Função Quadrática

INTRODUÇÃO

Sabe-se que, em cerca de 2000 a.C., os babilônios já estavam familiarizados com equações do segundo grau, aplicadas à resolução de problemas práticos. Um matemático indiano, de nome Bhaskara, promoveu um enorme avanço na resolução de equações do segundo grau ao desenvolver uma fórmula para o cálculo das suas raízes.

A função quadrática é uma das funções mais importantes da Matemática. Seu gráfico descreve uma curva extremamente importante, denominada parábola, que serve, por exemplo, para descrever a trajetória de um projétil lançado obliquamente no ar. Hoje, reconhecemos que a função quadrática é muito indicada para a modelagem de problemas nos quais é necessária a determinação de quantidades máximas ou mínimas, indicadas pelas coordenadas do seu vértice.

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são constantes reais e $a \neq 0$, é dita função quadrática ou função polinomial do segundo grau. Seu gráfico é uma curva chamada **parábola**.

RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Fórmula de Bhaskara

Para encontrar as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, devemos fazer $f(x) = 0$.

Assim, obtemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Logo, temos $ax^2 + bx = -c$.

Multiplicando os dois membros por 4a, obtemos:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Somando b^2 aos dois membros da equação, a fim de completar o quadrado do lado esquerdo, temos:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

O lado esquerdo da equação é um trinômio quadrado perfeito. Logo, podemos escrever:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Denotando pela letra grega delta (Δ) o termo $b^2 - 4ac$, obtemos:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac}$$

Esse resultado é conhecido como Fórmula de Bhaskara.

OBSERVAÇÕES

i) Se $\Delta < 0$, a função não possui raízes reais.

ii) Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais iguais.

iii) Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais distintas.

Exemplo:

Calcular as raízes da função $f(x) = x^2 + x - 12$.

Igualando a expressão a zero, temos $x^2 + x - 12 = 0$.

Ora, $a = 1$, $b = 1$ e $c = -12$.

Daí, $\Delta = 1^2 - 4 \,.\, 1.(-12) \Rightarrow \Delta = 1 + 48 \Rightarrow \Delta = 49$

Assim: $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \,.\, 1} \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm 7}{2}$

Denotando por x_1 e x_2 as raízes procuradas, temos:

$$x_1 = \frac{-1 - 7}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \text{ e } x_2 = \frac{-1 + 7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Portanto, $S = \{-4, 3\}$.

Soma e produto das raízes

Sejam x_1 e x_2 as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Valem as seguintes relações:

i) Soma das raízes da função

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

ii) Produto das raízes da função

$$\boxed{x_1.x_2 = \frac{c}{a}}$$

Exemplo:

Calcular, utilizando as relações de soma e produto, as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{(-5)}{1} \Rightarrow x_1 + x_2 = 5 \text{ e}$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1.x_2 = \frac{6}{1} \Rightarrow x_1.x_2 = 6$$

Assim, os números que satisfazem essas condições são 2 e 3.

Portanto, $S = \{2, 3\}$.

FORMA FATORADA DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, que possua raízes reais x_1 e x_2, pode ser escrita como um produto de duas funções do primeiro grau.

$$\boxed{f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

Exemplo:

Escrever a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, na forma fatorada.

Cálculo das raízes:

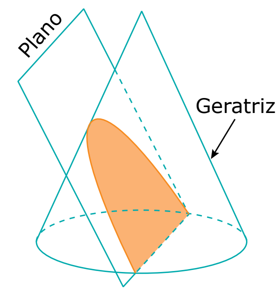
$$\Delta = (-6)^2 - 4 \,.\, 2 \,.\, 4 \Rightarrow \Delta = 36 - 32 \Rightarrow \Delta = 4$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2\,.\,2} \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2}{4} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 2.$$

Assim, a função $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, na forma fatorada, é $f(x) = 2(x - 1)(x - 2)$.

GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Já sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Tal curva é definida, geometricamente, como a interseção de um cone de revolução e um plano paralelo a uma geratriz do cone, conforme figura a seguir:



Para esboçar o gráfico de uma função quadrática, devemos seguir a seguinte sequência:

i) Determinar a concavidade da parábola.

Quando **a** (coeficiente de x^2) é positivo, a parábola tem concavidade para cima.

Quando **a** é negativo, a parábola tem concavidade para baixo.

ii) Determinar a interseção da parábola com o eixo Oy.

A parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, c).

iii) Determinar as interseções da parábola com o eixo Ox (raízes).

Conforme visto anteriormente, a existência ou não de raízes reais depende do valor de Δ, na Fórmula de Bhaskara.

Se $\Delta < 0$, a função não tem raízes reais, ou seja, a parábola não intercepta o eixo das abscissas.

Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais iguais, ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas em um único ponto (tangencia o eixo Ox).

Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais distintas, ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos.

iv) Determinar as coordenadas (x_v, y_v) do vértice **V** da parábola.

Vértice é o ponto de interseção da parábola com o eixo de simetria. Como x_v pertence ao eixo de simetria, as abscissas dispostas de maneira simétrica em relação a x_v possuem a mesma imagem.

Logo, x_v é a média aritmética das raízes.

$$\boxed{x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ou } x_v = -\frac{b}{2a}}$$

Substituindo, na função polinomial de 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos:

$$y_v = ax_v^2 + b.x_v + c \underset{x_v = \frac{-b}{2a}}{\Rightarrow} \boxed{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Portanto, o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola.

Determinados esses valores, basta esboçarmos a parábola.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Fazer o esboço da parábola $y = 2x^2 - 3x + 1$.

Resolução:

Concavidade:

Temos $a = 2 > 0$, ou seja, a concavidade está voltada para cima.

Interseção com o eixo Oy:

Temos que $c = 1$, ou seja, a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$.

Raízes:

$\Delta = (-3)^2 - 4 . 2 . 1 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 \Rightarrow \Delta = 1$

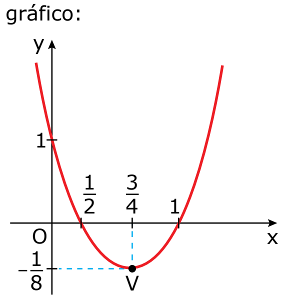
$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = 1$$

Logo, as raízes são $\frac{1}{2}$ e 1.

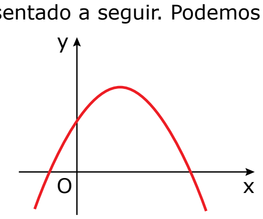
Vértice $V = (x_v, y_v)$:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{(-3)}{2.2} = \frac{3}{4} \\ y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{1}{4.2} = -\frac{1}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow V = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

Esboço do gráfico:



02. (FAFI-MG) O gráfico de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ está representado a seguir. Podemos afirmar que:



A) $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$.
B) $a < 0$, $b < 0$ e $c > 0$.
C) $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$.
D) $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$.
E) $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$.

Resolução:

Como a concavidade da parábola está voltada para baixo, temos $a < 0$. Além disso, observe que a interseção do gráfico com o eixo Oy ocorre em um ponto de ordenada positiva. Conforme visto anteriormente, esse ponto é igual a $(0, c)$. Logo, temos que $c > 0$.

Para investigar o sinal do **b**, vamos considerar a abscissa do vértice da parábola. Sabemos que $x_v = -\frac{b}{2a}$.

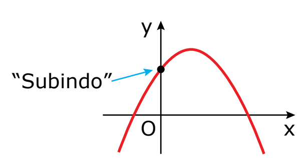
Pelo gráfico, verificamos que x_v é positivo. Como **a** é negativo, temos que $-b$ deve ser negativo. Isso ocorre somente se **b** for positivo.

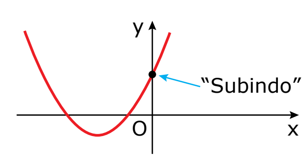
Logo, $b > 0$.

Regra prática para a determinação do sinal de b

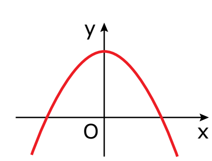
No exercício anterior, mostramos uma maneira de determinar o coeficiente **b**. Veremos agora uma regra prática para a obtenção desse sinal.

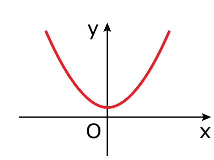
i) Se a função de 2º grau estiver num trecho crescente quando intercepta o eixo das ordenadas, então $b > 0$.



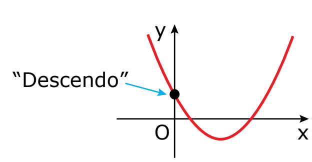


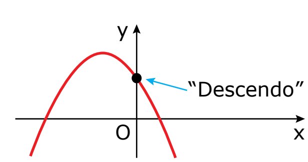
ii) Se o vértice encontra-se exatamente no eixo das ordenadas, então $b = 0$.





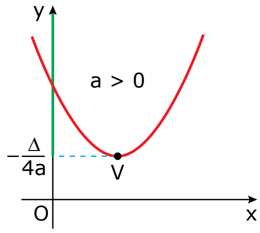
iii) Se a função de 2º grau estiver em um trecho decrescente quando intercepta o eixo das ordenadas, então $b < 0$.





