Função Modular

MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

O módulo de um número real **a** é representado por $|a|$, em que $|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geq 0 \\ -a, & \text{se } a < 0 \end{cases}$.

Exemplos:

1º) $|3| = 3$

2º) $|-4| = -(-4) = 4$

> Geometricamente, o módulo de um número real representa a distância do ponto **a** até a origem da reta real.

Propriedades do módulo

i) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $|x|.|y| = |x.y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

iv) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

v) $|x| = \sqrt{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

vi) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \forall y \neq 0$

EQUAÇÃO MODULAR

É toda equação na qual a incógnita se encontra na forma de módulo.

Exemplos:

1º) Resolver a equação $|x| = 8$.

Há dois valores que satisfazem a equação:

$x = -8$ ou $x = 8$

Portanto, $S = \{-8, 8\}$.

2º) Resolver a equação $|x - 4| = 10$.

Se um número possui módulo 10, esse número pode ser igual a -10 ou 10. Portanto, temos:

$$\begin{cases} x - 4 = 10 \\ \text{ou} \\ x - 4 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases}$$

Portanto, $S = \{-6, 14\}$.

3º) Resolver a equação $|2x + |x - 1|| = 5$.

Resolvendo a equação anterior, temos:

$$\begin{cases} 2x + |x - 1| = 5 \\ \text{ou} \\ 2x + |x - 1| = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| = -2x + 5 \\ \text{ou} \\ |x - 1| = -2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$|x - 1| = -2x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -2x + 5 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$$

ou

$$|x - 1| = -2x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -2x - 5 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases}$$

Substituindo cada um dos resultados na equação original, verificamos que $x = -6$ ou $x = 2$ são soluções da equação.

Portanto, $S = \{-6, 2\}$.

4º) Resolva a equação $|x - 1| + |x + 3| = 14$.

Inicialmente, vamos calcular as raízes das expressões dentro dos módulos.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ e $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Observe que:

i) para valores de **x** menores do que -3, os termos $x - 1$ e $x + 3$ são **negativos**.

ii) para valores de **x** entre -3 e 1, o termo $x - 1$ é **negativo**, e o termo $x + 3$ é **positivo**.

iii) para valores de **x** maiores do que 1, os termos $x - 1$ e $x + 3$ são **positivos**.

Assim, podemos representar esse fato no esquema a seguir:

$x < -3$	**-3**	$-3 < x < 1$	**1**	$x > 1$
$-(x - 1) - (x + 3) = 14$		$-(x - 1) + (x + 3) = 14$		$x - 1 + x + 3 = 14$
$-x + 1 - x - 3 = 14$		$-x + 1 + x + 3 = 14$		$2x = 12$
$-2x = 16$		$4 = 14$		$x = 6$
$x = -8$				
(convém)		(absurdo)		(convém)

Devemos verificar também se as raízes -3 e 1 são soluções da equação:

i) Para $x = -3$, temos $4 = 14$. (absurdo)

ii) Para $x = 1$, temos $4 = 14$. (absurdo)

Assim, as soluções são $x = -8$ ou $x = 6$.

Portanto, $S = \{-8, 6\}$.

INEQUAÇÃO MODULAR

Uma inequação é dita modular quando a incógnita se encontra na forma de módulo.

Exemplos:

1º) Resolver a inequação $|x| > 7$.

Observe que há dois intervalos reais que satisfazem a essa condição: $x < -7$ ou $x > 7$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 7\}$.

2º) Resolver a inequação $|x| < 7$.

Observe que há apenas um intervalo que satisfaz a essa condição: $-7 < x < 7$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 7\}$.

GENERALIZANDO

Seja **a** um número real positivo. Há dois casos possíveis:

1º caso: $\boxed{|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a}$

2º caso: $\boxed{|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a}$

3º) Resolver a inequação $|3x - 2| \leq 7$.

