GELSON IEZZI

2ª edição

FUNDAMENTOS DE

MATEMÁTICA ELEMENTAR

3

TRIGONOMETRIA

121 exercícios resolvidos
298 exercícios propostos com resposta
215 testes de vestibular com resposta

ATUAL EDITORA

Capa

Roberto Franklin Rondino
Sylvio Ulhoa Cintra Filho
Rua Inhambu, 1235 – S. Paulo

Composição e desenhos

AM Produções Gráficas Ltda.
Rua Castro Alves, 135 – S. Paulo

Artes

Atual Editora Ltda.

Fotolitos

H.O.P. Fotolitos Ltda.
Rua Delmira Ferreira, 325 – S. Paulo

Impressão e acabamento

Companhia Melhoramentos de São Paulo
Rua Tito, 479 – S. Paulo

CIP-Brasil. Catalogação-na-Fonte
Câmara Brasileira do Livro, SP

F977
v.1-7

Fundamentos de matemática elementar (por) Gelson Iezzi (e outros) São Paulo, Atual Ed., 1977-78.

Co-autores: Carlos Murakami, Osvaldo Dolce e Samuel Hazzan; a autoria dos volumes individuais varia entre os 4 autores.

Conteúdo: v.1. Conjuntos, funções. 1977.-v.2. Logaritmos. 1977.-v.3. Trigonometria. 1978.-v.4. Seqüências, matrizes determinantes, sistemas. 1977.-v.5. Combinatória, probabilidade. 1977.-v.6. Complexos, polinômios, equações. 1977.-v.7. Geometria analítica. 1978.

1. Matemática (2º grau) I. Dolce, Osvaldo, 1938- II. Iezzi, Gelson, 1939- III. Hazzan, Samuel, 1946- IV. Murakami, Carlos, 1943-

77-1473 CDD-510

Índice para catálogo sistemático:
1. Matemática 510

ATUAL EDITORA LTDA
Rua José Antônio Coelho, 785
Telefones: 71-7795 e 549-1720
CEP 04011 – São Paulo – SP – Brasil

APRESENTAÇÃO

"Fundamentos de Matemática Elementar" é uma coleção em dez volumes elaborada com a pretensão de dar ao estudante uma visão global da Matemática, ao nível da escola de 2º grau. Desenvolvendo os programas em geral adotados para o curso colegial, os "Fundamentos" visam aos alunos em preparativos para exames vestibulares, aos universitários que necessitam rever a Matemática Elementar e também, como é óbvio, àqueles alunos de colegial mais interessados na "rainha das ciências".

No desenvolvimento dos inúmeros capítulos dos livros de "Fundamentos" procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática Elementar, as proposições e teoremas estão sempre acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das séries de exercícios, buscamos sempre uma ordenação crescente de dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a questões que envolvem outros assuntos já vistos, obrigando o estudante a uma revisão. A seqüência do texto sugere uma dosagem para teoria e exercícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobre alguma novidade que aparece. No final do volume o aluno pode encontrar a resposta para cada problema proposto e assim ter seu reforço positivo ou partir à procura do erro cometido.

A última parte de cada volume é constituída por testes de vestibulares até 1.977 selecionados e resolvidos o que pode ser usado para uma revisão da matéria estudada.

Queremos consignar aqui nossos agradecimentos sinceros ao Prof. Dr. Fernando Furquim de Almeida cujo apoio foi imprescindível para que pudéssemos homenagear nesta coleção alguns dos grandes matemáticos, relatando fatos notáveis de suas vidas e suas obras.

Finalmente, como há sempre uma enorme distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os autores

ÍNDICE

CAPÍTULO I – ARCOS E ÂNGULOS

CAPÍTULO II – FUNÇÕES CIRCULARES

CAPÍTULO III – RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

CAPÍTULO IV — REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

CAPÍTULO V — ARCOS NOTÁVEIS

CAPÍTULO VI — TRANSFORMAÇÕES

CAPÍTULO VII — EQUAÇÕES

CAPÍTULO VIII — INEQUAÇÕES

CAPÍTULO IX — TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

CAPÍTULO X — TRIÂNGULOS QUAISQUER

Augustin-Louis Cauchy
(1789 - 1857)

Engenheiro de Napoleão era monarquista

Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris, logo após a queda da Bastilha. Cursou a Escola Politécnica, onde mais tarde foi professor, pois gostava muito de ensinar, e aceitou a cadeira de Monge na Academia, quando este foi demitido. Ainda como estudante contou com o apoio de Laplace e Lagrange que se interessaram por seu trabalho.

Cauchy chegou a ser um dos engenheiros militares de Napoleão. Católico devoto e reacionário convicto, defendia vigorosamente a Ordem dos Jesuitas e quando Carlos X, seu rei, foi exilado, também deixou Paris, recebendo mais tarde o título de barão como recompensa por sua fidelidade.

Produziu grande quantidade de livros e memórias, a maioria dedicada à Matemática Pura e sempre dando ênfase às demonstrações rigorosas.

Uma de suas características marcantes era que, obtendo um novo resultado, logo tratava de publicá-lo, ao contrário do que fazia Gauss. Assim, contribuiu amplamente com suas memórias para o "Journal" da Escola Politécnica e para os "Comptes Rendus" (Notícias) da Academia, onde se aplicou, a partir de 1814, em teoria das funções de variáveis complexas, da qual é um dos criadores.

Data de 1812 seu primeiro trabalho sobre determinantes, com 84 páginas, passando a aplicá-los nas mais diversas situações como, por exemplo, na propagação de ondas.

Entre 1821 e 1829, publicou três obras que deram ao Cálculo elementar o caráter que tem hoje, definindo precisamente limite, derivada e integral; os conceitos de funções e de limites de funções eram fundamentais. Estas obras de Cauchy foram desenvolvidas quase ao mesmo tempo e com idéias semelhantes por Bolzano, um padre tcheco.

Cauchy está ligado a muitos teoremas sobre séries infinitas, essenciais à teoria das funções, e em Geometria conseguiu generalizar a fórmula poliedral de Descartes-Euler.

Em Teoria dos Números, provou o teorema de Fermat, um dos mais difíceis e produto de pesquisas iniciadas pelos pitagóricos cerca de 2300 anos antes.

Juntamente com Navier, Cauchy foi fundador da teoria matemática da Elasticidade e também auxiliou o desenvolvimento da Mecânica celeste.

Cauchy, tanto quanto seu contemporâneo Gauss, contribuiu para quase todas as partes da Matemática e sua grande quantidade de obras publicadas só é superada por Euler.

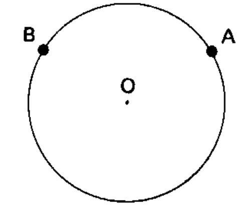
CAPÍTULO I

ARCOS E ÂNGULOS

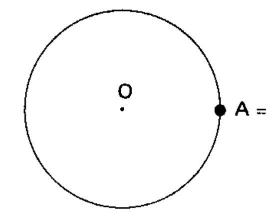
I. ARCOS DE CIRCUNFERÊNCIA

1. Definição

Dados dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes. Cada uma dessas partes, que incluem A e B, é denominada *arco de circunferência* $\overset{\frown}{AB}$.

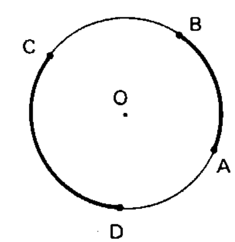


Em particular, se os pontos A e B coincidem, eles determinam dois arcos: um deles é um ponto (denominado *arco nulo*) e o outro é a circunferência (denominado *arco de uma volta*).

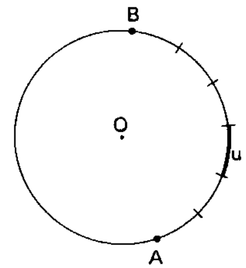


II. MEDIDAS DE ARCOS

2. Se queremos comparar os "tamanhos" de dois arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ somos naturalmente levados a estabelecer um método que permita saber qual deles é o maior ou se são iguais. Este problema é resolvido estabelecendo-se um método para medir arcos.



3. Medida de um arco $\overset{\frown}{AB}$ em relação a um arco unitário u (u não nulo e de mesmo raio que $\overset{\frown}{AB}$) é o número real que exprime quantas vezes o arco u "cabe" no arco $\overset{\frown}{AB}$. Assim, na figura ao lado, o arco u cabe 6 vezes no arco $\overset{\frown}{AB}$, então a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 6, isto é, arco $\overset{\frown}{AB}$ = 6 · arco u.



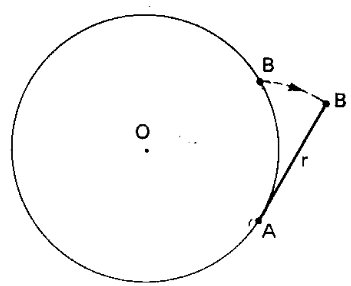
4. Unidades

Para evitar as confusões que ocorreriam se cada um escolhesse uma unidade de u para medir o mesmo arco $\overset{\frown}{AB}$, limitamos as unidades de arcos a apenas duas: o *grau* e o *radiano.*

Grau (símbolo °) é um arco unitário igual a $\frac{1}{360}$ da circunferência que contém o arco a ser medido.

Radiano (símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.

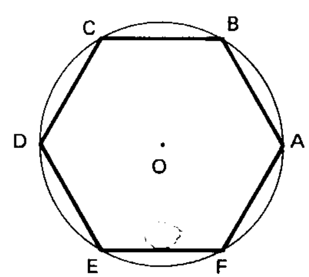
Assim, ao afirmar que um arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 1 rad estamos dizendo que "esticando" o arco $\overset{\frown}{AB}$ obtemos um segmento de reta AB cuja medida é exatamente o raio da circunferência.



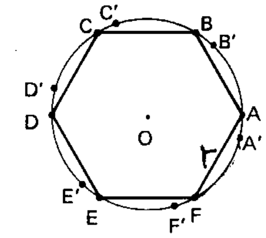
5. É evidente que uma circunferência mede 360°, porém, já não é tão fácil dizer quantos radianos mede uma circunferência.

Podemos chegar a uma noção intuitiva do valor dessa medida, considerando a seguinte construção:

I) Em uma circunferência de centro O e raio r inscrevemos um hexágono regular ABCDEF. Cada lado do hexágono tem comprimento r:
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = r$



II) A circunferência fica dividida em 6 arcos de medidas iguais
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA}$
e, sendo o comprimento do arco sempre maior que o comprimento da corda correspondente, todos esses arcos são maiores que 1 rad.



III) Em cada um dos citados arcos "cabe" 1 rad:
$$\overset{\frown}{AB'} = \overset{\frown}{BC'} = \overset{\frown}{CD'} = \overset{\frown}{DE'} = \overset{\frown}{EF'} = \overset{\frown}{FA'} = 1 \text{ rad}$$
e ainda sobra uma fração de rad.

IV) O radiano "cabe" 6 vezes na circunferência e mais a soma dessas "sobras". Mais precisamente demonstra-se que a circunferência mede 6,283584... rad (número batizado com o nome de 2π).

Tendo em vista estas considerações, podemos estabelecer a seguinte correspondência para conversão de unidades:

$$360° \longleftrightarrow 2\pi \text{ rad}$$
$$180° \longleftrightarrow \pi \text{ rad}$$

EXERCÍCIOS

C.1 Exprimir 225° em radianos.

Solução

Estabelecemos a seguinte regra de três simples:

$180° \longleftrightarrow \pi$ rad
$225° \longleftrightarrow x$

logo $x = \dfrac{225 \cdot \pi}{180} = \dfrac{5\pi}{4}$ rad

C.2 Exprimir em radianos:

a) 210° b) 240°
c) 270° d) 300°
e) 315° f) 330°

C.3 Exprimir $\frac{11\pi}{6}$ rad em graus.

Solução

Temos:

π rad $\longleftrightarrow$ 180°
$\frac{11\pi}{6}$ rad $\longleftrightarrow$ x

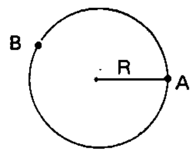
logo $x = \dfrac{\frac{11\pi}{6} \cdot 180}{\pi} = 330°$

C.4 Exprimir em graus:

a) $\frac{\pi}{6}$ rad b) $\frac{\pi}{4}$ rad c) $\frac{\pi}{3}$ rad

d) $\frac{2\pi}{3}$ rad e) $\frac{3\pi}{4}$ rad f) $\frac{5\pi}{6}$ rad

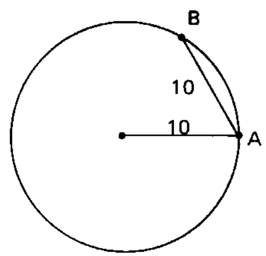
C.5 Um arco de circunferência mede 30 cm e o raio da circunferência mede 10 cm. Calcular a medida do arco em radianos.



Solução

$$\left[\text{medida de } \overset{\frown}{AB} \text{ em rad}\right] = \frac{\text{comprimento do arco } \overset{\frown}{AB}}{\text{comprimento do raio}} = \frac{30 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 3 \text{ rad}$$

C.6 Sobre uma circunferência de raio 10 cm marca-se um arco $\overset{\frown}{AB}$ tal que a corda AB mede 10 cm. Calcular a medida do arco em radianos.



Solução

O segmento AB é lado do **hexágono** regular inscrito na circunferência, logo, o menor arco AB é $\frac{1}{6}$ da circunferência, isto é, mede:

$$\frac{1}{6} \times 2\pi \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

C.7 Um grau se divide em 60′ (60 minutos) e um minuto se divide em 60″ (60 segundos) Por exemplo, um arco de medida 30′ é um arco de 0,5°. Pede-se converter a radianos os seguintes arcos:

a) 22°30′ b) 31°15′45″

Solução

a) $22°30' = 22 \times 60' + 30' = 1350'$
$180° = 180 \times 60' = 10800'$

então:

$10800' \longleftrightarrow \pi$ rad
$1350' \longleftrightarrow x$

logo $x = \frac{1350 \cdot \pi}{10800} = \frac{\pi}{8}$ rad

b) $31°15'45'' = 31 \times 3600'' + 15 \times 60'' + 45'' = 112\,545''$
$180° = 180 \times 3600'' = 648\,000''$

então:

$648\,000'' \longleftrightarrow \pi$ rad
$112\,545'' \longleftrightarrow x$

logo $x = \frac{112\,545 \cdot \pi}{648\,000} = \frac{112\,545 \cdot 3{,}1416}{648\,000} = 0{,}54563$ rad

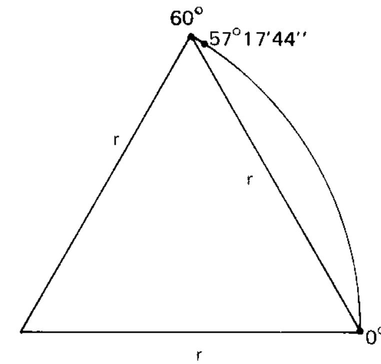
C.8 Converter a graus o arco 1 rad.

Solução

3,1416 rad $\longleftrightarrow$ 180°
1 rad $\longleftrightarrow$ x

logo $x = \frac{180°}{3{,}1416}$

```
1 800 000 |31 416
           --------
  229 200   57°17'44"
   09 288
    × 60
  -------
  557 280
  243 120
   23 208
    × 60
  -------
1 392 480
  135 840
   10 176
```

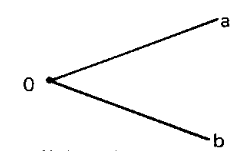


C.9 Exprimir em radianos as medidas dos arcos a e b tais que $a - b = 15°$ e $a + b = \frac{7\pi}{4}$ rad.

C.10 Exprimir em graus as medidas dos arcos a, b e c tais que $a + b + c = 13°$, $a + b + 2c = \frac{\pi}{12}$ rad e $a + 2b + c = \frac{\pi}{9}$ rad.

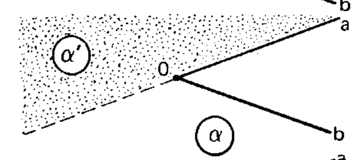
III. ÂNGULOS DE DUAS SEMI-RETAS

6. Consideremos duas semi-retas 0a e 0b de mesma origem, distintas e não opostas.



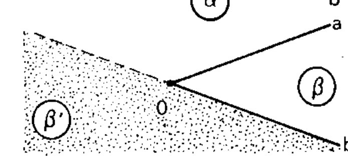
A reta a divide o plano ab em dois semi-planos opostos.

$\alpha \mid \alpha \supset 0b$ e $\alpha' \mid \alpha' \not\supset 0b$

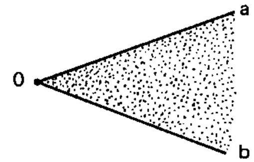


A reta **b** divide o plano ab em dois semi-planos opostos.

$\beta \mid \beta \supset 0a$ e $\beta' \mid \beta' \not\supset 0a$

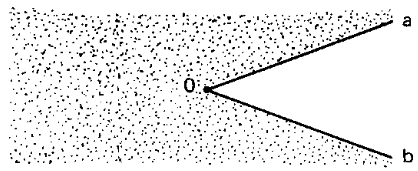


Ângulo convexo $a\widehat{0}b$ é a intersecção dos semi-planos α e β.



$$\boxed{a\widehat{0}b = \alpha \cap \beta} \qquad \text{(convexo)}$$

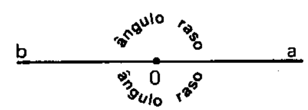
Ângulo côncavo $a\widehat{0}b$ é a reunião dos semi-planos α' e β'.



$$\boxed{a\widehat{0}b = \alpha' \cup \beta'} \qquad \text{(côncavo)}$$

7. Em particular, se as semi-retas 0a e 0b coincidem dizemos que elas determinam dois ângulos: um *ângulo nulo* e um *ângulo de uma volta.*

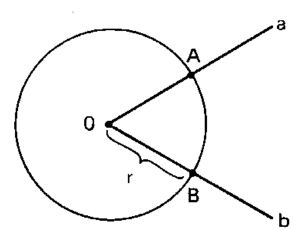
No caso particular das semi-retas 0a e 0b serem opostas dizemos que determinam dois *ângulos rasos.*



IV. MEDIDA DE ÂNGULOS

8. Dado um ângulo $a\widehat{0}b$, consideremos uma circunferência de centro 0 e raio r. Sejam A e B os pontos onde os lados do ângulo $a\widehat{0}b$ interceptam a circunferência.

A cada arco $\widehat{AB}$ corresponde desta maneira um único ângulo central $a\widehat{0}b$ e vice-versa. Convencionando que a um arco unitário corresponde um ângulo central unitário, decorre que o arco $\widehat{AB}$ e o ângulo central $a\widehat{0}b$ correspondente passam a ter a mesma medida.



Assim, por exemplo, temos:

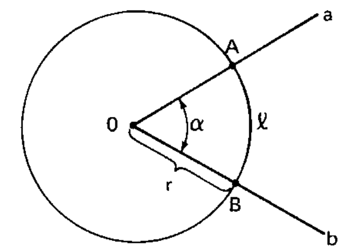
1º) *ângulo de 1°* é um ângulo central correspondente a um arco de 1°, isto é, é um ângulo central que determina na circunferência um arco igual a $\frac{1}{360}$ desta;

2º) *ângulo de 1 rad* é um ângulo central correspondente a um arco de 1 rad, isto é, é um ângulo central que determina na circunferência um arco cujo comprimento é igual ao do raio;

3º) *ângulo de 60°* é um ângulo central correspondente a um arco de 60°;

4º) *ângulo de π rad* é um ângulo central correspondente a um arco de π rad.

9. Quando queremos medir em radianos um ângulo $a\widehat{0}b$, devemos construir uma circunferência de centro 0 e raio r e verificar quantos radianos mede o arco $\widehat{AB}$, isto é, calcular o quociente entre o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$ pelo raio r da circunferência:

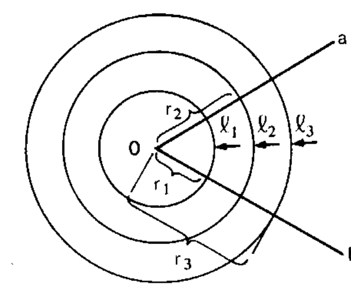


$$\alpha = \frac{\ell}{r} \qquad (\alpha \text{ em radianos})$$

Por exemplo, se o ângulo central $a\widehat{0}b$ é tal que determina numa circunferência de raio $r = 5$ cm um arco $\widehat{AB}$ de medida $\ell = 8$ cm, então a medida de $a\widehat{0}b$ é:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} = \frac{8}{5} = 1{,}6 \text{ rad}$$

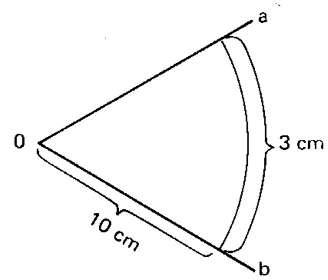
Observemos que, fixado um ângulo central $a\widehat{0}b$ de medida α rad e construídas as circunferências de centro 0 e raios r_1, r_2, r_3 ..., os arcos correspondentes a $a\widehat{0}b$ têm comprimentos ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, ... tais que:



$$\frac{\ell_1}{r_1} = \frac{\ell_2}{r_2} = \frac{\ell_3}{r_3} = \ldots = \alpha$$

EXERCÍCIOS

C.11 Calcular, em graus, a medida do ângulo $a\widehat{0}b$ da figura.



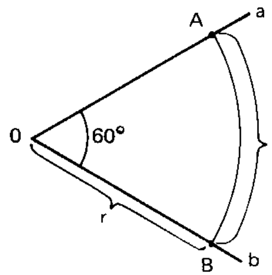
Solução

$\alpha = \dfrac{\ell}{r} = \dfrac{3}{10}$ rad. Convertendo a graus:

$$\begin{cases} \pi \text{ rad} \longrightarrow 180^\circ \\ \dfrac{3}{10} \text{ rad} \longrightarrow x \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\frac{3}{10} \times 180^\circ}{\pi} = \frac{54}{3{,}1416} = 17^\circ 11' 19''.$$

C.12 Calcular o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$ definido numa circunferência de raio $r = 10$ cm, por um ângulo central de 60°.



Solução

Convertido a radianos, o ângulo central $a\widehat{0}b$ tem medida $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ rad, então:

$$\alpha = \frac{\ell}{r} \Longrightarrow \ell = \alpha \cdot r = \frac{\pi}{3} \cdot 10$$

portanto:

$$\ell = \frac{31{,}416}{3} = 10{,}472 \text{ cm}.$$

C.13 Calcular a medida do ângulo central $a\widehat{0}b$ que determina em uma circunferência de raio r um arco de comprimento $\dfrac{2\pi r}{3}$.

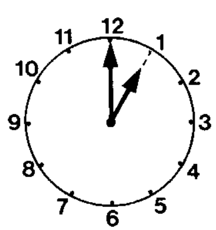
C.14 Calcular o comprimento ℓ do arco $\widehat{AB}$ definido em uma circunferência de raio 7 cm por um ângulo central de 4,5 rad.

C.15 Calcular o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que está assinalando:

a) 1 h; b) 1 h 15 min; c) 1 h 40 min.

Solução

a) Notemos que os números do mostrador de um relógio estão colocados em pontos que dividem a circunferência em 12 partes iguais, cada uma das quais mede 30°. Assim, à 1 h os ponteiros do relógio formam um ângulo convexo de 30°.



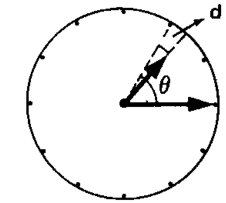
b) Sabemos que em 60 minutos o ponteiro pequeno percorre um ângulo de 30°, então em 15 minutos ele percorre um ângulo α tal que:

$$\frac{\alpha}{15} = \frac{30^\circ}{60}$$

portanto $\alpha = 7{,}5^\circ = 7^\circ 30'$.

Assim, temos:

$\theta = 60^\circ - \alpha = 60^\circ - 7^\circ 30' = 52^\circ 30'$.



c) Notemos que em 40 minutos o ponteiro pequeno percorre o ângulo β tal que:

$$\frac{\beta}{40} = \frac{30^\circ}{60}$$

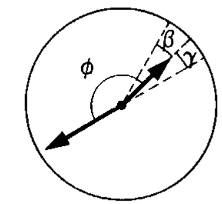
portanto $\beta = 20^\circ$.

Assim, temos:

$\phi = 150^\circ + \beta = 150^\circ + 20^\circ = 170^\circ$

ou ainda

$\phi = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 10^\circ = 170^\circ$.



C.16 Calcular o menor dos ângulos formados pelos ponteiros de um relógio que marca:

a) 2 h 40 min; b) 5 h 55 min; c) 6 h 30 min.

V. CICLO TRIGONOMÉTRICO

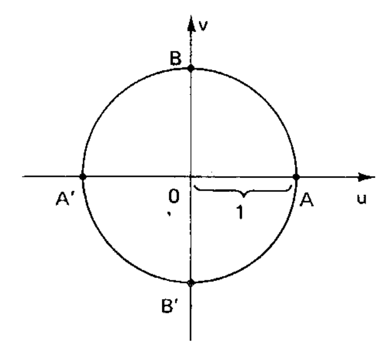
10. Definição

Tomemos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal u0v. Consideremos a circunferência λ de centro 0 e raio $r = 1$. Notemos que o comprimento desta circunferência é 2π pois $r = 1$.

Vamos agora definir uma aplicação de IR sobre λ, isto é, vamos associar a cada número real x um único ponto P da circunferência λ do seguinte modo:

1º) se $x = 0$, então P coincide com A;

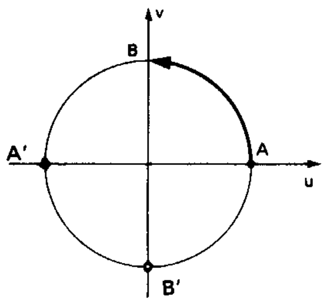
2º) se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso.



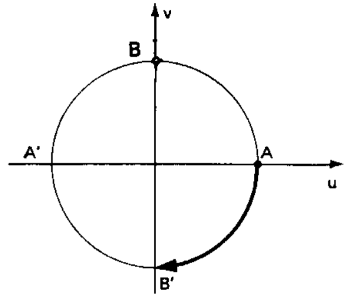
3º) se $x < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é P.

A circunferência λ acima definida, com origem em A, é chamada ciclo ou circunferência trigonométrica.

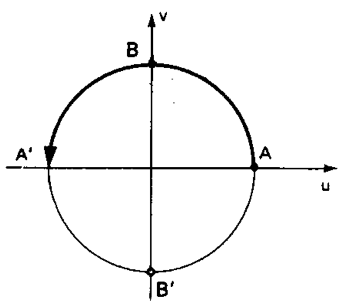
Se o ponto P está associado ao número x dizemos que P é a imagem de x no ciclo. Assim, por exemplo, temos:



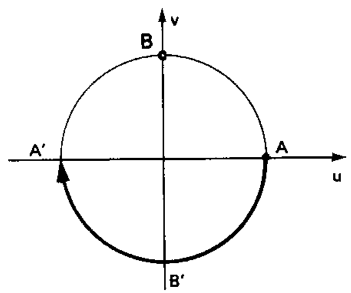
a imagem de $\frac{\pi}{2}$ é B



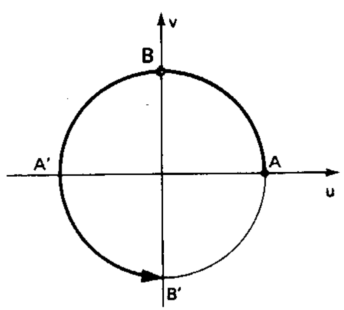
a imagem de $-\frac{\pi}{2}$ é B'



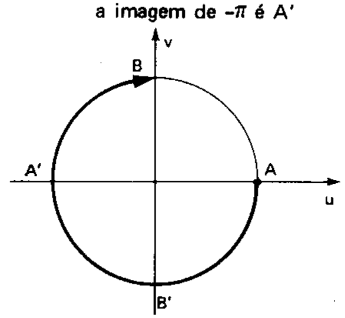
a imagem de π é A'



a imagem de $-\pi$ é A'



a imagem de $\frac{3\pi}{2}$ é B'



a imagem de $-\frac{3\pi}{2}$ é B

11. Notemos que se P é a imagem do número x_0, então P também é a imagem dos números:

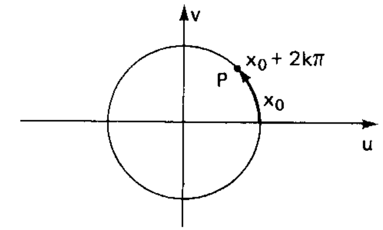
$$x_0, \quad x_0 + 2\pi, \quad x_0 + 4\pi, \quad x_0 + 6\pi, \quad \text{etc.}$$

e também de

$$x_0 - 2\pi, \quad x_0 - 4\pi, \quad x_0 - 6\pi, \quad \text{etc.}$$

Em resumo, P é a imagem dos elementos do conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x = x_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$



Dois números reais $x_1 = x_0 + 2k_1\pi$ $(k_1 \in \mathbb{Z})$ e $x_2 = x_0 + 2k_2\pi$ $(k_2 \in \mathbb{Z})$ que tem a mesma imagem P no ciclo são tais que $x_1 - x_2 = 2k\pi$ (onde $k = k_1 - k_2$) e, por isso, diz-se que x_1 e x_2 são *côngruos módulo* 2π ou simplesmente, x_1 e x_2 são *côngruos*.

EXERCÍCIOS

C.17 Divide-se o ciclo em 12 partes iguais, utilizando-se A como um dos pontos divisores. Determinar os x $(x \in [0, 2\pi[)$ cujas imagens são os pontos divisores.

Solução

Notando que cada parte mede $\frac{1}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$ e que P é a imagem de x quando $\overset{\frown}{AP} = x$, podemos construir a tabela abaixo:

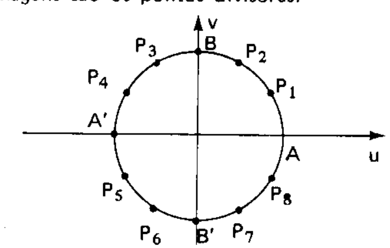


imagem de x	A	P_1	P_2	B	P_3	P_4	A'	P_5	P_6	B'	P_7	P_8
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$

C.18 Divide-se o ciclo em 8 partes iguais, utilizando-se A como um dos pontos divisores. Determinar o conjunto dos x $(x \in [0, 2\pi[)$ cujas imagens são os pontos divisores.

C.19 Indicar no ciclo a imagem de cada um dos seguintes números:

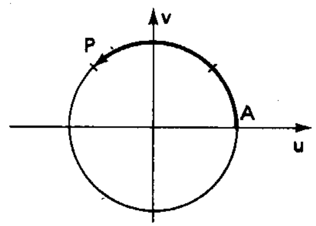
a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $-\frac{5\pi}{4}$ c) 11π

d) -3π e) $\frac{25\pi}{3}$ f) $-\frac{19\pi}{6}$

Solução

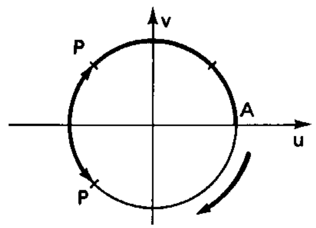
a) $\frac{3\pi}{4} = \frac{3}{8} \cdot 2\pi$

Marcamos, a partir de A, um percurso $\overset{\frown}{AP}$ igual a $\frac{3}{8}$ do ciclo, no sentido anti-horário.



b) $-\frac{5\pi}{4} = -\frac{5}{8} \cdot 2\pi$

Marcamos, a partir de A, um percurso $\overset{\frown}{AP}$ igual a $\frac{5}{8}$ do ciclo, no sentido horário.

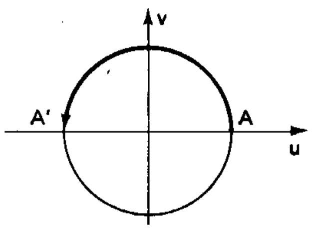


c) $11\pi = \pi + 10\pi$

Como $11\pi - \pi$ é múltiplo de 2π, então 11π e π têm a mesma imagem (A').

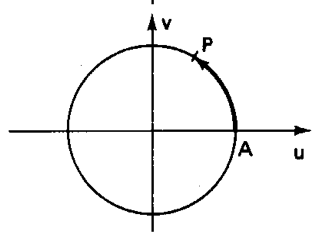
d) $-3\pi = \pi - 4\pi$

Como $(-3\pi) - \pi$ é múltiplo de 2π, então -3π e π têm a mesma imagem (A').



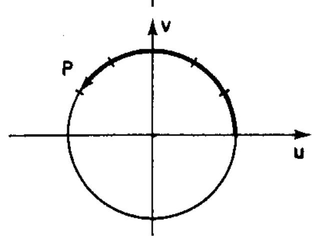
e) $\frac{25\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{24\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 8\pi$

Assim, $\frac{25\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}$ têm a mesma imagem P que é obtida marcando um percurso $\overset{\frown}{AP}$ igual a $\frac{1}{6}$ do ciclo, no sentido anti-horário.



f) $-\frac{19\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - \frac{24\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} - 4\pi$

Assim, $-\frac{19\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ têm a mesma imagem. Como $\frac{5\pi}{6} = \frac{5}{12} \cdot 2\pi$, a imagem procurada é a extremidade do percurso $\overset{\frown}{AP}$ igual a $\frac{5}{12}$ do ciclo medido no sentido anti-horário.



C.20 Indicar no ciclo as imagens dos seguintes números reais: $\frac{\pi}{8}$, $\frac{11\pi}{8}$, $-\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{7\pi}{8}$, $\frac{13\pi}{6}$, $-\frac{15\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{4}$ e $-\frac{31\pi}{4}$.

C.21 Representar, no ciclo, as imagens dos seguintes conjuntos de números:

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$

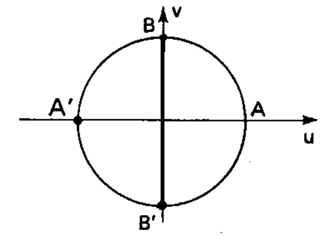
Solução

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$k = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (imagem: B)

$k = 1 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$ (imagem: B')

$k = 2 \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{2}$ (repetição: B)



O conjunto E tem como imagem os pontos B e B' do ciclo.

$x = k \cdot \frac{\pi}{2}$

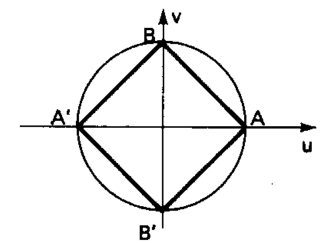
$k = 0 \Longrightarrow x = 0$ (imagem: A)

$k = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (imagem: B)

$k = 2 \Longrightarrow x = \pi$ (imagem: A')

$k = 3 \Longrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$ (imagem: B')

$k = 4 \Longrightarrow x = 2\pi$ (repetição: A)



O conjunto F tem como imagem os pontos A, B, A' e B' do ciclo.

C.22 Representar, no ciclo, as imagens dos seguintes conjuntos de números reais:

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\}$

$G = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$H = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$

Padre refugia-se na Matemática

Bernhard Bolzano nasceu e morreu em Praga, Tchecoslováquia, e embora fosse padre tinha idéias contrárias às da Igreja.

Suas descobertas matemáticas foram muito pouco reconhecidas por seus contemporâneos.

Em 1817 publicou o livro *"Rein Analytisches Beweis"* (Prova puramente analítica), provando através de métodos aritméticos o teorema de locação em Álgebra, exigindo para isso um conceito não geométrico de continuidade de uma curva ou função.

Bolzano, a essa época, já havia percebido tão bem a necessidade de rigor em Análise, que Klein o chamou "pai da aritmetização", embora tivesse menos influência que Cauchy com sua análise baseada em conceitos geométricos mas, embora os dois nunca tivessem se encontrado, suas definições de limite, derivada, continuidade e convergência eram bem semelhantes.

Em uma obra póstuma de 1850, Bolzano chegou a enunciar propriedades importantes dos conjuntos finitos e, apoiando-se nas teorias de Galileu, mostrou que existem tantos números reais entre 0 e 1, quanto entre 0 e 2, ou tantos em um segmento de reta de um centímetro quanto em um segmento de reta de dois centímetros.

Parece ter percebido que a infinidade de números reais é de tipo diferente da infinidade de números inteiros, sendo não enumeráveis, estando mais próximo da Matemática moderna do que qualquer um de seus contemporâneos.

Em 1834, Bolzano havia imaginado uma função contínua num intervalo e que não tinha derivada em nenhum ponto desse intervalo mas o exemplo dado não ficou conhecido em sua época, sendo todos os méritos dados a Weierstrass que se ocupou em redescobrir esses resultados, depois de cinqüenta anos. Conhecemos hoje como teorema de Bolzano-Weierstrass aquele segundo o qual um conjunto limitado contendo infinitos elementos, pontos ou números, tem ao menos um ponto de acumulação.

O mesmo aconteceu com os critérios de convergência de séries infinitas que levam hoje o nome de Cauchy e assim também com outros resultados.

Há quem diga que Bolzano era "uma voz clamando no deserto".

CAPÍTULO II

FUNÇÕES CIRCULARES

I. NOÇÕES GERAIS

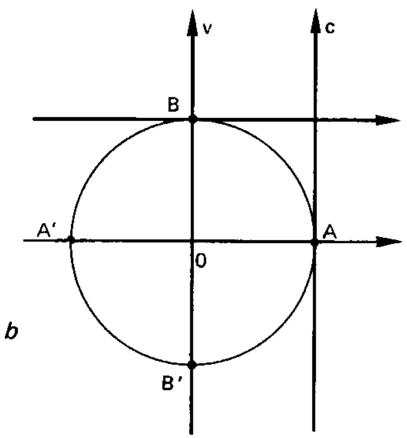
12. Consideremos um ciclo trigonométrico de origem A. Para o estudo das funções circulares vamos associar ao ciclo quatro eixos:

1º) eixo dos cossenos (u)
direção: OA
sentido positivo: $O \to A$

2º) eixo dos senos (v)
direção: $\perp$ *a, por O*
sentido positivo: de $O \to B$
sendo B tal que $\widehat{AB} = \dfrac{\pi}{2}$

3º) eixo das tangentes (c)
direção: paralelo a v por A
sentido positivo: *o mesmo de b*

4º) eixo das cotangentes (d)
direção: paralelo a u por B
sentido positivo: *o mesmo de a.*



13. Os eixos u e v dividem a circunferência em quatro arcos: $\widehat{AB}$, $\widehat{BA'}$, $\widehat{A'B'}$ e $\widehat{B'A}$. Dado um número real x, usamos a seguinte linguagem para efeito de localizar a imagem P de x no ciclo:

x está no 1º quadrante $\iff P \in \widehat{AB} \iff 0 + 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

x está no 2º quadrante $\iff P \in \widehat{BA'} \iff \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \pi + 2k\pi$

x está no 3º quadrante $\iff P \in \widehat{A'B'} \iff \pi + 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$

x está no 4º quadrante $\iff P \in \widehat{B'A} \iff \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi + 2k\pi$

II. FUNÇÕES PERIÓDICAS

14. Exemplo preliminar

Dado o número real x, sempre existem dois números inteiros consecutivos n e $n + 1$ tais que $n \leqslant x < n + 1$. Consideremos a função f que associa a cada real x o real $x - n$ onde n é o maior número inteiro que não supera x. Temos, por exemplo:

$f(0,1) = 0,1$; $f(1,1) = 1,1 - 1 = 0,1$; $f(2,1) = 2,1 - 2 = 0,1$;
$f(3) = 3 - 3 = 0$; $f(-5) = (-5) - (-5) = 0$; $f(7) = 7 - 7 = 0$.

De modo geral, temos:

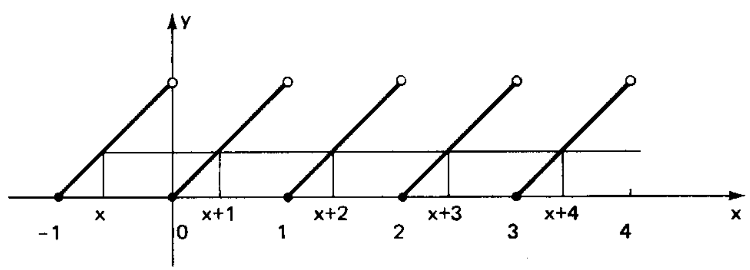
$0 \leqslant x < 1 \implies f(x) = x - 0 = x$
$1 \leqslant x < 2 \implies f(x) = x - 1$
$2 \leqslant x < 3 \implies f(x) = x - 2$

etc.

$-1 \leqslant x < 0 \implies f(x) = x - (-1) = x + 1$
$-2 \leqslant x < -1 \implies f(x) = x - (-2) = x + 2$
$-3 \leqslant x < -2 \implies f(x) = x - (-3) = x + 3$

etc.

Seu gráfico é:



Temos:

$$f(x) = f(x + 1) = f(x + 2) = f(x + 3) = f(x + 4) = \ldots \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

portanto existem infinitos números p inteiros tais que $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

15. O menor número $p > 0$ que satisfaz a igualdade $f(x) = f(x + p)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ é o número $p = 1$, denominado *período da função f*. A função f é chamada função periódica porque foi possível encontrar um número $p > 0$ tal que dando acréscimos iguais a p em x, o valor calculado para f não se altera, isto é, o valor de f se repete periodicamente para cada acréscimo de p à variável.

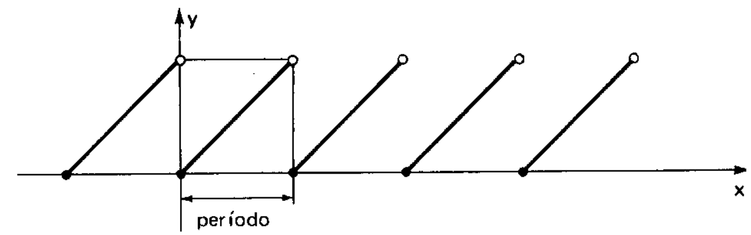
16. Definição

Uma função $f: A \to B$ é *periódica* se existir um número $p > 0$ satisfazendo a condição

$$f(x + p) = f(x), \quad \forall x \in A$$

O menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamado *período de f*.

17. O gráfico da função periódica se caracteriza por apresentar um elemento de curva que se repete, isto é, se quisermos desenhar toda a curva bastará construirmos um carimbo onde está desenhado o tal elemento de curva e ir carimbando. *Período* é o comprimento do carimbo (medido no eixo dos x).

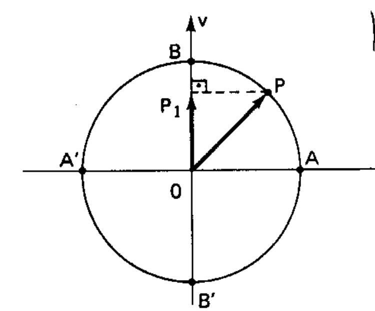


III. FUNÇÃO SENO

18. Definição

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos seno de x (e indicamos $\operatorname{sen} x$) a ordenada $\overline{OP_1}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos *função seno* a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1} = \operatorname{sen} x$, isto é:

$$f(x) = \operatorname{sen} x.$$



19. Propriedades

1ª) A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ para todo x real.

É imediata a justificação pois, se P está no ciclo, sua ordenada pode variar apenas de -1 a $+1$.

2ª) Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então sen x é positivo.

De fato, neste caso o ponto P está acima do eixo u e sua ordenada é positiva.

3ª) Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então sen x é negativo.

De fato, neste caso o ponto P está abaixo do eixo u e sua ordenada é negativa.

4ª) Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então sen x é crescente.

É imediato que, se x percorre o primeiro quadrante, então P percorre o arco $\overset{\frown}{AB}$ e sua ordenada cresce. Fato análogo acontece no quarto quadrante.

5ª) Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então sen x é decrescente.

É imediato que, se x percorre o segundo quadrante, então P percorre o arco $\overset{\frown}{BA'}$ e sua ordenada decresce. Fato análogo acontece no terceiro quadrante.

6ª) A função seno é periódica e seu período é 2π.

É imediato que, se $\operatorname{sen} x = \overline{OP_1}$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\operatorname{sen}(x + k \cdot 2\pi) = \overline{OP_1}$ pois x e $x + k \cdot 2\pi$ têm a mesma imagem P no ciclo. Temos, então, para todo x real:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + k \cdot 2\pi)$$

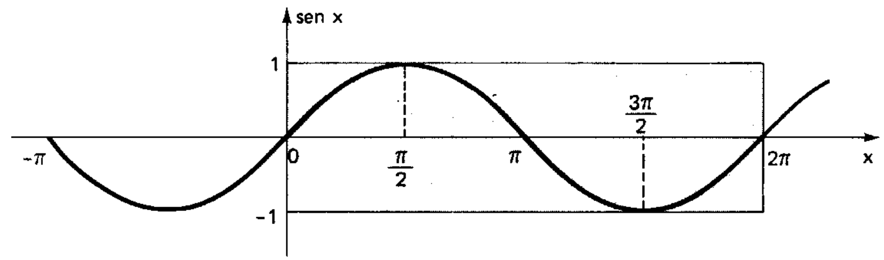
e, portanto, a função seno é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k \cdot 2\pi$, isto é, 2π.

20. Gráfico

Façamos x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com sen x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, a ordenada de P varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
sen x	0	cresce	1	decresce	0	decresce	−1	cresce	0

Fazendo um diagrama com x em abscissas e sen x em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado *senóide*, que nos indica como varia a função $f(x) = \operatorname{sen} x$.



Observemos que, como o domínio da função seno é $\mathbb{R}$, a senóide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um período da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo são $2\pi \times 2$, isto é, aproximadamente $6{,}28 \times 2$.

EXERCÍCIOS

Determinar o período e a imagem e fazer o gráfico de um período completo das funções dadas do C.23 ao C.42:

C.23 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\operatorname{sen} x$.

Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:

1ª) atribuímos valores a x;
2ª) associamos a cada x o valor de sen x;
3ª) multiplicamos sen x por −1.

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

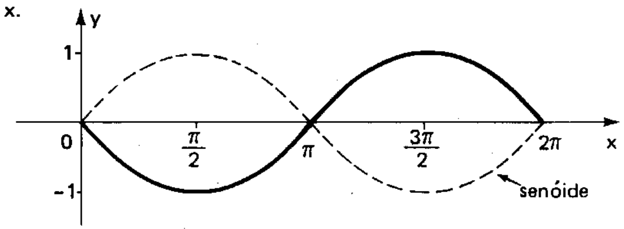
x	sen x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	-1
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	1
2π	0	0

Com esta tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que é simétrico da senóide em relação ao eixo dos x.

É imediato que:

$Im(f) = [-1, 1]$

$p(f) = 2\pi$



C.24 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \text{sen}\, x$

Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:

1ª) atribuímos valores a x;
2ª) associamos a cada x o valor de sen x;
3ª) multiplicamos sen x por 2.

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

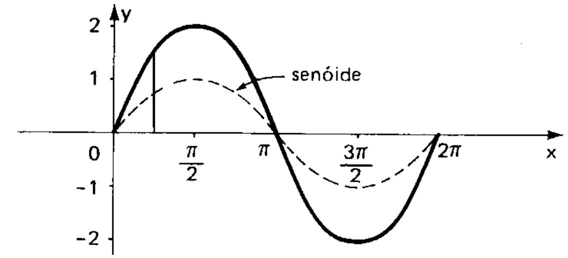
x	sen x	y
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
2π	0	0

Com esta tabela podemos obter 5 pontos do gráfico, que deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o dobro da ordenada correspondente da senóide.

É imediato que:

$Im(f) = [-2, 2]$

$p(f) = 2\pi$



.25 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2 \cdot \text{sen}\, x$.

.26 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |\text{sen}\, x|$

Solução

Recordemos inicialmente que para um dado número real a, temos:

$a \geqslant 0 \implies |a| = a$

$a < 0 \implies |a| = -a$

Aplicando esta definição, temos:

$\text{sen}\, x \geqslant 0 \implies |\text{sen}\, x| = \text{sen}\, x$

(quando $\text{sen}\, x \geqslant 0$, os gráficos $y = |\text{sen}\, x|$ e $y = \text{sen}\, x$ coincidem)

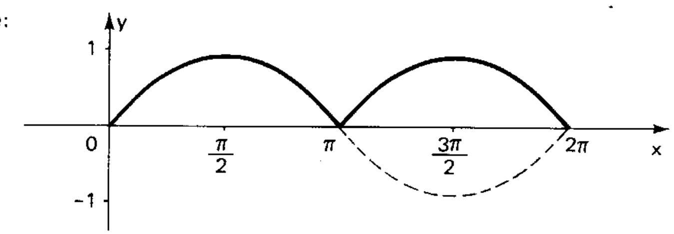
$\text{sen}\, x < 0 \implies |\text{sen}\, x| = -\text{sen}\, x$

(quando $\text{sen}\, x < 0$, os gráficos $y = |\text{sen}\, x|$ e $y = \text{sen}\, x$ são simétricos em relação ao eixo dos x).

É imediato que:

$Im(f) = [0, 1]$

$p(f) = \pi$



27 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |3 \cdot \text{sen}\, x|$

28 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\, 2x$

Solução

Vamos construir uma tabela em três etapas:

1ª) atribuímos valores a $t = 2x$;
2ª) associamos a cada 2x o correspondente sen 2x;
3ª) calculamos x $(x = \frac{t}{2})$.

x	$t = 2x$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

x	$t = 2x$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = 2x$	y
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
π	2π	0

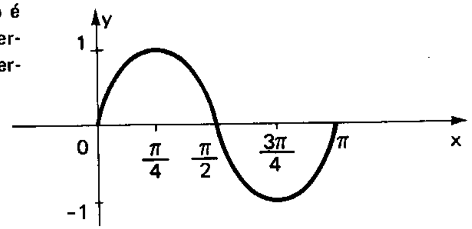
Com base nesta tabela, podemos obter 5 pontos da curva. Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o seno do dobro de x. Notemos ainda que para sen t completar um período é necessário que $t = 2x$ percorra o intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, x percorra o intervalo $[0, \pi]$.

Assim, o período de f é:

$p(f) = \pi - 0 = \pi$

É imediato que:

$Im(f) = [-1, 1]$



C.29 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\, \frac{x}{2}$.

Solução

x	$t = \frac{x}{2}$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

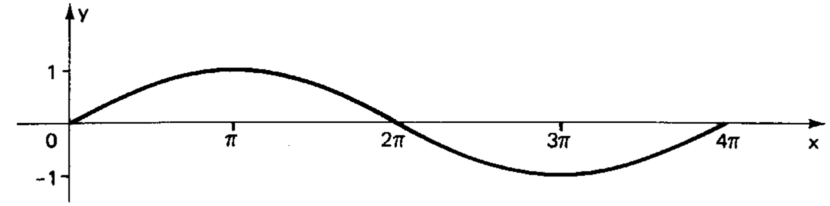
x	$t = \frac{x}{2}$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = \frac{x}{2}$	y
0	0	0
π	$\frac{\pi}{2}$	1
2π	π	0
3π	$\frac{3\pi}{2}$	-1
4π	2π	0

É imediato que:

$Im(f) = [-1, 1]$

$p(f) = 4\pi$



C.30 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\, 3x$

Solução

x	$t = 3x$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

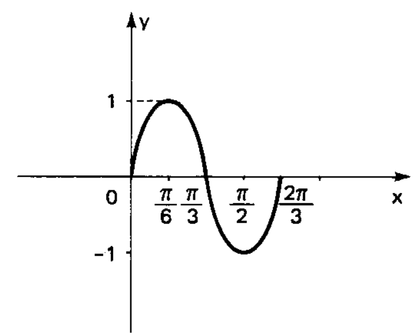
x	$t = 3x$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

x	$t = 3x$	y
0	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	π	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{2\pi}{3}$	2π	0

É imediato que:

$Im(f) = [-1, 1]$

$p(f) = \frac{2\pi}{3}$



C.31 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = -\text{sen}\, \frac{x}{3}$.

C.32 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 3 \cdot \text{sen}\, 4x$.

C.33 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + \text{sen } x$.

Solução

x	sen x	y
0		
$\frac{\pi}{2}$		
π		
$\frac{3\pi}{2}$		
2π		

x	sen x	y
0	0	
$\frac{\pi}{2}$	1	
π	0	
$\frac{3\pi}{2}$	-1	
2π	0	

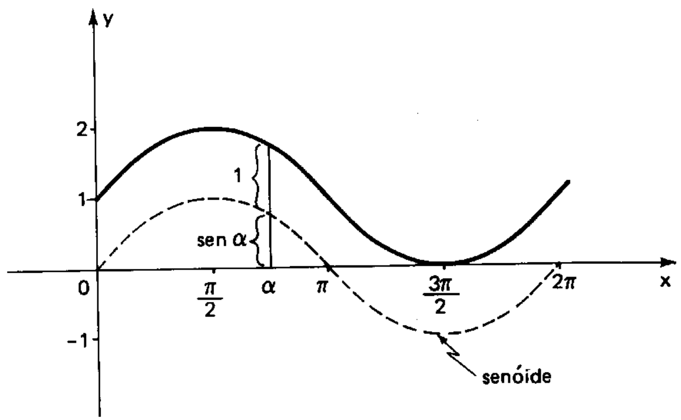
x	sen x	y
0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	1	2
π	0	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0
2π	0	1

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é igual ao seno de x mais uma unidade. Se cada seno sofre um acréscimo de 1, então a senóide sofre uma translação de uma unidade "para cima".

É imediato que:

$\text{Im}(f) = [0, 2]$

$p(f) = 2\pi$



C.34 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2 + \text{sen } x$.

C.35 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \text{sen } x$.

C.36 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 - \text{sen } x$.

C.37 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1 + \text{sen } 2x$.

C.38 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 3 \cdot \text{sen } \frac{x}{2}$.

C.39 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen } (x - \frac{\pi}{4})$.

Solução

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	
	$\frac{\pi}{2}$	
	π	
	$\frac{3\pi}{2}$	
	2π	

x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
	0	0
	$\frac{\pi}{2}$	1
	π	0
	$\frac{3\pi}{2}$	-1
	2π	0

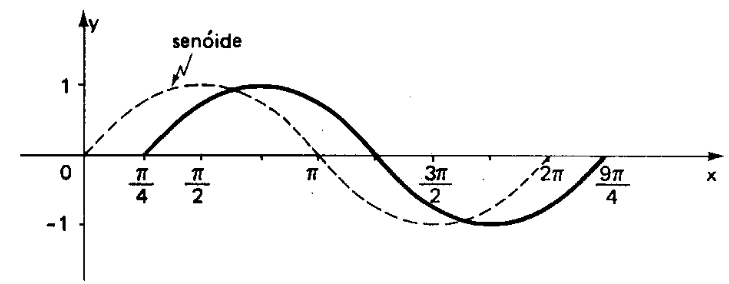
x	$t = x - \frac{\pi}{4}$	y
$\frac{\pi}{4}$	0	0
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{5\pi}{4}$	π	0
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{9\pi}{4}$	2π	0

Notemos que o gráfico deve apresentar para cada x uma ordenada y que é o seno de $x - \frac{\pi}{4}$. Notemos que para sen t completar um período é necessário que $t = x - \frac{\pi}{4}$ percorra o intervalo $[0, 2\pi]$, isto é, x percorra o intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}]$. Assim, o período de f é:

$p(f) = \frac{9\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi$

É imediato que:

$\text{Im}(f) = [-1, 1]$.



C.40 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen } (x + \frac{\pi}{3})$.

C.41 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen } (2x - \frac{\pi}{3})$.

C.42 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \text{sen } (\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6})$.

C.43 Sendo a, b, c, d números reais e positivos, determinar imagem e período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a + b \cdot \text{sen}(cx + d)$.

Solução

Façamos $cx + d = t$. Quando x percorre $\mathbb{R}$, t percorre $\mathbb{R}$ (pois a *função afim* $t = ax + b$ é sobrejetora) e, em conseqüência, sen t percorre o intervalo $[-1, 1]$, $b \cdot \text{sen}\,t$ percorre o intervalo $[-b, b]$ e $y = a + b \cdot \text{sen}\,t$ percorre o intervalo $[a - b, a + b]$, que é a imagem de f.

Para que f complete um período é necessário que t varie de 0 a 2π, então:

$$t = 0 \implies cx + d = 0 \implies x = -\frac{d}{c}$$

$$t = 2\pi \implies cx + d = 2\pi \implies x = \frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}$$

portanto:

$$p = \Delta x = \left(\frac{2\pi}{c} - \frac{d}{c}\right) - \left(-\frac{d}{c}\right) = \frac{2\pi}{c}.$$

C.44 Construir o gráfico de um período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = 1 - 2 \cdot \text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

C.45 Para que valores de m existe x tal que $\text{sen}\,x = 2m - 5$?

Solução

Para que exista x satisfazendo a igualdade acima devemos ter:

$$-1 \leqslant 2m - 5 \leqslant 1 \iff 4 \leqslant 2m \leqslant 6 \iff 2 \leqslant m \leqslant 3.$$

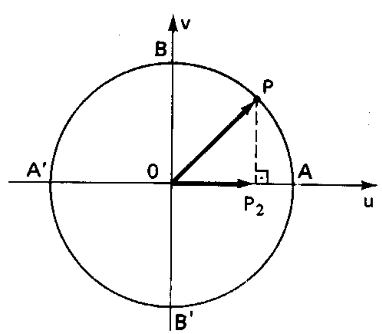
C.46 Em cada caso abaixo, para que valores de m existe x satisfazendo a igualdade?

a) $\text{sen}\,x = 2 - 5m$;   b) $\text{sen}\,x = \dfrac{m - 1}{m - 2}$.

IV. FUNÇÃO COSSENO

21. Definição

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo. Denominamos cosseno de x (e indicamos cos x) a abscissa $\overline{OP_2}$ do ponto P em relação ao sistema uOv. Denominamos *função cosseno* a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2} = \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$.



22. Propriedades

1ª) A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo x real.

2ª) Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então cos x é positivo.

3ª) Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então cos x é negativo.

4ª) Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então cos x é crescente.

5ª) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então cos x é decrescente.

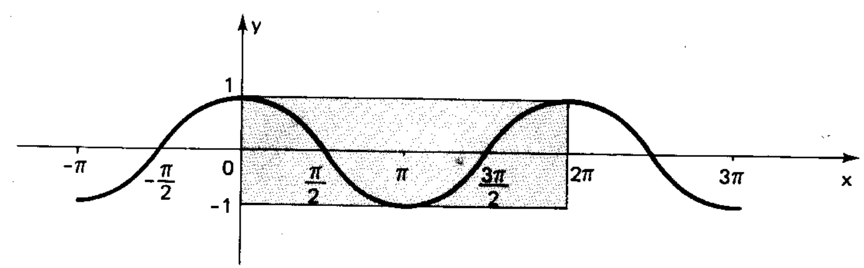
6ª) A função cosseno é periódica e seu período é 2π.

23. Gráfico

Façamos x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com cos x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo, no sentido anti-horário, a abscissa de P varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
cos x	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1

Fazendo um diagrama com x em abscissas e cos x em ordenadas, podemos construir o seguinte gráfico, denominado *cossenóide*, que nos indica como varia a função $f(x) = \cos x$



Observemos que, como o domínio da função cosseno é $\mathbb{R}$, a cossenóide continua para a direita de 2π e para a esquerda de 0. No retângulo em destaque está representado apenas um período da função. Notemos ainda que as dimensões desse retângulo são $2\pi \times 2$, isto é, aproximadamente $6{,}28 \times 2$.

EXERCÍCIOS

Determinar o período e a imagem e fazer o gráfico de um período completo das funções dadas do C.47 ao C.56:

C.47 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -\cos x$.

C.48 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \cos x$.

C.49 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -3 \cdot \cos x$.

C.50 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |\cos x|$.

C.51 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos 2x$.

C.52 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.

C.53 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + \cos x$.

C.54 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 + 2 \cdot \cos 3x$.

C.55 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$.

C.56 f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \cdot \cos(x - \frac{\pi}{3})$.

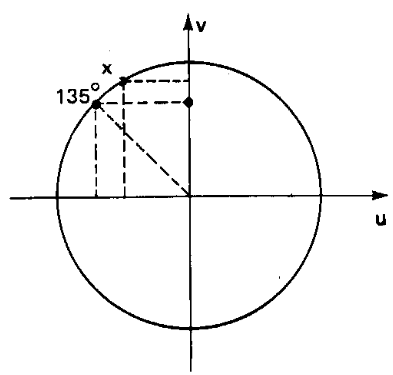
C.57 Determinar imagem e período da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -1 + 2 \cdot \cos(3x - \frac{\pi}{4})$.

C.58 Para que valores de t existe x satisfazendo a igualdade $\cos x = \frac{t + 2}{2t - 1}$?

C.59 Determinar o sinal da expressão $y = \text{sen } 107^\circ + \cos 107^\circ$.

Solução

Examinando o ciclo, notamos que:



$|\text{sen } 135^\circ| = |\cos 135^\circ|$

e

$90^\circ < x < 135^\circ \Longrightarrow |\text{sen } x| > |\cos x|$.

Como $\text{sen } 107^\circ > 0$, $\cos 107^\circ < 0$

e $|\text{sen } 107^\circ| > |\cos 107^\circ|$, decorre:

$\text{sen } 107^\circ + \cos 107^\circ > 0$.

C.60 Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

$y_1 = \text{sen } 45^\circ + \cos 45^\circ$
$y_2 = \text{sen } 225^\circ + \cos 225^\circ$
$y_3 = \text{sen } \frac{7\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$
$y_4 = \text{sen } 300^\circ + \cos 300^\circ$.

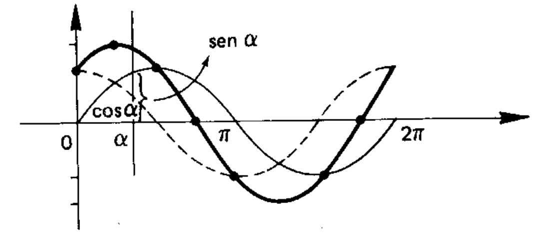
C.61 Esboçar o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen } x + \cos x$.

Solução

Notemos que para cada x esta função associa um y que é a soma do seno com o cosseno de x. Vamos, então, colocar num diagrama a senóide e a cossenóide e, para cada x, somemos as ordenadas dos pontos encontrados em cada curva.

Veremos mais adiante que:

$\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
$p(f) = 2\pi$.



C.62 Esboçar o gráfico de um período da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x - \text{sen } x$.

C.63 Provar que se $0 < x < \frac{\pi}{2}$ então $\text{sen } x + \cos x > 1$.

Sugestão: ciclo trigonométrico.

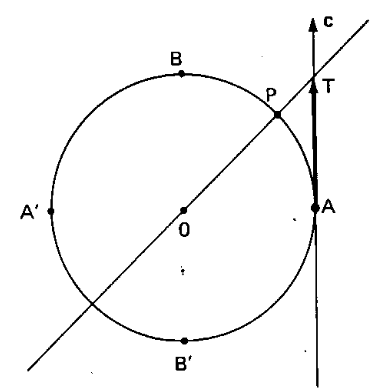
V. FUNÇÃO TANGENTE

24. Definição

Dado um número real x,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos *tangente de x* (e indicamos tg x) a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{AT}$.



Denominamos *função tangente* a função $f: D \to R$ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overline{AT} = \text{tg}\, x$, isto é, $f(x) = \text{tg}\, x$.

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B′ e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a tg x não é definida.

25. Propriedades

1ª) O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

2ª) A imagem da função tangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que $\text{tg}\, x = y$.

De fato, dado $y \in \mathbb{R}$, consideremos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $\overline{AT} = y$. Construindo a reta $\overleftrightarrow{OT}$, observamos que ela intercepta o ciclo em dois pontos P e P′, imagens dos reais x cuja tangente é y.

3ª) Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então tg x é positiva.

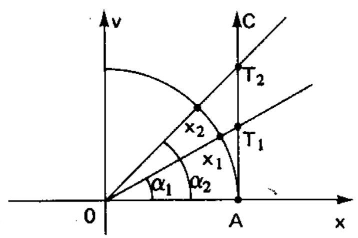
De fato, neste caso o ponto T está acima de A e $\overline{AT}$ é positiva.

4ª) Se x é do segundo ou quarto quadrante, então tg x é negativa.

De fato, neste caso o ponto T está abaixo de A e $\overline{AT}$ é negativa.

5ª) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então tg x é crescente.

Provemos, por exemplo, quando x percorre o 1º quadrante. Dados x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, temos $\alpha_1 < \alpha_2$ e, por propriedade de Geometria Plana, vem $\overline{AT_1} < \overline{AT_2}$, isto é: $\text{tg}\, x_1 < \text{tg}\, x_2$.



6ª) A função tangente é periódica e seu período é π.

De fato, se $\text{tg}\, x = \overline{AT}$ e $k \in \mathbb{Z}$, então $\text{tg}(x + k\pi) = \overline{AT}$ pois x e $x + k\pi$ têm imagens P e P′ coincidentes ou diametralmente opostas no ciclo e, assim, $\overleftrightarrow{OP} = \overleftrightarrow{OP'}$, portanto, $\overleftrightarrow{OP} \cap c = \overleftrightarrow{OP'} \cap c$.

Temos, então, para todo x real e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

$$\text{tg}\, x = \text{tg}(x + k\pi)$$

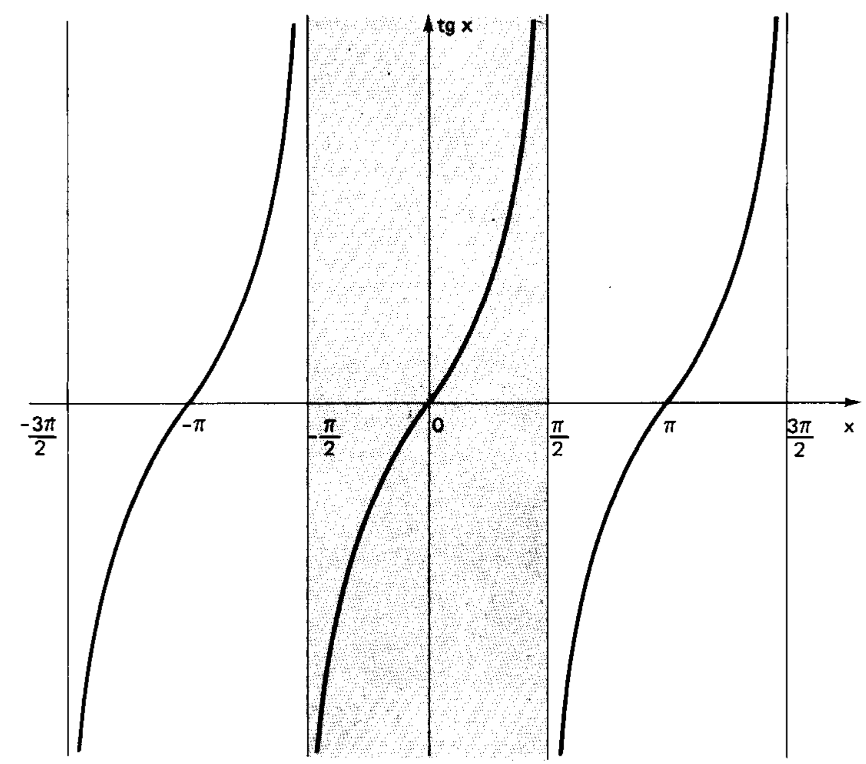
e a função tangente é periódica. Seu período é o menor valor positivo de $k\pi$, isto é, π.

26. Gráfico

Façamos x percorrer o intervalo $[0, 2\pi]$ e vejamos o que acontece com tg x. Se a imagem de x (ponto P) dá uma volta completa no ciclo no sentido anti-horário, a medida algébrica $\overline{AT}$ varia segundo a tabela:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
tg x	0	cresce	$\nexists$	cresce	0	cresce	$\nexists$	cresce	0

Fazendo um diagrama com x em abscissas e tg x em ordenadas, podemos construir o gráfico seguinte, denominado *tangentóide*, que nos indica a variação da função $f(x) = \text{tg}\, x$.



C.64 Qual é o domínio da função real f tal que $f(x) = \text{tg}\, 2x$?

Solução

Façamos $2x = t$. Sabemos que existe $\text{tg}\, t$ se, e somente se, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, então:

$2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ e

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}.$

C.65 Qual é o domínio das seguintes funções reais?

a) $f(x) = \text{tg}\, 3x$ b) $g(x) = \text{tg}(2x - \frac{\pi}{3})$.

C.66 Qual é o sinal de cada uma das seguintes expressões?

$y_1 = \text{tg}\, 269° + \text{sen}\, 178°$ $y_2 = \text{tg}\, \frac{12\pi}{7} \cdot (\text{sen}\, \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{23\pi}{12})$.

C.67 Para que valores de α existe x tal que $\text{tg}\, x = \sqrt{\alpha^2 - 5\alpha + 4}$?

C.68 Esboçar o gráfico, dar o domínio e o período da função real $f(x) = \text{tg}\,(x - \frac{\pi}{4})$.

Solução:

Façamos $x - \frac{\pi}{4} = t$. Temos: $\exists\, \text{tg}\, t \Longrightarrow t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

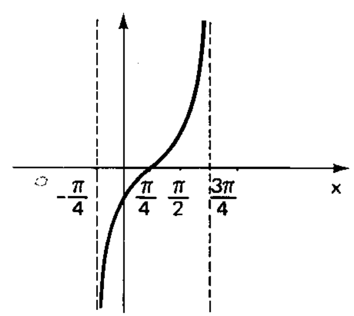
então $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$

Para $\text{tg}\, t$ descrever um período completo devemos ter:

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$

então $p(f) = \frac{3\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4}) = \pi$.

Como a função associa a cada x a $\text{tg}\,(x - \frac{\pi}{4})$, teremos (por analogia com as funções já vistas) um gráfico que é a tangentóide deslocada de $\frac{\pi}{4}$ para a direita.

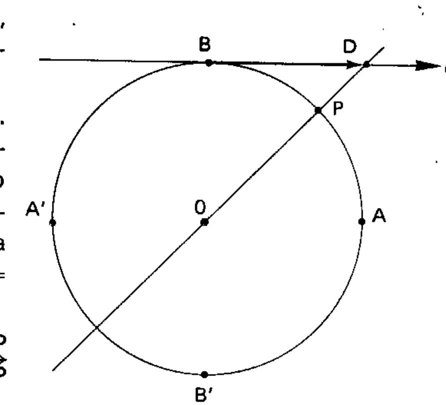


C.69 Esboçar o gráfico, dar o domínio e o período da função real $f(x) = \text{tg}\,(2x + \frac{\pi}{6})$.

VI. FUNÇÃO COTANGENTE

27. Definição

Dado um número real x, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja D sua intersecção com o eixo das cotangentes. Denominamos cotangente de x (e indicamos $\text{cotg}\, x$) a medida algébrica do segmento $\overrightarrow{BD}$. Denominamos *função cotangente* a função $f: D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overline{BD} = \text{cotg}\, x$, isto é, $f(x) = \text{cotg}\, x$.



Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das cotangentes. Como neste caso não existe o ponto D, a $\text{cotg}\, x$ não é definida.

28. Propriedades

1ª) O domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$.

2ª) A imagem da função cotangente é $\mathbb{R}$, isto é, para todo y real existe um x real tal que $\text{cotg}\, x = y$.

3ª) Se x é do primeiro ou terceiro quadrante, então $\text{cotg}\, x$ é positiva.

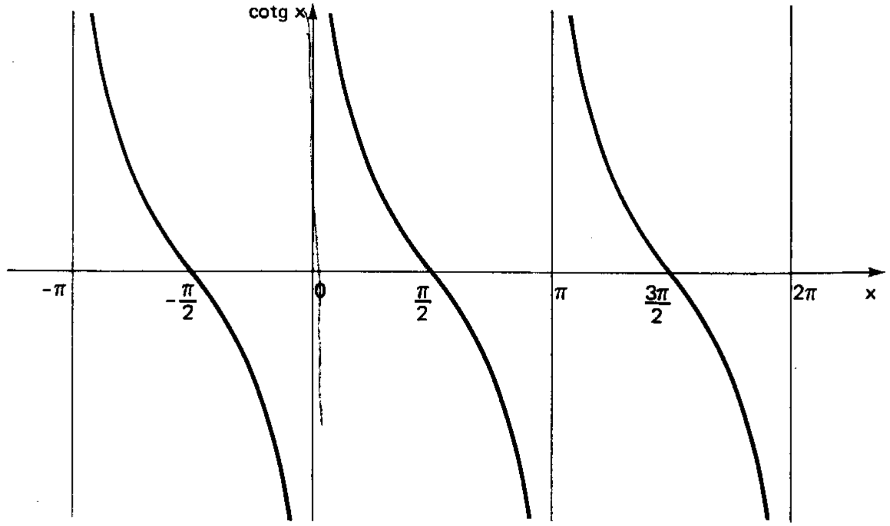
4ª) Se x é do segundo ou quarto quadrante, então $\text{cotg}\, x$ é negativa.

5ª) Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\text{cotg}\, x$ é decrescente.

6ª) A função cotangente é periódica e seu período é π.

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

29. Gráfico



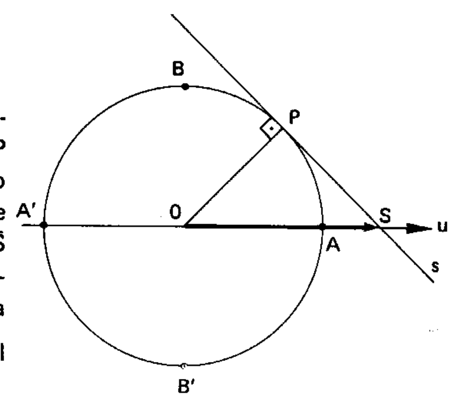
VII. FUNÇÃO SECANTE

30. Definição

Dado um número real x,

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja S sua intersecção com o eixo dos cossenos. Denominamos secante de x (e indicamos sec x) a abscissa $\overline{OS}$ do ponto S. Denominamos *função secante* a função f: D → ℝ que associa a cada real x, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, o real $\overline{OS} = \sec x$, isto é, $f(x) = \sec x$.



Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, P está em B ou B' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos cossenos. Como neste caso não existe o ponto S, a sec x não é definida.

31. Propriedades

1ª) O domínio da função secante é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

2ª) A imagem da função secante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$, isto é, para todo real y, com $y \leqslant -1$ ou $y \geqslant 1$, existe um x real tal que $\sec x = y$.

3ª) Se x é do primeiro ou quarto quadrante, então sec x é positiva.

4ª) Se x é do segundo ou terceiro quadrante, então sec x é negativa.

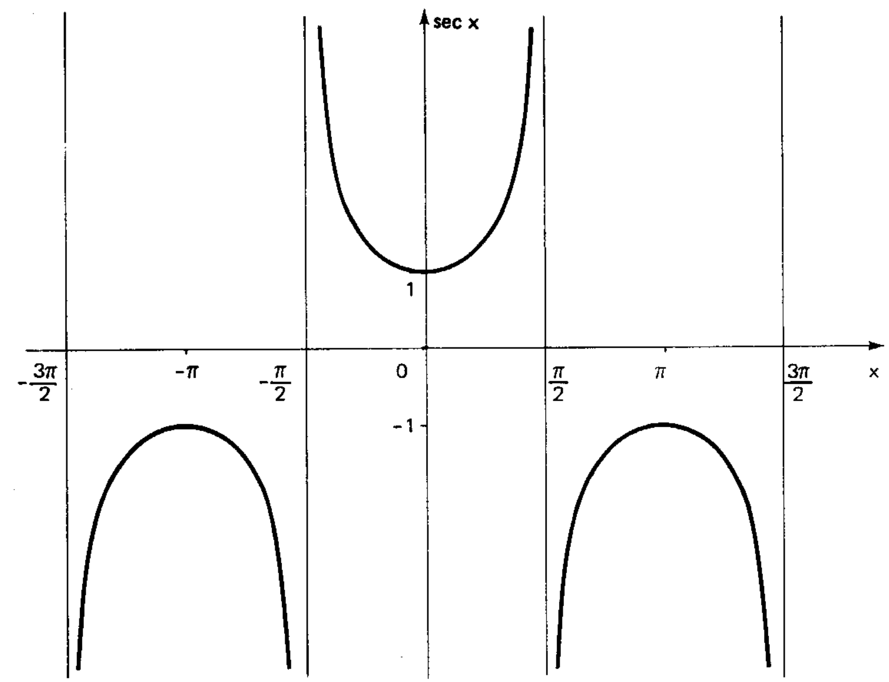
5ª) Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então sec x é crescente.

6ª) Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então sec x é decrescente.

7ª) A função secante é periódica e seu período é 2π.

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

32. Gráfico

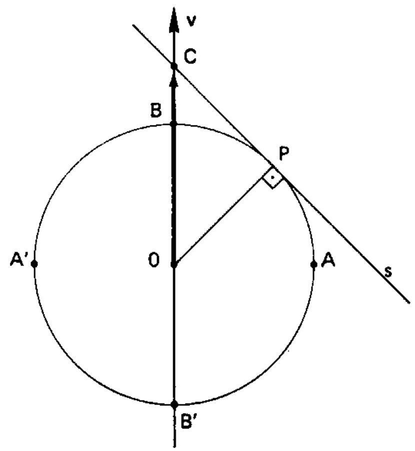


VIII. FUNÇÃO COSSECANTE

33. Definição

Dado um número real x, $x \neq k\pi$, seja P sua imagem no ciclo. Consideremos a reta s tangente ao ciclo em P e seja C sua intersecção com o eixo dos senos. Denominamos cossecante de x (e indicamos por cossec x) a ordenada $\overline{OC}$ do ponto C. Denominamos *função cossecante* a função $f\colon D \to \mathbb{R}$ que associa a cada real x, $x \neq k\pi$, o real $\overline{OC} = \text{cossec}\, x$, isto é, $f(x) = \text{cossec}\, x$.

Notemos que, para $x = k\pi$, P está em A ou A' e, então, a reta s fica paralela ao eixo dos senos. Como neste caso não existe o ponto C, a cossec x não é definida.



34. Propriedades

1ª) O domínio da função cossecante é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi\}$.

2ª) A imagem da função cossecante é $\mathbb{R} -]-1, 1[$, isto é, para todo real y, com $y \leqslant -1$ ou $y \geqslant 1$, existe um x real tal que $\text{cossec}\, x = y$.

3ª) Se x é do primeiro ou segundo quadrante, então cossec x é positiva.

4ª) Se x é do terceiro ou quarto quadrante, então cossec x é negativa.

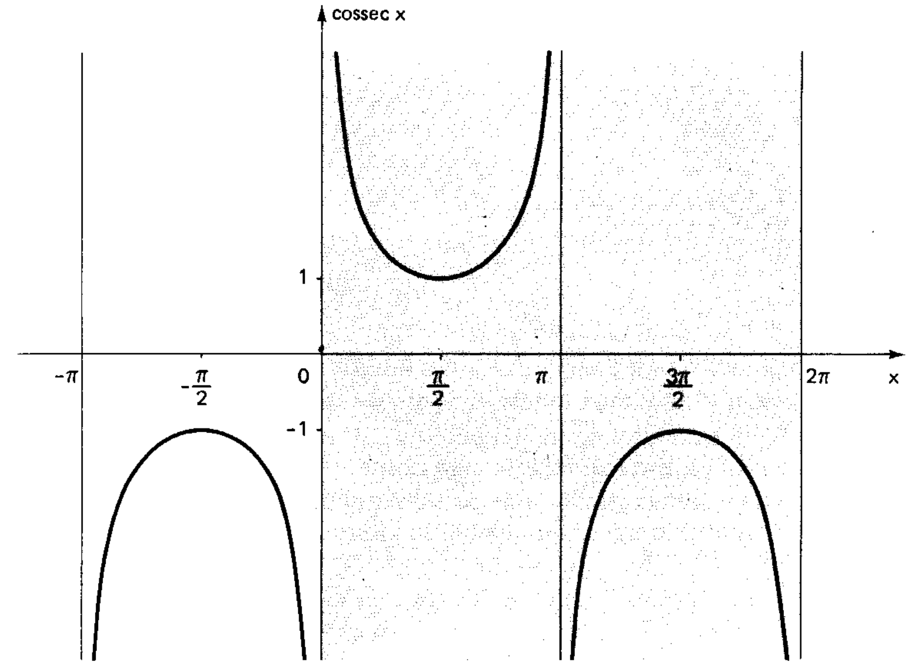
5ª) Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então cossec x é crescente.

6ª) Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então cossec x é decrescente.

7ª) A função cossecante é periódica e seu período é 2π.

As demonstrações dessas propriedades ficam como exercício para o leitor.

35. Gráfico



período completo da função cossecante

EXERCÍCIOS

C.70 Determinar domínio e período das seguintes funções reais:

$f(x) = \text{cotg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, $g(x) = \sec 2x$, $h(x) = \text{cossec}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

C.71 Em cada caso determinar o conjunto ao qual m deve pertencer de modo que exista x satisfazendo a igualdade:

a) $\text{cotg}\, x = \sqrt{2 - m}$

b) $\sec x = 3m - 2$

c) $\text{cossec}\, x = \dfrac{2m - 1}{1 - 3m}$

C.72 Determinar o sinal das seguintes expressões:

$y_1 = \cos 91^\circ + \text{cossec}\, 91^\circ$

$y_2 = \text{sen}\, 107^\circ + \sec 107^\circ$

$y_3 = \sec \dfrac{9\pi}{8} \cdot \left(\text{tg}\, \dfrac{7\pi}{6} + \text{cotg}\, \dfrac{\pi}{7}\right)$.

CONDUÇÃO DO CALOR : NOVA TEORIA

Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre, em 1768. Órfão aos 8 anos, Fourier foi colocado no Colégio Militar, dirigido pelos beneditinos.

Aos 12 anos, Fourier começou a mostrar parte do seu talento, redigindo sermões para sacerdotes de várias cidades. Dois anos mais tarde iniciou seus estudos de Matemática, conseguindo grande destaque. Considerado menino-prodígio, foi convidado a ingressar na ordem dos beneditinos mas, antes de ordenar-se, chegou a Revolução de 1789.

Fourier que sempre desejara ser militar, aderiu com entusiasmo à causa da Revolução. Com a criação da Escola Normal e da Escola Politécnica, das quais foi conferencista, Fourier começou a desenvolver os trabalhos que o imortalizaram como matemático. Data dessa época sua teoria para calcular raízes irracionais das equações algébricas, cujo estudo Newton iniciara.

Jean B. J. Fourier
(1768 - 1830)

Tendo acompanhado Napoleão no Egito, Fourier desenvolveu ali estudos de arqueologia, tornando-se especialista em egiptologia. Fourier trabalhou nessa época como engenheiro, dirigindo uma fábrica de armamentos do exército francês no Egito.

Voltando à França em 1812, Fourier desenvolveu, na sua obra "Memorial", uma teoria sobre a condução do calor, tornando-se precursor da Física-Matemática. Neste último estudo, o matemático francês foi levado a criar um novo tipo de desenvolvimento em série, diferente do método de Taylor por empregar funções periódicas em vez de potências, e que recebeu seu nome.

Em 1830, morreu Fourier, vítima de um aneurisma cerebral.

CAPÍTULO III

RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

I. INTRODUÇÃO

Para cada $x \neq \frac{k\pi}{2}$ definimos sen x, cos x, tg x, cotg x, sec x e cossec x. Vamos mostrar agora que esses seis números guardam entre si certas relações denominadas relações fundamentais. Mais ainda, mostraremos que a partir de um deles sempre é possível calcular os outros cinco.

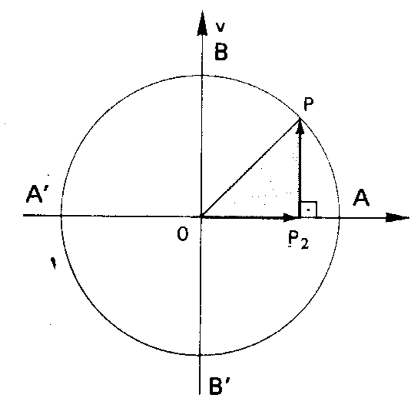
II. RELAÇÕES FUNDAMENTAIS

36. Teorema

Para todo x real vale a relação:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Demonstração



a) Se $x \neq \frac{k\pi}{2}$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então existe o triângulo OP_2P retângulo, portanto:

$$|\overline{OP_2}|^2 + |\overline{P_2P}|^2 = |\overline{OP}|^2$$

e $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$

b) Se $x = \frac{k\pi}{2}$, podemos verificar diretamente a tese:

x	sen x	cos x	$sen^2x + cos^2x$
0	0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	1	0	1
π	0	-1	1
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	1

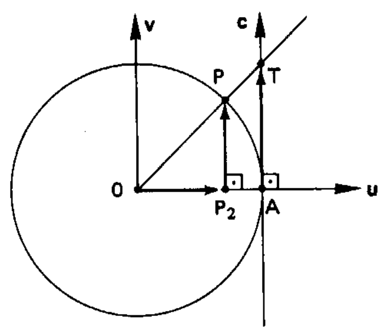
37. Teorema

Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}}$$

Demonstração

a) Se $x \neq k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:



$\Delta OAT \sim \Delta OP_2P$

$$\frac{|\overline{AT}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\overline{P_2P}|}{|\overline{OP_2}|}$$

$$|tg\ x| = \frac{|sen\ x|}{|cos\ x|} \quad (1)$$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal da tg x é igual ao do quociente $\frac{sen\ x}{cos\ x}$ (2)

Q	sinal de tg x	sinal de $\frac{sen\ x}{cos\ x}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

De (1) e (2) decorre a tese

b) Se $x = k\pi$, temos:

$$tg\ x = 0 = \frac{sen\ x}{cos\ x}$$

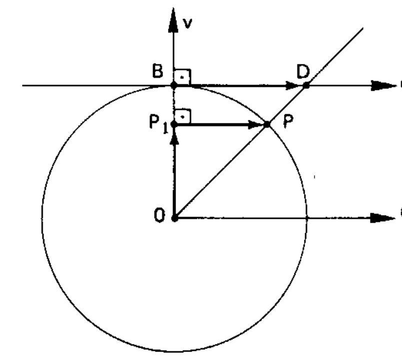
38. Teorema

Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{cotg\ x = \frac{cos\ x}{sen\ x}}$$

Demonstração

a) Se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:



$\Delta OBD \sim \Delta OP_1P$

$$\frac{|\overline{BD}|}{|\overline{OB}|} = \frac{|\overline{P_1P}|}{|\overline{OP_1}|}$$

$$|cotg\ x| = \frac{|cos\ x|}{|sen\ x|} \quad (1)$$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal da cotg x é igual ao sinal do quociente

$\frac{cos\ x}{sen\ x}$ (2)

Q	sinal de cotg x	sinal de $\frac{cos\ x}{sen\ x}$
1º	+	+
2º	-	-
3º	+	+
4º	-	-

De (1) e (2) decorre a tese.

b) Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos $cotg\ x = 0 = \frac{cos\ x}{sen\ x}$

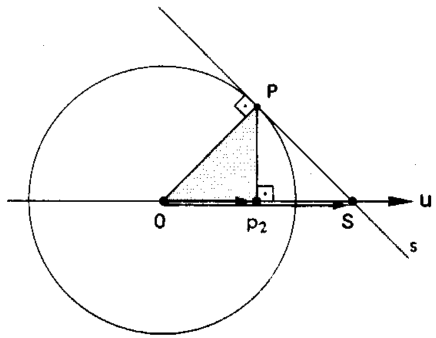
39. Teorema

Para todo x real, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação

$$\boxed{\sec x = \frac{1}{\cos x}}$$

Demonstração

a) Se $x \neq k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:



$$\Delta OPS \sim \Delta OP_2P$$

$$\frac{|\overline{OS}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP_2}|}$$

$$|\sec x| = \frac{1}{|\cos x|} \quad (1)$$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal de sec x é igual ao sinal de cos x (2).

De (1) e (2) decorre a tese.

Q	sinal de sec x	sinal de cos x
1º	+	+
2º	-	-
3º	-	-
4º	+	+

b) Se $x = k\pi$, temos $\sec x = 1 = \cos x$ (k par) ou $\sec x = -1 = \cos x$ (k ímpar).

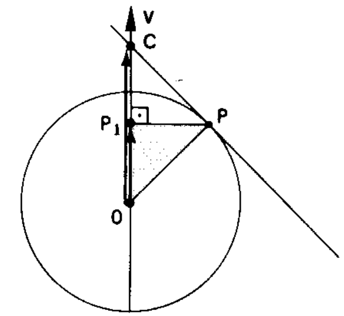
40. Teorema

Para todo x real, $x \neq k\pi$, vale a relação:

$$\boxed{\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}}$$

Demonstração

a) Se $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, a imagem de x é distinta de A, B, A' e B', então temos:



$$\Delta OPC \sim \Delta OP_1P$$

$$\frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OP}|} = \frac{|\overline{OP}|}{|\overline{OP_1}|}$$

$$|\text{cossec } x| = \frac{1}{|\text{sen } x|} \quad (1)$$

Utilizando o quadro de sinais ao lado, observamos que o sinal de cossec x é igual ao sinal de sen x (2).

De (1) e (2) decorre a tese.

Q	sinal de cossec x	sinal de sen x
1º	+	+
2º	+	+
3º	-	-
4º	-	-

b) Se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, temos:

$$\text{cossec } x = 1 = \frac{1}{\text{sen } x} \quad \text{(k par)}$$

ou

$$\text{cossec } x = -1 = \frac{1}{\text{sen } x} \quad \text{(k ímpar)}$$

41. Corolário

Para todo x real, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, valem as relações:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} \\ &\text{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \\ &1 + \text{cotg}^2 x = \text{cossec}^2 x \\ &\cos^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} \\ &\text{sen}^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x} \end{aligned}}$$

Demonstração

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{1}{\frac{\text{sen } x}{\cos x}} = \frac{1}{\text{tg } x}$$

$$\text{tg}^2 x + 1 = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$1 + \text{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}^2 x} = \text{cossec}^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x}$$

$$\text{sen}^2 x = \cos^2 x \cdot \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x \cdot \text{tg}^2 x = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 x} \cdot \text{tg}^2 x = \frac{\text{tg}^2 x}{1 + \text{tg}^2 x}$$

EXERCÍCIOS

C.73 Sabendo que $\text{sen } x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular as demais funções circulares de x.

Solução

Notando que $\frac{\pi}{2} < x < \pi \Longrightarrow \cos x < 0$, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{3}.$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4}.$$

C.74 Sabendo que $\text{cossec } x = -\frac{25}{24}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular as demais funções circulares de x.

C.75 Sabendo que $\text{tg } x = \frac{12}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular as demais funções circulares de x.

Solução

$$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} = \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{5}{12}$$

Notando que $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow \sec x < 0$, temos:

$$\sec x = -\sqrt{1 + \text{tg}^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{144}{25}} = -\sqrt{\frac{169}{25}} = -\frac{13}{5}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{-\frac{13}{5}} = -\frac{5}{13}$$

$$\text{sen } x = \text{tg } x \cdot \cos x = \left(\frac{12}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{13}$$

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{-\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$$

C.76 Calcular cos x sabendo que $\text{cotg } x = \frac{2\sqrt{m}}{m - 1}$ com $m > 1$.

C.77 Calcular sec x sabendo que $\text{sen } x = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ com $a > b > 0$.

C.78 Sabendo que $\sec x = 3$, calcular o valor da expressão $y = \operatorname{sen}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x$.

Solução

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 = 9 - 1 = 8$$

então

$$y = \operatorname{sen}^2 x + 2 \cdot \operatorname{tg}^2 x = \frac{8}{9} + 16 = \frac{152}{9}$$

C.79 Sendo $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{3}$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, calcular o valor de

$$y = \frac{1}{\operatorname{cossec} x + \operatorname{cotg} x} + \frac{1}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x}.$$

C.80 Sabendo que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{24}{7}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcular o valor da expressão

$$y = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

Solução 1

Calculamos $\operatorname{tg} x$, $\cos x$ e finalmente y:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{cotg} x} = \frac{7}{24}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{49}{576}} = \frac{576}{625} \Longrightarrow \cos x = -\frac{24}{25}$$

$$y = \frac{\operatorname{tg} x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{\left(\frac{7}{24}\right)\left(-\frac{24}{25}\right)}{\left(1 - \frac{24}{25}\right)\left(1 + \frac{24}{25}\right)} = \frac{-\frac{7}{25}}{\frac{49}{625}} = -\frac{25}{7}$$

Solução 2

Simplificamos y e depois calculamos o que for necessário:

$$y = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cossec} x =$$

$$= -\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = -\sqrt{1 + \frac{576}{49}} = -\frac{25}{7}$$

C.81 Dado que $\cos x = \dfrac{2}{5}$ e $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, obter o valor de

$y = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 + (1 - \operatorname{tg}^2 x)^2$.

C.82 Calcular $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sabendo que $3 \cdot \cos x + \operatorname{sen} x = -1$.

Solução

Vamos resolver o sistema:

$$\begin{cases} (1)\quad 3 \cdot \cos x + \operatorname{sen} x = -1 \\ (2)\quad \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \end{cases}$$

De (1) vem: $\operatorname{sen} x = -1 - 3 \cdot \cos x$ (1')

Substituindo (1') em (2) resulta:

$\cos^2 x + (-1 - 3 \cdot \cos x)^2 = 1$

isto é

$\cos^2 x + 1 + 6 \cdot \cos x + 9 \cdot \cos^2 x = 1$

ou ainda

$10 \cdot \cos^2 x + 6 \cdot \cos x = 0$ então $\cos x = 0$ ou $\cos x = -\dfrac{3}{5}$.

Substituindo cada uma dessas alternativas em (1'), encontramos:

$\operatorname{sen} x = -1 - 3 \cdot 0 = -1$ ou $\operatorname{sen} x = -1 - 3\left(-\dfrac{3}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$.

Assim, temos duas soluções:

1ª) $\cos x = 0$ e $\operatorname{sen} x = -1$

ou

2ª) $\cos x = -\dfrac{3}{5}$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{4}{5}$

C.83 Calcular $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ sabendo que $5 \cdot \sec x - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 x = 1$.

C.84 Obter $\operatorname{tg} x$ sabendo que $\operatorname{sen}^2 x - 5 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \cos^2 x = 3$.

C.85 Calcular m de modo que se tenha $\operatorname{sen} x = 2m + 1$ e $\cos x = 4m + 1$.

Solução

Como $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, resulta:

$$(2m + 1)^2 + (4m + 1)^2 = 1 \Longrightarrow (4m^2 + 4m + 1) + (16m^2 + 8m + 1) = 1$$

$$\Longrightarrow 20m^2 + 12m + 1 = 0 \Longrightarrow m = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 80}}{40} =$$

$$= \frac{-12 \pm 8}{40} \Longrightarrow m = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad m = -\frac{1}{10}.$$

C.86 Calcular m de modo que se tenha $\operatorname{tg} x = m - 2$ e $\operatorname{cotg} x = \frac{m}{3}$.

C.87 Determinar a de modo que se tenha $\cos x = \frac{1}{a+1}$ e $\operatorname{cossec} x = \frac{a+1}{\sqrt{a+2}}$.

C.88 Determinar uma relação entre x e y, independente de t, sabendo que

$$x = 3 \cdot \operatorname{sen} t \quad \text{e} \quad y = 4 \cdot \cos t.$$

Solução

Como $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$, resulta:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \Longrightarrow 16x^2 + 9y^2 = 144$$

C.89 Determinar uma relação entre x e y, independente de t, sabendo que

$$x = 5 \cdot \operatorname{tg} t \quad \text{e} \quad y = 3 \cdot \operatorname{cossec} t.$$

Solução

Como $\operatorname{cossec}^2 t = \operatorname{cotg}^2 t + 1$ e $\operatorname{cotg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t}$, resulta:

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{x}\right)^2 + 1 \Longrightarrow \frac{y^2}{9} = \frac{25}{x^2} + 1 \Longrightarrow x^2y^2 = 225 + 9x^2 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow x^2y^2 - 9x^2 = 225.$$

C.90 Se $\operatorname{sen} x + \cos x = a$ e $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = b$, obter uma relação entre a e b, independente de x.

C.91 Dado que $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = m$, calcular o valor de $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$ e $z = \operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x$.

Solução

Como $a^2 + b^2 \equiv (a+b)^2 - 2ab$, temos:

$$y = (\operatorname{sen}^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= 1^2 - 2 \cdot (\operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2 = 1 - 2m^2.$$

Como $a^3 + b^3 \equiv (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, temos:

$$z = (\operatorname{sen}^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)(\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = y - (\operatorname{sen} x \cdot \cos x)^2 =$$

$$= 1 - 2m^2 - m^2 = 1 - 3m^2.$$

C.92 Sabendo que $\operatorname{sen} x + \cos x = a$ (a dado), calcular $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$.

III. IDENTIDADES

42. Definição

Sejam f e g duas funções de domínios D_1 e D_2, respectivamente. Dizemos que f é idêntica a g, e indicamos $f \equiv g$, se, e somente se, $f(x) = g(x)$ para todo x em que ambas as funções estão definidas. Colocando em símbolos:

$$\boxed{f \equiv g \iff f(x) = g(x),\ \forall\, x \in D_1 \cap D_2}$$

43. Exemplos

1º) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$ e
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 4x$ são idênticas pois:
$f(x) = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x = g(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

2º) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ e
$g: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ são idênticas pois:

$$g(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1 = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

3º) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ e
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 1 - \cos^2 x$ são idênticas pois:
$f(x) = \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = g(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

4º) $f: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x$ e
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 1$ são idênticas pois:
$f(x) = \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x = (1 + \operatorname{tg}^2 x) - \operatorname{tg}^2 x = 1 = g(x)$ para todo $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

IV. DEMONSTRAÇÃO DE IDENTIDADE

44. Para demonstrarmos uma identidade trigonométrica podemos aplicar qualquer uma das fórmulas (que são também identidades) estabelecidas na teoria, a saber: as relações fundamentais, as fórmulas de redução, as de adição, as de multiplicação, as de divisão e as de transformação em produto. É evidente que na série de exercícios seguinte só podemos usar as relações fundamentais.

45. Existem basicamente três processos para provar uma identidade. Conforme a dificuldade da demonstração escolhemos o método mais adequado entre os seguintes:

1º) partimos de um dos membros (geralmente o mais complicado) da identidade e o transformamos no outro.

2º) transformamos o 1º membro (f) e, separadamente, o 2º membro (g), chegando com ambos na mesma expressão (h). A validade deste método é justificada pela propriedade:

$$\left.\begin{matrix} f \equiv h \\ g \equiv h \end{matrix}\right\} \Longrightarrow f \equiv g$$

3º) construímos a função $h = f - g$ e provamos que $h \equiv 0$. A validade deste método é justificada pela propriedade:

$$f - g \equiv 0 \iff f \equiv g$$

EXERCÍCIOS

C.93 Provar que $(1 + \text{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x) = 1$ para todo x real, $x \neq k\pi$.

Solução

$$f(x) = (1 + \text{cotg}^2 x)(1 - \cos^2 x) = \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}\right) \cdot \text{sen}^2 x =$$

$$= \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} \cdot \text{sen}^2 x = 1 = g(x).$$

C.94 Provar que $2 \cdot \sec x \cdot \text{tg}\, x = \dfrac{1}{\text{cossec}\, x - 1} + \dfrac{1}{\text{cossec}\, x + 1}$ para todo x real $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Solução

$$g(x) = \frac{1}{\text{cossec}\, x - 1} + \frac{1}{\text{cossec}\, x + 1} = \frac{(\text{cossec}\, x + 1) + (\text{cossec}\, x - 1)}{(\text{cossec}\, x - 1)\ (\text{cossec}\, x + 1)} =$$

$$= \frac{2 \cdot \text{cossec}\, x}{\text{cossec}^2 x - 1} = \frac{2 \cdot \text{cossec}\, x}{\text{cotg}^2 x} = \frac{2}{\text{sen}\, x} \cdot \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = 2 \cdot \sec x \cdot \text{tg}\, x = f(x).$$

C.95 Provar que $(1 - \text{tg}\, x)^2 + (1 - \text{cotg}\, x)^2 = (\sec x - \text{cossec}\, x)^2$ para todo x real, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Solução

$$f(x) = (1 - \text{tg}\, x)^2 + (1 - \text{cotg}\, x)^2 = \left(1 - \frac{\text{sen}\, x}{\cos x}\right)^2 + \left(1 - \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\cos x - \text{sen}\, x}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{\text{sen}\, x - \cos x}{\text{sen}\, x}\right)^2 = \frac{1 - 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x}{\cos^2 x} +$$

$$+ \frac{1 - 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x}{\text{sen}^2 x} = (1 - 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x)\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x}\right) =$$

$$= \frac{1 - 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} = h(x).$$

$$g(x) = (\sec x - \text{cossec}\, x)^2 = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\text{sen}\, x}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\text{sen}\, x - \cos x}{\cos x \cdot \text{sen}\, x}\right)^2 = \frac{1 - 2 \cdot \text{sen}\, x \cdot \cos x}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x} = h(x)$$

C.96 Provar que $\dfrac{1 - \cos x}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} + \text{sen}\, x = \dfrac{1 - \cos x}{\text{tg}\, x} + \text{tg}\, x$ para todo x real, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

Solução

$$f(x) - g(x) = \frac{1 - \cos x}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} + \text{sen}\, x - \frac{1 - \cos x}{\text{tg}\, x} - \text{tg}\, x =$$

$$= \frac{1 - \cos x}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} + \text{sen}\, x - \frac{\cos x\,(1 - \cos x)}{\text{sen}\, x} - \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} =$$

$$= \frac{1 - \cos x + \text{sen}^2 x \cdot \cos x - \cos^2 x \cdot (1 - \cos x) - \text{sen}^2 x}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{1 - \cos x + (1 - \cos^2 x) \cdot \cos x - \cos^2 x\,(1 - \cos x) - (1 - \cos^2 x)}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{1 - \cos x + \cos x - \cos^3 x - \cos^2 x + \cos^3 x - 1 + \cos^2 x}{\text{sen}\, x \cdot \cos x} = 0$$

Demonstrar as identidades seguintes:

C.97 $\cos^4 x + \text{sen}^4 x + 2 \cdot (\text{sen}\, x \cdot \cos x)^2 = 1$

C.98 $\dfrac{\text{sen}\, x}{\text{cossec}\, x} + \dfrac{\cos x}{\sec x} = 1$

C.99 $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \cdot \operatorname{cossec} x$

C.100 $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)(\sec x - \cos x)(\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x) = 1$

C.101 $\sec^2 x + \operatorname{cossec}^2 x = \sec^2 x \cdot \operatorname{cossec}^2 x$

C.102 $\dfrac{\operatorname{cotg}^2 x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \cos^2 x$

C.103 $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x - \cos^3 x}{\operatorname{sen} x - \cos x} = 1 + \operatorname{sen} x \cdot \cos x$

C.104 $\operatorname{cossec}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x + \operatorname{cotg}^2 x$

C.105 $2(\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x)(\cos x + \operatorname{cotg} x) = (1 + \operatorname{sen} x + \cos x)^2$

C.106 $(1 + \operatorname{cotg} x) + (1 - \operatorname{cotg} x)^2 = 2 \cdot \operatorname{cossec}^2 x.$

C.107 $\dfrac{1 - 2 \cdot \cos^2 x + \cos^4 x}{1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x} = \operatorname{tg}^4 x$

C.108 $(\operatorname{cotg} x - \cos x)^2 + (1 - \operatorname{sen} x)^2 = (1 - \operatorname{cossec} x)^2$

C.109 $\dfrac{\cos x + \cos y}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y} = \dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos y - \cos x}$

C.110 $\dfrac{\cos x + \operatorname{cotg} x}{\operatorname{tg} x + \sec x} = \cos x \cdot \operatorname{cotg} x$

C.111 $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} + 1 = \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 y$

C.112 $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = (\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)^2$

C.113 $\dfrac{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y} = \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cotg} y$

C.114 $(\sec x \cdot \sec y + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)^2 = 1 + (\sec x \cdot \operatorname{tg} y + \sec y \cdot \operatorname{tg} x)^2$

C.115 $\sec x - \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sec x + \operatorname{tg} x}$

C.116 $\operatorname{cossec}^6 x - \operatorname{cotg}^6 x = 1 + 3 \cdot \operatorname{cotg}^2 x \cdot \operatorname{cossec}^2 x.$

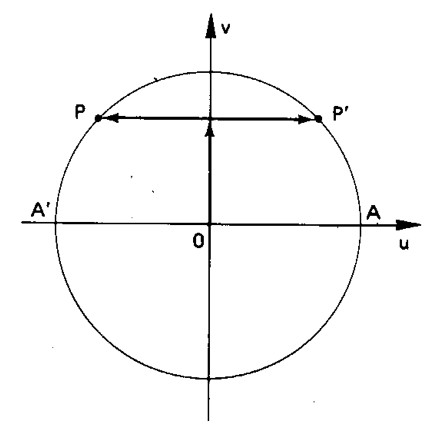
CAPÍTULO IV

REDUÇÃO AO 1º QUADRANTE

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de x, com x não pertencente ao 1º quadrante, relacionando x com algum elemento do 1º quadrante. A meta é ficar conhecendo sen x, cos x e tg x a partir de uma tabela que dê as funções circulares dos reais entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

I. REDUÇÃO DO 2º AO 1º QUADRANTE

46. Dado o número real x tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao eixo dos senos. Temos:



$\widehat{AP} + \widehat{PA'} = \pi$ (no sentido anti-horário)

e, como $\widehat{AP'} = \widehat{PA'}$, vem:

$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = \pi$$

portanto $\widehat{AP'} = \pi - x$.

É imediato que:

$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} (\pi - x)$
$\cos x = -\cos (\pi - x)$

47. Levando em conta as relações fundamentais, decorre:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\text{sen } (\pi - x)}{-\cos (\pi - x)} = -\text{tg } (\pi - x)$$

$\text{cotg } x = -\text{cotg } (\pi - x)$
$\sec x = -\sec (\pi - x)$
$\text{cossec } x = \text{cossec } (\pi - x)$

48. Assim, por exemplo, temos:

$\text{sen } 115° = \text{sen } (180° - 115°) = \text{sen } 65°$
$\cos 130° = -\cos (180° - 130°) = -\cos 50°$
$\text{tg } \frac{2\pi}{3} = -\text{tg } (\pi - \frac{2\pi}{3}) = -\text{tg } \frac{\pi}{3}$
$\text{cotg } \frac{4\pi}{5} = -\text{cotg } (\pi - \frac{4\pi}{5}) = -\text{cotg } \frac{\pi}{5}$

II. REDUÇÃO DO 3º AO 1º QUADRANTE

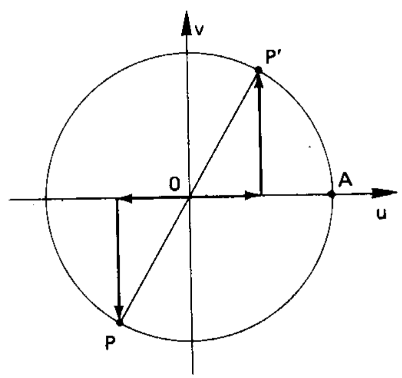
49. Dado o número real x tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao centro. Temos:

$\widehat{AP} - \widehat{AP'} = \pi$ (no sentido anti-horário)

portanto $\widehat{AP'} = x - \pi$.

É imediato que:

$\text{sen } x = -\text{sen } (x - \pi)$
$\cos x = -\cos (x - \pi)$



50. Em conseqüência temos:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{-\text{sen } (x - \pi)}{-\cos (x - \pi)} = \text{tg } (x - \pi)$$

$\text{cotg } x = \text{cotg } (x - \pi)$
$\sec x = -\sec (x - \pi)$
$\text{cossec } x = -\text{cossec } (x - \pi)$

51. Assim, por exemplo, temos:

$\text{sen } 210° = -\text{sen } (210° - 180°) = -\text{sen } 30°$
$\cos 225° = -\cos (225° - 180°) = -\cos 45°$
$\text{tg } \frac{4\pi}{3} = \text{tg } (\frac{4\pi}{3} - \pi) = \text{tg } \frac{\pi}{3}$
$\sec \frac{7\pi}{6} = -\sec (\frac{7\pi}{6} - \pi) = -\sec \frac{\pi}{6}$

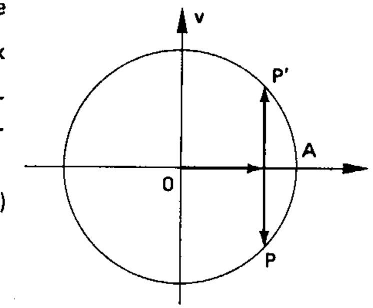
III. REDUÇÃO DO 4º AO 1º QUADRANTE

52. Dado o número real x tal que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo, simétrico de P em relação ao eixo dos cossenos. Temos:

$\widehat{AP} + \widehat{PA} = 2\pi$ (no sentido anti-horário)

e, como $\widehat{AP'} = \widehat{PA}$, em:

$$\widehat{AP} + \widehat{AP'} = 2\pi$$



portanto $\widehat{AP'} = 2\pi - x$.

É imediato que:

$\text{sen } x = -\text{sen } (2\pi - x)$

$\cos x = \cos (2\pi - x)$

53. Em conseqüência temos:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{-\text{sen } (2\pi - x)}{\cos (2\pi - x)} = -\text{tg } (2\pi - x)$$

$\text{cotg } x = -\text{cotg } (2\pi - x)$

$\sec x = \sec (2\pi - x)$

$\text{cossec } x = -\text{cossec } (2\pi - x)$

54. Assim, por exemplo, temos:

$\text{sen } 280° = -\text{sen } (360° - 280°) = -\text{sen } 80°$
$\cos 340° = \cos (360° - 340°) = \cos 20°$

$$\text{tg } \frac{11\pi}{6} = -\text{tg } (2\pi - \frac{11\pi}{6}) = -\text{tg } \frac{\pi}{6}$$

$$\text{cossec } \frac{5\pi}{3} = -\text{cossec } (2\pi - \frac{5\pi}{3}) = -\text{cossec } \frac{\pi}{3}$$

EXERCÍCIOS

C.117 Reduzir ao 1º quadrante:

a) $\cos 178°$ b) $\text{sen } 251°$ c) $\text{tg } 290°$

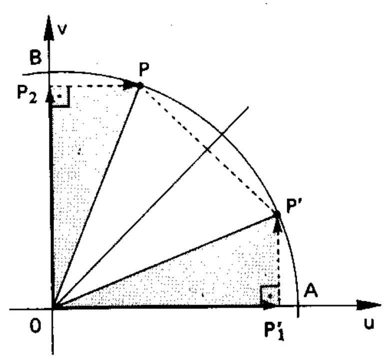
d) $\text{cotg } \frac{7\pi}{6}$ e) $\sec 1924°$ f) $\text{cossec } \frac{23\pi}{6}$

g) $\text{sen } (-\frac{7\pi}{6})$ h) $\cos (-\frac{5\pi}{3})$ i) $\text{tg } (-\frac{3\pi}{4})$

j) $\text{sen } \frac{21\pi}{4}$ k) $\cos \frac{31\pi}{6}$ l) $\text{tg } \frac{11\pi}{3}$

IV. REDUÇÃO DE $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ A $[0, \frac{\pi}{4}]$

55. Dado o número real x tal que $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, seja P a imagem de x no ciclo. Seja P' o ponto do ciclo simétrico de P em relação à bissetriz do 1º quadrante. Temos:



$\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{PB} = \frac{\pi}{2}$ (no sentido anti-horário)

e, como $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{AP'}$, vem:

$\overset{\frown}{AP} + \overset{\frown}{AP'} = \frac{\pi}{2}$, então $\overset{\frown}{AP'} = \frac{\pi}{2} - x$.

Considerando a congruência dos triângulos OPP_2 e $OP'P'_1$, temos:

$$\overline{OP_2} = \overline{OP'_1} \Longrightarrow \text{sen } x = \cos (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\overline{P_2P} = \overline{P'_1P'} \Longrightarrow \cos x = \text{sen } (\frac{\pi}{2} - x)$$

56. Em conseqüência, temos:

$$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\cos (\frac{\pi}{2} - x)}{\text{sen } (\frac{\pi}{2} - x)} = \text{cotg } (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\text{cotg } x = \text{tg } (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\sec x = \text{cossec } (\frac{\pi}{2} - x)$$

$$\text{cossec } x = \sec (\frac{\pi}{2} - x)$$

57. Assim, por exemplo, temos:

$\text{sen } 71° = \cos (90° - 71°) = \cos 19°$
$\cos 60° = \text{sen } (90° - 60°) = \text{sen } 30°$
$\text{tg } 50° = \text{cotg } (90° - 50°) = \text{cotg } 40°$

$$\text{sen } \frac{\pi}{3} = \cos (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \text{sen } (\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}) = \text{sen } \frac{\pi}{12}$$

$$\text{tg } \frac{3\pi}{8} = \text{cotg } (\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}) = \text{cotg } \frac{\pi}{8}$$

EXERCÍCIO

C.118 Reduzir ao intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$:

a) $\text{sen } 261°$ b) $\cos 2861°$ c) $\text{tg } 511°$

d) $\text{sen } \frac{4\pi}{3}$ e) $\cos \frac{2\pi}{3}$ f) $\text{tg } \frac{5\pi}{3}$

g) $\text{sen } \frac{5\pi}{6}$ h) $\cos \frac{7\pi}{6}$ i) $\text{tg } \frac{11\pi}{6}$

j) $\text{sen } (-\frac{5\pi}{3})$ k) $\cos (-\frac{4\pi}{3})$ l) $\text{tg } (-\frac{11\pi}{3})$

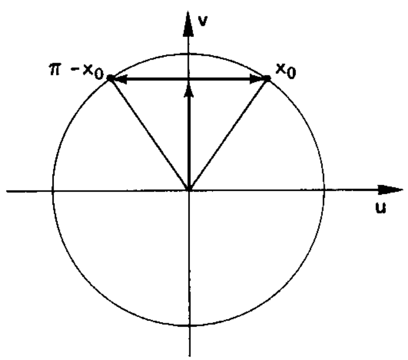
V. IDENTIDADES

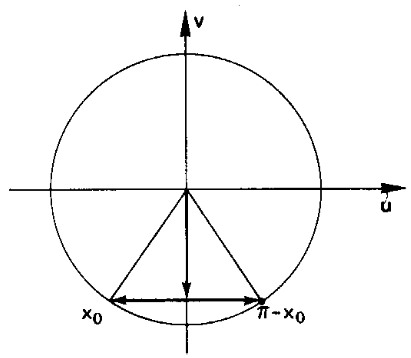
Ao procurar resolver problemas de redução ao 1º quadrante estabelecemos igualdades notáveis. Por exemplo, mostramos que se $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ então $\text{sen}\, x = \text{sen}\,(\pi - x)$ e $\cos x = -\cos(\pi - x)$. Vamos agora estender essas igualdades para todo x real.

58. Teorema

Para todo x real valem as seguintes igualdades:

1) $\text{sen}\, x = \text{sen}\,(\pi - x)$ e $\cos x = -\cos(\pi - x)$
2) $\text{sen}\, x = -\text{sen}\,(x - \pi)$ e $\cos x = -\cos(x - \pi)$
3) $\text{sen}\, x = -\text{sen}\,(2\pi - x)$ e $\cos x = \cos(2\pi - x)$
4) $\text{sen}\, x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ e $\cos x = \text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x)$





Demonstração

1) Para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $x = x_0 + 2k\pi$ onde $0 \leqslant x_0 < 2\pi$ e $k \in \mathbb{Z}$. Assim, $\pi - x = (\pi - x_0) - 2k\pi$ o que mostra que x e $\pi - x$ têm imagens no ciclo simétricas em relação ao eixo dos senos.

Em conseqüência temos:

$\text{sen}\,(\pi - x) = \text{sen}\, x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2), 3) e 4) provam-se analogamente.

EXERCÍCIOS

C.119 Simplificar as seguintes expressões:

a) $\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} + x)$ b) $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$
c) $\text{sen}\,(\frac{3\pi}{2} - x)$ d) $\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$
e) $\text{sen}\,(\frac{3\pi}{2} + x)$ f) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x)$

Solução

a) $\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} + x) = \text{sen}\,[\pi - (\frac{\pi}{2} + x)] = \text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

b) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\cos[\pi - (\frac{\pi}{2} + x)] = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\text{sen}\, x$

c) $\text{sen}\,(\frac{3\pi}{2} - x) = -\text{sen}\,[(\frac{3\pi}{2} - x) - \pi] = -\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$

d) $\cos(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos[(\frac{3\pi}{2} - x) - \pi] = -\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\text{sen}\, x$

e) $\text{sen}\,(\frac{3\pi}{2} + x) = -\text{sen}\,[2\pi - (\frac{3\pi}{2} + x)] = -\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos x$

f) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \cos[2\pi - (\frac{3\pi}{2} + x)] = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \text{sen}\, x$

C.120 Simplificar $y = \dfrac{\text{sen}\,(2\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}{\text{tg}\,(\frac{\pi}{2} + x) \cdot \text{cotg}\,(\frac{3\pi}{2} - x)}$

Solução

$$y = \frac{(-\text{sen}\, x)(-\cos x)}{(-\text{cotg}\, x)(\text{tg}\, x)} = -\text{sen}\, x \cdot \cos x$$

C.121 Simplificar as expressões:

a) $\dfrac{\text{sen}\,(-x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + x)}{\text{tg}\,(2\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}$

b) $\dfrac{\text{sen}\,(180° - x) \cdot \text{tg}\,(90° + x)}{\text{cotg}\,(270° + x) \cdot \cos(270° - x)}$

c) $\dfrac{\sec(\pi - x) \cdot \text{tg}\,(x - \frac{\pi}{2})}{\text{cossec}\,(9\pi - x) \cdot \text{cotg}\,(-x)}$

d) $\text{sen}\,(\frac{3\pi}{2} - x) + \cos(4\pi - x) + \text{tg}\,(\frac{3\pi}{2} - x)$

C.122 (MAPOFEI-76) Simplificar a expressão:

$\text{sen}\,(\frac{9\pi}{2}) - \cos(x + \frac{15\pi}{2}) \cdot \text{sen}\,(7\pi - x)$.

C.123 (MAPOFEI-74) Simplificar a expressão:

$$\operatorname{sen}\frac{7\pi}{2} + \frac{\operatorname{sen}(x + 11\pi)\ \operatorname{cotg}\left(x + \frac{11\pi}{2}\right)}{\cos(9\pi - x)}$$

C.124 (MAPOFEI-74) Simplificar a expressão:

$$\frac{a^2 \cos 180^\circ - (a - b)^2 \operatorname{sen} 270^\circ + 2\,ab \cos 0^\circ}{b^2 \operatorname{sen} 90^\circ}$$

C.125 (MAPOFEI-76) Fazer o gráfico da função $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$.

VI. FUNÇÕES PARES E FUNÇÕES ÍMPARES

59. Definição

Uma função $f: A \to B$, é denominada *função par* se, e somente se:

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \in A$$

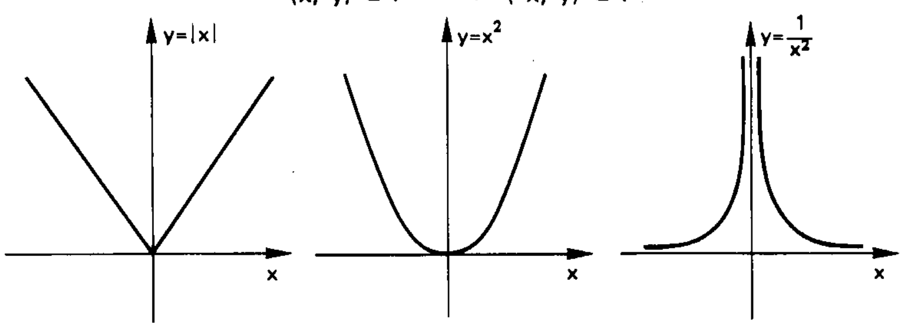
isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos o mesmo valor para a função.

Exemplos

1º) $f(x) = |x|$ é função par pois $|-x| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2º) $f(x) = x^2$ é função par pois $(-x)^2 = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$
3º) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ é função par pois $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Da definição decorre que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo *y* pois:

$$(x, y) \in f \Longrightarrow (-x, y) \in f$$



60. Definição

Uma função $f: A \to B$, é denominada *função ímpar* se, e somente se:

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in A$$

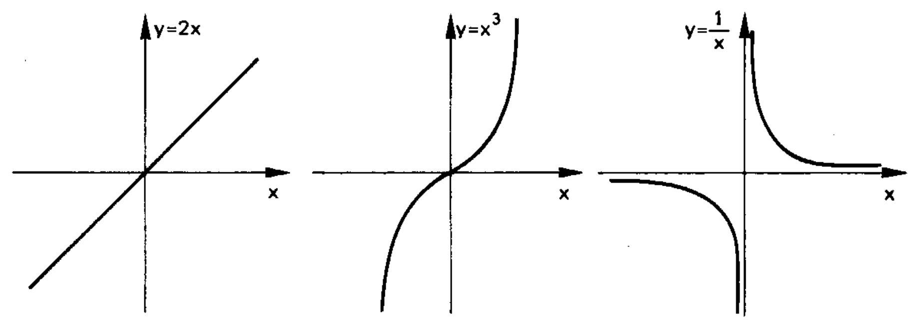
isto é, dando valores simétricos à variável, obtemos valores simétricos para a função.

Exemplos

1º) $f(x) = 2x$ é função ímpar pois $2(-x) = -2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$
2º) $f(x) = x^3$ é função ímpar pois $(-x)^3 = -x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$
3º) $f(x) = \frac{1}{x}$ é função ímpar pois $\frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$

Da definição decorre que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano pois:

$$(x, y) \in f \Longrightarrow (-x, -y) \in f$$



61. Os números *x* e *–x* têm, no ciclo, imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos. Em conseqüência, temos:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\cos(-x) = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

portanto, de acordo com as definições dadas, a função seno **é função ímpar e a função cosseno é função par.**

TÁBUA DE VALORES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Graus	Radianos	Seno	Tangente	Cotang.	Co-seno		
0°	0,0000	0,0000	0,0000		1,0000	1,5708	90°
1°	0,0175	0,0175	0,0175	57,290	0,9998	1,5533	89°
2°	0,0349	0,0349	0,0349	28,636	0,9994	1,5359	88°
3°	0,0524	0,0523	0,0524	19,081	0,9986	1,5184	87°
4°	0,0698	0,0698	0,0699	14,301	0,9976	1,5010	86°
5°	0,0873	0,0872	0,0875	11,430	0,9962	1,4835	85°
6°	0,1047	0,1045	0,1051	9,5144	0,9945	1,4661	84°
7°	0,1222	0,1219	0,1228	8,1443	0,9925	1,4486	83°
8°	0,1396	0,1392	0,1405	7,1154	0,9903	1,4312	82°
9°	0,1571	0,1564	0,1584	6,3138	0,9877	1,4137	81°
10°	0,1745	0,1736	0,1763	5,6713	0,9848	1,3963	80°
11°	0,1920	0,1908	0,1944	5,1446	0,9816	1,3788	79°
12°	0,2094	0,2079	0,2126	4,7046	0,9781	1,3614	78°
13°	0,2269	0,2250	0,2309	4,3315	0,9744	1,3439	77°
14°	0,2443	0,2419	0,2493	4,0108	0,9703	1,3265	76°
15°	0,2618	0,2588	0,2679	3,7321	0,9679	1,3090	75°
16°	0,2793	0,2756	0,2867	3,4874	0,9613	1,2915	74°
17°	0,2967	0,2924	0,3057	3,2709	0,9563	1,2741	73°
18°	0,3142	0,3090	0,3299	3,0777	0,9515	1,2566	72°
19°	0,3316	0,3256	0,3443	2,9042	0,9455	1,2392	71°
20°	0,3491	0,3420	0,3640	2,7475	0,9397	1,2217	70°
21°	0,3665	0,3584	0,3839	2,6051	0,9336	1,2043	69°
22°	0,3840	0,3746	0,4040	2,4751	0,9272	1,1868	68°
23°	0,4014	0,3907	0,4245	2,3559	0,9205	1,1694	67°
24°	0,4189	0,4067	0,4452	2,2460	0,9135	1,1519	66°
25°	0,4363	0,4226	0,4663	2,1445	0,9063	1,1345	65°
26°	0,4538	0,4384	0,4877	2,0503	0,8988	1,1170	64°
27°	0,4712	0,4540	0,5095	1,9626	0,8910	1,0996	63°
28°	0,4887	0,4695	0,5317	1,8807	0,8829	1,0821	62°
29°	0,5061	0,4848	0,5543	1,8040	0,8746	1,0647	61°
30°	0,5236	0,5000	0,5774	1,7321	0,8660	1,0472	60°
31°	0,5411	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	1,0297	59°
32°	0,5585	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	1,0123	58°
33°	0,5760	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,9948	57°
34°	0,5934	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	0,9774	56°
35°	0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55°
36°	0,6283	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	0,9425	54°
37°	0,6458	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	0,9250	53°
38°	0,6632	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	0,9076	52°
39°	0,6807	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,8901	51°
40°	0,6981	0,6428	0,8391	1,1918	0,7660	0,8727	50°
41°	0,7156	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,8552	49°
42°	0,7330	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	0,8378	48°
43°	0,7505	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,8203	47°
44°	0,7679	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	0,8029	46°
45°	0,7854	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,7854	45°
		Co-seno	Cotang.	Tangente	Seno	Radianos	Graus

CAPÍTULO V

ARCOS NOTÁVEIS

Verificaremos no que segue que as funções circulares dos reais $x = \frac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$, podem ser calculadas a partir de ℓ_n, lado do polígono regular de n lados inscrito no ciclo.

I. TEOREMA

Para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 3$, vale a relação

$$\boxed{\text{sen}\,\frac{\pi}{n} = \frac{\ell_n}{2}}$$

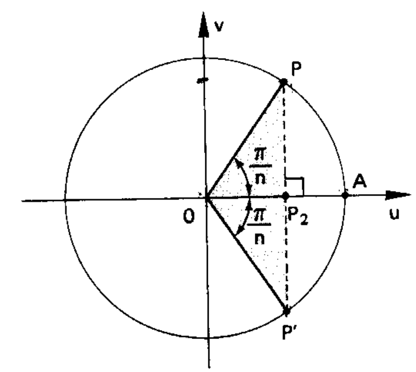
Demonstração

Seja $A\hat{O}P = A\hat{O}P' = \frac{\pi}{n}$.

Como $P'\hat{O}P = \frac{2\pi}{n}$, decorre que $P'P = \ell_n$.

No triângulo isósceles $P'OP$ o eixo dos cossenos é bissetriz e também altura e mediana, isto é, $P'P \perp u$ e P_2 é ponto médio de $P'P$. Então

$$\text{sen}\,\frac{\pi}{n} = \overline{P_2P} = \frac{\ell_n}{2}$$

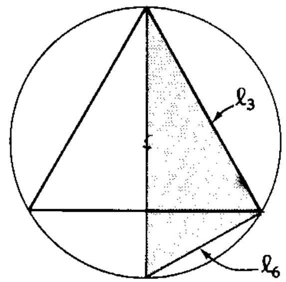


II. APLICAÇÕES

Os casos mais comuns de aplicação desta teoria são aqueles em que $n = 3, 4$ e 6.

62. Valores das funções em $\frac{\pi}{3}$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo assinalado na figura:



$$\ell_3^2 + \ell_6^2 = (2R)^2$$
$$\ell_3^2 + R^2 = 4R^2$$
$$\ell_3^2 = 3R^2$$

$$\boxed{\ell_3 = R\sqrt{3}}$$

Notando que o raio do ciclo é $R = 1$, temos:

$$\text{sen}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\ell_3}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

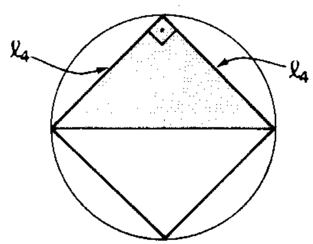
Em conseqüência, vem:

$$\cos\ \frac{\pi}{3} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\ \frac{\pi}{3}} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\ \frac{\pi}{3} = \frac{\text{sen}\ \frac{\pi}{3}}{\cos\ \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

63. Valores das funções em $\frac{\pi}{4}$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo assinalado na figura:



$$\ell_4^2 + \ell_4^2 = (2R)^2$$
$$2\ell_4^2 = 4R^2$$
$$\ell_4^2 = 2R^2$$

$$\boxed{\ell_4 = R\sqrt{2}}$$

Temos, então:

$$\text{sen}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\ell_4}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

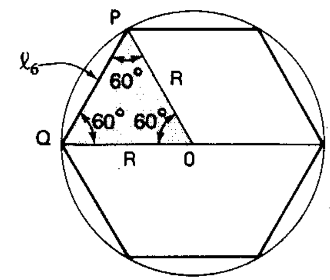
Em conseqüência, vem:

$$\cos\ \frac{\pi}{4} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\ \frac{\pi}{4}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\ \frac{\pi}{4} = \frac{\text{sen}\ \frac{\pi}{4}}{\cos\ \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

64. Valores das funções em $\frac{\pi}{6}$

Sendo $PQ = \ell_6$ o lado do hexágono regular inscrito, o triângulo OPQ é equilátero e, então:



$$\boxed{\ell_6 = R}$$

Temos, então:

$$\text{sen}\ \frac{\pi}{6} = \frac{\ell_6}{2} = \frac{R}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\ \frac{\pi}{6} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\ \frac{\pi}{6}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

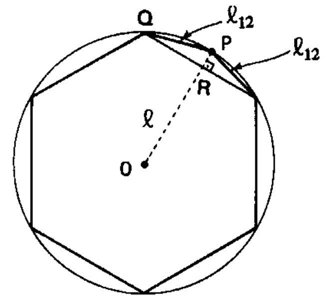
$$\text{tg}\ \frac{\pi}{6} = \frac{\text{sen}\ \frac{\pi}{6}}{\cos\ \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

65. Concluindo, podemos sintetizar esses resultados na seguintes tabela:

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

EXERCÍCIOS

C.126 Calcular $\operatorname{sen} 15°$, $\cos 15°$ e $\operatorname{tg} 15°$.



Solução

$\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = \frac{\ell_{12}}{2}$

Calculemos ℓ_{12} no triângulo PQR:

$PQ = \ell_{12}$, $QR = \frac{\ell_6}{2} = \frac{1}{2}$

$RP = OP - OR = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

então $\quad \ell_{12}^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + 1 - \sqrt{3} + \frac{3}{4} = 2 - \sqrt{3}$

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} = \frac{\ell_{12}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

$\cos \frac{\pi}{12} = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{12}} = \sqrt{1 - \frac{2 - \sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$

$\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$

C.127 Calcular $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8}$, $\cos \frac{\pi}{8}$ e $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

C.128 Determinar os elementos do conjunto $A = \{x = \operatorname{tg} \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Solução

Dando valores a k, temos:

$k = 0 \Longrightarrow x = \operatorname{tg} 0 = 0$

$k = 1 \Longrightarrow x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$k = 2 \Longrightarrow x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$k = 3 \Longrightarrow x = \operatorname{tg} \pi = 0$

$k = 4 \Longrightarrow x = \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \sqrt{3}$

$k = 5 \Longrightarrow x = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$k = 6 \Longrightarrow x = \operatorname{tg} 2\pi = 0$ (repetição) então $A = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.

C.129 Determinar $A \cap B$ sabendo que:

$A = \{x = \operatorname{sen} \frac{k\pi}{6} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ e $B = \{x = \cos \frac{k\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C.130 (MAPOFEI-74) Calcular todas as funções trigonométricas de um arco de 930°.

CAPÍTULO VI

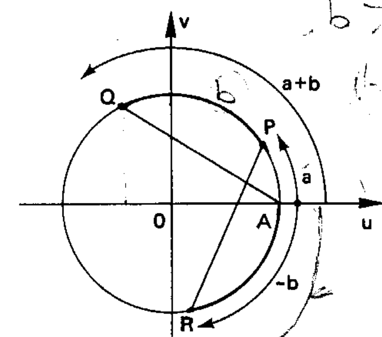
TRANSFORMAÇÕES

I. FÓRMULAS DE ADIÇÃO

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas da soma $(a + b)$ e da diferença $(a - b)$ de dois números reais quaisquer **a** e **b**, conhecidas as funções circulares de **a** e de **b**.

66. Cosseno da soma

b > a



Sejam P, Q e R os pontos do ciclo associados aos números a, a + b e −b, respectivamente. Em relação ao sistema cartesiano u0v as coordenadas desses pontos são:

P (cos a, sen a)

Q (cos (a + b), sen (a + b))

R (cos b, −sen b)

Os arcos $\widehat{AQ}$ e $\widehat{RP}$ têm a mesma medida, portanto, as cordas AQ e PR são iguais. Aplicando, então, a fórmula da distância entre dois pontos da Geometria Analítica, temos:

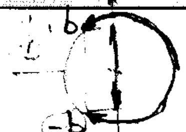
$$\begin{aligned} d_{AQ}^2 &= (x_Q - x_A)^2 + (y_Q - y_A)^2 = \\ &= [\cos(a+b) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(a+b) - 0]^2 = \\ &= \cos^2(a+b) - 2 \cdot \cos(a+b) + 1 + \operatorname{sen}^2(a+b) = \\ &= 2 - 2 \cdot \cos(a+b) \end{aligned}$$

$$d_{RP}^2 = (x_P - x_R)^2 + (y_P - y_R)^2 =$$
$$= [\cos a - \cos b]^2 + [\text{sen}\, a + \text{sen}\, b]^2 =$$
$$= \cos^2 a - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + \cos^2 b + \text{sen}^2 a + 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b +$$
$$+ \text{sen}^2 b = 2 - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$$

$$d_{AQ} = d_{RP} \Longrightarrow 2 - 2 \cdot \cos(a+b) = 2 - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b + 2 \cdot \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b$$

e, então, vem a fórmula:

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}$$



67. Cosseno da diferença

$$\cos(a-b) = \cos[a + (-b)] = \cos a \cdot \cos(-b) - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}(-b) =$$
$$= \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot (-\text{sen}\, b)$$

então

$$\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}$$

68. Seno da soma

$$\text{sen}(a+b) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (a+b)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \cos b + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \text{sen}\, b$$

então

$$\boxed{\text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a}$$

69. Seno da diferença

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen}[a + (-b)] = \text{sen}\, a \cdot \cos(-b) + \text{sen}(-b) \cdot \cos a =$$
$$= \text{sen}\, a \cdot \cos b + (-\text{sen}\, b) \cdot \cos a$$

então

$$\boxed{\text{sen}(a-b) = \text{sen}\, a \cdot \cos b - \text{sen}\, b \cdot \cos a}$$

70. Tangente da soma

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\, a \cdot \cos b + \text{sen}\, b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\dfrac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}{\cos a \cdot \cos b}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen}\, a \cdot \cancel{\cos b}}{\cos a \cdot \cancel{\cos b}} + \dfrac{\text{sen}\, b \cdot \cancel{\cos a}}{\cancel{\cos a} \cdot \cos b}}{\dfrac{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}}{\cancel{\cos a} \cdot \cancel{\cos b}} - \dfrac{\text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b}{\cos a \cdot \cos b}}$$

então

$$\boxed{\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}\, b}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{e} \quad a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

71. Tangente da diferença

$$\text{tg}(a-b) = \text{tg}[a + (-b)] = \frac{\text{tg}\, a + \text{tg}(-b)}{1 - \text{tg}\, a \cdot \text{tg}(-b)} =$$

$$= \frac{\text{tg}\, a + (-\text{tg}\, b)}{1 - \text{tg}\, a \cdot (-\text{tg}\, b)}$$

então

$$\boxed{\text{tg}(a-b) = \frac{\text{tg}\, a - \text{tg}\, b}{1 + \text{tg}\, a \cdot \text{tg}\, b}}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$$a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{e} \quad a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

72. Cotangente da soma

$$\text{cotg}\,(a+b) = \frac{\cos(a+b)}{\text{sen}\,(a+b)} = \frac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}{\text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}{\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}}{\dfrac{\text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a}{\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\cos a \cdot \cos b}{\text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b} - \dfrac{\cancel{\text{sen}\,a} \cdot \cancel{\text{sen}\,b}}{\cancel{\text{sen}\,a} \cdot \cancel{\text{sen}\,b}}}{\dfrac{\cancel{\text{sen}\,a} \cdot \cos b}{\cancel{\text{sen}\,a} \cdot \text{sen}\,b} + \dfrac{\cancel{\text{sen}\,b} \cdot \cos a}{\text{sen}\,a \cdot \cancel{\text{sen}\,b}}}$$

então

$$\boxed{\text{cotg}\,(a+b) = \frac{\text{cotg}\,a \cdot \text{cotg}\,b - 1}{\text{cotg}\,a + \text{cotg}\,b}}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$a \neq k\pi$, $b \neq k\pi$ e $a + b \neq k\pi$

73. Cotangente da diferença

$$\text{cotg}\,(a-b) = \text{cotg}\,[a + (-b)] = \frac{\text{cotg}\,a \cdot \text{cotg}\,(-b) - 1}{\text{cotg}\,a + \text{cotg}\,(-b)} =$$

$$= \frac{\text{cotg}\,a.(-\text{cotg}\,b) - 1}{\text{cotg}\,a + (-\text{cotg}\,b)}$$

então

$$\boxed{\text{cotg}\,(a-b) = \frac{\text{cotg}\,a \cdot \text{cotg}\,b + 1}{\text{cotg}\,b - \text{cotg}\,a}}$$

Esta fórmula só é aplicável se:

$a \neq k\pi$, $b \neq k\pi$ e $a - b \neq k\pi$

EXERCÍCIOS

C.131 Calcular os valores de:

a) $\cos 15°$ b) $\text{sen}\,105°$ c) $\text{tg}\,75°$ d) $\sec 285°$

Solução

a) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen}\,45° \cdot \text{sen}\,30° =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

b) $\text{sen}\,105° = \text{sen}\,(60° + 45°) = \text{sen}\,60° \cdot \cos 45° + \text{sen}\,45° \cdot \cos 60° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

c) $\text{tg}\,75° = \text{tg}\,(45° + 30°) = \dfrac{\text{tg}\,45° + \text{tg}\,30°}{1 - \text{tg}\,45° \cdot \text{tg}\,30°} =$

$$= \frac{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}$$

d) $\sec 285° = \sec 75° = \dfrac{1}{\cos 75°} = \dfrac{1}{\cos.(45° + 30°)} = \dfrac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

C.132 Calcular $\text{cotg}\,165°$, $\sec 255°$ e $\text{cossec}\,15°$.

C.133 (FEI-76) Sendo $\text{tg}\,A = 2$ e $\text{tg}\,B = 1$, ache $\text{tg}\,(A - B)$.

C.134 (MAPOFEI-75) Calcular o valor da expressão $\text{sen}\,105° - \cos 75°$.

C.135 Dados: $\text{sen}\,x = \dfrac{3}{5}$ e $\cos y = \dfrac{5}{13}$, calcular o $\cos(x + y)$, sabendo que $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2} < y < 2\pi$.

Solução

1º) $\cos x = +\sqrt{1 - \text{sen}^2\,x} = +\sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} = \dfrac{4}{5}$

2º) $\text{sen}\,y = -\sqrt{1 - \cos^2 y} = -\sqrt{1 - \dfrac{25}{169}} = -\dfrac{12}{13}$

3º) $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,y =$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{-12}{13} = \frac{56}{65}$$

C.136 Sabendo que $\operatorname{tg} a = \frac{2}{3}$ e $\operatorname{sen} b = \frac{4}{5}$ com $\frac{\pi}{2} < b < \pi$, calcular $\operatorname{tg}(a + b)$.

Solução

1º) $\cos b = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 b} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$

2º) $\operatorname{tg} b = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{-3}{5}} = -\frac{4}{3}$

3º) $\operatorname{tg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}\left(\frac{-4}{3}\right)} = \dfrac{\frac{-2}{3}}{\frac{17}{3}} = \dfrac{-6}{17}$

C.137 Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{15}{17}$, $\operatorname{sen} y = -\frac{3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$, calcular $\operatorname{sen}(x + y)$, $\cos(x + y)$ e $\operatorname{tg}(x + y)$.

C.138 Demonstrar as identidades:

a) $\operatorname{sen}(a + b) \cdot \operatorname{sen}(a - b) = \cos^2 b - \cos^2 a$

b) (EPUSP-62)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} y & \operatorname{sen} z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix} = \operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(y - z) + \operatorname{sen}(z - x)$$

c) $\cos^2(a + b) + \cos^2 b - 2 \cdot \cos(a + b) \cdot \cos a \cdot \cos b = \operatorname{sen}^2 a$

Solução

a) *1º membro* $= (\operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a)(\operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a) =$
$= \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \operatorname{sen}^2 b \cdot \cos^2 a = (1 - \cos^2 a) \cdot \cos^2 b -$
$- (1 - \cos^2 b) \cdot \cos^2 a = \cos^2 b - \cos^2 a =$ *2º membro*

b) *1º membro* $= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} y & \operatorname{sen} z \\ \cos y & \cos z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} z \\ \cos x & \cos z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \operatorname{sen} y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix} =$
$= \operatorname{sen}(y - z) - \operatorname{sen}(x - z) + \operatorname{sen}(x - y) =$
$= \operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(y - z) + \operatorname{sen}(z - x) =$ *2º membro*

c) *1º membro* $= (\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b)^2 + \cos^2 b -$
$- 2 \cdot (\cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b) \cdot \cos a \cdot \cos b =$
$= \cos^2 a \cdot \cos^2 b - 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b +$
$+ \cos^2 b - 2 \cdot \cos^2 a \cdot \cos^2 b + 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a \cdot \cos b =$
$= \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 b - \cos^2 a \cdot \cos^2 b + \cos^2 b =$
$= \operatorname{sen}^2 a \cdot (1 - \cos^2 b) - (1 - \operatorname{sen}^2 a) \cdot \cos^2 b + \cos^2 b =$
$= \operatorname{sen}^2 a - \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \cos^2 b + \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos^2 b + \cos^2 b =$
$= \operatorname{sen}^2 a =$ *2º membro*

C.139 (MAPOFEI-75) Demonstrar a identidade:

$$\operatorname{tg}(45° + x) \cdot \operatorname{cotg}(45° - x) = \frac{1 + \operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x}$$

C.140 Se **a** e **b** são ângulos agudos e positivos, demonstrar que:

$$\operatorname{sen}(a + b) < \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$$

Solução

Seja $X = \operatorname{sen}(a + b) - \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a \cdot \cos b +$
$+ \operatorname{sen} b \cdot \cos a - \operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b = \operatorname{sen} a (\cos b - 1) + \operatorname{sen} b (\cos a - 1)$

Temos:

$0 < a < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \operatorname{sen} a > 0$ e $\cos a < 1$

$0 < b < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \operatorname{sen} b > 0$ e $\cos b < 1$

Então

$$\underbrace{\operatorname{sen} a}_{>0} \cdot \underbrace{(\cos b - 1)}_{<0} + \underbrace{\operatorname{sen} b}_{>0} \cdot \underbrace{(\cos a - 1)}_{<0} \Longrightarrow X < 0$$

e $X < 0 \Longrightarrow \operatorname{sen}(a + b) < \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$

C.141 (EPUSP-63) Provar que se $\frac{\pi}{4} < a < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{4} < b < \frac{\pi}{2}$, então
$\operatorname{sen}(a + b) < \operatorname{sen} a + \frac{4}{5} \cdot \operatorname{sen} b$

C.142 Provar que os ângulos internos A, B e C de um triângulo não retângulo verificam a relação:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$$

Solução

$A + B + C = 180° \Longrightarrow A + B = 180° - C \Longrightarrow \operatorname{tg}(A + B) = \operatorname{tg}(180° - C) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dfrac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} = -\operatorname{tg} C \Longrightarrow \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C (\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B - 1) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$

C.143 Demonstrar a identidade: $4 \cdot \operatorname{sen}(x + 60°) \cdot \cos(x + 30°) = 3 \cdot \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$.

C.144 Estudar a variação das seguintes funções reais:

a) $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \cos 2x$

b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{sen} x$

c) $h(x) = \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$

Solução

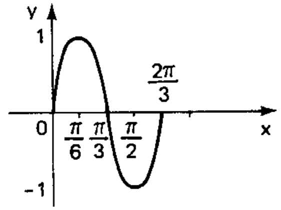
a) $f(x) = \text{sen}\,(2x + x) = \text{sen}\,3x$

então

$D(f) = \mathbb{R}$

$p = \dfrac{2\pi}{3}$

$Im(f) = [-1, 1]$



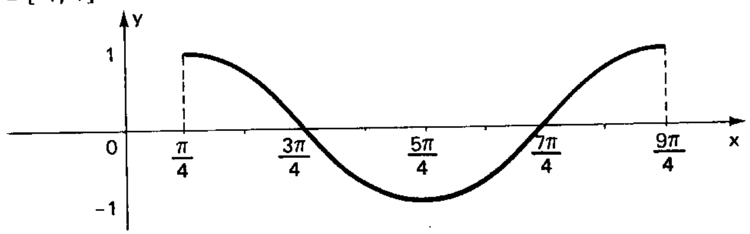
b) $g(x) = \cos x \cdot \cos \dfrac{\pi}{4} + \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,\dfrac{\pi}{4} = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

então

$D(g) = \mathbb{R}$

$p = 2\pi$

$Im(g) = [-1, 1]$



c) $h(x) = \dfrac{\text{tg}\,\frac{\pi}{4} + \text{tg}\,x}{1 - \text{tg}\,\frac{\pi}{4} \cdot \text{tg}\,x} = \text{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

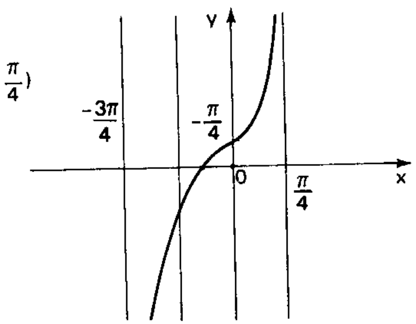
então

$D(h) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right\}$

$p = \pi$

$Im(h) = \mathbb{R}$

$x = -\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \text{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \text{tg}\,0 = 0$



C.145 Estudar a variação das seguintes funções reais:

a) $f(x) = \cos^2 2x - \text{sen}^2\,2x$

b) $g(x) = \sqrt{3} \cdot \cos x - \text{sen}\,x$

c) $h(x) = \dfrac{\text{sen}\,x + \cos x}{\cos x - \text{sen}\,x}$

C.146 Qual é o período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$f(x) = \text{sen}\,x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,2x \cdot \text{sen}\,3x + \cos x \cdot \text{sen}\,2x \cdot \cos 3x + \cos x \cdot \text{sen}\,3x \cdot \cos 2x$

II. FÓRMULAS DE MULTIPLICAÇÃO

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de 2a, 3a, 4a, etc, conhecidas as funções circulares de a.

74. Funções circulares de 2a

Façamos $2a = a + a$ e apliquemos as fórmulas de adição:

I) $\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cdot \cos a - \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,a$

então

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2\,a \\ \cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1 \\ \cos 2a = 1 - 2 \cdot \text{sen}^2\,a \end{array}}$$

II) $\text{sen}\,2a = \text{sen}\,(a + a) = \text{sen}\,a \cdot \cos a + \text{sen}\,a \cdot \cos a$

então

$$\boxed{\text{sen}\,2a = 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \cos a}$$

III) $\text{tg}\,2a = \text{tg}\,(a + a) = \dfrac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,a}$

então

$$\boxed{\text{tg}\,2a = \dfrac{2 \cdot \text{tg}\,a}{1 - \text{tg}^2\,a}}$$

75. Funções circulares de 3a

Fazendo $3a = 2a + a$ e aplicando as fórmulas de adição, temos:

I) $\cos 3a = \cos(2a + a) = \cos 2a \cdot \cos a - \operatorname{sen} 2a \cdot \operatorname{sen} a =$
$= (2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - (2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a) \operatorname{sen} a =$
$= (2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - 2 \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos a =$
$= (2 \cdot \cos^2 a - 1) \cos a - 2 \cdot (1 - \cos^2 a) \cos a$

então

$$\boxed{\cos 3a = 4 \cdot \cos^3 a - 3 \cdot \cos a}$$

II) $\operatorname{sen} 3a = \operatorname{sen}(2a + a) = \operatorname{sen} 2a \cdot \cos a + \operatorname{sen} a \cdot \cos 2a =$
$= (2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a) \cdot \cos a + \operatorname{sen} a (1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 a) =$
$= 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot (1 - \operatorname{sen}^2 a) + \operatorname{sen} a \cdot (1 - 2 \operatorname{sen}^2 a)$

então

$$\boxed{\operatorname{sen} 3a = 3 \cdot \operatorname{sen} a - 4 \cdot \operatorname{sen}^3 a}$$

III) $$\operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}(2a + a) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \cdot \operatorname{tg} a} = \frac{\dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} + \operatorname{tg} a}{1 - \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \cdot \operatorname{tg} a} =$$

$$= \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a \cdot (1 - \operatorname{tg}^2 a)}{(1 - \operatorname{tg}^2 a) - 2 \cdot \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a}$$

então

$$\boxed{\operatorname{tg} 3a = \frac{3 \cdot \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \cdot \operatorname{tg}^2 a}}$$

EXERCÍCIOS

C.147 Sendo $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular $\operatorname{sen} 2x$.

Solução

$$\operatorname{sen} x = -\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = -\sqrt{\frac{\frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}}} = -\frac{3}{5}$$

$$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{16}}} = -\frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{24}{25}$$

C.148 (FEI-77) Calcular $\operatorname{sen} 2x$ sabendo-se que: $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 3$.

C.149 Sendo $\operatorname{cotg} x = \frac{12}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular $\cos 2x$.

Solução

$$\operatorname{cossec} x = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \sqrt{1 + \frac{144}{25}} = \frac{13}{5} \Longrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \cdot \frac{25}{169} = \frac{119}{169}$$

C.150 (MAUÁ-77) Sendo: $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$ com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

a) calcule $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$

b) calcule $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$

C.151 Sendo $\sec x = \frac{25}{24}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcular $\operatorname{tg} 2x$.

Solução

$$\operatorname{tg} x = -\sqrt{\sec^2 x - 1} = -\sqrt{\frac{625}{576} - 1} = -\frac{7}{24}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{-\frac{14}{24}}{1 - \frac{49}{576}} = -\frac{336}{527}$$

C.152 Se $\cos x = \frac{3}{5}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcular $\operatorname{sen} 3x$.

C.153 Se $\operatorname{sen} x = \frac{12}{13}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular $\cos 3x$.

C.154 Se $\sec x = \frac{4}{3}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular $tg\, 3x$.

C.155 (MAPOFEI-75) Calcular $sen^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12} + tg \frac{\pi}{3} + tg \frac{14\pi}{3}$.

C.156 Provar que:

a) $sen\, 4a = 4 \cdot sen\, a \cdot \cos^3 a - 4 \cdot sen^3 a \cdot \cos a$
b) $\cos 4a = 8 \cdot \cos^4 a - 8 \cdot \cos^2 a + 1$
c) $tg\, 4a = \dfrac{4 \cdot tg\, a - 4 \cdot tg^3 a}{tg^4 a - 6 \cdot tg^2 a + 1}$

C.157 Demonstrar pelo princípio da indução finita que:

$$\cos a \cdot \cos 2a \cdot \cos 4a \cdot \ldots \cdot \cos 2^{n-1} \cdot a = \frac{sen\, 2^n a}{2^n \cdot sen\, a}$$

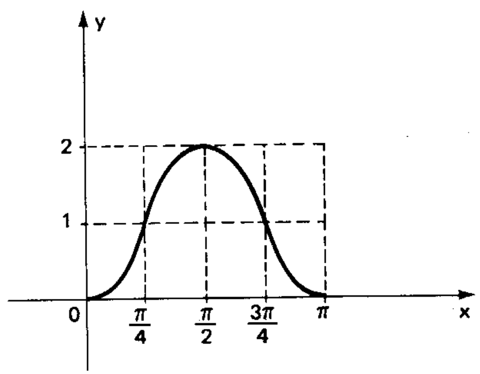
C.158 (POLI-61) Esboçar o gráfico da função $y = 2 \cdot sen^2 x$ utilizando o gráfico de $\cos 2x$.

Solução

A partir da identidade $\cos 2x = 1 - 2 \cdot sen^2 x$, temos:

$$y = 2 \cdot sen^2 x \Longrightarrow y = 1 - \cos 2x$$

x	2x	cos 2x	y
0	0	1	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{\pi}{2}$	π	-1	2
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	1
π	2π	1	0



C.159 Estudar a variação das seguintes funções reais:

a) $f(x) = \cos^4 x - sen^4 x$
b) $g(x) = 8 \cdot sen^2 x \cdot \cos^2 x$
c) $h(x) = \cos^4 x + sen^4 x$

C.160 Qual é o período das seguintes funções reais?

a) $f(x) = sen\, x \cdot \cos x$
b) $g(x) = \dfrac{1 - tg^2\, 2x}{1 + tg^2\, 2x}$
c) $h(x) = \cos^6 x + sen^6 x$

III. FÓRMULAS DE DIVISÃO

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de $\frac{x}{2}$, conhecida uma das funções circulares de x.

76. É dado o $\cos x$

Sabemos que $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ e $\cos 2a = 1 - 2 \cdot sen^2 a$, portanto, fazendo $2a = x$, teremos:

$$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \Longrightarrow \boxed{\cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}}$$

$$\cos x = 1 - 2 \cdot sen^2 \frac{x}{2} \Longrightarrow \boxed{sen \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}}$$

$$tg \frac{x}{2} = \frac{sen \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \Longrightarrow \boxed{tg \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}}$$

Os sinais (±) só têm sentido quando se conhece $\cos x$, sem conhecer x. Assim, sabendo que $\cos x = \cos x_0$, temos:

1ª solução: $x = x_0 + 2k\pi \Longrightarrow \frac{x}{2} = \frac{x_0}{2} + k\pi \quad$ (I)

2ª solução: $x = -x_0 + 2k\pi \Longrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{x_0}{2} + k\pi \quad$ (II)

As expressões (I) e (II) nos indicam que, dado $\cos x$, existem 4 possíveis arcos $\frac{x}{2}$, pois k pode assumir valores pares ou ímpares, os quais dão origem a dois valores para $\cos \frac{x}{2}$, $sen \frac{x}{2}$ e $tg \frac{x}{2}$. Provemos que existem dois valores simétricos para $\cos \frac{x}{2}$, por exemplo:

Expr. (I) k par: $\cos \frac{x}{2} = \cos\left(\frac{x_0}{2} + 2k_1\pi\right) = \cos \frac{x_0}{2}$

Expr. (I) k ímpar: $\cos \frac{x}{2} = \cos\left[\frac{x_0}{2} + (2k_1 + 1)\pi\right] = \cos\left(\frac{x_0}{2} + \pi\right) = -\cos \frac{x_0}{2}$

Expr. (II) k par: $\cos \frac{x}{2} = \cos\left(-\frac{x_0}{2} + 2k_1\pi\right) = \cos\left(-\frac{x_0}{2}\right) = \cos \frac{x_0}{2}$

Expr. (II) k ímpar: $\cos \frac{x}{2} = \cos\left[-\frac{x_0}{2} + (2k_1 + 1)\pi\right] = \cos\left(-\frac{x_0}{2} + \pi\right) =$

$= -\cos \frac{x_0}{2}$

77. É dado o sen x

Sabemos que $\cos x = \pm\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\, x}$, portanto, tendo sen x, calculamos cos x e entramos com as fórmulas do parágrafo anterior.

EXERCÍCIOS

C.161 Calcular as funções circulares de $\frac{\pi}{8}$.

Solução

$$\mathrm{sen}\, \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\mathrm{tg}\, \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{1 + \cos\frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$$

C.162 Se $\mathrm{sen}\, x = \frac{24}{25}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular as funções circulares de $\frac{x}{2}$.

Solução

$$\cos x = -\sqrt{1 - \mathrm{sen}^2\, x} = -\sqrt{1 - \frac{576}{625}} = -\frac{7}{25}$$

$$\mathrm{sen}\, \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = +\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = +\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\mathrm{tg}\, \frac{x}{2} = +\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = +\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

Observemos que $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$

C.163 Se $\mathrm{tg}\, x = \frac{5}{12}$, calcular $\mathrm{sen}\, \frac{x}{2}$.

Solução

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2\, x}} = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{25}{144}}} = \pm\frac{12}{13}$$

$$\mathrm{sen}\, \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 \mp \frac{12}{13}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{13 \mp 12}{26}}$$

então há 4 possibilidades para $\mathrm{sen}\, \frac{x}{2}$:

$+\frac{1}{\sqrt{26}}$, $-\frac{1}{\sqrt{26}}$, $+\frac{5}{\sqrt{26}}$ ou $-\frac{5}{\sqrt{26}}$.

C.164 (FAUUSP-69) Sabendo-se que x é um arco do primeiro quadrante e $\cos x = \frac{1}{3}$, determinar $\mathrm{sen}\, \frac{x}{2}$ e $\mathrm{tg}\, \frac{x}{2}$.

C.165 Sabendo que $\cos x = \frac{24}{25}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcular $\mathrm{sen}\, \frac{x}{4}$, $\cos \frac{x}{4}$ e $\mathrm{tg}\, \frac{x}{4}$.

C.166 Sendo $\sec x = 4$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcular $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi + x}{2}\right)$.

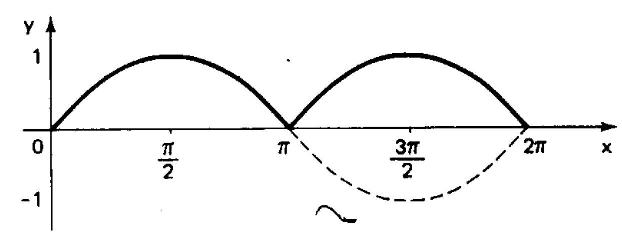
C.167 Estudar a variação da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}}$

Solução

De $\cos 2x = 1 - 2\, \mathrm{sen}^2\, x$ decorre que $\frac{1 - \cos 2x}{2} = \mathrm{sen}^2\, x$, portanto,

$$f(x) = \sqrt{\mathrm{sen}^2\, x} = |\mathrm{sen}\, x|$$

já vimos que:
$D(f) = \mathbb{R}$
$p = \pi$
$Im(f) = [0; 1]$



C.168 Estudar a variação da função $f: \mathbb{R} - \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (1 - \cos 2x)^{\frac{1}{2}} \cdot (1 + \cos 2x)^{-\frac{1}{2}}.$$

C.169 Qual é o período da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (1 + \cos 4x)^{\frac{1}{2}}$?

C.170 a) Para todo real $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$, provar que $\frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{cotg} \alpha$.

b) Demonstrar, utilizando o resultado anterior, que

$$\frac{1}{\operatorname{sen} a} + \frac{1}{\operatorname{sen} 2a} + \frac{1}{\operatorname{sen} 4a} + \ldots + \frac{1}{\operatorname{sen} 2^n a} = \operatorname{cotg} \frac{a}{2} - \operatorname{cotg} 2^n a.$$

IV. TANGENTE DO ARCO METADE

Vamos deduzir fórmulas para calcular as funções trigonométricas de x, conhecida a $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Das fórmulas de multiplicação, temos:

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos a = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \frac{\cos^2 a}{\cos a} = 2 \cdot \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \cdot \frac{1}{\sec^2 a} =$$

$$= \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Fazendo $2a = x$ e $a = \frac{x}{2}$, temos:

$$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\operatorname{tg} x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}$$

Notando que $\cos x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x}$, temos:

$$\boxed{\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}}$$

A utilidade destas três últimas fórmulas é permitir a substituição de $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ e $\operatorname{tg} x$ por uma única função $(\operatorname{tg} \frac{x}{2})$, através de expressões racionais. Esse tipo de substituição é frequentemente utilizado na resolução de equações trigonométricas.

V. TRANSFORMAÇÃO EM PRODUTO

78. Em Álgebra Elementar, têm grande importância prática os recursos para transformar um polinômio em produto de outros polinômios (fatoração). Assim, por exemplo, temos:

$x^2 - 2x = x(x - 2)$ ⟶ colocação em evidência
$x^2 - 4 = (x + 2)(x - 2)$ ⟶ diferença de quadrados
$\left.\begin{array}{l} x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \\ x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \end{array}\right\}$ ⟶ trinômios quadrados perfeitos
$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ ⟶ soma de cubos
$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ ⟶ diferença de cubos
$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3 \\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x - 1)^3 \end{array}\right\}$ ⟶ polinômios cubos perfeitos

Muitas vezes aplicaremos esses recursos à Trigonometria, recorrendo a transformações como:

$$\operatorname{sen}^2 x - 2 \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \ (\operatorname{sen} x - 2)$$
$$\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = (\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)$$

Além dos recursos algébricos, a Trigonometria dispõe de fórmulas que permitem completar uma fatoração. Assim, no exemplo acima, podemos fatorar:

$$\operatorname{sen} x + \cos x \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x - \cos x.$$

Vamos deduzir agora as fórmulas para transformar somas e diferenças trigonométricas em produtos.

79. Sabemos que:

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \quad (1)$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \quad (2)$$
$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \quad (3)$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a \quad (4)$$

Logo:

$(1) + (2)$: $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cdot \cos a \cdot \cos b$

$(1) - (2)$: $\cos(a+b) - \cos(a-b) = -2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$(3) + (4)$: $\operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \cos b$

$(3) - (4)$: $\operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2 \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

Estas relações são denominadas fórmulas de Werner.

80. Fazendo nas fórmulas de Werner:

$$\begin{cases} a + b = p \\ a - b = q \end{cases} \quad \text{portanto,} \quad a = \frac{p+q}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{p-q}{2}$$

obtemos as fórmulas de transformação em produto:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \\
&\cos p - \cos q = -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \\
&\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2} \\
&\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}
\end{aligned}}$$

81. Temos ainda que:

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} + \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p \cdot \cos q + \operatorname{sen} q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p \cdot \cos q}}$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen} p}{\cos p} - \frac{\operatorname{sen} q}{\cos q} = \frac{\operatorname{sen} p \cdot \cos q - \operatorname{sen} q \cdot \cos p}{\cos p \cdot \cos q} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p \cdot \cos q}}$$

EXERCÍCIOS

C.171 Transformar em produto:

a) $y = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$
b) $y = \cos 3x + \cos x$
c) $y = \operatorname{sen} 7a + \operatorname{sen} 5a - \operatorname{sen} 3a - \operatorname{sen} a$
d) $y = \cos 9a + \cos 5a - \cos 3a - \cos a$
e) $y = \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b + \operatorname{sen} c - \operatorname{sen}(a + b + c)$

Solução

a) $y = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{5x+3x}{2} \cdot \cos \frac{5x-3x}{2} = 2 \cdot \operatorname{sen} 4x \cdot \cos x$

b) $y = 2 \cdot \cos \frac{3x+x}{2} \cdot \cos \frac{3x-x}{2} = 2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x$

c) $y = (\operatorname{sen} 7a + \operatorname{sen} 5a) - (\operatorname{sen} 3a + \operatorname{sen} a) =$
$= 2 \cdot \operatorname{sen} 6a \cdot \cos a - 2 \cdot \operatorname{sen} 2a \cdot \cos a =$
$= 2 \cdot \cos a \cdot (\operatorname{sen} 6a - \operatorname{sen} 2a) =$
$= 2 \cdot \cos a \cdot (2 \cdot \operatorname{sen} 2a \cdot \cos 4a) =$
$= 4 \cdot \cos a \cdot \operatorname{sen} 2a \cdot \cos 4a$

d) $y = (\cos 9a + \cos 5a) - (\cos 3a + \cos a) =$
$= 2 \cdot \cos 7a \cdot \cos 2a - 2 \cdot \cos 2a \cdot \cos a = 2 \cdot \cos 2a \cdot (\cos 7a - \cos a) =$
$= -4 \cdot \cos 2a \cdot \operatorname{sen} 4a \cdot \operatorname{sen} 3a$

e) $y = (\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b) - [\operatorname{sen}(a + b + c) - \operatorname{sen} c] =$
$= 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} - 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a+b+2c}{2} =$
$= -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \left[\cos \frac{a+b+2c}{2} - \cos \frac{a-b}{2}\right] =$
$= -2 \cdot \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \left(-2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\frac{a+b+2c+a-b}{2}}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{\frac{a+b+2c-a+b}{2}}{2}\right) =$
$= 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{a+c}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{b+c}{2}$

C.172 Transformar em produto:

a) $y = 1 + \text{sen } 2x$
b) $y = 1 + \cos x$
c) $y = 1 + \cos a + \cos 2a$
d) $y = \text{sen } a + 2 \cdot \text{sen } 3a + \text{sen } 5a$

Solução

a) $y = \text{sen } \frac{\pi}{2} + \text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } (\frac{\pi}{4} + x) \cdot \cos (\frac{\pi}{4} - x) =$
$= 2 \cdot \text{sen}^2 \ (\frac{\pi}{4} + x)$

b) $y = \cos 0 + \cos x = 2 \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos (-\frac{x}{2}) = 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}$

c) $y = (\cos 2a + \cos 0) + \cos a = 2 \cdot \cos^2 a + \cos a =$
$= 2 \cdot \cos a \ (\cos a + \frac{1}{2}) = 2 \cdot \cos a \left[\cos a + \cos \frac{\pi}{3}\right] =$
$= 4 \cdot \cos a \cdot \cos (\frac{a}{2} + \frac{\pi}{6}) \cdot \cos (\frac{a}{2} - \frac{\pi}{6})$

d) $y = (\text{sen } 5a + \text{sen } a) + 2 \cdot \text{sen } 3a = 2 \cdot \text{sen } 3a \cdot \cos 2a + 2 \cdot \text{sen } 3a =$
$= 2 \cdot \text{sen } 3a \cdot \left[\cos 2a + 1\right] = 2 \cdot \text{sen } 3a \cdot \left[\cos 2a + \cos 0\right] =$
$= 2 \cdot \text{sen } 3a \cdot \left[2 \cdot \cos a \cdot \cos a\right] = 4 \cdot \text{sen } 3a \cdot \cos^2 a$

C.173 Transformar em produto:

a) $y = \text{sen } x + \cos x$
b) $y = \cos 2x - \text{sen } 2x$
c) $y = \cos^2 3x - \cos^2 x$
d) $y = \text{sen}^2 5x - \text{sen}^2 x$
e) $y = \dfrac{\text{sen } a + \text{sen } b}{\cos a + \cos b}$

Solução

a) $y = \text{sen } x + \cos x = \text{sen } x + \text{sen } (\frac{\pi}{2} - x) =$
$= 2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4} \cdot \cos (x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \cos (x - \frac{\pi}{4})$

b) $y = \cos 2x - \cos (\frac{\pi}{2} - 2x) =$
$= -2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{4} \cdot \text{sen } (2x - \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2} \cdot \text{sen } (2x - \frac{\pi}{4})$

c) $y = (\cos 3x + \cos x) \cdot (\cos 3x - \cos x) =$
$= (2 \cdot \cos 2x \cdot \cos x)(-2 \cdot \text{sen } 2x \cdot \text{sen } x) =$
$= -(2 \cdot \text{sen } 2x \cdot \cos 2x)(2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x) =$
$= -\text{sen } 4x \cdot \text{sen } 2x$

d) $y = (\text{sen } 5x + \text{sen } x)(\text{sen } 5x - \text{sen } x) =$
$= (2 \cdot \text{sen } 3x \cdot \cos 2x)(2 \cdot \text{sen } 2x \cdot \cos 3x) =$
$= (2 \cdot \text{sen } 3x \cdot \cos 3x)(2 \cdot \text{sen } 2x \cdot \cos 2x) =$
$= \text{sen } 6x \cdot \text{sen } 4x$

e) $y = \dfrac{2 \cdot \text{sen } \frac{a + b}{2} \cdot \cos \frac{a - b}{2}}{2 \cdot \cos \frac{a + b}{2} \cdot \cos \frac{a - b}{2}} = \text{tg } \frac{a + b}{2}$

C.174 Transformar em produto:

a) $y = \text{sen } (a + b + c) - \text{sen } (a - b + c)$
b) $y = \cos (a + 2b) + \cos a$
c) $y = \text{sen } a + \text{sen } (a + r) + \text{sen } (a + 2r) + \text{sen } (a + 3r)$
d) $y = \cos (a + 3b) + \cos (a + 2b) + \cos (a + b) + \cos a$
e) $y = \cos^2 p - \cos^2 q$
f) $y = \text{sen}^2 p - \text{sen}^2 q$
g) $y = \cos^2 p - \text{sen}^2 q$
h) $y = \dfrac{\text{sen } 2a + \text{sen } 2b}{\cos 2a - \cos 2b}$
i) $y = \dfrac{1 + \text{sen } a}{1 - \text{sen } a}$

C.175 (MAPOFEI-76) Transformar o produto $\cos 2x \cdot \cos 4x$ em uma soma equivalente.

C.176 (FEFAAP-77) Provar que $(\text{sen } A + \cos A)^4 = 4 \cos^4 (A - \frac{\pi}{4})$.

C.177 Calcular o valor numérico da expressão: $y = \text{sen } \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}$.

Solução

Fazendo $\frac{p + q}{2} = \frac{13\pi}{12}$ e $\frac{p - q}{2} = \frac{11\pi}{12}$, obtemos

$p = \frac{24\pi}{12} = 2\pi$ e $q = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, portanto:

$y = \frac{1}{2} \ (2 \cdot \text{sen } \frac{13\pi}{12} \cdot \cos \frac{11\pi}{12}) = \frac{1}{2} \ (\text{sen } 2\pi + \text{sen } \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} (0 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

C.178 Calcular o valor numérico das expressões:

a) $y = \cos \frac{7\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8}$
b) $y = \text{sen } \frac{13\pi}{12} \cdot \text{sen } \frac{7\pi}{12}$
c) $y = \text{sen } \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24}$

C.179 Provar que $\cos 40° \cdot \cos 80° \cdot \cos 160° = -\frac{1}{8}$.

Solução

$\cos 40° \cdot \cos 80° \cdot \cos 160° = \dfrac{2 \cdot \cos 80° \cdot \cos 40°}{2} \cdot \cos 160° =$

$= \dfrac{(\cos 120° + \cos 40°) \cdot \cos 160°}{2} =$

$= \dfrac{(-\frac{1}{2}) \cdot \cos 160° + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 40° \cdot \cos 160°}{2} =$

$= \dfrac{-\cos 160° + \cos 200° + \cos 120°}{4} = \dfrac{\cos 120°}{4} = -\dfrac{1}{8}$

C.180 Provar que $\operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ = 4$.

C.181 Demonstrar que, se A, B e C são ângulos internos de um triângulo, vale a relação:

a) $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$

b) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2}$

c) $\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C$

d) $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

Preliminares:

I) $A + B + C = \pi \Longrightarrow (B + C) = \pi - A \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen} A \\ \cos(B + C) = -\cos A \end{cases}$

II) $A + B + C = \pi \Longrightarrow \frac{B + C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{B + C}{2} = \cos \frac{A}{2} \\ \cos \frac{B + C}{2} = \operatorname{sen} \frac{A}{2} \end{cases}$

Solução

a) *1º membro* $= \operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C =$

$= \operatorname{sen} A + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{B + C}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} =$

$= 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} + 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} =$

$= 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot [\operatorname{sen} \frac{A}{2} + \cos \frac{B - C}{2}] =$

$= 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot [\cos \frac{B + C}{2} + \cos \frac{B - C}{2}] =$

$= 2 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot [2 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}] =$

$= 4 \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} =$ *2º membro*

b) *1º membro* $= \cos A + \cos B + \cos C =$

$= \cos A + 2 \cdot \cos \frac{B + C}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} =$

$= (1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2}) + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B - C}{2} =$

$= 1 - 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} [\operatorname{sen} \frac{A}{2} - \cos \frac{B - C}{2}] =$

$= 1 - 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} [\cos \frac{B + C}{2} - \cos \frac{B - C}{2}] =$

$= 1 - 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} [-2 \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2}] =$

$= 1 + 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2} =$ *2º membro*

c) *1º membro* $= \operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C =$

$= \operatorname{sen} 2A + 2 \operatorname{sen}(B + C) \cdot \cos(B - C) =$

$= 2 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \cos A + 2 \operatorname{sen} A \cdot \cos(B - C) =$

$= 2 \cdot \operatorname{sen} A [\cos A + \cos(B - C)] =$

$= 2 \operatorname{sen} A [-\cos(B + C) + \cos(B - C)] =$

$= -2 \cdot \operatorname{sen} A [\cos(B + C) - \cos(B - C)] =$

$= -2 \cdot \operatorname{sen} A (-2 \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C) =$

$= 4 \cdot \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C =$ *2º membro*

d) Sabemos que $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ e $\cos^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

1º membro $= \cos^2 A + \frac{\cos 2B + 1}{2} + \frac{\cos 2C + 1}{2}$

$= 1 + \cos^2 A + \frac{\cos 2B + \cos 2C}{2} =$

$= 1 + \cos^2 A + \cos(B + C) \cdot \cos(B - C) =$

$= 1 + \cos^2 A - \cos A \cdot \cos(B - C) =$

$= 1 - \cos A [\cos(B - C) - \cos A] =$

$= 1 - \cos A [\cos(B + C) + \cos(B - C)] =$

$= 1 - 2 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C =$ *2º membro*

C.182 Demonstrar que, se A, B, C são ângulos internos de um triângulo, vale a relação:

a) $\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A = 4 \cdot \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$

b) $\cos B + \cos C - \cos A = -1 + 4 \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{sen} \frac{A}{2}$

c) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4 \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$

d) $\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 B + \operatorname{sen}^2 C = 2 \cdot (1 + \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C)$

e) $\frac{1}{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C} + \frac{1}{\operatorname{tg} C \cdot \operatorname{tg} A} = 1 \quad (A, B, C \neq \frac{\pi}{2})$

C.183 Provar que se $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ então:

a) $\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c + \operatorname{tg} c \cdot \operatorname{tg} a = 1$

b) $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c - 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c = 2$

C.184 Provar que se $(\operatorname{sen} 2A, \operatorname{sen} 2B, \operatorname{sen} 2C)$ é uma progressão aritmética, então o mesmo ocorre com $(\operatorname{tg}(A + B), \operatorname{tg}(C + A), \operatorname{tg}(B + C))$.

Solução

Por hipótese, temos:

$\operatorname{sen} 2B - \operatorname{sen} 2A = \operatorname{sen} 2C - \operatorname{sen} 2B$

$2 \cdot \operatorname{sen}(B - A) \cdot \cos(B + A) = 2 \cdot \operatorname{sen}(C - B) \cdot \cos(C + B)$

$\operatorname{sen}[(B + C) - (A + C)] \cdot \cos(B + A) = \operatorname{sen}[(C + A) - (A + B)] \cdot \cos(C + B)$

$[\operatorname{sen}(B + C) \cdot \cos(A + C) - \operatorname{sen}(A + C) \cdot \cos(B + C)] \cdot \cos(B + A) =$

$= [\operatorname{sen}(C + A) \cdot \cos(A + B) - \operatorname{sen}(A + B) \cdot \cos(C + A)] \cdot \cos(C + B)$

$\operatorname{sen}(B + C) \cdot \cos(C + A) \cdot \cos(A + B) - \operatorname{sen}(C + A) \cdot \cos(B + C) \cdot \cos(A + B) =$

$= \operatorname{sen}(C + A) \cdot \cos(A + B) \cdot \cos(B + C) - \operatorname{sen}(A + B) \cdot \cos(C + A) \cdot \cos(C + B)$

Dividindo por $\cos(A + B) \cdot \cos(B + C) \cdot \cos(C + A)$, temos:

$\frac{\operatorname{sen}(B + C)}{\cos(B + C)} - \frac{\operatorname{sen}(C + A)}{\cos(C + A)} = \frac{\operatorname{sen}(C + A)}{\cos(C + A)} - \frac{\operatorname{sen}(A + B)}{\cos(A + B)}$

isto é:

$\operatorname{tg}(B + C) - \operatorname{tg}(C + A) = \operatorname{tg}(C + A) - \operatorname{tg}(A + B)$

C.185 Provar que se $(\text{sen}(a+b-c), \text{sen}(a-b+c), \text{sen}(-a+b+c))$ é uma progressão aritmética, então o mesmo ocorre com $(\text{tg}\,a, \text{tg}\,b, \text{tg}\,c)$.

C.186 Provar que se $a + b + c = \frac{\pi}{2}$, então

$$\text{sen}^2 a + \text{sen}^2 b + \text{sen}^2 c + 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \cdot \text{sen}\,c = 1$$

Solução

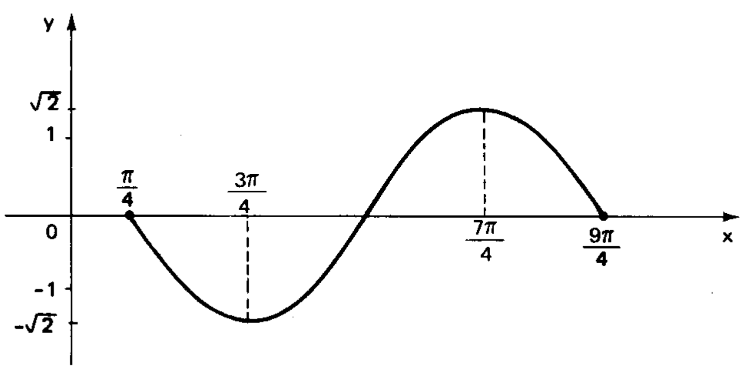
$$1^{\circ}\text{ membro} = \text{sen}^2 a + \frac{1-\cos 2b}{2} + \frac{1-\cos 2c}{2} + 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \cdot \text{sen}\,c =$$
$$= 1 + \text{sen}^2 a - \frac{\cos 2b + \cos 2c}{2} + 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \cdot \text{sen}\,c =$$
$$= 1 + \text{sen}^2 a - \cos(b+c) \cdot \cos(b-c) + 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \cdot \text{sen}\,c =$$
$$= 1 + \text{sen}^2 a - \text{sen}\,a \cdot \cos(b-c) + 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \cdot \text{sen}\,c =$$
$$= 1 + \text{sen}\,a \cdot [\text{sen}\,a - \cos(b-c)] + 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \cdot \text{sen}\,c =$$
$$= 1 + \text{sen}\,a \cdot [\cos(b+c) - \cos(b-c)] + 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \cdot \text{sen}\,c =$$
$$= 1 - 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \cdot \text{sen}\,c + 2 \cdot \text{sen}\,a \cdot \text{sen}\,b \cdot \text{sen}\,c = 1 =$$
$$= 2^{\circ}\text{ membro}$$

C.187 Estudar a variação, da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \cos x - \text{sen}\,x$.

Solução

$$f(x) = \cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -2 \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) =$$
$$= -\sqrt{2} \cdot \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Portanto:
$D(f) = \mathbb{R}$
$p = 2\pi$
$\text{Im}(f) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$



C.188 Estudar a variação da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \text{sen}\,2x + \cos 2x$.

C.189 Qual é o período da função $f(x) = \dfrac{1 + \text{tg}\,x}{1 - \text{tg}\,x}$?

C.190 Provar que se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação $\cos A + \cos B = \text{sen}\,C$, então o triângulo é retângulo.

Solução

$$\cos A + \cos B = \text{sen}\,C \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 2 \cdot \cos\frac{A+B}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} = 2 \cdot \text{sen}\,\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \text{sen}\,\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{A-B}{2} = \text{sen}\,\frac{C}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \cos\frac{A-B}{2} = \cos\frac{C}{2} \Longrightarrow \begin{cases} A - B = C \Longrightarrow A = B + C = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ A - B = -C \Longrightarrow B = A + C = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

C.191 Provar que se os ângulos de um triângulo ABC verificam a relação $\text{sen}\,4A + \text{sen}\,4B + \text{sen}\,4C = 0$, então o triângulo é retângulo.

C.192 Demonstrar que todo triângulo cujos ângulos verificam a relação $\text{sen}\,3A + \text{sen}\,3B + \text{sen}\,3C = 0$ tem um ângulo de 60°.

Moscou: preso escreve obra

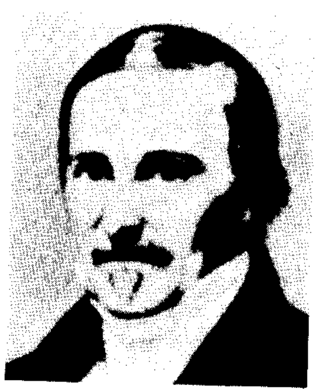
Jean Victor Poncelet nasceu em Metz, no ano de 1788.

Tendo-se destacado como estudante quando cursava a Escola Politécnica de Metz, Poncelet tornou-se conhecido como excelente professor de Matemática, sendo convidado a servir como engenheiro no exército napoleônico.

Em 1812, Poncelet lutou com as forças francesas na Rússia, caindo prisioneiro. Durante os dezoito meses de cativeiro, começou a escrever um de seus trabalhos mais notáveis: a Geometria Projetiva, teoria em que Desargues e Pascal tinham dado os primeiros passos, no século XVII.

Em 1814, Poncelet retornou à França e, a partir de 1815, começou a publicar suas criações nos "Anais da Matemática". Seus trabalhos iniciais versavam sobre os polígonos inscritos e circunscritos a uma cônica.

O grande trabalho de Poncelet, "Ensaio sobre as projetivas das seções cônicas", só apareceu em 1820 e foi melhorado e reproduzido dois anos depois com o título "Tratado das propriedades projetivas das figuras". Nestas obras, Poncelet observou que certas propriedades das figuras se mantém constantes, quando as figuras sofrem deformações por projeções.



Jean V. Poncelet
(1788 - 1867)

Poncelet foi ainda o criador da teoria da polaridade e do princípio da dualidade, base sobre a qual outros matemáticos como De Morgan, Whitehead e Russel desenvolveram posteriormente seus trabalhos.

Finalmente, Poncelet atingiu o máximo de sua criação quando estabeleceu o conceito de razão dupla ou anarmônica. Com base nesta descoberta, posteriormente, Klein conseguiu unificar as geometrias numa só, criando a pan-geometria.

Poncelet faleceu em 1867 na mesma cidade onde nascera.

CAPÍTULO VII

EQUAÇÕES

I. EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

82. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções trigonométricas da variável x e sejam D_1 e D_2 os seus respectivos domínios. *Resolver* a equação trigonométrica $f(x) = g(x)$ significa determinar o conjunto S, denominado *conjunto-solução* ou *conjunto-verdade*, dos números r para os quais $f(r) = g(r)$ é uma sentença verdadeira. Observemos que uma condição necessária para que um certo r seja uma solução da equação dada é que $r \in D_1$ e $r \in D_2$.

83. Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das três equações seguintes:

1ª) $\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \beta$

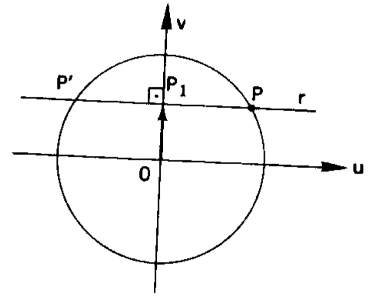
2ª) $\cos \alpha = \cos \beta$

3ª) $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$

denominadas, por esse motivo, equações fundamentais. Assim, antes de mais nada, é necessário saber resolver as equações fundamentais para poder resolver qualquer outra equação trigonométrica.

II. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO sen α = sen β

84. Se $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \overline{OP_1}$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, isto é, estão em P ou P'.



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são *côngruos*

ou

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é são *suplementares*.

85. Em resumo, temos:

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}}$$

EXERCÍCIOS

C.193 Resolver as seguintes equações:

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5}$

b) $\operatorname{cossec} x = \operatorname{cossec}\frac{2\pi}{3}$

c) $\operatorname{sen} x = 0$

d) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

e) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\operatorname{sen} x = 1$

h) $\operatorname{sen} x = -1$

Solução

a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{5} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{5} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{5} + 2k\pi\}$

b) $\operatorname{cossec} x = \operatorname{cossec}\frac{2\pi}{3} \Longrightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

c) $\operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - 0 + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = (2k+1)\cdot\pi\} =$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$

d) $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

e) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$

f) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

g) $\operatorname{sen} x = 1 = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$

h) $\operatorname{sen} x = -1 = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$

C.194 Resolver as equações abaixo:

a) $sen^2 x = \frac{1}{4}$

b) $sen^2 x - sen\, x = 0$

c) $2 \cdot sen^2 x - 3 \cdot sen\, x + 1 = 0$

d) $2 \cdot cos^2 x = 1 - sen\, x$

Solução

a) $sen\, x = \pm \frac{1}{2}$ então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi\}$

b) $sen\, x \cdot (sen\, x - 1) = 0 \Longrightarrow sen\, x = 0$ ou 1 então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$

c) $sen\, x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \Longrightarrow sen\, x = 1$ ou $\frac{1}{2}$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

d) $2 \cdot (1 - sen^2 x) = 1 - sen\, x \Longrightarrow 2\, sen^2 x - sen\, x - 1 = 0$

resolvendo: $sen\, x = \frac{1 \mp \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \mp 3}{4} = 1$ ou $\frac{-1}{2}$

recaímos em equações fundamentais

$sen\, x = 1 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$sen\, x = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\} \quad (k \in \mathbb{Z})$

C.195 Resolver as equações abaixo:

a) $sen\, x = sen\, \frac{\pi}{7}$

b) $cossec\, x = 2$

c) $sen\, x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $2 \cdot sen^2 x = 1$

e) $sen^2 x = 1$

f) $2 \cdot sen^2 x + sen\, x - 1 = 0$

g) $2 \cdot sen\, x - cossec\, x = 1$

h) $3 \cdot tg\, x = 2 \cdot cos\, x$

i) $sen\, x + cos\, 2x = 1$

j) $cos^2 x = 1 - sen\, x$

C.196 (FEFAAP-77) Determinar os valores de x que satisfazem à equação:

$$4\, sen^4 x - 11\, sen^2 x + 6 = 0$$

C.197 (FEI-76) Resolva a equação:

$$2\, sen\, x\, |sen\, x| + 3\, sen\, x = 2$$

C.198 Resolver as seguintes equações:

a) $sen\, 2x = \frac{1}{2}$

b) $sen\, 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $sen\,(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $sen\, 2x = sen\, x$

Solução

a) $sen\, 2x = \frac{1}{2} = sen\, \frac{\pi}{6} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi\}$

b) $sen\, 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} = sen\, \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\}$

c) $sen\,(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = sen\, \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + 2k\pi\}$

d) $sen\, 2x = sen\, x \Longrightarrow \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - x + 2k\pi \end{cases}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\}$

C.199 Determinar $x \in \mathbb{R}$ tal que:

a) $sen\, 5x = sen\, 3x$

b) $sen\, 3x = sen\, 2x$

C.200 Determinar os ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que estão em progressão aritmética e que o seno da soma do menor ângulo com o ângulo médio é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C.201 (MAPOFEI-76) Resolver o sistema $\begin{cases} sen\,(x + y) = 0 \\ x - y = \pi \end{cases}$

III. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $\cos \alpha = \cos \beta$

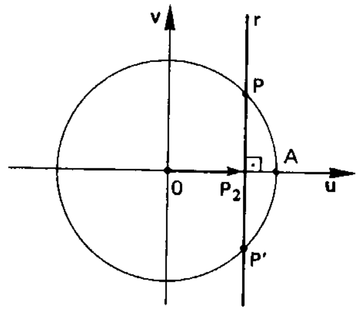
86. Se $\cos\alpha = \cos\beta = \overline{OP_2}$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2, isto é, estão em P ou P'.

Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são *côngruos*

ou

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são *replementares*.



87. Em resumo, temos:

$$\cos\alpha = \cos\beta \implies \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

EXERCÍCIOS

C.202 Resolver as seguintes equações:

a) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{5}$ b) $\sec x = \sec \dfrac{2\pi}{3}$

c) $\cos x = 0$ d) $\cos x = 1$

e) $\cos x = -1$ f) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

g) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ h) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Solução

a) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{5} \implies x = \pm \dfrac{\pi}{5} + 2k\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \dfrac{\pi}{5} + 2k\pi\}$

b) $\sec x = \sec \dfrac{2\pi}{3} \implies \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos \dfrac{2\pi}{3}} \implies \cos x = \cos \dfrac{2\pi}{3}$ então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

c) $\cos x = 0 = \cos \dfrac{\pi}{2}$ então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$

d) $\cos x = 1 = \cos 0$ então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi\}$

e) $\cos x = -1 = \cos \pi$ então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi\}$

f) $\cos x = \dfrac{1}{2} = \cos \dfrac{\pi}{3}$ então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

g) $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos \dfrac{\pi}{4}$ então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\}$

h) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos \dfrac{5\pi}{6}$ então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

C.203 Resolver as equações abaixo:

a) $4 \cdot \cos^2 x = 3$ b) $\cos^2 x + \cos x = 0$

c) $\text{sen}^2\, x = 1 + \cos x$ d) $\cos 2x + 3 \cdot \cos x + 2 = 0$

Solução

a) $\cos^2 x = \dfrac{3}{4} \implies \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ou $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \pm \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

b) $\cos x \cdot (\cos x + 1) = 0 \implies \cos x = 0$ ou $\cos x = -1$ então

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ ou $x = \pi + 2k\pi\}$

c) $1 - \cos^2 x = 1 + \cos x \implies \cos^2 x + \cos x = 0$

e recaímos no anterior.

d) $(2 \cdot \cos^2 x - 1) + 3 \cdot \cos x + 2 = 0 \implies 2 \cdot \cos^2 x + 3 \cdot \cos x + 1 = 0$

$\cos x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \dfrac{-3 \pm 1}{4} \implies \cos x = -1$ ou $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

então $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi + 2k\pi$ ou $x = \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

C.204 Resolver as equações abaixo:

a) $\cos x = -\frac{1}{2}$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\sec x = 2$

e) $2 \cdot \cos^2 x = \cos x$ f) $4 \cdot \cos x + 3 \cdot \sec x = 8$

g) $2 - 2 \cdot \cos x = \text{sen } x \cdot \text{tg } x$ h) $2 \cdot \text{sen}^2 x + 6 \cdot \cos x = 5 + \cos 2x$

i) $1 + 3 \cdot \text{tg}^2 x = 5 \cdot \sec x$ j) $(4 - \frac{3}{\text{sen}^2 x}) \cdot (4 - \frac{1}{\cos^2 x}) = 0$

C.205 Resolver as seguintes equações:

a) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos 2x = \cos x$

c) $\cos (x + \frac{\pi}{6}) = 0$ d) $\cos (x - \frac{\pi}{4}) = 1$

Solução

a) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6} \Longrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi\}$

b) $\cos 2x = \cos x \Longrightarrow \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -x + 2k\pi \end{cases}$ então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2k\pi}{3}\}$

c) $\cos (x + \frac{\pi}{6}) = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \Longrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

d) $\cos (x - \frac{\pi}{4}) = 1 = \cos 0 \Longrightarrow x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi\}$

C.206 Resolver as seguintes equações:

a) $\cos 3x - \cos x = 0$ b) $\cos 5x = \cos (x + \frac{\pi}{3})$

C.207 Determinar os ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que

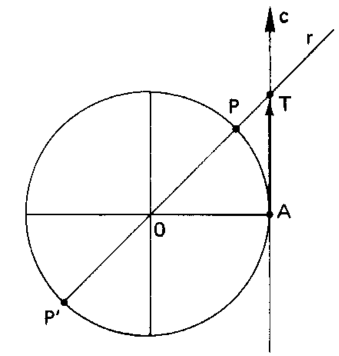
$$\cos (A + B) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen } (B + C) = \frac{1}{2}$$

C.208 (MAUÁ-77) Dada a equação $(\text{sen } x + \cos y)(\sec x + \text{cossec } y) = 4$

a) resolva-a se: $x = y$ b) resolva-a se: $\text{sen } x = \cos y$

IV. RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO $\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta$

88. Se $\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta = \overline{OT}$, então as imagens de α e β estão sobre a reta r determinada por O e T, isto é, estão em P ou P'.



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos

ou

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, isto é, são explementares.

89. Em resumo, temos:

$$\boxed{\text{tg } \alpha = \text{tg } \beta \Longrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta + k\pi}$$

EXERCÍCIOS

C.209 Resolver as equações seguintes:

a) $\text{tg } x = 1$ b) $\text{cotg } x = \sqrt{3}$

c) $\text{tg } x = -\sqrt{3}$ d) $\text{tg } x = 0$

e) $\text{tg } 2x = \sqrt{3}$ f) $\text{tg } 2x = \text{tg } x$

g) $\text{tg } 3x = 1$ h) $\text{tg } 5x = \text{tg } 3x$

Solução

a) $\text{tg } x = 1 = \text{tg } \frac{\pi}{4}$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$

b) $\text{cotg } x = \sqrt{3} \Longrightarrow \text{tg } x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \text{tg } \dfrac{\pi}{6}$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi\}$

c) $\text{tg } x = -\sqrt{3} = \text{tg } \dfrac{2\pi}{3}$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi\}$

d) $\text{tg } x = 0 = \text{tg } 0$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$

e) $\text{tg } 2x = \sqrt{3} = \text{tg } \dfrac{\pi}{3} \Longrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi$,

então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\}$

f) $\text{tg } 2x = \text{tg } x \Longrightarrow 2x = x + k\pi$,

então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$

g) $\text{tg } 3x = 1 = \text{tg } \dfrac{\pi}{4} \Longrightarrow 3x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$,

então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\}$

h) $\text{tg } 5x = \text{tg } 3x \Longrightarrow 5x = 3x + k\pi \Longrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$

Notemos que se k for ímpar, então não existem $\text{tg } 5x$ e $\text{tg } 3x$, portanto:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2},\ k \text{ par}\}$

C.210 Resolver as equações abaixo:

a) $\text{sen } x - \sqrt{3} \cdot \cos x = 0$

b) $\text{sen}^2 x = \cos^2 x$

c) $\text{tg } x + \text{cotg } x = 2$

d) $\sec^2 x = 1 + \text{tg } x$

Solução

a) $\text{sen } x = \sqrt{3} \cdot \cos x \Longrightarrow \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} = \sqrt{3} \Longrightarrow \text{tg } x = \sqrt{3}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi\}$

b) $\text{sen}^2 x = \cos^2 x \Longrightarrow \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = 1 \Longrightarrow \text{tg}^2 x = 1$,

então: $\text{tg } x = 1$ ou $\text{tg } x = -1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\}$

c) $\text{tg } x + \dfrac{1}{\text{tg } x} = 2 \Longrightarrow \text{tg}^2 x - 2 \cdot \text{tg } x + 1 = 0$

$\text{tg } x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = 1$, então:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$

d) $\sec^2 x = 1 + \text{tg } x \Longrightarrow 1 + \text{tg}^2 x = 1 + \text{tg } x \Longrightarrow \text{tg}^2 x - \text{tg } x = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \text{tg } x \cdot (\text{tg } x - 1) = 0$,

então: $\text{tg } x = 0$ ou $\text{tg } x = 1$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$

C.211 Resolver as equações abaixo:

a) $\text{tg } x = \text{tg } \dfrac{\pi}{5}$

b) $\text{cotg } x = \text{cotg } \dfrac{5\pi}{6}$

c) $3 \cdot \text{tg } x = \sqrt{3}$

d) $\text{cotg } x = 0$

e) $\text{cotg } x = -1$

f) $\text{tg } 3x - \text{tg } 2x = 0$

g) $\text{tg } 2x = \text{tg}(x + \dfrac{\pi}{4})$

h) $\text{tg } 4x = 1$

i) $\text{cotg } 2x = \text{cotg } (x + \dfrac{\pi}{4})$

j) $\text{tg}^2 2x = 3$

C.212 Resolver as equações abaixo:

a) $\sec^2 x = 2 \cdot \text{tg } x$

b) $\dfrac{1}{\text{sen}^2 x} = 1 - \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}$

c) $\text{sen } 2x \cdot \cos(x + \dfrac{\pi}{4}) = \cos 2x \cdot \text{sen } (x + \dfrac{\pi}{4})$

d) $(1 - \text{tg } x)(1 + \text{sen } 2x) = 1 + \text{tg } x$

C.213 (MAPOFEI-75) Resolver a equação $\text{cotg } x - \text{sen } 2x = 0$.

C.214 (FEI-77) Para quais valores de p, a equação: $\text{tg } px = \text{cotg } px$ tem $x = \dfrac{\pi}{2}$ para raiz.

V. SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DENTRO DE CERTO INTERVALO

90. Quando desejamos obter as soluções de uma equação pertencentes a um certo intervalo I, seguimos a seqüência de operações abaixo:

1º) resolvemos normalmente a equação, não tomando conhecimento do intervalo I até obtermos a solução geral;

2º) obtida a solução geral, onde necessariamente aparece a variável k inteira, atribuímos a k todos os valores inteiros que acarretem $x \in I$.

O conjunto-solução será formado pelos valores de x calculados com os valores escolhidos para k.

EXERCÍCIOS

C.215 Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $2 \cdot \operatorname{sen} x = 1$.

Solução

A solução geral da equação $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ é

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

Se queremos $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, devemos atribuir a k o valor 0, então:

$S = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

C.216 Quais são os arcos do intervalo fechado $0 \longmapsto 2\pi$ tais que o seno do seu dobro é $\frac{\sqrt{3}}{2}$?

Solução

Chamemos de x os arcos procurados, então:

$$\operatorname{sen} 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (1)\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ \text{ou} \\ (2)\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad \text{(chamada solução geral)}$$

A solução geral é o conjunto de todos os arcos que satisfazem à equação dada, ao passo que queremos só os arcos-solução do intervalo $0 \longmapsto 2\pi$, então vamos atribuir valores a k:

$$\text{em } (1) \begin{cases} k = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ k = 1 \Longrightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$$

$$\text{em } (2) \begin{cases} k = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ k = 1 \Longrightarrow x = \frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

Observamos que qualquer outro valor atribuído a k em (1) ou (2) acarretaria $x \not\in 0 \longmapsto 2\pi$.

$S = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\}$

C.217 Determinar x tal que $0 < x < \pi$ e $\operatorname{sen} 3x = \frac{1}{2}$.

C.218 Quais são os arcos do intervalo fechado $0 \longmapsto 2\pi$ tais que o seu seno é igual ao seno do seu dobro?

Solução

Chamemos de x os arcos procurados, então:

$$\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} x \Longrightarrow \begin{cases} 2x = x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = \pi - x + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi & (1) \\ \text{ou} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} & (2) \end{cases}$$

$$\text{Em } (1) \begin{cases} k = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ k = 1 \Longrightarrow x = 2\pi \end{cases}$$

$$\text{em } (2) \begin{cases} k = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ k = 1 \Longrightarrow x = \pi \\ k = 2 \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

$S = \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi\}$

C.219 Obter as soluções da equação $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 2x$ que pertencem ao intervalo $[0, \pi]$.

C.220 Determinar x tal que $0 < x < 2\pi$ e $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

Solução

Temos $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{3} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi & (1) \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi & (2) \end{cases}$

De (1) $\begin{cases} k = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ k = 1 \Longrightarrow x = \frac{7\pi}{6} \end{cases}$ de (2) $\begin{cases} k = 1 \Longrightarrow x = \frac{5\pi}{6} \\ k = 2 \Longrightarrow x = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$

então $S = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

C.221 Obter x tal que $\cos 3x = \cos 2x$ e $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

C.222 (EESCUSP-69) Achar as soluções de $4 \cdot \operatorname{sen}^3 x - \operatorname{sen} x = 0$ para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

C.223 Determinar x tal que $0 \leqslant x \leqslant \pi$ e $\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} 2x$.

Solução

$\operatorname{tg} 6x = \operatorname{tg} 2x \Longrightarrow 6x = 2x + k\pi \Longrightarrow x = \frac{k\pi}{4}$

Fazendo $k = 0, 1, 2, 3,$ e 4, obtemos respectivamente $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ e π. Excluindo os valores $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4}$ para os quais não existem as tangentes de $6x$ e $2x$, vem

$S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$

C.224 (MAPOFEI-74) Calcular x no intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ tal que $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2$.

C.225 Sendo $0 \leqslant x \leqslant \pi$, resolver $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x} - \sqrt{\cos^2 x} = 0$.

C.226 (Itajubá-69) Resolver a equação $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1$ sabendo que $x + y = \frac{\pi}{3}$.

VI. EQUAÇÕES CLÁSSICAS

Apresentaremos neste item algumas equações tradicionais em Trigonometria, sugerindo métodos para fazê-las recair nas equações fundamentais.

91. $a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \cos x = c \; (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$

Método 1

Fazemos a mudança de variável $\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$ e resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} au + bv = c \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

Tendo calculado u e v, determinamos os possíveis valores de x.

Método 2

Fazendo $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \theta$, temos:

$$a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \cos x = c \Longrightarrow \operatorname{sen} x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} \theta \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Longrightarrow \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x \cdot \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cdot \cos x = \frac{c}{a} \cdot \cos \theta \Longrightarrow \operatorname{sen}(x + \theta) = \frac{c}{a} \cdot \cos \theta$$

e, assim, calculamos $x + \theta$.

Método 3

Fazendo $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, temos $\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2}$ e $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, então:

$$a \cdot \operatorname{sen} x + b \cdot \cos x = c \Longrightarrow a \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + b \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = c \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2at + b - bt^2 = c + ct^2 \Longrightarrow (c + b)t^2 - 2at + (c - b) = 0$$

e recaímos em uma equação do 2º grau em t. Observemos que este método falha se $\pi + 2k\pi$ for solução da equação, caso em que a substituição $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = t$ não tem sentido.

C.227 Resolver a equação $\sqrt{3} \cdot \cos x + \operatorname{sen} x = 1$

Solução

Método 1

Fazendo $\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$, temos:

$$\begin{cases} u + v \cdot \sqrt{3} = 1 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

De (1) vem $u = 1 - v \cdot \sqrt{3}$ que, substituída em (2), acarreta:

$(1 - v \cdot \sqrt{3})^2 + v^2 = 1 \Longrightarrow 4v^2 - 2\sqrt{3} \cdot v = 0$

então $\begin{cases} v = 0 \\ \text{ou} \\ v = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ portanto $\begin{cases} u = 1 - 0 \cdot \sqrt{3} = 1 \\ \text{ou} \\ u = 1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

Existem, assim, duas possibilidades:

$\cos x = 0$, $\operatorname{sen} x = 1$ e $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

ou

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$ e $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

Método 2

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 1 \Longrightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = 1 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \cdot \cos x = 1 \Longrightarrow$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

Método 3

$$\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cdot \cos x = 1 \Longrightarrow \frac{2t}{1 + t^2} + \sqrt{3} \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 1 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow 2t + \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot t^2 = 1 + t^2 \Longrightarrow (1 + \sqrt{3})t^2 - 2t + (1 - \sqrt{3}) = 0$$

Então:

$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}}{2(1 + \sqrt{3})} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})} = 1 \text{ ou } -2 + \sqrt{3}$$

Existem, assim, duas possibilidades:

$t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = 1$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ e $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

ou

$t = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = -2 + \sqrt{3}$, $\dfrac{x}{2} = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi$ e $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$

C.228 Resolver as seguintes equações:

a) $\operatorname{sen} x + \cos x = -1$ b) $\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} x - \cos x = -\sqrt{3}$

C.229 Determinar x tal que $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ e $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$.

Solução

Fazendo $\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$, temos:

$$\begin{cases} u + v = 1 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

(1) em (2): $u^2 + (1 - u)^2 = 1 \Longrightarrow 2u^2 - 2u = 0$

Existem, então, duas possibilidades:

$u = 0$ e $v = 1 - u = 1$ ou $u = 1$ e $v = 1 - u = 0$

portanto $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$

C.230 Obter as soluções das equações abaixo, dentro do intervalo $[0, 2\pi]$:

a) $\operatorname{sen} 4x + \cos 4x = 1$ b) $|\operatorname{sen} x| + |\cos x| = 1$

C.231 (MACK-70) Resolva no conjunto dos números reais a equação $\operatorname{sen} 2x = 1 - \cos 2x$.

C.232 Discutir a equação em x: $m \cdot \operatorname{sen} x + \cos x = m$

Solução

Fazendo $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1 + t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}$, temos:

$$m \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} = m \Longrightarrow 2mt + 1 - t^2 = m + mt^2 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow (m + 1) \cdot t^2 - 2mt + (m - 1) = 0$$

Esta última equação tem solução real se, e somente se, apresentar $\Delta \geqslant 0$, então:

$\Delta = 4m^2 - 4(m + 1)(m - 1) = 4 \geqslant 0$ o que ocorre para todo m real.

C.233 Discutir, segundo m, as equações seguintes:

a) $m \cdot \cos x - (m+1) \cdot \operatorname{sen} x = m$

b) $\operatorname{sen} x + \cos x = m$

92. $\Sigma \operatorname{sen} f_i(x) = 0$ ou $\Sigma \cos f_i(x) = 0$

O método de resolução consiste em transformar a soma em produto e estudar as possibilidades de anulamento de cada fator.

EXERCÍCIOS

C.234 Resolver as equações:

a) $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x = 0$ b) $\cos 6x + \cos 2x = 0$

c) $\operatorname{sen} 4x - \cos x = 0$ d) $\cos 3x + \operatorname{sen} 2x = 0$

Solução

a) $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x = 0 \Longrightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} 6x \cdot \cos x = 0$

1ª possibilidade: $\operatorname{sen} 6x = 0 \Longrightarrow 6x = k\pi \Longrightarrow x = \dfrac{k\pi}{6}$

2ª possibilidade: $\cos x = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{k\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$

b) $\cos 6x + \cos 2x = 0 \Longrightarrow 2 \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x = 0$

1ª possibilidade: $\cos 4x = 0 \Longrightarrow 4x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}$

2ª possibilidade: $\cos 2x = 0 \Longrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}\}$

c) $\operatorname{sen} 4x - \operatorname{sen}(\dfrac{\pi}{2} - x) = 0 \Longrightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{4}) \cdot \cos(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{4}) = 0$

1ª possibilidade: $\operatorname{sen}(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{4}) = 0 \Longrightarrow \dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{4} = k\pi \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}$

2ª possibilidade: $\cos(\dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{4}) = 0 \Longrightarrow \dfrac{3x}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}$ ou $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}\}$

d) $\cos 3x + \cos(\dfrac{\pi}{2} - 2x) = 0 \Longrightarrow 2 \cdot \cos(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}) \cdot \cos(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{4}) = 0$

1ª possilidade: $\cos(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

2ª possibilidade: $\cos(\dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{4}) = 0 \Longrightarrow \dfrac{5x}{2} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $x = \dfrac{3\pi}{10} + \dfrac{2k\pi}{5}\}$

C.235 Resolver as equações:

a) $\operatorname{sen} mx + \operatorname{sen} nx = 0$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$

b) $\cos ax + \cos bx = 0$ $(a, b \in \mathbb{R}^*)$

c) $\operatorname{sen} 2x = \cos(x + \dfrac{\pi}{4})$

C.236 Resolver as seguintes equações:

a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x = 0$

b) $\cos 3x + \cos 7x = \cos 5x$

Solução

a) $(\operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 4x) + (\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x) = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 2 \cdot \operatorname{sen} 5x \cdot \cos x + 2 \cdot \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \cos x \cdot (\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 2x) = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} \dfrac{7x}{2} \cdot \cos \dfrac{3x}{2} = 0$

1ª possibilidade: $\cos x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

2ª possibilidade: $\text{sen } \frac{7x}{2} = 0 \Longrightarrow x = \frac{2k\pi}{7}$

3ª possibilidade: $\cos \frac{3x}{2} = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x = \frac{2k\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\}$

b) $(\cos 7x + \cos 3x) - \cos 5x = 0 \Longrightarrow 2 \cdot \cos 5x \cdot \cos 2x - \cos 5x = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow 2 \cdot \cos 5x\ (\cos 2x - \frac{1}{2}) = 0 \Longrightarrow$

1ª possibilidade: $\cos 5x = 0 \Longrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$

2ª possibilidade: $\cos 2x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\}$

C.237 Resolver as equações:

a) $\text{sen } 5x + \text{sen } x = 2 \cdot \text{sen } 3x$

b) $\cos x + \cos(2x + a) + \cos(3x + 2a) = 0$

c) $\text{sen } 7x + \cos 3x = \cos 5x - \text{sen } x$

C.238 Determinar x tal que $0 \leqslant x \leqslant \pi$ e $\cos^2(x + a) + \cos^2(x - a) = 1$.

C.239 Determinar x tal que $\text{sen } 3x + \cos 2x - \text{sen } x = 1$ e $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

C.240 (MAPOFEI-74) Determinar o ângulo x, medido em radianos, que satisfaz a igualdade:

$$\text{sen}(x + \frac{\pi}{4}) + \text{sen}(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

C.241 (MAUÁ-77) Dado o sistema

$$\begin{cases} \text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y) = 2 \\ \text{sen } x + \cos y = 2 \end{cases}$$

a) mostre que o par (x_0, y_0) com $x_0 = 2\pi$ e $y_0 = \frac{\pi}{2}$ não é solução do sistema.

b) resolva o sistema, determinando todas as soluções (x, y).

C.242 (FEI-77) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} \text{sen } a + \cos b = 1 \\ \text{sen } \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

sendo, a e b, do 1º quadrante.

93. $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = a\ (a \in \mathbb{R})$

Para resolver esta equação basta aplicar a identidade

$$\text{sen}^4 x + \cos^4 x \equiv 1 - \frac{\text{sen}^2 2x}{2} \quad \text{pois:}$$

$$\text{sen}^4 x + \cos^4 x = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x =$$

$$= 1^2 - 2 \cdot (\frac{\text{sen } 2x}{2})^2 = 1 - \frac{\text{sen}^2 2x}{2}$$

Temos então:

$$\text{sen}^4 x + \cos^4 x = a \Longrightarrow 1 - \frac{\text{sen}^2 2x}{2} = a \Longrightarrow \text{sen}^2 2x = 2(1 - a).$$

Notemos que só existe solução se $0 \leqslant 2(1 - a) \leqslant 1$, isto é, se

$$\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1.$$

94. $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = a\ (a \in \mathbb{R})$

Resolver esta equação aplicando a identidade:

$$\text{sen}^6 x + \cos^6 x \equiv 1 - \frac{3\ \text{sen}^2 2x}{4} \quad \text{pois:}$$

$$\text{sen}^6 x + \cos^6 x = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x + \cos^4 x) =$$

$$= (\text{sen}^4 x + \cos^4 x) - \text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x = (1 - \frac{\text{sen}^2 2x}{2}) - \frac{\text{sen}^2 2x}{4} =$$

$$= 1 - \frac{3 \cdot \text{sen}^2 2x}{4}$$

Temos então:

$$\text{sen}^6 x + \cos^6 x = a \Longrightarrow 1 - \frac{3 \cdot \text{sen}^2 2x}{4} = a \Longrightarrow \text{sen}^2 2x = \frac{4 - 4a}{3}$$

Notemos que só existe solução se $0 \leqslant \frac{4 - 4a}{3} \leqslant 1$, isto é, se

$$\frac{1}{4} \leqslant a \leqslant 1.$$

EXERCÍCIOS

C.243 Resolver a equação $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$.

Solução

Decorre da teoria que:

$$\text{sen}^2 2x = 2\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

portanto $\text{sen}\, 2x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ e então:

$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\right\}$$

C.244 Resolver a equação $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

Solução

Decorre da teoria que:

$$\text{sen}^2 2x = \frac{4}{3} \cdot (1 - a) = \frac{4}{3} \cdot \left(1 - \frac{7}{16}\right) = \frac{3}{4}$$

portanto $\text{sen}\, 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ e então:

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \Longrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right\}$$

C.245 Resolver as seguintes equações para $x \in [0, 2\pi]$:

a) $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$

b) $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{5}{8}$

c) $\text{sen}^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$

d) $\text{sen}^6 \frac{x}{2} + \cos^6 \frac{x}{2} = \frac{7}{16}$

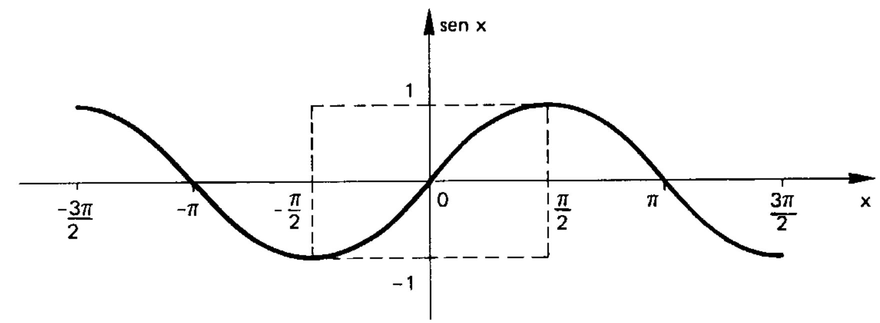
e) $\text{sen}^3 x + \cos^3 x = 1$

VII. FUNÇÕES CIRCULARES INVERSAS

95. Função Arco-Seno

A função seno, isto é, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \text{sen}\, x$ é evidentemente não sobrejetora (pois $\nexists\ x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen}\, x = 2$) e não injetora (pois $\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$ e $\text{sen}\, \frac{\pi}{6} = \text{sen}\, \frac{5\pi}{6}$).

Se considerarmos a função seno restrita ao intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e com contradomínio $[-1, 1]$, isto é, $g: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ tal que $g(x) = \text{sen}\, x$, notamos que



1º) g é sobrejetora pois para todo $y \in [-1, 1]$ existe $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que $\text{sen}\, x = y$;

2º) g é injetora pois no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ a função seno é crescente, então:

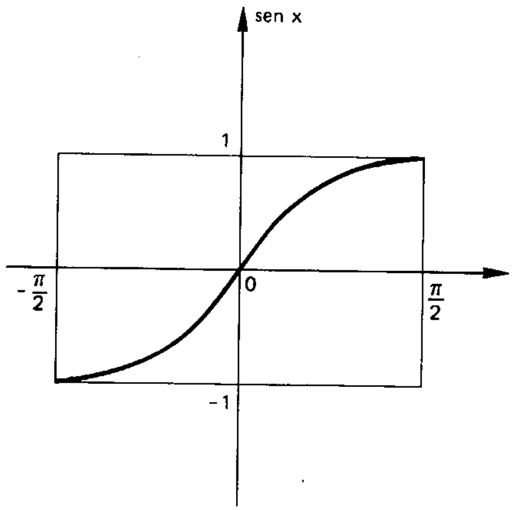
$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow \text{sen}\, x_1 \neq \text{sen}\, x_2$$

Assim sendo, a função g admite inversa e g^{-1} é denominada função arco-seno. Notemos que g^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e associa a cada $x \in [-1, 1]$ um $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tal que y é um arco cujo seno é x (indica-se $y = \text{arc sen}\, x$). Temos, portanto, que:

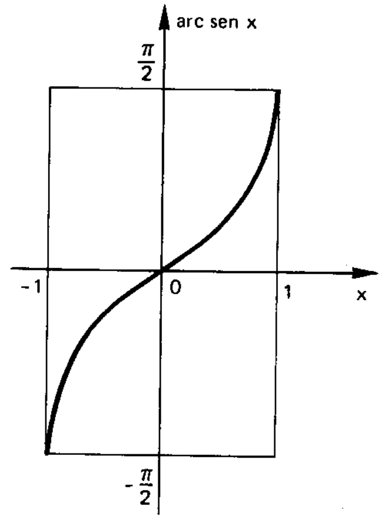
$$\boxed{y = \text{arc sen}\, x \iff \text{sen}\, y = x \ \text{ e } \ -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}}$$

Já vimos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes, então a partir do gráfico de g obtemos o gráfico de g^{-1}:

$g(x) = \text{sen } x$



$g^{-1}(x) = \text{arc sen } x$



EXERCÍCIOS

C.246 Determinar α tal que $\alpha = \text{arc sen } \frac{1}{2}$.

Solução

Temos:

$$\alpha = \text{arc sen } \frac{1}{2} \iff \text{sen } \alpha = \frac{1}{2} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

isto é, arc sen $\frac{1}{2}$ não é qualquer α tal que sen $\alpha = \frac{1}{2}$ mas aquele α (único) que está no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, isto é, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

C.247 Determinar os seguintes números: arc sen 0, arc sen $\frac{\sqrt{3}}{2}$, arc sen $(-\frac{1}{2})$, arc sen 1 e arc sen (-1).

C.248 Calcular $\cos(\text{arc sen } \frac{1}{3})$.

Solução

Fazendo $\text{arc sen } \frac{1}{3} = \alpha$, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{3} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

então

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha} = +\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = +\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

C.249 Calcular $\text{tg}(\text{arc sen } \frac{3}{4})$.

C.250 Calcular $\cos(\text{arc sen } \frac{3}{5} + \text{arc sen } \frac{5}{13})$.

Solução

Fazendo $\text{arc sen } \frac{3}{5} = \alpha$, temos :

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

então $\cos \alpha = +\sqrt{1 - (\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$.

Fazendo $\text{arc sen } \frac{5}{13} = \beta$, temos:

$$\text{sen } \beta = \frac{5}{13} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$$

então $\cos \beta = +\sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = \frac{12}{13}$.

Finalmente, temos:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \text{sen } \alpha \cdot \text{sen } \beta =$$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{48 - 15}{65} = \frac{33}{65}.$$

C.251 Calcular:

a) $\text{tg}(\text{arc sen } (-\frac{2}{3}) + \text{arc sen } \frac{1}{4})$

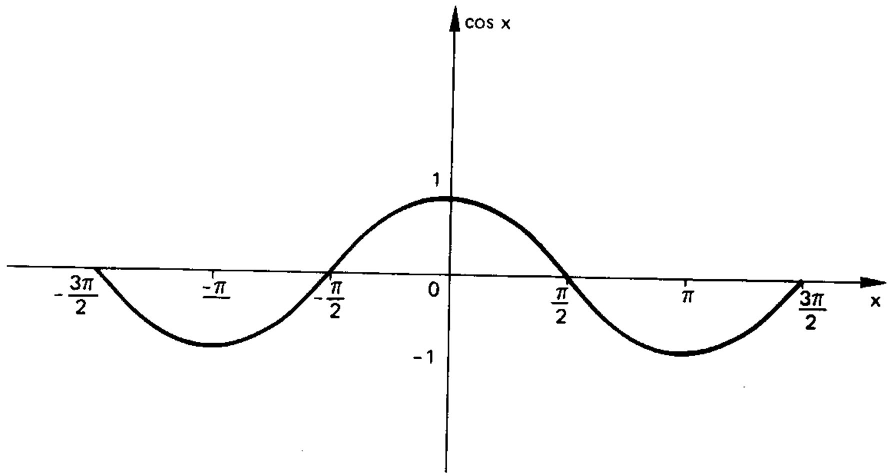
b) $\text{sen } (2 \cdot \text{arc sen } (-\frac{3}{5}))$

c) $\cos(3 \cdot \text{arc sen } \frac{12}{13})$.

96. Função arco-cosseno

A função cosseno, isto é, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ é não sobrejetora (pois $\nexists\ x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = 3$) e não injetora (pois $0 \neq 2\pi$ e $\cos 0 = \cos 2\pi$).

Se considerarmos a função cosseno restrita ao intervalo $[0, \pi]$ e com contradomínio $[-1, 1]$, isto é, $g: [0, \pi] \to [-1, 1]$ tal que $g(x) = \cos x$, notamos que:



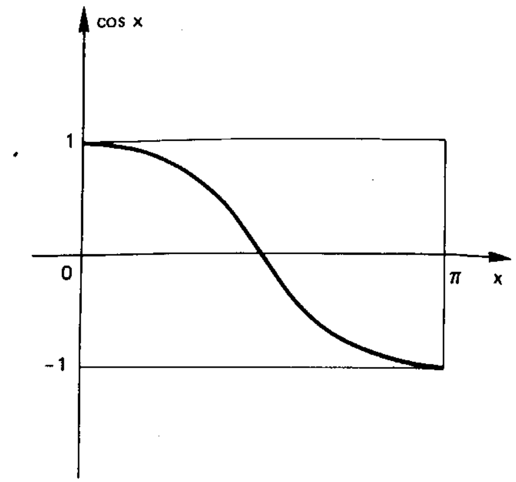
1º) g é sobrejetora: $\forall\ y \in [-1, 1],\ \exists\ x \in [0, \pi] \mid \cos x = y$;

2º) g é injetora: $\forall\ x_1, x_2 \in [0, \pi],\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \cos x_1 \neq \cos x_2$, pois g é decrescente.

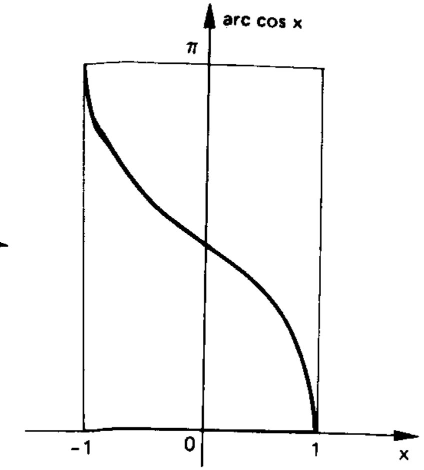
Assim, g admite inversa e g^{-1} é denominada função arco-cosseno. Notemos que g^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $[0, \pi]$ e associa a cada $x \in [-1, 1]$ um $y \in [0, \pi]$ tal que y é um arco cujo cosseno é x (indica-se $y = \text{arc} \cos x$). Temos, portanto, que:

$$\boxed{y = \text{arc} \cos x \iff \cos y = x \ \text{ e } \ 0 \leqslant y \leqslant \pi}$$

Como os gráficos de g e g^{-1} são simétricos em relação à reta $y = x$, podemos construir o gráfico de g^{-1} a partir do de g.



$g(x) = \cos x$



$g^{-1}(x) = \text{arc} \cos x$

EXERCÍCIOS

C.252 Determinar α tal que $\alpha = \text{arc} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solução

Temos:

$\alpha = \text{arc} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$

então $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

C.253 Determinar os seguintes números: $\text{arc} \cos 1$, $\text{arc} \cos \frac{1}{2}$, $\text{arc} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{arc} \cos 0$, $\text{arc} \cos (-1)$.

C.254 Calcular $\text{tg}(\text{arc} \cos \frac{2}{5})$.

Solução

Fazendo $\text{arc} \cos \frac{2}{5} = \alpha$, temos:

$\cos \alpha = \frac{2}{5}$ e $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$

então $\text{sen}\, \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = +\sqrt{1 - \frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

e $\text{tg}\, \alpha = \frac{\text{sen}\, \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

C.255 Calcular $\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos(-\frac{3}{5}))$.

C.256 Calcular $\operatorname{cotg}(\operatorname{arc}\cos\frac{2}{7})$.

C.257 (FEI-76) Sendo A do primeiro quadrante e $\operatorname{arc}\operatorname{sen} x = A$, ache $\operatorname{arc}\cos x$.

C.258 Calcular $\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos\frac{5}{13} + \operatorname{arc}\operatorname{sen}\frac{7}{25})$.

Solução

Fazendo $\operatorname{arc}\cos\frac{5}{13} = \alpha$, temos:

$\cos\alpha = \frac{5}{13}$ e $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$

então $\operatorname{sen}\alpha = +\sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = \frac{12}{13}$.

Fazendo $\operatorname{arc}\operatorname{sen}\frac{7}{25} = \beta$, temos:

$\operatorname{sen}\beta = \frac{7}{25}$ e $-\frac{\pi}{2} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2}$

então $\cos\beta = +\sqrt{1 - (\frac{7}{25})^2} = \frac{24}{25}$.

Finalmente, temos:

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha =$

$= \frac{12}{13} \cdot \frac{24}{25} + \frac{7}{25} \cdot \frac{5}{13} = \frac{288 + 35}{325} = \frac{323}{325}$.

C.259 Calcular:

a) $\operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos\frac{3}{5} - \operatorname{arc}\cos\frac{5}{13})$

b) $\cos(\operatorname{arc}\operatorname{sen}\frac{7}{25} - \operatorname{arc}\cos\frac{12}{13})$

c) $\operatorname{tg}(2 \cdot \operatorname{arc}\cos(-\frac{3}{5}))$

d) $\cos(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc}\cos\frac{7}{25})$

C.260 (MAPOFEI-72) Seja a função $f(x) = \cos(2\operatorname{arc}\cos x)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

a) Determinar os valores de x tais que $f(x) = 0$

b) Esboçar o gráfico de $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

97. Função arco-tangente

A função tangente, isto é, $f: \{x \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ é sobrejetora (pois $\forall\ y \in \mathbb{R}$, $\exists\ x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ tal que $\operatorname{tg} x = y$) e não injetora (pois $0 \neq \pi$ e $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}\pi$).

Se considerarmos a função tangente restrita ao intervalo aberto $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e com contradomínio R, isto é,

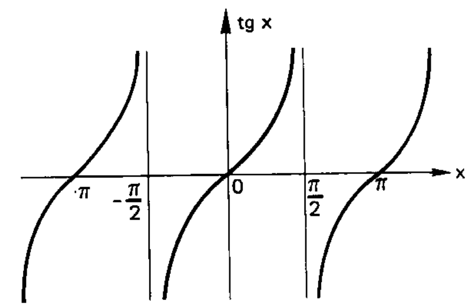
$$g:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$$

tal que $g(x) = \operatorname{tg} x$, notamos que:

1º) g também é sobrejetora;

2º) g é injetora pois no intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ a função tangente é crescente, então:

$$x_1, x_2 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow \operatorname{tg} x_1 \neq \operatorname{tg} x_2$$

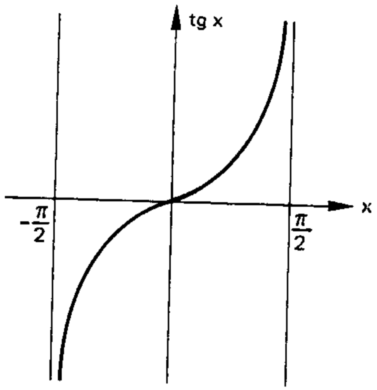


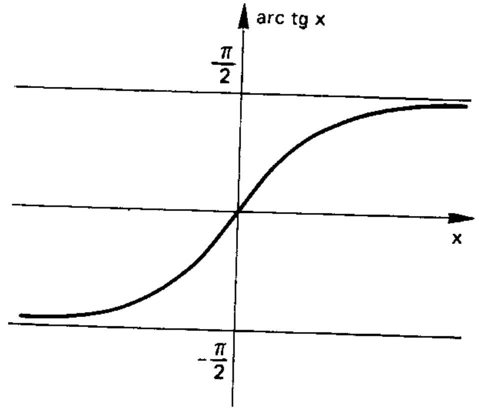
Deste modo a função g admite inversa e g^{-1} é denominada função arco-tangente. Notemos que g^{-1} tem domínio R, contradomínio $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e associa a cada $x \in R$ um $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tal que y é um arco cuja tangente é x (indica-se $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$). Temos, portanto, que:

$$\boxed{y = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x \iff \operatorname{tg} y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}}$$

Como de hábito vamos construir o gráfico de g^{-1} a partir de g.

$g(x) = \text{tg } x$ $\qquad\qquad$ $g^{-1}(x) = \text{arc tg } x$





EXERCÍCIOS

C.261 Determinar α tal que $\alpha = \text{arc tg } 1$.

Solução

Temos:

$$\alpha = \text{arc tg } 1 \iff \text{tg } \alpha = 1 \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

isto é, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

C.262 Determinar os seguintes números: arc tg 0, arc tg $\sqrt{3}$, arc tg (−1), e arc tg $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

C.263 Calcular $\text{sen}(\text{arc tg } \sqrt{2})$.

Solução

Fazendo $\text{arc tg } \sqrt{2} = \alpha$, temos:

$$\text{tg } \alpha = \sqrt{2} \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

então

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{\text{tg}^2 \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \text{sen } \alpha = +\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

C.264 Calcular $\cos(\text{arc tg}(-\frac{4}{3}))$.

C.265 Calcular $\text{tg}(\text{arc sen } \frac{3}{5} - \text{arc tg } \frac{5}{12})$.

Solução

Fazendo $\text{arc sen } \dfrac{3}{5} = \alpha$, temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{3}{5} \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ então:}$$

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \text{ e } \text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Fazendo $\text{arc tg } \dfrac{5}{12} = \beta$, temos $\text{tg } \beta = \dfrac{5}{12}$.

Finalmente, temos:

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{5}{12}}{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{\frac{16}{48}}{\frac{63}{48}} = \frac{16}{63}$$

C.266 Calcular:

a) $\text{sen}(\text{arc tg } 2 + \text{arc tg } 3)$

b) $\cos(\text{arc tg } 2 - \text{arc tg } \frac{1}{2})$

c) $\text{tg }(2 \cdot \text{arc tg } \frac{1}{5})$

d) $\cos\ (3 \cdot \text{arc tg } \frac{24}{7})$

C.267 Demonstrar a igualdade:

$$\text{arc sen } \frac{\sqrt{5}}{5} + \text{arc cos } \frac{3}{\sqrt{10}} = \text{arc tg } 1$$

Solução

I) Façamos $\alpha = \text{arc sen } \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\beta = \text{arc cos } \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\gamma = \text{arc tg } 1$,

então:

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{5} \text{ e } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4} \\ \cos \beta = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \text{ e } 0 \leqslant \beta \leqslant \pi \Longrightarrow 0 < \beta < \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{tg } \gamma = 1 \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \gamma = \frac{\pi}{4}$$

(II) Calculemos

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta} = \frac{\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} + \frac{sen\,\beta}{cos\,\beta}}{1 - \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \cdot \frac{sen\,\beta}{cos\,\beta}} =$$

$$= \frac{\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{20}}{5}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}}}{1 - \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{20}}{5}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{3}{\sqrt{10}}}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1 = tg\,\gamma$$

(III) Conclusão

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \alpha+\beta < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \\ tg(\alpha+\beta) = tg\,\gamma \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha+\beta = \gamma$$

C.268 Provar as seguintes igualdades:

a) (ITAJUBÁ-77) $arc\,tg\,\frac{1}{2} + arc\,tg\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$

b) $arc\,sen\,\frac{1}{\sqrt{5}} + arc\,cos\,\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}$

c) $arc\,cos\,\frac{3}{5} + arc\,cos\,\frac{12}{13} = arc\,cos\,\frac{16}{65}$

d) $arc\,sen\,\frac{24}{25} - arc\,sen\,\frac{3}{5} = arc\,tg\,\frac{3}{4}$

C.269 Provar que $2 \cdot arc\,tg\,\frac{1}{3} + arc\,tg\,\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

Solução

Fazendo $arc\,tg\,\frac{1}{3} = \alpha$, temos:

$$tg\,\alpha = \frac{1}{3} \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Longrightarrow 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

Fazendo $arc\,tg\,\frac{1}{7} = \beta$, temos:

$$tg\,\beta = \frac{1}{7} \text{ e } -\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow 0 < \beta < \frac{\pi}{2} \qquad (2)$$

Tendo em vista (1) e (2), para provar que $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ basta provar que $tg(2\alpha+\beta) = 1$ pois $0 < 2\alpha + \beta < \pi$. Temos:

$$tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$tg(2\alpha+\beta) = \frac{tg\,2\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,2\alpha \cdot tg\,\beta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7}} = \frac{\frac{25}{28}}{\frac{25}{28}} = 1$$

C.270 Provar as igualdades:

a) $2 \cdot arc\,tg\,\frac{2}{3} + arc\,cos\,\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$

b) $3 \cdot arc\,sen\,\frac{1}{4} + arc\,cos\,\frac{11}{16} = \frac{\pi}{2}$

Leonhard Euler nasceu em Basiléia, Suíça, onde seu pai era ministro religioso e possuía alguns conhecimentos matemáticos.

Euler foi aluno de Jean Bernoulli e amigo de seus filhos Nicolaus e Daniel, recebendo ampla instrução em Teologia, Medicina, Astronomia, Física, Línguas orientais e Matemática.

Com o auxílio de Bernoulli entrou para a Academia de S. Petersburgo, fundada por Catarina I, ocupando um lugar na seção de Medicina e Fisiologia, e em 1730 passando à seção de Filosofia por ocasião da morte de Nicolaus e afastamento de Daniel. Tornando-se o principal matemático já aos vinte e seis anos, dedicou-se profundamente à pesquisa compondo uma quantidade inigualável de artigos, inclusive para a revista da Academia.

Em 1735 perdeu a visão do olho direito mas suas pesquisas continuaram intensas chegando a escrever até mesmo enquanto brincava com seus filhos.

Conquistou reputação internacional e recebeu menção honrosa na Academia das Ciências de Paris bem como vários prêmios em concursos.

Convidado por Frederico, o Grande, Euler passou 25 anos na Academia de Berlim, voltando à Rússia em 1766.

Euler ocupou-se de quase todos os ramos da Matemática Pura e Aplicada sendo o maior responsável pela linguagem e notações que usamos hoje; foi o primeiro a empregar a letra e como base do sistema de logaritmos naturais, a letra π para razão entre comprimento e diâmetro da circunferência e o símbolo i para $\sqrt{-1}$. Deve-se a ele também o uso de letras minúsculas designando lados do triângulo e maiúsculas para seus ângulos opostos; simbolizou logaritmo de x por 1x, usou Σ para indicar adição e f(x) para função de x, além de outras notações em Geometria, Álgebra, Trigonometria e Análise.

Euler reuniu Cálculo Diferencial e Método dos Fluxos num só ramo mais geral da Matemática que é a Análise, o estudo dos processos infinitos, surgindo assim sua principal obra, em 1748, a *"Introdução à Análise Infinita"*, baseando-se fundamentalmente em funções, tanto algébricas como transcendentes elementares (trigonométricas, logarítmicas, trigonométricas-inversas e exponenciais).

Foi o primeiro a tratar dos logaritmos como expoentes e com idéia correta sobre logaritmo de números negativos.

Muito interessado no estudo de séries infinitas, obteve notáveis resultados que o levaram a relacionar Análise com Teoria dos Números, e para a Geometria, Euler dedicou um Apêndice da *"Introdução"* onde dá a representação da Geometria Analítica no espaço.

Euler escreveu em todos os níveis, em várias línguas, publicando mais de 500 livros e artigos.

Os dezessete últimos anos de sua vida passou em total cegueira mas o fluxo de suas pesquisas e publicações não diminuiu, escrevendo com giz em grandes quadros-negros ou ditando para seus filhos.

Manteve sua mente poderosa até os 76 anos quando morreu.

Euler foi descrito pelos matemáticos da época como sendo a própria "Análise encarnada".

CAPÍTULO VIII

INEQUAÇÕES

I. INEQUAÇÕES FUNDAMENTAIS

98. Sejam f e g duas funções trigonométricas de variável x. Resolver a inequação $f(x) < g(x)$ significa obter o conjunto S, denominado conjunto-solução ou conjunto-verdade, dos números r para os quais $f(r) < g(r)$ é uma sentença verdadeira.

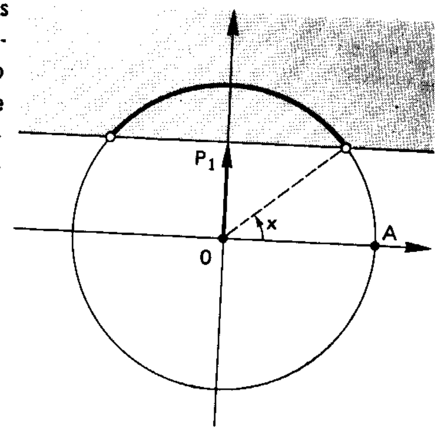
Quase todas as inequações trigonométricas podem ser reduzidas a inequações de um dos seguintes seis tipos:

1ª) $\operatorname{sen} x > m$
2ª) $\operatorname{sen} x < m$
3ª) $\cos x > m$
4ª) $\cos x < m$
5ª) $\operatorname{tg} x > m$
6ª) $\operatorname{tg} x < m$

onde m é um número real dado. Por esse motivo, estas seis são denominadas inequações fundamentais. Assim, é necessário saber resolver as inequações fundamentais para poder resolver outras inequações trigonométricas.

II. RESOLUÇÃO DE sen x > m

99. Marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1 tal que $\overline{OP}_1 = m$. Traçamos por P_1 a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que $\operatorname{sen} x > m$ estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado acima de r.



Finalmente, descrevemos os intervalos aos quais x pode pertencer, tomando o cuidado de partir de A e percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.

100. Exemplo

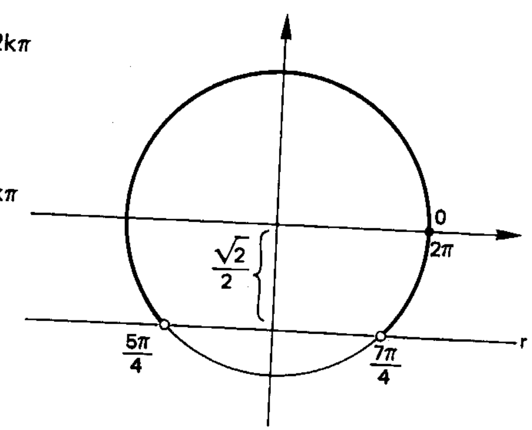
Resolver a inequação $\operatorname{sen} x > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$

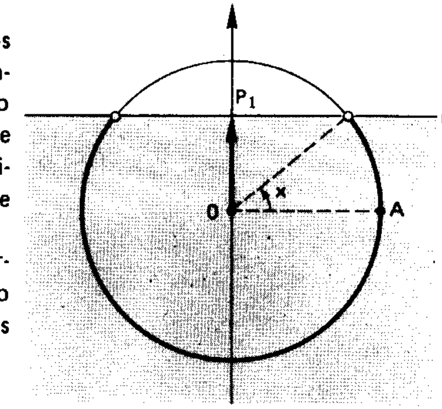


Notemos que escrever $\dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$ estaria errado pois, como $\dfrac{7\pi}{4} > \dfrac{5\pi}{4}$, não existe x algum neste intervalo.

III. RESOLUÇÃO DE sen x < m

101. Marcamos sobre os eixo dos senos o ponto P_1 tal que $\overline{OP}_1 = m$. Traçamos por P_1 a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que $\operatorname{sen} x < m$ estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado abaixo de r.

Finalmente, partindo de A e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



102. Exemplo

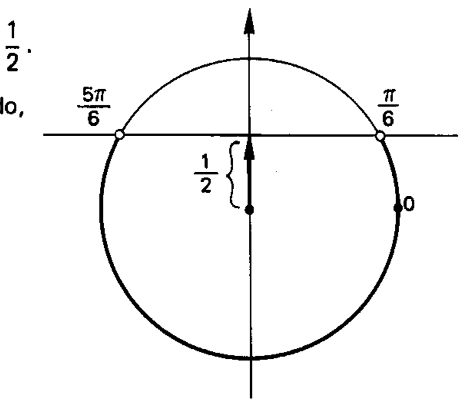
Resolver a inequação $\operatorname{sen} x < \dfrac{1}{2}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



EXERCÍCIOS

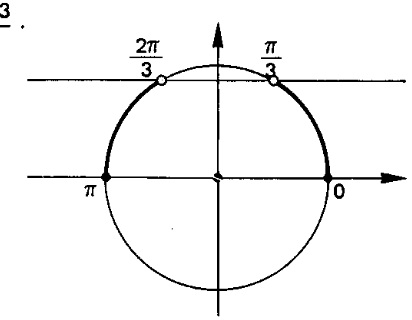
C.271 Resolver a inequação $0 \leqslant \operatorname{sen} x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Solução

A imagem de x deve ficar na intersecção do ciclo com a faixa do plano compreendida entre r e s. Temos, então:

$$0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou $\qquad \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leqslant \pi + 2k\pi$



C.272 Resolver a inequação $\operatorname{sen} x \geqslant 0$.

C.273 Resolver a inequação $\operatorname{sen} x \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C.274 Resolver a inequação $-\dfrac{1}{2} \leqslant \operatorname{sen} x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

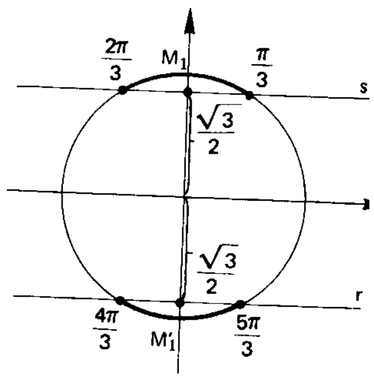
C.275 Resolver a inequação $|\operatorname{sen} x| \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Solução

$|\operatorname{sen} x| \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2} \iff \operatorname{sen} x \leqslant -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ou $\operatorname{sen} x \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

A imagem de x deve ficar na intersecção do ciclo com o semi-plano situado abaixo de r ou com o semi-plano situado acima de s.



Assim, temos:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou}$$

$$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

C.276 Resolver a inequação $|\operatorname{sen} x| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

C.227 Resolver a inequação $|\operatorname{sen} x| > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

C.278 Resolver a inequação $2\operatorname{sen}^2 x < \operatorname{sen} x$.

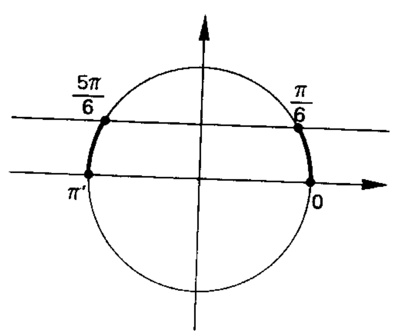
Solução

$2\operatorname{sen}^2 x < \operatorname{sen} x \iff$

$\iff 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x < 0 \iff$

$\iff 0 < \operatorname{sen} x < \dfrac{1}{2}$

Examinando o ciclo trigonométrico, obtemos:



$$2k\pi < x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{5\pi}{6} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi$$

C.279 Resolver a inequação $4\operatorname{sen}^2 x \geqslant 1$.

C.280 Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen} 2x > 0$.

Solução

Fazendo $2x = y$, temos a inequação $\operatorname{sen} y > 0$.

Examinando o ciclo, vem

$2k\pi < y < \pi + 2k\pi$

Como $x = \dfrac{y}{2}$, resulta:

$k\pi < x < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Mas $x \in [0, 2\pi]$, então só interessam as soluções particulares em que $k = 0$ ou 1:

$k = 0 \Longrightarrow 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

ou

$k = 1 \Longrightarrow \pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$

C.281 Resolver a inequação $\operatorname{sen} 2x > \dfrac{1}{2}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.282 Resolver a inequação $\operatorname{sen} 3x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.283 Resolver a inequação $\dfrac{1}{4} \leqslant \operatorname{sen} x \cdot \cos x < \dfrac{1}{2}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.284 Resolver a inequação $3^{2 \cdot \operatorname{sen} x - 1} \geqslant 1$ supondo $x \in [0, \pi]$.

C.285 (MAPOFEI-72)

a) Para quais valores de x existe $\log_2 (2\operatorname{sen} x - 1)$?

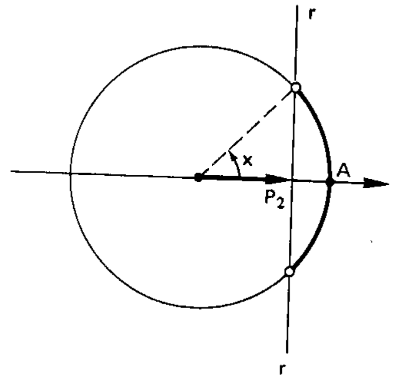
b) Resolver a equação

$$\log_2 (2\operatorname{sen} x - 1) = \log_4 (3\operatorname{sen}^2 x - 4\operatorname{sen} x + 2).$$

IV. RESOLUÇÃO DE $\cos x > m$

103. Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2 tal que $\overline{OP_2} = m$. Traçamos por P_2 a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que $\cos x > m$ estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado à direita de r.

Para completar, descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



104. Exemplo

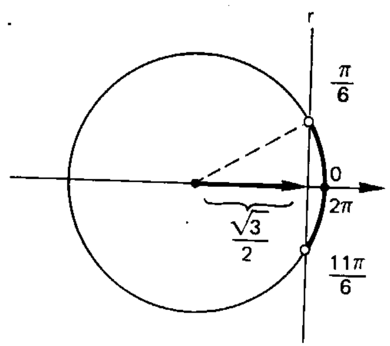
Resolver a inequação $\cos x > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Procedendo conforme foi indicado temos:

$$2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

ou

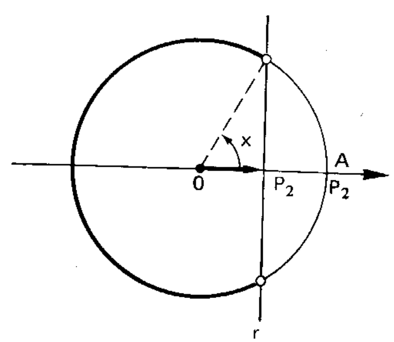
$$\frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



V. RESOLUÇÃO DE $\cos x < m$

105. Marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2 tal que $\overline{OP_2} = m$. Traçamos por P_2 a reta r perpendicular ao eixo. As imagens dos reais x tais que $\cos x < m$ estão na intersecção do ciclo com o semi-plano situado à esquerda de r.

Completamos o problema descrevendo os intervalos que convêm.



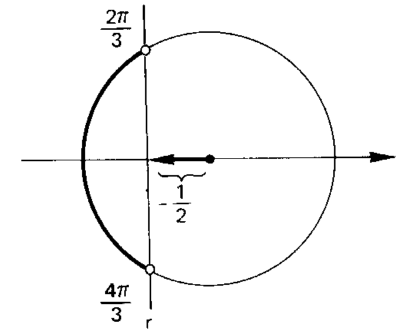
106. Exemplo

Resolver a inequação

$$\cos x < -\frac{1}{2}.$$

Procedendo conforme foi indicado, temos:

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$



EXERCÍCIOS

C.286 Resolver a inequação $-\dfrac{3}{2} \leqslant \cos x \leqslant 0$, para $x \in [0, 2\pi]$.

Solução

A imagem de x deve ficar na intersecção do ciclo com a faixa do plano compreendida entre r e s. Temos, então:

$$\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}.$$

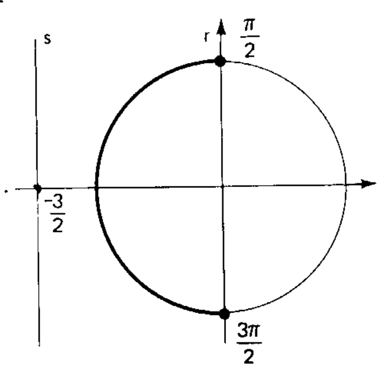
C.287 Resolver a inequação $\cos x \geqslant -\dfrac{1}{2}$.

C.288 Resolver a inequação $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

C.289 Resolver a inequação $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$.

C.290 Resolver a inequação $|\cos x| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

C.291 Resolver a inequação $|\cos x| > \dfrac{5}{3}$.



C.292 Resolver a inequação $\cos 2x + \cos x \leqslant -1$.

Solução

$\cos 2x + \cos x \leqslant -1 \iff (2\cos^2 x - 1) + \cos x \leqslant -1 \iff$

$\iff 2\cos^2 x + \cos x \leqslant 0 \iff -\frac{1}{2} \leqslant \cos x \leqslant 0$

Examinando o ciclo trigonométrico, obtemos:

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

C.293 Resolver a inequação $4\cos^2 x < 3$.

C.294 Resolver a inequação $\cos 2x \geqslant \cos x$.

C.295 Resolver a inequação $\operatorname{sen} x + \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solução

$\operatorname{sen} x + \cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff$

$\iff 2 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} \cdot \cos(x - \frac{\pi}{4}) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \cos(x - \frac{\pi}{4}) \geqslant \frac{1}{2}$

Fazendo $x - \frac{\pi}{4} = y$, temos a inequação $\cos y \geqslant \frac{1}{2}$. Examinando o ciclo, vem:

$2k\pi \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

ou

$\frac{5\pi}{3} + 2k\pi \leqslant y < 2\pi + 2k\pi$

isto é:

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ ou $\frac{23\pi}{12} + 2k\pi \leqslant x < \frac{9\pi}{4} + 2k\pi$

pois $x = y + \frac{\pi}{4}$.

C.296 Resolver a inequação $\operatorname{sen} x + \cos x < 1$.

C.297 Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\cos 3x \leqslant \frac{1}{2}$.

Solução

Fazendo $3x = y$, temos a inequação $\cos y \leqslant \frac{1}{2}$. Examinando o ciclo, vem:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant y \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

Como $x = \frac{y}{3}$, resulta:

$$\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$$

Mas $x \in [0, 2\pi]$, então só interessam as soluções particulares em que $k = 0$ ou 1 ou 2:

$k = 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{9}$

ou

$k = 1 \Longrightarrow \frac{7\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{9}$

ou

$k = 2 \Longrightarrow \frac{13\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{17\pi}{9}$

C.298 Resolver a inequação $\cos 2x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.299 Resolver a inequação $\cos 4x > -\frac{1}{2}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.300 Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\frac{\cos x}{\cos 2x} \leqslant 1$.

Solução

I) Fazendo $\cos x = y$ e lembrando que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, temos:

$$\frac{y}{2y^2 - 1} \leqslant 1 \iff \frac{y}{2y^2 - 1} - 1 \leqslant 0 \iff \frac{2y^2 - y - 1}{2y^2 - 1} \geqslant 0$$

II) Fazendo o quadro de sinais:

y		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1	
$2y^2 - y - 1$	+		+		−		−		+
$2y^2 - 1$	+		−		−		+		+
$\frac{2y^2 - y - 1}{2y^2 - 1}$	+		−		+		−		+

concluímos que o quociente é positivo para $y < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $-\frac{1}{2} \leqslant y < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $y \geqslant 1$.

III) Examinando o ciclo trigonométrico, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, temos:

$$\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} < x \leqslant \dfrac{2\pi}{3} \\ \text{ou} \\ \dfrac{4\pi}{3} \leqslant x < \dfrac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\cos x \geqslant 1 \Longrightarrow x = 0 \ \text{ ou } \ 2\pi$$

portanto:

$$S = \left\{ x \mid x = 0 \ \text{ ou } \ \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{2\pi}{3} \ \text{ ou } \ \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \ \text{ ou } \ \frac{4\pi}{3} \leqslant x < \frac{7\pi}{4} \ \text{ ou } \ x = 2\pi \right\}$$

C.301 Resolver a inequação $\dfrac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{\cos x - 1} > 0$ supondo $x \in [0, \pi]$.

C.302 Resolver a inequação $\dfrac{\cos 2x + \operatorname{sen} x + 1}{\cos 2x} \geqslant 2$ supondo $x \in [0, \pi]$.

C.303 Resolver a inequação $2^{\cos 2x} \leqslant \sqrt{2}$ supondo $x \in [0, \pi]$.

C.304 Determinar o domínio da função real f dada por $f(x) = \sqrt{\dfrac{\cos 2x}{\cos x}}$.

Solução

I) Devemos ter $\dfrac{\cos 2x}{\cos x} \geqslant 0$

II) Fazendo $\cos x = y$, temos:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x} \geqslant 0 \iff \frac{2y^2 - 1}{y} \geqslant 0$$

III) Fazendo o quadro de sinais:

	$y < -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ a 0	0 a $\frac{\sqrt{2}}{2}$	$y > \frac{\sqrt{2}}{2}$
$2y^2 - 1$	+	-	-	+
y	-	-	+	+
$\dfrac{2y^2-1}{y}$	-	+	-	+

concluímos que o quociente é positivo para

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant y < 0 \ \text{ ou } \ y \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

IV) Examinando o ciclo trigonométrico, temos:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \cos x < 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi < x \leqslant \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x < \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$$

$$\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi + 2k\pi \end{cases}$$

C.305 (MACK-70) Determine no conjunto dos números reais o domínio de

$$y = \sqrt{\frac{4 \cdot \operatorname{sen}^2 x - 1}{\cos x}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

C.306 Para que valores de x, $x \in [0, 2\pi]$, está definida a função

$$f(x) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} 2x - 2}{\cos 2x + 3\cos x - 1}} \ ?$$

C.307 (MACK-71) É dada a equação

$$(2\cos^2\alpha)\, x^2 - (4\cos\alpha)\, x + (4\cos^2\alpha - 1) = 0$$

sendo $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

a) Para que valores de α a equação tem soluções reais?

b) Para que valores de α a equação admite raízes reais negativas?

C.308 Para que valores de x, $x \in [0, 2\pi]$, verifica-se a desigualdade:
$\log_{\cos x} (1 + 2\cos x) + \log_{\cos x} (1 + \cos x) > 1$?

C.309 Que valores de x, $x \in [0, 2\pi]$ verificam a inequação $\sqrt{1 - \cos x} < \operatorname{sen} x$?

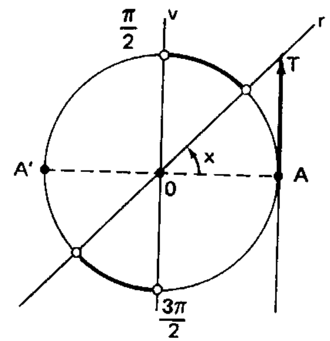
C.310 (MACK-72) Resolver, separadamente, cada um dos sistemas abaixo:

a) $\begin{cases} \operatorname{sen} x > \dfrac{1}{2} \\ \cos x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \cos(\operatorname{sen} x) > 0 \\ \operatorname{sen}(\cos x) < 0 \end{cases}$

VI. RESOLUÇÃO DE $\operatorname{tg} x > m$

107. Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $\overline{AT} = m$. Traçamos a reta $r = \overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais x tais que $\operatorname{tg} x > m$ estão na intersecção do ciclo com o ângulo $r\hat{O}v$.

Para completar descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



108 Exemplo

Resolver a inequação $\operatorname{tg} x > 1$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

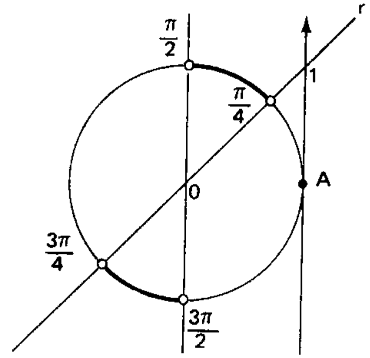
$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

que podem ser resumidos em

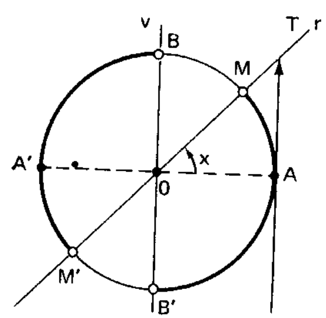
$$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$$



VII. RESOLUÇÃO DE $\operatorname{tg} x < m$

109. Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $\overline{AT} = m$. Traçamos a reta $r = \overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais x tais que $\operatorname{tg} x < m$ estão na intersecção do ciclo com o ângulo $v\hat{O}r$.

Para completar descrevemos os intervalos que convêm ao problema.



110. Exemplo

Resolver a inequação $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

Procedendo conforme foi indicado, temos:

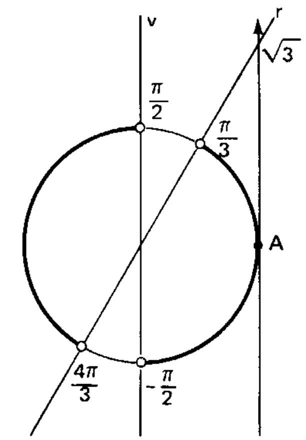
$$0 + 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$$



EXERCÍCIOS

C.311 Resolver a inequação $|\operatorname{tg} x| \leqslant 1$.

Solução

$|\operatorname{tg} x| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \operatorname{tg} x \leqslant 1$

A imagem de x deve ficar na intersecção do ciclo com o ângulo $r\hat{O}s$. Temos, então:

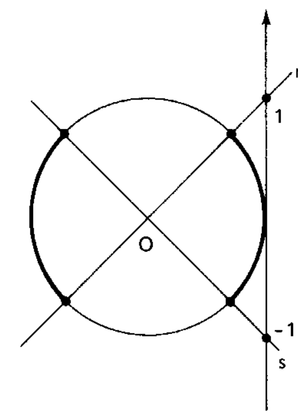
$$0 + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

ou

$$\frac{7\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x < 2\pi + 2k\pi$$



C.312 Resolver a inequação $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

C.313 Resolver a inequação $\operatorname{tg} x \leqslant 0$.

C.314 Resolver a inequação $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

C.315 Resolver a inequação $|\operatorname{tg} x| \geqslant \sqrt{3}$.

C.316 Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $1 \leqslant \text{tg}\, 2x < \sqrt{3}$.

Solução

Fazendo $2x = y$, temos a inequação $1 \leqslant \text{tg}\, y < \sqrt{3}$.

Examinando o ciclo, vem:

$$\frac{\pi}{4} + k\pi \leqslant y < \frac{\pi}{3} + k\pi$$

Como $x = \frac{y}{2}$, resulta:

$$\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Mas $x \in [0, 2\pi]$, então só interessam as soluções particulares em que $k = 0$ ou 1 ou 2 ou 3:

$$k = 0 \Longrightarrow \frac{\pi}{8} \leqslant x < \frac{\pi}{6}$$

ou

$$k = 1 \Longrightarrow \frac{5\pi}{8} \leqslant x < \frac{2\pi}{3}$$

ou

$$k = 2 \Longrightarrow \frac{9\pi}{8} \leqslant x < \frac{7\pi}{6}$$

ou

$$k = 3 \Longrightarrow \frac{13\pi}{8} \leqslant x < \frac{5\pi}{3}$$

C.317 Resolver a inequação $\text{tg}\, 2x \geqslant -\sqrt{3}$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.318 Resolver a inequação $\text{tg}^2 2x \leqslant \text{tg}\, 2x$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

C.319 Resolver a inequação $\text{tg}^2 2x < 3$ supondo $x \in [0, 2\pi]$.

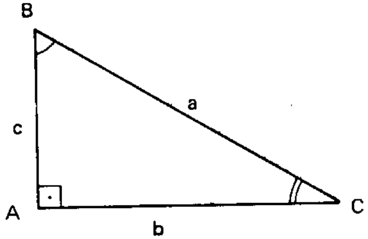
C.320 (MAPOFEI-75) Resolver a inequação: $\text{sen}\, x > \cos x$, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

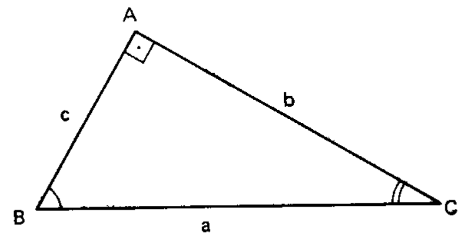
CAPÍTULO IX

TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

I. ELEMENTOS PRINCIPAIS

111. Sabemos que um triângulo é retângulo quando um de seus ângulos internos é reto.





Como é habitual, vamos utilizar a notação seguinte para os elementos de um triângulo ABC:

lados: AB, BC, AC

ângulos internos: $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$

medidas dos lados: a = medida de BC
b = medida de AC
c = medida de AB

medidas dos ângulos: $\hat{A}$ = medida de $B\hat{A}C$
$\hat{B}$ = medida de $A\hat{B}C$
$\hat{C}$ = medida de $A\hat{C}B$

Sempre que tratarmos de um triângulo ABC retângulo, daqui por diante estaremos pensando que o ângulo interno A mede 90°.

Sabemos que o lado BC, oposto ao ângulo reto, é chamado *hipotenusa* e os lados AB e AC, adjacentes ao ângulo reto, são chamados *catetos* do triângulo ABC.

Para simplificar nossa linguagem diremos que o triângulo ABC tem hipotenusa a e catetos b e c, isto é, vamos confundir BC, AC, AB com suas respectivas medidas a, b, c. Analogamente, diremos que os ângulos internos do triângulo são $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$.

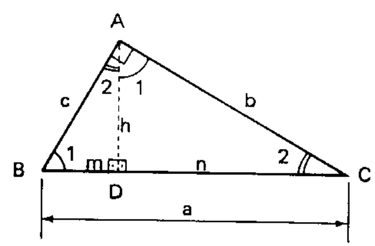
112. Neste capítulo vamos desenvolver uma teoria geométrico-trigonométrica que permite calcular as medidas de segmentos ou ângulos de um triângulo retângulo, partindo de um número mínimo de dados.

II. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

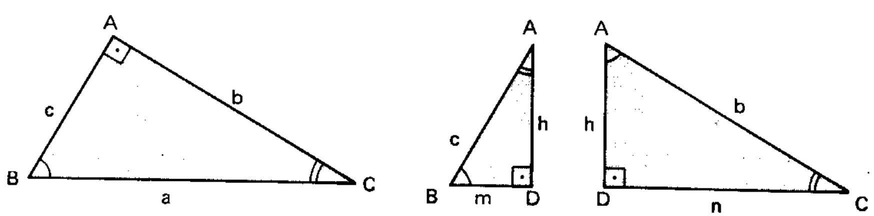
113. Provemos algumas relações notáveis entre segmentos de um mesmo triângulo retângulo.

Se tomarmos um triângulo ABC retângulo e conduzirmos AD perpendicular a BC, com D em BC, obtemos:

AD = altura relativa à hipotenusa (medida: h)
BD = projeção do cateto AB sobre a hipotenusa (medida: m)
CD = projeção do cateto AC sobre a hipotenusa (medida: n)
$\widehat{B} \equiv \widehat{1}$ e $\widehat{C} \equiv \widehat{2}$ pois $AB \perp AC$ e $BC \perp AD$



Na figura anterior podemos observar três triângulos ΔABC, ΔDBA e ΔDAC que são semelhantes por apresentarem ângulos dois a dois congruentes.



Temos, então, as seguintes propriedades:

1ª) $\Delta ABC \sim \Delta DBA \implies \dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{m}$

$$\boxed{c^2 = am}$$

$\Delta ABC \sim \Delta DAC \implies \dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{n}$

$$\boxed{b^2 = an}$$

isto é, cada cateto é média geométrica entre a hipotenusa e a projeção dele sobre ela.

2ª) $\Delta ABC \sim \Delta DBA \implies \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{h}$

$$\boxed{bc = ah}$$

isto é, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela.

3ª) $\Delta DBA \sim \Delta DAC \implies \dfrac{h}{n} = \dfrac{m}{h}$

$$\boxed{h^2 = mn}$$

isto é, a altura relativa à hipotenusa é média geométrica entre os segmentos que determina na hipotenusa.

4ª) *Teorema de Pitágoras*

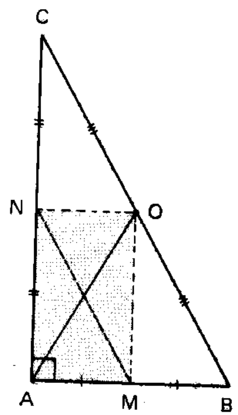
Somando membro a membro as duas primeiras relações, temos:

$$\left.\begin{matrix} c^2 = am \\ b^2 = an \end{matrix}\right\} \implies b^2 + c^2 = an + am = a(n + m) = aa = a^2$$

$$\boxed{b^2 + c^2 = a^2}$$

isto é, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

114. Outra propriedade notável dos triângulos retângulos pode ser vista se tomarmos os pontos médios dos lados (M, N, O) e ligarmos conforme a figura. O polígono AMON é um retângulo, portanto:



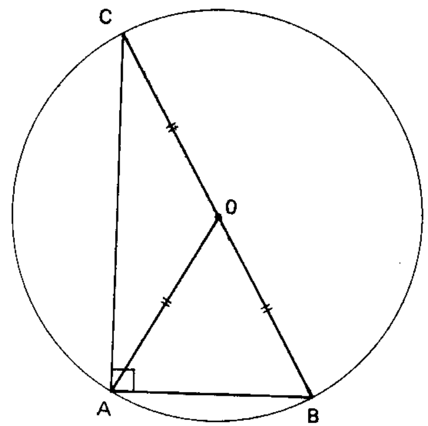
$$OA \equiv MN \equiv \frac{BC}{2}$$

isto é, a mediana relativa à hipotenusa é igual à metade desta.

Como conseqüência temos que

$$OA \equiv OB \equiv OC = \frac{a}{2}$$

e, portanto, todo triângulo retângulo pode ser inscrito em uma circunferência cujo diâmetro é a hipotenusa.



EXERCÍCIOS

C.321 Calcular os elementos indicados na figura ao lado.

Solução

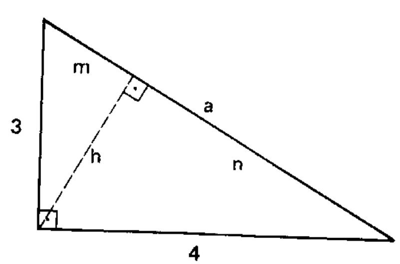
Sendo $c = 3$ e $b = 4$, vem:

$a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25 \Longrightarrow a = 5$

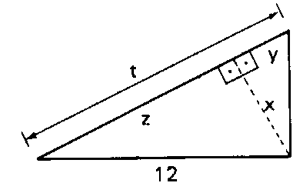
$h = \dfrac{b \cdot c}{a} = \dfrac{4 \cdot 3}{5} = \dfrac{12}{5}$,

$m = \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{9}{5}$ e

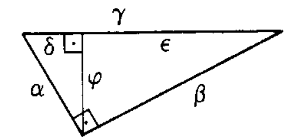
$n = \dfrac{b^2}{a} = \dfrac{16}{5}$



C.322 Calcular os elementos x, y, z, t na figura ao lado.



C.323 Escrever 6 relações métricas envolvendo elementos da figura ao lado.



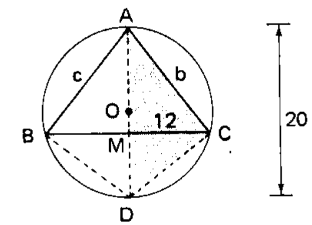
C.324 Calcular a área de um triângulo retângulo em que as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem, respectivamente, 4 e 9.

C.325 Calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo de perímetro 56 e altura $\frac{168}{25}$.

C.326 Um triângulo isósceles ABC tem base $a = 12$ e está inscrito numa circunferência de diâmetro $2R = 20$. Calcular as medidas dos lados *b* e *c* do triângulo.

Solução

Ligando o vértice A ao centro 0 da circunferência, obtemos uma reta que corta a circunferência em D. Notemos que o segmento AD é diâmetro. Notemos ainda que AD é mediatriz do segmento BC, portanto $AD \perp BC$ e $BM = MC$. Destacando o triângulo **ADC, temos:**

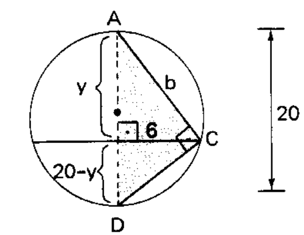


$6^2 = y(20 - y) \Longrightarrow y^2 - 20y + 36 = 0 \Longrightarrow y = 2$ ou $y = 18$

então:

$b^2 = 6^2 + y^2 \Longrightarrow b^2 = 40$ ou $b^2 = 360$

Resposta: $b = c = 2\sqrt{10}$ ou $b = c = 6\sqrt{10}$



C.327 Calcular a altura de um triângulo isósceles conhecendo o raio *R* da circunferência circunscrita e a base *a*. Dados: $R = 5$ e $a = 8$.

C.328 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base 6 tendo outro lado medindo $\sqrt{90}$.

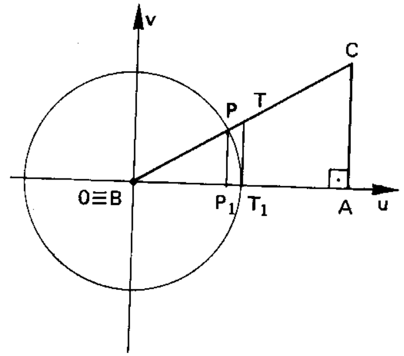
C.329 Um ponto P dista $d = 13$ do centro 0 de uma circunferência de raio $R = 5$. Se traçarmos por P uma reta tangente à circunferência no ponto T, qual a medida do segmento PT?

C.330 Calcular o lado de um octógono regular inscrito em uma circunferência de raio R.

III. PROPRIEDADES TRIGONOMÉTRICAS

115. Vamos provar as três propriedades que relacionam as medidas dos lados e as dos ângulos de um triângulo retângulo ABC.

Para isso vamos considerar uma circunferência de raio unitário e centro no vértice B e vamos fixar um sistema uOv de referência como mostra a figura.



1ª) $\Delta BPP_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{P_1P}{BP} = \frac{CA}{BC} \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}\hat{B}}{1} = \frac{b}{a} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}}$$

isto é, o seno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto ao ângulo pela hipotenusa.

2ª) $\Delta BPP_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{BP_1}{BP} = \frac{BA}{BC} \Longrightarrow \frac{\cos\hat{B}}{1} = \frac{c}{a} \Longrightarrow \boxed{\cos\hat{B} = \frac{c}{a}}$$

isto é, o cosseno de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto adjacente ao ângulo pela hipotenusa.

3ª) $\Delta BTT_1 \sim \Delta BCA$, então

$$\frac{T_1T}{OT_1} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \Longrightarrow \frac{\operatorname{tg}\hat{B}}{1} = \frac{b}{c} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c}}$$

isto é, a tangente de um ângulo agudo é igual ao quociente do cateto oposto pelo cateto adjacente ao ângulo.

116. Observações

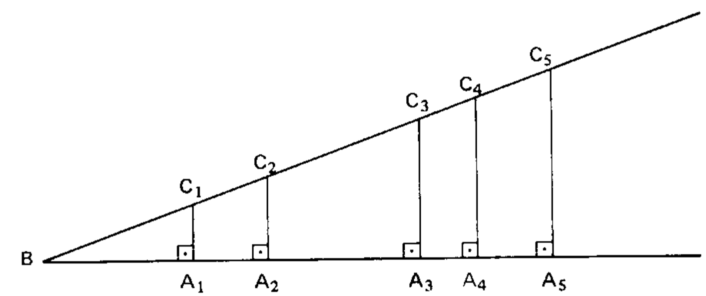
1ª) Notando que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ e $\hat{A} = 90°$, decorre $\hat{B} + \hat{C} = 90°$, isto é, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são complementares, portanto:

$$\operatorname{sen}\hat{C} = \cos\hat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\hat{C} = \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\hat{C} = \frac{1}{\operatorname{tg}\hat{B}} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}$$

2ª) Decorre das três propriedades vistas que, sendo dado um ângulo agudo $\hat{B}$, se marcarmos sobre um de seus lados os pontos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ e conduzirmos por eles as perpendiculares A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3, ... (conforme a figura abaixo), temos:



$$\operatorname{sen}\hat{B} = \frac{A_1C_1}{BC_1} = \frac{A_2C_2}{BC_2} = \frac{A_3C_3}{BC_3} = \ldots$$

(fixado $\hat{B}$, o *cateto oposto a* $\hat{B}$ e a *hipotenusa* são diretamente proporcionais).

$$\cos\hat{B} = \frac{BA_1}{BC_1} = \frac{BA_2}{BC_2} = \frac{BA_3}{BC_3} = \ldots$$

(fixado $\hat{B}$, o *cateto adjacente a* $\hat{B}$ e a *hipotenusa* são diretamente proporcionais).

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{A_1C_1}{BA_1} = \frac{A_2C_2}{BA_2} = \frac{A_3C_3}{BA_3} = \ldots$$

(fixado $\hat{B}$, os *catetos oposto e adjacente* a $\hat{B}$ são diretamente proporcionais).

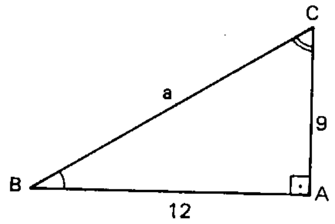
EXERCÍCIOS

C.331 Calcular os ângulos internos de um triângulo retângulo cujos catetos são $b = 9$ e $c = 12$.

Solução

$\operatorname{tg}\widehat{B} = \frac{b}{c} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\operatorname{tg}\widehat{C} = \frac{c}{b} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$



Resposta: $\widehat{B} = \operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}$ e $\widehat{C} = \operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$

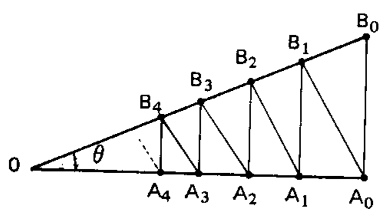
C.332 Calcular os lados de um triângulo retângulo sabendo que a altura relativa à hipotenusa é $h = 4$ e um ângulo agudo é $\widehat{B} = 30°$.

C.333 Calcular os lados de um triângulo retângulo sabendo que a altura relativa à hipotenusa mede 4 e forma ângulo de 15° com o cateto b.

C.334 Calcular os catetos de um triângulo retângulo ABC sabendo que está inscrito em uma circunferência de raio 3 e tem ângulos agudos tais que $\widehat{B} = 2\widehat{C}$.

C.335 Calcular os ângulos agudos de um triângulo retângulo de hipotenusa 20, sabendo que a mediana relativa a um dos catetos mede 15.

C.336 (FFCLUSP-66) Na figura ao lado, os ângulos $O\widehat{A}_iB_i$ e $O\widehat{B}_{i+1}A_i$, $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ são retos. Quanto vale a soma dos segmentos A_0B_0, A_1B_1, A_2B_2, ... em função de A_0B_0 e de θ?



C.337 Calcular o ângulo formado pela diagonal e o menor lado de um retângulo cujos lados estão na razão $\frac{3}{4}$.

C.338 Calcular a área de um triângulo isósceles ABC cuja base é $a = 8$, sabendo que $\widehat{A} = 45°$.

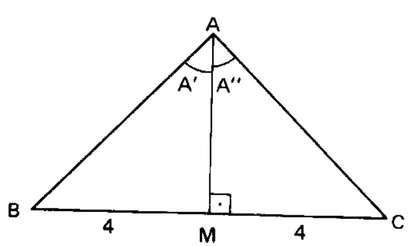
Solução

Traçando a altura AM, o triângulo ABC fica dividido em duas partes congruentes onde $\widehat{A}' = \widehat{A}'' = 22°30'$, $BM = MC = 4$.

$\operatorname{tg} 22°30' = \frac{MC}{AM} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow AM = \frac{MC}{\operatorname{tg} 22°30'} = \frac{4\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

$S = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{16\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$



C.339 Calcular a altura de um triângulo isósceles de perímetro $2p = 36$, sabendo que os ângulos adjacentes à base são iguais a $\operatorname{arc\,cos}\frac{2}{7}$.

C.340 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo isósceles de base $a = 8$ e ângulo oposto à base $\widehat{A} = 120°$.

C.341 Um reta determina, sobre uma circunferência de raio 10, uma corda de comprimento 16. Qual é a medida do ângulo central sob o qual se vê a corda?

C.342 Determinar o ângulo $\widehat{B}$ de um triângulo ABC retângulo em A sabendo que se verifica a relação $\frac{1}{c} + \frac{2}{b} = \frac{\sqrt{5}}{h}$, onde h é a altura relativa à hipotenusa.

C.343 Em um triângulo ABC retângulo em A sabe-se que o ângulo agudo formado pelas medianas BM e CN é $\theta = 30°$. Calcular o ângulo $\widehat{C}$.

C.344 Em um triângulo ABC retângulo em A traçam-se as bissetrizes internas BB' e CC'. Sabendo que $AB' = 1$ e $AC' = 1$, calcular o ângulo $\widehat{B}$ e a hipotenusa a.

C.345 Calcular os ângulos agudos do triângulo retângulo de hipotenusa $a = 13$m, sabendo que o raio da circunferência inscrita é $r = 2$.

C.346 Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de 60°. Afastando-se do edifício mais 30 m, passa a ver o edifício sob ângulo de 45°. Qual é a altura do prédio?

Solução

No triângulo BXY, temos

$\operatorname{tg} 60° = \frac{h}{\ell} \Longrightarrow \ell = \frac{h}{\sqrt{3}}$

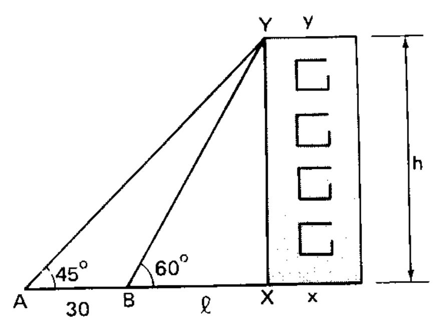
No triângulo AXY, temos:

$\operatorname{tg} 45° = \frac{h}{\ell + 30} \Longrightarrow h = \ell + 30$

então

$h = \frac{h}{\sqrt{3}} + 30 \Longrightarrow h = \frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

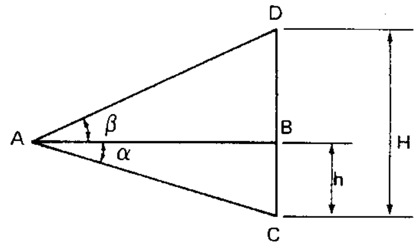
Resposta: $\frac{30\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ m



C.347 (MAUÁ-68) Para medir a altura da torre vertical DE toma-se, no plano horizontal que passa pela sua base D, o segmento AB de comprimento 12 m e cujo ponto médio é C. Medem-se os ângulos $D\widehat{A}E$, $D\widehat{B}E$ e $D\widehat{C}E$ verificando-se que $D\widehat{A}E = D\widehat{B}E = 45°$ e $D\widehat{C}E = 60°$.
Determinar a altura da torre.

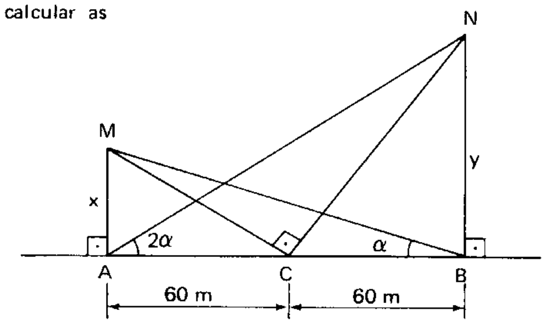
C.348 Calcular a distância entre os parapeitos de duas janelas de um arranha-céu, conhecendo os ângulos (α e β) sobre os quais são observadas de um ponto O do solo, a distância d do prédio.

C.349 (MAUÁ-65) Para obter a altura H de uma chaminé, um engenheiro, com um aparelho especial, estabeleceu a horizontal AB e mediu os ângulos α e β tendo a seguir medido BC = h. Determinar a altura do chaminé.



C.350 (MAUÁ-67) Um observador encontra-se na Via Anhanguera em trecho retilíneo, horizontal e situado no mesmo plano vertical que contém a torre de TV do canal 13, localizada no pico do Jaraguá. De duas posições A e B desse trecho retilíneo e distantes 60 m uma da outra, o observador vê a extremidade superior da torre, respectivamente, sob os ângulos de $30°$ e $31°53'$. O aparelho utilizado para medir os ângulos foi colocado a 1,50 m acima da pista de concreto que está a 721,50m acima do nível do mar. Determinar a altura da torre em relação ao nível do mar. Dado: $\operatorname{tg} 31°53' \simeq 0{,}62$.

C.351 (LINS-66) Tendo em vista as relações descritas na figura ao lado calcular as distâncias *x* e *y*.



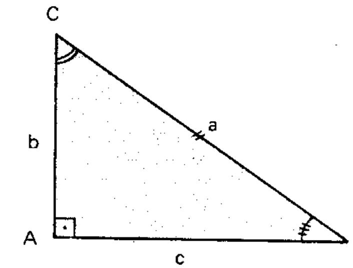
IV. RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS RETÂNGULOS

117. Resolver um triângulo retângulo significa calcular seus elementos principais, isto é, seus ângulos agudos ($\hat{B}$ e $\hat{C}$) e seus lados (a, b, c). Para obter esses elementos é necessário que sejam dadas duas informações sobre o triângulo, sendo uma delas, pelo menos, a medida de um segmento ligado ao triângulo (lado, mediana, mediatriz, etc).

Há cinco problemas clássicos de resolução de triângulos retângulos, que abordaremos com especial destaque.

118. 1º problema

Resolver um triângulo retângulo, sendo dados: a hipotenusa (*a*) e um dos ângulos agudos ($\hat{B}$).



Solução

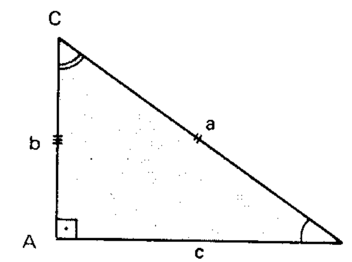
$c = a \cdot \cos \hat{B}$

$b = a \cdot \operatorname{sen} \hat{B}$

$\hat{C} = 90° - \hat{B}$

119. 2º problema

Resolver um triângulo retângulo, sendo dados: a hipotenusa (a) e um dos catetos (b).



Solução

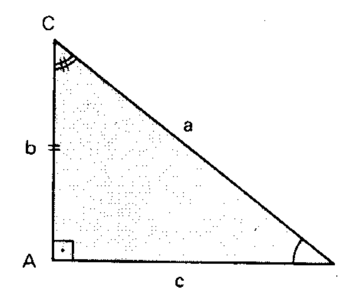
$$c^2 = a^2 - b^2 \Longrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{a} \Longrightarrow \hat{B} = \operatorname{arc\,sen} \frac{b}{a}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{b}{a} \Longrightarrow \hat{C} = \operatorname{arc\,cos} \frac{b}{a}$$

120. 3º problema

Resolver um triângulo retângulo, sendo dados: um cateto (*b*) e o ângulo adjacente a ele ($\hat{C}$).



Solução

$c = b \cdot \operatorname{tg} \hat{C}$

$$a = \frac{b}{\cos \hat{C}}$$

$\hat{B} = 90° - \hat{C}$

121. **4º problema**

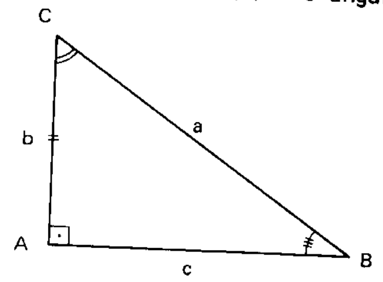
Resolver um triângulo retângulo, sendo dados um cateto (b) e o ângulo oposto a ele $(\widehat{B})$.

Solução

$$c = \frac{b}{\operatorname{tg} \widehat{B}}$$

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}}$$

$$\widehat{C} = 90^\circ - \widehat{B}$$



122. **5º problema**

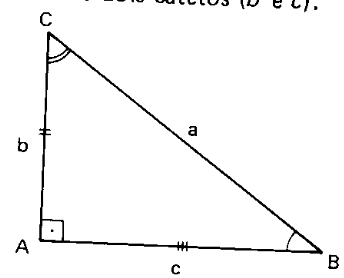
Resolver um triângulo retângulo, sendo dados os dois catetos $(b$ e $c)$.

Solução

$$a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{b}{c} \Longrightarrow \widehat{B} = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{C} = \frac{c}{b} \Longrightarrow \widehat{C} = \operatorname{arc\,tg} \frac{c}{b}$$



EXERCÍCIOS

C.352 Resolver um triângulo retângulo ABC conhecendo a medida da bissetriz interna $S_b = 5$ e o ângulo $\widehat{C} = 30^\circ$.

Solução

É imediato que $\widehat{B} = 60^\circ$ e $\dfrac{\widehat{B}}{2} = 30^\circ$.

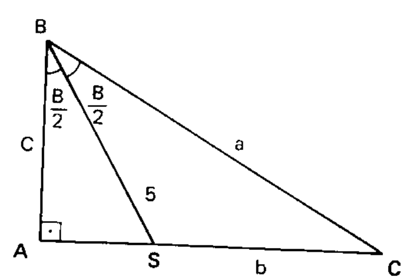
No triângulo retângulo ABS, temos:

$$c = 5 \cdot \cos \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

então

$$a = \frac{c}{\cos \widehat{B}} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{3}$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{75 - \frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$$



C.353 Resolver um triângulo retângulo ABC sendo dados $b = 3$ e $a - c = \sqrt{3}$.

C.354 Resolver um triângulo ABC retângulo em A sabendo que $a + b = 18$ e $a + c = 25$.

C.355 Resolver um triângulo retângulo ABC sabendo que $a = 4$ e a medida da bissetriz interna BE é $S_b = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

C.356 Resolver um triângulo retângulo conhecendo a altura $h = 1$ relativa à hipotenusa e o perímetro $2p = 2\sqrt{2} + 2$.

C.357 Resolver um triângulo isósceles ABC sabendo que a altura relativa à base BC mede $h = 24$ e o perímetro é $2p = 64$.

C.358 Resolver um triângulo retângulo ABC conhecendo o raio $r = 2$ da circunferência inscrita e a altura $h = \dfrac{60}{13}$ relativa à hipotenusa.

C.359 Resolver um triângulo retângulo ABC conhecendo a altura $h = 2$ relativa à hipotenusa e o raio $r' = 2\sqrt{2} + 2$ da circunferência ex-inscrita situada no ângulo reto.

CAPÍTULO X

TRIÂNGULOS QUAISQUER

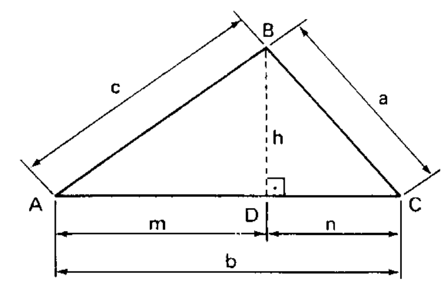
I. PROPRIEDADES TRIGONOMÉTRICAS

123. Lei dos cossenos

Em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o duplo produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

Demonstração

1º) Seja ABC um triângulo com $\hat{A} < 90°$.



No $\triangle BCD$, que é retângulo:

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (I)$$

No $\triangle BAD$, que é retângulo:

$$h^2 = c^2 - m^2 \quad (II)$$

Temos também:

$$n = b - m \quad (III)$$

Levando (III) e (II) em (I):

$$a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2 \implies a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$$

Mas, no triângulo BAD: $m = c \cdot \cos \hat{A}$.

Logo: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$

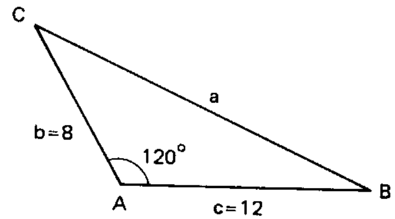
C.360 Dois lados de um triângulo medem 8 m e 12 m e formam entre si um ângulo de 120°. Calcular o terceiro lado.

Solução

Adotando a notação da figura ao lado e aplicando a lei dos cossenos, temos:

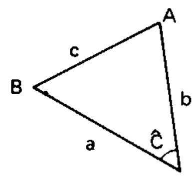
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} =$
$= 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \cos 120° =$
$= 64 + 144 + 96 = 304$

então $a = \sqrt{304} = 4\sqrt{19}$ m.



C.361 (FEI-77) Calcular c, sabendo que

$a = 4$
$b = 3\sqrt{2}$
$\widehat{C} = 45°$



C.362 (MAPOFEI-76) Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8 m e 12 m e formam um ângulo de 60°. Calcular as diagonais.

C.363 Se um paralelogramo tem lados medindo 4 m e 5 m e formando entre si um ângulo de 30°, qual é o ângulo que a diagonal maior forma com o menor lado?

C.364 Um triângulo tem lados $a = 10$ m, $b = 13$ m e $c = 15$ m. Calcular o ângulo $\widehat{A}$ do triângulo.

Solução

Da lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \Longrightarrow \cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

então:

$$\cos \widehat{A} = \frac{13^2 + 15^2 - 10^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \frac{169 + 225 - 100}{390} = \frac{294}{390} = \frac{49}{65}$$

portanto $\widehat{A} = \text{arc cos } \dfrac{49}{65}$

C.365 Calcular os três ângulos internos de um triângulo ABC sabendo que $a = 2$, $b = \sqrt{6}$ e $c = \sqrt{3} + 1$.

C.366 Os lados a, b, c de um triângulo ABC são diretamente proporcionais aos números 5, 7 e 9, respectivamente. Calcular o ângulo $\widehat{B}$.

C.367 (EPUSP-60) Demonstrar que se os lados de um triângulo têm medidas expressas por números racionais, então os cossenos dos ângulos internos também são números racionais.

C.368 (EPUSP-56) Os lados de um triângulo são dados pelas expressões:

$$a = x^2 + x + 1, \quad b = 2x + 1 \quad e \quad c = x^2 - 1.$$

Demonstrar que um dos ângulos do triângulo mede 120°.

C.369 Calcular o lado c de um triângulo ABC sendo dados $\widehat{A} = 120°$, $b = 1$ e $\dfrac{a}{c} = 2$.

C.370 (EPUSP-60) Determinar os comprimentos dos lados de um triângulo que tem para vértices os centros dos quadrados construídos sobre os lados de um triângulo retângulo de lados 6, 8 e 10.

C.371 (MAUÁ-67) Provar que num triângulo ABC retângulo em A, vale a relação $(a - b)^2 = c^2 - 4ab \cdot \text{sen}^2 \dfrac{\widehat{C}}{2}$.

C.372 Qual é a relação entre os lados a, b, c de um triângulo ABC para que se tenha:

a) ABC retângulo?

b) ABC acutângulo?

c) ABC obtusângulo?

Solução

Admitamos que *a* seja o maior lado do triângulo ABC, isto é, $a \geqslant b$ e $a \geqslant c$. Sabemos da Geometria que ao maior lado opõe-se o maior ângulo do triângulo, portanto, $\widehat{A} \geqslant \widehat{B}$ e $\widehat{A} \geqslant \widehat{C}$. Assim, temos:

ΔABC é retângulo $\Longleftrightarrow \widehat{A} = 90°$
ΔABC é acutângulo $\Longleftrightarrow 0° < \widehat{A} < 90°$
ΔABC é obtusângulo $\Longleftrightarrow 90° < \widehat{A} < 180°$

Por outro lado, da lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \widehat{A} \Longrightarrow \cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Então, vem:

a) $\widehat{A} = 90° \Longleftrightarrow \cos \widehat{A} = 0 \Longleftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = 0 \Longleftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

b) $0° < \widehat{A} < 90° \Longleftrightarrow \cos \widehat{A} > 0 \Longleftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$

c) $90° < \widehat{A} < 180° \Longleftrightarrow \cos \widehat{A} < 0 \Longleftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 < 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

Conclusão: um triângulo ABC é respectivamente retângulo, acutângulo ou obtusângulo, conforme o quadrado de seu maior lado seja igual, menor ou maior que a soma dos quadrados dos outros dois lados.

C.373 Classificar segundo as medidas dos ângulos internos os triângulos cujos lados são:

a) 17, 15, 8   b) 5, 10, 6   c) 6, 7, 8

C.374 (EPUSP-61) Os lados de um triângulo obtusângulo estão em progressão geométrica crescente. Determinar a razão da progressão.

2º) Seja ABC um triângulo com $90° < \hat{A} < 180°$

No ΔBCD, que é retângulo

$$a^2 = n^2 + h^2 \quad (I)$$

No ΔBAD, que é retângulo:

$$h^2 = c^2 - m^2 \quad (II)$$

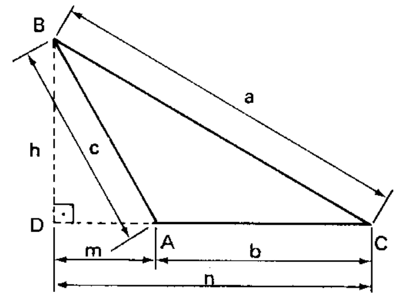
Temos também:

$$n = b + m \quad (III)$$

Levando (III) e (II) em (I):

$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2$$

$$\Longrightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$



Mas, no ΔBAD, $m = c \cdot \cos(180° - \hat{A}) \Longrightarrow m = -c \cdot \cos \hat{A}$.

Logo: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}}$

3º) Analogamente, podemos provar que:

$$\boxed{\begin{array}{l} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \end{array}}$$

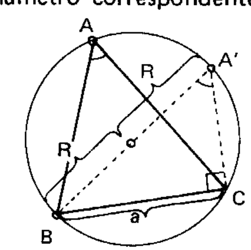
124. Lei dos senos

Em qualquer triângulo, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto é constante e igual à medida do diâmetro da circunferência circunscrita.

Demonstração

Seja ABC um triângulo qualquer, inscrito numa circunferência de raio R. Por um dos vértices do triângulo (B), tracemos o diâmetro correspondente BA' e liguemos A' com C.

Sabemos que $\hat{A} = \hat{A}'$ por determinarem na circunferência a mesma corda BC. O triângulo A'BC é retângulo em C por estar inscrito numa semi-circunferência.



Temos, então:

$$a = 2R \cdot \text{sen } \hat{A}' \Longrightarrow a = 2R \cdot \text{sen } \hat{A} \Longrightarrow \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = 2R$$

Analogamente: $\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = 2R$ e $\dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R$

Donde concluímos a tese:

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} = 2R}$$

EXERCÍCIOS

C.375 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC em que $a = 15$ cm e $\hat{A} = 30°$.

Solução

Da lei dos senos temos:

$$2R = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{15}{\text{sen } 30°} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 30 \text{ cm}$$

então $R = 15$ cm.

C.376 Calcular os lados *b* e *c* de um triângulo ABC no qual $a = 10$, $\hat{B} = 30°$ e $\hat{C} = 45°$.

Solução

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \Longrightarrow \hat{A} = 180° - 30° - 45° = 105°$

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \Longrightarrow b = \frac{a \cdot \text{sen } \hat{B}}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{10 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{20}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \Longrightarrow c = \frac{a \cdot \text{sen } \hat{C}}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

C.377 (EPUSP-61) Quais são os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo ABC para o qual $\hat{A} = 15°$, $\text{sen } \hat{B} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\text{sen } \hat{C} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$?

C.378 Calcular os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ de um triângulo em que $a = 1$, $b = \sqrt{3} + 1$ e $\hat{A} = 15°$.

C.379 Em um triângulo ABC sabe-se que $a = 2b$ e $\hat{C} = 60°$. Calcular os outros dois ângulos.

C.380 Calcular os ângulos de um triângulo ABC sabendo que $\frac{b}{c} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ e $\hat{C} = 2\hat{A}$.

C.381 Calcular o lado c de um triângulo ABC em que $a = 6$ m, $b = 3$ m e $\hat{A} = 3\hat{B}$.

C.382 (MAPOFEI-71) São conhecidos os seguintes elementos de um triângulo ABC: o perímetro $2p$ e os ângulos $A = \alpha$, $B = \beta$

a) Descrever um processo de construção do triângulo.
b) Calcular os comprimentos de seus lados.

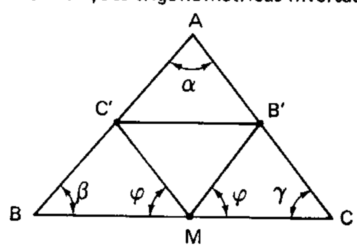
C.383 (EPUSP-62) Demonstrar que num quadrilátero ABCD onde $A\hat{D}B = A\hat{C}B$, tem-se:

$$AB = \frac{CD \cdot \text{sen}\, A\hat{D}B}{\text{sen}\, C\hat{B}D}$$

C.384 (MACK-66) O lado de um triângulo equilátero de lado 3 m é dividido em três partes iguais. Determinar os 3 ângulos que se obtêm unindo os pontos de divisão ao vértice oposto (as respostas devem ser dadas em termos de funções trigonométricas inversas).

C.385 (MACK-67) Do ponto médio dos lados AB e AC de um triângulo ABC traçam-se duas retas que se cortam num ponto M do terceiro lado BC e que formam com este lado ângulos iguais cujo valor é φ.

Prove que: $\text{cotg}\, \varphi = \frac{\text{sen}\, \alpha}{2\, \text{sen}\, \beta \cdot \text{sen}\, \gamma}$



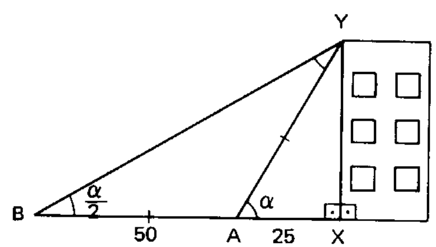
C.386 Um observador colocado a 25 m de um prédio vê o edifício sob certo ângulo. Afastando-se em linha reta mais 50 m, nota que o ângulo de visualização é metade do anterior. Qual é a altura do edifício?

Solução

No triângulo ABY o ângulo externo α é igual à soma dos internos não adjacentes $\frac{\alpha}{2}$ e $B\hat{Y}A$, então:

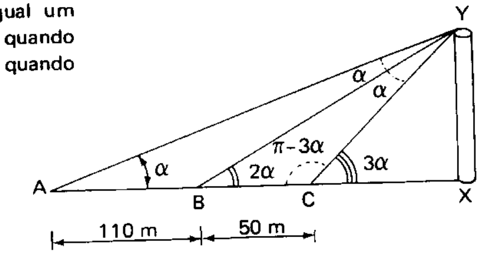
$$\alpha = \frac{\alpha}{2} + B\hat{Y}A \implies B\hat{Y}A = \frac{\alpha}{2}.$$

Assim o triângulo ABY é isósceles, portanto, $AY = AB = 50$ m.
No triângulo retângulo AXY, temos:



$$XY^2 = AY^2 - AX^2 = 50^2 - 25^2 = 1875 \implies XY = 25\sqrt{3}\ \text{m}.$$

C.387 (EPUSP-50) O ângulo sob o qual um observador vê uma torre duplica quando ele se aproxima 110 m e triplica quando se aproxima mais 50 m.
Calcular a altura da torre.



C.388 (MAUÁ-66) Sendo a, b dois lados de um triângulo e $\hat{A}$, $\hat{B}$ os ângulos opostos correspondentes, provar que:

$$a^2 \cdot \cos 2B - b^2 \cdot \cos 2A = a^2 - b^2$$

C.389 Calcular o ângulo $\hat{B}$ ($\hat{B} > 45°$) de um triângulo retângulo ABC sabendo que $a = 4$ e a medida da bissetriz interna AB é $S_a = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

C.390 Em um triângulo ABC retângulo em $\hat{A}$ sabe-se que $\frac{S_b \cdot S_c}{a^2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ onde S_b e S_c são as medidas das bissetrizes dos ângulos agudos. Calcular $\hat{B}$.

C.391 Calcular o ângulo $\hat{B}$ de um triângulo isósceles ABC conhecendo a base $a = 1$ e a bissetriz $S_b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

C.392 (MAPOFEI-70) É dado um quarto de circunferência de centro O e raio r, limitado pelos pontos A e B (ver figura). Sendo P um ponto do arco AB, H projeção ortogonal de P sobre OB e 2α o ângulo $A\hat{O}P$.

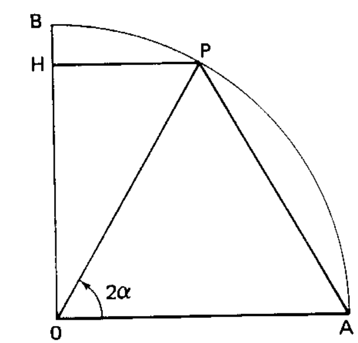
a) mostrar que se $AP - HP = r$, então $\cos \alpha = \text{tg}\, \alpha$;
b) verificada a condição do item anterior, determinar $\text{sen}\, \alpha$;
c) sendo α um ângulo compreendido entre $0°$ e $90°$, tal que

$$\text{sen}\, \alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

determiná-lo com a precisão de um segundo arco, utilizando a tabela abaixo.

ÂNGULO	SENO
38°8'	0,617494
38°9'	0,617722
38°10'	0,617951
38°11'	0,618180
38°12'	0,618408

Nota: $\sqrt{5} \cong 2{,}236068$



125. Teorema

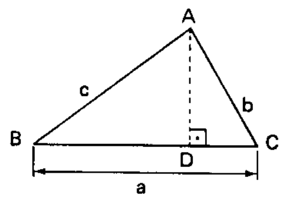
Em qualquer triângulo, valem as relações seguintes:

$$\boxed{\begin{aligned} a &= b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B} \\ b &= a \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{A} \\ c &= b \cdot \cos \hat{A} + c \cdot \cos \hat{B} \end{aligned}}$$

Demonstração

Vamos provar só a primeira delas:

1º) Seja ABC um triângulo com $\hat{B} < 90^\circ$ e $\hat{C} < 90^\circ$



No $\triangle ABD$, que é retângulo: $BD = c \cdot \cos \hat{B}$

No $\triangle ADC$, que é retângulo: $DC = b \cdot \cos \hat{C}$

então:

$$a = BD + DC = c \cdot \cos \hat{B} + b \cdot \cos \hat{C}$$

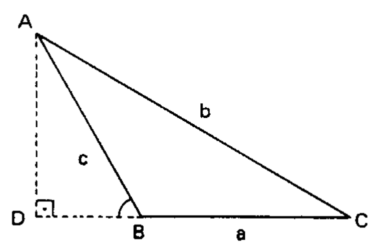
2º) Seja ABC um triângulo com $90^\circ < \hat{B} < 180^\circ$ ou $90^\circ < \hat{C} < 180^\circ$

No $\triangle ABD$, que é retângulo:

$BD = c \cdot \cos (180^\circ - \hat{B})$

No $\triangle ADC$, que é retângulo:

$DC = b \cdot \cos \hat{C}$



então:

$$a = DC - DB = b \cdot \cos \hat{C} - c \cdot \cos (180^\circ - \hat{B}) =$$
$$= b \cdot \cos \hat{C} + c \cdot \cos \hat{B}$$

126. Teorema

Em qualquer triângulo, a área é igual ao semi-produto de dois lados multiplicado pelo seno do ângulo que eles formam.

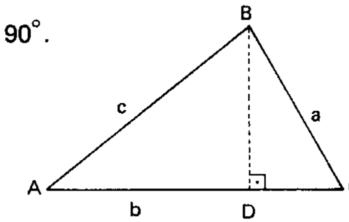
Demonstração

1º) Seja ABC um triângulo com $\hat{A} < 90^\circ$.

No $\triangle ADB$ que é retângulo, temos:

$$DB = c \cdot \text{sen } \hat{A}$$

então:



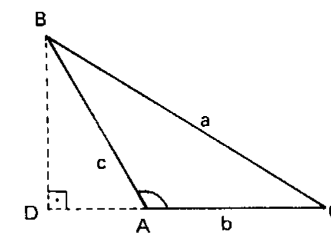
$$\boxed{S = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{bc}{2} \cdot \text{sen } \hat{A}}$$

2º) Seja ABC um triângulo com $90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$.

No $\triangle ABD$ que é retângulo, temos:

$DB = c \cdot \text{sen } (180^\circ - \hat{A}) = c \cdot \text{sen } \hat{A}$

então:



$$\boxed{S = \frac{AC \cdot DB}{2} = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen } \hat{A}}$$

3º) Analogamente provamos que:

$$\boxed{\begin{aligned} S &= \frac{a \cdot b}{2} \cdot \text{sen } \hat{C} \\ S &= \frac{a \cdot c}{2} \cdot \text{sen } \hat{B} \end{aligned}}$$

127. Teorema

Em qualquer triângulo, a área é igual ao produto dos três lados dividido pelo quádruplo do raio da circunferência circunscrita.

Demonstração

De acordo com a lei dos senos, temos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = 2R \Longrightarrow \text{sen}\,\hat{A} = \frac{a}{2R} \qquad (1)$$

Pelo teorema anterior, temos:

$$S = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \text{sen}\,\hat{A} \qquad (2)$$

Substituindo (1) em (2), decorre

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R}}$$

128. Teorema

Em qualquer triângulo não isósceles nem retângulo valem as relações seguintes:

$$\boxed{\frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}}, \quad \frac{a+c}{a-c} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{\hat{A}+\hat{C}}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{\hat{A}-\hat{C}}{2}}, \quad \frac{b+c}{b-c} = \frac{\text{tg}\,\dfrac{\hat{B}+\hat{C}}{2}}{\text{tg}\,\dfrac{\hat{B}-\hat{C}}{2}}}$$

Demonstração

Partindo da lei dos senos e usando propriedade das proporções, temos:

$$\frac{a}{\text{sen}\,\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\,\hat{B}} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{\text{sen}\,\hat{A}}{\text{sen}\,\hat{B}} \Longrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{sen}\,\hat{A} + \text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{A} - \text{sen}\,\hat{B}} =$$

$$= \frac{2\,\text{sen}\left(\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}{2\,\text{sen}\left(\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)} = \frac{\text{tg}\left(\dfrac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)}{\text{tg}\left(\dfrac{\hat{A}-\hat{B}}{2}\right)}$$

As outras duas são provadas de modo análogo.

EXERCÍCIOS

C.393 Calcular o lado *a* de um triângulo ABC sabendo a medida da altura h_a e as medidas dos ângulos α e β que h_a forma com *c* e *b*, respectivamente.

C.394 Calcular a área de um triângulo que tem dois lados de medidas conhecidas, b = 7 m e c = 4 m, formando entre si um ângulo de 60°.

C.395 (MAPOFEI-75) Calcular a área do triângulo ABC, sendo $\overline{AB}$ = 4 cm, $\hat{A} = 30°$ e $\hat{C} = 45°$.

C.396 (MAPOFEI-74) As diagonais de um paralelogramo medem 10 m e 20 m e formam um ângulo de 60°. Achar a área do paralelogramo.

C.397 Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC de área 20 cm², o qual tem dois lados formando ângulo agudo e com medidas 8 m e 10 m, respectivamente.

C.398 Sejam *a* e *b* as medidas de dois segmentos BC e CA que têm uma extremidade comum e formam entre si um ângulo θ. Pede-se:

a) esboçar o gráfico da área S do triângulo ABC em função de θ;
b) dizer para que valor de θ é máximo o valor de S;
c) estabelecer qual é o acréscimo porcentual em S quando θ passa de 30° para 120°.

C.399 Demonstrar que em todo triângulo ABC valem as seguintes relações:

I) $a \cdot \text{sen}\,(\hat{B} - \hat{C}) + b \cdot \text{sen}\,(\hat{C} - \hat{A}) + c \cdot \text{sen}\,(\hat{A} - \hat{B}) = 0$

II) $a \cdot \cos\,(\hat{B} - \hat{C}) = b \cdot \cos\hat{B} + c \cdot \cos\hat{C}$

III) $(b + c) \cdot \cos\hat{A} + (c + a) \cdot \cos\hat{B} + (a + b) \cdot \cos\hat{C} = a + b + c$

IV) $\dfrac{a^2 - b^2}{c^2} = \dfrac{\text{sen}\,(\hat{A} - \hat{B})}{\text{sen}\,(\hat{A} + \hat{B})}$

V) $\dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{c^2 + b^2 - a^2} = \dfrac{\text{tg}\,\hat{A}}{\text{tg}\,\hat{B}} \qquad (\hat{B} \neq 90°)$

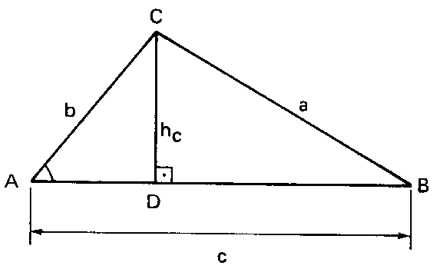
VI) $a = \dfrac{(b + c) \cdot \text{sen}\,\dfrac{\hat{A}}{2}}{\cos\,\dfrac{\hat{B} - \hat{C}}{2}}$

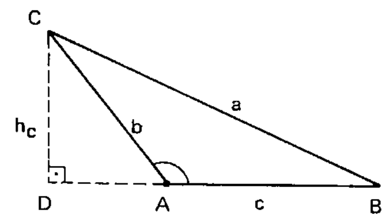
VII) $a = \dfrac{(b - c) \cdot \cos\,\dfrac{\hat{A}}{2}}{\text{sen}\,\dfrac{\hat{B} - \hat{C}}{2}} \qquad (\hat{B} \neq \hat{C})$

II. PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Vamos deduzir fórmulas que permitem o cálculo de segmentos notáveis de um triângulo (alturas, medianas, bissetrizes internas, raio da circunferência circunscrita, etc) tendo apenas as medidas dos lados e dos ângulos internos.

128. Alturas





No triângulo ADC retângulo, temos:

$h_c = b \cdot \text{sen}\,\widehat{A}$

então

$$h_c^2 = b^2 \cdot \text{sen}^2\,\widehat{A} = b^2(1 - \cos^2\widehat{A}) = b^2 - b^2 \cdot \cos^2\widehat{A} =$$

$$= b^2 - b^2 \cdot \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} =$$

$$= \frac{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} =$$

$$= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2} =$$

$$= \frac{[(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]}{4c^2} =$$

$$= \frac{(b + c + a)(b + c - a)(a - b + c)(a + b - c)}{4c^2} =$$

$$= \frac{2p(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)}{4c^2} = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{c^2}$$

portanto

$$\boxed{h_c = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}$$

De maneira análoga, teríamos:

$$\boxed{h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \quad \text{e} \quad h_b = \frac{2}{b} \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}$$

130. Área

Das fórmulas que dão as alturas decorre uma fórmula para a área do triângulo, chamada fórmula de Hierão:

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

então

$$\boxed{S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}$$

131. Medianas

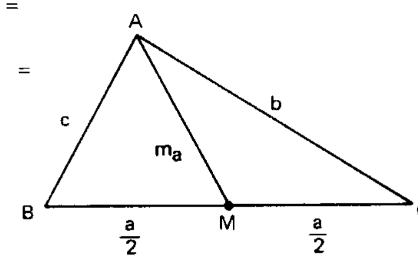
Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo AMC, temos:

$$m_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos\widehat{C} =$$

$$= b^2 + \frac{a^2}{4} - b \cdot a \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{4b^2 + a^2 - 2a^2 - 2b^2 + 2c^2}{4} =$$

$$= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$



portanto

$$\boxed{m_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}}$$

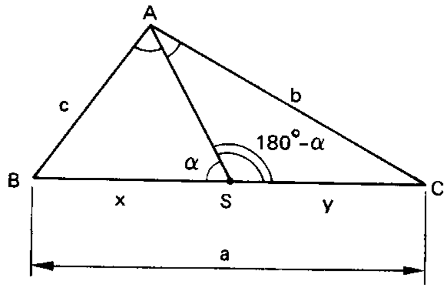
De forma análoga teríamos:

$$\boxed{m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}} \quad \text{e} \quad \boxed{m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}}$$

132. Bissetrizes internas

No triângulo ABS, temos:

$$\frac{x}{c} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{\operatorname{sen} \alpha}$$



No triângulo ACS, temos:

$$\frac{y}{b} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\hat{A}}{2}}{\operatorname{sen} \alpha}$$

Então, vem:

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{c}{b} \Longrightarrow \frac{x}{x+y} = \frac{c}{b+c} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{x}{a} = \frac{c}{b+c} \Longrightarrow x = \frac{a \cdot c}{b+c}$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo ABS, temos:

$$s_a^2 = x^2 + c^2 - 2xc \cdot \cos \hat{B} =$$

$$\left(\frac{a \cdot c}{b+c}\right)^2 + c^2 - 2 \cdot \left(\frac{a \cdot c}{b+c}\right) \cdot c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$$

$$= \frac{2b^2c^2 + c^3b + cb^3 - a^2bc}{(b+c)^2} = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{bc(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} = \frac{bc(2p)(2p-2a)}{(b+c)^2}$$

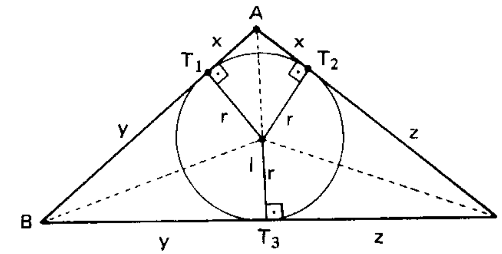
então:

$$\boxed{s_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}}$$

De forma análoga teríamos:

$$\boxed{s_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}} \quad \text{e} \quad \boxed{s_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}}$$

133. Raio da circunferência inscrita



Ligando cada vértice do triângulo ABC com o centro I da circunferência, dividimos ABC em três triângulos ABI, ACI e BCI, então:

$$S_{ABC} = S_{ABI} + S_{ACI} + S_{BCI} =$$

$$= \frac{c \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = p \cdot r$$

então:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = p \cdot r$$

portanto

$$\boxed{r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}$$

Uma outra forma de calcular r seria notar que:

$$\operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2} = \frac{T_1 I}{AT_1} = \frac{r}{x}, \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2} = \frac{T_1 I}{BT_1} = \frac{r}{y}, \quad \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2} = \frac{T_2 I}{CT_2} = \frac{r}{z} \quad (1)$$

e mais:

$$x + y = c, \quad y + z = a, \quad z + x = b$$

portanto, resolvendo o sistema, vem:

$$x = \frac{b+c-a}{2} = p - a, \quad y = \frac{a+c-b}{2} = p - b, \quad z = \frac{a+b-c}{2} = p - c \quad (2)$$

e, finalmente, substituindo (2) em (1) vem:

$$\boxed{r = (p-a) \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{A}}{2}} \quad \boxed{r = (p-b) \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{B}}{2}} \quad \boxed{r = (p-c) \cdot \operatorname{tg} \frac{\hat{C}}{2}}$$

134. Raio da circunferência circunscrita

Vimos anteriormente que:

$$S = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

então

$$\boxed{R = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}}$$

EXERCÍCIOS

C.400 Calcular as alturas, as medianas, as bissetrizes internas e os raios das circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo cujos lados medem 4, 6 e 8.

C.401 Os lados de um triângulo ABC são $a = 5$, $b = 6$ e $c = 7$. Calcular a medida da mediana m_a e o ângulo agudo que ela forma com o lado BC.

C.402 Calcular a medida da bissetriz interna S_a do triângulo ABC em que $\hat{A} = 30°$, $b = 30$ m e $c = 15$ m.

C.403 Calcular os raios das circunferências inscrita e circunscrita a um triângulo ABC no qual $a = 13$, $b = 4$ e $\cos\hat{C} = -\frac{5}{13}$.

C.404 Designando por r_a, r_b e r_c os raios das circunferências ex-inscritas ao triângulo ABC nos ângulos A, B e C, respectivamente, provar que:

I) $r_a = p \cdot \text{tg}\,\frac{\hat{A}}{2} = (p-b)\cdot\text{cotg}\,\frac{\hat{C}}{2} = (p-c)\cdot\text{cotg}\,\frac{\hat{B}}{2}$

II) $r_b = p \cdot \text{tg}\,\frac{\hat{B}}{2} = (p-a)\cdot\text{cotg}\,\frac{\hat{C}}{2} = (p-c)\cdot\text{cotg}\,\frac{\hat{A}}{2}$

III) $r_c = p \cdot \text{tg}\,\frac{\hat{C}}{2} = (p-a)\cdot\text{cotg}\,\frac{\hat{B}}{2} = (p-b)\cdot\text{cotg}\,\frac{\hat{A}}{2}$

C.405 Calcular os comprimentos dos lados de um triângulo isósceles conhecendo r (raio da circunferência inscrita) e r' (raio da circunferência ex-inscrita à base do triângulo).

C.406 Demonstrar que é retângulo todo triângulo no qual o raio de um círculo ex-inscrito é igual à soma dos raios dos outros dois ex-inscritos com o raio do inscrito.

C.407 Qual é a condição que os lados de um triângulo devem satisfazer para que o raio da circunferência circunscrita seja o triplo do raio da inscrita?

C.408 Sendo r o raio do círculo inscrito a um triângulo e α, β, γ as distâncias do incentro aos vértices A, B, C respectivamente, demonstrar que:

$$\frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{r} = \frac{abc}{2p}$$

C.409 Dados dois triângulos ABC e A'B'C' nos quais $\hat{A} + \hat{A}' = \pi$ e $\hat{B} = \hat{B}'$ demonstrar que $aa' = bb' + cc'$.

C.410 Provar que em todo triângulo valem as seguintes relações:

I) $S = \frac{1}{4}(a^2 \cdot \text{sen}\,2\hat{B} + b^2 \cdot \text{sen}\,2\hat{A})$

II) $S = \frac{(a^2 - b^2)\cdot\text{sen}\,\hat{A}\cdot\text{sen}\,\hat{B}}{2\cdot\text{sen}\,(\hat{A} - \hat{B})}$ $\quad(\hat{A} \neq \hat{B})$

III) $(b - c)\cdot\text{cotg}\,\frac{\hat{A}}{2} + (c - a)\cdot\text{cotg}\,\frac{\hat{B}}{2} + (a - b)\cdot\text{cotg}\,\frac{\hat{C}}{2} = 0$

IV) $(b^2 - a^2)\cdot\text{cotg}\,\hat{A} + (c^2 - a^2)\cdot\text{cotg}\,\hat{B} + (a^2 - b^2)\cdot\text{cotg}\,\hat{C} = 0$
$(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} \neq \frac{\pi}{2})$

V) $\text{tg}\,\frac{\hat{A}}{2}\cdot\text{tg}\,\frac{\hat{B}}{2}\cdot\text{tg}\,\frac{\hat{C}}{2} = \frac{r}{p}$

VI) $\text{tg}\,\frac{\hat{A}}{2} + \text{tg}\,\frac{\hat{B}}{2} + \text{tg}\,\frac{\hat{C}}{2} = \frac{4R + r}{p}$

VII) $\text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2}\cdot\text{sen}\,\frac{\hat{B}}{2}\cdot\text{sen}\,\frac{\hat{C}}{2} = \frac{r}{4R}$

VIII) $\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C} = 1 + \frac{r}{R}$

IX) $a\cdot\cos\hat{A} + b\cdot\cos\hat{B} + c\cdot\cos\hat{C} = \frac{2pr}{R}$

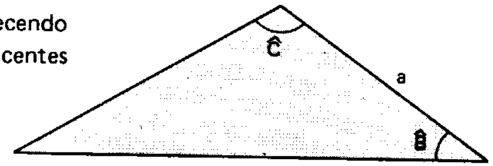
III. RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS QUAISQUER

135. Resolver um triângulo qualquer significa calcular seus elementos principais: a, b, c, $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$. Para isso é necessário que sejam dadas três informações sobre o triângulo, sendo uma delas, pelo menos, a medida de um segmento ligado ao triângulo (lado, altura, mediana, etc).

Há quatro problemas clássicos de resolução de triângulos que trataremos com destaque.

136. 1º problema

Resolver um triângulo conhecendo um lado (a) e os dois ângulos adjacentes a ele ($\hat{B}$ e $\hat{C}$).



Solução

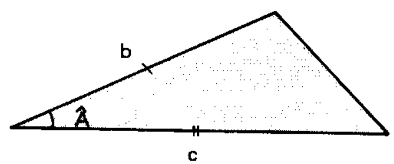
$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}),$$

$$b = \frac{a \cdot \text{sen}\,\hat{B}}{\text{sen}\,\hat{A}},$$

$$c = \frac{a \cdot \text{sen}\,\hat{C}}{\text{sen}\,\hat{A}},$$

137. 2º problema

Resolver um triângulo conhecendo dois lados (b e c) e o ângulo que eles formam ($\hat{A}$).



Solução

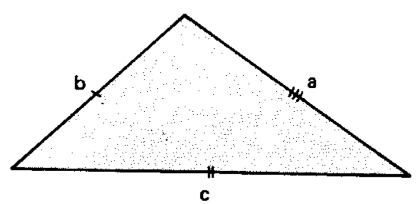
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\hat{A}}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B} \Longrightarrow \cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\hat{C} \Longrightarrow \cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

138. 3º problema

Resolver um triângulo conhecendo os três lados (a, b, c).



Solução

Da lei dos cossenos, vêm:

$$\cos\hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

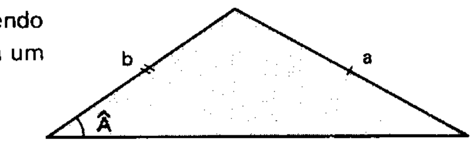
$$\cos\hat{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Notemos que o problema só tem solução se estes cossenos ficarem no intervalo $]-1, +1[$, isto é, se:

$$a < b + c, \quad b < a + c \quad \text{e} \quad c < a + b.$$

139. 4º problema

Resolver um triângulo conhecendo dois lados (a e b) e o ângulo oposto a um deles ($\hat{A}$)



Solução

$$\text{sen}\,\hat{B} = \frac{b}{a} \cdot \text{sen}\,\hat{A}$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B})$$

$$c = \frac{a \cdot \text{sen}\,C}{\text{sen}\,\hat{A}}$$

Discussão

1º caso: $b \cdot \text{sen}\,\hat{A} > a$

Então $\dfrac{b \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{a} = \text{sen}\,\hat{B} > 1 \Longrightarrow \nexists$ solução

2º caso: $b \cdot \text{sen}\,\hat{A} = a$

Então $\dfrac{b \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{a} = \text{sen}\,\hat{B} = 1 \Longrightarrow \hat{B} = 90^\circ$

portanto, existe solução somente se $\hat{A} < 90^\circ$, caso contrário $\hat{A} + \hat{B} > 180^\circ$.

3º caso: $b \cdot \text{sen}\,\hat{A} < a$

Então $\dfrac{b \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{a} = \text{sen}\,\hat{B} < 1$ e existem dois ângulos $\hat{B}_1$ e $\hat{B}_2$, suplementares, que satisfazem a relação $\text{sen}\,\hat{B} = \dfrac{b \cdot \text{sen}\,\hat{A}}{a}$. Admitamos $0^\circ < B_1 \leqslant 90^\circ$ e $90^\circ \leqslant \hat{B}_2 < 180^\circ$. Os ângulos $\hat{B}_1$ ou $\hat{B}_2$ servem como solução dependendo de $\hat{A}$. Há três possibilidades.

1ª) $\hat{A} = 90^\circ$

Neste caso só $\hat{B}_1$ é solução pois $\hat{A} + \hat{B}_2 \geqslant 180^\circ$

2ª) $\hat{A} < 90°$

Neste caso $\hat{B}_1$ é uma solução porém $\hat{B}_2$ só é solução se $a < b$, uma vez que:

$$\hat{B}_2 > \hat{A} \Longrightarrow b > a.$$

3ª) $\hat{A} > 90°$

Neste caso $\hat{B}_2$ não é solução pois $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$; quanto a $\hat{B}_1$, só é solução se $a > b$, uma vez que:

$$\hat{B}_1 < \hat{A} \Longrightarrow b < a.$$

EXERCÍCIOS

C.411 Resolver um triângulo ABC sabendo que a, b e c são números inteiros consecutivos e $\hat{C} = 2\hat{A}$.

C.412 Resolver um triângulo retângulo ABC, sabendo que $a = 5$ e $r = 1$.

C.413 Resolver o triângulo A'B'C' cujos vértices são os pés das alturas do triângulo ABC dado: $\hat{A}' = 180° - 2\hat{A}$, $\hat{B}' = 180° - 2\hat{B}$, $\hat{C}' = 180° - 2\hat{C}$.

C.414 Resolver o triângulo A'B'C' cujos vértices são os pontos de tangência da circunferência inscrita com os lados do triângulo ABC dado.

C.415 Resolver um triângulo ABC sabendo que $a = 3$, $b + c = 10$ e $\hat{A} = \text{arc sen } \dfrac{3\sqrt{91}}{50}$

C.416 Resolver um triângulo ABC sabendo que $b + c = 11$, $h_a = 4$ e $\hat{A} = \text{arc sen } \dfrac{6 + 4\sqrt{5}}{15}$

C.417 Resolver um triângulo ABC sabendo que $\hat{A} = 45°$, $b = 3$ e $a + c = \dfrac{9\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2}$

C.418 Resolver um triângulo ABC admitindo conhecidos $\hat{B}$, $\hat{C}$ e S.

C.419 Resolver um triângulo ABC admitindo conhecidos $\hat{B}$, $\hat{C}$ e h_a.

RESPOSTAS

CAPÍTULO I

C.2 a) $\frac{7\pi}{6}$ rad b) $\frac{4\pi}{3}$ rad c) $\frac{3\pi}{2}$ rad d) $\frac{5\pi}{3}$ rad e) $\frac{7\pi}{4}$ rad f) $\frac{11\pi}{6}$ rad

C.4 a) 30° b) 45° c) 60° d) 120° e) 135° f) 150°

C.9 $a = \frac{11\pi}{12}$ rad e $b = \frac{5\pi}{6}$ rad

C.10 $a = 4°$, $b = 7°$, $c = 2°$

C.13 $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ rad ou 120°

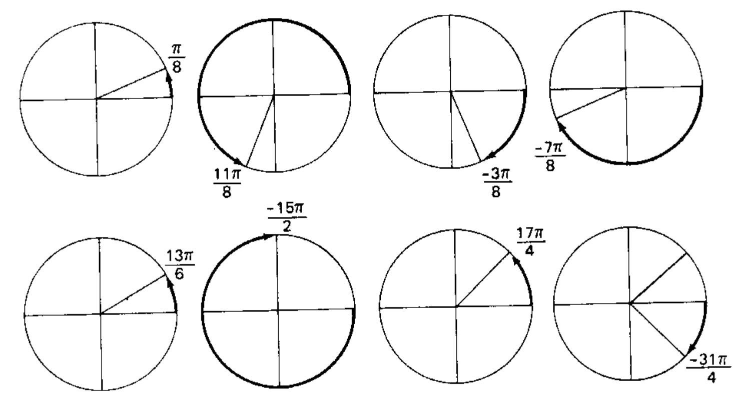
C.14 $\ell = 31{,}5$ cm

C.16 a) 160° b) 152°30' c) 15°

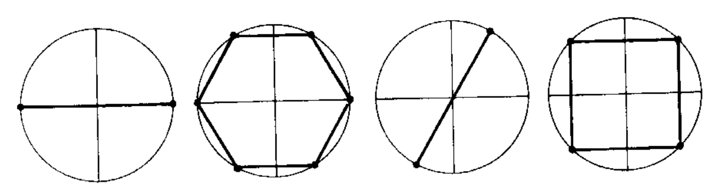
C.18

Im x	A	P_1	B	P_2	A'	P_3	B'	P_4
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$

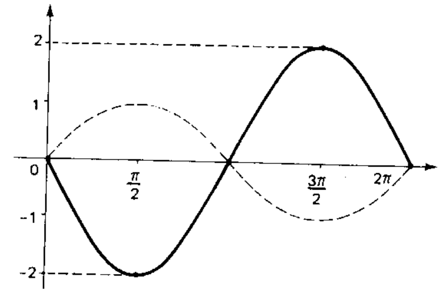
C.20



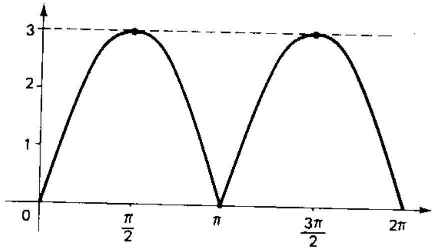
C.22



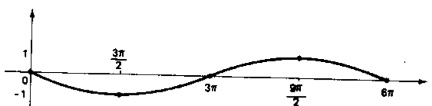
C.25 Im(f) = [-2, 2], p(f) = 2π



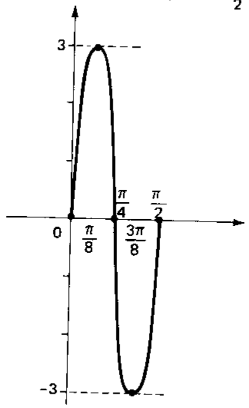
C.27 Im(f) = [0, 3], p(f) = π



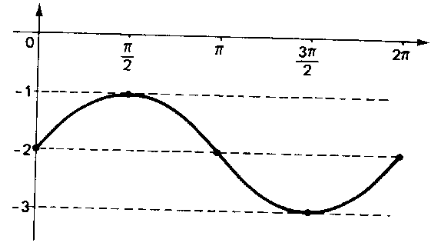
C.31 Im(f) = [-1, 1], p(f) = 6π



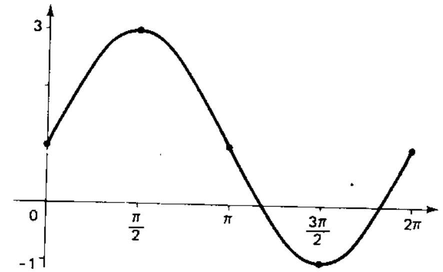
C.32 Im(f) = [-3, 3], p(f) = π/2



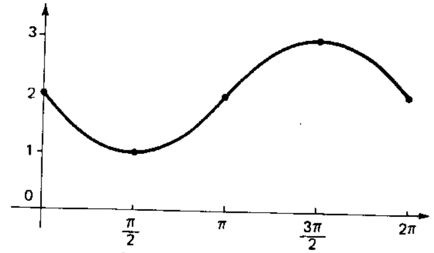
C.34 Im(f) = [-3, -1], p(f) = 2π



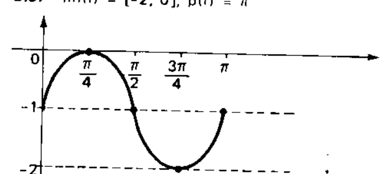
C.35 Im(f) = [-1, 3], p(f) = 2π



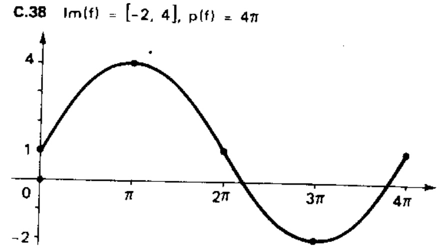
C.36 Im(f) = [1, 3], p(f) = 2π



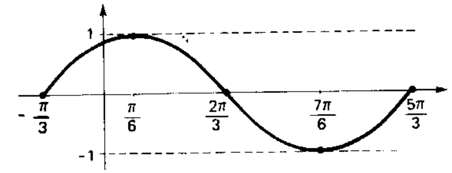
C.37 Im(f) = [-2, 0], p(f) = π



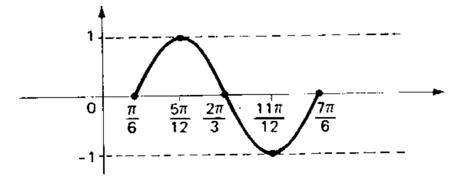
C.38 Im(f) = [-2, 4], p(f) = 4π



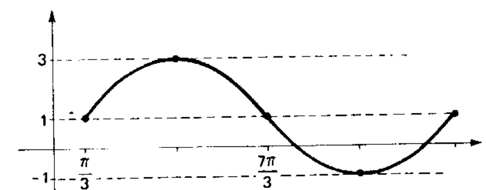
C.40 Im(f) = [-1, 1], p(f) = 2π



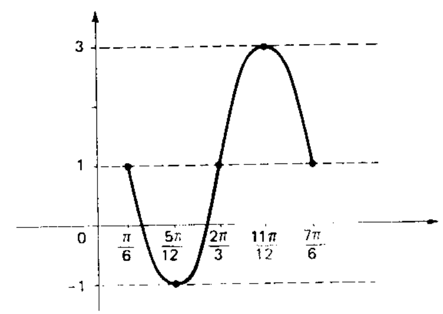
C.41 Im(f) = [-1, 1], p(f) = π



C.42 Im(f) = [-1, 3], p(f) = 4π

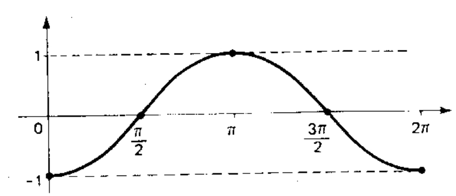


C.44 Im (f) = [-1, 3], p(f) = π

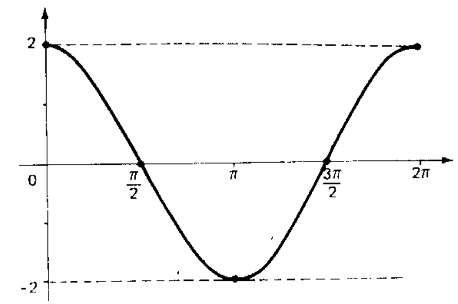


C.46 a) $\frac{1}{5} \leqslant m \leqslant \frac{3}{5}$, b) $m \leqslant \frac{3}{2}$

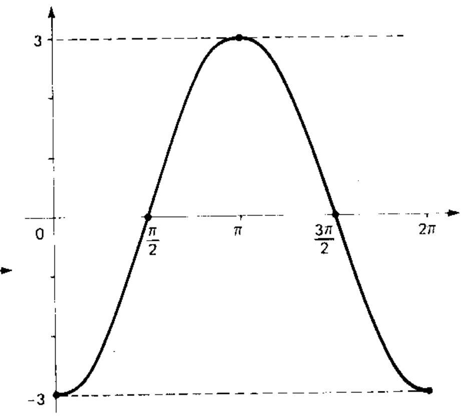
C.47 Im(f) = [-1, 1], p(f) = 2π



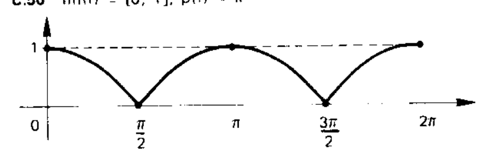
C.48 Im(f) = [-2, 2], p(f) = 2π



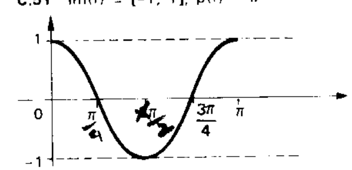
C.49 Im(f) = [-3, 3], p(f) = 2π



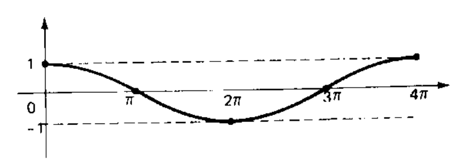
C.50 Im(f) = [0, 1], p(f) = π



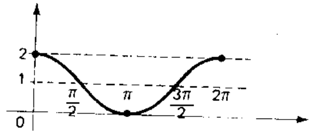
C.51 Im(f) = [-1, 1], p(f) = π



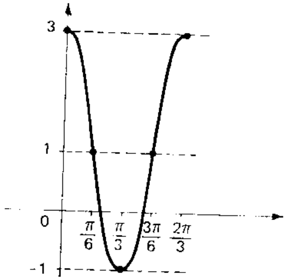
C.52 Im(f) = [-1, 1], p(f) = 4π



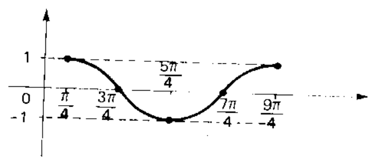
C.53 $\text{Im}(f) = [0, 2]$, $p(f) = 2\pi$



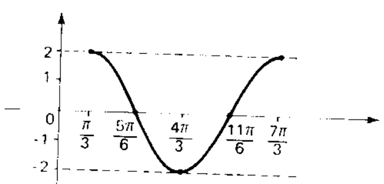
C.54 $\text{Im}(f) = [-1, 3]$, $p(f) = \frac{2\pi}{3}$



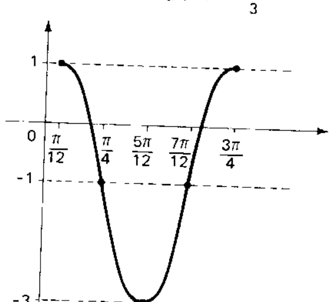
C.55 $\text{Im}(f) = [-1, 1]$, $p(f) = 2\pi$



C.56 $\text{Im}(f) = [-2, 2]$, $p(f) = 2\pi$



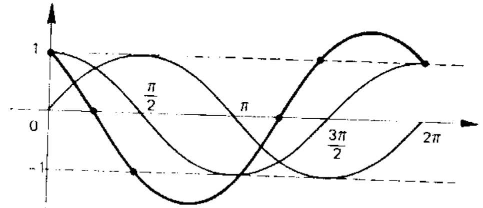
C.57 $\text{Im}(f) = [-3, 1]$, $p(f) = \frac{2\pi}{3}$



C.58 $t \leqslant -\frac{1}{3}$ e $t \geqslant 3$

C.60 $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, $y_3 = 0$, $y_4 < 0$

C.62



C.65 a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\}$

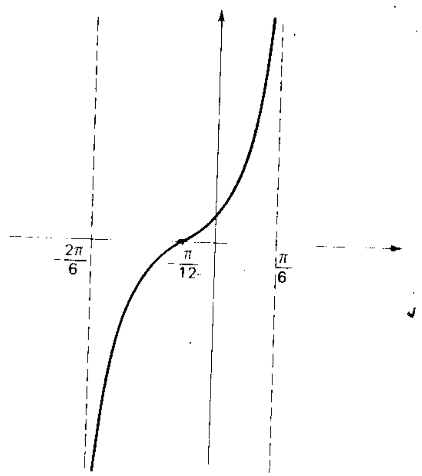
b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$

C.66 $y_1 > 0$, $y_2 < 0$

C.67 $\alpha \leqslant 1$ ou $\alpha \geqslant 4$

C.69 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$

$p(f) = \frac{\pi}{2}$



C.70 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$

$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

$p(f) = \pi$, $p(g) = \pi$, $p(h) = 2\pi$

C.71 a) $m \leqslant 2$

b) $m \leqslant \frac{1}{3}$ ou $m \geqslant 1$

c) $0 \leqslant m < \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3} < m \leqslant \frac{2}{5}$

C.72 $y_1 > 0$, $y_2 < 0$, $y_3 < 0$

CAPÍTULO III

C.74 $\text{sen}\, x = -\frac{24}{25}$, $\cos x = \frac{-7}{25}$

$\text{tg}\, x = \frac{24}{7}$, $\text{cotg}\, x = \frac{7}{24}$ $\sec x = -\frac{25}{7}$

C.76 $\cos x = \pm \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$

C.77 $\sec x = \pm \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$

C.79 $y = 6$

C.81 $y = \frac{457}{8}$

C.83 $\cos x = \frac{1}{2}$ $\text{sen}\, x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

C.84 $\text{tg}\, x = -2$ ou $\text{tg}\, x = -\frac{1}{2}$

C.86 $m = 3$ ou $m = -1$

C.87 $a = 1$

C.90 $a^2 - 2b = 1$

C.92 $y = \frac{a}{2}(3 - a^2)$

CAPÍTULO IV

C.117 a) $\cos 178^\circ = -\cos 2^\circ$

b) $\text{sen}\, 251^\circ = -\text{sen}\, 71^\circ$

c) $\text{tg}\, 290^\circ = -\text{tg}\, 70^\circ$

d) $\text{cotg}\, \frac{7\pi}{6} = \text{cotg}\, \frac{\pi}{6}$

e) $\sec 1924^\circ = -\sec 56^\circ$

f) $\text{cossec}\, \frac{23\pi}{6} = -\text{cossec}\, \frac{\pi}{6}$

g) $\text{sen}(-\frac{7\pi}{6}) = \text{sen}\, \frac{\pi}{6}$

h) $\cos(-\frac{5\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{3}$

i) $\text{tg}(-\frac{3\pi}{4}) = \text{tg}\, \frac{\pi}{4}$

j) $\text{sen}\, \frac{21\pi}{4} = -\text{sen}\, \frac{\pi}{4}$

k) $\cos \frac{31\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}$

l) $\text{tg} - \frac{11\pi}{3} = -\text{tg}\, \frac{\pi}{3}$

C.118 a) $\text{sen}\, 261^\circ = -\cos 9^\circ$

b) $\cos 2861^\circ = \cos 19^\circ$

c) $\text{tg}\, 511^\circ = -\text{tg}\, 29^\circ$

d) $\text{sen}\, \frac{4\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{6}$

e) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\text{sen}\, \frac{\pi}{6}$

f) $\text{tg}\, \frac{5\pi}{3} = -\text{cotg}\, \frac{\pi}{6}$

g) $\text{sen}\, \frac{5\pi}{6} = \text{sen}\, \frac{\pi}{6}$

h) $\cos \frac{7\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6}$

i) $\text{tg}\, \frac{11\pi}{6} = -\text{tg}\, \frac{\pi}{6}$

j) $\text{sen}(-\frac{5\pi}{3}) = \cos \frac{\pi}{6}$

k) $\cos -\frac{4\pi}{3} = -\text{sen}\, \frac{\pi}{6}$

l) $\text{tg}(-\frac{11\pi}{3}) = \text{cotg}\, \frac{\pi}{6}$

C.121 a) $\text{sen}\, x$ b) $-\text{cotg}^2 x$

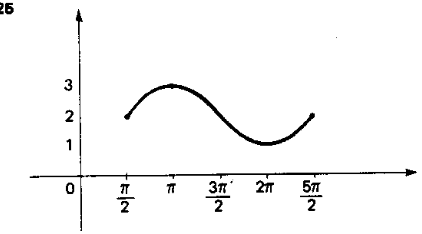
c) $-\text{tg}\, x$ d) $\text{cotg}\, x$

C.122 $\cos^2 x$

C.123 $-\sec^2 x$

C.124 1

C.125



CAPÍTULO V

C.127 $\text{sen}\, \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

$\text{tg}\, \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

C.129 $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$

C.130 $\text{sen}\, 930^\circ = -\frac{1}{2}$, $\cos 930^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg}\, 930^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{cotg}\, 930^\circ = \sqrt{3}$

$\sec 930^\circ = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$, $\text{cossec}\, x = -2$

CAPÍTULO VI

C.132 $\text{cotg}\, 165^\circ = -(2 + \sqrt{3})$

$\sec 255^\circ = -(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

$\text{cossec}\, 15^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

C.133 $\frac{1}{3}$

C.134 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C.137 $\text{sen}(x + y) = -\frac{84}{85}$

$\cos(x + y) = \frac{13}{85}$

$\text{tg}(x + y) = -\frac{84}{13}$

C.145 $D(f) = \mathbb{R}$, $p(f) = \frac{\pi}{2}$, $\text{Im}(f) = [-1, 1]$

$D(g) = \mathbb{R}$, $p(g) = 2\pi$, $\text{Im}(g) = [-2, 2]$

$D(h) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\}$

$p(h) = \pi$, $\text{Im}(h) = \mathbb{R}$

C.146 $p(f) = \frac{\pi}{3}$

C.148 $\frac{2}{3}$

C.150 a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{6}$

C.152 $\text{sen } 3x = \frac{-44}{125}$

C.153 $\frac{2035}{2197}$

C.154 $\text{tg } 3x = -\frac{5\sqrt{7}}{9}$

C.155 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

C.159 a) $p(f) = \pi$, $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [-1, 1]$

b) $p(g) = \frac{\pi}{2}$, $D(g) = \mathbb{R}$, $Im(g) = [0, 2]$

c) $p(h) = \frac{\pi}{2}$, $D(h) = \mathbb{R}$, $Im(h) = [\frac{1}{2}, 1]$

C.160 $p(f) = \pi$, $p(g) = \frac{\pi}{2}$, $p(h) = \frac{\pi}{2}$

C.164 $\text{sen } \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{tg } \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

C.165 $\text{sen } \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{10 - 7\sqrt{2}}{20}}$

$\cos \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{10 + 7\sqrt{2}}{20}}$

$\text{tg } \frac{x}{4} = \sqrt{\frac{10 - 7\sqrt{2}}{10 + 7\sqrt{2}}}$

C.166 $\text{tg } (\frac{\pi + x}{2}) = +\sqrt{\frac{5}{3}}$

C.168 $f(x) = |\text{tg } x|$, $Im(f) = \mathbb{R}_+$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$, $p(f) = \pi$

C.169 $D(f) = \mathbb{R}$, $p(f) = \frac{\pi}{4}$, $Im(f) = [0, \sqrt{2}]$

C.174 a) $2 \cdot \text{sen } b \cdot \cos (a + c)$

b) $2 \cdot \cos (a + b) \cdot \cos b$

c) $4 \cdot \cos r \cdot \cos \frac{r}{2} \cdot \text{sen } \frac{2a + 3r}{2}$

d) $4 \cdot \cos b \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{2a + 3b}{2}$

e) $\text{sen } (p + q) \cdot \text{sen } (q - p)$

f) $\text{sen } (p + q) \cdot \text{sen } (p - q)$

g) $\cos (p + q) \cdot \cos (p - q)$

h) $\text{cotg } (b - a)$

i) $\text{tg } (\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}) \cdot \text{cotg } (\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2})$)

C.175 $\frac{1}{2} (\cos 6x + \cos 2x)$

C.178 a) $y = -\frac{1}{4}(2 + \sqrt{2})$ b) $y = -\frac{1}{4}$

c) $y = \frac{\sqrt{2} + 1}{4}$

C.188 $D(f) = \mathbb{R}$

$p(f) = \pi$

$Im(f) = [-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$

C.189 $p(f) = \pi$

CAPÍTULO VII

C.195 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$

C.196 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\}$

C.197 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

C.199 a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}\}$

C.200 $a = \frac{\pi}{3}$, $b = \frac{\pi}{3}$, $c = \frac{\pi}{3}$

C.201 $x = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$

C.204 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

g) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi\}$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\}$

C.206 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{k\pi}{2}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ ou

$x = \frac{-\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\}$

C.207 $A = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{\pi}{6}$, $C = \frac{2\pi}{3}$

C.208 a) $x = y = \frac{\pi}{4} + k\pi$

b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$y + x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

C.211 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{5} + k\pi\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + k\pi\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + k\pi\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi\}$

g) $S = \emptyset$

h) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}\}$

i) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$

j) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$ ou

$x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\}$

C.212 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou

$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = k\pi\}$

C.213 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi\}$

C.214 $p = \frac{1}{2} + k$, $k \in \mathbb{Z}$

C.217 $S = \{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\}$

C.219 $S = \{0, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi\}$

C.221 $S = \{0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}\}$

C.222 $S = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{7\pi}{6} \frac{11\pi}{6}, 2\pi\}$

C.224 $S = \{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$

C.225 $S = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$

C.226 $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$y = \frac{\pi}{6} - 2k\pi$

C.228 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ ou

$x = \pi + 2k\pi\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$

C.230 a) $S = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\}$

b) $S = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

C.231 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ ou } x = k\pi\}$

C.233 As equações têm solução para

a) $\forall\, m \in \mathbb{R}$ b) $-\sqrt{2} \leqslant m \leqslant +\sqrt{2}$

C.236 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2k\pi}{m + n} \text{ ou } x = \frac{\pm\pi}{m - n}$

$m \neq n)\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = +\frac{\pi}{a + b} + \frac{2k\pi}{a + b}$ ou

$x = -\frac{\pi}{a - b} + \frac{2k\pi}{a - b}\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$ ou

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\}$

C.237 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{k\pi}{3}\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pm \frac{\pi}{4} - \frac{a}{2} + k\pi$ ou

$x = \frac{2\pi}{3} - a + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} - a + 2k\pi\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\}$

C.238 $S = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$

C.239 $S = \{0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi\}$

C.240 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

C.241 b) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e $y = 2k\pi$

C.242 $a = \text{arc sen } \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ $\quad b = \frac{\pi}{4}$

C.245 a) $S = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{11\pi}{6}\}$

b) $S = \{\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\}$

c) $S = \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$

d) $S = \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$.

e) $S = \{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$

C.247 $0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}$

C.249 $\text{tg}(\text{arc sen } \frac{3}{4}) = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

C.251 a) $\frac{\sqrt{5}(-6 + \sqrt{3})}{15 + 2\sqrt{3}}$ $\quad$ b) $-\frac{24}{25}$ $\quad$ c) $-\frac{2035}{2197}$

C.253 $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$

C.255 $\text{sen}(\text{arc cos } -\frac{3}{5}) = \frac{4}{5}$

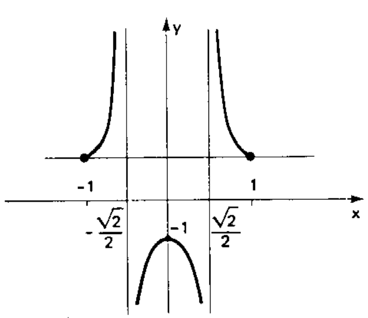
C.256 $\frac{2\sqrt{5}}{15}$

C.257 $\frac{\pi}{2} - A$

C.259 a) $-\frac{16}{65}$ $\quad$ b) $\frac{323}{325}$ $\quad$ c) $\frac{24}{7}$ $\quad$ d) $\frac{4}{5}$

C.260 a) $x = + \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) gráfico



C.262 $0, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}$

C.264 $\frac{3}{5}$

C.266 a) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ b) $\pm \frac{4}{5}$ $\quad$ c) $\frac{5}{12}$ $\quad$ d) $-\frac{11\,753}{15\,625}$

CAPÍTULO VIII

C.272 $\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leqslant x \leqslant \pi + 2k\pi\}$

C.273 $\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \leqslant x \leqslant 2k\pi + \frac{5\pi}{3}\}$

C.274 $\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x \leqslant \frac{7\pi}{6}$

$+ 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi$

C.276 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,$

$\frac{11\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x < 2\pi + 2k\pi$

$0 + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi\}$

C.277 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ou

$\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\}$

C.279 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\}$

C.281 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$ ou

$\frac{13\pi}{12} < x < \frac{17\pi}{12}\}$

C.282 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{9}\}$

$\frac{8\pi}{9} \leqslant x \leqslant \frac{13\pi}{9},$

$\frac{14\pi}{9} \leqslant x \leqslant 2\pi$ ou $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{9},$

C.283 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{12}$ e $x \neq \frac{\pi}{4}$ ou

$\frac{13\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{17\pi}{12}$ e $x \neq \frac{5\pi}{4}\}$

C.284 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}\}$

C.285 a) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$

C.287 $2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

ou

$\frac{4\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi + 2k\pi$

C.288 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

C.289 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\}$

C.290 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\}$

C.291 $S = \varnothing$

C.293 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$\frac{7\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\}$

C.294 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ou

$x = 2k\pi\}$

C.296 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\}$

C.298 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{12}$ ou $\frac{13\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{23\pi}{12}\}$

C.299 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou

$\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ ou

$\frac{11\pi}{6} < x \leqslant 2\pi\}$

C.301 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \pi\}$

C.302 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4} < x \leqslant \pi\}$

C.303 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6}\}$

C.305 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{6}$ ou

$\frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{11\pi}{6}\}$

C.306 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}\}$

C.307 a) $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leqslant \alpha \leqslant \frac{5\pi}{6}\}$

b) $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} < \alpha \leqslant \frac{5\pi}{6}\}$

C.308 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}\}$

C.309 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\}$

C.310 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x \leqslant \frac{\pi}{3} + 2k\pi\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\}$

C.312 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi\}$

C.313 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \pi + k\pi\}$

C.314 $\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ou

$\frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi\}$

C.315 $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + k\pi \leqslant x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ ou

ou $\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leqslant \frac{2\pi}{3} + k\pi\}$

C.317 $0 \leqslant x < \frac{\pi}{4}$ ou $\pi \leqslant x < \frac{5\pi}{4}$ ou

$\frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{3\pi}{4}$ ou $\frac{4\pi}{3} \leqslant x < \frac{7\pi}{4}$ ou

$\frac{5\pi}{6} \leqslant x < \pi$ ou $\frac{11\pi}{6} \leqslant x < 2\pi$

C.318 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{8}$ ou $\pi \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}$ ou

$\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{13\pi}{8}$ ou $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{8}$

C.319 $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} < x \leqslant \frac{7\pi}{6}$ ou

$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$ ou

$\frac{11\pi}{6} < x \leqslant 2\pi\}$

C.320 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\}$

CAPÍTULO IX

C.322 $x = \frac{60}{13}, \; y = \frac{25}{13}, \; z = \frac{144}{13}, \; t = 13$

C.323 $\alpha^2 = \gamma\delta, \beta^2 = \gamma\epsilon, \varphi^2 = \delta\epsilon, \alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2, \alpha\beta = \gamma\varphi,$

$\alpha^2 = \delta^2 + \varphi^2$

C.324 39

C.325 25

C.327 $h = 8$ ou $h = 2$

C.328 5

C.329 12

C.330 $R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

C.332 $a = \frac{16\sqrt{3}}{3}, \; b = \frac{8\sqrt{3}}{3} \quad c = 8$

C.333 $a = 16, \; b = \frac{16}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}, \; c = \frac{16}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

C.334 $b = 3$ e $c = 3\sqrt{3}$

C.335 $\text{arc tg} \sqrt{\frac{5}{7}}$ e $\text{arc tg} \sqrt{\frac{7}{5}}$

C.336 $A_0B_0 \cdot \text{cossec}^2\theta$

C.337 $\text{arc tg } \frac{4}{3}$

C.339 $2\sqrt{37}$

C.340 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

C.341 $2 \cdot \text{arc sen } \frac{4}{5}$

C.342 $\widehat{B} = 26^\circ 34'$

C.343 $C = \frac{1}{2} \text{ arc sen } \frac{4}{3\sqrt{3}}$

C.344 $\widehat{B} = 2 \cdot \text{arc tg } (\sqrt{2} - 1)$ e $a = 2\sqrt{2}$

C.345 $\text{arc sen } \frac{5}{13}$ e $\text{arc sen } \frac{12}{13}$

C.347 $h = 3\sqrt{6}\,\text{m}$

C.348 $h = d(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)$

C.349 $H = h\left[\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} + 1\right]$

C.350 1233 m

C.351 $x = 40$ m e $y = 90$ m

C.353 $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$ e $c = \sqrt{3}$

C.354 $a = 13$, $b = 5$, $c = 12$, $\hat{B} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{5}{13}$

$\hat{C} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{12}{13}$

C.355 $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 60^\circ$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$

C.356 $a = 2$, $b = c = \sqrt{2}$, $\hat{B} = \hat{C} = \dfrac{\pi}{4}$

C.357 $a = 14$, $b = c = 25$, $\hat{A} = 2 \cdot \operatorname{arc\,sen} \dfrac{7}{25}$,

$\hat{B} = \hat{C} = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{7}{25}$

C.358 $a = 13$, $b = 12$, $c = 5$

$\hat{B} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{12}{13}$, $\hat{C} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{5}{13}$

C.359 $a = 4$, $b = c = 2\sqrt{2}$, $\hat{B} = \hat{C} = \dfrac{\pi}{4}$

CAPÍTULO X

C.361 $c = \sqrt{10}$

C.362 $4\sqrt{19}$ m e $4\sqrt{7}$ m

C.363 $\operatorname{arc\,sen} \dfrac{5}{2\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}}$

C.365 $\hat{A} = 45^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ e $\hat{C} = 75^\circ$

C.366 $\hat{B} = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{57}{90}$

C.369 $c = \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{6}$

C.370 $7\sqrt{2}$, $2\sqrt{29}$, $\sqrt{130}$

C.373 a) retângulo b) obtusângulo

c) acutângulo

C.374 $\sqrt{\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}} < q < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

C.377 $\hat{B} = 120^\circ$ e $\hat{C} = 45^\circ$

C.378 $(\hat{B} = 45^\circ$ e $\hat{C} = 120^\circ)$ ou $(\hat{B} = 135^\circ$ e $C = 30^\circ)$

C.379 $B = 30^\circ$ e $A = 90^\circ$

C.380 $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$ e $\hat{C} = 60^\circ$

C.381 $c = 3\sqrt{3}$ m

C.382 $a = \dfrac{2p \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

$b = \dfrac{2p \cdot \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

$c = \dfrac{2p \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$

C.384 $\alpha = \gamma = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{\sqrt{3}}{5}$, $\beta = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{3\sqrt{3}}{13}$

C.387 88 m

C.389 $\hat{B} = 75^\circ$

C.390 $\hat{B} = 57^\circ 30'$

C.391 $\hat{B} = 2 \cdot \operatorname{arc\,cos} \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

C.392 b) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ c) $\alpha \cong 38^\circ 10' 22''$

C.393 $h_a(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)$

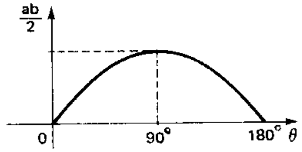
C.394 $S = 7\sqrt{3}\ m^2$

C.395 $(2 + \sqrt{12})\ cm^2$

C.396 $50\sqrt{3}\ m^2$

C.397 $2\sqrt{41 - 20\sqrt{3}}$ m

C.398 a)



b) $\theta = 90^\circ$ c) 73%

C.400 alturas: $\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$, $\sqrt{15}$, $\dfrac{3\sqrt{15}}{4}$

medianas: $\sqrt{46}$, $\sqrt{31}$, $\sqrt{10}$

bissetrizes: $\dfrac{12\sqrt{15}}{7}$, $2\sqrt{6}$, $\dfrac{6\sqrt{6}}{5}$

inscrita: $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$, circunscrita: $\dfrac{16\sqrt{15}}{15}$

C.401 $m_a = \dfrac{\sqrt{145}}{2}$ $\operatorname{arc\,cos} \dfrac{26}{10\sqrt{145}}$

C.402 $10\sqrt{3}$

C.403 $r = \dfrac{3}{2}$ e $R = \dfrac{9}{8}$

C.405 $a = 2\sqrt{r' \cdot r}$ e $b = c = \dfrac{(r' + r)\sqrt{r \cdot r'}}{(r' - r)}$

C.407 $abc = 6(a + b + c)$

C.411 $a = 4$, $b = 5$, $c = 6$, $\hat{A} = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{3}{5}$

$\hat{B} = 180^\circ - 3\hat{A}$, $\hat{C} = 2\hat{A}$

C.412 $b = 3$, $c = 4$, $\hat{B} = \operatorname{arc\,sen} \dfrac{3}{4}$

e $\hat{C} = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{3}{5}$

C.413 $a' = R \cdot \operatorname{sen} 2\hat{A}$, $b' = R \cdot \operatorname{sen} 2\hat{B}$,

$c' = R \cdot \operatorname{sen} 2\hat{C}$

C.414 $\hat{A}' = \dfrac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$, $\hat{B} = \dfrac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$, $\hat{C}' = \dfrac{\hat{B} + \hat{A}}{2}$,

$a' = 2(p - a) \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\hat{A}}{2}$, $b' = 2(p - b) \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\hat{B}}{2}$,

e $c' = 2(p - c) \cdot \operatorname{sen} \dfrac{\hat{C}}{2}$

C.415 $b = c = 5$, $\hat{B} = \hat{C} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \operatorname{arc\,sen} \dfrac{3\sqrt{91}}{10}$

C.416 $a = 3 + \sqrt{20}$, $b = 5$, $c = 6$

$\hat{B} = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\hat{C} = \operatorname{arc\,cos} \dfrac{3}{5}$

C.417 $a = 3\sqrt{2}$, $c = \dfrac{3(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2}$, $\hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 115^\circ$

C.418 $a = R \cdot \operatorname{sen}(\hat{B} + \hat{C})$, $b = R \cdot \operatorname{sen}\hat{B}$,

$c = R \cdot \operatorname{sen}\hat{C}$ e $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})$, onde

$R = \sqrt{\dfrac{S}{2 \cdot \operatorname{sen}(\hat{B} + \hat{C}) \cdot \operatorname{sen}\hat{B} \cdot \operatorname{sen}\hat{C}}}$

C.419 $a = h_a(\operatorname{tg}\hat{B} + \operatorname{tg}\hat{C})$, $b = \dfrac{h_a}{\operatorname{sen}\hat{C}}$, $c = \dfrac{h_a}{\operatorname{sen}\hat{B}}$

e $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})$

TESTES

FUNÇÕES

TC.1 (ITA-72) O ângulo convexo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos às 10 horas e 15 minutos é:

a) $142^\circ 30'$
b) $142^\circ 40'$
c) 142°
d) $141^\circ 30'$
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.2 (FUVEST-77) O ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos é:

a) 27° b) 30° c) 36° d) 42° e) 72°

TC.3 (ITA-73) Entre 4 e 5 horas o ponteiro das horas de um relógio fica duas vezes em ângulo reto com o ponteiro dos minutos. Os momentos destas ocorrências serão:

a) 4 h 5 $\dfrac{2}{11}$ min e 4 h 38 $\dfrac{5}{11}$ min
b) 4 h 5 $\dfrac{5}{11}$ min e 4 h 38 $\dfrac{2}{11}$ min
c) 4 h 5 $\dfrac{5}{11}$ min e 4 h 38 $\dfrac{5}{12}$ min
d) 4 h 5 $\dfrac{3}{11}$ min e 4 h 38 $\dfrac{7}{11}$ min
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.4 (PUC-70) Sendo θ um ângulo positivo, então $\left(\dfrac{5\pi}{2} - \theta\right)$ pertence ao:

a) 1º quadrante
b) 2º quadrante
c) 3º quadrante
d) 4º quadrante
e) nenhuma das alternativas anteriores.

TC.5 (UDESC-74) Os arcos cujo cosseno é $\sqrt{2}$ podem estar nos quadrantes:

a) 1º e 4º b) 1º e 2º c) 1º e 3º d) 2º e 3º
e) nenhuma das opções é correta.

TC.6 (PUC-76) Todos os valores de x, de modo que a expressão $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2x - 1}{3}$ exista, são:

a) $-1 \leqslant x < 1$
b) $-1 < x \leqslant 0$
c) $-1 \leqslant x \leqslant 2$
d) $-1 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}$
e) $-1 \leqslant x < \dfrac{1}{3}$

TC.7 (MACK-73) O conjunto dos números reais a para os quais a equação $\text{sen } x = a + a^{-1}$ tem solução real em x é:

a) $\mathbb{R}$ b) $\emptyset$ c) $\{1, -1, 0\}$
d) $\{k\pi \mid k \text{ inteiro}\}$ e) nenhuma das anteriores.

TC.8 (CESCEM-77) Se $x \in (\pi; \frac{3\pi}{2})$ e $\cos x = 2k - 1$; então, k varia no intervalo

a) $(-1; 0)$ b) $[-1; 0)$ c) $(0; \frac{1}{2})$ d) $(0; 1)$ e) $(\frac{1}{2}; 1)$

TC.9 (PUC-75) O valor numérico da expressão:

$$y = \cos 4x + \text{sen } 2x + \text{tg } 2x - \sec 8x \quad \text{para} \quad x = \frac{\pi}{2} \quad \text{é:}$$

a) 2 b) 1 c) 3 d) 0 e) 4

TC.10 (CESCEM-75) O menor valor que assume a expressão $(6 - \text{sen } x)$; para "x" variando de 0° a 360° é:

a) 7 b) 6 c) 5 d) 1 e) -1

TC.11 (MACK-76) O valor máximo de $y = 2 \text{ sen } x + \cos 2x$, $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$, é:

a) 1,5 b) 2 c) 2,5 d) 3 e) ∞

TC.12 (CESCEA-73) Assinale a afirmação verdadeira:

a) Para todo a real, existe x real tal que $\text{tg } x = a$
b) Existe x real tal que $\text{sen } x = a \iff a \leqslant 1$
c) Existe x real tal que $\sec x = a \iff |a| \leqslant 1$
d) não sei

TC.13 (CESCEM-72) Os quadrantes onde estão os ângulos α, β e γ tais que:

$\text{sen } \alpha < 0$ e $\cos \alpha < 0$
$\cos \beta < 0$ e $\text{tg } \beta < 0$
$\text{sen } \gamma > 0$ e $\text{cotg } \gamma > 0$ são respectivamente:

a) 3º, 2º, 1º b) 2º, 1º, 3º c) 3º, 1º, 2º d) 1º, 2º, 3º e) 3º, 2º, 2º

TC.14 (SANTA CASA-77) Se $F(x) = \cos x$, então:

a) $F(\frac{\pi}{2}) < F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\sqrt{2}) < F(1{,}5)$

b) $F(1{,}5) < F(\frac{\pi}{2}) < F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\sqrt{2})$

c) $F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\sqrt{2}) < F(1{,}5) < F(\frac{\pi}{2})$

d) $F(\sqrt{2}) < F(1{,}5) < F(\frac{\sqrt{3}}{2}) < F(\frac{\pi}{2})$

e) $F(\frac{\pi}{2}) < F(1{,}5) < F(\sqrt{2}) < F(\frac{\sqrt{3}}{2})$

TC.15 (CESCEM-70) Assinalar a desigualdade verdadeira para todo x:

a) $|\cos x| + |\text{sen } x| \geqslant 1$ b) $|\cos x - \text{sen } x| \leqslant |\cos x| - |\text{sen } x|$
c) $|\text{tg } x| \geqslant |\cos x|$ d) $|\text{tg } x| \geqslant |\sec x|$
e) nenhuma das alternativas anteriores

TC.16 (CESCEM-73) Entre as afirmações abaixo, uma e apenas uma, é verdadeira. Assinale-a:

a) O seno e o cosseno são funções tais que quando uma cresce a outra decresce
b) $\cos x - \text{sen } x \geqslant 0$, para todo x real, pois $\cos x \geqslant \text{sen } x$
c) $\text{tg } \frac{x}{4}$ é periódica de período 2π, pois a tangente é uma função periódica de período π
d) $1 - 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x \geqslant 0$, para todo x real, pois $(\text{sen } x - \cos x)^2 = 1 - 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$

TC.17 (CESCEA-73) Sejam x e y dois números reais tais que $0 \leqslant x < y < \frac{\pi}{2}$. Assinale a afirmação falsa:

a) $2^{\text{tg } x} < 2^{\text{tg } y}$
b) $\cos x < \cos y$
c) $\text{sen } x < \text{sen } y$
d) não sei.

TC.18 (GV-70) A função $F(x) = \text{sen } x \cdot \log_{\frac{1}{2}} x$ é:

a) sempre negativa, para $0 < x < \pi$
b) sempre positiva, para $0 < x < \pi$
c) positiva para $0 < x < 1$ e negativa para $1 < x < \pi$
d) negativa para $0 < x < 1$ e positiva para $1 < x < \pi$
e) positiva para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e negativa para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

TC.19 (POLI-68) Se x e y satisfazem $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ e $z = \text{sen } x - \text{tg } y \cdot \cos x$, então:

a) para cada y, z é uma função decrescente de x
b) para cada x, z é uma função decrescente de y
c) z pode ser nulo
d) z é sempre positivo
e) nenhuma das anteriores

TC.20 (CESCEM-73) Considere a seqüência de números reais que se obtém fazendo $x = \frac{2}{\pi + 2n\pi}$ na expressão $y = \text{sen } \frac{1}{x}$, $n = 0, 1, 2...$ Pode-se afirmar que:

a) a seqüência não é convergente
b) o limite da seqüência situa-se no intervalo fechado $[-1; 1]$
c) zero é um termo da seqüência
d) a seqüência converge para +1 ou para -1
e) o limite da seqüência é zero

TC.21 (FFCLUSP-69) A solução de $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^6 x = 3$ é:

a) $x = k\dfrac{\pi}{2}$ (k um inteiro qualquer)

b) $x = k\pi$ (k um inteiro qualquer)

c) $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ (k um inteiro qualquer)

d) $x = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ (k um inteiro qualquer)

e) nenhuma das respostas anteriores é verdadeira.

TC.22 (CESCEM-73) Considere a equação trigonométrica $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 2$. Então:

a) existem soluções todas irracionais

b) existem soluções todas racionais

c) $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

d) não existe x que satisfaça a equação

e) $x = 0$

TC.23 (CESCEA-72) Seja $A \subset B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$ o domínio da função f, dada por: $f(x) = \dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$. Então, A é igual a:

a) $\{x \in B \mid x \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $x \neq 0\}$

b) $\{x \in B \mid x \neq \pi\}$

c) $\{x \in B \mid x \neq \dfrac{3\pi}{2}\}$

d) $\{x \in B \mid x = \dfrac{3\pi}{2}\}$

e) não sei

TC.24 (GV-74) Seja n o número de pontos do conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$ nos quais $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} 4x}$ não está definida. Então n é igual a:

a) 3 b) 4 c) 9 d) 11 e) 8

TC.25 (CESCEA-75) Assinalar a afirmação correta:

a) a função tangente está definida para todo x real, é sempre crescente e tem período π.

b) a função cotangente está definida para todo x real, diferente de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com k inteiro, é sempre crescente e tem período π.

c) a função cossecante está definida para todo x real, diferente de $k\pi$, com k inteiro e tem valores no intervalo $[1, +\infty[$.

d) a função seno está definida para todo x real e é sempre crescente.

e) a função secante está definida para todo x real, diferente de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com k inteiro relativo e tem valores no conjunto $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

TC.26 (CESCEM-71) Qual dos seguintes conjuntos de valores de x poderia constituir um domínio para a função **log sen x**?

a) $x \leqslant 0$ b) $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ c) $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

d) $x \neq K \cdot \dfrac{3\pi}{4}$ (K = 0, 1, 2, ...) e) $x \neq K \cdot \dfrac{\pi}{2}$ (K = 0, 1, 2, ...)

TC.27 (CESCEM-75) A função que melhor se adapta ao gráfico abaixo é:

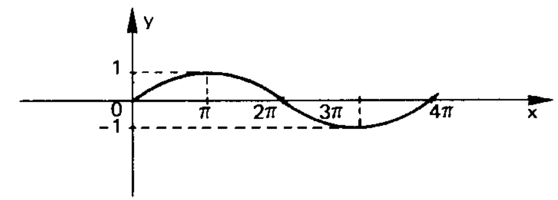
a) $y = \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$

b) $y = \cos \dfrac{x}{2}$

c) $y = \operatorname{sen} 2x$

d) $y = \cos 2x$

e) $y = \operatorname{sen} x$



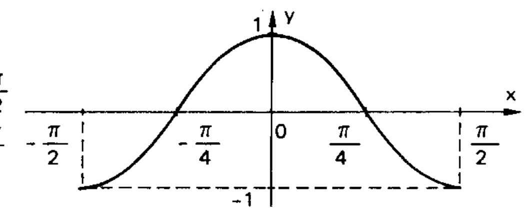
TC.28 (CESCEA-73) A figura é um esboço do gráfico da função:

a) $y = \cos x$, $\dfrac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

b) $y = \cos 2x$, $\dfrac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

c) $y = \operatorname{sen} 2x$, $\dfrac{-\pi}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

d) não sei



TC.29 (CESCEM-73) Qual das funções abaixo melhor se adapta ao gráfico?

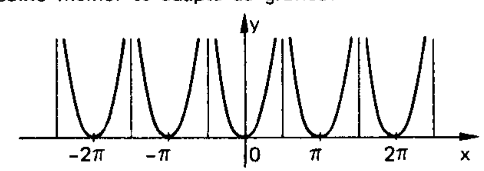
a) $y = x^2$

b) $y = |\operatorname{sen} x|$

c) $y = |\sec x| - 1$

d) $y = |\cos x|$

e) $y = |\operatorname{tg} x| + 1$



TC.30 (MACK-77) O gráfico abaixo pode ser da função:

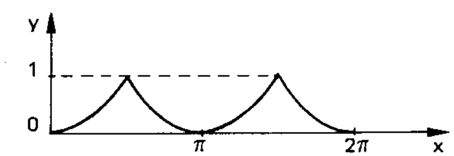
a) $|\operatorname{sen} x|$

b) $\operatorname{sen}^2 x$

c) $1 - |\operatorname{sen} x|$

d) $1 - |\cos x|$

e) Não sei



TC.31 (GV-74) As equações abaixo representam curvas, num sistema cartesiano de coordenadas de eixos x e y. Só uma destas curvas não passa pelo ponto $x = -0{,}5$; $y = 2$:

a) $y = \log_2 \left(\dfrac{1}{16}\right)^x$ b) $y = 8x^2$

c) $y = -\dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{0{,}5}$ d) $y = \left|\dfrac{1}{x}\right|$

e) $y = e^x$

TC.32 (EESCUSP-69) O período da função $3 \cos 4x$ é:

a) a) $\frac{\pi}{8}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{\pi}{4}$

TC.33 (EAESP-GV-77) O período da função dada por $y = 3 \text{ sen } (2\pi x + \frac{\pi}{2})$ é:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) 2π d) 1 e) $\frac{\pi}{4}$

TC.34 (STA CASA-73) Em relação a função $y = 2 \text{ sen } x + 3 \cos \frac{x}{2}$ pode-se afirmar:

a) $y(x) = y(x + 2\pi)$ b) não é periódica c) é tal que $y(x) = y(x + \frac{\pi}{2})$

d) é harmônica simples e) é tal que $y(x) = y(x + 4\pi)$

TC.35 (CESCEA-74) O domínio, a imagem e o período da função $f(x) = \text{tg } (x - \frac{\pi}{4})$ são, respectivamente:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{\pi}{4} - k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}$ e π

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}$ e 2π

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\}$, $\mathbb{R}$ e π

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$, $\mathbb{R}$ e 2π

e) não sei

TC.36 (CESCEM-73) Uma reta pela origem, de coeficiente angular negativo, tem três e somente três pontos em comum com o gráfico da função $y = \text{sen } x$. A menor das três correspondentes abscissas:

a) é um múltiplo de π b) está entre $\frac{-3\pi}{2}$ e $-\pi$ c) é nula

d) está entre -2π e $\frac{-3\pi}{2}$ e) é positiva

TC.37 (MACK-74) A intersecção dos gráficos das funções seno e tangente para $0 < x < \pi$

a) é vazia b) contém um e um só ponto c) contém o ponto de abscissa $\frac{\pi}{4}$

d) contém mais de um ponto e) depende da escala usada

TC.38 (CESCEA-75) Dadas as curvas $y = x^2$ e $y = \cos x$, assinalar dentre as afirmações abaixo, a verdadeira:

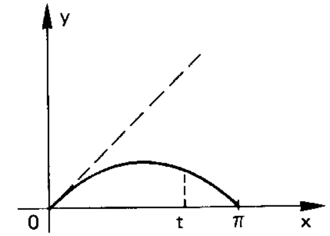
a) elas não se interceptam
b) elas se interceptam numa infinidade de pontos
c) elas se interceptam em dois pontos
d) elas se interceptam num único ponto
e) elas se interceptam em três pontos

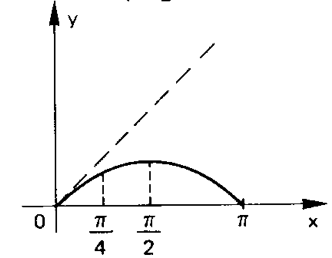
TC.39 (MACK-75) O número de pontos de intersecção dos gráficos das funções f e g dadas por:

$f(x) = -|\cos x|$ e $g(x) = \cos (\frac{\pi}{2} + x)$ com $-\pi < x < \pi$, é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) maior que 3

TC.40 (FAAP-74) Para cada $t \in [0, \pi]$, $A(t) = 1 - \cos t$, representa a área sob o gráfico de f (acima do eixo dos x) dada por $f(x) = \text{sen } x$ (vide figura 1). Baseado nisso, a área sob o gráfico de f (acima do eixo dos x) com $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ (vide figura 2)





vale:

a) $\frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) 1 d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

IDENTIDADES FUNDAMENTAIS

TC.41 (PUC-75) O valor da expressão $25 \cdot \text{sen}^2 x - 9 \cdot \text{tg}^2 x$ sabendo que $\text{cossec } x = \frac{5}{4}$ e x é do primeiro quadrante é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 0 e) 1

TC.42 (GV-76) Se $\text{sen } a = \frac{24}{25}$ e **sec a é negativa**, então o valor de $\sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}$ é:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{4}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{1}{2}$

TC.43 (ITA-74) O valor da expressão $x = \frac{2 \cdot \text{tg } \theta}{1 - \text{tg}^2 \theta}$ quando $\cos \theta = -\frac{3}{7}$ e $\text{tg } \theta < 0$, é:

a) $\frac{4\sqrt{10}}{31}$ b) $-\frac{2\sqrt{10}}{3}$ c) $\frac{2\sqrt{10}}{15}$

d) $\frac{3\sqrt{10}}{7}$ e) nenhuma das respostas anteriores

TC.44 (CESCEA-70) Se $\text{sen } x = \frac{n - 1}{n}$, então, $\frac{\text{tg}^2 x + 1}{\text{cotg}^2 x + 1}$ é igual a:

a) $\frac{(n - 1)^2}{2n - 1}$ b) $\frac{n^2}{2n - 1}$ c) $\frac{n - 1}{(n + 1)^2}$ d) $\frac{n - 1}{(2n + 1)^2}$ e) $\frac{(n - 1)^2}{2n + 1}$

TC.45 (CESCEM-76) Sabe-se que $\operatorname{sen} x = a \neq 0$ e $\cos x = b \neq 0$. Logo, $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x =$

a) $\dfrac{a+b}{ab}$ b) $\dfrac{ab}{a+b}$ c) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$ d) $\dfrac{1}{ab}$ e) $\dfrac{1}{a^2+b^2}$

TC.46 (MACK-73) As raízes da equação $2x^2 - px - 1 = 0$ são $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$, sendo θ um número real. O valor de p é:

a) zero b) 2 c) 4 d) 5
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.47 (ITA-71) Seja $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Qual afirmação abaixo é verdadeira?

a) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \leqslant 1$ b) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \leqslant 2$

c) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \geqslant 2$ d) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 2$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.48 (CESCEA-72) Assinale a afirmação falsa:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1\} = \mathbb{R}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \cdot \operatorname{sen}^2(3x) + 2 \cdot \cos^2(3x) = 6\} = \varnothing$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1\} = \mathbb{R}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \sec^2 x > \operatorname{tg}^2 x + 1\} = \varnothing$
e) não sei

TC.49 (CESCEM-70) Se $\theta = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$, k inteiro, então $\dfrac{\cos^2\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta}$ é igual a:

a) $\operatorname{tg}\theta$ b) $\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$ c) $1 + \cos\theta$ d) $1 + \operatorname{sen}\theta$
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.50 (PUC-70) A expressão: $\dfrac{\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x}{\sec x - \cos x}$ é identicamente igual a:

a) $\operatorname{cotg}^3 x$ b) $\sec^2 x$ c) $\operatorname{sen}^2 x + \cos x$ d) $\operatorname{tg}^2 x + \sec x$ e) $\operatorname{cossec}^3 x$

TC.51 (CESCEA-71) A expressão: $\dfrac{\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x}{1 - \operatorname{tg}^4 x}$ é equivalente a:

a) $\cos x + \operatorname{sen} x$ b) $\cos x - \operatorname{sen} x$ c) $\cos^4 x$ d) $\operatorname{sen}^4 x$ e) não sei

TC.52 (GV-75) A expressão $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \dfrac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$ é igual a:

a) $\dfrac{2}{\cos x}$ b) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ c) $\sec x$ d) $2 \operatorname{cossec} x$ e) $\dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

TC.53 (CESCEA-73) As raízes da equação: $x^2 - (2 \cdot \operatorname{tg} a)x - 1 = 0$ são

a) $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{cossec} a$ b) $\operatorname{tg} a \pm \cos a$

c) $\operatorname{tg} a \pm \sec a$ d) não sei

TC.54 (ITA-73) Eliminando θ nas equações:

$$x \cdot \operatorname{sen}\theta + y \cdot \cos\theta = 2 \cdot a \cdot \operatorname{sen}\theta$$
$$x \cdot \cos\theta - y \cdot \operatorname{sen}\theta = a \cdot \cos\theta,\ a > 0$$ temos:

a) $(x+y)^{\frac{2}{3}} - (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a(x+y)^2$ b) $(x+y)^2 + (x-y)^2 = (x+y)a$

c) $(x+y)^{\frac{2}{3}} + (x-y)^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}}$ d) impossível eliminar θ

e) nenhuma das respostas anteriores

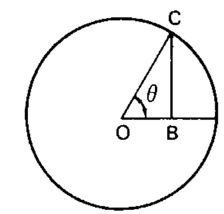
TC.55 (MACK-76) O valor de k, para o qual

$$(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 + k \operatorname{sen} x \cos x - 1 = 0$$

é uma identidade, é:

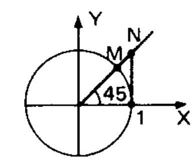
a) -1 b) -2 c) 0 d) 1 e) 2

TC.56 (CESGRANRIO-76) Na figura o raio OA do círculo vale 6. O segmento OB vale 3 e o segmento CB é perpendicular a OA. A medida, em radianos, do ângulo θ é



a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{6}$ c) $\dfrac{\pi}{4}$ d) $\dfrac{\pi}{9}$ e) $\dfrac{3\pi}{8}$

TC.57 (CESCEA-75) Considere a figura ao lado:



O comprimento do segmento MN é:

a) $\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}$ b) $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ c) $-\sqrt{2} + 1$ d) $1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\sqrt{2} - 1$

TC.58 (GV-74) A expressão $\sqrt{\cos\pi + \log_2 16 - e^{\operatorname{sen} 2\pi}}$ tem o mesmo valor numérico que:

a) $2 \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}$ b) $\cos\dfrac{\pi}{2}$ c) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$ d) $e^{\cos\pi}$ e) $\log_e 2$

TC.59 (GV-72) Sabendo-se que $x + y = \dfrac{\pi}{3}$ e $x - y = \dfrac{\pi}{2}$, então, $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$ é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$ e) $\sqrt{2}$

TC.60 (CESCEM-75) O seno de um dos ângulos agudos de um losango é igual a $\dfrac{1}{2}$ portanto a tangente do maior ângulo interno é:

a) -1 b) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

TC.61 (FAAP-75) Conhecida a fórmula:

$$\text{sen}^2 x + \text{sen}^2 2x + \text{sen}^2 3x + \ldots + \text{sen}^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\text{sen}(nx) \cdot \cos[(n+1)x]}{2 \cdot \text{sen} x}$$

válida para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\text{sen}\, x \neq 0$, então a soma

$$\text{sen}^2 \frac{\pi}{3} + \text{sen}^2 \frac{2\pi}{3} + \text{sen}^2 \frac{3\pi}{3} + \ldots + \text{sen}^2 9\frac{\pi}{3} \text{ vale:}$$

a) 0 b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) 9 e) $\frac{9}{2}$

TC.62 (CESCEM-74) Dado o ângulo $\alpha = 1782°$, então:

a) $\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\, 18°$, $\cos\alpha = \cos 18°$, $\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\, 18°$
b) $\text{sen}\,\alpha = -\text{sen}\, 18°$, $\cos\alpha = -\cos 18°$, $\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\, 18°$
c) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\, 18°$, $\cos\alpha = \cos 18°$, $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\, 18°$
d) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\, 18°$, $\cos\alpha = -\cos 18°$, $\text{tg}\,\alpha = \text{tg}\, 18°$
e) $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\, 18°$, $\cos\alpha = \cos 18°$, $\text{tg}\,\alpha = -\text{tg}\, 18°$

TC.63 (FEI-66) Se $\cos x = \frac{3}{5}$, então $\text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ é igual a:

a) $\frac{3}{5}$ b) $-\frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{5}$ d) $-\frac{4}{5}$
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.64 (MACK-76) Se $x = \frac{\pi}{5}$, o valor de $2\cos\pi\,\text{sen}(\pi - x)\text{sen}(\frac{3\pi}{2} + x)$ é igual a:

a) $\cos\frac{2\pi}{5}$ b) $-\frac{2\pi}{5}$ c) $\text{sen}\frac{2\pi}{5}$ d) $-\text{sen}\frac{2\pi}{5}$
e) nenhum dos anteriores

TC.65 (GV-75) $\dfrac{\cos(90° + x) + \cos(180° - x) + \cos(360° - x) + 3\cos(90° - x)}{\text{sen}(270° + x) - \text{sen}(90° + x) - \cos(90° - x) + \text{sen}(360° + x)}$

é igual a:

a) $\text{cotg}\, x$ b) $-\text{tg}\, x$ c) -1 d) 1
e) nenhuma das anteriores

TC.66 (MACK-75) A soma dos 12 primeiros termos da série

$\cos\alpha$, $\cos(\alpha + \pi)$, $\cos(\alpha + 2\pi)$ ... é:

a) $6\cos\alpha$ b) $\cos\alpha$ c) 1 d) 0 e) -1

TC.67 (FFCLUSP-67) $\log \text{tg}\, 1° + \log \text{tg}\, 2° + \log \text{tg}\, 3° + \ldots + \log \text{tg}\, 89° =$

a) 0 b) 1 c) 44,5 d) 89
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.68 (PUC-77) Qual das funções abaixo, é função par?

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ b) $f(x) = x$ c) $f(x) = x^5$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$ e) $f(x) = \text{sen} x$

TC.69 (CESCEM-71) Dizemos que uma função real é par se $f(x) = f(-x)$ e que é ímpar se $f(x) = -f(-x)$. Das afirmativas que seguem indique qual a **falsa**:

a) o produto de duas funções ímpares é uma função ímpar
b) o produto de duas funções pares é uma função par
c) a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar
d) a soma de duas funções pares é uma função par
e) alguma das afirmações anteriores é falsa

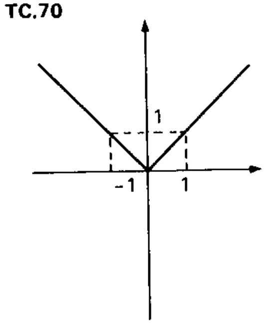
(CESCEA-71) Em cada uma das questões de TC.70 a TC.74 é dado o gráfico de uma função definida em $\mathbb{R}$. Dadas as denominações:

I — função ímpar;
II — função não limitada;
III — função periódica;
IV — função par;
V — função identidade.

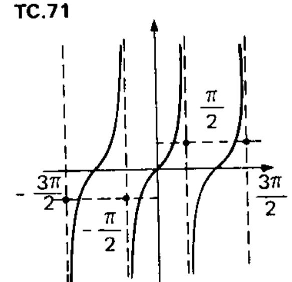
Assinale:

a) se as denominações I, II e III forem verdadeiras para o gráfico da questão
b) se as denominações III e IV forem verdadeiras para o gráfico da questão
c) se as denominações I, II e V forem verdadeiras para o gráfico da questão
d) se as denominações II e IV forem verdadeiras para o gráfico da questão
e) não sei

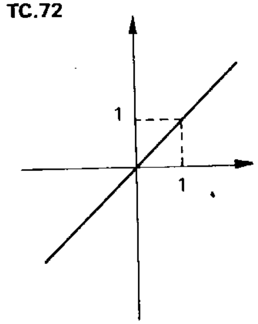
TC.70



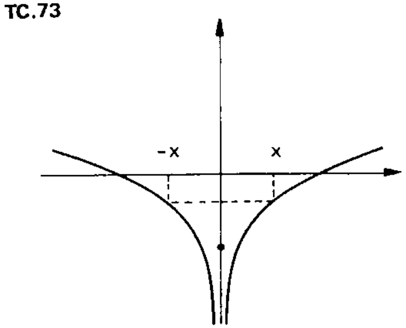
TC.71



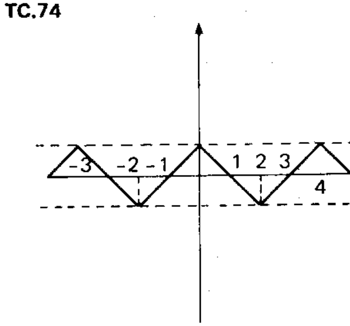
TC.72



TC.73



TC.74



TRANSFORMAÇÕES

TC.75 (CESCEM-73) Sabe-se que $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$ e $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$. O valor de $\operatorname{tg} 15^\circ$ é:

a) $\frac{1}{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\sqrt{3}$ d) $2 + \sqrt{3}$ e) $2 - \sqrt{3}$

TC.76 (MACK-75) Se $0 < a < \frac{\pi}{2}$ e $0 < b < \frac{\pi}{2}$ então:

a) $\operatorname{sen}(a + b) < \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$ quaisquer que sejam a e b
b) $\operatorname{sen}(a + b) > \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$ quaisquer que sejam a e b
c) $\operatorname{sen}(a + b) > \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$ somente se $a > b$
d) $\operatorname{sen}(a + b) < \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b$ somente se $a < b$
e) nenhuma das anteriores

TC.77 (PUC-71) Para todo x real, sempre vale a relação:

a) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1$ b) $2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x$
c) $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ d) $\operatorname{tg} x = 1 + \sec^2 x$
e) $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

TC.78 (MACK-74) A expressão:

$$N = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \cos 8\alpha \cdot \cos 16\alpha \cdot \cos 32\alpha$$

é equivalente a:

a) $N = \operatorname{sen} 63\alpha$ b) $N = \operatorname{sen} 64\alpha$ c) $N = \cos 64\alpha$
d) $N = \frac{\cos 64\alpha}{2^6}$ e) $N = \frac{\operatorname{sen} 64\alpha}{2^6}$

TC.79 (FEI-67) O menor período da função $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x$ é:

a) π b) $2k\pi$ c) $\frac{\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2}$
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.80 (MACK-77) Sejam as funções f_1 e f_2 de domínio IR, definidas por

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \quad e \quad f_2(x) = 3 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Sendo I_1 e I_2 os conjuntos-imagem de f_1 e f_2, respectivamente, tem-se que:

a) $I_1 \subsetneq I_2$ b) $I_2 \subsetneq I_1$ c) $I_1 = I_2$
d) nenhuma das afirmações acima é correta e) Não sei

TC.81 (CESCEM-76) Sabe-se que $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$. Portanto, $\operatorname{sen} 4x =$

a) $4 \operatorname{sen} x \cos x$ b) $4 \operatorname{sen} 2x \cos 2x$ c) $2 \operatorname{sen} 2x \cos x$
d) $2 \operatorname{sen} x \cos 2x$ e) $2 \operatorname{sen} 2x \cos 2x$

TC.82 (GV-73) Sendo x um arco de quarto quadrante e sendo $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$, o valor de $\operatorname{sen} 4x$ é:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

TC.83 (CESCEM-70) Se $\cos 2x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$ então o valor de $\cos 4x$ é:

a) $2 \cos^4 x - 1$
b) $8(\cos^4 x - \cos^2 x) + 1$
c) $4 \cos^2 x - 1$
d) $4 \cos^4 x - 2 \cos^2 x + 1$
e) nenhuma das alternativas anteriores

TC.84 (CESCEA-77) Sabendo-se que $\cos 2x = \frac{2}{3}$, então o valor de $\operatorname{tg}^2 x$ é:

a) $\frac{11}{5}$ b) 1 c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{6}{5}$ e) $\frac{1}{5}$

TC.85 (GV-75) Sendo x um arco do primeiro quadrante e $\operatorname{sen} x = a$, a expressão: $2 \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 2x$ é igual a:

a) $2(1 - 2a^4)$ b) $-2(-1 + 2a^2 - 2a^4)$
c) $2(1 - 2a^2) + 4a\sqrt{1 - a^2}$ d) $4(1 - a^2 - a^4)$
e) nenhuma das anteriores

TC.86 Sabendo que $\operatorname{sen} a = \frac{3}{5}$ e $\cos a = \frac{4}{5}$, então $\operatorname{sen} 2a + \cos 2a$ é igual a:

a) $\frac{14}{5}$ b) $\frac{31}{25}$ c) $\frac{9}{5}$ d) $\frac{17}{25}$ e) $\frac{18}{25}$

TC.87 (CESCEM-77) Sejam f e g funções definidas por $f(x) = \cos 2x$ e $g(x) = \operatorname{sen}^2 x - 1$. Então, $f(x) + g(x)$ é:

a) $-\cos^2 x - 1$ b) $\operatorname{sen} x(2 \cos x + \operatorname{sen} x) - 1$ c) $-\operatorname{sen}^2 x$
d) $\operatorname{sen}^2 x$ e) 0

TC.88 (MACK-74) O período da função f definida por $f(x) = \operatorname{sen}^4 x$ é:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) π d) 2π e) $\sqrt[4]{2\pi}$

TC.89 (MACK-74) O período da função $f(x) = \operatorname{sen}^2 3x - \cos 4x$ é:

a) $\frac{\pi}{12}$ b) π c) $\frac{2\pi}{3}$ d) 2π e) $\frac{5\pi}{6}$

TC.90 (CESCEA-73) A expressão: $\frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$ é idêntica a:

a) $\sec 2x$ b) $\operatorname{tg} 2x$
c) $\operatorname{tg} 4x$ d) não sei

TC.91 (CESCEM-73) Seja $f(x) = \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4}) \cdot \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4})$ podemos afirmar que:

a) $f(0) = -1$ e $f(\frac{\pi}{4}) = 0$
b) qualquer que seja x, $f(x)$ está definida e vale -1
c) se $x = k\pi$, $f(x) = -1$ e se $x \neq k\pi$, $f(x) \neq -1$ $(k \in \mathbb{Z})$
d) se $x \geqslant 0$, $f(x) = -1$
e) $f(x) = -1$ nos pontos onde a função estiver definida

TC.92 (MACK-74) Seja $w = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha$ com $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, então:

a) $w \leqslant 0{,}5$ b) $-1 \leqslant w \leqslant 1$ c) $w = 1{,}5$
d) o maior valor de w é 2 e) $w \geqslant 2$

TC.93 (EAESP-GV-77) Se $\operatorname{tg} x = t$, então, $\cos 2x + \operatorname{sen} 2x$ é equivalente à:

a) $\frac{(1-t)^2}{1+t^2}$ b) $\frac{1-2t-t^2}{1+t^2}$ c) $1 + t^2$
d) $1 + 2t - t^2$ e) $\frac{1+2t-t^2}{1+t^2}$

TC.94 (MACK-69) Outra forma para a expressão $\frac{3 \cdot \operatorname{sen} 2x}{1 - \cos 2x}$ é:

a) $\frac{3}{\operatorname{cotg} x}$ b) $\operatorname{cotg} x$ c) $\frac{\operatorname{cotg} x}{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$ d) $\frac{\operatorname{cotg} x}{3}$ e) $3 \cdot \operatorname{cotg} x$

TC.95 (ITA-94) $\left[\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right]^2$ vale:

a) $\frac{1 - 2 \cdot \operatorname{sen} 2x}{1 + \operatorname{sen} 2x}$ b) $\frac{1 + 2 \cdot \operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x}$ c) $\frac{1 + \operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x}$
d) $\frac{1 - \operatorname{sen} 2x}{1 + \operatorname{sen} 2x}$ e) nenhuma das respostas anteriores

TC.96 (MACK-76) Se $\operatorname{tg} x = m$ e $\operatorname{tg} 2x = 3m$, $m > 0$, o ângulo agudo x mede:

a) 15° b) 60°
c) 45° d) 30°
e) 22°30′

TC.97 (ITA-77) Seja $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \log \frac{n\pi}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots\}$. Com respeito à função $f: D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(3e^x)}{\operatorname{sen} e^x} - \frac{\cos(3e^x)}{\cos e^x}$, podemos afirmar que:

a) $f(x) = 2$ para todo x em D
b) $f(x) = 3$ para todo x em D
c) $f(x) = e^3$ para todo x em D
d) $f(x)$ não é constante em D
e) nenhuma das anteriores

TC.98 (MACK-74) Sendo u a medida em radianos de um ângulo e $v = \frac{\pi}{4} - u$, a expressão $S = \frac{\operatorname{sen} u + \cos u}{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} u \cdot \cos u}$ em função de $x = \cos v$ é:

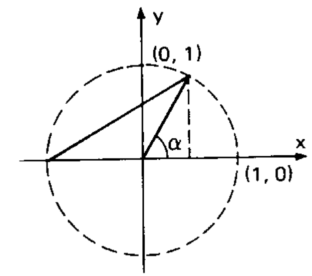
a) $\frac{2x}{x^2+1}$ b) $\frac{x}{2x^2+1}$ c) $\frac{2x}{1-x^2}$ d) $\frac{2x}{2x^2-1}$ e) $\frac{2x}{x^2+2}$

TC.99 (UNB-74) Para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ a expressão: $\frac{1}{2}\sqrt{2(1 - \cos t)}$ é igual a:

a) $\cos(\frac{1}{2})$ b) $|\cos(\frac{t}{2})|$
c) $\operatorname{sen}(\frac{t}{2})$ d) nenhuma das anteriores

TC.100 (MACK-73) Seja $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Da figura abaixo pode-se concluir diretamente que:

a) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}$
b) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha}$
c) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$
d) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-\operatorname{sen}\alpha}{1 - \cos\alpha}$
e) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{1 + \operatorname{sen}\alpha}}$



TC.101 (EESCUSP-68) Se $\operatorname{cotg}\frac{a}{2} = \sqrt{3}$ então:

a) $\operatorname{sen} a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\operatorname{sen} a = \frac{\sqrt{2}}{3}$ c) $\operatorname{sen} a = \frac{1}{2}$
d) $\operatorname{sen} a = 1$ d) nenhuma das respostas anteriores

TC.102 (CESCEA-69) Se $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ então $\operatorname{tg} a$ vale:

a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 2 d) 1 e) -2

TC.103 (PUC-70) Simplificando-se a expressão: $\frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$, obtém-se:

a) $\operatorname{sen} x$ b) $\cos x$ c) $\operatorname{tg} x$ d) $\operatorname{cotg} x$ e) $\operatorname{cossec} x$

TC.104 (MACK-76) A expressão $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, é equivalente a:

a) $2 \operatorname{sen} x$ b) $2 \sec x$
c) $2 \cos x$ d) $2 \operatorname{cossec} x$
e) $2 \operatorname{tg} x$

TC.105 (FEI-73) Se $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$ e $\cos(a_n) = \frac{n}{n+1}$, $\cos(\frac{a_n}{2})$; vale:

a) $\frac{n}{2(n+1)}$ b) $\sqrt{\frac{2n+1}{2n+2}}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{n+1}{n}}$
d) $\frac{2n}{n+1}$ e) $\frac{1}{n^2}$

TC.106 (FFCLUSP-67) A igualdade $\operatorname{tg} x = a \cdot \operatorname{cotg} x + b \operatorname{cotg} 2x$ é válida para todo **x** real tal que $x \neq \frac{k\pi}{2}$. Então **a** e **b** valem respectivamente:

a) $a = 1,\ b = -2$ b) $a = -2,\ b = 1$ c) $a = 1,\ b = 0$
d) $a = 1,\ b = 2$ e) $a = b$

TC.107 (ITA-75) Sabendo-se que $\operatorname{sen} x = \frac{m-n}{m+n}$, $n > 0$ e $m > 0$, podemos afirmar que $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$ é igual a:

a) $\frac{n}{m}$ b) $\frac{\sqrt{m}}{n}$ c) $1 - \frac{n}{m}$
d) $\sqrt{\frac{n}{m}}$ e) nenhuma das anteriores

TC.108 (CESCEA-76) Transformando-se em produto a expressão $\cos 70° - \operatorname{sen} 60°$ obtém-se:

a) $-2 \cos 5° \quad \cos 65°$ b) $2 \cos 5° \quad \cos 65°$
c) $-2 \operatorname{sen} 40° \quad \operatorname{sen} 20°$ d) $+2 \operatorname{sen} 40° \quad \cos 20°$
e) $-2 \operatorname{sen} 20° \quad \cos 40°$

TC.109 (GV-74) Assinalar a afirmação verdadeira:

a) $\operatorname{sen} 20° + \operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen} 50°$
b) $\cos 20° - \cos 10° = \cos 10°$
c) $\operatorname{sen} 20° + \operatorname{sen} 30° = 2 \cdot \operatorname{sen} 25° \cdot \operatorname{sen} 85°$
d) $\cos 20° + \cos 30° = 2 \cdot \cos 25° \cdot \cos 85°$
e) $\operatorname{sen} 30° + \cos 30° = 1$

TC.110 (GV-73) A expressão $\operatorname{sen} x - \cos x$ é idêntica a:

a) $\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{4})$
b) $\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$
c) $2 \cdot \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{4})$
d) $\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$
e) $\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{3})$

TC.111 (MACK-76) A expressão $\operatorname{sen}(135° + x) + \operatorname{sen}(135° - x)$ é igual a:

a) $\sqrt{2} \operatorname{sen} x$ b) $\sqrt{3} \cos x$ c) -1 d) $\sqrt{2} \cos x$ e) $-\sqrt{2} \operatorname{sen} x$

TC.112 (PUC-75) $\operatorname{sen} \alpha + 2 \operatorname{sen} 2\alpha + \operatorname{sen} 3\alpha$ é igual a:

a) $2 \cdot \cos 2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$ b) $4 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$
c) $\operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$ d) $3 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha \cdot \cos 2\alpha$
e) $3 \operatorname{sen} 2 \cdot \cos 2\alpha$

TC.113 (ITA-70) Seja $P = \operatorname{sen}^2 ax - \operatorname{sen}^2 bx$. Temos, então que:

a) $P = \operatorname{sen} ax \cdot \cos bx$ b) $P = \cos \frac{a}{2} x \cdot \operatorname{tg} bx$
c) $P = 2 \cdot \operatorname{sen}(\frac{a+b}{2})x \cdot \cos(\frac{a-b}{2})x$
d) $P = \operatorname{sen}(a+b)x \cdot \operatorname{sen}(a-b)x$
e) nenhuma é válida

TC.114 (MACK-77) O menor valor que y pode assumir na igualdade $y = \cos x + \cos 2x$ é:

a) $-\frac{3}{4}$ b) $-\frac{7}{8}$ c) -1 d) $-\frac{9}{8}$ e) não sei

TC.115 (MACK-74) Sendo $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x-y}{2} \cdot \cos \frac{x+y}{2}$ e lembrando que $|\operatorname{sen} z| \leqslant |z|$; $|\cos t| \leqslant 1$ e $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; podemos afirmar que, para quaisquer números x e y reais:

a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant \frac{|x+y|}{2}$ b) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant \frac{|x-y|}{2}$
c) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y|$ d) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant 2|x^2 - y^2|$
e) nenhuma das anteriores

TC.116 (GV-75) A expressão $\frac{\operatorname{sen}(a-x) + \operatorname{sen}(2a-3x)}{\cos(a-x) + \cos(2a-3x)}$ é o mesmo que:

a) $-\operatorname{tg}(a - \frac{3}{2}x)$ b) $\operatorname{cotg}(a - \frac{3}{2}x)$ c) $-\operatorname{tg}(\frac{3}{2}a - 2x)$
d) $\operatorname{cotg}(\frac{3}{2}a - 2x)$ e) nenhuma das anteriores

TC.117 (MACK-74) Sendo **u** a unidade em radianos de um ângulo e $v = \frac{\pi}{4} - u$, a expressão:

$S = \frac{\operatorname{sen} u + \cos u}{\sqrt{2} \cdot \operatorname{sen} u \cdot \cos u}$ em função de $x = \cos v$ é:

a) $\frac{2x}{x^2+1}$ b) $\frac{x}{2x^2+1}$ c) $\frac{2x}{1-x^2}$ d) $\frac{2x}{2x^2+1}$ e) $\frac{2x}{x^2+2}$

TC.118 (PUC-75) $\cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{8\pi}{12}$ vale:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}+1)$ b) $-\frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}-1)$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{8}(1-\sqrt{3})$
d) $-\frac{\sqrt{2}}{8}(2\sqrt{3}-1)$ e) $-\frac{\sqrt{2}}{8}(1-2\sqrt{3})$

TC.119 (MACK-75) Simplificando-se: $4 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}(60^\circ - \alpha) \cdot \operatorname{sen}(60^\circ + \alpha)$ obtém-se:

a) $\operatorname{sen}\alpha$ b) $\operatorname{sen}3\alpha$ c) $\operatorname{sen}2\alpha$ d) $\operatorname{sen}5\alpha$ e) $\operatorname{sen}4\alpha$

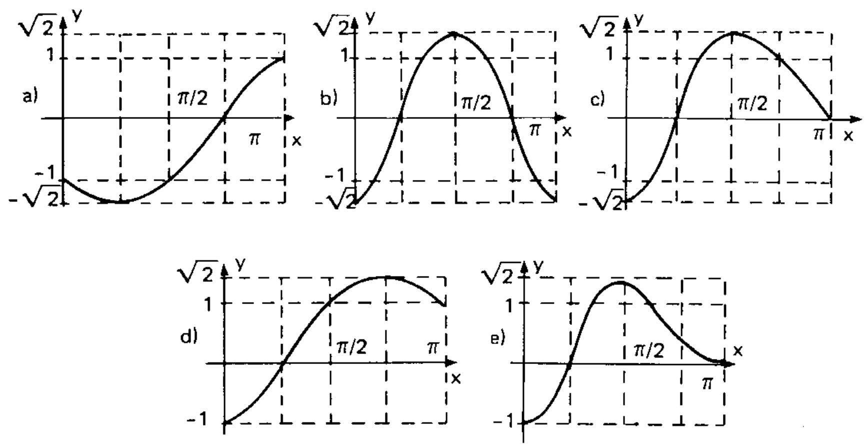
TC.120 (ITA-69) Para que valores de t o sistema

$$\begin{cases} x + y = \pi \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \log_{10} t^2 \end{cases}$$

admite solução:

a) $0 < t < 10$ b) $0 < t < 10\pi$ c) $0 < t < 10^2$
d) $0{,}1 < t \leqslant 10$ e) nenhum dos intervalos anteriores

TC.121 (GV-75) O gráfico de $y = \operatorname{sen} x - \cos x$, para $0 \leqslant x \leqslant \pi$ é:



EQUAÇÕES

TC.122 (FUVEST-77) No intervalo $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, a equação

$$\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} + \cos x = -\sqrt{2}$$

a) não admite solução b) admite como solução $x = \frac{3\pi}{4}$

c) admite como solução $x = \frac{2\pi}{3}$ d) admite como solução $x = \frac{5\pi}{6}$

e) admite como solução $x = \pi$

TC.123 (PUC-76) Os valores de x que satisfazem a equação $\cos(3x - \frac{\pi}{5}) = 0$, são:

a) $x = \frac{7\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

b) $x = \frac{7\pi}{15} + k\frac{\pi}{3}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

c) $x = \frac{7\pi}{2} + k\frac{\pi}{4}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

d) $x = \frac{7\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

e) $x = \frac{7\pi}{4} + k\frac{\pi}{6}$; $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

TC.124 (MACK-76) O menor valor positivo de x, para o qual $9^{-\cos x} = \frac{1}{3}$, é:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{2\pi}{3}$

TC.125 (CESCEM-73) Se o ponto $(x_0; y_0)$ pertence ao gráfico da função $y = \operatorname{tg} x$, então uma condição necessária e suficiente para que o ponto $(a; y_0)$ também pertença a este gráfico é:

a) $a = \operatorname{tg} x_0$ b) que $(a - x_0)$ seja múltiplo de π

c) $a = \frac{\pi}{2}$ d) $a = \operatorname{arctg} x_0$

e) $(a - x_0) = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

TC.126 (EESCUSP-68) As soluções da equação $\operatorname{sen}\pi x = \operatorname{sen}[\pi \cdot (2x + 1)]$ são da forma:

a) $x = \frac{a}{3}$ onde a é inteiro

b) x = qualquer inteiro positivo

c) $x = \frac{a}{2}$ onde a é natural

d) x = qualquer racional

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.127 (ITA-77) Resolvendo a equação $\operatorname{tg}(2\log x - \frac{\pi}{6}) - \operatorname{tg}(\log x + \frac{\pi}{3}) = 0$ temos:

a) $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$; $k = 0, 1, 2, \dots$

b) $x = e^{\pi/2 \pm k\pi}$; $k = 0, 1, 2, \dots$

c) $\log x = \frac{\pi}{6} \pm k\pi$; $k = 0, 1, 2, \dots$

d) $x = e^{\pi/6 \pm 2k\pi}$; $k = 0, 1, 2, \dots$

e) nenhuma das anteriores

TC.128 (CESGRANRIO-77) O número de raízes da equação $\cos x + \operatorname{sen} x = 0$

no intervalo $[\pi, 3\pi]$ é:

a) 2 b) 1 c) 3 d) 4 e) 0

TC.129 (MACK-75) Se $tg\,4x + tg(2x - \frac{\pi}{4}) = 0$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, então x pode ser igual a:

a) $\frac{\pi}{16}$ b) $\frac{3\pi}{24}$ c) $\frac{5\pi}{24}$ d) $\frac{7\pi}{24}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.130 (CESCEA-70) Se a é a menor raiz positiva da equação $(tg\,x - 1) \cdot (4 \cdot sen^2 x - 3) = 0$ então, o valor de $sen^4 a - cos^2 a$ é

a) $\frac{5}{16}$ b) 0 c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $-\frac{1}{2}$

TC.131 (CESCEA-75) A soma das raízes da equação $1 - 4 \cdot cos^2 x = 0$, compreendidas entre 0 e π é:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) π c) $\frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{5\pi}{6}$ e) $\frac{7\pi}{6}$

TC.132 (CESGRANRIO-76) No intervalo $[0, 6\pi]$ a equação trigonométrica

$$cos\,2x + 2\,sen^2 x + 2 = 0$$

a) possui uma infinidade de raízes b) possui exatamente duas raízes
c) não possui raízes d) possui uma única raiz
e) possui exatamente três raízes

TC.133 (ITA-69) A equação $sen^2 \frac{3x}{2} - cos \frac{3x}{2} = a$ tem solução para valores particulares de a. Assinale o item que lhe parecer correto:

a) $1 < a < \frac{7}{4}$

b) $-2 < a < \frac{5}{4}$

c) $-1 < a < \frac{1}{4}$

d) $1 < a < \frac{3}{2}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.134 (CESCEM-73) Os valores de x entre 0 e 2π que satisfazem a equação: $2 \cdot sen^2 x + |sen\,x| - 1 = 0$ são:

a) aqueles para os quais $sen\,x = \frac{1}{2}$ ou $sen\,x = -1$

b) $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{6}$; $x = \frac{7\pi}{6}$; $x = \frac{11\pi}{6}$

c) $x = \pi$

d) $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

e) $x = \frac{\pi}{6}$; $x = \frac{5\pi}{6}$; $x = \frac{3\pi}{2}$

TC.135 (GV-75) A solução da equação: $\frac{625^{cos^2 x}}{25^{cos\,x}} = 1$ para $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ é:

a) $x = 0$

b) $x = \frac{\pi}{6}$

c) $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{6}$

d) $x = \frac{\pi}{3}$

e) $x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{3}$

TC.136 (GV-73) Dada a equação $cos^2 x - 2 \cdot sec^2 x = 1$, com $0 \leqslant x \leqslant \pi$, então

a) $x = \frac{\pi}{4}$ b) $x = \frac{3\pi}{4}$ c) $x = 0$

d) não existe x que satisfaz a equação

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.137 (GV-75) O conjunto de todas as soluções da equação $cos^2 x \cdot tg\,x = sen\,x$, é o conjunto dos números x tais que, x é igual a:

a) $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ b) $2k\pi$ c) $k\pi$ d) $k\pi + \frac{3\pi}{2}$

e) nenhuma das anteriores

TC.138 (CESCEM-73) Em função de um número k inteiro relativo, todas as soluções da equação:

$$cos^4\alpha + sen^4\alpha - 2 \cdot sen^2\alpha \cdot cos^2\alpha = 1$$

são dadas por:

a) $\alpha = \frac{k\pi}{2}$ b) $\alpha = k\pi$ c) $\alpha = \frac{k\pi}{4}$ d) $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e) $\alpha = 2k\pi$

TC.139 (CESCEM-72) A expressão: $sen^6 x + cos^6 x = 1 - 3 \cdot sen^2 x \cdot cos^2 x$

a) é uma equação trigonométrica que só admite raízes no primeiro quadrante
b) é uma equação trigonométrica que só admite um número finito de raízes
c) é uma identidade trigonométrica
d) é uma equação trigonométrica que só admite raízes positivas
e) é uma equação trigonométrica que não admite raízes

TC.140 (ITA-71) Qual é o menor valor de x que verifica a equação $tg\,x + 3 \cdot cotg\,x = 3$?

a) $x = \frac{\pi}{4}$

b) para todo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

c) para nenhum valor de x

d) para todo valor de $x \neq n\frac{\pi}{2}$ onde $n = 0, \pm 1, \pm 2$ ...

e) apenas para x no terceiro quadrante

TC.141 (MACK-77) Os dois ângulos agudos de um triângulo retângulo não isósceles são raízes da equação (em x):

$$3\,\text{tg}\,x + k^2\,\text{cotg}\,x = 4k.$$

Então:

a) $k = 1$ b) $k = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ c) $k = \sqrt{3}$ d) $k = \dfrac{1}{3}$ e) Não sei

TC.142 (UNB-74) Se $\sec^2 x + \text{tg}\,x - 7 = 0$ e $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ então:

a) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\cos x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$ c) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$ d) nenhuma das anteriores

TC.143 (CESCEA-71) O conjunto solução da equação $3 \cdot \text{tg}^2 x + 5 = \dfrac{7}{\cos x}$, no intervalo fechado $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ é:

a) $\left\{\dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{6}, 0\right\}$ b) $\left\{\dfrac{\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right\}$ c) $\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$

d) $\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{6}\right\}$ e) não sei

TC.144 (FEI-73) A equação $\text{sen}\,2x = \text{sen}\,x$, no intervalo $-\dfrac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{4}$ tem:

a) nenhuma solução b) 2 soluções c) 3 soluções d) 4 soluções e) 5 soluções

TC.145 (ITA-72) Assinale uma solução para a equação trigonométrica $\sqrt{3} \cdot \text{sen}\,x + \cos x = \sqrt{3}$

a) $x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{6}$

b) $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6}$

c) $x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2}$

d) $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.146 (ITA-73) Seja a equação $(\log_e m) \cdot \text{sen}\,x \pm \cos x = \log_e m$. Quais as condições sobre m para que a equação admita solução?

a) $m > 0$ se $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$, $m > 0$ e $m \neq 1$ se $x \neq (2k\pi + \frac{1}{2})\pi$

b) $m \neq 0$ se $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$, $m \geqslant 0$ e $m \neq e$ se $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$

c) $m > e$ se $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$, $m \geqslant 1$ se $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$

d) $m > -\frac{1}{e}$ e $m \neq 0$ se $x = (2k + \frac{1}{2})\pi$, $m \neq 0$ se $x \neq (2k + \frac{1}{2})\pi$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.147 (PUC-73) Se $\dfrac{1 - \text{tg}\,x}{1 + \text{tg}\,x} = 1 - \text{sen}\,2x$, então os valores de x são:

a) $k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) b) $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

c) $2k\pi + \pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) d) $2k\pi - \pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

e) $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

TC.148 (MACK-74) $f(x) = \cos^2(x - \frac{\pi}{4}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{4})$ é

a) igual a 1 para todo x real;

b) igual a 1 exclusivamente para $x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$, k sendo inteiro

c) igual a 1 só para $x = 0$

d) periódica de período $\dfrac{\pi}{2}$

e) sempre diferente de 1

TC.149 (POLI-68) No intervalo $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ o número de soluções da equação trigonométrica $\cos^9 x + \cos^8 x + \cos^7 x + \ldots + \cos x + 1 = 0$

a) é zero
b) é um
c) é dois
d) é quatro
e) nenhuma das anteriores

TC.150 (ITA-71) A equação $\{\text{sen}(\cos x)\} \cdot \{\cos(\cos x)\} = 1$ é satisfeita para:

a) $x = \dfrac{\pi}{4}$ b) $x = 0$

c) nenhum valor de x d) todos os valores de x

e) todos os valores de x pertencentes ao terceiro quadrante

TC.151 (GV-72) Sendo $0 < x < \pi$, a equação $2 \log \text{sen}\,x + \log 2 = 0$ tem por solução

a) $\dfrac{\pi}{4}$ b) $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}$ c) $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$ d) $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}$ e) nenhuma das anteriores

TC.152 (ITA-72) Quais condições devem satisfazer **a** e **k** para que a seguinte igualdade tenha sentido?

$$\log(\sec a) = k$$

a) $-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$, $k \geqslant 0$ b) $-\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{\pi}{2}$, $k < 0$

c) $-\dfrac{\pi}{2} < a \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $k > 0$ d) $\dfrac{\pi}{2} < a < \dfrac{3\pi}{2}$, $k \geqslant 0$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.153 (MACK-77) O número de soluções reais da equação $x^2 - x - \cos x = 0$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ é:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) Não sei

TC.154 (SANTA CASA-77) O menor valor de x que satisfaz à equação $\log x = \cos x$ está entre:

a) 0 e 1 b) 1 e 1,6 c) 1,6 e 2,4 d) 2,4 e 3,2 e) 3,2 e 4,0

TC.155 (ITA-71) Dada a equação $\log(\cos x) = \operatorname{tg} x$, as soluções desta equação em x satisfazem a relação:

a) $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2$ b) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ c) $0 < x < \pi$

d) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e) nenhuma das respostas anteriores

TC.156 (ITA-76) Resolvendo a equação

$3\,\text{sen}^2(e^x) - 2\sqrt{3}\cdot \text{sen}(e^x)\cdot \cos(e^x) - 3\cos^2(e^x) = 0$

obtemos:

a) $e^x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

b) $x = \log_e(2k\pi \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\pi)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

c) $e^x = k\pi + \frac{\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

d) $x = \log_e(\frac{k}{2}\pi - \frac{\pi}{6})$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.157 (ITA-73) Seja a equação $3\operatorname{tg} 3x = [3(\log_e t)^2 - 4\log_e t + 2]\operatorname{tg} x$, $x \neq n\pi$. Quais as condições sobre t para que a equação acima admita solução?

a) $0 < t < \frac{1}{e}$ ou $e^{\frac{1}{3}} < t < e$ ou $t > e^{\frac{7}{3}}$

b) $e^{\frac{1}{3}} \leqslant t \leqslant e^{\frac{3}{2}}$ ou $0 < t < e$

c) $e^{\frac{1}{4}} < t \leqslant e^{\frac{2}{3}}$ ou $\frac{1}{e} > t$

d) $t > 0$ e $t \neq 1$

e) nenhuma das anteriores

FUNÇÕES CIRCULARES INVERSAS

TC.158 (MACK-74) Sejam f, g e h funções de A em A, onde $A = [-1, 1]$, assim definidas:

$$f(x) = \text{sen}\, x; \quad g(x) = \text{sen}\,\pi x; \quad h(x) = \frac{\pi}{2}x.$$

Podemos afirmar que:

a) todas são inversíveis b) todas são sobrejetoras
c) só uma é injetora d) só uma é sobrejetora
e) só uma é injetora e sobrejetora

TC.159 (MACK-73) O domínio da função definida por $y = \text{arc sen}(\sqrt{2x - 3})$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 0$ ou $\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4\}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.160 (MACK-77) O valor de $\text{arcsen}(\cos\frac{33\pi}{5})$ é:

a) $\frac{3\pi}{5}$ b) $\frac{-\pi}{10}$ c) $\frac{\pi}{10}$ d) $\frac{-3\pi}{5}$ e) não sei

TC.161 (MACK-74) O valor de $\operatorname{tg} 2(\text{arc sen}\frac{\sqrt{3}}{2})$ é:

a) $\sqrt{2}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $-\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

TC.162 (PUC-71) Estando as determinações dos arcos compreendidas entre 0 e $\frac{\pi}{2}$, então o valor da expressão

$$y = \text{sen}\left(\text{arc sen}\frac{1}{1+a^2} + \text{arc cos}\frac{1}{1+a^2}\right) \text{ é:}$$

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 3 d) $\frac{2}{3}$ e) 0

TC.163 (ITA-72) Para todo α e β; $|\beta| < 1$, a expressão $\operatorname{tg}(\text{arc tg}\,\alpha + \text{arc sen}\,\beta)$ é igual a:

a) $\dfrac{-\beta + \alpha\sqrt{1-\beta^2}}{\alpha\beta - \sqrt{1-\beta^2}}$ b) $\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\beta + \sqrt{1-\beta^2}}$

c) $\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha\beta\sqrt{\beta^2 - 1} - 1}$ d) $\dfrac{\sqrt{1-\beta^2}(\alpha - \beta)}{\alpha\beta - 1}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.164 (PUC-70) $2\,\text{arctg}\frac{1}{3} + \text{arctg}\frac{1}{7}$ é igual:

a) $\frac{3\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{4}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.165 (LINS-67) Admitindo a variação de $\text{arcsen}\,x$ no intervalo fechado $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, a solução da equação $\text{arcsen}\,x = 2\,\text{arcsen}\frac{1}{2}$ é:

a) $x = -2$

b) $x = 1$

c) $x = \pi$

d) $x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.166 (MACK-75) O conjunto solução de $\text{arcsen}\, 2x - 3\, \text{arcsen} x = 0$ tem:

a) 0 elementos b) 1 elemento c) 2 elementos
d) 3 elementos e) 4 elementos

TC.167 (VALEPARAIBANA-72-SJC) Resolvendo a equação

$$\text{arctg}\left(\frac{1 + e^x}{2}\right) + \text{arctg}\left(\frac{1 - e^x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

obtemos:

a) $x = 0$ b) $x = \pm 1$ c) $x = \pm 2$ d) $x = \pm 3$
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.168 (MACK-76) Sendo $f(x) = \text{arc sen}\, x$ e $g(x) = 1 + \text{cotg}^2 x$, o valor de $(g \circ f)\left(\frac{1}{3}\right)$ é:

a) $\frac{17}{9}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{8}{9}$ d) 1 e) 9

TC.169 (ITA-71) Consideremos a equação $\{\log_e (\text{sen}\, x)\}^2 - \log_e (\text{sen}\, x) - 6 = 0$ a(s) solução(es) da equação acima é dada por:

a) $x = \text{arc sen}(e^2)$ e $x = \text{arc sen}(3)$ b) $x = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right)$ e $x = \text{arc sen}\left(\frac{1}{3}\right)$

c) $x = \text{arc tg}(e^2)$ e $x = \text{arc cos}(3)$ d) $x = \text{arc sen}\left(\frac{1}{e^2}\right)$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.170 (ITA-75) Seja $S = \log_3(\text{tg}\, x_1) + \log_3(\text{tg}\, x_2) + \log_3(\text{tg}\, x_3) + \ldots$ onde

$x_1 = \frac{\pi}{3}$ e $x_{n+1} = \text{arc tg}\left(\sqrt{\text{tg}\, x_n}\right) \cdot n = 2, 3, \ldots$

Nestas condições, podemos assegurar que:

a) $S = \log_3(\text{tg}x_1 + \text{tg}x_2 + \text{tg}x_3 + \ldots)$ b) $S = -1$ c) $S = 2$

d) $S = 1$ e) nenhuma das anteriores

TC.171 (ITA-72) Consideremos a função $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen}\, x)^n$, onde $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Para que valores de x temos $10 \leqslant S(x) \leqslant 20$?

a) $\text{arc sen}\, \frac{9}{10} \leqslant x \leqslant \text{arc sen}\, \frac{19}{20}$

b) $\text{arc sen}\, \frac{10}{9} \leqslant x \leqslant \text{arc sen}\, \frac{20}{19}$

c) $\text{arc sen}\, \frac{10}{11} \leqslant x \leqslant \text{arc sen}\, \frac{20}{21}$

d) $\text{arc sen}\, \frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \text{arc sen}\, \frac{\sqrt{3}}{2}$

e) nenhuma das respostas anteriores

INEQUAÇÕES

TC.172 (CESCEA-74) A solução da desigualdade $\text{sen}^2 x - \frac{1}{2} \geqslant 0$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

a) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$

b) $\frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{3}$

d) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6} \leqslant x \leqslant \pi$

e) não sei

TC.173 (CESCEM-72) Considere a desigualdade $\text{sen}\, x + \text{sen}^2 x > 0$; pode-se afirmar que:

a) só está satisfeita para x no primeiro quadrante
b) só está satisfeita para x entre 0 e π
c) a desigualdade que se obtém substituindo-se x por $-x$ é equivalente à desigualdade dada
d) os valores de x que a satisfazem são precisamente aqueles para os quais $\text{sen}\, x > 0$
e) existe x no terceiro quadrante que satisfaz a desigualdade

TC.174 (CESCEA-71) A solução da inequação $\text{sen}^2 x < 2\,\text{sen}\, x$, no intervalo fechado $[0, 2\pi]$ é:

a) $0 < x < 2\pi$ b) $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ c) $0 < x < \pi$

d) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e) não sei

TC.175 (GV-72) A solução da inequação $\sqrt{2} \cdot \cos^2 x > \cos x$ no intervalo $[0, \pi]$ é:

a) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$ b) $0 < x \leqslant \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3} \leqslant x < \pi$

c) $0 < x < \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$ d) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$

e) nenhuma das anteriores

TC.176 (MACK-75) Para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, o conjunto-solução de $(\text{sen}\, x + \cos x)^2 > 1$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi < x < \frac{3\pi}{2}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\}$

e) $\varnothing$

TC.177 (ITA-76) A inequação $4\,\text{sen}^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\,\text{sen}\,x + \sqrt{2} < 0$ tem uma solução x, tal que:

a) $45° < x < 60°$ b) $0° < x < 30°$ c) $35° < x < 45°$
d) $60° < x < 75°$ e) nenhuma das respostas anteriores

TC.178 (MACK-73) Se $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ e, para todo x real, $x^2 + x + \text{tg}\,\alpha > \frac{3}{4}$ então:

a) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ c) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$
d) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ e) não existe α nestas condições

TC.179 (CESCEA-71) A solução da inequação $\text{sen}\,2x \cdot (\sec^2 x - \frac{1}{3}) \leqslant 0$, no intervalo fechado $[0, 2\pi]$ é:

a) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2\pi$
b) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leqslant x < \frac{3\pi}{2}$
c) $\frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} \leqslant x < 2\pi$
d) $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$ ou $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$
e) não sei

TC.180 (CESCEA-75) Os valores de $x \in \,]0, \pi[$ para os quais $(1 + \text{sen}\,x) \cdot (1 - \cos x) \cdot (\frac{\pi}{2} - x) < 0$ são tais que:

a) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$
b) $x \neq \frac{\pi}{2}$
c) $\frac{\pi}{2} < x < \pi$
d) $0 < x < \frac{\pi}{2}$
e) $0 < x < \pi$

TC.181 (MACK-73) Os pontos da circunferência trigonométrica, correspondentes às soluções do sistema:

$$\begin{cases} \text{sen}\,2x > 0 \\ \text{cotg}\,x < 0 \end{cases}$$

a) estão todos no primeiro quadrante
b) estão todos no segundo quadrante
c) estão todos no terceiro quadrante
d) estão todos no quarto quadrante
e) não existem

TC.182 (S. CARLOS-68) A inequação $|\cos x| \geqslant \text{sen}\,x$, $0 < x < 2\pi$ **é válida se e somente se:**

a) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ b) $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$
c) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ e $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2\pi$ d) $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$
e) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{8}$

TC.183 (MAUÁ-69) Todos os arcos entre 0 e 2π radianos que satisfazem à desigualdade $\cos x + \sqrt{3} \cdot \text{sen}\,x > \sqrt{2}$ estão compreendidos entre:

a) $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{7\pi}{12}$ radianos b) $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{7\pi}{6}$ radianos
c) $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{\pi}{2}$ radianos d) nenhuma das respostas anteriores

TC.184 (ITA-71) Seja n um número inteiro $n > 1$ e $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Qual afirmação abaixo é sempre verdadeira?

a) $(1 - \text{sen}\,x)^n \geqslant 1 - n \cdot \text{sen}\,x$
b) $(1 - \text{sen}\,x)^n \geqslant 1 - n \cdot \text{sen}\,x$, para apenas n par
c) $(1 - \text{sen}\,x)^n \leqslant 1 - n \cdot \text{sen}\,x$
d) $(1 - \text{sen}\,x)^n \leqslant 1 - n \cdot \cos x$
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.185 (GV-75) Para que $y = \log(1 - \text{sen}^2 x)$ tenha valores reais, devemos ter, para k inteiro:

a) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
b) $(2k - 1)\pi < x < 2k\pi$
c) $2k\pi < x < (2k + 1)\pi$
d) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$
e) $k\pi < x < (k + 1)\pi$

TC.186 (MACK-74) Sendo $\text{sen}\,x - \text{sen}\,y = 2\,\text{sen}\,\frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}$ e lembrando que $|\text{sen}\,z| \leqslant |z|$, $|\cos t| \leqslant 1$ e $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, podemos afirmar que, para quaisquer números x e y reais:

a) $|\text{sen}\,x - \text{sen}\,y| \leqslant \frac{|x + y|}{2}$
b) $|\text{sen}\,x - \text{sen}\,y| \leqslant \frac{|x - y|}{2}$
c) $|\text{sen}\,x - \text{sen}\,y| \leqslant |x - y|$
d) $|\text{sen}\,x - \text{sen}\,y| \leqslant 2|x^2 - y^2|$
e) nenhuma das afirmações acima é verdadeira

TC.187 (ITA-76) A respeito do produto

$$P = (\text{sen}\,(bx) + \text{cossec}(bx))(\cos\,(bx) + \sec\,(bx))(\text{tg}\,(bx) + \text{cotg}\,(bx))$$

podemos afirmar que:

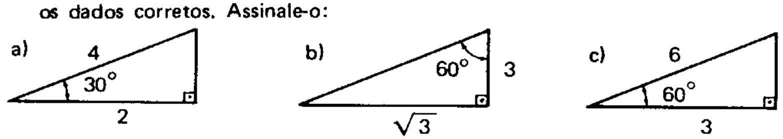
a) P é positivo, para todo x real e $b > 0$
b) P pode ser negativo ou positivo, dependendo da escolha de x e b em $\mathbb{R}$
c) P é negativo para $x = k\pi$ e $b < 0$ ou P é positivo para $x = k\pi$ e $b > 0$, quando $k = 1, 2, \ldots$
d) P é positivo, quando $bx \neq \frac{k}{2}\pi$, para todo $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
e) nenhuma das respostas anteriores

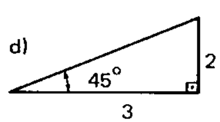
TC.188 (ITA-68) Seja $y = a^{\log \text{tg}\, x}$ com $0 < a < 1$, onde $\log u$ indica o logarítmo neperiano de u. Então, $\log y \geqslant 0$ se:

a) $\frac{\pi}{2} < x \leqslant \pi$ e $\frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$
b) $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ e $\pi \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$
c) $0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}$ e $\pi < x \leqslant \frac{5\pi}{4}$
d) $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ e $\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{4}$
e) $0 < x \leqslant \frac{3\pi}{2}$

TRIÂNGULOS

TC.189 (CESCEA-74) Entre os triângulos retângulos abaixo, um e somente um apresenta os dados corretos. Assinale-o:

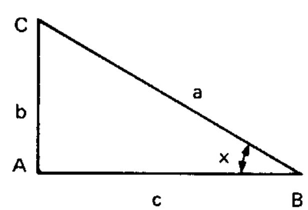




e) não sei

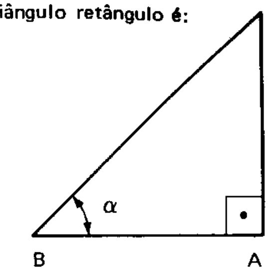
TC.190 (CESCEM-75) Considerando o triângulo retângulo ABC, abaixo, com as seguintes dimensões:
$a = 7{,}5$ m; $b = 4{,}5$ m; $c = 6$ m:
pode-se afirmar que o valor da "tg x" é igual a:

a) 1,25
b) 1,33...
c) 1,66...
d) 0,75
e) 0,6



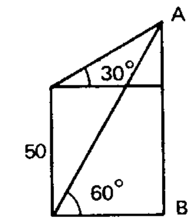
TC.191 (CESCEA-77) A soma dos catetos do triângulo retângulo é:
Dados:
$\overline{BC} = 10$
$\cos\alpha = \frac{3}{5}$

a) 14 b) 12
c) $10\sqrt{3}$ d) 16
e) 10



TC.192 (MACK-77) Na figura ao lado, AB vale:

a) 60
b) 65
c) 70
d) 75
e) não sei

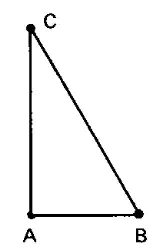


TC.193 (EPUSP-66) AB é a hipotenusa de um triângulo retângulo ABC. A mediana AD mede 7 e a mediana BE mede 4. O comprimento AB é igual a:

a) $2\sqrt{13}$ b) $5\sqrt{2}$ c) $5\sqrt{3}$ d) 10
e) nenhuma das respostas anteriores

TC.194 (GV-70) No triângulo ABC ao lado sabemos que

$\hat{A} = 90°$
$\hat{B} = 60°$
AB = 50 cm

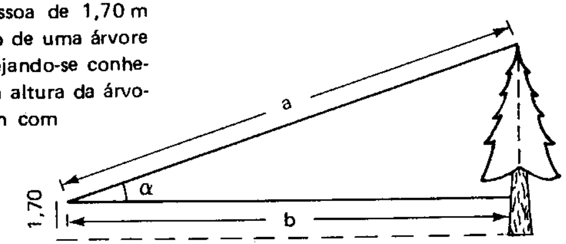


então o segmento AC mede

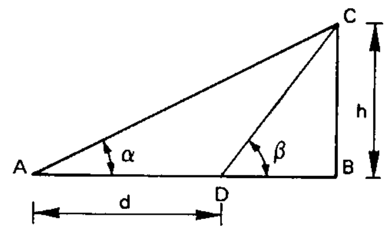
a) 25 cm b) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ cm c) 100 cm d) $50\sqrt{3}$ cm e) $\frac{50\sqrt{2}}{2}$ cm

TC.195 (CESCEM-76) Uma pessoa de 1,70 m de altura observa o topo de uma árvore sob um ângulo α. Desejando-se conhecer, aproximadamente, a altura da árvore, deve-se somar 1,70 m com

a) b tg α
b) a tg α
c) b cos α
d) a cos α
e) b sin α



TC.196 (CESCEA-76) Na figura abaixo



$AD = d$, $BC = h$, $C\hat{A}D = \alpha$, $C\hat{D}B = \beta$. Então:

a) $h = \dfrac{d}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta}$

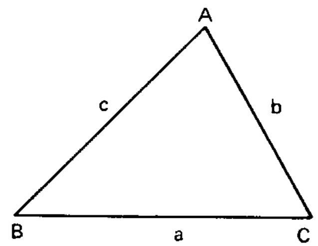
b) $h = \dfrac{d}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$

c) $h = \dfrac{d}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{cotg}\beta}$

d) $h = \dfrac{d}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$

e) $h = \dfrac{d}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$

TC.197 (CESCEA-73) No triângulo ABC da figura, tem-se $b = 2$, $\hat{B} = 45^\circ$, e $\hat{C} = 60^\circ$. Então o lado a mede:



a) $\sqrt{3} - 1$

b) $2 + \sqrt{2}$

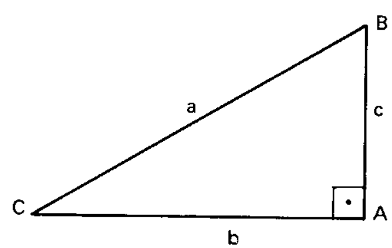
c) $1 + \sqrt{3}$

d) $1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

TC.198 (CESCEM-72) Num triângulo retângulo em que um cateto vale 1 e o outro vale $\operatorname{tg}\varphi$ a hipotenusa vale:

a) $|\sec\varphi|$ b) $\sec\varphi$ c) $\cos\varphi$ d) $\operatorname{sen}\varphi$ e) $\operatorname{cossec}\varphi$

TC.199 (GV-73) Considere o triângulo retângulo e indique por S a sua área. Assinale a afirmação verdadeira



a) $\operatorname{tg}\hat{C} = \dfrac{b}{c}$

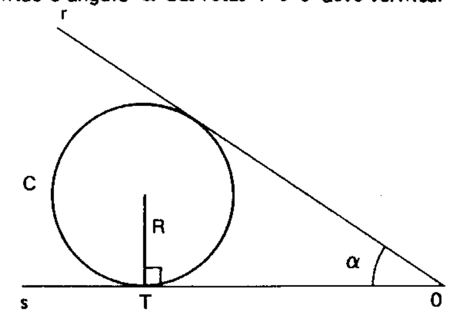
b) $c = a \operatorname{sen}\hat{B}$

c) $S = b^2 \operatorname{tg}\hat{C}$

d) $S = \dfrac{a^2 \cdot \operatorname{sen} 2\hat{B}}{4}$

e) $\cos\hat{B} = \dfrac{b}{c}$

TC.200 (ITA-75) Se, na figura abaixo, c é uma circunferência de raio R, r e s são retas tangentes à circunferência e $\overline{OT} = 2R$, então o ângulo α das retas r e s deve verificar uma das alternativas seguintes:



a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{5}$ e $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$

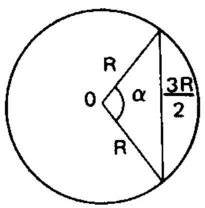
b) $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$

c) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$

d) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}$

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.201 (SANTA CASA-73) Em relação ao ângulo central α, pode-se dizer que:



a) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{8}$

b) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{4}$

c) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$

e) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

TC.202 (MAUÁ-68) Num triângulo ABC cujos ângulos são designados por A, B e C, supõe-se que $2 \cdot \operatorname{tg}\hat{A} = \operatorname{tg}\hat{B} + \operatorname{tg}\hat{C}$ e $0 < \hat{A} < \dfrac{\pi}{2}$. Nesse triângulo vale a relação:

a) $\operatorname{tg}\hat{B} \cdot \operatorname{tg}\hat{C} = 3$ b) $\cos(\hat{B} + \hat{C}) = 2 \cdot \cos A$

c) $\cos(\hat{B} - \hat{C}) = 2 \sec \cdot \hat{A}$ d) $\operatorname{tg}\hat{B} \cdot \operatorname{tg}\hat{C} = \sqrt{3}$

TC.203 (ITA-77) Considere um triângulo ABC cujos ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ verificam a relação $\operatorname{sen}\hat{A} = \operatorname{tg}\dfrac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$. Então podemos afirmar que:

a) com os dados do problema, não podemos determinar $\hat{A}$ nem $\hat{B}$ e nem $\hat{C}$

b) um desses ângulos é reto

c) $\hat{A} = \dfrac{\pi}{6}$ e $\hat{B} + \hat{C} = \dfrac{5\pi}{6}$

d) $\hat{A} = \dfrac{\pi}{3}$, $\hat{B} = \dfrac{\pi}{4}$, $\hat{C} = \dfrac{5\pi}{12}$

e) nenhuma das anteriores

TC.204 (GV-73) Em um triângulo ABC, os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ medem, respectivamente, 60° e 45°; o lado BC mede $5\sqrt{6}$ cm. Então, a medida do lado AC é:

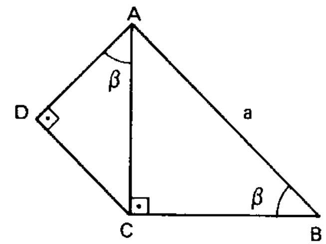
a) 18 cm b) $5\sqrt{12}$ cm c) 12 cm d) 9 cm e) 10 cm

TC.205 (ITA-73) Um navio, navegando em linha reta, passa sucessivamente pelos pontos A, B, C. O comandante quando o navio está em A, observa um farol L, e calcula o ângulo $L\widehat{A}C = 30^\circ$. Após navegar 4 milhas até B, verifica o ângulo $L\widehat{B}C = 75^\circ$. Quantas milhas separa o farol do ponto B?

a) 4 b) $2\sqrt{2}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) nenhuma das anteriores

TC.206 (MACK-76) Na figura ao lado, $\overline{AC} \perp \overline{CB}$ e $\overline{AD} \perp \overline{DC}$: $m(D\widehat{A}C) = m(A\widehat{B}C) = \beta$ e $AB = a$. O valor de $\overline{AD}$, em função de a e de β, é:



a) $\frac{1}{2}$ a sen 2β b) 2 a sen 2β

c) $\frac{1}{2}$ a sen β d) a sen $\frac{\beta}{2}$

e) 2 a sen β

TC.207 (ITA-74) Deseja-se construir uma ferrovia ligando o ponto A ao ponto B que está $40\sqrt{2}$ Km a sudeste de A. Um lago, na planície onde estão A e B impede a construção em linha reta. Para contornar o lago, a estrada será construída em 2 trechos retos com o vértice no ponto C, que está 36 Km a leste e 27 Km ao sul de A. O comprimento do trecho CB é:

a) $\sqrt{182}$ Km b) $\sqrt{183}$ Km c) $\sqrt{184}$ Km d) $\sqrt{185}$ Km

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.208 (EPUSP-66) Os lados de um triângulo estão na razão 6:8:9. Então:

a) o triângulo é obtusângulo b) o triângulo é acutângulo

c) os ângulos estão na razão 6:8:9

d) o ângulo oposto ao lado maior é o dobro do ângulo oposto ao lado menor

e) nenhuma das anteriores

TC.209 (FFCLUSP-67) Dados os segmentos AC e BC e um ângulo $\widehat{B}$, é possível construir-se um triângulo que tenha AC e BC como lados e B como ângulo não adjacente a AC e BC quando:

a) AC > BC b) $B < \frac{\pi}{2}$ c) AC < BC d) $AC = \frac{1}{2}$ BC

e) nenhuma das respostas anteriores

TC.210 (ITA-75) Num triângulo escaleno ABC, os lados opostos aos ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ medem respectivamente a, b, c. Então a expressão:

$$a \cdot \text{sen}(\widehat{B} - \widehat{C}) + b \cdot \text{sen}(\widehat{C} - \widehat{A}) + c \cdot \text{sen}(\widehat{A} - \widehat{B})$$

tem valor que satisfaz uma das seguintes alternativas:

a) $a \cdot \text{sen}\,\widehat{A} + b \cdot \text{sen}\,\widehat{B} + c \cdot \text{sen}\,\widehat{C}$ b) $\text{sen}^2\widehat{A} + \text{sen}^2\widehat{B} + \text{sen}^2\widehat{C}$

c) 0 d) 1 e) nenhuma das respostas anteriores

TC.211 (GV-75) O lado do octógono regular inscrito num círculo de raio unitário é: $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Pode-se concluir que $\cos \frac{\pi}{8}$ vale:

a) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ b) $2 + \sqrt{2}$ c) $2 - \sqrt{2}$ d) $\sqrt{2} - 1$ e) $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$

TC.212 (MACK-74) A base de um retângulo $\overline{AD}$ que é três vezes maior que sua altura $\overline{AB}$, é subdividida pelos pontos M e N em três partes de igual medida. Nessas condições $A\widehat{M}B + A\widehat{N}B + A\widehat{D}B$ é igual a:

a) 120° b) 90° c) 85° d) 135° e) 75°

TC.213 (ITA-75) Seja ABCD um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência. Sabe-se que $\widehat{A} = 2\widehat{C}$, $\widehat{B} > \widehat{D}$ e $\text{tg}\,\widehat{B} \cdot \text{tg}\,\widehat{D} + \text{sen}\,\widehat{A} \cdot \text{sen}\,\widehat{C} = -\frac{9}{4}$.

Neste caso, os valores de $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ são, respectivamente,

a) $150^\circ, 45^\circ, 75^\circ, 30^\circ$ b) $90^\circ, 120^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

c) $120^\circ, 160^\circ, 60^\circ, 30^\circ$ d) $120^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 60^\circ$

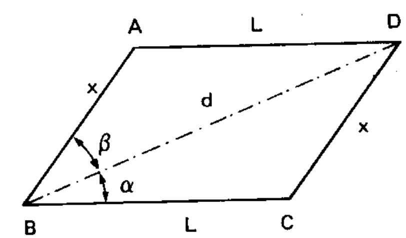
e) nenhuma das anteriores

TC.214 (ITA-77) Sejam A, B e C três pontos distintos de uma reta, com B entre A e C. Sejam a e b (a > 2b) os comprimentos de AB e BC respectivamente. Se o segmento BD é perpendicular ao segmento AC, quanto deve medir BD, para que o ângulo $B\widehat{D}C$ seja a metade de $B\widehat{D}A$?

a) $x = \frac{a}{\sqrt{b(a - 2b)}}$ b) $x = \frac{ab}{\sqrt{b(a - 2b)}}$ c) $x = \frac{b}{\sqrt{a(a - 2b)}}$

d) $x = \frac{ab}{\sqrt{a(a - 2b)}}$ e) nenhuma das anteriores

TC.215 (ITA-77) Sejam d e L respectivamente os comprimentos da diagonal BD e do lado BC do paralelogramo ABCD ao lado. Conhecendo-se os ângulos α e β (ver figura), o comprimento x do lado AB é dado por:



a) $x = \frac{d \cos \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$ b) $x = \frac{d \text{ sen } \alpha}{\text{sen } (\alpha + \beta)}$ c) $x = \frac{L \text{ sen } \alpha}{\cos (\alpha + \beta)}$

d) $x = \frac{L \cos \alpha}{\text{sen } (\alpha + \beta)}$ e) nenhuma das anteriores

RESPOSTAS

TC.1 a
TC.2 c
TC.3 b
TC.4 a
TC.5 e
TC.6 c
TC.7 b
TC.8 c
TC.9 d
TC.10 c
TC.11 a
TC.12 a
TC.13 a
TC.14 c
TC.15 a
TC.16 d
TC.17 b
TC.18 c
TC.19 b
TC.20 a
TC.21 d
TC.22 d
TC.23 c
TC.24 c
TC.25 e
TC.26 b
TC.27 a
TC.28 b
TC.29 c
TC.30 c
TC.31 e
TC.32 d
TC.33 d
TC.34 e
TC.35 a
TC.36 b
TC.37 a
TC.38 c
TC.39 c
TC.40 e
TC.41 d
TC.42 d
TC.43 e
TC.44 a
TC.45 d
TC.46 a
TC.47 c
TC.48 c
TC.49 d
TC.50 a
TC.51 c
TC.52 d
TC.53 c
TC.54 e
TC.55 b
TC.56 a
TC.57 e
TC.58 a
TC.59 a
TC.60 c
TC.61 e
TC.62 a
TC.63 a
TC.64 c
TC.65 b
TC.66 d
TC.67 a
TC.68 a
TC.69 a
TC.70 d
TC.71 a
TC.72 c
TC.73 d
TC.74 b
TC.75 e
TC.76 a
TC.77 b
TC.78 e
TC.79 a
TC.80 a
TC.81 e
TC.82 e
TC.83 b
TC.84 e
TC.85 a
TC.86 b
TC.87 c
TC.88 a
TC.89 b
TC.90 b
TC.91 e
TC.92 e
TC.93 e
TC.94 e
TC.95 d
TC.96 d
TC.97 a
TC.98 d
TC.99 c
TC.100 b
TC.101 a
TC.102 a
TC.103 d
TC.104 d
TC.105 b
TC.106 a
TC.107 e
TC.108 e
TC.109 c
TC.110 a
TC.111 d
TC.112 b
TC.113 d
TC.114 d
TC.115 c
TC.116 e
TC.117 d
TC.118 a
TC.119 b
TC.120 d
TC.121 d
TC.122 a
TC.123 a
TC.124 c
TC.125 b
TC.126 e
TC.127 b
TC.128 a
TC.129 c
TC.130 c
TC.131 b
TC.132 c
TC.133 c
TC.134 b
TC.135 d
TC.136 d
TC.137 c
TC.138 b
TC.139 c
TC.140 c
TC.141 c
TC.142 b
TC.143 c
TC.144 d
TC.145 b
TC.146 e
TC.147 a
TC.148 a
TC.149 b
TC.150 c
TC.151 d
TC.152 e
TC.153 c
TC.154 b
TC.155 a
TC.156 d
TC.157 a
TC.158 e
TC.159 b
TC.160 b
TC.161 b
TC.162 b
TC.163 a
TC.164 d
TC.165 e
TC.166 d
TC.167 a
TC.168 e
TC.169 d
TC.170 d
TC.171 c
TC.172 b
TC.173 d
TC.174 c
TC.175 a
TC.176 b
TC.177 c
TC.178 b
TC.179 b
TC.180 c
TC.181 e
TC.182 c
TC.183 a
TC.184 a
TC.185 a
TC.186 c
TC.187 d
TC.188 c
TC.189 c
TC.190 d
TC.191 a
TC.192 d
TC.193 a
TC.194 d
TC.195 a
TC.196 c
TC.197 c
TC.198 a
TC.199 d
TC.200 a
TC.201 d
TC.202 a
TC.203 b
TC.204 e
TC.205 b
TC.206 a
TC.207 d
TC.208 b
TC.209 a
TC.210 c
TC.211 e
TC.212 b
TC.213 d
TC.214 d
TC.215 b