CONTEÚDO PROGRAMÁTICO

ÍNDICE

Sistemas Lineares

Equações Lineares

Toda equação do 1º grau com uma ou mais incógnitas.

Equação: $4x + 7y = 18$

Equação: $x + 2y + 4z = 10$

Sistemas Lineares

Conjunto de equações lineares.

Exemplos:

Sistema: $\begin{cases} 4x + 7y = 18 \\ 13x - 2y = 9 \end{cases}$

Sistema: $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$

Representação de um Sistema Linear em forma de Matriz

Todo sistema linear pode ser escrito na forma de uma matriz.

Isso será importante mais adiante quando da resolução dos sistemas.

Exemplo:

$\begin{cases} 4x + 7y = 18 \\ 13x - 2y = 9 \end{cases}$

> Forma de Matriz:

$\begin{bmatrix} 4\ (coeficiente\ de\ x) & 7\ (coeficiente\ de\ y) \\ 13\ (coeficiente\ de\ x) & -2\ (coeficiente\ de\ y) \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 9 \end{bmatrix} \rightarrow$ **termos independentes**

> Matriz incompleta:

$\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 13 & -2 \end{bmatrix}$

> Matriz de X:

$\begin{bmatrix} 18 & 7 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$ **Substitui-se os coeficientes de x pelos termos independentes**

> Matriz de Y:

$\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 13 & 9 \end{bmatrix}$ **Substitui-se os coeficientes de y pelos termos independentes**

Resolução de um Sistema Linear

Resolvem-se os sistemas lineares pelo método dos determinantes, também conhecido como **Regra de Cramer** ou pelo método do **escalonamento.**

Obs.:

A Regra de Cramer só é possível quando o número de variáveis é igual ao número de equações, no sistema.

→ Regra de Cramer :

O valor das variáveis será calculado dividindo-se o determinante da matriz da variável pelo determinante da matriz incompleta, do sistema.

Então:

O valor de x é dado por:

$$x = \frac{\text{deteminante da matriz de } X}{\text{determinante da matriz incompleta}}$$

O valor de y é dado por:

$$y = \frac{\text{deteminante da matriz de } Y}{\text{determinante da matriz incompleta}}$$

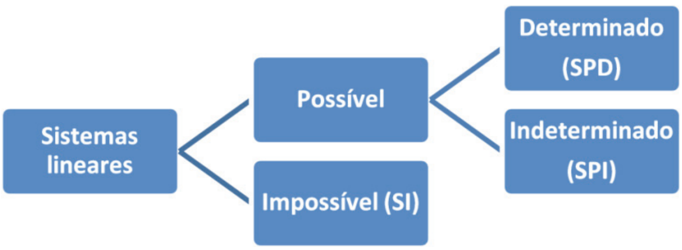
O valor de z é dado por:

$$z = \frac{\text{deteminante da matriz de } Z}{\text{determinante da matriz incompleta}}$$

Obs.:

- Se o determinante da matriz incompleta for diferente de zero (Det. In. ≠ 0), teremos sempre um sistema possível e determinado;
- Se o determinante da matriz incompleta for igual a zero (Det. In. = 0), ai temos duas situações:
  - 1ª Se os determinantes de todas as matrizes das variáveis também forem iguais a zero (Det. X = 0 e Det. Y = 0 e Det. Z = 0), teremos um sistema possível e indeterminado;
  - 2ª Se o determinante de pelo menos uma das matrizes das variáveis for diferente de zero (Det. X ≠ 0 ou Det. Y ≠ 0 ou Det. Z ≠ 0), teremos um sistema impossível.

Em resumo seria:



SPD: sistema possível e determinado (quando Det. In. ≠ 0).

SPI: sistema possível e indeterminado (quando Det. In. = 0, e Det. X = 0 e Det. Y = 0 e Det. Z = 0).

SI: sistema impossível (quando Det. In. = 0, e Det. X ≠ 0 ou Det. Y ≠ 0 ou Det. Z ≠ 0).

Escalonamento

O escalonamento consiste em eliminar as variáveis das equações, somando uma equação a outra, até em uma das equações sobrar apenas uma variável, e a partir dessa encontrar as outras variáveis.

Exemplo:

Pela regra de Cramer

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

Matriz incompleta: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ det. In. = -9

Matriz de X: $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ det. X = -27

Matriz de Y: $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ det. Y = -18

Matriz de Z: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ det. Z = -9

Valor de x é: $x = \frac{-27}{-9} = 3$

Valor de y é: $y = \frac{-18}{-9} = 2$

Valor de z é: $z = \frac{-9}{-9} = 1$

Solução: x= 3, y = 2 e z = 1

Pelo escalonamento:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

Multiplicando a 1ª equação por -2 e somando ela com a 2ª, e multiplicando a 1ª equação por -1 e somando ela com a 3ª, fica:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 0x - 3y + 3z = -3 \\ 0x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

Agora, Multiplicando a 3ª equação por 3 e somando ela com a 2ª, tem-se:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 0x - 0y + 9z = 9 \\ 0x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

> Com isso (2ª equação):

9z = 9

z = 1

> Daí na 3ª equação:

y + 2(1) = 4

y = 4 – 2

y = 2

> E na 1ª equação:

x + 2 – 1 = 4

x = 4 – 1

x = 3

> Solução: x= 3, y = 2 e z = 1

EXERCÍCIOS

01. Dado o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=3 \\ x-y+5z=6 \\ x+2y+3z=7 \end{cases}$$

O valor de $x+y+z$ é igual a:

a) 8.

b) 16.

c) 4.

d) 12.

e) 14.

02. A soma dos valores de x e y que solucionam o sistema de equações:

$$\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x+y=5 \end{cases}$$

É igual a:

a) 6.

b) 4.

c) 3.

d) 2.

e) 5.

GABARITO

01 - C

02 - B