$-7 \leq 3x - 2 \leq 7 \Rightarrow -7 + 2 \leq 3x - 2 + 2 \leq 7 + 2 \Rightarrow$

$-5 \leq 3x \leq 9 \Rightarrow -\dfrac{5}{3} \leq x \leq 3$

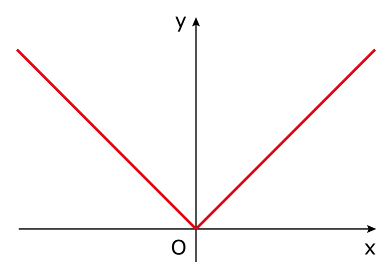
Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{5}{3} \leq x \leq 3\right\}$.

FUNÇÃO MODULAR

É uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

Essa função, de acordo com a definição de módulo, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$



O gráfico da função modular é a reunião de duas semirretas de mesma origem. Observe que:

Para $x \geq 0$, temos o gráfico da reta $y = x$.

Para $x < 0$, temos o gráfico da função $y = -x$.

A imagem da função modular é o conjunto

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}.$$

GRÁFICOS DE FUNÇÕES MODULARES

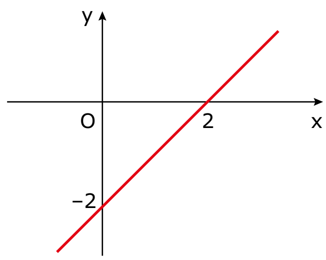
Gráficos de funções da forma $y = |f(x)|$

Esse tipo de gráfico é obtido pela "reflexão" ou "rebatimento", em relação ao eixo x, das partes do gráfico nas quais $f(x) < 0$.

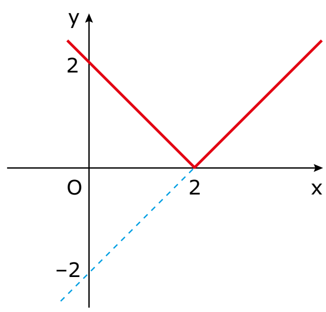
Exemplos:

1º) Esboçar o gráfico da função $y = |x - 2|$.

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função $y = x - 2$.



Agora, basta efetuar uma reflexão, em torno do eixo x, da parte do gráfico que possui ordenada negativa.

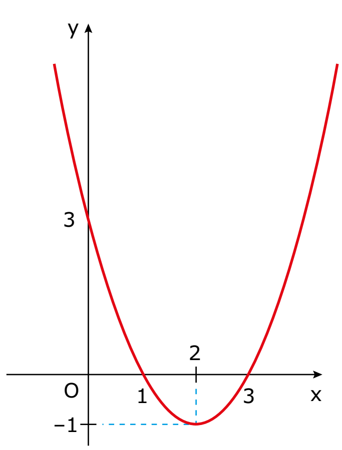


OBSERVAÇÃO

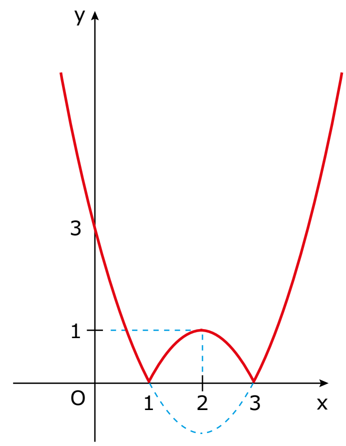
O gráfico da função básica $y = |x|$ também pode ser obtido por esse processo.

2º) Esboçar o gráfico da função $y = |x^2 - 4x + 3|$.

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.



Efetuando a reflexão em torno do eixo x, temos o seguinte gráfico:

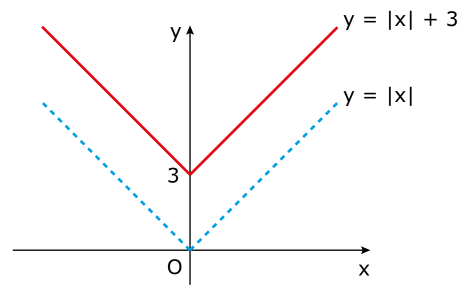


Outros gráficos

Exemplos:

1º) Esboçar o gráfico da função $y = |x| + 3$.

Basta esboçar o gráfico da função $y = |x|$ e, em seguida, deslocar esse gráfico 3 unidades para cima.



