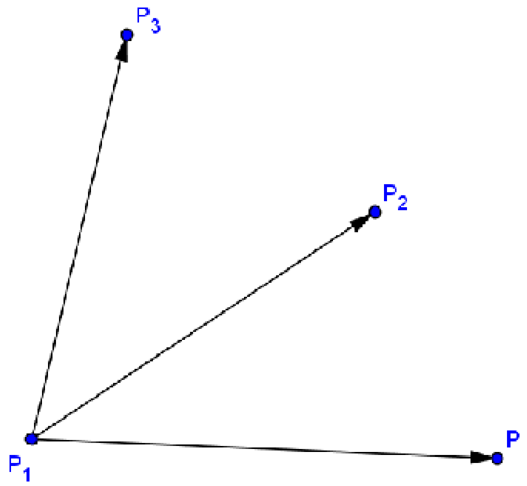
SUMÁRIO

PLANOS E RETAS E NO R3 E SUPERFÍCIE ESFÉRICA NO R3

1. EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

Um plano é determinado por 3 pontos não colineares.
Considere os pontos P_1 ($P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_1(x_3,y_3,z_3)$, P_2 (x_2, y_2, z_2) e P_3 ($x_{3,}$ $y_{3,}$ z_3), não colineares e seja P(x,y,z) um ponto genérico deste plano.



O plano determinado por estes 3 pontos utilizando a condição de coplanaridade de 3 vetores $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ e $\overrightarrow{P_1P}$ é dado pelo determinante abaixo:

$\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ são coplanares $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculando o determinante e isolando os coeficientes de x, y e z e do termo independente, respectivamente, e chamando-os de A, B, C e D, temos a equação

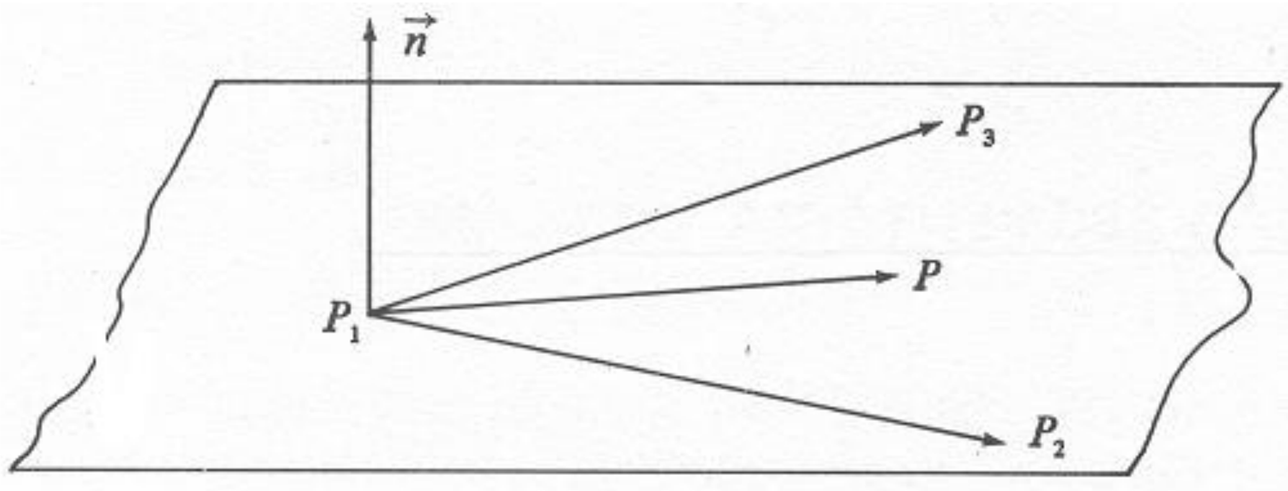
$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{Equação geral ou cartesiana do plano}$$

Concluímos que um plano é representado analiticamente por uma equação da forma $Ax + By + Cz + D = 0$,

Observe que os coeficientes B e C são os componentes escalares de um vetor normal ao plano.
Sejam

Então

$\vec{n} = (A,B,C)$ e $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0 \Leftrightarrow A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0 \Leftrightarrow$
que pode ser escrita na forma Ax+By+Cz+D=0.



2. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DO PLANO

Consideremos o plano α determinado por P_1, $\vec{V_1}$ e $\vec{V_2}$. Com $\vec{V_1} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{V_2} = (a_2, b_2, c_2)$.

A equação vetorial do plano α é: $P = P_1 + s \cdot \vec{V_1} + t \cdot \vec{V_2}$

ou

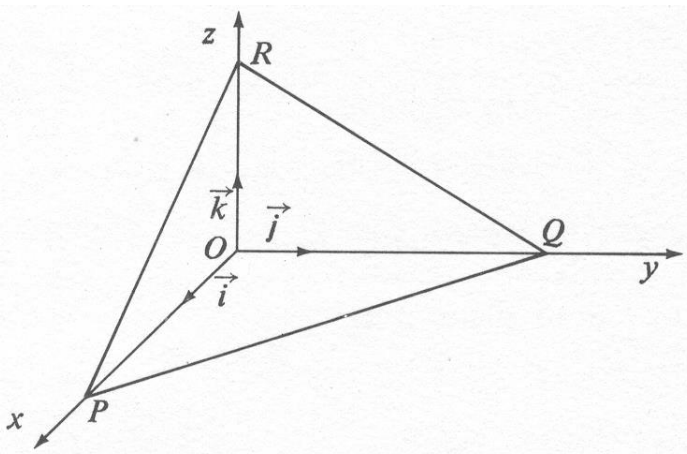
$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + s(a_1, b_1, c_1) + t(a_2, b_2, c_2)$.

Concluímos que as Equações Paramétricas do plano α sendo s e t os parâmetros são:

$$\begin{cases} x = x_1 + sa_1 + ta_2 \\ y = y_1 + sb_1 + tb_2 \\ z = z_1 + sc_1 + tc_2 \end{cases}$$

3. EQUAÇÃO SEGMENTÁRIA DO PLANO

Considere o plano da figura que não passa pela origem dos eixos coordenados. Ele intercepta os 3 eixos, nos pontos P(p, 0, 0), Q(0, q, 0) e R(0, 0, r).



A equação do plano é

$$\begin{vmatrix} x-p & y & z \\ -p & q & 0 \\ -p & 0 & r \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } qrx + pry + pqz - pqr = 0$$

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1 \quad \textit{Equação segmentaria do plano}$$

4. EQUAÇÕES DA RETA

4.1. EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA RETA

Seja a reta r definida pelo ponto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e o vetor diretor $\vec{v} = (a, b, c), \vec{v} \neq \vec{0}$.
A equação vetorial de (r) é

$$P = P_1 + t\vec{v} \qquad (1)$$

onde P(x, y, z) é um ponto móvel de r

$$\Rightarrow P - P_1 = t\vec{v} \quad \Leftrightarrow \qquad (x - x_1, y - y_1, z - z_1) = t(a, b, c),$$

$$\begin{cases} x - x_1 = ta \\ y - y_1 = tb \\ z - z_1 = tc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = z_1 + tc \end{cases}$$ Que são as equações paramétricas de r.

4.2 EQUAÇÕES CANÔNICAS OU SIMÉTRICAS

Se $a \cdot b \cdot c \neq 0$, então:

$$\boxed{r: \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}}$$

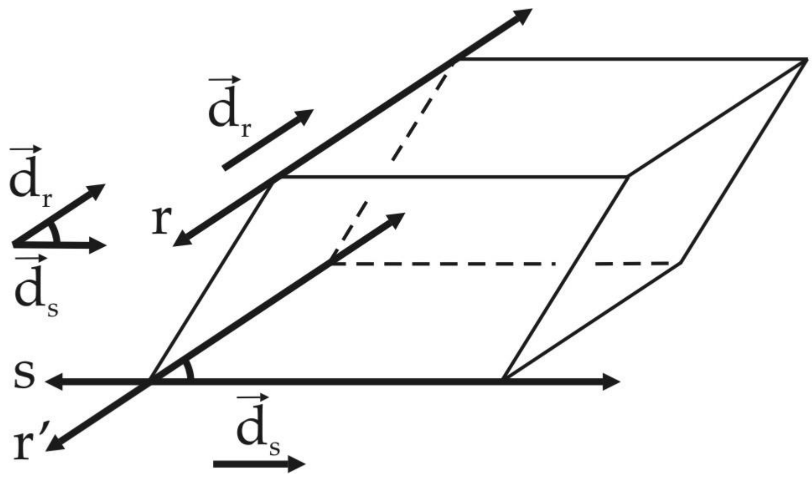
4.3 EQUAÇÕES DA RETA DETERMINADA POR DOIS PONTOS DISTINTOS

Sejam os pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$ com $P_1 \neq P_2, \in R^3$.
O vetor diretor da reta $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ é $\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Substituindo nas equações simétricas

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

5. ÂNGULO ENTRE RETAS



$$\left(\vec{d}_r \parallel r \text{ e } \vec{d}_s \parallel s \text{ e } r' \parallel r\right) \Rightarrow \cos\angle(r,s) = \cos\angle(r',s) = \left|\cos\angle\left(\vec{d}_r,\vec{d}_s\right)\right| \Rightarrow$$

$$\cos\angle(r,s) = \frac{\left|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_r\right|\left|\vec{d}_s\right|} \Rightarrow \boxed{\angle(r,s) = \arccos\frac{\left|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_r\right|\left|\vec{d}_s\right|}}$$

6. POSIÇÕES RELATIVAS DE 2 PLANOS

6.1. PLANOS PARALELOS

Sejam dois planos definidos pelas equações:

$(\alpha)\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ e

$(\beta)\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

Caso $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ os planos são paralelos e não coincidentes.

São paralelos coincidentes, os planos caso

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

6.2. PLANOS CONCORRENTES

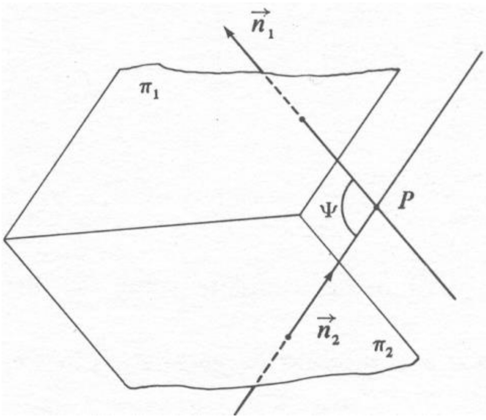
Dois planos concorrentes se interceptam e fazem-no segundo uma reta.
Sejam os planos

$(\pi_1)\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ e
$(\pi_2)\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

não paralelos. A intersecção deles é uma reta (r).

7. ÂNGULO DE DOIS PLANOS

O ângulo de 2 planos é o ângulo das retas normais a estes planos, traçadas de um ponto qualquer do espaço.



Sejam os planos

$(\pi_1)\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$(\pi_2)\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

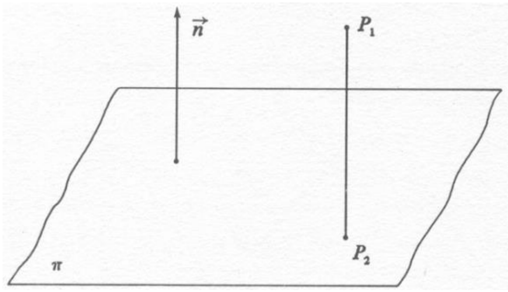
$$\cos\psi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

A condição para 2 planos serem perpendiculares é :

$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
$(\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2)$

8. DISTÂNCIA DE UM PONTO A UM PLANO

Sejam o ponto P_1 (x_1, y_1, z_1) e o plano (π) Ax + By + Cz + D = 0.



$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

9. SUPERFÍCIE ESFÉRICA

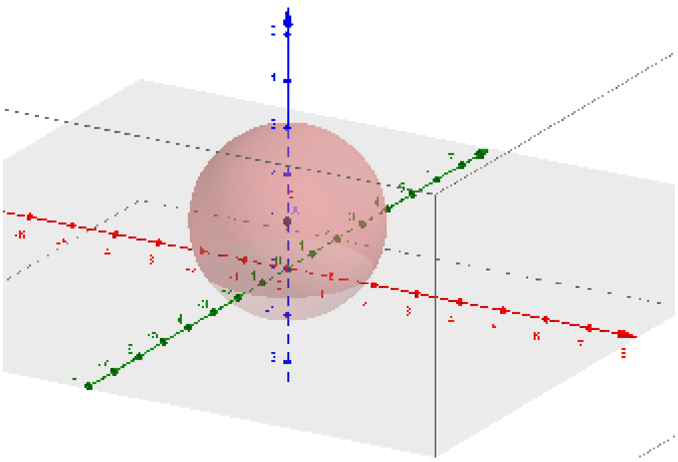
É o lugar dos pontos, P(x,y,z), do espaço que estão a uma distância R a um ponto fixo, chamado de centro, de coordenadas C=(a,b,c), a essa distância daremos o nome de raio e representaremos pela letra R.

$$S = \{P, d(P,C) = R\}$$

A equação cartesiana da esfera é dada por:

$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$
Equação Reduzida da esfera de centro (a,b,c) e raio R.

Exemplo:
A equação abaixo é da superfície esférica de centro (0,0,1) e raio igual a 2.
$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4.$



1. Dados os pontos P_1 (3, 2, 0), P_2 (1, 2, $-\sqrt{2}$) e P_3 (1, $-\sqrt{2}$, -1), determine: a equação cartesiana e a equação segmentaria do plano.

2. (EN 2013) Considere π o plano que contém o centro da esfera $x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+13=0$ e a reta de equações paramétricas $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. O volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados é, em unidades de volume,

a) $\dfrac{50}{3}$

b) $\dfrac{50}{9}$

c) $\dfrac{100}{3}$

d) $\dfrac{200}{9}$

e) $\dfrac{100}{9}$

3. (EN 2009) Considere o ponto $P=(1,3,-1)$, o plano $\pi: x+z=2$ e a reta $s: \begin{cases} x-z=y+2 \\ z-x=y-2 \end{cases}$. As equações paramétricas de uma reta r, que passa por P, paralela ao plano π e distando 3 unidades de distância da reta s são

a) $x=t+1$; $y=3$; $z=-t+1$

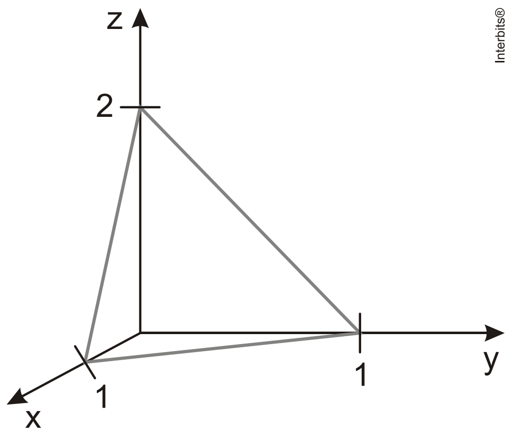
b) $x=-t+1$; $y=3$; $z=-t-1$

c) $x=1$; $y=t+3$; $z=-t-1$

d) $x=1$; $x=-t+3$; $z=t+1$

e) $x=t+1$; $y=3$; $z=-t-1$

4. (Fmp 2014) A figura a seguir apresenta um plano que intercepta os eixos cartesianos x, y e z nas posições indicadas na figura.



O módulo do cosseno do ângulo formado pela normal a esse plano com a direção vertical z é

a) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

d) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{3}$

5. (EN 2007) Seja r a reta que contém:

(i) o ponto de interseção das retas $r_1:\begin{cases} x=2+3t \\ y=4+5t \\ z=2t \end{cases}$ e $r_2:\left\{\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{4}=z+2\right.$.

(ii) o ponto médio do segmento de extremos $A(1,0,-1)$ e $B(3,-4,3)$.

As equações de r são

a) $x=-1-3t;\ y=-1-t;\ z=-2+3t$

b) $x=1+3t;\ y=-1-t;\ z=-2+3t$

c) $\frac{x+1}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+2}{3}$

d) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{3}$

e) $x=3+2t;\ y=-1-2t;\ z=3+t$

6. Ache a equação do plano inclinado pelas retas $(r_1)\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{-6}$ e $(r_2)\begin{cases}x=3+m\\y=-1+2m\\z=4-3m\end{cases}$.

7. Determine a equação do plano que passa pelo ponto P_1 (3, -1, 2) e é paralelo às retas $\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{3}$ e $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{5}$.

8. O pé da projeção ortogonal da origem dos eixos coordenados sobre um plano (π) é o ponto O_1 (-2, 3, 6). Determine a equação do plano.

9. Ache a equação geral do plano determinado pelo ponto P_1 (2, 3, -1) e a reta $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{3}$.

10. Achar as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos:
a) $A(3,-1,2)$ e $B(2,1,1)$.
b) $A(1,1,-2)$ e $B(3,-1,0)$.
c) $A(0,0,1)$ e $B(0,1,-2)$.

11. (EN 2006) Seja $\vec{w}$ um vetor unitário do $\mathbb{R}^3$, normal aos vetores $\vec{u}=(-1,1,1)$ e $\vec{v}=(0,-1,-1)$ e com 2ª coordenada positiva. Se θ é o ângulo entre os vetores $(\sqrt{2}\vec{w}+\vec{u})$ e $(-\vec{v})$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, então $\operatorname{cossec}2\theta$ vale:
a) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$
b) $\frac{5\sqrt{6}}{12}$
c) $\frac{\sqrt{15}}{3}$
d) $\frac{\sqrt{10}}{2}$
e) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

12. (EN 2005) Seja α o plano que contém a reta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-2}=z+1$ e o ponto $P(-1,0,2)$. A equação do plano β, que é paralelo a α e passa pelo ponto $Q=(3,-2,1)$ é:

a) $x-y+3z-8=0$

b) $2x-5z-1=0$

c) $y+z+1=0$

d) $x+2y+z=0$

e) $x+y-1=0$

13. (EN – 1999) A equação do plano que passa pelos pontos (1,0,1) e (0,1,–1) e é paralelo ao segmento que une os pontos (1,2,1) e (0,1,0) é:

a) $3x - y - 2z - 1 = 0$

b) $x - 3y + 2z + 1 = 0$

c) $3x - y + 2z - 1 = 0$

d) $-5x + y + 2z + 3 = 0$

e) $2x - 3y + z - 1 = 0$

14. Determine a distância do ponto P0 (x0, y0, z0), intersecção dos planos (π1) 2x + 4y 5z – 15 = 0, (π2) x – y + 2z + 3 = 0 e (π3) x + y + z – 2 = 0, à reta (r) $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{-1}$.

15. Determine as equações simétricas da reta (r), que passa por P_1 (2, 1, 0) e é paralela à reta intersecção dos planos $(\pi_1)\ x-2y+z-1=0$ e $(\pi_2)\ 3x+2y-3z+5=0$.

16. Determine a equação do plano:

a) que passa pelo ponto $P(2,1,-1)$ e cujo vetor normal é dado por $\vec{n}=(1,-2,3)$.

b) cujo ponto $P(2,-1,-1)$ é o pé da perpendicular baixada da origem das coordenadas sobre o plano.

c) que passa por A e é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$, onde $A(3,-1,2)$ e $B(4,-2,-1)$.

d) que passa pelo ponto $P(3,4,-5)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u}=(3,1,-1)$ e $\vec{v}=(1,-2,1)$.

e) que passa pelos pontos $A(2,-1,3)$ e $B(3,1,2)$ e que é paralelo ao vetor $\vec{u}=(3,-1,-4)$.

f) determinado pelos pontos $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$ e $C(2,0,2)$.

g) que passa pelo ponto $P(3,-2,-7)$ e que é paralelo ao plano $\alpha: 2x-3z+5=0$.

h) que passa pelo ponto $P(2,-1,1)$ e que é perpendicular aos planos $\alpha: 2x-z+1$ e $\beta: y=0$.

17. Determine as equações paramétricas da reta paralela aos planos $\alpha: 3x+12y-3z-5=0$ e $\beta: 3x-4y+9z+7=0$ que intercepta as retas $r: \frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}$ e $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$.

18. (EN 2004) Sejam α e β dois planos no $\mathbb{R}^3$ cuja interseção é a reta r. Os vetores $\vec{u}=(2,1,3)$ e $\vec{v}=(2,-3,1)$ são perpendiculares aos planos α e β, respectivamente. A equação da reta s que passa pelo centro da esfera de equação $x^2+y^2+z^2-6x+2z+9=0$ e é paralela à reta r é:

a) $\frac{x+3}{2}=y=\frac{z-1}{-3}$

b) $\frac{x+3}{-5}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{4}$

c) $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-3}=z+1$

d) $\frac{x+3}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-4}$

e) $\frac{x-3}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-4}$

1.

RESPOSTA:

a)

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-2\sqrt{2})x-(2-2\sqrt{2})y+2(2-\sqrt{2})z-(2-2\sqrt{2})=0$$

$$x-y+\frac{2(2-\sqrt{2})}{2(1-\sqrt{2})}z-1=0$$

Ou

$$x-y+\frac{(2-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}z-1=0$$

$x-y-\sqrt{2}z-1=0$ Equação cartesiana

b)

$x-y-\sqrt{2}z=1$ ou $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-1}+\dfrac{z}{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=1$ Equação segmentaria

2.

RESPOSTA: E

$x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+13=0 \Leftrightarrow (x^2-6x+9)+(y^2+2y+1)+(z^2-4z+4)=-13+9+1+4$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=1$

Logo, o centro da esfera é o ponto $O(3,-1,2)\in\pi$.

A reta de equação paramétrica $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$ contém o ponto $P(1,2,3)$ e tem vetor diretor $\vec{v}=(1,-1,2)$.

Como o plano π contém a reta de equação $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$, então o ponto $P(2,1,3)\in\pi$ e o vetor $\vec{v}=(1,-1,2)\in\pi$.

Como $\overrightarrow{OP}=(-1,2,1)\in\pi$ e $\vec{v}=(1,-1,2)\in\pi$, então

$$\vec{n}_\pi=\overrightarrow{OP}\times\vec{v}=(-1,2,1)\times(1,-1,2)=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=(5,3,-1)$$

Assim, a equação do plano π é $5x+3y-z+d=0$ e como $O(3,-1,2)\in\pi$, temos $5\cdot 3+3\cdot(-1)-2+d=0 \Leftrightarrow d=-10$ e a equação resultante é $\pi: 5x+3y-z-10=0$.

Os segmentos determinados pelo plano sobre os eixos ordenados são 2, $\frac{10}{3}$, 10 e o volume do tetraedro trirretângulo é $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 10}{2}\cdot\frac{10}{3}=\frac{100}{9}$ unidades de volume.

3.

RESPOSTA: E

$$s:\begin{cases} x-z=y+2 \\ z-x=y-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=0 \\ z=t \end{cases}, t\in\mathbb{R} \Rightarrow \vec{s}=(1,0,1)$$

$\pi: x+z=2 \Rightarrow \vec{n}_\pi=(1,0,1)$

Seja $\vec{r}=(a,b,c)$ o vetor diretor da reta r.

$r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{r} \perp \vec{n}_\pi \Leftrightarrow \vec{r} \cdot \vec{n}_\pi = 0 \Leftrightarrow (a,b,c)\cdot(1,0,1) = 0 \Leftrightarrow a + c = 0 \Rightarrow \vec{r} = (a,b,-a)$

Como as retas r e s não são paralelas, então são reversas.

Seja o ponto $Q = (2,0,0) \in s$ e, como $P = (1,3,-1) \in r$, então $d(r,s) = \left|(P-Q)\cdot\frac{\vec{r}\times\vec{s}}{|\vec{r}\times\vec{s}|}\right| = 3$.

$$\vec{r}\times\vec{s} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & -a \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b\hat{i} - 2a\hat{j} - b\hat{k} = (b,-2a,-b) \Rightarrow |\vec{r}\times\vec{s}| = \sqrt{b^2 + (-2a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{4a^2 + 2b^2}$$

$P - Q = (-1,3,-1)$

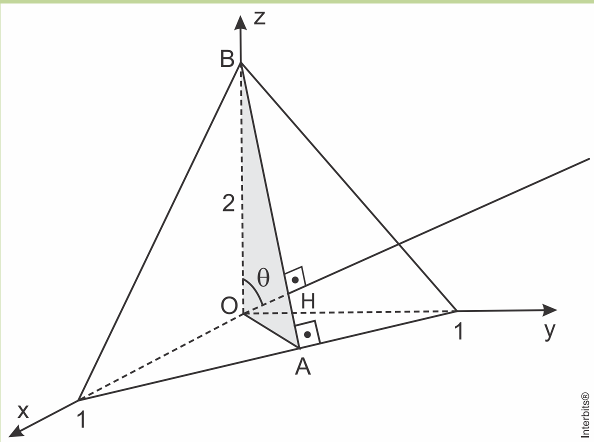
$$d(r,s) = \left|(-1,3,-1)\cdot\frac{(b,-2a,-b)}{\sqrt{4a^2+2b^2}}\right| = \left|\frac{-6a}{\sqrt{4a^2+2b^2}}\right| = 3 \Rightarrow \frac{36a^2}{4a^2+2b^2} = 9 \Leftrightarrow b = 0$$

$\Rightarrow \vec{r} = (a,0,-a) = a(1,0,-1)$

Logo, a equação da reta r é $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3 \quad\quad , t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - t \end{cases}$

4.

RESPOSTA: E



$OA = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{2}$ (metade da diagonal de um quadrado)

$$AB^2 = 2^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow AB = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

No triângulo retângulo AOB, temos:

$$OH \cdot AB = OB \cdot OA$$

$$OH \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow OH = \frac{2}{3}$$

Logo, $\cos\theta = \dfrac{\frac{2}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$.

5.

RESPOSTA: C

$r_1 \cap r_2$:

$$\frac{(2+3t)+1}{2} = \frac{(4+5t)+1}{4} = (2t)+2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}(t+1) = \frac{5}{4}(t+1) = 2(t+1)$$

Para que as igualdades sejam satisfeitas devemos ter $t=-1$ e o ponto de interseção entre as retas é $P(-1,-1,-2)$.

O ponto médio do segmento de extremos $A(1,0,-1)$ e $B(3,-4,3)$ é $M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{0-4}{2}, \frac{-1+3}{2}\right) = (2,-2,1)$.

O vetor diretor de r é $\overrightarrow{PM} = (3,-1,3)$ e a equação simétrica de r é $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{3}$.

6.

RESPOSTA:

Notamos, facilmente, que as retas são coplanares por serem paralelas, pois $\vec{V}_1 = (2, 4, -6)$ e $\vec{V}_2 = (1, 2, -3)$ apresentam $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-6}{-3} = 2.$

Apliquemos a determinação da equação do plano através das coordenadas de 3 de seus pontos.

Dois, dos 3 pontos, já são conhecidos: P_1 (1, 3, -1) da reta (r_1) e P_2 (3, -1, 4) da reta (r_2).

O 3º ponto P_3 determinamos numa das retas. Na 2ª é mais fácil.

Façamos, em (r_2), $m \neq 0$; no nosso caso, m = 1, resultando P_3 (4, 1, 1).

A equação do plano procurado é $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ou $2x + 11y + 8z - 27 = 0.$

7.

RESPOSTA:

Seja Ax + By + Cz + D = 0 (1) a equação do plano procurado.

Passando por P(3, -1, 2), sua equação assume a forma

3A – B + 2C + D = 0 (2)

Subtraindo (2) de (1) $\Rightarrow$ (3) A(x – 3) + B(y + 1) + C(z – 2) = 0.

Da condição de paralelismo de plano e reta, resulta

(4) 4A + 2B + 3C = 0

(5) 2A + 3B + 5C = 0

Eliminemos A, B e C das equações (3), (4) e (5):

$$\begin{array}{c} \overrightarrow{P_1P_2} \\ \vec{V_1} \\ \vec{V_2} \end{array}\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \text{ ou } x - 14y + 8z - 33 = 0.$$

8.

RESPOSTA:

O vetor $\overrightarrow{OO_1} = (O_1 - O) = (-2, 3, 6)$ é normal ao plano (π), consequentemente suas coordenadas são, respectivamente, os coeficientes A, B e C da equação do plano, o que nos dá

- 2x + 3y + 6z + D = 0.

Como O_1 pertence a (π) $\Rightarrow$ 4 + 9 + 36 + D = 0 $\Rightarrow$ D = -49.

- 2x + 3y + 6z – 49 = 0

$2x - 3y - 6z + 49 = 0$

9.

RESPOSTA:

Tomemos $\vec{V}_2 = (2, 1, 3)$ e $\vec{V}_1 = P_2 - P_1 = (1-2, 2-3, -1+1)$ vetores-base do plano.

Determinemos $\vec{n} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{n} = (-3, 3, 1)$

Logo $(\pi) - 3x + 3y + z + D = 0$ e como $P_1 \in (\pi) \Rightarrow$ D = -2.

A equação procurada é $3x - 3y - z + 2 = 0$.

10.

RESPOSTA:

a) $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = t + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = -3t + 1 \end{cases}$

11.

RESPOSTA: B

$$\left.\begin{matrix} \vec{w} \perp \vec{u} \\ \vec{w} \perp \vec{v} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} = \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{2}\vec{w} + \vec{u} = (0,-1,1) + (-1,1,1) = (-1,0,2)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0,-1,1)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta=\frac{\left(\sqrt{2}\vec{w}+\vec{u}\right)\cdot\left(-\vec{v}\right)}{\left|\sqrt{2}\vec{w}+\vec{u}\right|\left|-\vec{v}\right|}=\frac{(-1,0,2)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow \operatorname{sen}\theta=\sqrt{1-\frac{10}{25}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\operatorname{cossec}2\theta=\frac{1}{\operatorname{sen}2\theta}=\frac{1}{2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}=\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{15}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}}=\frac{5\sqrt{6}}{12}$$

12.

RESPOSTA: E

Como o plano α contém a reta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-2}=z+1$, então o vetor diretor da reta $\vec{u}=(2,-2,1)\in\alpha$ e o ponto da reta $A(1,-2,-1)\in\alpha$.

O ponto $P(-1,0,2)\in\alpha$, então o vetor $\overrightarrow{AP}=(-2,2,3)\in\alpha$ e o vetor normal ao plano α é

$$\vec{n}_\alpha \parallel \vec{u}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 3\end{vmatrix}=(-8,-8,0)=-8\cdot(1,1,0).$$

$$\beta\parallel\alpha\Rightarrow\vec{n}_\beta=\vec{n}_\alpha=(1,1,0)\Rightarrow\beta: x+y+d=0$$

$$Q=(3,-2,1)\in\beta\Rightarrow 3+(-2)+0\cdot1+d=0\Leftrightarrow d=-1$$

Logo, a equação resultante é $\beta: x+y-1=0$.

13.

RESPOSTA: A

14.

RESPOSTA:

Determinemos o ponto P_0, resolvendo o sistema $\begin{cases}2x+4y-5z=15\\ x-y+2z=-3\\ x+y+z=2\end{cases}$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-12}{-12}=1$$
$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-24}{-12}=2\Rightarrow P_0(1,\ 2,\ -1)$$
$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{12}{-12}=-1$$

Conduzamos, por este ponto, um plano (π) perpendicular à reta (r).

Se $(\pi) \perp (r) \Rightarrow \vec{n}_{(\pi)} = \vec{V}_{(r)} \Rightarrow \vec{n}_{(\pi)} = (3, 2, -1)$ e a equação do plano (π) 3x + 2y – z + D = 0.

Como $P_0 \in (\pi) \Rightarrow$ 3 . 1 + 2 . 2 – 1 . (-1) + D = 0 e D = -8.

Logo (π) 3x + 2y – z – 8 = 0.

Procuremos o traço Q (veja Figura 9, item 12.1) da reta (r) no plano (π).

$$(r)\begin{cases} x = 3m \\ y = 1 + 2m \\ z = -2 - m \end{cases}$$ Substituindo na equação de (π) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 9m + 2 + 4m + 2 + m - 8 = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{7} \Rightarrow Q\left(\frac{6}{7}, \frac{11}{7}, -\frac{20}{7}\right).$$

A distância procurada $d = |\overrightarrow{QP_0}|$

$$d = \sqrt{\left(1 - \frac{6}{7}\right)^2 + \left(2 - \frac{11}{7}\right)^2 + \left(-1 - \frac{20}{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{739}}{7}$$

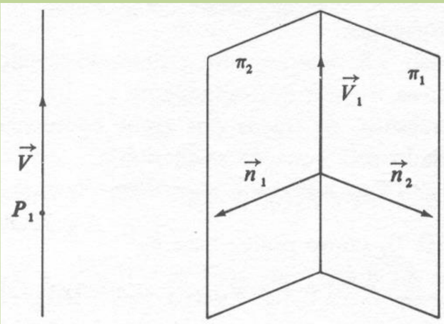
15.

RESPOSTA:

A reta $(r) = [P_1, \vec{V}]$ e $\vec{V} // \vec{V}_1$, sendo o vetor $\vec{V}_1$ o vetor diretor da reta determinada pelos planos dados.

Achemos o vetor diretor da reta intersecção dos planos.

Usemos um processo diferentes do usado no item 7.2.



Da figura tiramos $\vec{V}_1 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$, sendo $\vec{n}_1 = (1, -2, 1)$ e $\vec{n}_2 = (3, 2, -3)$.

Logo $\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{V}_1 = (4, 6, 8)$

Tomemos $\vec{V} = \vec{V}_1 \Rightarrow (r)\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{6} = \dfrac{z}{8}$ ou $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{4}$

16.

RESPOSTA:

a) $x - 2y + 3z + 3 = 0.$

b) $2x - y - z - 6 = 0.$

c) $x - y - 3z + 2 = 0.$

d) $x + 4y + 7z + 16 = 0.$

e) $9x - y + 7z - 40 = 0.$

f) $3x + 3y + z - 8 = 0.$

g) $2x - 3z - 27 = 0.$

h) $x + 2z - 4 = 0.$

17.

RESPOSTA:

$\dfrac{x+3}{8} = \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{z-2}{-4}.$

18.

RESPOSTA: E

$$r = \alpha \cap \beta \Rightarrow r \perp \vec{u} \wedge r \perp \vec{v} \Rightarrow r \parallel \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (10, 4, -8) = 2 \cdot (5, 2, -4)$$

Então, o vetor diretor da reta r é $(5,2,-4)$ e, como $s \parallel r$, então a reta s também possui vetor diretor $(5,2,-4)$.

Vamos identificar o centro da esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$

Logo, o centro da esfera é $O = (3,0,-1)$.

Assim, a equação da reta s de vetor diretor $(5,2,-4)$ e que passa pelo ponto $O = (3,0,-1)$ é $s: \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{-4}$.