“Quando uma criatura humana desperta para um grande sonho e sobre ele lança toda a força de sua alma, todo o universo conspira a seu favor.”

SUMÁRIO

NÚMEROS COMPLEXOS

1. INTRODUÇÃO

O fato de equações como $x^2+1=0$ não terem soluções no conjunto dos números reais, levou à definição dos números complexos. Para resolver equações como a supracitada, definimos **a unidade imaginária i,** tal que

$$i^2 = -1.$$

2. DEFINIÇÃO

Um número complexo z é um número da forma $z = x + yi$.

A expressão x + yi é chamada forma algébrica de um número complexo z = (x, y), podemos escrever o conjunto dos complexos da seguinte forma

$\mathbb{C} = \{x + yi \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$.

x = Re(z) ; parte real do complexo z.

y = Im(z) ; parte imaginária do complexo z.

Se x = 0 e y ≠ 0, z é um número imaginário puro.

Se y = 0, z é um número real.

3. OPERAÇÕES

Sejam $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$ dois números complexos.

3.1. IGUALDADE

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2) \text{ e } \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$.

3.2. ADIÇÃO

$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$.

3.3. SUBTRAÇÃO

$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i$

3.4. MULTIPLICAÇÃO

$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)i$.

3.5. DEFINIÇÃO DO CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja z um número complexo tal que $z = x + yi$. O número $\overline{z} = x - yi$ é chamado o conjugado do complexo z.

3.6. DIVISÃO

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$.

$$\frac{z}{w} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\overline{z}}{|z^2|}.$$

4. PROPRIEDADES

1. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in R$.
2. $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$.
3. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
4. $\overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
5. $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$
6. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}, z_2 \neq 0$
7. $Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$ e $Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$.

5. POTÊNCIAS DE I

Observe o cálculo das primeiras potências de i:

$i^0 = 1$;

$i^1 = i$;

$i^2 = -1$;

$i^3 = i^2 . i = -i$;

$i^4 = i^3 . I = 1$;

$i^5 = i^4 . i = i$;

$i^6 = i^5 . i = -1$;

$i^7 = i^6 . i = -i$.

Percebe-se que as potências de i repetem-se de 4 em 4, iremos provar isto agora:

TEOREMA

$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = i^r$

Com n = 4 . q + r

Onde r é o resto da divisão de n por 4.

Portanto para calcular uma potência de i basta observar o resto da divisão de n por 4, e para isso basta utilizar o número formado pelos dois últimos algarismos de n.

6. PLANO DE ARGAND-GAUSS, MÓDULO, PROPRIEDADES, DISTÂNCIA

6.1. MÓDULO DE UM NÚMERO COMPLEXO

Seja $z = x + yi$ então definimos seu módulo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

PROPRIEDADES:

a) $|z| \geq 0,\ \forall z \in C$

b) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

c) $z.\bar{z} = |z|^2$

d) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

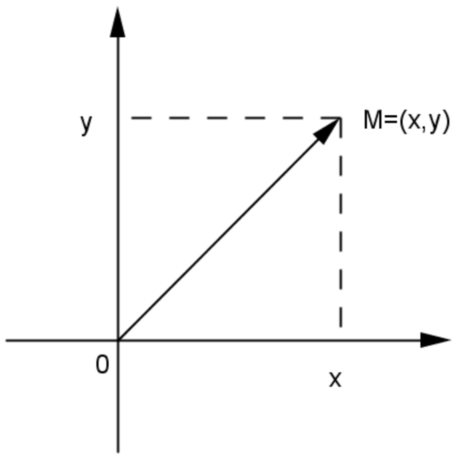
e) $|z| - |w| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$

