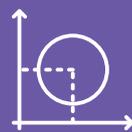


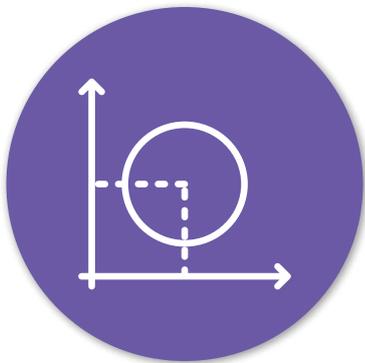


2020 - 2022



# GEOMETRIA ANALÍTICA





# GEOMETRIA ANALÍTICA

Aqui você aprenderá a quantificar a geometria plana e espacial, conhecerá as equações das figuras geométricas, calculará distâncias e muito mais!

**Esta subárea é composta pelos módulos:**

1. Plano Cartesiano
2. Lugar Geométrico
3. Equações da Reta
4. Posições entre Retas
5. Circunferência no Plano Cartesiano
6. Posições Relativas com Circunferências
7. Elipse
8. Hipérbole
9. Parábola

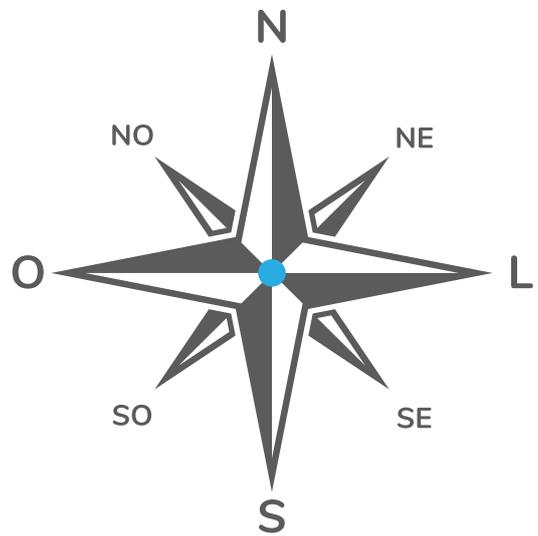


# PLANO CARTESIANO

## INTRODUÇÃO

Orientar-se. Todos os dias utilizamos mecanismos distintos para nos orientar. A escola orienta nossos estudos, a previsão do tempo nos orienta sobre o clima, os jornais nos orientam sobre o que está acontecendo em nosso país e também no mundo e o mapa nos orienta sobre direção e localização. Afinal, quem nunca usou um GPS para ir até a festinha de um amigo, não é mesmo?

Quando precisamos nos localizar geograficamente, em geral, utilizamos a rosa dos ventos. A rosa dos ventos é uma imagem utilizada para determinar quatro sentidos fundamentais: Norte (N), Sul (S), Oeste (O) e Leste (L), e seus intermédios: Nordeste (NE), Sudeste (SE), Sudoeste (SO) e Noroeste (NO). Utilizando esse sentido de direção estabelecido, podemos nos guiar em qualquer lugar do planeta. Para isto, basta se imaginar como sendo esse ponto azul, o qual chamaremos de ponto inicial, afinal é o ponto de partida, e de se posicionar de modo que o seu corpo fique de frente para a direção norte e seu braço direito para o Leste. É sempre possível identificarmos em qual direção está o norte, por intermédio do sol, para que essa localização seja possível. Todo bom aventureiro deve ter isso como um fundamento base. Afinal, não dá para se perder durante uma aventura!

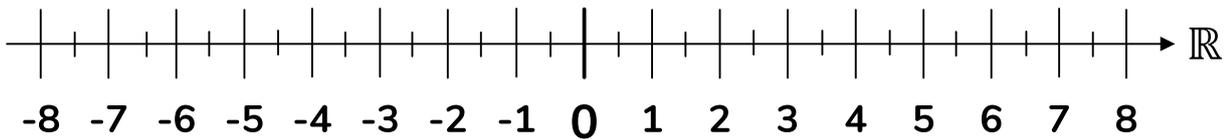


Existem diversas formas de orientação: Norte ou Sul, direita ou esquerda, sentido horário ou anti-horário, entre outros. Na matemática, durante muito tempo, a parte que conhecemos hoje como geometria tratava de seus objetos (quadrado, circunferência, entre outros) apenas por desenhos e sua descrição era escrita como um texto. Por exemplo, a circunferência era o lugar geométrico constituído por todos os pontos que estavam a uma mesma distância de seu centro. Com o tempo, surgiu a necessidade de termos ferramentas que permitissem o tratamento dessas figuras e de curvas em geral de maneira analítica. Neste contexto, surge então a “rosa dos ventos” da matemática, permitindo tratar por meio de equações, dentro de um sistema orientado, qualquer figura ou curva plana.

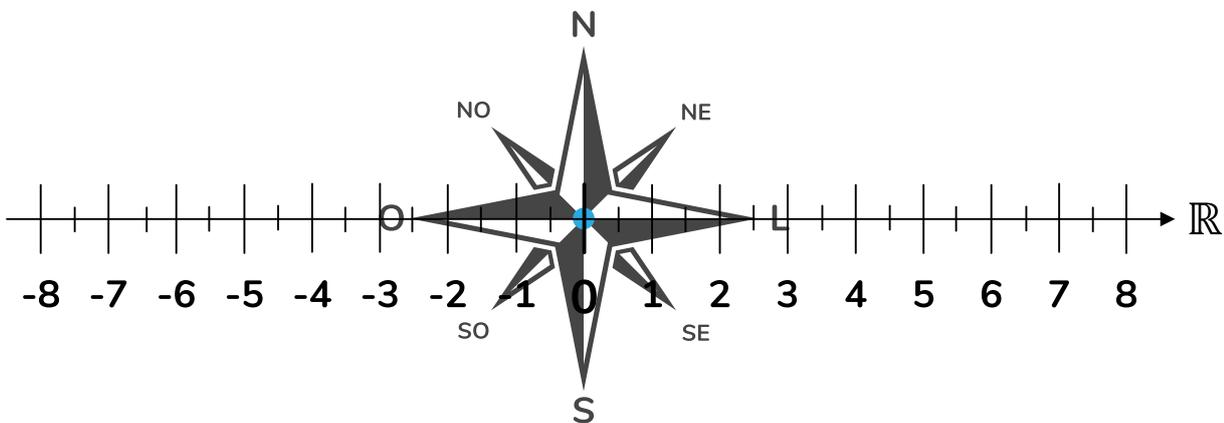


## PLANO CARTESIANO

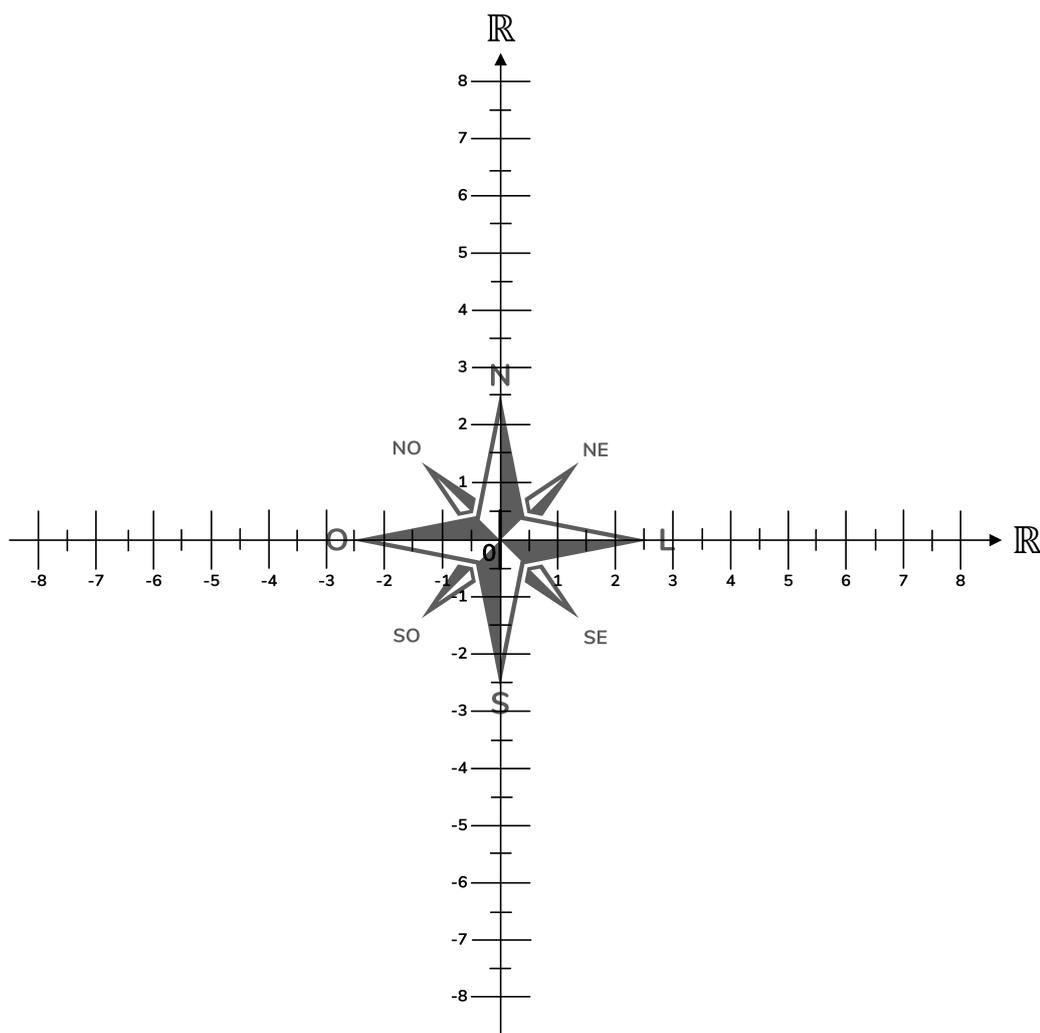
Vamos construir um sistema de orientação numérica baseado nos pontos cardeais. Inicialmente, vamos relembrar a reta real. A reta real contém todos os números racionais, aqueles cuja representação se dá por forma de fração, e os números irracionais, aqueles que não são possíveis expressar em forma de fração. Utilizamos a representação abaixo para a reta real.



Na rosa dos ventos posicionaremos sobre o ponto azul a reta real. Faremos coincidir o ponto inicial da rosa dos ventos e a origem da reta real (o número 0).



Observe que se houvesse uma pessoa sobre o ponto azul, não só poderíamos orientá-la em direção ao Leste ou Oeste, mas também o quanto ela poderia andar. Contudo, temos um sistema falho, pois com essa construção conseguimos orientar a quantidade que ela deverá percorrer apenas para Leste ou Oeste, mas e o demais pontos cardeais? O que podemos fazer? Você deve ter pensado em colocar retas reais em todas as demais direções, certo? Mas isso não é preciso, basta colocarmos mais uma! Vale lembrar que temos apenas quatro sentidos fundamentais e para dois deles já conseguimos estabelecer uma referência numérica. Para completar esse sistema, vamos então colocar outra reta real usando a mesma ideia, só que agora na vertical, fazendo coincidir novamente o ponto inicial e a origem da reta.



Agora sim, temos um sistema que funciona! Vamos testá-lo? Digamos que Marta esteja posicionada no ponto inicial e tenha recebido o seguinte comando: Dê 5 passos na direção oeste e depois 3 na direção norte. Perceba que esse comando se resume a dar **coordenadas** para Marta, podendo ser resumida em: primeira coordenada é 5 O e segunda coordenada é 3 N, ou seja, (5O, 3N). Esta coordenada também indica que estamos no Noroeste, mais à oeste do que ao norte.

Podemos simplificar ainda mais essa informação, para isso vamos determinar uma **ordem**: na representação utilizada (**primeira coordenada, segunda coordenada**) sempre indicaremos o sentido leste ou oeste no primeiro espaço e depois norte ou sul, ou seja, a primeira coordenada sempre indicará leste ou oeste. Deste modo, podemos escrever a coordenada (5O, 3N) como (-5,3). Por quê?

Quando determinamos que primeiro indicaríamos o sentido Leste-Oeste obtemos uma forma mais simples de orientar, pois, partindo do ponto inicial, todos os valores à oeste são negativos. Assim, na representação  $(x, y)$ , onde  $x$  representa qualquer número no eixo leste-oeste e  $y$  qualquer número no eixo norte-sul. Se a primeira coordenada for negativa indica que queremos ir para oeste e se o número for positivo queremos ir para leste. O mesmo ocorre para a segunda coordenada, se for positiva indica norte e

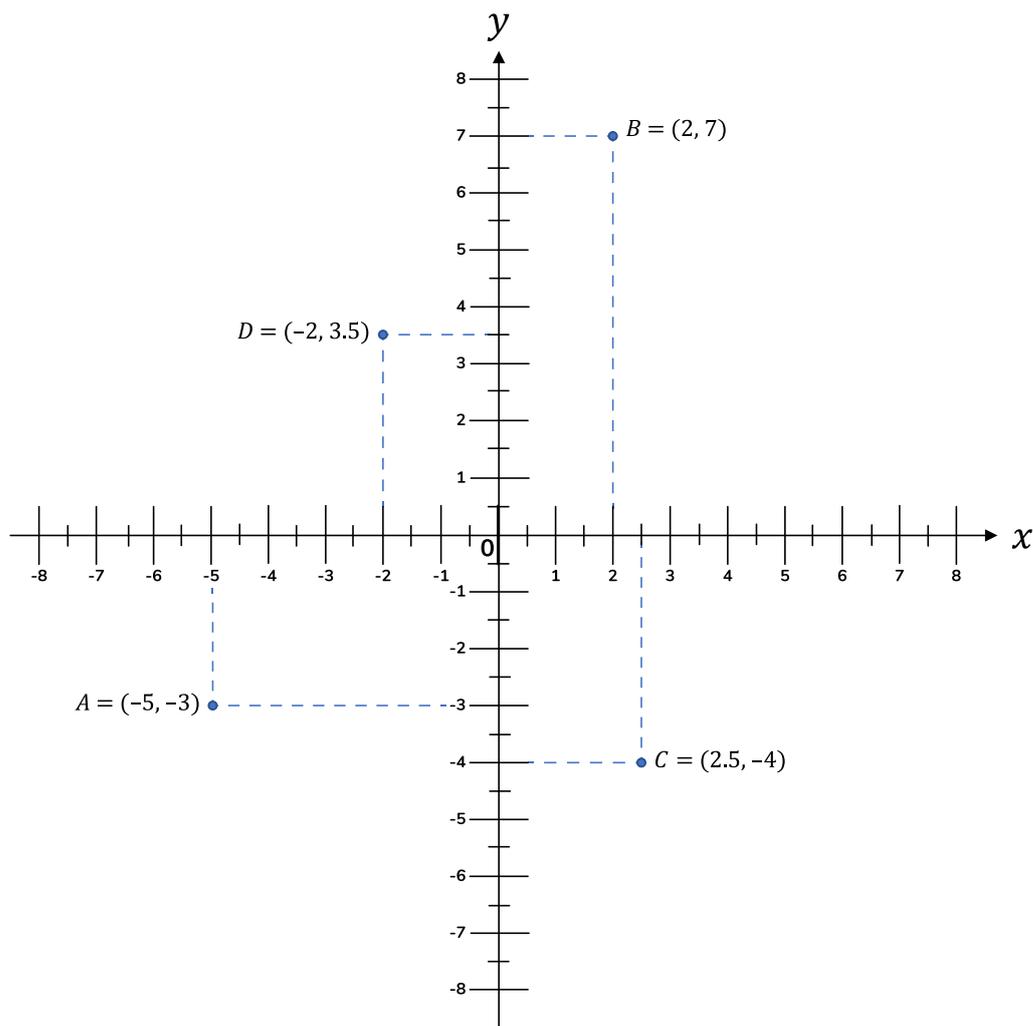


negativa indica sul. Esse mesmo sistema de referência pode ser usado para diversas situações e ele é denominado de **Plano cartesiano**. As coordenadas que determinam em qual direção seguir são os **pares ordenados**, pois a orientação vem em duas ( $x, y$ ) e possui uma ordem. Pela coordenada  $(-5,3)$  você estará no Noroeste, mas, se você trocar a ordem, temos  $(3,-5)$  que indica 3 passos na direção leste e 5 na direção sul, indicando um ponto no Sudeste.

O **Plano cartesiano** é um sistema composto por dois eixos perpendiculares<sup>1</sup> orientados constituídos de números reais. O eixo que está na horizontal é denominado **eixo das abscissas** e o eixo vertical de **eixo das ordenadas**. Em geral, chamamos de  $x$  o eixo das abscissas e  $y$  o eixo das ordenadas.

**Par ordenado** são dois elementos representados na forma  $(x, y)$  em que a ordem onde cada um é colocado importa. O par  $(1, 2)$  é diferente do par  $(2, 1)$ , mesmo contendo os mesmos elementos. Um ponto no plano é um par ordenado.

Perceba que é o mesmo sistema de referência que usamos para a rosa dos ventos, a diferença é que agora ele é mais geral, pode ser usado para diversas coisas, mas segue a mesma lógica. Por exemplo, vamos marcar algumas coordenadas. Vamos marcar as coordenadas:  $A=(-5,-3)$ ,  $B=(2, 7)$ ,  $C=(2.5, -4)$  e  $D=(-2, 3.5)$ .



<sup>1</sup>retas numéricas que possuem um único ponto de interseção e que o ângulo formado entre elas é de 90°.



Analise as semelhanças, antes a primeira coordenada pertencia ao eixo leste-oeste, agora pertence ao eixo das abscissas ou eixo  $x$ . Algumas características do plano cartesiano precisam ser destacadas.

## CARACTERÍSTICAS DO PLANO CARTESIANO

### I - Quadrantes:

O plano cartesiano é dividido em quatro partes: 1º quadrante, 2º quadrante, 3º quadrante e 4º quadrante. O **primeiro quadrante** é aquele cuja as coordenadas  $x$  e  $y$  possuem valor positivo. Se voltarmos ao sistema da rosa dos ventos, seria qualquer ponto que se encontra na região Nordeste (NE). Do exemplo anterior, temos que o ponto  $B$  está no primeiro quadrante, pois a primeira coordenada é 2, que é um número positivo e a segunda coordenada é 7, que também é um número positivo, logo ambos são positivos e por esse motivo pertence ao primeiro quadrante. Outros exemplos de coordenadas que pertencem ao primeiro quadrante são:  $(\pi, 3)$ ,  $(\sqrt{2}, 5)$ ,  $(7, 24)$  e  $(17, 4.3)$ .

O **segundo quadrante** é aquele cuja coordenada  $x$  possui um número negativo e a coordenada  $y$  possui valor positivo. No sistema da rosa dos ventos, é qualquer ponto que se encontre na região Noroeste (NO). Do exemplo anterior, temos que o ponto  $D$  está no segundo quadrante, pois a primeira coordenada é  $-2$  que é um número negativo e a segunda coordenada é 3.5 que é um número positivo, logo o primeiro é negativo e segundo positivo e por esse motivo pertence ao segundo quadrante. Outros exemplos de coordenadas que pertencem ao segundo quadrante são:  $(-1, 3)$ ,  $(-2.5, \sqrt{7})$ ,  $(-3, 24)$  e  $(-e, 3)$ .

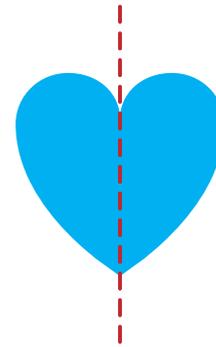
O **terceiro quadrante** é aquele cuja coordenadas  $x$  e  $y$  possuem valores negativos. No sistema da rosa dos ventos, é qualquer ponto que se encontre na região Sudoeste (SO). Do exemplo anterior, temos que o ponto  $A$  está no terceiro quadrante, pois a primeira coordenada é  $-5$  que é um número negativo e a segunda coordenada é  $-3$  que também é um número negativo logo, ambos são negativos e por esse motivo pertence ao terceiro quadrante. Outros exemplos de coordenadas que pertencem ao terceiro quadrante são:  $(-1, -3)$ ,  $(-\sqrt{11}, -2)$ ,  $(-1.55, -8)$  e  $(-2, -\frac{1}{3})$ .

O **quarto quadrante** é aquele cuja coordenada  $x$  possui valor positivo e a coordenada  $y$  possui valor negativo. No sistema da rosa dos ventos, é qualquer ponto que se encontre na região Sudeste (SE). Do exemplo anterior, temos que o ponto  $C$  está no quarto quadrante, pois a primeira coordenada é 2.5 que é um número positivo e a segunda coordenada é  $-4$  que é um número negativo, logo o primeiro é positivo e o segundo negativo e por esse motivo pertence ao quarto quadrante. Outros exemplos de coordenadas que pertencem ao quarto quadrante são:  $(0.5, -3)$ ,  $(\sqrt{3}, -1)$ ,  $(5.53, -100)$  e  $(1, -\frac{2}{9})$ .



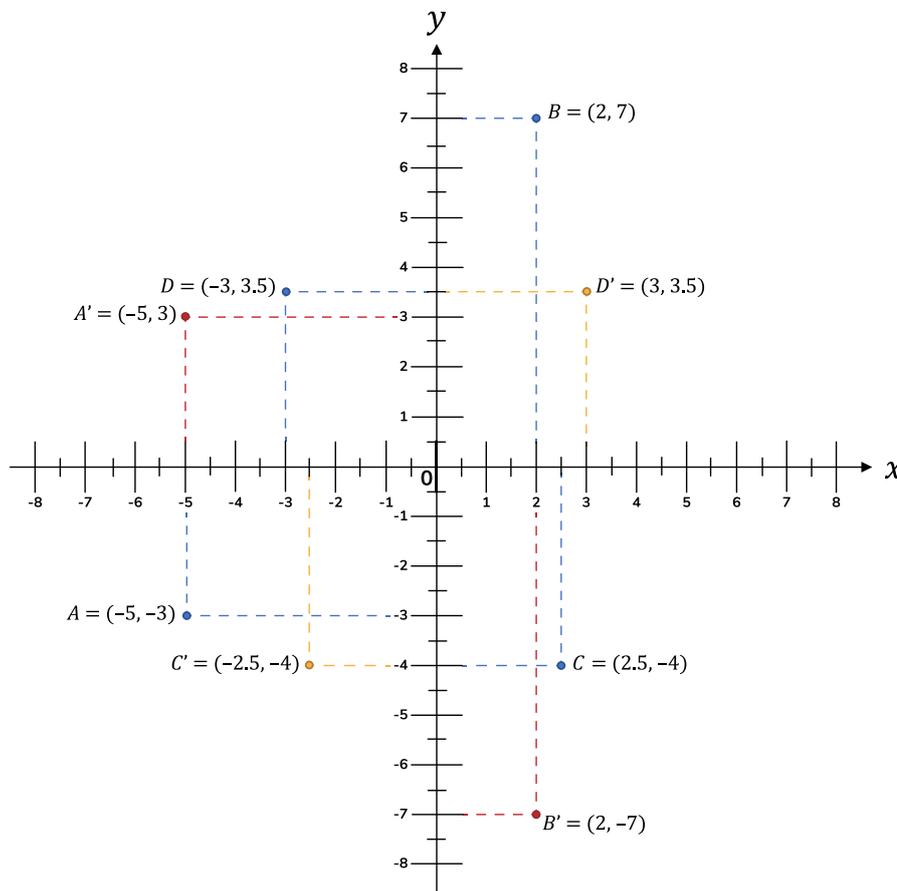
## II - Simetrias:

A ideia de simetria que a maioria de nós temos é aquela de dividir um determinado objeto ao meio e as duas metades serem exatamente iguais. Por exemplo, o coração que se encontra ao lado, ao dividirmos ele ao meio, obtemos duas partes exatamente iguais. Falamos então que o coração é simétrico. Esta simetria é conhecida como simetria de reflexão. A reta que divide uma figura simétrica ao meio é chamado **eixo de simetria**.



Utilizaremos essa mesma ideia no plano cartesiano. No plano temos dois eixos por construção: o eixo das abscissas (eixo  $x$ ) e o eixo das ordenadas (eixo  $y$ ). Intuitivamente, por conter o nome eixo, você já deve estar pensando em como é possível realizar simetria no plano, não é? Então vamos lá! O plano cartesiano é composto por pares ordenados e, para qualquer ponto que escolhermos, podemos pensar na simetria em relação ao eixo  $x$  ou  $y$ .

Vamos utilizar os pontos  $A=(-5, -3)$ ,  $B=(2, 7)$ ,  $C=(2.5, -4)$  e  $D=(-3, 3.5)$ . Para os pontos  $A$  e  $B$ , faremos a simetria deles em torno do eixo  $x$ . Para isso, basta trocarmos o sinal da segunda coordenada: se for positivo, ficará negativo e vice-versa. O simétrico do ponto  $A$  será o ponto  $A'=(-5, 3)$  e do ponto  $B$  será  $B'=(2, -7)$ . Já para os pontos  $C$  e  $D$ , realizaremos a simetria em torno do eixo  $y$ , agora trocaremos o sinal da primeira coordenada. Deste modo, o simétrico do ponto  $C$  será  $C'=(-2.5, -4)$  e do ponto  $D$  será  $D'=(3, 3.5)$ . No plano cartesiano abaixo, colocamos os pontos e seus respectivos simétricos.





Essas não são as únicas simetrias possíveis no plano cartesiano. Existem duas retas que dividem o plano de um modo bem especial. A primeira delas tem como característica que qualquer ponto que esteja sobre ela têm a primeira e a segunda coordenadas iguais, assim como divide o plano em duas partes iguais. Essa reta é conhecida como **Bissetriz dos Quadrantes Ímpares (B.Q.I)**. Recebe o nome de bissetriz por cortar o ângulo de  $90^\circ$  em dois ângulos de  $45^\circ$  e quadrantes ímpares vem do fato dessa reta passar apenas pelos  $1^\circ$  e  $3^\circ$  quadrantes.

A segunda é a **Bissetriz dos Quadrantes Pares (B.Q.P)** é a reta que passa pela origem (ponto inicial) e divide o plano cartesiano em duas partes. Qualquer ponto que esteja sobre essa reta têm na primeira e segunda coordenada o mesmo valor, mas com sinais opostos. Por exemplo, os pontos  $(-1,1)$  e  $(2,-2)$  pertencem à B.Q.P, pois, nos dois casos, a primeira e a segunda coordenada têm o mesmo valor, mas os sinais são opostos.

Como o nosso objetivo é entender as simetrias no plano, vamos agora pegar alguns pontos e buscar compreender como se dá a simetria em relação às essas retas que acabamos de descobrir a existência. Para qualquer ponto do plano que pegarmos, podemos realizar a simetria em relação aos eixos  $x$  e  $y$  ou às bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares. Para que essa questão fique clara, utilizaremos os mesmos pontos da simetria em torno dos eixos, são eles:  $A=(-5, -3)$ ,  $B=(2, 7)$ ,  $C=(2.5, -4)$  e  $D=(-3, 3.5)$ . Para os pontos  $A$  e  $B$ , faremos a simetria deles em torno B.Q.I. Sempre que quisermos realizar a simetria de algum ponto em relação à esta bissetriz, basta troca de lugar as das coordenadas e inverter o sinal de ambas, ou seja, se a primeira coordenada é positiva, colocaremos ela como segunda coordenada e com o sinal negativo. Para os pontos  $A$  e  $B$ , seus respectivos simétricos serão  $A'=(3, 5)$ , em roxo, e  $B'=(-7,-2)$ , em vermelho.