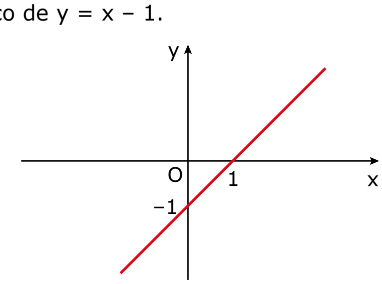
2º) Esboçar o gráfico da função $y = |x - 1| - 2$.

Basta esboçar o gráfico da função $y = |x - 1|$ e, em seguida, deslocar esse gráfico 2 unidades para baixo.

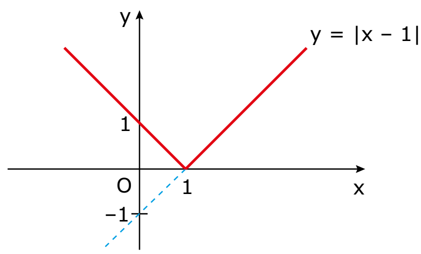
1º passo: Esboço do gráfico da função $y = |x - 1|$:

Nesse caso, podemos utilizar o "rebatimento" em relação ao eixo x, descrito anteriormente.

Inicialmente, desconsideramos o módulo e esboçamos o gráfico de $y = x - 1$.



Em seguida, basta efetuar uma reflexão em torno do eixo x, da parte do gráfico que possui ordenada negativa.



2º passo: Transladamos o gráfico da função $y = |x - 1|$ construído anteriormente 2 unidades para baixo. Para isso, é necessário encontrar os pontos de interseção de $y = |x - 1| - 2$ com os eixos coordenados:

- Interseção com o eixo Oy

  Fazendo $x = 0 \Rightarrow y = |0 - 1| - 2 \Rightarrow$

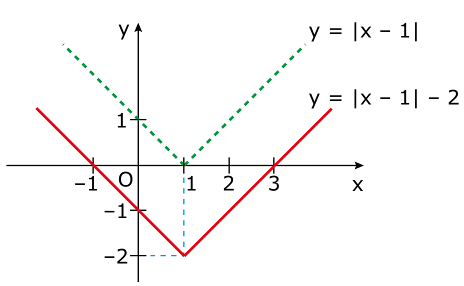
  $y = 1 - 2 \Rightarrow y = -1$

- Interseção com o eixo Ox

  Fazendo $y = 0 \Rightarrow 0 = |x - 1| - 2 \Rightarrow$

  $|x - 1| = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 1 = 2 \\ \quad \text{ou} \\ x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \quad \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$



3º) Esboço do gráfico da função $y = |x - 1| + |x + 2|$.

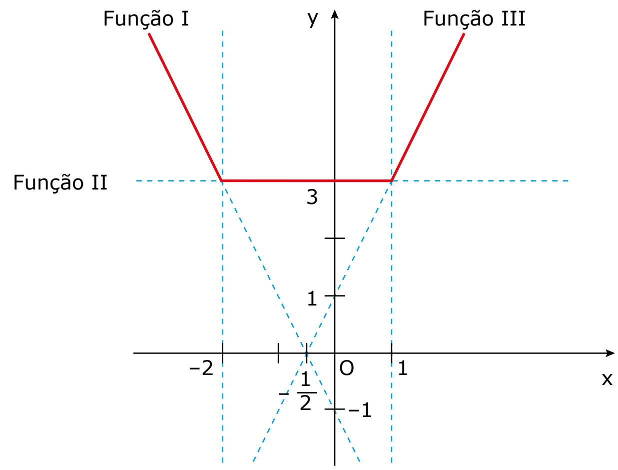
Vamos calcular as raízes das expressões dentro dos módulos:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Logo, podemos usar o seguinte esquema:

$x \le -2$	**−2**	$-2 < x < 1$	**1**	$x \ge 1$
$y = -(x - 1) - (x + 2)$ $y = -x + 1 - x - 2$ $y = -2x - 1$ (função I)		$y = -(x - 1) + x + 2$ $y = -x + 1 + x + 2$ $y = 3$ (função II)		$y = x - 1 + x + 2$ $y = 2x + 1$ (função III)

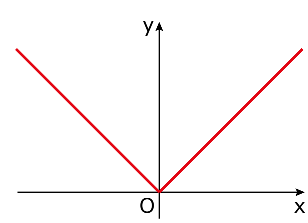
Daí, observe que há três funções, uma para cada intervalo de **x**. Representando tais funções em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, temos:



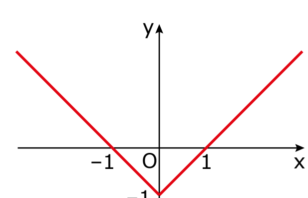
4º) Esboço do gráfico da função $y = ||x| - 1|$.