VALOR MÁXIMO E VALOR MÍNIMO DA FUNÇÃO

Se a > 0, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ apresenta concavidade voltada para cima. Nesse caso, é fácil constatar que existe um valor mínimo assumido por **y**, que coincide com a ordenada do vértice y_v. Essa ordenada é o valor mínimo da função.

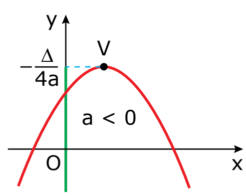


i) $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo da função.

ii) A imagem (Im) da função, caso o domínio seja o conjunto dos números reais, é dada por:

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Se a < 0, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui concavidade voltada para baixo. Nesse caso, verificamos que existe um valor máximo assumido por **y** e, analogamente, dizemos que a ordenada do vértice y_v é o valor máximo da função.



i) $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo da função.

ii) A imagem (Im) da função, caso o domínio seja o conjunto dos números reais, é dada por:

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

OBSERVAÇÃO

Caso o domínio de função não seja o conjunto dos números reais, o conjunto imagem dessa função pode depender das imagens das extremidades do domínio. O exercício resolvido a seguir ilustra esse ponto.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

03. (UFU-MG) Sendo **x** e **y** números reais tais que $0 \leq x \leq 3$ e $y = x^2 - 2x$, os valores mínimo e máximo de **y** são, nessa ordem, iguais a

A) 0 e 6.
B) −1 e 9.
C) −1 e 6.
D) −1 e 3.
E) 3 e 9.

Resolução:

Raízes da função:

$x^2 - 2x = 0$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 \Rightarrow \Delta = 4$

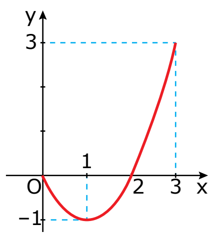
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2$$

Portanto, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Vértice:

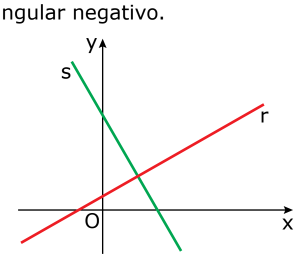
$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\frac{b}{2.a} \Rightarrow x_v = -\frac{(-2)}{2 \cdot 1} \Rightarrow x_v = 1 \\ y_v = -\frac{\Delta}{4.a} \Rightarrow y_v = -\frac{4}{4 \cdot 1} \Rightarrow y_v = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow V = (1, -1)$$

A ordenada do ponto **V** é o valor mínimo da função, qualquer que seja o intervalo de **x** considerado. Para encontrar o valor máximo, primeiramente deve-se perceber que a função está definida no intervalo $0 \leq x \leq 3$. Logo, os candidatos de valor máximo são $y(0) = 0$ e $y(3) = 3$ (extremidades do intervalo do domínio). Como $y(3) > y(0)$, o valor máximo de **y** é 3. Observe o esboço do gráfico da função.

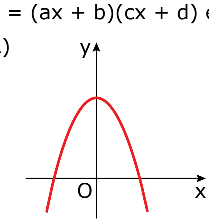


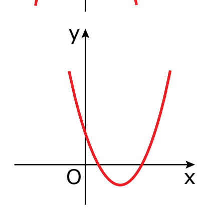
Os valores mínimo e máximo de **y** são, respectivamente, −1 e 3.

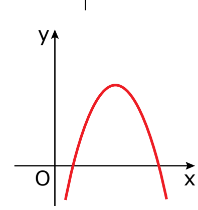
04. (UFV-MG) Na figura a seguir, a reta r: $y = ax + b$ tem coeficiente angular positivo, e a reta s: $y = cx + d$ tem coeficiente angular negativo.

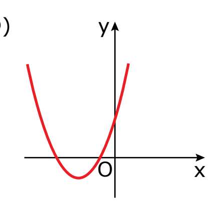


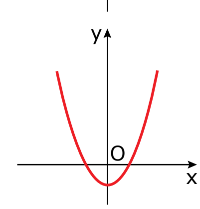
A figura que melhor representa o gráfico do trinômio $y = (ax + b)(cx + d)$ é:

A)


B)


C)


D)


E)


Resolução:

Efetuando a multiplicação dos termos, obtemos $y = (ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Trata-se de uma função quadrática. Analisando as retas dadas, temos que **a** é positivo, **b** é positivo, **c** é negativo e **d** é positivo. Portanto, ac é negativo (concavidade voltada para baixo). Além disso, bd é positivo, ou seja, a parábola intercepta o eixo Oy em um ponto de ordenada positiva. Entre os gráficos, o único com essas características é o da alternativa A.

05. (Fafeid-MG) No instante t = 0, uma bola é atirada verticalmente para cima, de uma altura de 5 cm acima do solo. Após **t** segundos, a sua altura **s**, em cm, acima do solo, é dada por $s = 5 + 40t - 16t^2$. Assim, é correto afirmar que a altura máxima da bola, acima do solo, em cm, é igual a

A) 30.

