propriedade fundamental, temos

$$1_n^2 = 1_m \times 1_p,$$

e o lema que acabamos de provar nos garante que

$$2n - 1 = m + p - 1 \Rightarrow 2n = m + p \ (*).$$

Veja que $1_n \mid 1_p$, já que $1_n \times q = 1p$. Como $1_p = 1_{p-n} \times 10^n + 1_n$, inferimos que $1_n \mid 1_{p-n} \times 10^n$. Ademais, desde que mdc($1_n$, $10^n$ ) = 1, segue-se que $1_n \mid 1_{p-n}$. Daí, teríamos

$$n \leq p - n \Rightarrow 2n \overset{(*)}{=} m + p \leq p,$$

claramente uma impossibilidade.

**Exemplo 2:** (Professor Isaac Luís) Sejam a, b e c números reais não todos nulos tais que a + b + c = S e abc = P. Se qualquer terna formada com esses números constitui uma progressão geométrica, pergunta-se: qual é o valor de $\dfrac{P}{S^3}$ ?

A) 1

B) $\dfrac{1}{3}$

C) $\dfrac{1}{9}$

D) $\dfrac{1}{27}$

E) $\dfrac{1}{81}$

**Solução.** Suponhamos, sem perda de generalidade, $a \neq 0$ e consideremos, em particular, as PG´S (a,b,c), (b,c,a) e (c,a,b). Repare que, se b = 0, a PG (b,c,a) seria formada apenas por zeros, o que não ocorre. Daí, $b \neq 0$, e, de modo similar, conclui-se que $c \neq 0$. Pela propriedade fundamental, temos

$$\begin{cases} b^2 = ac \Rightarrow b^3 = abc; \\ c^2 = ab \Rightarrow c^3 = abc; \\ a^2 = bc \Rightarrow a^3 = abc. \end{cases}$$

Assim, concluímos que $a^3 = b^3 = c^3 \Rightarrow a = b = c$. Para o que falta, fazemos

$$\frac{P}{S^3} = \frac{a}{(3a)^3} = \frac{a^3}{27a^3} = \frac{1}{27}$$

de maneira que devemos assinalar a alternativa **D**.

## O termo geral de uma PG

**Teorema:** Numa PG de primeiro termo $a_1$ e razão q, tem-se que

$$a_n = a_1 \times q^{n-1},$$

para todo $n \geq 1$.

Prova. Faremos indução sobre **n**. Se n = 1, temos

$$a_1 \times q^{1-1} = a_1 \times q^0 = a_1 \times 1 = a_1,$$

e a fórmula funciona nesse caso. Agora, suponha que esse resultado seja verdadeiro para algum $n \geq 1$. Por fim, note que

$$a_{n+1} = a_n \times q = (a_1 \times q^{n-1}) \times q = \\ = a_1 \times q^{(n+1)-1},$$

e nada mais há a fazer.

**Exemplo 3:** Obter a PG cujos elementos verificam as relações:

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + a_6 = 10 \\ a_3 + a_5 + a_7 = 30 \end{cases}$$

**Solução**. A PG procurada ficará absolutamente determinada quando encontrarmos seu primeiro termo $a_1$ e sua razão **q**. Pela fórmula do termo geral, podemos escrever

$$a_2 + a_4 + a_6 = a_1q + a_1q^3 + a_1q^5 = a_1\, q(1 + q^2 + q^4) = 10\ (*).$$

Por outro lado, temos

$$a_3 + a_5 + a_7 = a_1q^2 + a_1q^4 + a_1q^6 = a_1q^2\,(1 + q^2 + q^4) =$$
$$= q \times [a_1q(1 + q^2 + q^4)] \overset{(*)}{=} 10q = 30 \Rightarrow q = 3.$$

Substituindo em (*), obtemos

$$a_1 = \frac{10}{3 \times (1+9+81)} = \frac{10}{3 \times 91} = \frac{10}{273}$$

Logo, a PG requerida é a seguinte:

$$\left(\frac{10}{273}, \frac{10}{91}, \frac{30}{91}, \frac{90}{91}, \ldots\right).$$

## Propriedades das PG'S

Propriedade **1**: Numa PG finita de razão **q** com **n** termos, o produto dos extremos é igual ao produto de quaisquer dois termos equidistantes dos extremos.