Inicialmente, esboçamos o gráfico da função $y = |x|$. Em seguida, deslocamos esse gráfico 1 unidade para baixo, obtendo o gráfico da função $y = |x| - 1$. Finalmente, "rebatemos", em relação ao eixo x, a parte do gráfico com ordenada negativa, obtendo o gráfico da função $y = ||x| - 1|$.

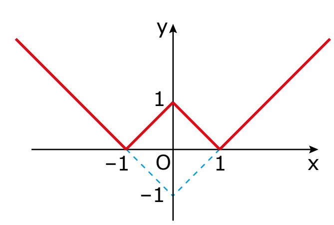
$y = |x|$



$y = |x| - 1$



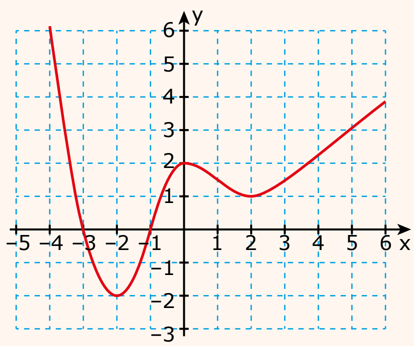
$y = ||x| - 1|$



EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Insper-SP) A figura a seguir mostra o gráfico da função f(x).



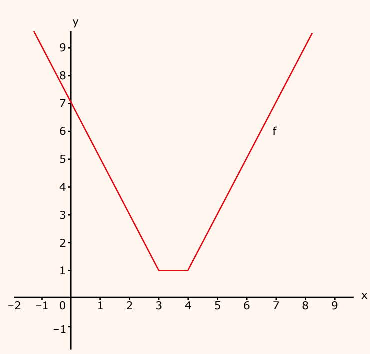
O número de elementos do conjunto solução da equação $|f(x)| = 1$, resolvida em $\mathbb{R}$ é igual a:

A) 6.
B) 5.
C) 4.
D) 3.
E) 2.

02. 7N6D (CEFET-MG–2017) Seja f(x) uma função real. O gráfico gerado pelo módulo dessa função, |f(x)|,

A) nunca passará pela origem.
B) nunca passará pelo 3º ou 4º quadrante.
C) intercepta o eixo x somente se f(x) for do primeiro grau.
D) intercepta o eixo y somente se f(x) for do segundo grau.

03. (UFMS–2020) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função modular, representada pelo gráfico a seguir:



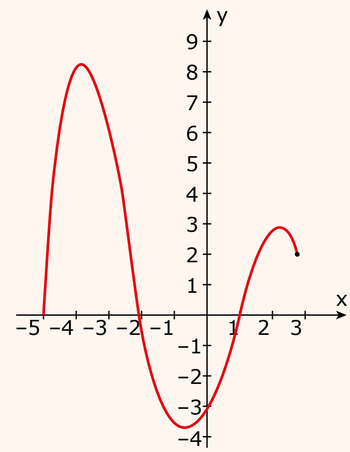
A função **f** pode ser representada por

A) $|x| + |x + 7|$.
B) $|3 - x| + |x - 4|$.
C) $-|x| + |x - 7|$.
D) $|x + 2| + |x + 5|$.
E) $|x + 9| - |3x + 2|$.

04. YBCK (CEFET-MG) O domínio da função real $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$ é o intervalo:

A) $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ ou } x > 1\}$
B) $\{x \in \mathbb{R} | x \le -1 \text{ ou } x \ge 1\}$
C) $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1\}$
D) $\{x \in \mathbb{R} | -1 \le x \le 1\}$

05. ZRC8 (UESC-BA) Para fazer um estudo sobre certo polinômio P(x), um estudante recorreu ao gráfico da função polinomial y = P(x), gerado por um *software* matemático. Na figura, é possível visualizar a parte da curva obtida para valores de **x**, de –5 até 2,7.

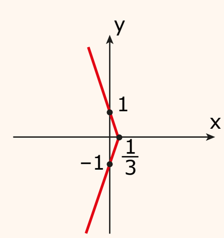


O número de raízes da equação $|P(x)| = 1$, no intervalo [–5; 2,7], é igual a

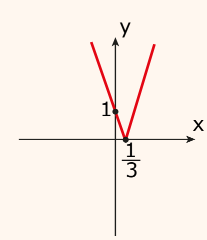
A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

06. ØG21 (PUC Rio) Qual dos gráficos a seguir representa a função real $f(x) = |3x - 1|$?

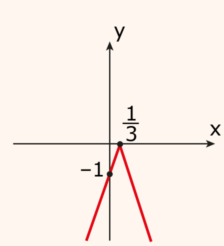
A)



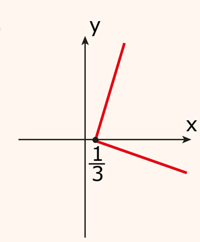
D)



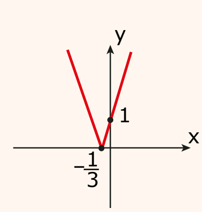
B)



E)



C)



MATEMÁTICA

07. MAØA (Unit-AL) Sabendo-se que x_1 e x_2 são números reais distintos que satisfazem a equação $|3x + 10| = |5x + 2|$, é correto afirmar que o valor de $|x_1 - x_2|$ é

A) $\frac{7}{2}$.
B) 4.
C) $\frac{11}{2}$.
D) 6.
E) $\frac{15}{2}$.

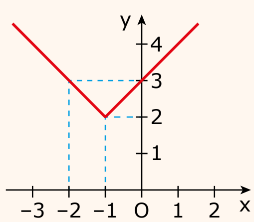
08. EE65 (UECE–2017) Se as raízes da equação $x^2 - 5|x| - 6 = 0$ são também raízes de $x^2 - ax - b = 0$, então, os valores dos números reais **a** e **b** são, respectivamente,

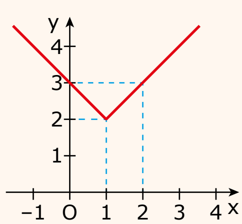
A) −1 e 6.
B) 5 e 6.
C) 0 e 36.
D) 5 e 36.

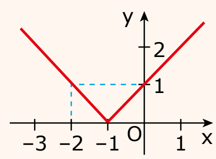
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

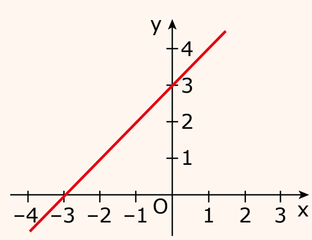
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

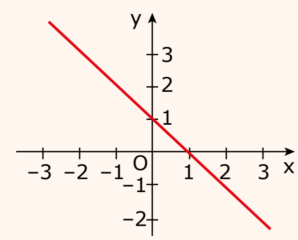
01. (UDESC) A alternativa que representa o gráfico da função $f(x) = |x + 1| + 2$ é:

A)


B)


C)


D)


E)


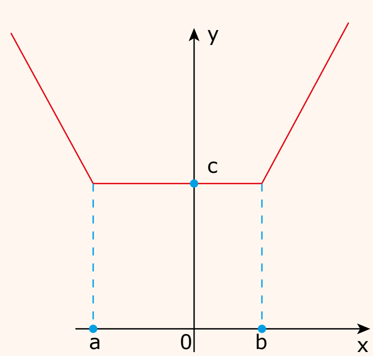
02. 6ICØ (FGV-SP) A soma dos valores inteiros de **x** que satisfazem, simultaneamente, as desigualdades $|x - 5| < 3$ e $|x - 4| \geq 1$ é

A) 25.
B) 13.
C) 16.
D) 18.
E) 21.

03. C3EN (Mackenzie-SP) Os gráficos de $f(x) = 2|x^2 - 4|$ e $g(x) = (x - 2)^2$ se interceptam em

A) apenas um ponto.
B) dois pontos.
C) três pontos.
D) quatro pontos.
E) nenhum ponto.