B) 25.

C) 55.

D) 20.

Resolução:

O gráfico de s(t) é parabólico, com concavidade voltada para baixo. Assim, a altura máxima corresponde à ordenada do vértice:

$\Delta = 40^2 - 4(-16)5 \Rightarrow \Delta = 1\,600 + 320 \Rightarrow \Delta = 1\,920$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{1\,920}{4(-16)} \Rightarrow y_v = -\frac{1\,920}{-64} \Rightarrow y_v = 30$$

A altura máxima alcançada é 30 cm.

06. (PUC Minas) Uma empresa fabrica **x** peças por dia, e seu lucro, em reais, é dado pela função $L(x) = 100(9 - x)(x - 1)$. O lucro máximo obtido pela empresa, por dia, em reais, é

A) 1 200.

B) 1 300.

C) 1 400.

D) 1 500.

E) 1 600.

Resolução:

Efetuando os produtos indicados, obtemos:

$L(x) = -100x^2 + 1\,000x - 900$

Observe que o lucro L(x) é uma função quadrática do número de peças **x**. Como a concavidade está voltada para baixo, o lucro máximo corresponde à ordenada do vértice.

$\Delta = 1\,000^2 - 4(-100)(-900) \Rightarrow$

$\Delta = 1\,000\,000 - 360\,000 \Rightarrow \Delta = 640\,000$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{640\,000}{4(-100)} \Rightarrow y_v = -\frac{640\,000}{-400} \Rightarrow$$

$y_v = 1\,600$

O lucro máximo é igual a R$ 1 600,00.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio) Sejam **f** e **g** funções reais dadas por $f(x) = 2 + x^2$ e $g(x) = 2 + x$.

Os valores de **x**, tal que f(x) = g(x), são

A) x = 0 ou x = −1.

B) x = 0 ou x = 2.

C) x = 0 ou x = 1.

D) x = 2 ou x = −1.

E) x = 0 ou $x = \frac{1}{2}$.

02. EEET (UEG-GO) Um processo de produção é modelado pela seguinte função $f(t) = -\alpha t^2 + 160\alpha t$, em que **t** é a temperatura do processo em graus Celsius e α é uma constante positiva. Para que se atinja o máximo da produção, a temperatura deve ser

A) −40 °C.

B) −80 °C.

C) 0 °C.

D) 40 °C.

E) 80 °C.

03. MA8Y (IFBA) Jorge planta tomates em uma área de sua fazenda, e resolveu diminuir a quantidade **Q** (em mil litros) de agrotóxicos em suas plantações, usando a lei $Q(t) = 7 + t^2 - 5t$, onde **t** representa o tempo, em meses, contado a partir de t = 0. Deste modo, é correto afirmar que a quantidade mínima de agrotóxicos usada foi atingida em

A) 15 dias.

B) 1 mês e 15 dias.

C) 2 meses e 10 dias.

D) 2 meses e 15 dias.

E) 3 meses e 12 dias.

04. (FGV-SP–2020) O número de turistas **x** que comparecem diariamente para um passeio de barco, relaciona-se com o preço **p** em reais cobrado por pessoa através da relação $p = 300 - 2x$.

Se o barco tiver 100 lugares, qual a receita máxima que pode ser obtida por dia?

A) R$ 10 000,00

B) R$ 11 500,00

C) R$ 10 750,00

D) R$ 11 000,00

E) R$ 11 250,00

05. THE4 (UECE) Sejam f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções quadráticas dadas por $f(x) = -x^2 + 8x - 12$ e $g(x) = x^2 + 8x + 17$. Se **M** é o valor máximo de **f** e **m** o valor mínimo de **g**, então, o produto M.m é igual a

A) 8.

B) 6.

C) 4.

D) 10.

MATEMÁTICA

06. QY49

(UCS-RS) O lucro obtido por um distribuidor com a venda de caixas de determinada mercadoria é dado pela expressão $L(x) = \left(\frac{6}{5}x - \frac{0,01}{5}x^2\right) - 0,6x$, em que **x** denota o número de caixas vendidas. Quantas caixas o distribuidor deverá vender para que o lucro seja máximo?

A) 60
B) 120
C) 150
D) 600
E) 1 500

07. L5RZ

(UFJF-MG) Um ônibus de 54 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa cobrou de cada passageiro a quantia de R$ 55,00 e mais R$ 2,50 por lugar vago. O número de passageiros que dá à empresa rentabilidade máxima é

A) 16.
B) 24.
C) 38.
D) 49.
E) 54.

08. POJF

(CEFET-MG) O saldo **S** de uma empresa **A** é calculado em função do tempo **t**, em meses, pela equação $S(t) = 3t^2 - 39t + 66$.

Considerando essa função, o saldo da empresa é negativo entre o

A) 2º e o 11º mês.
B) 4º e o 16º mês.
C) 1º e 4º e entre o 5º do 16º mês.
D) 2º e 5º e entre o 7º do 14º mês.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFRGS-RS) Dada a função **f**, definida por $f(x) = x^2 + 9 - 6x$, o número de valores de **x** que satisfazem a igualdade $f(x) = -f(x)$ é

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

02. SGJY

(Albert Einstein) Suponha que, em janeiro de 2016, um economista tenha afirmado que o valor da dívida externa do Brasil era de 30 bilhões de reais. Nessa ocasião, ele também previu que, a partir de então, o valor da dívida poderia ser estimado pela lei $D(x) = -\frac{9}{2}.x^2 + 18x + 30$ em que **x** é o número de anos contados a partir de janeiro de 2016 (x = 0). Se sua previsão for correta, o maior valor que a dívida atingirá, em bilhões de reais, e o ano em que isso ocorrerá, são, respectivamente,

A) 52 e 2020.
B) 52 e 2018.
C) 48 e 2020.
D) 48 e 2018.

03. DSTH

(UEMG) O lucro de uma empresa é dado pela expressão matemática L = R – C, em que **L** é o lucro, **C** o custo da produção e **R** a receita do produto.

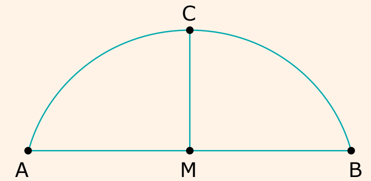
Uma fábrica de tratores produziu **n** unidades e verificou que o custo de produção era dado pela função $C(n) = n^2 - 1\,000n$ e a receita representada por $R(n) = 5\,000n - 2n^2$.

Com base nas informações acima, a quantidade **n** de peças a serem produzidas para que o lucro seja máximo corresponde a um número do intervalo:

A) $580 < n < 720$
B) $860 < n < 940$
C) $980 < n < 1\,300$
D) $1\,350 < n < 1\,800$

04. CBAC

(UNIFESP) A figura mostra um arco parabólico ACB de altura CM = 16 cm, sobre uma base AB de 40 cm. **M** é o ponto médio de AB.



A altura do arco, em centímetros, em um ponto da base que dista 5 cm de **M**, é

A) 15.
B) 14.
C) 13.
D) 12.
E) 10.

05. K192

(ESPM-SP) O lucro (em reais) obtido com a produção e venda de **x** unidades de um certo produto é dado pela função L = k.(x + 10)(x – 50), em que **k** é uma constante negativa. Podemos avaliar que o maior lucro possível será obtido para **x** igual a

A) 24.
B) 22.
C) 15.
D) 20.
E) 18.

06. 43PA

(UFSM-RS) Um jogador de basquete lança uma bola em direção à cesta e ela descreve um arco de parábola. A lei que descreve essa parábola é $h(t) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{5}{3}t + 2$, em que **t** é o tempo decorrido em segundos após o lançamento, e **h** é a altura em metros. Assim, é correto afirmar:

A) A bola atinge o solo em 5 s.
B) A imagem de h(t) é dada pelo conjunto $\left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{49}{9}\right\}$.
C) O vértice da parábola é o ponto $\left(\frac{5}{2}, \frac{49}{12}\right)$.
D) Para todo $t \in (-6, 1)$, $h(t) \geq 0$.
E) A altura máxima atingida pela bola é igual a $\frac{7}{3}$ m.

07. OVDX

(UECE) No plano, com o sistema de coordenadas cartesianas usual, o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 2mx + 9$ é uma parábola que tangencia o eixo das abscissas, e um de seus pontos com ordenada igual a 9 tem abscissa negativa. Nessas condições, o valor do parâmetro **m** está entre

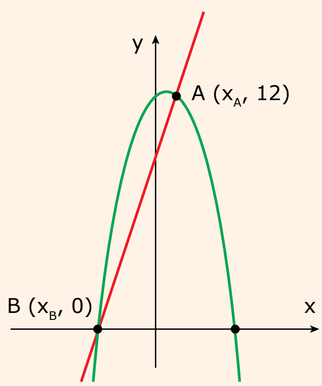
A) 1,5 e 2,5.

B) 2,5 e 3,5.

C) 3,5 e 4,5.

D) 4,5 e 5,5.

08. (CMRJ–2020) No mesmo plano cartesiano a seguir estão representados os gráficos das funções reais de variáveis reais, **p** e **r**, definidas por $p(x) = -x^2 + x + 12$ e $r(x) = kx + m$. Os pontos $A(x_A, 12)$ e $B(x_B, 0)$ são interseções dessas funções.