Prova. Sejam $a_r$ e $a_s$ termos equidistantes dos extremos da PG em questão. Nesse caso, devemos ter

$$n + 1 = r + s \Rightarrow n - 1 = (r - 1) + (s - 1)\ (*).$$

Daí, pela fórmula do termo geral, podemos escrever

$$a_r \times a_s = (a_1 \times q^{r-1}) \times (a_1 \times q^{s-1}) =$$
$$= a_1 \times [a_1 \times q^{(r-1)+(s-1)}] \overset{(*)}{=} a_1 \times [a_1 \times q^{n-1}] = a_1 \times a_n.$$

Propriedade **2**: Numa PG de razão **q** com um número $n \geq 3$ ímpar de termos, o quadrado do termo médio é igual ao produto dos extremos.

Prova. Recorde que o termo médio possui índice $\frac{n+1}{2}$. Pela fórmula do termo geral, temos

$$a_{\frac{n+1}{2}} = a_1 + q^{\frac{n+1}{2}-1} = a_1 \times q^{\frac{n+1}{2}} \Rightarrow a^2_{\frac{n+1}{2}} = \left(a_1 \times q^{\frac{n+1}{2}}\right)^2 = a_1^2 \times q^{n-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 \times (a_1 \times q^{n-1}) = a_1 \times a_n.$$

Observe, ainda, que, em virtude da Propriedade 1, o quadrado do termo médio é, também, igual ao produto de qualquer par de termos equidistantes dos extremos.

## A soma dos n primeiros termos de uma PG

**Teorema:** Numa PG de primeiro termo $a_1$ e razão $q \neq 1$, a soma $S_n$ dos **n** primeiros termos é tal que

$$S_1 = \frac{a_1(q-1)}{q-1}.$$

Prova. Se n = 1, a fórmula nos fornece $S_1 = \frac{a_1(q-1)}{q-1} = a_1$, o que está correto. Suponha $n \geq 2$. Note que

$$qS_n = q\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_iq = \sum_{i=1}^{n-1} a_iq + a_nq = \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+1} + a_nq = (S_n - a_1) + a_nq \Rightarrow$$
$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1 \Rightarrow (q-1)S_n = a_1(q^n - 1) \Rightarrow S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}.$$

**Exemplo 4:** Um número natural **m** não nulo é chamado de número defectivo ou número deficiente se a soma dos seus divisores próprios é menor do que **m**. Mostre que toda potência de primo é um número deficiente.

**Solução**. Seja p um primo. Consideremos a potência $p^n$, com n natural. Se n = 0, a conclusão é imediata, posto que 1 é deficiente. Se n = 1, basta notar que $1 < 2 \le p$. Suponha $n \ge 2$. Recorde que os divisores da potência $p^n$ são da forma $p^\alpha$, com $0 \le \alpha \le n$. Assim, os divisores próprios de $p_n$ são os números 1, p, ..., $p^{n-1}$. Veja que esses divisores formam uma PG de razão p. Daí, pelo teorema acima, obtemos

$$1+p+\ldots+p^{n-1}=\frac{p^n-1}{p-1}<\frac{p^n}{p-1}\le p^n,$$

e o resultado segue.

## A soma dos termos de uma PG infinita

Agora, a fim de demonstrarmos o último teorema deste material, introduziremos o conceito de *limite de uma sequência* e provaremos alguns resultados preliminares. O que será exibido aqui raramente é abordado na literatura matemática convencional em nível de Ensino Médio. Em geral, os livros simplesmente lançam mão da fórmula para o cálculo da 'soma' dos infinitos termos de uma PG cujo módulo de sua razão é menor do que 1, isto é, não há demonstrações e, sim, um apelo excessivo para a intuição do estudante.