04. KAQ3 (EsPCEx-SP–2018) Sabendo que o gráfico a seguir representa a função real $f(x) = |x - 2| + |x + 3|$, então o valor de a + b + c é igual a



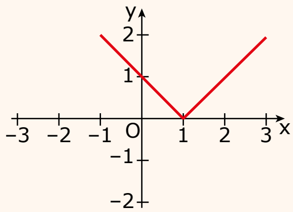
Desenho Ilustrativo Fora de Escala

A) −7.
B) −6.
C) 4.
D) 6.
E) 10.

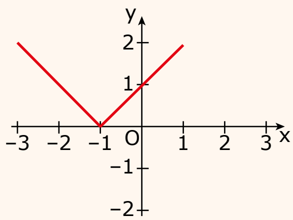
05. Y3J8

(PUC Rio) Considere a função real $f(x) = |-x + 1|$. O gráfico que representa a função é:

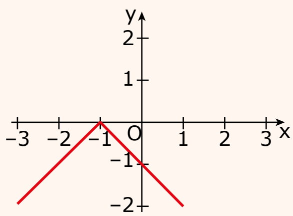
A)



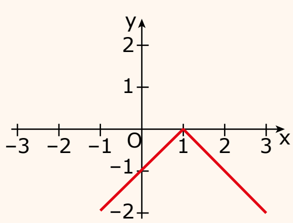
B)



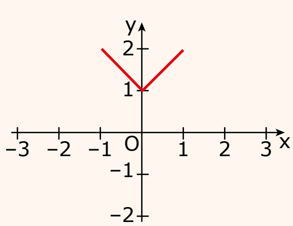
C)



D)



E)



06. (EsPCEx-SP–2017) O conjunto solução da inequação $||x - 4| + 1| \leq 2$ é um intervalo do tipo [a, b]. O valor de a + b é igual a

A) −8.

B) −2.

C) 0.

D) 2.

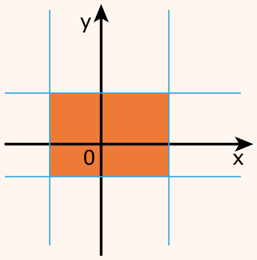
E) 8.

07. FBTN

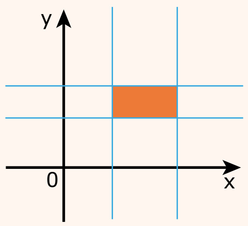
(UFRGS-RS) Considere as desigualdades definidas por $|x + 5| \leq 2$ e $|y - 4| \leq 1$ representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Qual das regiões sombreadas dos gráficos a seguir melhor representa a região do plano cartesiano determinada pela interseção das desigualdades?

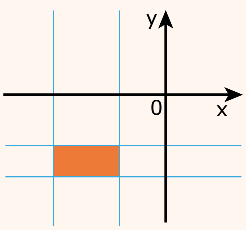
A)



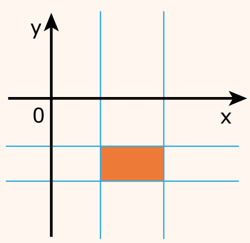
B)



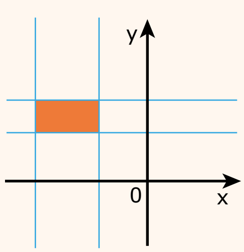
C)



D)



E)



08. (UFLA-MG) Se $y = |x|^2 - 5|x| + 6$, a afirmativa correta é:

A) **y** se anula somente para quatro valores de **x**.

B) **y** possui apenas um ponto de mínimo.

C) **y** se anula somente para dois valores de **x**.

D) **y** não é uma função par.