f) $|z^{-1}| = |z|^{-1},\ z \neq 0$

g) $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|},\ w \neq 0$

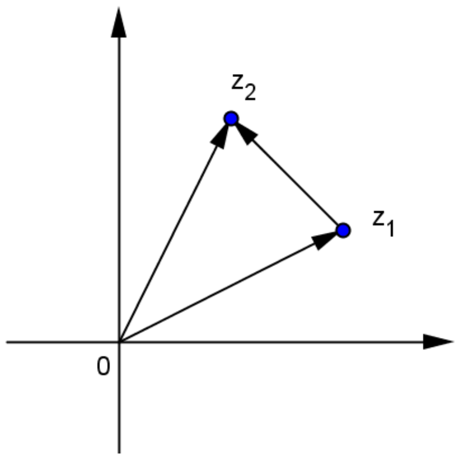
6.2. AFIXO DE UM COMPLEXO

Um número complexo z cuja forma algébrica é x + yi pode ser representado no plano cartesiano $R \times R$ pelo ponto $M = (x, y)$. O ponto M é então chamado de afixo do complexo z. Desta forma, podemos enxergar o complexo z como sendo o vetor $\overrightarrow{OM}$ e assim fica perfeitamente plausível a definição que demos para o módulo do complexo z pois $\left|\overrightarrow{OM}\right| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

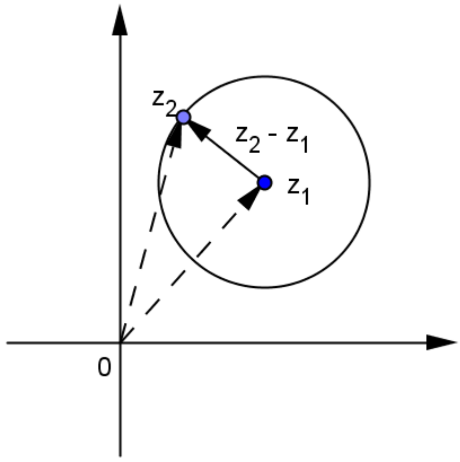


6.3. LUGARES GEOMÉTRICOS

Sejam $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, então o módulo $|z_2 - z_1|$ representa a distância do afixo z_1 ao afixo z_2.



a) O conjunto dos pontos tais que $|z - z_1| = r$ é um circunferência de centro em z_1 e raio r.



b) O conjunto dos pontos tais que $|z - z_1| = |z - z_2|$ é a mediatriz do segmento $\overline{z_1 z_2}$.

c) O conjunto dos pontos tais que $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$, com $2a > |z_1 - z_2|$ é uma elipse com focos em z_1 e z_2 e eixo maior igual a $2a$.

d) O conjunto dos pontos tais que $|z - z_1| - |z - z_2| = 2a$, com $2a < |z_1 - z_2|$ é um ramo de hipérbole com focos em z_1, z_2.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1. Os valores, dos reais x e y para os quais $(2+i)x+y=3-2i$ são tais que $x+y$ é:

a) 1
b) 3
c) 5
d) 7

2. (EEAR 2015) Se i é a unidade imaginária, pode-se afirmar que i^7 é

a) i
b) i^2
c) i^3
d) i^4

3. (FUVEST 2011)

a) Sendo **i** a unidade imaginária, determine as partes real e imaginária do número complexo

$$z_0 = \frac{1}{1+i} - \frac{1}{2i} + i.$$

b) Determine um polinômio de grau 2, com coeficientes inteiros, que tenha z_0 como raiz.

c) Determine os números complexos **w** tais que $\mathbf{z_0 \, . w}$ tenha módulo igual a $5\sqrt{2}$ e tais que as partes real e imaginária de $\mathbf{z_0 \, . \, w}$ sejam iguais.

d) No plano complexo, determine o número complexo $\mathbf{z_1}$ que é o simétrico de $\mathbf{z_0}$ com relação à reta de equação y – x = 0.

4. O valor da soma $i+2i^2+3i^3+\cdots+2002i^{2002}$ é igual a

a) $-999+1002i$
b) $-1002+999i$
c) $-1001+1000i$
d) $-1002+1001i$
e) i

5. Calcule $z = \frac{5+5i}{3-4i} + \frac{20}{4+3i}$.

6. (ESPCEX 2014) De todos os números complexos z que satisfazem a condição $|z-(2-2i)|=1$, existe um número complexo z_1 que fica mais próximo da origem. A parte real desse número complexo z_1 igual a:

a) $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$
b) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{4-\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{4+\sqrt{2}}{4}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

7. (IME 2012) Seja o número complexo $Z=a+bi$, com a e $b \in \mathbb{R}$ (real) e $i=\sqrt{-1}$. Determine o módulo de Z sabendo que $\begin{cases} a^3 = 3(1+ab^2) \\ b^3 = 3(a^2b-1) \end{cases}$.

8. Calcule $\sqrt{3+4i}$:

9. (IME 2010) Considere o sistema abaixo, onde $x_1, x_2,\ x_3$ e Z pertencem ao conjunto dos números complexos.

$$\begin{cases} (1+i)x_1 - ix_2 + ix_3 = 0 \\ 2ix_1 - x_2 - x_3 = Z \\ (2i-2)x_1 + ix_2 - ix_3 = 0 \end{cases}$$

O argumento de Z, em graus, para que x_3 seja um número real positivo é: (Obs.: $i=\sqrt{-1}$)

a) 0°
b) 45°
c) 90°
d) 135°
e) 180°

10. (AFA 2002) Considere no campo complexo uma curva tal que $\text{Im}\left(\frac{2}{z}\right) \geq k$, onde z é um complexo não nulo.

Se $k = 2$, tem-se sua representação gráfica dada pelo

a) círculo de raio $\frac{1}{4}$ e tangente ao eixo real.

b) círculo de raio $\frac{1}{2}$ e tangente ao eixo imaginário.

c) conjunto de pontos do plano complexo exterior ao círculo de raio $\frac{1}{2}$ e centro $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

d) círculo de raio $\frac{1}{2}$ e tangente ao eixo real.

11. (AFA 2003) Analise as alternativas e marque a correta.

a) Dado o complexo $z = m + mi$, onde $m \in R^*$ e i é a unidade imaginária, pode-se dizer que o afixo de $(\overline{z})^2$ é, em relação à origem, simétrica do afixo $(-2m^2, 0)$.

b) No plano de Argand-Gauss os complexos z, tais que $|z-1| \leq 1$, são representados pelos pontos do círculo de centro $(0,1)$ e raio unitário.

c) Se $n \in N$ e i a unidade imaginária, então $(i^{n+1} + i^n)^8$ é um número real maior do que zero.

d) Se $z = a + bi$ ($a \in R^*$, $b \in R$ e i é a unidade imaginária) é um complexo, então $z - \overline{z}$ é sempre um número complexo imaginário puro.

12. (AFA 2005) Considere o número complexo z tal que $\overline{|z| + z} = 2 - i$, onde $i = \sqrt{-1}$ e identifique entre as opções abaixo, as que são corretas.

(01) O afixo de z é ponto do 1º quadrante.

(02) $\left(z - \frac{3}{4}\right)^{1002}$ é real positivo.

(03) O menor inteiro positivo n para o qual $\left(z + \frac{1}{4}\right)^n$ é real negativo pertence ao intervalo $]2,5[$

A soma das opções corretas é igual a

a) 6
b) 5
c) 3
d) 2

13. (ITA 1987) Considerando z e w números complexos arbitrários e $u = z \cdot w + \overline{z} \cdot \overline{w}$, então o conjugado de u será necessariamente:

a) igual à $|z|\ |w|$.
b) um número imaginário puro.
c) igual ao dobro da parte real de $z + w$.
d) igual ao dobro da parte real do número $z \cdot w$.
e) diferente de u.

14. (ITA 2007) Assinale a opção que indica o módulo do número complexo $\dfrac{1}{1 + i\cot g\, x}$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$.

a) | cos x |
b) (1 + sen x) / 2
c) $\cos^2 x$
d) | cos sec x |
e) | sen x |

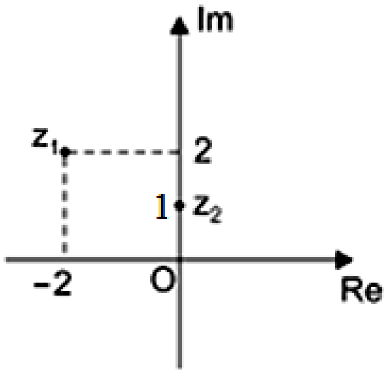
15. (AFA 2012)O valor de n tal que $\sum_{j=1}^{n} (1+i)^j = 31 + i$, sendo i a unidade imaginária, é

a) par menor que 10.
b) primo maior que 8.
c) ímpar menor que 7
d) múltiplo de 9.

16. (AFA 2010) Sejam $z = x + y \cdot i$ ($x \in R^*$, $y \in R^*$ e i a unidade imaginária), $\overline{z}$ o conjugado de z e λ o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ do plano cartesiano para os quais $z \cdot \overline{z} = 2x + 3$. Se A e B são os pontos de interseção de λ com o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ e se A' é o ponto de interseção de λ com o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ que possui a menor abscissa, então a área do triângulo A'AB é, em unidades de área, igual a

a) $2\sqrt{3}$
b) $2\sqrt{2}$
c) $\sqrt{3}$
d) $\sqrt{2}$

17. (AFA 2012) No plano de Argand-Gauss abaixo, estão representados os afixos dos números complexos z_1 e z_2, tais que z_2 é a unidade imaginária e $\frac{z_1}{z_2} = z_3$.



Considere o conjunto S de todos os afixos de $z = x + y \cdot i$ tais que $|z - z_3| \leq 2$. Sobre os elementos do conjunto S é correto afirmar que

a) qualquer um deles tem argumento principal $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
b) formam uma figura plana de área menor que 12 unidades de área.
c) são todos números imaginários.
d) nenhum deles é número imaginário puro.

18. (EFOMM 2012) A solução da equação $|z| + z = 1 + 3i$ é um número complexo de módulo:

a) $\frac{5}{4}$
b) 5
c) $\sqrt{5}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
e) $\frac{5}{2}$

19. Seja o número complexo $z = \frac{x + yi}{3 + 4i}$, com x e y reais e $i^2 = -1$. Se $x^2 + y^2 = 20$, então o módulo do complexo z é igual a:

a) 0
b) $\sqrt{5}$
c) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
d) 4
e) 10

20. Considere a família de curvas do plano complexo, definida por $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=C$, onde z é um complexo não-nulo e C é uma constante real positiva. Para cada C temos uma

a) circunferência com centro no eixo real e raio igual a C.

b) circunferência com centro no eixo real e raio igual a $\frac{1}{C}$.

c) circunferência tangente ao eixo real e raio igual a $\frac{1}{2C}$.

d) circunferência tangente ao eixo imaginário e raio igual a $\frac{1}{2C}$.

e) circunferência com centro na origem do plano complexo e raio igual a $\frac{1}{C}$.

EXERCÍCIOS DE COMBATE

1.

$(2+i)x+y=3-2i \Leftrightarrow (2x+y)+xi=3-2i \Leftrightarrow x=-2$ e $y=7 \Rightarrow x+y=5.$

RESPOSTA: D

2.

Como $i^2=-1$, temos: $i^7=i^4\cdot i^3=\left(i^2\right)^2\cdot i^3=(-1)^2\cdot i^3=i^3$.

Note ainda que $i^3=i^2\cdot i=-i$.

RESPOSTA: C

3.

a)

$$z_0=\frac{1-i}{(1+i)(1+i)}-\frac{i}{2i.i}+i$$

$$z_0=\frac{1-i}{2}+\frac{i}{2}+1$$

$$z_0=\frac{1+2i}{2} \Leftrightarrow z_0=\frac{1}{2}+1.i$$

Parte real = $\frac{1}{2}$ e parte imaginária = 1.i

b) Se $\frac{1}{2}+i$ é raiz, então seu conjugado $\frac{1}{2}-i$ também será.

Calculando a soma das raízes S = $\frac{1}{2}+i$ + $\frac{1}{2}-i$ = 1

Calculando o produto de raízes: P = $\left(\frac{1}{2}+i\right).\left(\frac{1}{2}-i\right)$ = $\frac{5}{4}$

Utilizando a equação x^2 – S.x + P = 0, temos:

$x^2 - x + \frac{5}{4} = 0$ (multiplicando por 4)

$4x^2 - 4x + 5 = 0$

c) $z_o.w = 5\sqrt{2}.(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2})$

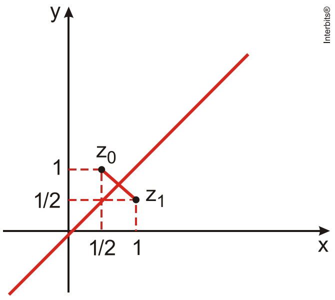
$W = \dfrac{5(1+i)}{\frac{1}{2}+i} = 6-2i$

Ou

$z_o.w = 5\sqrt{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$W = \dfrac{5(-1-i)}{\frac{1}{2}+i} = -6+2i$

d)



RESPOSTA: $Z_1 = 1 + \frac{1}{2}.i$

4.
Note que há um padrão que repete de 4 em 4 termos:

$i + 2i^2 + 3i^3 + 4i^4 = 2 - 2i$

$5i^5 + 6i^6 + 7i^7 + 8i^8 = 2 - 2i$

Logo a soma procurada é igual a

$500 \cdot (2-2i) + 2001i - 2002 = -1002 + 1001i$

RESPOSTA: D

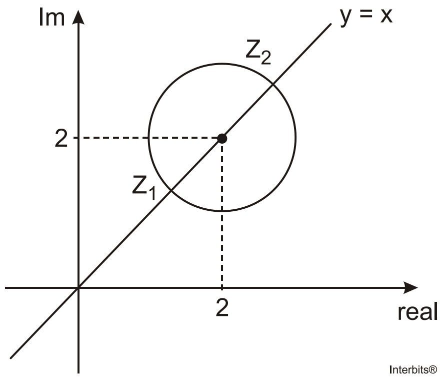
5.

$$z = \frac{(5+5i)(3+4i)}{9-16i^2} + \frac{20(4-3i)}{16-9i^2} = \frac{-5+35i}{25} + \frac{80-60i}{25}$$

$$= \frac{75-25i}{25} = 3 - i.$$

6.

$$|x-(2-2i)|=1 \Rightarrow |(x-2)+(y-2)i|=1 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=1 \Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=1$$



Logo, o centro da circunferência será o ponto (2,2) e a reta que passa pela origem e pelo centro da circunferência terá equação y = x.

Resolvendo o sistema abaixo determinaremos os pontos Z_1 e Z_2:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=1\\ y=x\end{cases}$$

Temos:

$$2x^2-8x+7=0 \Rightarrow x=\frac{4-\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

Portanto, a parte real pedida é $x=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$.

RESPOSTA: A

7.

$$\begin{cases}a^3=3\left(1+ab^2\right) \Leftrightarrow a^3-3ab^2=3\\ b^3=3\left(a^2b-1\right) \Leftrightarrow b^3-3a^2b=-3\end{cases}$$

$$Z=a+bi \Rightarrow Z^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3=\left(a^3-3ab^2\right)+\left(3a^2b-b^3\right)i=3+3i$$

$$|Z^3|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18} \Leftrightarrow |Z|^3=\sqrt{18} \Leftrightarrow |Z|=\sqrt[6]{18}$$

8.

Seja $z=\sqrt{3+4i}=a+bi$

$$\Rightarrow 3+4i=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$$

$$\begin{cases} 3 = a^2 - b^2 \\ 4 = 2ab \Rightarrow a = \dfrac{2}{b} \end{cases} \Rightarrow 3 = \left(\dfrac{2}{b}\right)^2 - b^2 = \dfrac{4 - b^4}{b^2}$$

$$\Rightarrow b^4 + 3b^2 - 4 = 9, b \in R$$

$$y = b^2 \Rightarrow y^2 + 3y - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 + 16 = 25 \Rightarrow y = \dfrac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} y = 1 \\ y = -4 \end{cases}$$

- $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$
- $b^2 = -4$ (impossível, porque b é real)

Logo, $z = \pm i + a \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \Rightarrow a = 2 \\ b = -1 \Rightarrow a = -2 \end{cases} \Rightarrow z = 2 + i$ ou $-2 - i$

RESPOSTA: V = {-2 – i, 2 + i}

9.

$$\begin{cases} (1+i)x_1 - ix_2 + ix_3 = 0 \\ 2ix_1 - x_2 - x_3 = Z \\ (2i-2)x_1 + ix_2 - ix_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_3 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1+i & -i & 0 \\ 2i & -1 & Z \\ 2i-2 & i & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1+i & -i & i \\ 2i & -1 & -1 \\ 2i-2 & i & -i \end{vmatrix}} = \dfrac{Z(i+3)}{-2(i+3)} = \dfrac{Z}{-2} \in R_+^*$$

$$\Rightarrow Z \in R_-^* \Rightarrow \arg(Z) = 180^\circ$$

RESPOSTA: E

10.

$$z = x + yi \Rightarrow \dfrac{2}{z} = \dfrac{2}{x+yi} = \dfrac{2(x-yi)}{x^2+y^2} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} - \dfrac{2y}{x^2+y^2}i$$

$$\text{Im}\left(\dfrac{2}{z}\right) \geq 2 \Rightarrow \dfrac{-2y}{x^2+y^2} \geq 2 \Leftrightarrow -2y \geq 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + y \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$$

A última equação representa um círculo de centro $\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$ e raio $\dfrac{1}{2}$, que tangencia o eixo real.

RESPOSTA: D

11.

a) FALSA

$z = m + mi \Rightarrow (\bar{z})^2 = (m - mi)^2 = m^2(1-i)^2 = m^2(-2i) = -2m^2 i$

O afixo de $(\bar{z})^2$ é $(0, -2m^2)$.

O simétrico de $(-2m^2, 0)$ em relação à origem é $(2m^2, 0)$.

b) FALSA

A inequação $|z-1| \le 1$ representa os pontos z cuja distância ao complexo 1, que está associado ao ponto $(1,0)$, é menor do que 1. Assim, representa um círculo de centro $(1,0)$ e raio 1.

c) VERDADEIRA

$(i^{n+1} + i^n)^8 = (i \cdot i^n + i^n)^8 = (i^n)^8 \cdot (i+1)^8 = i^{8n} \cdot \left[(1+i)^2\right]^4 = 1 \cdot (2i)^4 = 16 \in R_+$

d) FALSA

$z - \bar{z} = (a+bi) - (a-bi) = 2bi$

Se $b = 0$, então $z - \bar{z} = 0 \in R$.

RESPOSTA: C

12.

$\overline{|z| + z} = 2 - i \Leftrightarrow |z| + z = 2 + i$

$$z = x + yi \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} + (x + yi) = 2 + i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1} = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + 1 = (2-x)^2 \ \wedge \ x \le 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow z = \frac{3}{4} + i$$

(01) VERDADEIRA

(02) FALSA

$$\left(z - \frac{3}{4}\right)^{1002} = \left(\frac{3}{4} + i - \frac{3}{4}\right)^{1002} = i^{(4\cdot 250+2)} = i^2 = -1$$

(03) VERDADEIRA

$$\left(z + \frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{3}{4} + i + \frac{1}{4}\right)^n = (1+i)^n = \left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)\right]^n = \left[\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}\right]^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \operatorname{cis} \frac{n\pi}{4}$$

$\Rightarrow n = 4 \in]2, 5[$

A soma das opções corretas é $1 + 4 = 5$.

RESPOSTA: B

13.

$u = z \cdot w + \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot w + \overline{z \cdot w} = 2\text{Re}(z \cdot w)$

RESPOSTA: D

14.

$|1 + i \operatorname{cotg} x| = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x} = \sqrt{\operatorname{cossec}^2 x} = |\operatorname{cossec} x| = \dfrac{1}{|\operatorname{sen} x|}$.

Assim, $\left|\dfrac{1}{1 + i \operatorname{cotg} x}\right| = \dfrac{1}{|1 + i \operatorname{cotg} x|} = |\operatorname{sen} x|$

RESPOSTA: E

15.

O somatório representa a soma dos n primeiros termos de uma PG de primeiro termo $(1+i)$ e razão $(1+i)$, então $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(1+i)^j = \frac{(1+i)\cdot\left[(1+i)^n - 1\right]}{(1+i)-1} = \frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i}$.

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(1+i)^j = 31 + i \Leftrightarrow \frac{(1+i)^{n+1} - 1 - i}{i} = 31 + i \Leftrightarrow (1+i)^{n+1} = 32i \Leftrightarrow \left[(1+i)^2\right]^{\frac{n+1}{2}} = 32i \Leftrightarrow (2i)^{\frac{n+1}{2}} = 32i$

$\Leftrightarrow \dfrac{n+1}{2} = 5 \Leftrightarrow n = 9$

RESPOSTA: D

16.

$z \cdot \overline{z} = 2x + 3 \Leftrightarrow |z|^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2x + 3 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2^2$

$u : 3x + y + c = 0$

$x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$

Como A' é o ponto de menor abscissa, então $A' = (-1, 0)$.

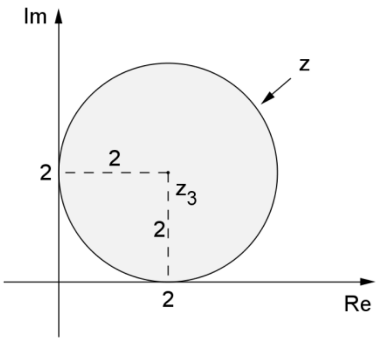
$S_{A'AB} = \dfrac{2\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \sqrt{3}$ u.a.

RESPOSTA: C

17.

$z_1 = -2+2i; z_2 = i \Rightarrow z_3 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+2i}{i} = 2+2i$

$|z - z_3| \le 2$ é um círculo de centro em $z_3 = 2+2i$, ou seja, em $(2,2)$ e raio 2.



A área da circunferência é $\pi \cdot 2^2 = 4\pi > 12$.
No conjunto S há um número real 2 e um número imaginário puro 2i.

O argumento principal de todos os complexos de S está no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Portanto, a alternativa (a) é a única correta.

RESPOSTA: A

18.

Seja $z = x + yi$, com $x, y \in R$, então $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$|z| + z = 1+3i \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} + x + yi = 1+3i \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} + x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+9} + x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+9} = 1-x \Leftrightarrow x^2+9 = 1-2x+x^2 \ \wedge \ x \le 1 \Leftrightarrow x = -4$$

$$\Leftrightarrow z = -4+3i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = 5$$

Nessa questão foram utilizados os seguintes conceitos:
A forma algébrica de um número complexo é $z = x + yi$, com $x, y \in R$, onde x é a parte real e y é a parte imaginária do número complexo.

O módulo de um número complexo de forma algébrica $z = x + yi$ é $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Dois números complexos são iguais se, e somente se, possuem a mesma parte real e a mesma parte imaginária.

RESPOSTA: D

19.

$$|z|=\left|\frac{x+yi}{3+4i}\right|=\frac{|x+yi|}{|3+4i|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{\sqrt{20}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

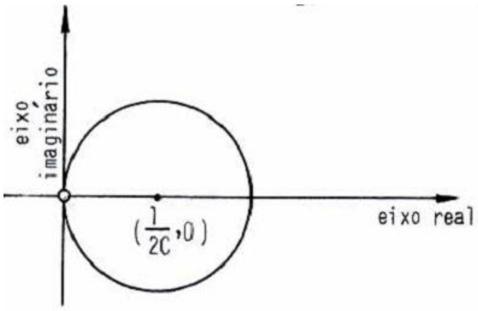
RESPOSTA: C

20.

$$z=x+yi\Rightarrow\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i\text{, onde } x^2+y^2\neq 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=C\Leftrightarrow\frac{x}{x^2+y^2}=C\Leftrightarrow x^2-\frac{x}{C}+y^2=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2C}\right)^2+y^2=\frac{1}{4C^2}$$

A equação acima representa uma circunferência de centro $\left(\frac{1}{2C},0\right)$ e raio $\frac{1}{2C}$, exceto o ponto $(0,0)$.



RESPOSTA: D