**Definição:** Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ uma sequência de números reais. Dizemos que $L \in \mathfrak{R}$ é o limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, quando **n** tende ao infinito, e escrevemos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$, se, dado um número real $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então $|a_n - L| < \varepsilon$.

No que segue, demonstraremos três propriedades satisfeitas pelos limites de sequências, as quais chamaremos, respectivamente, de $L_1$, $L_2$ e $L_3$.

**Propriedade $L_1$**: Seja $c \in \mathfrak{R}$. Então, $\lim\limits_{n\to+\infty} c = c$.

Prova. Dado $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in N$. Note que, se $n > n_0$, temos

$$|c-c|=|0|=0<\varepsilon,$$

e a demonstração está encerrada.

**Propriedade $L_2$**: Seja $c \in \mathfrak{R}$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$, , então $\lim\limits_{n\to+\infty} ca_n = cL$.

Prova. Se c = 0, temos

$$\lim_{n\to+\infty} 0\times a_n = \lim_{x\to+\infty} 0 \overset{L_1}{\overbrace{=}} 0 = 0\times L,$$

e o resultado vale. Suponha $c \ne 0$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então

$$|a_n-L|<\frac{\varepsilon}{|c|}\Rightarrow|c||a_n-L|=|c(a_n-L)|=|ca_n-cL|<\varepsilon,$$

o que encerra a prova.

Para a última propriedade, usaremos o seguinte

**Lema:** Sejam x e y números reais. Então, $|x-y| \le |x|+|y|$

Prova. Em virtude da desigualdade triangular, podemos escrever

$$|x-y|=|x+(-y)|\le|x|+|-y|=|x|+|y|,$$

e acabamos.

**Propriedade $L_3$**: Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = M$, então $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = L - M$.

Prova. Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_1$, temos $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}(*)$. Analogamente, $\exists\ n_2 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_2$, então $|b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2}(**)$. Agora, tomemos $n_0 = \text{máx}\{n_1,n_2\}$, de modo que, se $n > n_0$, as desigualdades (*) e (**) ocorrem. Somando essas desigualdades membro a membro, obtemos

$$|a_n-L|+|b_n-M|<2\times\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Agora, o lema que acabamos de provar nos garante que

$$|(a_n-b_n)-(L-M)|=|(a_n-L)-(b_n-M)|\le|a_n-L|+|b_n-M|,$$

e portanto, $|(a_n-b_n)-(L-M)|<\varepsilon$, o que encerra a prova.

Vejamos outro resultado importante que nos auxiliará na demonstração do teorema principal desta seção.

**Proposição:** Seja $q \in \mathfrak{R}$ tal que $|q| < 1$. Então, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Prova. Se q = 0, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} = 0^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 \overset{(L_1)}{\overbrace{=}} 0$. Suponha $q \ne 0$. Daí, $0 < |q| < 1$. Seja $\varepsilon > 0$. Tome $n_0 \in N$ tal que $n_0 > \log_{|q|}\varepsilon$. Como a função exponencial de base positiva menor do que 1 é decrescente, temos, para $n > n_0$,

$$|q|^n<|q|^{n_0}<|q|^{\log_{|q|}\varepsilon}=\varepsilon\Rightarrow|q|^n=|q^n|=|q^n-0|<\varepsilon.$$

Finalmente, podemos provar o seguinte

**Teorema:** Considere uma PG infinita de razão **q** tal que $|q| < 1$. Defina a sequência $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, com $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_1$. Então,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{a_1}{1-q}.$$

Prova. Inicialmente, note que

$$\lim_{n\to+\infty}(q^n-1)\overset{(L_3)}{\overbrace{=}}\lim_{n\to+\infty}q^n-\lim_{n\to+\infty}1=0-1=-1(*).$$

Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}\overset{(L_2)}{\overbrace{=}}\frac{a_1}{q-1}\lim_{n\to+\infty}(q^n-1)\overset{(*)}{\overbrace{=}}\frac{a_1}{1-q},$$

como queríamos demonstrar.

A riquíssima teoria desenvolvida até aqui nos motiva naturalmente a estabelecermos a seguinte

**Definição:** Seja uma PG infinita de razão **q** tal que $|q| < 1$. O número $S = \frac{a_1}{1-q} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ é a soma dos infinitos termos dessa PG.

**Exemplo 5:** O primeiro termo e a razão de uma PG são iguais a $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

O limite da soma dos **n** primeiros termos dessa PG, quando $n \to +\infty$, é:

A) $1+\sqrt{2}$
B) 1
C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{2+\sqrt{2}}$
E) 0

**Solução**. Perceba, inicialmente, que $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Daí, pelo teorema acima, temos

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1,$$

de modo que a alternativa **A** é a correta.
Para encerrarmos, vejamos mais um exemplo.

**Exemplo 6:** Seja θ um valor fixado no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Sabe-se que $a_1 = \cot g\,\theta$ é o primeiro termo de uma progressão geométrica infinita de razão $q = \text{sen}^2\theta$. A soma de todos os termos dessa progressão é:

A) $\text{cossec}\theta \times \text{tg}\theta$
B) $\sec\theta \times \text{tg}\theta$
C) $\sec\theta \times \text{cossec}\theta$
D) $\sec^2\theta$
E) $\text{cossec}^2\theta$

**Solução**. Veja que $|q| = |\text{sen}^2\theta| < 1$, já que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Aplicando o teorema acima novamente, obtemos

$$S = \frac{\cot g\,\theta}{1-\text{sen}^2\theta} = \frac{\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} \times \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{1}{\text{sen}\,\theta} =$$
$$= \sec\theta \times \text{cossec}\,\theta.$$

**Alternativa C**

## Exercícios

**01.** Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a:
A) 30
B) 32
C) 34
D) 36
E) 38

**02.** Considere o quadrado ABCD com lados de 10m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, equidistantes de A. Por M traça-se uma reta **r** paralela ao lado $\overline{AD}$ e por N uma reta **s** paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados AMON e OPCQ, onde P é a interseção de **s** com o lado $\overline{BC}$ e Q é a interseção de **r** com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados AMON, OPCQ e ABCD constituem, nessa ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a:
A) $15+5\sqrt{5}$
B) $10+5\sqrt{5}$
C) $10-5\sqrt{5}$
D) $15-5\sqrt{5}$
E) $10-3\sqrt{5}$

**03.** (Professor Isaac Luís) Seja **n** um número natural maior do que 1. Os **k** divisores $d_1 = 1, d_2, \ldots, d_k$ de **n**, formam, nessa ordem, uma progressão geométrica. Então, é correto afirmar que:
A) n é um quadrado perfeito.
B) n é um cubo perfeito.
C) n é um número perfeito.
D) n é uma potência de primo.
E) Nenhuma das alternativas anteriores.

**04.** Os senos dos ângulos de um triângulo estão em PG. Nessas condições:
A) O triângulo é necessariamente equilátero.
B) O triângulo é necessariamente retângulo.
C) O triângulo é necessariamente acutângulo.
D) O triângulo é necessariamente obtusângulo.
E) Os lados do triângulo estão em PG.

**05.** Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$, com coeficientes $a, b \in \Re$, $b \neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\frac{a}{b}$ é igual a:
A) –3
B) $-\frac{1}{3}$
C) $\frac{1}{3}$
D) 1
E) 3

**06.** Seja $A \in M_{2\times2}(\Re)$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que $a_{11}$, $a_{12}$ e $a_{22}$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $\text{tr}A = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2\times1}(\Re)$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a:
A) $\frac{101}{25}$
B) $\frac{121}{25}$
C) 5
D) $\frac{49}{9}$
E) $\frac{25}{4}$

**07.** Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B\backslash C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica de razão $r > 0$.
A) Determine n(C).
B) Determine $n[\wp(B\backslash C)]$.

**08.** Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times4}(\mathfrak{R}),$$

sabe-se que $(x_1,x_2,x_3,x_4)$ e $(y_1,y_2,y_3,y_4)$ são duas progressões geométricas de razões 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente. Então, $\det(A^{-1})$) e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente:

A) $\frac{1}{72}$ e 12
B) $-\frac{1}{72}$ e $-12$
C) $-\frac{1}{72}$ e 12
D) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$
E) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$

**09.** Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3}(x-a_k)^{4-K}=0$. Sabendo que $x = 0$ é uma de suas raízes e que $(a_1,a_2,a_3)$ é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que:
A) a soma de todas as raízes é 5.
B) o produto de todas as raízes é 21.
C) a única raiz real é maior do que zero.
D) a soma das raízes não reais é 10.
E) todas as raízes são reais.

**10.** Considere a matriz quadrada A em que todos os termos da diagonal principal são 1, $1+x_1$, $1 + x_2$, ..., $1 + x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

**11.** Considere a equação $\sum_{n=0}^{5} a_n x^n = 0$ em que a soma das raízes é igual a $-2$ e os coeficientes $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ e $a_5$ formam, nessa ordem, uma progressão geométrica com $a_0 = 1$. Então, $\sum_{n=0}^{5} a_n$ é igual a:
A) $-21$
B) $-\frac{2}{3}$
C) $\frac{21}{32}$
D) $\frac{63}{32}$
E) 63

**12.** Três circunferências $C_1$, $C_2$ e $C_3$ são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios $r_1$, $r_2$ e $r_3$ dessas circunferências constituem, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. A soma dos comprimentos de $C_1$, $C_2$ e $C_3$ é igual a $26\pi$cm. Determine:
A) a área do triângulo cujos vértices são os centros de $C_1$, $C_2$ e $C_3$.
B) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

**13.** Seja $(a_1,a_2,a_3, \ldots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:
I. Existem três termos consecutivos, $a_p$, $a_{p+1}$, $a_{p+2}$, que, nessa ordem, formam uma progressão geométrica.
II. $a_7$ é um número primo.
III. Se n é múltiplo de 3, então $a_n$ é par.

É (são) verdadeira(s):
A) apenas II.
B) apenas I e II.
C) apenas I e III.
D) apenas II e III.
E) I, II e III.

**14.** Seja $A = (a_{ij})_{5\times5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j-1)$, $1 \leq i, j \leq 5$. Considere as afirmações a seguir:
I. Os elementos de cada linha **i** formam uma progressão aritmética de razão $2^i$.
II. Os elementos de cada coluna **j** formam uma progressão geométrica de razão 2.
III. trA é um número primo.

É (são) verdadeira(s):
A) apenas I. B) apenas I e II. C) apenas II e III.
D) apenas I e III. E) I, II e III.

**15.** (Professor Isaac Luís) Sejam a, P e S, respectivamente, a medida da hipotenusa, o perímetro e a área de um triângulo retângulo. Sabe-se que (a, P, S) é uma progressão geométrica. Encontre todos os possíveis valores de **a**.

## Gabarito

| 01 | 02 | 03 | 04 | 05 |
|---|---|---|---|---|
| B | D | D | E | B |
| **06** | **07** | **08** | **09** | **10** |
| A | – | C | A | 5 |
| **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| D | – | D | E | – |

– Demonstração.

SUPERVISOR/DIRETOR: MARCELO PENA – AUTOR: ISAAC LUÍS
DIG.: SAMUEL – 15/01/19 – REV.: AMÉLIA