09. (FGV-SP) No plano cartesiano, os pontos (x, y) que satisfazem a equação $|x| + |y| = 2$ determinam um polígono cujo perímetro é:

A) $2\sqrt{2}$

B) $4 + 2\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{2}$

D) $8 + 4\sqrt{2}$

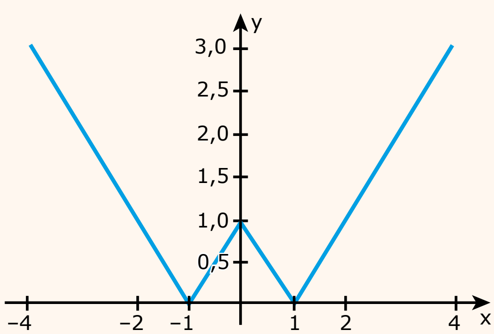
E) $8\sqrt{2}$

10. MU7V (UECE) Em um referencial cartesiano ortogonal, no qual a unidade linear é o centímetro, a área da região limitada pelo gráfico da equação $|x| + |y| = 1$, em centímetros quadrados, é:

A) 1
B) 2
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{2}$

11. 9M6D (UFRJ) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(2x) = |1 - x|$. Determine os valores de **x** para os quais $f(x) = 2$.

12. (PUCPR–2017) Considere os seguintes dados. Pode-se dizer que quando duas variáveis **x** e **y** são tais que a cada valor de **x** corresponde um único valor de **y**, segundo uma lei matemática, diz-se que **y** é função de **x**. Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, que é representada pelo gráfico a seguir.



Analisando o gráfico, julgue as proposições a seguir:

I. **f** é ímpar.
II. **f** é injetora.
III. A lei matemática de **f** é $f(x) = ||x| - 1|$.
IV. **f** é crescente se, e só se, $x > 1$.
V. $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

A) Somente II é correta.
B) Somente I é correta.
C) Somente III e V são corretas.
D) Todas as proposições são corretas.
E) Todas as proposições são falsas.

13. NWJ5 (EN-RJ) A reta no $\mathbb{R}^2$ de equação $2y - 3x = 0$ intercepta o gráfico da função $f(x) = |x|.\frac{x^2 - 1}{x}$ nos pontos **P** e **Q**. Qual a distância entre **P** e **Q**?

A) $2\sqrt{15}$
B) $2\sqrt{13}$
C) $2\sqrt{7}$
D) $\sqrt{7}$
E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

14. 8FZI (UDESC) A área da região fechada delimitada pelas funções $f(x) = |x|$, $g(x) = |x - 2|$ e $h(x) = |x - 3|$, em unidades de área, é igual a:

A) 1
B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
C) $\sqrt{2}$
D) 2
E) $2\sqrt{2}$

SEÇÃO ENEM

01. Em uma gincana escolar, uma das etapas consistia na resolução de um desafio matemático. O professor forneceu uma série de informações acerca de um número **Y**. A primeira equipe que conseguisse determinar esse número venceria a prova.
As informações eram as seguintes:

- O número **Y** é natural.
- O número $|Y - 2| + 4$ encontra-se a 10 unidades da origem da reta real.

Acerca do número **Y**, podemos concluir que

A) é um número primo.
B) possui 6 divisores naturais.
C) é divisor de 56.
D) é um número ímpar.
E) é múltiplo de 3.

02. A elaboração de um programa computacional consiste em fornecer uma série de comandos ao computador para que o mesmo execute uma determinada tarefa. Tais comandos devem ser dados em uma linguagem apropriada, chamada linguagem de programação. É comum que um programador, antes de digitar o programa propriamente dito, crie um algoritmo, ou seja, uma espécie de rascunho que contém a sequência de operações que o futuro programa deverá executar. Um programador escreveu em um papel o seguinte algoritmo:

Passo 1) Dados iniciais
x_0: valor de entrada
Passo 2) Faça $x_0 - 1$.
Passo 3) Se $|x_0 - 1| = 6$, então FIM.
Passo 4) Se $|x_0 - 1| \neq 6$, então VOLTE AO PASSO 2, UTILIZANDO $|x_0 - 1|$ COMO DADO DE ENTRADA.

Após a implementação do programa, foram feitos vários testes. Em um desses testes, verificou-se que o passo 2 foi repetido uma única vez, antes de o programa terminar. O número de valores reais possíveis para o dado de entrada x_0, nessas condições, é igual a

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. B
03. B
04. D
05. D
06. D
07. C
08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A
02. E
03. C
04. C
05. A
06. E
07. E
08. A
09. E
10. B
11. x = –2 ou x = 6
12. C
13. B
14. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %