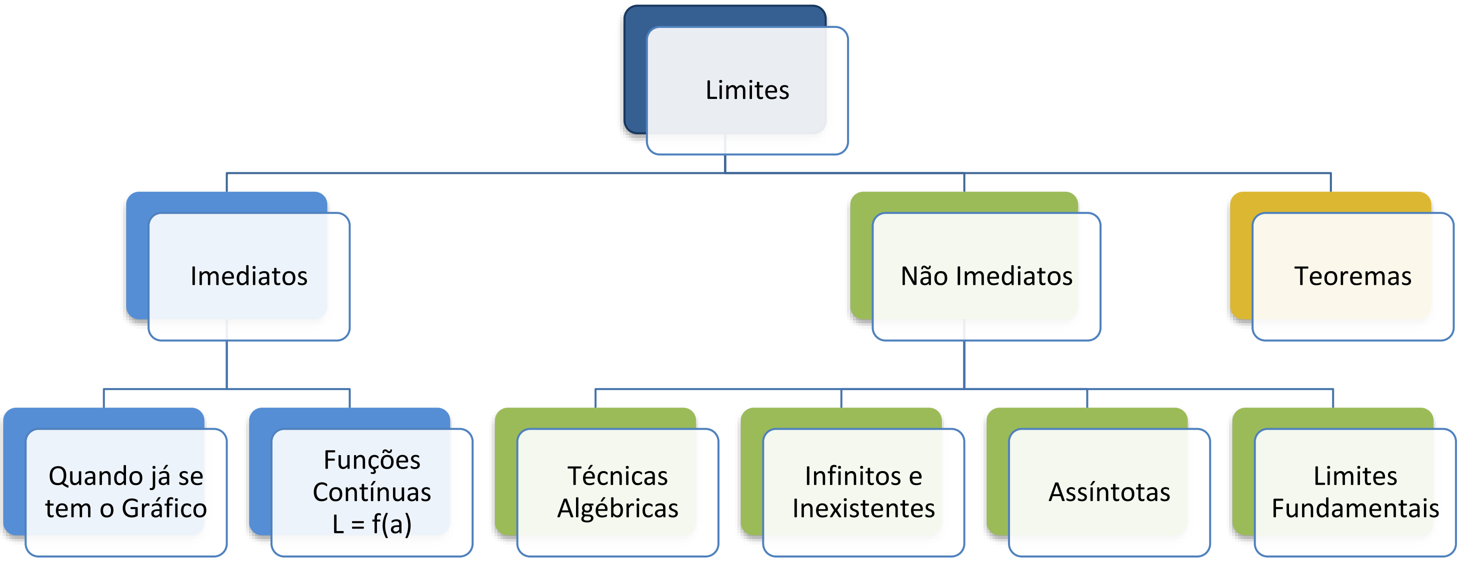
Limites: *Teoria*

Sumário

1 Limites


Limites
Imediatos
Não Imediatos
Teoremas
Quando já se tem o Gráfico
Funções Contínuas L = f(a)
Técnicas Algébricas
Infinitos e Inexistentes
Assíntotas
Limites Fundamentais

Espaço para Anotações

1.1 Verificar ou calcular o valor dos limites

1.1.1 Limites Triviais ou Imediatos:

a) Quando já se tem o gráfico ou quando ele é facilmente esboçável

Limites Laterais

Escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

e dizemos que:

$\boldsymbol{o\ limite\ de\ f(x)}$ é $\boldsymbol{igual\ a\ (L)\ quando\ x\ se\ aproxima\ de\ (a)\ pela\ esquerda.}$

Isso quer dizer que quanto mais próxima a variável independente $(\boldsymbol{x})$ *estiver da abscissa* $(\boldsymbol{a})$,

a partir de valores menores que $(\boldsymbol{a})$, *mais próxima a variável dependente* $(\boldsymbol{y})$ *estará da ordenada* $(\boldsymbol{L})$.

Analogamente:

Escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

e dizemos que:

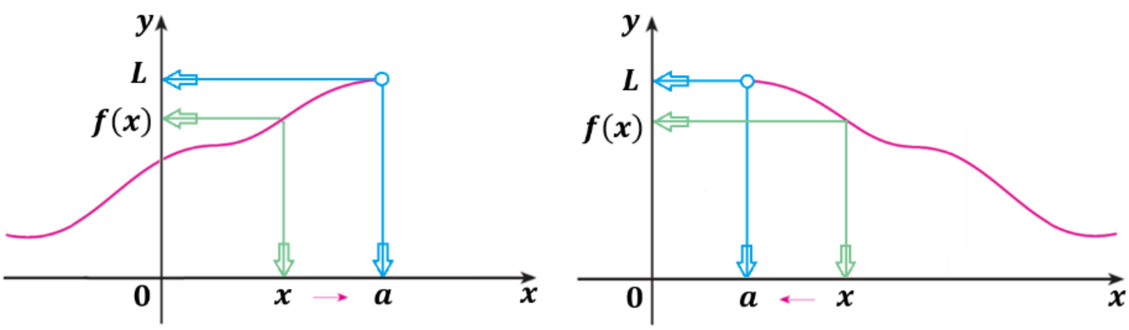
$\boldsymbol{o\ limite\ de\ f(x)}$ é $\boldsymbol{igual\ a\ (L)\ quando\ x\ se\ aproxima\ de\ (a)\ pela\ direita.}$

Isso quer dizer que quanto mais próxima a variável independente $(\boldsymbol{x})$ *estiver da abscissa* $(\boldsymbol{a})$,

a partir de valores maiores que $(\boldsymbol{a})$, *mais próxima a variável dependente* $(\boldsymbol{y})$ *estará da ordenada* $(\boldsymbol{L})$.

Definição Simplificada

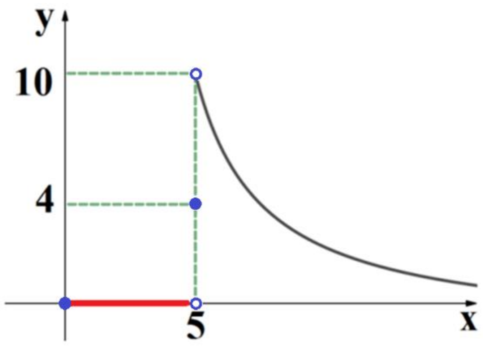
- $\boldsymbol{f(a)}$ é ***o valor da ordenada*** *que uma* ***função qualquer*** *atinge quando* $\boldsymbol{x}$ ***vale a***
- ***Limite de*** $\boldsymbol{f(x)}$ é ***o valor da ordenada*** *para a qual* ***tende*** *uma* ***função contínua*** *quando* $\boldsymbol{x}$ ***tende para a***



$a)\ \lim_{x \to a^-} f(x) = L$ $\qquad$ $b)\ \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

$1^{\underline{o}}$ *Caso*: *o gráfico já está desenhado, basta olhar e responder*

1) *Identifique quais são os Limites à Esquerda e à Direita da abscissa* 5:



Respostas:

$\lim_{x\to 5^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 5^+} f(x) =$

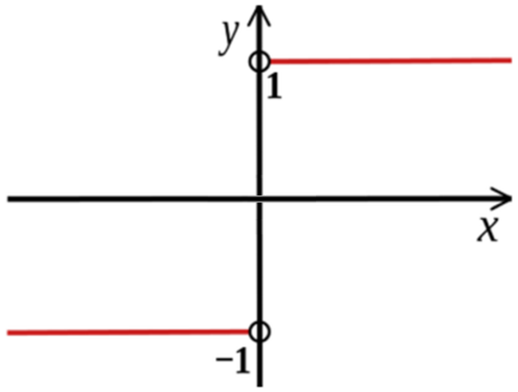
Mas lembre que: $f(5) =$

$2^{\underline{o}}$ *Caso*: *gráficos facilmente esboçáveis*

2) *Função Sinal* (*Signal Funtion*)

$$Dada\ a\ função\ \left(f(x) = sgn(x) = \frac{x}{|x|}\right),\ encontre: \lim_{x\to 0^-} f(x)\ e\ \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

Resolução:



Respostas:

ii) *Daí*

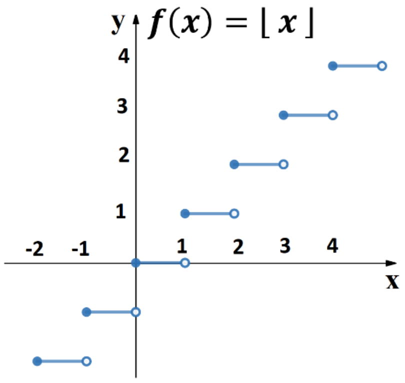
$\lim_{x\to 0^-} f(x) =$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

Mas perceba que $f(0)$

3) *Função Parte Inteira*

Sendo $f(x) = \lfloor x \rfloor$, *ou seja, para qualquer* (x) *Real*, $f(x)$ *é o maior valor inteiro menor que ou igual a* x, *para* $(\boldsymbol{n} \in \mathbf{N})$, *encontre*:



Resolução:

$\lim_{x\to -1^-} f(x) =$ $\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) =$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) =$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) =$ $\quad \lim_{x\to n^-} f(x) =$ $\quad \lim_{x\to n^+} f(x) =$

$\lim_{x\to \left(-n+\frac{1}{2}\right)^-} f(x) =$ $\quad \lim_{x\to \left(+n+\frac{1}{2}\right)^+} f(x) =$

Limites Bilaterais (ou simplesmente Limites)

$$Se\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L, então\ escrevemos:\ \lim_{x\to a} f(x) = L$$

Limites

Suponha que $f(x)$ esteja definida com seu Domínio em um intervalo contendo (a),

$\overbrace{\textbf{exceto possivelmente a abscissa } (a)}^{(*)}$, *então escrevemos:*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

e dizemos que:

o limite de $f(x)$, quando x tende para a abscissa (a), é igual à ordenada (L).

Isso quer dizer que quanto mais próxima a variável independente (x) estiver da abscissa (a),

***tanto** por valores **inferiores a** (a), **quanto** por valores **superiores** a (a),*

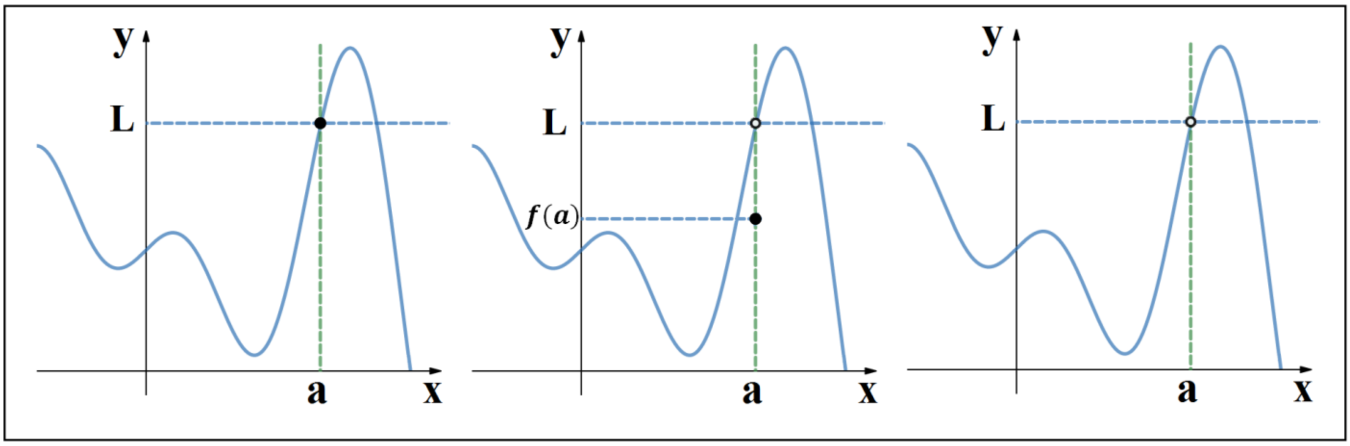
mais próxima a variável dependente (y) estará da ordenada (L).

- *O Limite $\left(\lim_{x\to a} f(x) = L\right)$ existe **se e somente se***
  *o **Limite** à **Esquerda de** (a) for **igual** ao **Limite** à **Direita de** (a):*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L \to \lim_{x\to a} f(x) = L$$

Sendo L um valor finito e bem definido.

$(*)$ *Analise os 3 gráficos seguintes, que são idênticos, exceto para a abiscissa (a):*



*Perceba que, **independentemente do que ocorra com o gráfico da função f***

***quando a abscissa for** (a), será verdade que: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$*

Todavia: $a)\ f(a) = L$; $b)\ f(a) \neq L$; $c)\ f(a) \nexists$ (**Não existe**)

> *Definição de Função Contínua em um ponto:*
>
> Uma **função** $\boldsymbol{f(x)}$ é contínua no **ponto** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{L})$ se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = L$

$*$ *Perceba que dos 3 gráficos anteriores, somente a função do caso (a) é contínua no ponto (a, L).*

Importante! *Da definição de continuidade decorre que:*

1) $\boldsymbol{f(a)}$ ***está definida, ou seja,*** (a) ***pertence ao Domínio e*** $(f(a))$ ***pertence à Imagem***

2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ***existe, ou seja*** $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

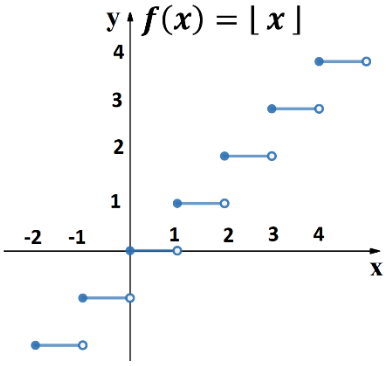
Exemplo de Aplicação: Escola Naval (2008)

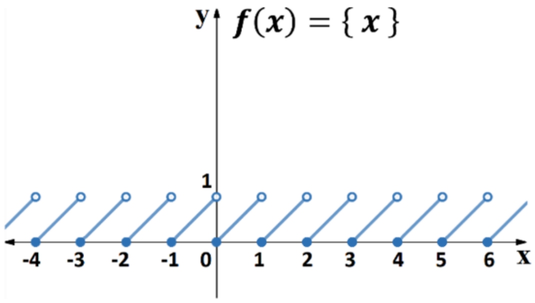
Julgue como verdadeiro ou falso: Seja f uma função real de variável real.

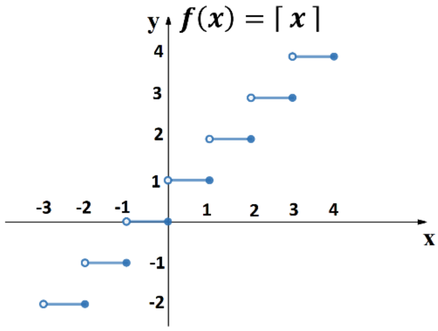
Se ***a pertence ao domínio de f*** *e* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = b$, *então* $f(a) = b$.

Definição de Função Contínua (à esquerda e à direita de um ponto e em um ponto)

> - ***Uma função*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***é contínua à esquerda do ponto*** (a, L) ***se e somente se:***
>
> $$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = L$$
>
> - ***Uma função*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***é contínua à direita do ponto*** (a, L) ***se e somente se:***
>
> $$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = L.$$
>
> - ***Uma função*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***é contínua no ponto*** (a, L) ***se e somente se:***
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = L$$
>
> - ***Uma função*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***é contínua em um intervalo se ela for contínua em todos os pontos do intervalo em análise.***







b) *Limites de Funções Contínuas*

*São aqueles cujo valor do **limitante (a) pertence ao domínio da função**, ou seja, quando o valor do limitante (a) **não gera indeterminação** na lei de formação da função. Neste caso, basta calcularmos o valor de **f(a)** para obtermos o limite **L**, pois:* $\boldsymbol{\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = L}$.

$$\boldsymbol{Mas, quais\ são\ as\ Funções\ Contínuas?}$$

Todas as Funções desta secção** (de Domínio e Contradomínio nos Reais)* *são contínuas em seus **Domínios Máximos *(com exceção das 3 últimas).*

***Definição de Função**: Dados dois conjuntos A e B não vazios, uma função f de A em B é uma relação que **associa a cada elemento** x∈A**, um único elemento** y∈B. Sendo **A chamado de Domínio e B de Contradomínio**. **Imagem** é o conjunto de elementos do Contradomínio que possui relação com pelo menos 1 x. **Lei de Formação** de uma Função é a Relação existente entre o Domínio e a Imagem.*

*Ou seja, 3 coisas definem uma **Função: Domínio, Contradomínio** e **Lei de Formação***
(Sendo que, a Lei de Formação, a partir do Domínio, determina a Imagem).

Notas:

- *Uma mesma **Lei de Formação** pode ser associada a **infinitos Domínios e Contradomínios**.*
- ***Domínio Máximo e Contradomínio Máximo** de uma **Função** são os conjuntos mais abrangentes que **ainda preservam a principal característica de uma função:** para todo x pertencente ao Domínio deve existir **exatamente 1 y** associado (ou seja, **cada x** só pode possuir **1 imagem**). Mas, **sim**, uma imagem pode estar associada a mais de 1 x, sem prejuízo da definição.*

*Encontrar o valor dos Limites em intervalos onde as funções são contínuas **é muito fácil**, pois basta calcular o f(a) e igualar o valor encontrado ao limite desejado.*

$$\boldsymbol{Propriedades\ das\ (Funções\ Contínuas\ em\ seus\ Domínios)}$$

$$Sejam\ f(x)\ e\ g(x)\ funções\ contínuas, então:$$

$A\ soma\ ou\ diferença\ de\ funções\ contínuas\ gera\ funções\ contínuas:$ $\boldsymbol{h(x) = f(x) + g(x)\quad ou\quad h(x) = f(x) - g(x)}$	$O\ produto\ ou\ a\ divisão\ de\ funções\ contínuas\ gera\ funções\ contínuas:$ $\boldsymbol{h(x) = f(x).g(x)\quad ou\quad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}}$
$A\ composição\ entre\ funções\ contínuas\ gera\ funções\ contínuas:$ $\boldsymbol{h(x) = f(g(x))}$	$\boldsymbol{A\ exponenciação\ entre\ duas\ funções}$ $\boldsymbol{h(x) = f(x)^{g(x)}}$ $será\ contínua\ (nos\ Reais)\ para\ todo\ Dom.\ no\ qual\ \boldsymbol{f}\ seja\ sempre\ \boldsymbol{maior\ que\ ou\ igual\ a\ zero}, contanto\ que\ \boldsymbol{f\ e\ g\ não\ sejam\ nulas\ ao\ mesmo\ tempo}.$ $Exemplo: h(x) = (senx)^{(senx)}$ $Será\ Contínua\ nos\ Intervalos\ (0, \pi)$ $Será\ Descontínua\ no\ Intervalo\ [\pi, 2\pi]\ nos\ Reais.$ $Ex: \left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = (-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$

Notas ao Leitor

- ✓ Para que você **domine** os Limites das seguintes funções, será necessário que você ou se recorde ou saiba identificar rapidamente os **Domínios** de todas elas, assim como que se recorde ou saiba esboçar rapidamente os **gráficos** de todas elas.
- ✓ **Talvez** isto seja complicado neste momento por causa de **eventuais deficiências em Matemática Básica**. **Mas**, de uma forma ou de outra, sugiro que **não se preocupe**! **Não** tente decorar todos estes gráficos na força bruta, **não há necessidade**!
- ✓ Apenas continue a leitura e o estudo desta apostila, pois ao longo dos capítulos e ao final do **tópico Análise Gráfica** o aluno **já NÃO irá precisar lembrar de gráfico algum**, pois **já será capaz de esboçá-los todos rapidamente**.

Lista de Todas as Funções Contínuas Frequentemente Usadas

Qualquer função derivada da forma básica conhecida como

Função Potência ou Power Function: $\boldsymbol{f(x) = a.x^p}$ ($\boldsymbol{a}$ **e** $\boldsymbol{p}$ ***constantes*** *e* $\in \boldsymbol{R}$)

Função Constante, $a = 0$ *ou* $p = 0$: $\boldsymbol{f(x) = 0}$ ***ou*** $\boldsymbol{f(x) = a}$	*Função Polinomial com um único termo*, $p = n \in z_+^*$: $\boldsymbol{f(x) = ax^n}$
Função Radical, *com* $p = \frac{1}{n}$, $n \in z_+^*$: $\boldsymbol{f(x) = a\sqrt[n]{x}}$	*Função Recíproca*, *com* $p = -1$: $\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{x}}$

E qualquer outra composição da forma $\boldsymbol{a.x^p}$ (n *e* $m \in z_+^*$ (*Inteiros não nulos*)):

Função Polinomial Genérica: $\boldsymbol{P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0}$

Função Racional Genérica: $$\boldsymbol{\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^m + a_{n-1}x^{m-1} + \cdots a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0}}$$

Exemplos de Função Racional: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3 + 4x - 7}{-x^5 + 3x - 8}}$; $\boldsymbol{g(x) = \frac{2x^4 + 4x}{3x^3 + 2x}}$; $\boldsymbol{h(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2}}$

Funções Algébricas: representam o caso mais geral de composições algébricas (Somas, Subtrações, Multiplicações, Divisões e Raízes) a partir da forma básica ($\boldsymbol{a.x^p}$).

Perceba que, inclusive funções como a seguinte, são contínuas em seus domínios:

Ex. de Função Algébrica: $$\boldsymbol{3x^2 + \frac{1}{x} + \sqrt[\frac{4}{3}]{x^{(-5)}} + \frac{x^3 + 4x - 7}{-x^5 + 3x - 8}}$$

As Funções Exponenciais e Logarítmicas

Função Exponencial, $a \in R_+$ *e* $a \neq 1, x \in R$: $\boldsymbol{f(x) = a^x}$	*Função Logarítima*, $a \in R_+$ *e* $a \neq 1, x \in R_+$: $\boldsymbol{f(x) = log_a x}$

$*$ *Todas as Funções Trigonométricas*

* Cada uma com o seu respectivo Domínio Máximo dentro dos Reais

Circulares	$sen(x),\ \cos(x),\ tg(x),\ \csc(x),\ \sec(x),\ ctg(x)$
Circulares Inversas	$sen^{-1}(x) = arc\ sen(x),\ cos^{-1}(x) = arc\cos(x),$ $csc^{-1}(x) = arc\ csc(x),\ sec^{-1}(x) = arc\sec(x)$ $tg^{-1}(x) = arc\ tg(x),\ ctg^{-1}(x) = arc\ ctg(x)$
Hiperbólicas	$senh(x),\ \cosh(x),\ tgh(x),\ \mathrm{csch}(x),\ \mathrm{sech}(x),\ ctgh(x)$
Hiperbólicas Inversas	$senh^{-1}(x) = arg\ senh(x),\ cosh^{-1}(x) = arg\cosh(x)$ $csch^{-1}(x) = arg\ csch(x),\ sech^{-1}(x) = arg\,\mathrm{sech}(x)$ $tgh^{-1}(x) = arg\ tgh(x),\ ctgh^{-1}(x) = arg\ ctgh(x)$

A Função Modular e a Função Sinal

Função Modular: $f(x) = \|x\|$	*Função Sinal*: $f(x) = sgn(x) = \frac{x}{\|x\|}$ ou $f(x) = sgn(x) = \frac{\|x\|}{x}$ *Nota*: *sinal em Inglês se escreve* ***signal***.

As 3 Exceções Importantes

As seguintes funções são descontínuas em pontos do seu próprio Domínio:

Função Parte Inteira de x *Ou Função Piso (Floor Function)*	*Maior inteiro que não excede x*: $f(x) = \lfloor x \rfloor$
Função Parte Fracionária de x *Ou Função Serrote ou Dente de Serra (Saw Tooth Wave Function)*	*O que resta depois que se retira a parte interia de x* $f(x) = \{ x \} = x - \lfloor x \rfloor$ *Perceba que*: $\lfloor x \rfloor + \{ x \} = x$
Função Menor Inteiro $\geq x$ *Ou Função Teto (Ceiling Function)*	*O menor inteiro que excede ou se iguala a x*: $f(x) = \lceil x \rceil$ *Perceba que*: $\lceil x \rceil + \{ x \} = x + 1$

Nota Importante: ***a simbologia adotada para as 3 funções acima varia de livro para livro. Mas não se preocupe, pois sempre que for cobrada alguma questão sobre o assunto, haverá uma legenda na questão explicando o significado dos símbolos usados***: ($\lfloor\ \rfloor$, $\{\ \}$, $\lceil\ \rceil$ *etc*).

Agora, vamos para exemplos de Limites em Funções Contínuas.

> *Relembre:*
>
> *Definição de Função Contínua em um ponto:*
>
> *Uma* **função** $\boldsymbol{f(x)}$ *é contínua no* **ponto** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{L})$ *se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = L.$

Dessa forma, o aluno deve entender que todos os seguintes limites abaixo são ***TRIVIAIS***, *pois para se calcular o valor dos limites relativos à abscissa* (a), ***basta que se calcule*** $\boldsymbol{f(a)}$.

Funções ou composições provenientes da forma básica: $\boldsymbol{f(x) = a.x^n}$

$\lim\limits_{x\to a}(5) = 5\ (Importante)$; $\lim\limits_{x\to -\pi}(2x) = -2\pi$; $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - 5x + 6) = 2^2 - 5.2 + 6 = 0$

$$\lim_{x\to 3}\left(2\sqrt{x+1} + \sqrt{2x} + \frac{x^2+6}{x^2-4}\right) = \lim_{x\to 3}\left(2\sqrt{(3)+1} + \sqrt{2(3)} + \frac{(3)^2+6}{(3)^2-4}\right) = 7 + \sqrt{6}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(3x^2 + \frac{2}{x} + \sqrt[4]{x^{-5} + x - 1} + \frac{-x^3+4x-9}{-x^5+3x-8}\right) = 3.(1)^2 + \frac{2}{1} + \sqrt[4]{(1)^{-5}+1-1} + \frac{-(1)^3+4(1)-9}{-(1)^5+3(1)-8}$$
$$= 3 + 2 + 1 + \frac{-6}{-6} = 7$$

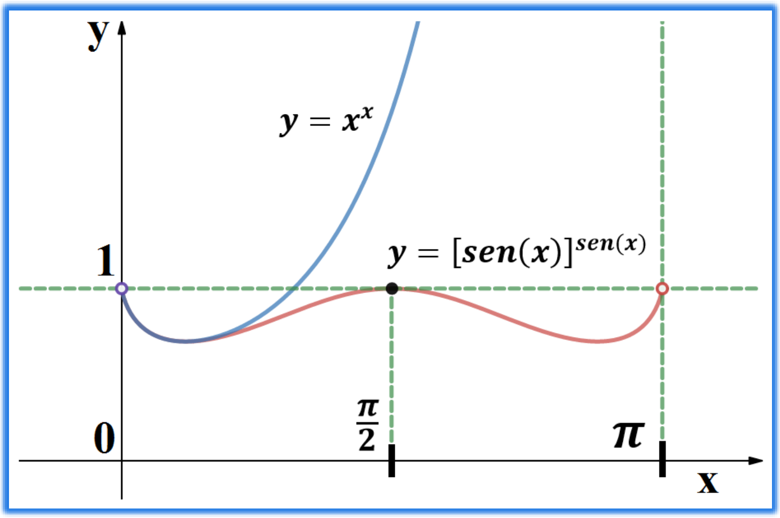
Funções Expoentes, Exponenciais, Logarítmicas

Função Expoente: $\lim\limits_{x\to 5}(x^a) = 5^a$; ***Função Exponencial:*** $\lim\limits_{x\to 5}(a^x) = a^5$

Exponenciação entre duas funções:

$$\lim_{x\to e}(x^x) =$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\left([sen(x)]^{sen(x)}\right) =$$



Função Logarítmica: $\lim\limits_{x\to 100}(\log_{10} x) = \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2.1 = 2$

Função Logarítmica na (base neperiana ou base de Euler $(\boldsymbol{e})$***) :*** $\lim\limits_{x\to e}(ln(x)) = \ln(e) = 1$

Outro exemplo: $\lim\limits_{x\to 2}\left(ln\left(x^{x^x} + x^3 + 2^x + x + \log_2 x\right)\right) = ln\left(2^{2^2} + 2^3 + 2^2 + 2 + \log_2 2\right)$
$$= \ln(2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1) = \ln(16 + 8 + 4 + 2 + 1) = \ln(31)$$

Funções Trigonométricas

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)+cos(x)+tg(x)}{\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+sec(x)+ctg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg^3(x)+sec^5(x)}{sen^7(x)+\cos^9(x)}+tg\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right).ctg\left(x^3+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

Nota: as demais Funções Trigonométricas serão tratadas no Apêndice ao final deste Capítulo.

Função Modular e Função Sinal

1) $\lim_{x\to -5}\big(x+|x|+sgn(x)\big)=$

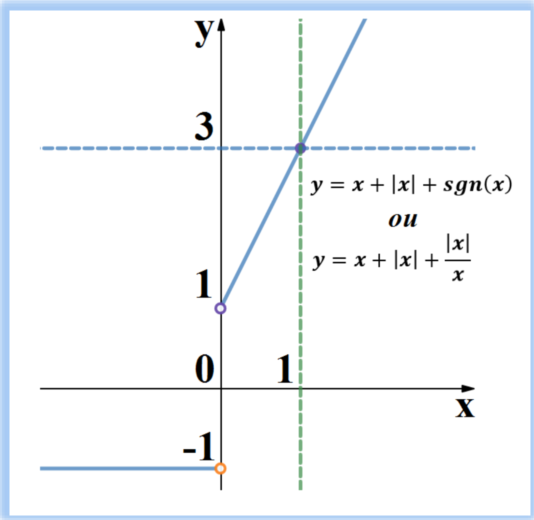
2) $Complete\colon\ \lim_{x\to 5}\left(x+|x|+\frac{|x|}{x}\right)=$

3) $\lim_{x\to 0^+}\left(x+|x|+\frac{|x|}{x}\right)=$

4) $Complete\colon\ \lim_{x\to 0^-}\big(x+|x|+sgn(x)\big)=$

$Nota\colon o\ ponto\ (1{,}3)\ do\ gráfico\ é\ só\ um$

$ponto\ de\ referência\ (pois\ 2\ pontos\ determinam\ um\ reta.$



Funções $\lfloor x \rfloor, \{ x \}$ *e* $\lceil x \rceil$:

1) $\lim_{x\to 2}(\lfloor x \rfloor)+\lim_{x\to(2)}(\{x\})+\lim_{x\to(2)}(\lceil x \rceil)=$

2) $\lim_{x\to(2)^+}(\lfloor x \rfloor)+\lim_{x\to(2)^+}(\{x\})+\lim_{x\to(2)^+}(\lceil x \rceil)=$

3) $\lim_{x\to(2)^-}(\lfloor x \rfloor)+\lim_{x\to(2)^-}(\{x\})+\lim_{x\to(2)^-}(\lceil x \rceil)=$

4) $\lim_{x\to(12{,}7)^-}(\lfloor x \rfloor+\{x\}+\lceil x \rceil)=$

5) $\lim_{x\to\left(n+\frac{1}{2}\right)^+,\ (n\in N)}(\lfloor x \rfloor+\{x\}+\lceil x \rceil)=$

1.1.2 *Limites Não-Imediatos*

São aqueles nos quais a **substituição direta do valor limitante na função** **gera uma indeterminação.**

Temos duas Subclasses de Limites Indeterminados:

- Quando queremos achar **o valor do limite (que é o tema deste tópico)**:
  neste caso, **o valor do limitante não pertence ao domínio** da função.
- Quando se deseja apenas **aplicar zoom em uma função:**
  quando queremos saber **como uma função se comporta nas proximidades de um ponto cuja abscissa vale** (a). Neste caso, **o valor do limitante pode ou não pertencer ao domínio** da função.
  Abordaremos este assunto mais à **frente no tópico sobre como se aplicar o zoom em uma função.**

De uma forma ou de outra, para avaliarmos ambos os casos acima, utilizaremos artifícios matemáticos como:

- ✓ Técnicas algébricas básicas de Ensino Médio
- ✓ Limites Fundamentais
- ✓ Teorema de L'Hospital

a) Técnicas Algébricas Básicas

$$\boldsymbol{Considere\ o\ seguinte\ Limite:\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=L}$$

1ª Análise: Tentemos calcular o f(2) por Substituição Direta como temos feito até agora:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}\ (Inderteminação)$$

*Como não conseguimos calcular por **Substituição Direta**, teremos que **aplicar outras técnicas** para conseguir calcular limites deste tipo.*

2ª Análise: Estimativa do valor de L (não usual e impreciso).

$$Tomemos\ valores\ de\ x\ próximos\ a\ (2)\ e\ analisemos\ o\ que\ ocorre\ com\ a\ função\ f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}:$$

$x<2$	$f(x)$
0	2
1	3
1,99	3,99
1,999	3,9999

$x>2$	$f(x)$
4	6
3	5
2,01	4,001
2,00001	4,00001

$$Perceba\ que\ quanto\ mais\ (\boldsymbol{x})\ se\ aproxima\ da\ abscissa\ (\boldsymbol{2}),mais\ próximo\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\ fica\ da\ ordenada\ (\boldsymbol{4}).$$

$$Entretanto, por\ este\ método, não\ podemos\ afirmar\ categoricamente\ que\ \boldsymbol{L\ será\ exatamente\ igual\ a}\ 4.$$

$$Pode\ ser\ que\ L\ seja\ um\ valor\ muito\ próximo\ a\ ele\ como\ o\ 4{,}0000000001, ou\ um\ outro\ qualquer.$$

$3^{\underline{a}}$ ***Análise***: ***Cálculo Algébrico do valor de L*** (***usual e preciso***)

Para sabermos com precisão o valor de L, realizaremos o seguinte procedimento $(*)$:

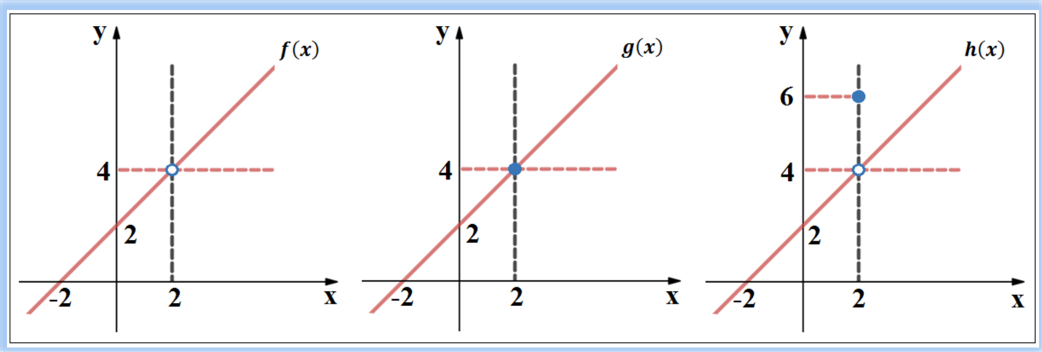
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\overbrace{(x-2)(x+2)}^{f(x)}}{(x-2)}\overset{(*)}{\triangleq}\lim_{x\to 2}\overbrace{(x+2)}^{g(x)}=\overbrace{2+2}^{g(2)}=4$$

Nota: *Perceba que as funções* $f(x)$ *e* $g(x)$ *são* ***quase*** *idênticas, a única diferença é que*

$g(x)$ *possui o valor* (2) *no seu domínio, enquanto* $f(x)$ *não o possui.*

$4^{\underline{a}}$ ***Análise***: *Agora, comparemos as três seguintes funções*:

$$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}\quad ;\quad g(x)=(x+2)\quad e\quad h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2},\ para\ x\neq 2\\ 6,\ \ para\ x=2\end{cases}$$



Comparando os gráficos, percebe − se que as três funções possuem o mesmo limite em relação

à abscissa $(\boldsymbol{a}=\mathbf{2})$: $\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\ f(x)=\lim_{x\to 2}\ g(x)=\lim_{x\to 2}\ h(x)=4.}$

Nota 1: *Perceba que para que o limite exista,* ***o limitante*** $(\boldsymbol{a})$ ***pode nem pertencer ao Domínio da função***, *como mostra o gráfico da esquerda.*

Nota 2: *Perceba que somente a função do gráfico do meio é contínua no ponto* $(2,4)$.

$5^{\underline{a}}$ ***Análise***: (***Relembrando o Conceito de Continuidade***):

Questão EFOMM 2011: ***Qual é o valor de p para que f seja contínua no ponto de abscissa 2***:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2},x\neq 2\\ 3p-5,x=2\end{cases}$$

Resolução: *Para que a função seja contínua no ponto cuja abscissa vale 2, basta que* $\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\ f(x)=f(2)}$

Perceba que, por um lado temos: $\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\overset{*}{\triangleq}\lim_{x\to 2}\ (x+2)=2+2=4}$

E por outro lado temos $\boldsymbol{f(2)=3p-5}$, *daí,* ***pela Definição de Continuidade***:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\ f(x)=f(2)\to\ 4=3p-5}\ ;\ \textbf{\textit{Resposta}}:\ \boldsymbol{p=3}$$

$Método\ Geral \left(\overset{*}{\cong} \right)$

Sempre que $f(x)$ *for igual a* $g(x)$ *para todo* (x),

exceto possivelmente quando (x) *for igual a* (a),

então $\lim\limits_{x \to a} f(x) \overset{*}{\cong} \lim\limits_{x \to a} g(x)$ *, contanto que o limite exista.*

Sumário das principais formas de se calcular um Limite: opera − se algebricamente até se poder aplicar o Método Geral.

Aconselho o leitor a prestar muita atenção nos seguintes limites, pois eles são os mais recorrentes em qualquer prova!

1) ***Fatoração:***

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-3^2}{x-3}\right) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}\right) \overset{*}{\cong} \lim_{x\to 3}(x+3) = 3+3 = 2.3 = 6$$

2) ***Desracionalização:***

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+\mathbf{3})-(\mathbf{3})}{x\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{3}\right)}\right) \overset{*}{\cong} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

3) ***Mudança de variável:***

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right); \quad \sqrt{x} \in R \to x > 0 \to x = t^6 \ e\ note\ que\ x \to 1\ implica\ em\ t^6 \to 1$$

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{t^6}-1}{\sqrt{t^6}-1}\right) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2-1}{t^3-1}\right) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}\right) \overset{*}{\cong} \lim_{t\to 1}\left(\frac{t+1}{t^2+t+1}\right) = \frac{2}{3}$$

4) ***Binômio de Newton:***

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h(2x+h)}{h}\right) \overset{*}{\cong} \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Perceba que o exemplo 7 constitui justamente a derivada da função x^2 *. (Assunto que será abordado em breve)*

Na notação usal de derivadas teríamos: Se $f(x) = x^2$; $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{(x+\Delta x)^2-(x)^2}{\Delta x}\right) = 2x.$

***Nota**: no tópico sobre o Teorema de l'Hospital, será ensinado como efetuar todos estes limites aplicando sempre uma mesma regra! Todavia, as referidas técnicas algébricas são muito importantes para elevar o nível da sua Álgebra, pois tais recursos algébricos podem ser requisitados a qualquer momento nas questões!*

b) Limites Inexistentes

$\rightarrow$ $\boldsymbol{Se\ o\ Limite\ (L)\ existe}$ $\left(seja\ ele\ \boldsymbol{Lateral},\ \ \boldsymbol{Bilateral}\ ou\ \ \overbrace{\boldsymbol{Ao}}^{Atenção!}\ \ \boldsymbol{Infinito}\right),$

$\boldsymbol{ent}$ão $ele\ possui\ um\ \boldsymbol{Valor}\ (\boldsymbol{Único, Finito\ e\ Bem\ Definido})\ \boldsymbol{para}\ (\boldsymbol{L})!$

$\rightarrow$ $Limites\ \boldsymbol{Ao}\ Infinito\ (ou\ seja, quando\ o\ limitante\ a = \pm\infty)\ \boldsymbol{existem}\ quando\ \lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)\big) = L,$

$sendo\ (\boldsymbol{L})\ \boldsymbol{um\ Valor}\ (\boldsymbol{Único, Finito\ e\ Bem\ Definido}).$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{Limites\ Infinitos}\ (\boldsymbol{L} = \pm\infty)\ \boldsymbol{não\ existem}, pois\ \boldsymbol{L}\ \boldsymbol{não}\ é\ \boldsymbol{um\ valor\ finito\ nem\ bem\ definido}.$

$$Limite\ Bilateral$$

$\rightarrow$ $Se\ a \neq \pm\infty\ e\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L, \boldsymbol{podemos\ escrever}\ \boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = L}$

$pois\ se\ a = \pm\infty, não\ existirão\ os\ Limites\ Laterais\ \left(\boldsymbol{\lim_{x\to\infty^-} f(x)}\ \ \boldsymbol{ou}\ \ \boldsymbol{\lim_{x\to\infty^+} f(x)}\right)$

$\boldsymbol{e\ para\ que\ o\ Limite\ L\ exista}\ devemos\ ter\ também\ \boldsymbol{L} \neq \pm\infty.$

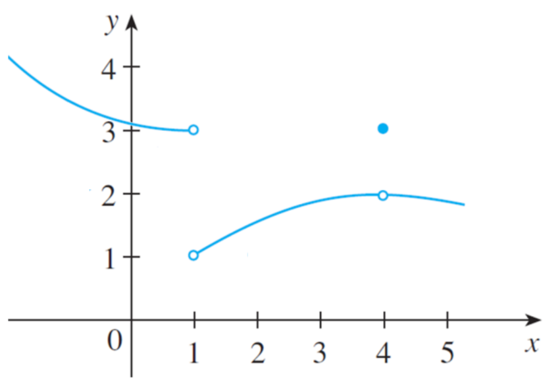
$$\boxed{\begin{array}{c}\boldsymbol{Teorema\ da\ Unicidade\ do\ Limite}: \\ \boldsymbol{Se\ o\ Limite}\ (L)\ \boldsymbol{existe, ele}\ é\ \boldsymbol{único}!\end{array}}$$

$\boldsymbol{Caso\ 1.\ Dado\ o\ gráfico\ de\ f(x)}$:

$Todo\ Limite\ (Lateral\ ou\ Bilateral)\ é\ único, ou\ seja, só\ pode\ existir\ 1\ valor\ associado\ a\ ele.$

$Logo, para\ que\ um\ Limite\ Bilateral\ exista\ em\ torno\ de\ um\ ponto\ (a, L),\ \ devemos\ ter:$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L},\ \ para\ a \neq \pm\infty.$$



$Perceba\ que$

$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \qquad \lim_{x\to 4^+} f(x) =$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{\lim_{x\to 4} f(x)\ existe\ e\ é\ igual\ a}\ \quad !$

$Mas:$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) =$

$\rightarrow$ $\boldsymbol{\lim_{x\to 1} f(x)\ não\ existe}!$

$Note\ que\ a\ função\ acima\ é\ descontínua\ tanto\ quando\ a\ abscissa\ é\ 1\ como\ quando\ a\ abscissa\ é\ 4.$

$Note\ também\ que\ f(1) \nexists, mas\ f(4) \exists, sendo\ f(4) = 3$

$\boldsymbol{Lembre-se\ de\ que}: (\nexists)\ \boldsymbol{significa}\ (\boldsymbol{não\ existe}), \boldsymbol{enquanto\ que}: (\exists)\ \boldsymbol{significa}\ (\boldsymbol{existe})$

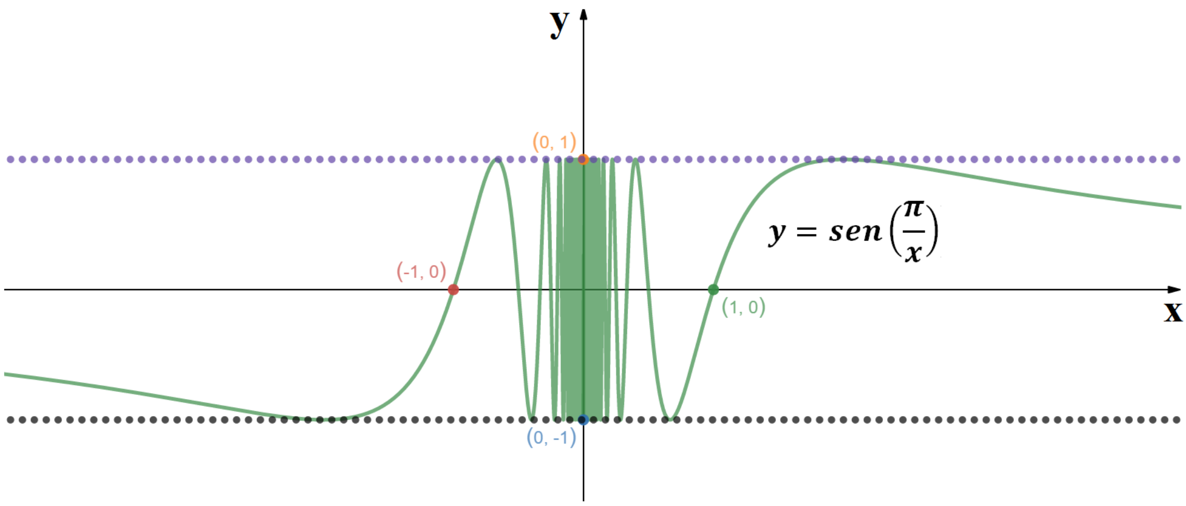
$$\boldsymbol{Caso\ 2:}$$

$$\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$Perceba\ que\ o\ limite\ nesse\ caso\ não\ está\ bem\ definido, pois\ seu\ valor\ varia\ de\ [-1,1].$$

$$Logo:$$

$$\boldsymbol{\left[\lim_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right)\right] \nexists\ (Não\ existe)}$$



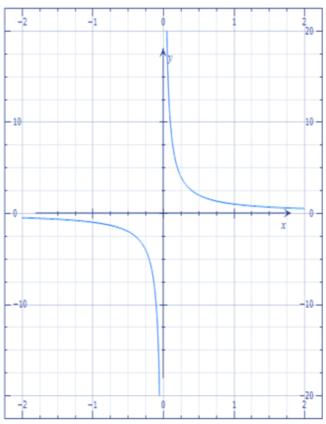
$$\boldsymbol{Caso\ 3:}$$

$$\boldsymbol{Os\ Limites\ Infinitos}$$

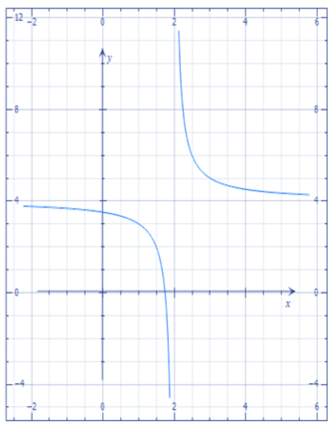
$$Analise\ os\ Gráficos\ abaixo:$$

$$a)\ y = \frac{1}{x} \qquad\qquad b)\ y = \frac{1}{x-2} + 4$$

a)



b)



$$Perceba\ que:$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty\ e\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x-2} + 4\right) = -\infty\ e\ \lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x-2} + 4\right) = +\infty$$

- ***Dizer que um Limite* é *igual* $(\pm\infty)$ é *apenas uma forma matemática*:**
  - ***de dizer que ele não existe***
  - ***e de expressar a sua tendência.***

  ***Por exemplo*:**

✓ *Escrever* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, *significa dizer que*:

quando x aproxima − se de (a), y assume valores cada vez maiores

✓ *Escrever* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, *significa dizer que*:

quando x aproxima − se de (a), y assume valores cada vez menores

- *O infinito* $(\pm\infty)$ *não é um número, logo ele não segue as propriedades numéricas de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação.*

Sendo assim, as seguintes expressões são indeterminadas: $\infty - \infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ *etc.*

Nota Importante: ***Os Limites abaixo EXISTEM por possuir um***

Valor Único, Finito e Bem Definido,

mas ***NÃO*** *são Limites Laterais* ***NEM*** *Bilaterais. São apenas Limites* ***Ao*** *Infinito* (***apenas isso***).

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \ e \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x-2}+4\right) = 4 \ e \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x-2}+4\right) = 4$$

Perceba, porém, que ***NÃO FAZ SENTIDO ESCREVER*** *os seguintes limites*:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty^-}\left(\frac{1}{x}\right)} \ nem \ \boldsymbol{\lim_{x\to\infty^+}\left(\frac{1}{x}\right)}, \textbf{pois não existem limites laterais com respeito ao infinito.}$$

Ou seja, os seguintes limites ***NÃO*** *são limites laterais*: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}+4\right) = 4$ *e* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x-2}+4\right) = 4$

Nem o $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *é bilateral. Atente para a seguinte convenção*: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Assim, por exemplo, temos que: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}}\left(\dfrac{1}{x-2}+4\right) = \boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}}\left(\dfrac{1}{x-2}+4\right) = 4$

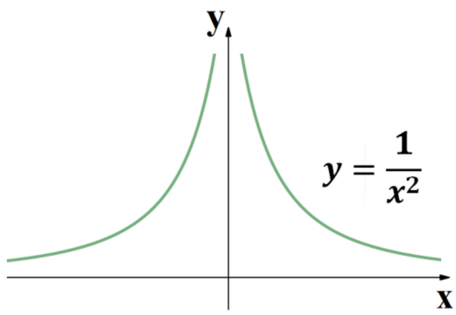
Perceba que, assim como, por convenção, $(3 = +3, \ 4 = +4)$, *também temos* $(\infty = +\infty)$.

Nota: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty}$ ***e*** $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty}$

Como o Limite à Esquerda possui a mesma tendência do

Limite à Direita, podemos escrever o seguinte Limite Bilateral:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty \quad y = \frac{1}{x^2}}$$



***Ainda assim, tal limite Não Existe, uma vez que o limite* é *infinito*,**
***ou seja, ele não assume um valor finito nem bem definido*!**

Resumo sobre a Inexistência de Limites (Análise nos Reais)

1) *Os seguintes Limites nem existem, nem possuem notação matemática específica:*

$$\lim_{x\to\infty^-}(f(x)) \quad ; \quad \lim_{x\to\infty^+}(f(x)) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\left[sen\left(\frac{1}{x}\right)\right] \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}(sen(x))$$

2) *Limites Infinitos não existem, mas podem ser representados da seguinte forma:* $L = \pm\infty$.

*a) Perceba que **podemos escrever**:* $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}\right) = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$ *e também* $\lim_{x\to 0^\pm}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\infty$

*b) Mas, pelo **Teorema da Unicidade do Limite, NÃO** podemos escrever:* $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) = \pm\infty$ *(Errado).*

Portanto o Limite Bilateral $\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ ***além de não existir Não possui notação matemática.***

c) Perceba que $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$. *Dessa forma, **podemos escrever*** $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$.

Ou seja, o limite $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ ***não existe, porém, ele possui representação matemática:***

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

c) Assíntotas

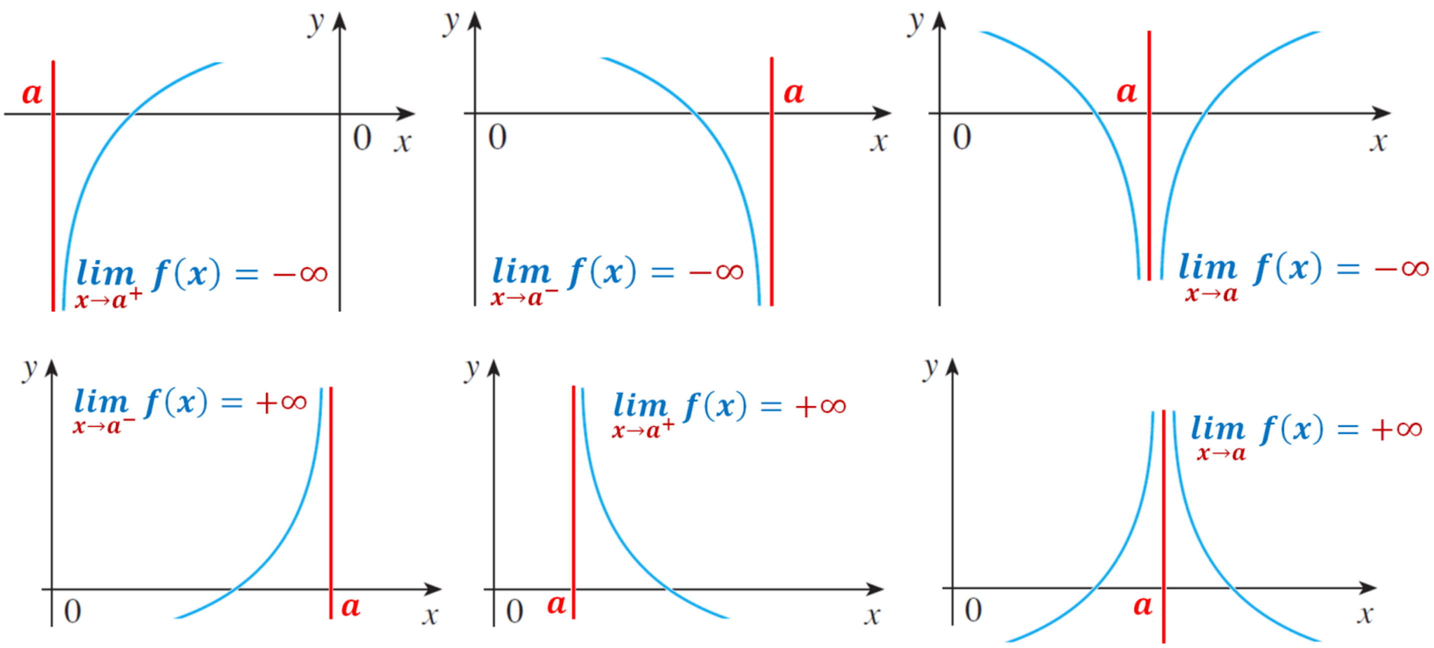
Assíntotas

Assíntotas Verticais

A reta $x = a$ é *considerada uma* ***assíntota vertical da função $f(x)$***, *se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira*:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

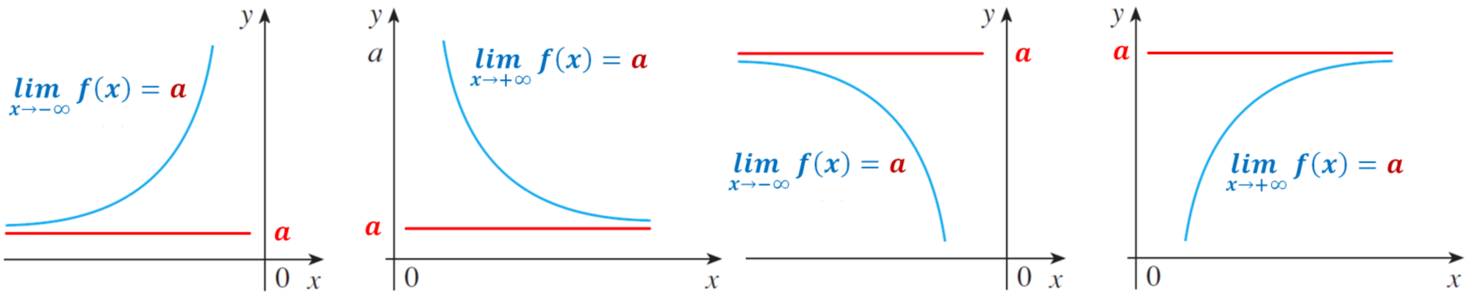


Assíntotas Horizontais

A reta $y = a$ é *considerada uma* ***assíntota horizontal da função $f(x)$***, *se pelo menos uma das seguintes afirmações for verdadeira*:

$$\lim_{x\to -\infty} \big(f(x)\big) = a \quad (e\ para\ um\ N, se\ x < N \to f(x) \neq a)$$

$$\lim_{x\to +\infty} \big(f(x)\big) = a \quad (e\ para\ um\ N, se\ x > N \to f(x) \neq a)$$



Casos Mais Importantes!

$$\textbf{Caso I})\ L = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1x^1 + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x^1 + b_0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^m\Big(a_m + \overbrace{\frac{a_{m-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{m-1}} + \frac{a_0}{x^m}}^{Tende\ a\ 0\ para\ |x|\ grande}}{x^n\Big(b_n + \underbrace{\frac{b_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n}}_{Tende\ a\ 0\ para\ |x|\ grande}}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_m x^m}{b_n x^n}\right)$$

Sempre que $L = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{a_m x^m}{b_n x^n}\right)$ ***só existem as três seguintes possibilidades***:

- $m > n \to L = \pm\infty$ $\left(Dependerá\ do\ Sinal\ de\ \frac{a_m}{b_n}\right)$ (***Não há Assíntotas***)
- $m < n \to L = 0$ ($y = 0$ é ***uma Assíntota Horizontal***)
- $m = n \to L = \frac{a_m}{b_n}$ $\left(y = \frac{a_m}{b_n}\right.$ é ***uma Assíntota Horizontal***$\left.\right)$

Exemplos:

$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3 - 2x + 5}{1x^3 + 3x + 7}\right)$ $b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^4 - 2x + 5}{1x^3 + 3x + 7}\right)$ $c)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^4 - 2x + 5}{1x^5 + 3x + 7}\right)$

$d)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{39x^{19} - 17x^{15} + 5x^2}{13x^{19} + 8x^7 + 7x}\right)$ $e)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{15x^{20} - 26x^{15} + 8x^2}{5x^{19} + 3x^{13} + 2x}\right)$ $f)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{10x^{20} - 9x^3 + 8}{5x^{21} + 2x^{11} + 2x^2}\right)$

Soluções:

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3 - 2x + 5}{1x^3 + 3x + 7}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3\left(2 - \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right)}{x^3\left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{7}{x^3}\right)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\qquad\right) = \lim_{x\to+\infty}(\quad) =$$

$$b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^4 - 2x + 5}{1x^3 + 3x + 7}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\qquad\right) = \lim_{x\to-\infty}(\quad) =$$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^4 - 2x + 5}{1x^5 + 3x + 7}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\qquad\right) = \lim_{x\to+\infty}(\quad) =$$

Tente resover de cabeça e em menos de 3 segundos cada exemplo a seguir!!!

$d)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{39x^{19} - 17x^{15} + 5x^2}{13x^{19} + 8x^7 + 7x}\right) =$ $e)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{15x^{20} - 26x^{15} + 8x^2}{5x^{19} + 3x^{13} + 2x}\right) =$

$$f)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{10x^{20} - 9x^3 + 8}{5x^{21} + 2x^{11} + 2x^2}\right) =$$

$$\boldsymbol{Caso\ II)}\ L = \lim_{x\to 0^{\pm}}\left(\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_i x^i}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_j x^j}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0^{\pm}}\left(\frac{\boldsymbol{x^i}\left(\overbrace{a_m x^{m-i} + a_{m-1}x^{m-1-i} + \cdots + a_{i+1}x^1}^{=0} + \boldsymbol{a_i}\right)}{\boldsymbol{x^j}\left(\underbrace{b_n x^{n-j} + b_{n-1}x^{n-1-j} + \cdots + b_{j+1}x^1}_{=0} + \boldsymbol{b_j}\right)}\right) = \boldsymbol{\lim_{x\to 0^{\pm}}}\left(\frac{\boldsymbol{a_i x^i}}{\boldsymbol{b_j x^j}}\right)$$

Sempre que $\boldsymbol{L = \lim_{x\to 0^{\pm}}\left(\frac{a_i x^i}{b_j x^j}\right)}$ ***só existem as três seguintes possibilidades:***

- $i > j \rightarrow L = 0$ (***Não há Assíntotas***)
- $i < j \rightarrow L = \pm\infty$ ($\boldsymbol{x = 0}$ é ***uma Assíntota Vertical***)
  $\left(\textit{Dependerá do Sinal de } \frac{a_m}{b_n} \textit{ e do sinal do expoente do } 0\ (0^+ \textit{ ou } 0^-)\right)$
- $i = j \rightarrow L = \frac{a_i}{b_j}$ (***Não há Assíntotas***)

Exemplos:

$a)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x^4 - 2x^2 + 5x}{1x^6 + 3x^5 + 7x^4}\right)$ $\quad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^4 - 2x^2 + 5x}{1x^3 + 3x + 7}\right)$ $\quad c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^3 - 2x + 5}{1x^3 + 3x + 7}\right)$

$d)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{39x^{19} - 17x^{15} + 5x^2}{13x^{19} + 8x^7 + 7x}\right)$ $\quad e)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{15x^{20} - 26x^{15} + 8x^2}{5x^{19} + 3x^{13} + 2x^2}\right)$ $\quad f)\ \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{10x^{20} - 9x^3 - 8}{5x^{21} + 2x^{11} + 2x^5}\right)$

Soluções:

$$a)\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2x^4 - 2x^2 + 5x}{1x^6 + 3x^5 + 7x^4}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x(2x^3 - 2x + 5)}{x^4(x^2 + 3x + 7)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\quad\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\quad\right) =$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^4 - 2x^2 + 5x}{1x^3 + 3x + 7}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\quad\right) =$$

$$c)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x^3 - 2x + 5}{1x^3 + 3x + 7}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ \right) =$$

Tente resover de cabeça e em menos de 3 segundos cada exemplo a seguir!!!

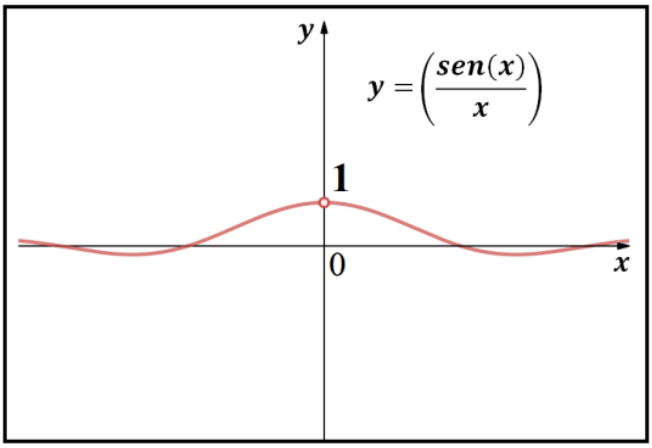
$$d)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{39x^{19} - 17x^{15} + 5x^2}{13x^{19} + 8x^7 + 7x}\right) = \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{15x^{20} - 26x^{15} + 8x^2}{5x^{19} + 3x^{13} + 2x^2}\right) =$$

$$f)\ \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{10x^{20} - 9x^3 - 8}{5x^{21} + 2x^{11} + 2x^5}\right) =$$

d) Limites Fundamentais

1) O limite fundamental da função $\dfrac{sen(x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)=1$$



Mais à frente, veremos que quando x se aproxima de zero (em radianos), a função $sen(x)$ tende para x e daí:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right)=1.$$

2) O Limite Fundamental da Base de Euler (e)

1ª *Visualização*: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e=2,71828\ldots$

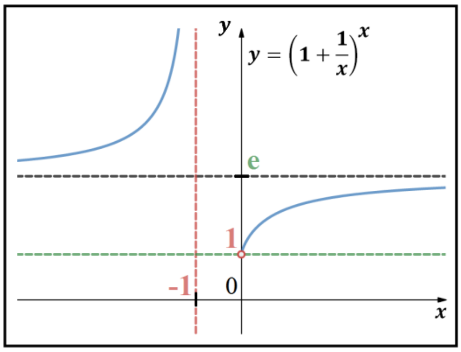
Agora, perceba que se trocarmos $\left(\frac{1}{x}\right)$ por (k), teremos que

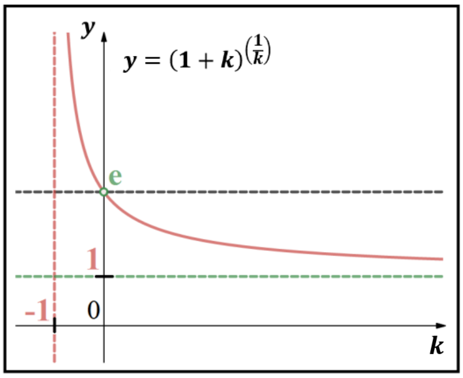
$\left(\text{quando } x\to\pm\infty,\ \left(\frac{1}{x}\right)\to 0, \text{daí } k\to 0\right)$, *e aí vem*:

2ª *Visualização*: $\displaystyle\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=e=2,71828\ldots$

Nota 2: Se o expoente tender para 0:

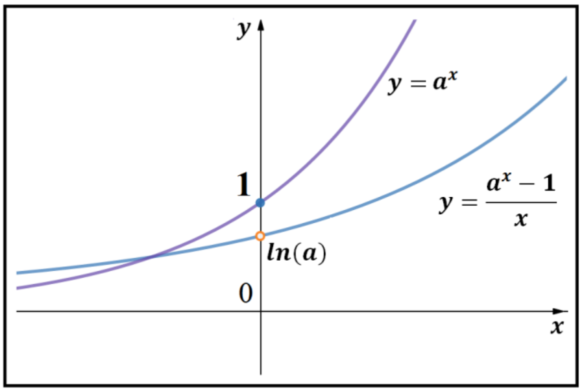
$$\lim_{x\to+\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}\underbrace{=}_{\left(x=\frac{1}{k}\right)}\lim_{k\to 0^{+}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=1$$





3) O Teorema do $ln(a)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x}-1}{x}\right)=ln(a)$$



Exercícios de fixação. Encontre o valor numérico dos seguintes limites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\,sen\left(\frac{1}{x}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^{x}-1}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)=$$

1.2 Principais Teoremas

1.2.1 Teoremas sobre as Propriedades dos Limites

$Supondo\ que\ (c)\ seja\ uma\ constante\ e\ que\ os\ limites$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)\ \ e\ \ \lim_{x\to a} g(x)\ \ existam}$$

$Daí, podemos\ afirmar\ que:$

1) $\lim_{x\to a}[c] = c$

2) $\lim_{x\to a}[x] = a$

3) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

4) $\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

5) $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$

6) $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$

7) $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)}{\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)}\ se\ \left(\lim_{x\to a} g(x)\right) \neq 0$ $(Nota: quando\ tanto\ o\ limite\ do\ numerador$ $quanto\ o\ do\ denominador\ forem\ iguais\ a\ zero, poderemos\ aplicar\ o\ Teorema\ de\ l'Hospital.$

8) $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$

9) $\lim_{x\to a}\left[f\big(g(x)\big)\right] = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$

10) $\lim_{x\to a}[f(x)]^{[g(x)]} = \lim_{x\to a}[f(x)]^{\lim_{x\to a}[g(x)]}, para\ f\ e\ g \geq 0, exceto\ o\ caso\ de\ f\ e\ g\ serem$ $iguais\ 0\ ao\ mesmo\ tempo.$

$Etc\ ...$

$Basicamente,\ só\ \boldsymbol{não\ podemos\ aplicar}\ as\ propriedades\ quando, \boldsymbol{ao\ aplicá-las,}$

$\boldsymbol{surgirem\ Limites\ Inexistentes}!$

$Por\ exemplo: é\ \boldsymbol{errado}\ escrever\ da\ seguinte\ forma:$

$$\lim_{t\to 1}\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t(t-1)}\right] \overset{\boldsymbol{1^{\underline{o}}\ Erro!}}{\cong} \lim_{t\to 1}\left[\frac{1}{t-1}\right] - \lim_{t\to 1}\left[\frac{1}{t(t-1)}\right] = \infty - \infty \overset{\boldsymbol{2^{\underline{o}}\ Erro!}}{\cong} 0$$

$O\ \boldsymbol{1^{\underline{o}}\ Erro}\ ocorreu\ porque\ se\ usou\ as\ propriedades\ dos\ Limites\ em\ um\ caso\ que\ eles\ são\ \boldsymbol{Inexistentes}.$

$O\ \boldsymbol{2^{\underline{o}}\ Erro}\ ocorreu\ por\ se\ operar\ com\ o\ símbolo\ do\ infinito\ como\ se\ ele\ fosse\ um\ número.$

$\boldsymbol{O\ Correto\ seria\ operar\ algebricamente\ e\ usar\ o\ Método\ Geral\ da\ comparação}\ (*):$

$$\lim_{t\to 1}\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t(t-1)}\right] = \lim_{t\to 1}\left[\frac{(t-1)}{t(t-1)}\right] \overset{(*)}{\cong} \lim_{t\to 1}\left[\frac{1}{t}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

1.2.2 *Teorema sobre Desigualdade*

$Se\ f(x) \leq g(x)\ quando\ x\ estiver\ próximo\ de\ (a), exceto\ possivelmente\ em\ (a), então$

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x) = L$$

1.2.3 *Teorema do Confronto ou do Sanduíche*

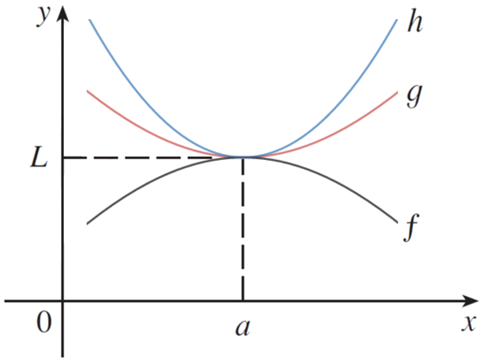
$Se\ f(x) \leq g(x) \leq h(x)\ quando\ x\ estiver\ próximo\ de\ (a),$

$exceto\ possivelmente\ em\ (a)\ e:$

$$se\ \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

$então$

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$



$$Exemplo: Mostre\ que\ \lim_{x \to 0}\left(x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

$$Tecnicamente, não\ podemos\ simplesmente\ usar\ a\ propridade\ do\ produto:$$

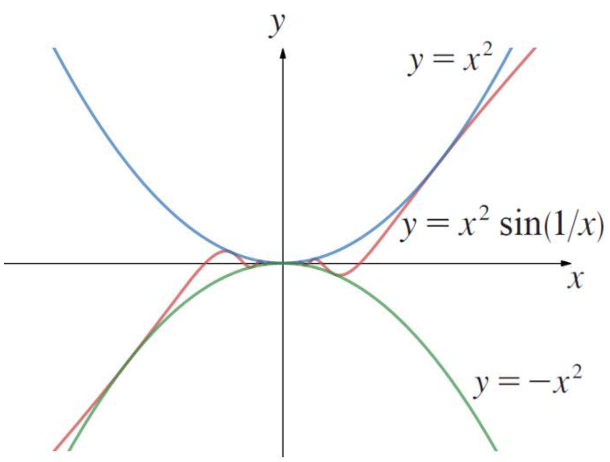
$$\lim_{x \to 0}\left[x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x \to 0}(x^2) \lim_{x \to 0}\left(sen\left(\frac{1}{x}\right)\right), pois\ o\ \lim_{x \to 0}\left(sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) \nexists$$

$Então, façamos\ o\ seguinte. Partindo\ da\ inequação\ básica\ \left(-1 \leq sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq +1\right)$

$e\ como\ x^2 > 0\ \ para\ todo\ x\ Real, então\ podemos\ fazer: \left(-x^2 \leq x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq +x^2\right)$

$Como: \lim_{x \to 0}(-x^2) = \lim_{x \to 0}(+x^2) = 0\ Então, pelo\ Teorema\ do\ Sanduíche, devemos\ ter:$

$$\lim_{x \to 0}\left(x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 0.\ Visualizando\ graficamente, temos:$$



1.2.4 *Teorema da Unicidade do Limite*

- $\boldsymbol{Se\ o\ Limite\ Lateral\ ou\ Bilateral\ (L)\ existe, ele\ é\ único.}$

1.2.5 *Definição de Função Contínua (à esquerda e à direita de um ponto e em um ponto)*

- $\boldsymbol{Uma\ função\ f(x)\ é\ contínua\ à\ esquerda\ do\ ponto\ (a, L)\ se\ e\ somente\ se:}$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a) = L$$

- $\boldsymbol{Uma\ função\ f(x)\ é\ contínua\ à\ direita\ do\ ponto\ (a, L)\ se\ e\ somente\ se:}$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) = L.$$

- $\boldsymbol{Uma\ função\ f(x)\ é\ contínua\ no\ ponto\ (a, L)\ se\ e\ somente\ se:}$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = L$$

- $\boldsymbol{Uma\ função\ f(x)\ é\ contínua\ em\ um\ intervalo\ se\ ela\ for\ contínua}$

$\boldsymbol{em\ todos\ os\ pontos\ do\ intervalo\ em\ análise.}$

Importante! *A definição de Continuidade exige que*:

1) $\boldsymbol{f(a)\ esteja\ definida, ou\ seja, (a)\ pertença\ ao\ Domínio\ e\ (L)\ pertença\ à\ Imagem}$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ **exista, ou seja** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = L$

1.2.6 *Teorema do Valor Intermediário*

Teorema do Valor Intermediário

Suponha que o intervalo $[a, b]$ *pertença ao D de uma função f e que esta função seja contínua neste mesmo intervalo. Sendo N um número qualquer entre* $f(a)$ *e* $f(b)$, *em que* $f(a) \neq f(b)$, *então existirá obrigatoriamente* **pelo meno um** (c) **em** (a, b) *tal que* $f(c) = N$:

sejam $a < c < b$ **e** N **tais que**:

$$f(a) < N < f(b) \quad \text{ou} \quad f(a) > N > f(b)$$

então existirá pelo menos um (c) *tal que*:

$$f(c) = N$$

Exemplo: ***Prove que todo polinômio de coeficientes reais de grau ímpar possui pelo menos 1 raiz real.***

1.3 Revisão

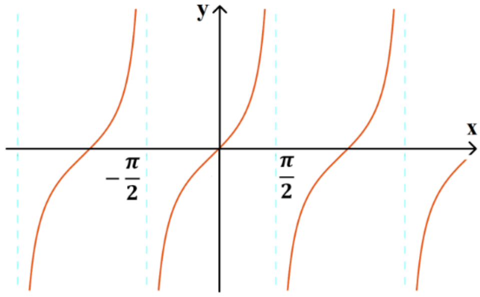
1.3.1 Limites Triviais ou imediatos: quando L=f(a)

a) *Quando já se tem o gráfico ou quando ele é facilmente esboçável*

Determine:

$\lim_{x\to(0)} f(x) =$; $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) =$

$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) =$; $\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)} f(x) =$



b) *Funções Contínuas*

$$Relembrando: \ Definição \ de \ Função \ Contínua \ em \ um \ ponto:$$

$$Uma \ \boldsymbol{função} \ \boldsymbol{f(x)} \ é \ contínua \ no \ \boldsymbol{ponto} \ \boldsymbol{(a, L)} \ se \ \boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = L}$$

$$\lim_{x\to 1}\left(5x^3+\sqrt[79]{\frac{9x^{-8}-8}{x^3}}+\frac{x^3-9}{-x^5+5}\right)=5.(1)^3+\sqrt[79]{\frac{9.(1)^{-8}-8}{1}}+\frac{(1)^3-9}{-(1)^5+5}=5+1+\frac{-8}{4}=4$$

$$\lim_{x\to\pi}\left(\frac{ln(x)\,sen(x)}{x^2}+3^{log_7 x}\right)=\frac{ln(\pi)\,sen(\pi)}{\pi^2}+3^{log_7\pi}=\frac{ln(\pi)\,.\,0}{\pi^2}+3^{log_7\pi}=3^{log_7\pi}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)+sec(x)+ctg\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{sen(x)+cos(x)+\csc\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}\right)=\frac{tg(0)+sec(0)+ctg\left(0+\frac{\pi}{2}\right)}{sen(0)+cos(0)+\csc\left(0+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{0+1+0}{0+1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x+|x|+\frac{|x|}{x}+sgn(x)\right)=0+0+1+1=2$$

$$\lim_{x\to(39{,}7)^+}(\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lceil x\rceil)=\lim_{x\to(39{,}7)^+}(\lfloor x\rfloor)+\lim_{x\to(39{,}7)^+}(\{x\})+\lim_{x\to(39{,}7)^+}(\lceil x\rceil)=$$
$$=(39)+(0{,}7)+(40)=79{,}7$$

1.3.2 *Limites Não-Imediatos*

a) Técnicas Algébricas Básicas

$$\textbf{Método Geral}\left(\overset{*}{\triangleq}\right): \textit{Sempre que } \boldsymbol{f(x)} \textbf{ for igual a } \boldsymbol{g(x)} \textbf{ para todo } \boldsymbol{(x)},$$

$$\textbf{exceto possivelmente quando } \boldsymbol{(x)} \textbf{ for igual a } \boldsymbol{(a)},$$

$$\textit{então } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x), \quad \textit{contanto que o limite exista.}$$

Sumário das principais formas de se Calcular um Limite:
Opera − se algebricamente até se poder aplicar o Método Geral.

Aconselho o leitor a prestar muita atenção nos seguintes limites, pois eles são os mais recorrentes em qualquer prova!

1) **Fatoração:**

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^2-a^2}{x-a}\right) = \lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}\right) \overset{*}{\triangleq} \lim_{x\to a}(x+a) = a+a = 2a$$

2) **Desracionalização:**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right)\frac{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a})}{x\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}\right)}\right) \overset{*}{\triangleq} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

3) **Mudança de variável:**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\right); \quad \sqrt{x} \in R \to x > 0 \to x = t^6 \textit{ e note que } x \to 1 \textit{ implica em } t^6 \to 1$$

$$\lim_{t\to 1}\left(\frac{\sqrt[3]{t^6}-1}{\sqrt{t^6}-1}\right) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{t^2-1}{t^3-1}\right) = \lim_{t\to 1}\left(\frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2+t+1)}\right) \overset{*}{\triangleq} \lim_{t\to 1}\left(\frac{t+1}{t^2+t+1}\right) = \frac{2}{3}$$

4) **Binômio de Newton:**

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(x+h)^n-(x)^n}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\boldsymbol{x^n} + nx^{n-1}h + \frac{n.(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nx^1h^{n-1} + h^n - \boldsymbol{x^2}}{h}\right) =$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{h\left(nx^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + nx^1h^{n-2} + h^{n-1}\right)}{h}\right) \overset{*}{\triangleq}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + nx^1h^{n-2} + h^{n-1}\right) = nx^{n-1}$$

b) Limites Inexistentes

1) ***Condições de Existência de um Limite Bilateral***:
✓ ***O limite à esquerda de (a) deve ser igual ao limite à direita***:
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$
✓ ***L deve assumir um único valor finito e bem definido***

2) ***Não faz sentido escrever um Limite Lateral em torno do*** $\pm\infty$:
✗ $\lim\limits_{x\to(-\infty^-)} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-\infty^+)} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(+\infty^-)} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(+\infty^+)} f(x)$

Portanto, ***também não existem Limites Bilaterais*** *em torno do Infinito.*

3) ***Assíntotas Horizontais***
Limites que tendem a um ***valor finito e bem definido (L)*** *quando x decresce ou cresce indefinidamente*:
✓ *Existem, pois possuem um valor finito e bem definido*
✓ *Possuem a seguinte notação:*
$\lim\limits_{x\to(-\infty)} f(x) = L$ **ou** $\lim\limits_{x\to(+\infty)} f(x) = L$

4) ***Assíntotas Verticais***
Limites que tendem a $(\pm\infty)$ *em torno de uma abscissa* (a):
✗ *Não existem, pois não possuem um valor finito e bem definido*
✓ ***Todavia***, *podemos utilizar a notação matemática* $(= \pm\infty)$ *como forma de expressar (a* ***tendência*** *de uma função) em torno de um ponto de abscissa finita* (a):
$\lim\limits_{x\to(a^+)} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(a^+)} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(a^-)} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(a^-)} f(x) = +\infty$
(Eles representam Assíntotas Verticais).

5) ***Caso mais comum***
Limites que tendem a $(\pm\infty)$ *quando x cresce ou decresce indefinidamente*:
✗ *Não existem, pois não possuem um valor finito e bem definido*
✓ *Todavia podemos utilizar a notação matemática* $(= \pm\infty)$ *como forma de expressar (a* ***tendência*** *de uma função) para (abscissas muito distantes da origem)*:
$\lim\limits_{x\to(+\infty)} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(+\infty)} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to(-\infty)} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to(-\infty)} f(x) = +\infty$
(Eles não representam nem Assíntotas Verticais nem Assíntotas Horizontais)

6) ***Perceba que nenhum dos seguintes Limites existe***:
Todavia o 3º possui representação matemática.

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}\right)$ *(∄ e não possui representação matemática)*

$\lim\limits_{x\to 0} sen\left(\frac{\pi}{x}\right)$ *(∄ e não possui representação matemática)*

$\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$ ***(Possui representação matemática, apesar de não existir)***

c) Assíntotas

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x^{51}-5x^4+8}{5x^{53}+3x^{15}+x^5}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{9x^{87}+\pi.x^{19}}{3x^{87}-\sqrt[9]{e}}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{7x^{109}+2\pi^7}{5x^{108}-\pi^7}\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{15x^{78}+\sqrt{\pi}.x^{19}-6}{5x^{77}+x^{38}-\sqrt[7]{e}}\right)$$

d) Limites Fundamentais

1) *O limite fundamental da função* $\frac{sen(x)}{x}$ *e da função* $\frac{tg(x)}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right) = 1$$

2) *O Limite Fundamental da Base de Euler* (e) *é do tipo* (1^{∞})

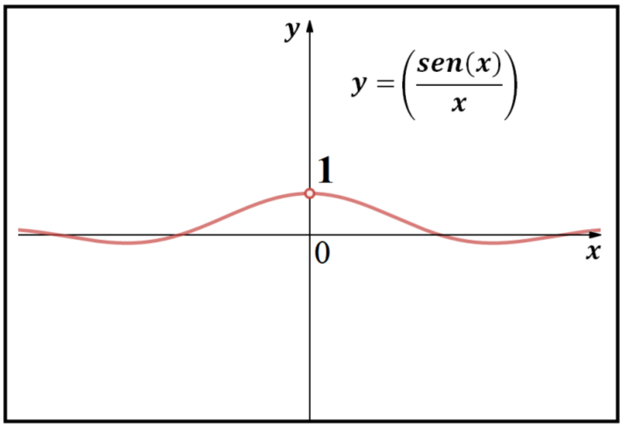
$$1^{\underline{a}}\ Visualização: \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e = 2,71828\ldots$$

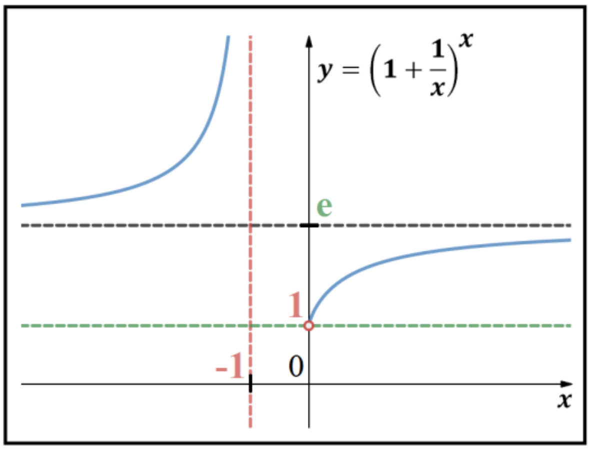
$$2^{\underline{a}}\ Visualização: \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}} = e = 2,71828\ldots$$

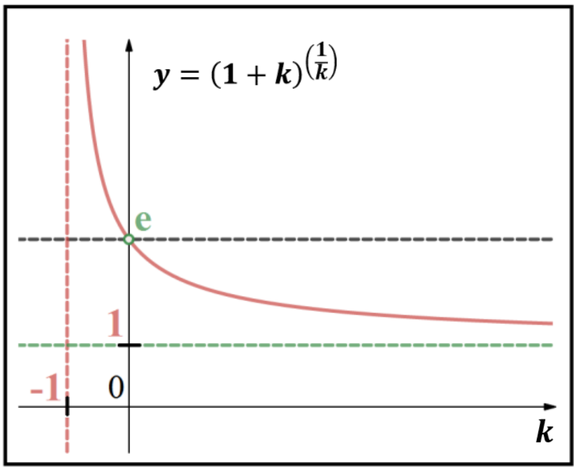
$$Nota: Se\ o\ expoente\ tender\ para\ 0: \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{\left(x=\frac{1}{k}\right)} \lim_{k\to 0^{+}}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} = 1$$

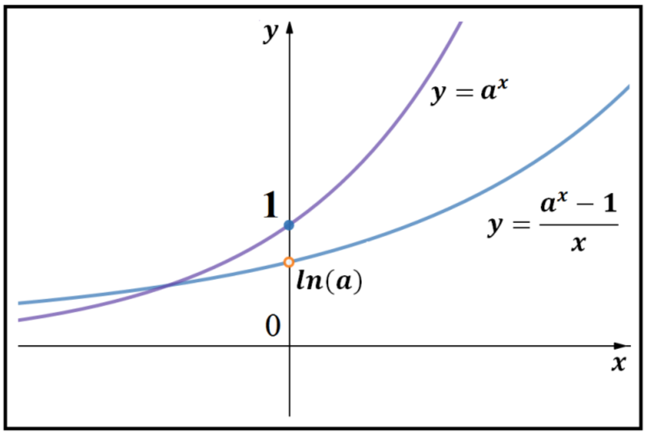
3) *O Teorema do* $ln(a)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^{x}-1}{x}\right) = ln(a)$$









1.3.3 Teoremas e Revisão Geral

1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3^x-5^x}{x}\right)=$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{5^x+7^x-4^x-3^x}{x}\right)=$

3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{5^x+7^x-4^x}{x}\right)=$

4) *Revisão de 8 Limites*

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{tg^m(x)}{sen^n(x)}\right)=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \underbrace{=}_{\left(x=\frac{1}{k}\right)} \lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} \underbrace{=}_{\left(x=\frac{1}{k}\right)} \lim_{k\to 0^+}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x-1}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{b^x-a^x}{x}\right)=$$

5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+|x|+\frac{|x|}{x}+sgn(x)+\lfloor x\rfloor+\{x\}+\lceil x\rceil\right)=$

6) *Encontre o valor do limite* $\left(\lim\limits_{x\to 0} x\,sen\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$ *usando o* ***Teorema do Sandwich***

7) *Prove que o Polinômio* $(x^3-1.6x^2+0.06)$ *possui* 3 *raízez reais, cada uma nos seguintes intervalos* $(-1{,}0)$ $(0{,}1)$ *e* $(1{,}2)$.

8) *Encontre os valores de u e de v para que a seguinte função seja contínua nos Reais:*

$$f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^4-13x^2+36}{x^2-5x+6}\right) & ,x\neq 2 \text{ e } x\neq 3\\ u^2-11u+48, & x=2\\ v^2-19v+90, & x=3\end{cases}$$

1.3.4 Ultimate Fight

9) Agora encontre o valor numérico de T de cabeça em menos de 30 segundos ☺

$$T = \lim_{x\to 0^+}\left\{\left[\frac{sen(x)}{x}\right]^{\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}\left[\frac{tg(x)}{x}\right] + \frac{\left[cos\left(\frac{5^x-3^x}{x}\right)\right]}{sen^2\left(\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\right)} ln\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)\right.$$

$$\left. -\sqrt[11]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{5x}}\,.\,ln\left[\frac{e^x-1}{x}\right]^{\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}}\frac{tg^3(x)}{sen^2(x)}\right\} =$$

Resolução:

$$\boldsymbol{T} = \left[\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\boldsymbol{sen(x)}}{\boldsymbol{x}}\right]\right]^{\lim_{x\to 0^+}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}.\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\boldsymbol{tg(x)}}{\boldsymbol{x}}\right] + \frac{\boldsymbol{cos}\left(\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{5^x-3^x}{x}\right)\right)}{\boldsymbol{sen^2}\left(\left[\frac{\lim_{x\to 0^+}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]}{\boldsymbol{e}}\right]^{\pi}\frac{\pi}{2}\right)}\boldsymbol{ln}\left[\lim_{x\to 0^+}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)\right]$$

$$+\sqrt[11]{\lim_{x\to 0^+}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^5}\,.\,\boldsymbol{ln}\left[\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^x-1}{x}\right]\right]^{\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}}{x}\right]}\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{x^2}\right]$$

$$T = 1^e.1 + \frac{cos\left(ln\left(\frac{5}{3}\right)\right)}{sen^2\left[\left[\frac{e}{e}\right]^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]} ln(1) + \sqrt[11]{1^5}\,.\,ln[\ln(e)]^{\left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)}\,[0]$$

$$T = 1 + 0 + 0 = 1 \rightarrow T = 1$$

Qualquer dúvida, perguntem no nosso Grupo Exclusivo do Telegram!!