Nessas condições, o valor de k − m é:

A) −6

B) −4

C) 4

D) 6

E) 12

09. (Albert Einstein–2018) Para arrecadar recursos para a festa de formatura, os formandos de uma escola decidiram vender convites para um espetáculo. Cada formando recebeu para vender um número de convites que é igual ao número total de formandos mais 3. Se todos os formandos conseguirem vender todos os convites a 5 reais, o dinheiro arrecadado será menor do que R$ 26 270,00.

Nessas condições, o maior número de formandos que essa escola pode ter é múltiplo de

A) 12.

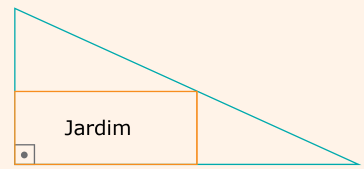
B) 13.

C) 14.

D) 15.

10. XPGF

(UEG-GO) Em um terreno, na forma de um triângulo retângulo, será construído um jardim retangular, conforme figura a seguir:



Sabendo-se que os dois menores lados do terreno medem 9 m e 4 m, as dimensões do jardim, para que ele tenha a maior área possível, serão, respectivamente,

A) 2,0 m e 4,5 m.

B) 3,0 m e 4,0 m.

C) 3,5 m e 5,0 m.

D) 2,5 m e 7,0 m.

11. NVCQ

(PUC-SP) Para abastecer seu estoque, um comerciante comprou um lote de camisetas ao custo de 16 reais a unidade. Sabe-se que em um mês, no qual vendeu (40 – x) unidades dessas camisetas ao preço unitário de **x** reais, o seu lucro foi máximo. Assim sendo, pela venda de tais camisetas nesse mês, o percentual de aumento repassado aos clientes, calculado sobre o preço unitário que o comerciante pagou na compra do lote, foi de

A) 80%.

B) 75%.

C) 60%.

D) 45%.

12. (USF-SP) A empresa **X** vende seus produtos de modo que o preço unitário (**p**) dependa da quantidade (**q**) de unidades vendidas. A relação de dependência entre as variáveis **p** e **q** é dada por: $p(q) = 40 - 0,2q$.

Em relação a essa situação, analise as afirmações a seguir.

I. Para que a receita da empresa seja R$ 2 000,00 é necessário produzir e vender 100 unidades.

II. 50 ou 150 unidades vendidas geram a mesma receita para a empresa.

III. A receita máxima da empresa nessa situação é R$ 2 000,00.

É correto o que se afirma em

A) I, II e III.

B) apenas II e III.

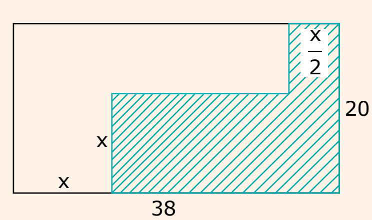
C) apenas I.

D) apenas II.

E) apenas I e III.

13. SHD1

(ESPM-SP) Um arquiteto projetou uma casa para ser construída num terreno retangular de 20 m por 38 m. A superfície ocupada pela casa, representada pela parte hachurada, deve atender às medidas indicadas na figura a seguir



A maior área que essa casa pode ter é de

A) 412 m².

B) 384 m².

C) 362 m².

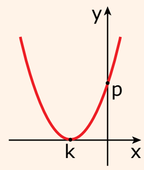
D) 428 m².

E) 442 m².

MATEMÁTICA

14. 8HJS

(Mackenzie-SP) Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + mx + (8 - m)$. O valor de k + p é:



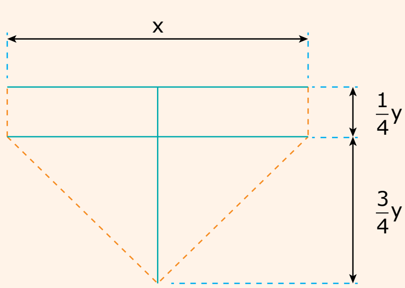
A) −2.
B) 2.
C) −1.
D) 1.
E) 3.

15. (UFV-MG) Um retângulo tem três de seus vértices nos pontos (0, 0), (x, 0) e (0, y), sendo **x** e **y** positivos, e o quarto vértice encontra-se sobre a reta $2x + 3y = 6$. Nessas condições, o retângulo de área máxima tem perímetro com medida igual a

A) 4.
B) 6.
C) 5.
D) 7.

16. DJVE

(UFPA) Um estudante, ao construir uma pipa, deparou-se com o seguinte problema: possuía uma vareta de miriti com 80 centímetros de comprimento, que deveria ser dividida em três varetas menores, duas necessariamente com o mesmo comprimento **x**, que será a largura da pipa, e outra de comprimento **y**, que determinará a altura da pipa. A pipa deverá ter formato pentagonal, como na figura a seguir, de modo que a altura da região retangular seja $\frac{1}{4}y$, enquanto a da triangular seja $\frac{3}{4}y$. Para garantir maior captação de vento, ele necessita que a área da superfície da pipa seja a maior possível.

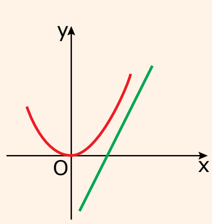


A pipa de maior área que pode ser construída, nessas condições, possui área igual a

A) 350 cm².
B) 400 cm².
C) 450 cm².
D) 500 cm².
E) 550 cm².

17. 1YHØ

(UFMG) Observe esta figura:



Nela, estão representados os gráficos das funções $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e $g(x) = 3x - 5$. Considere os segmentos paralelos ao eixo y, com uma das extremidades sobre o gráfico da função **f** e a outra extremidade sobre o gráfico da função **g**. Entre esses segmentos, seja **S** o que tem o menor comprimento. Assim, o comprimento do segmento **S** é

A) $\frac{1}{2}$.
B) $\frac{3}{4}$.
C) 1.
D) $\frac{5}{4}$.

18. HZSW

(ACAFE-SC) A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida para todo **x** real, pode ser representada através da equação dada por $f(x - 1) - f(x) = 3 + 4x$. Sabendo que o gráfico da função f(x) é uma parábola e que o valor máximo dessa função é dado por uma constante real acrescida do valor do coeficiente independente da função, pode-se concluir que o valor dessa constante é

A) $\frac{25}{8}$.
B) $\frac{25}{4}$.
C) $\frac{1}{8}$.
D) $\frac{7}{8}$.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. KGAN

(Enem–2017) A igreja de São Francisco de Assis, obra arquitetônica modernista de Oscar Niemeyer, localizada na Lagoa da Pampulha, em Belo Horizonte, possui abóbadas parabólicas. A seta na figura 1 ilustra uma das abóbadas na entrada principal da capela. A figura 2 fornece uma vista frontal desta abóbada, com medidas hipotéticas para simplificar os cálculos.

Figura 1

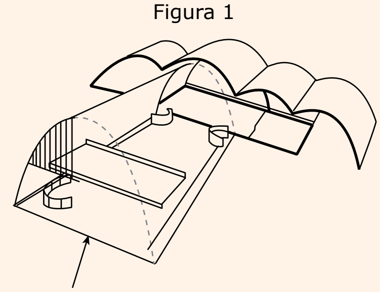
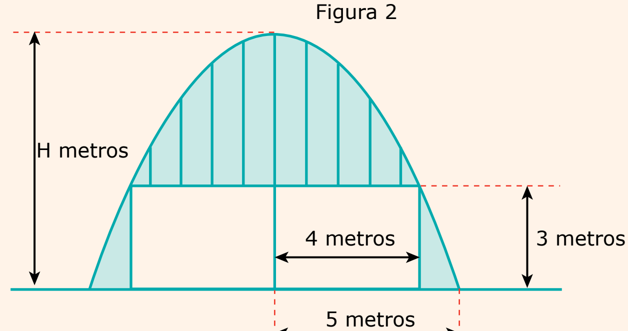


Figura 2



Qual a medida da altura **H**, em metro, indicada na figura 2?

A) $\frac{16}{3}$
B) $\frac{31}{5}$
C) $\frac{25}{4}$
D) $\frac{25}{3}$
E) $\frac{75}{2}$

02. (Enem–2017) A única fonte de renda de um cabeleireiro é proveniente de seu salão. Ele cobra R\$ 10,00 por cada serviço realizado e atende 200 clientes por mês, mas está pensando em aumentar o valor cobrado pelo serviço. Ele sabe que cada real cobrado a mais acarreta uma diminuição de 10 clientes por mês.

Para que a renda do cabeleireiro seja máxima, ele deve cobrar por serviço o valor de

A) R\$ 10,00.
B) R\$ 10,50.
C) R\$ 11,00.
D) R\$ 15,00.
E) R\$ 20,00.

03. JLCZ

(Enem) Um túnel deve ser lacrado com uma tampa de concreto. A seção transversal do túnel e a tampa de concreto têm contornos de um arco de parábola e mesmas dimensões. Para determinar o custo da obra, um engenheiro deve calcular a área sob o arco parabólico em questão. Usando o eixo horizontal no nível do chão e o eixo de simetria da parábola como eixo vertical, obteve a seguinte equação para a parábola:

$y = 9 - x^2$, sendo **x** e **y** medidos em metros.

Sabe-se que a área sob uma parábola como esta é igual a $\frac{2}{3}$ da área do retângulo cujas dimensões são, respectivamente, iguais à base e à altura da entrada do túnel. Qual é a área da parte frontal da tampa de concreto, em metro quadrado?

A) 18
B) 20
C) 36
D) 45
E) 54

04. (Enem) Um estudante está pesquisando o desenvolvimento de certo tipo de bactéria. Para essa pesquisa, ele utiliza uma estufa para armazenar as bactérias. A temperatura no interior dessa estufa, em graus Celsius, é dada pela expressão $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, em que **h** representa as horas do dia. Sabe-se que o número de bactérias é o maior possível quando a estufa atinge sua temperatura máxima e, nesse momento, ele deve retirá-las da estufa. A tabela associa intervalos de temperatura, em graus Celsius, com as classificações: muito baixa, baixa, média, alta e muito alta.

Intervalos de temperatura (°C)	Classificação
$T < 0$	Muito baixa
$0 \le T \le 17$	Baixa
$17 < T < 30$	Média
$30 \le T \le 43$	Alta
$T > 43$	Muito alta

Quando o estudante obtém o maior número possível de bactérias, a temperatura no interior da estufa está classificada como

A) muito baixa.
B) baixa.
C) média.
D) alta.
E) muito alta.

05. (Enem) Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial **f**, de grau menor que 3, para alterar as notas **x** da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é:

A) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

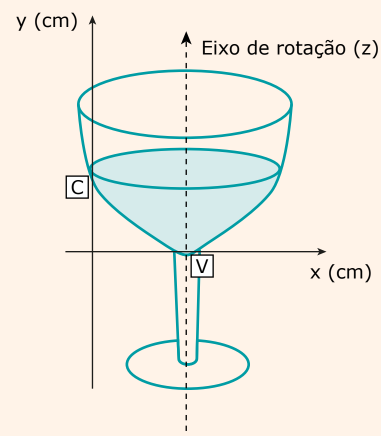
B) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

C) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

D) $y = \frac{4}{5}x + 2$

E) $y = x$

06. (Enem) A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo **z**, conforme mostra a figura



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$, em que **C** é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto **V**, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo **x**.

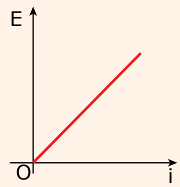
Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

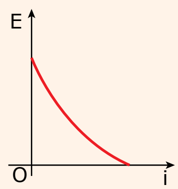
A) 1.
B) 2.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

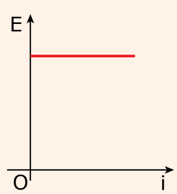
MATEMÁTICA

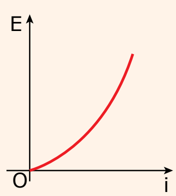
07. (Enem) Existem, no mercado, chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (**P**) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (**R**) e o quadrado da corrente elétrica (**i**) que por ele circula. O consumo de energia elétrica (**E**), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho.

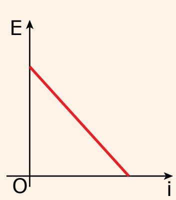
Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida (**E**) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (**i**) que circula por ele?

A) 

B) 

C) 

D) 

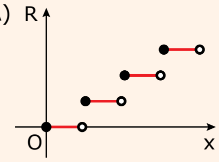
E) 

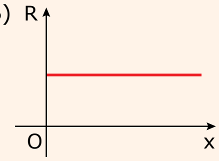
Instrução: Texto para as questões **08** e **09**.

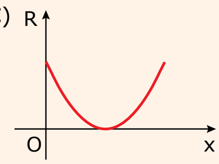
Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo **R** a rapidez de propagação, **P** o público-alvo e **x** o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

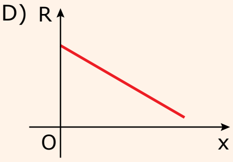
$R(x) = k.x.(P - x)$, em que **k** é uma constante positiva, característica do boato.

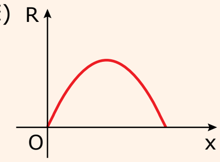
08. (Enem) O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para **x** real, é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

09. (Enem) Considerando o modelo anteriormente descrito, se o público-alvo é de 44 000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

A) 11 000
B) 22 000
C) 33 000
D) 38 000
E) 44 000

SEÇÃO FUVEST / UNICAMP / UNESP

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	04. E	07. C
02. E	05. C	08. A
03. D	06. C	

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B	07. B	13. B
02. D	08. A	14. B
03. C	09. C	15. C
04. A	10. A	16. D
05. D	11. B	17. A
06. C	12. A	18. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D	04. D	07. D
02. D	05. A	08. E
03. C	06. E	09. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %