

Guia de estudos: Livro 1 – Matemática – Frente 2
 Página 164 – Revisando: 4, 5, 6
 Página 165 – Propostos: 1, 6, 15, 17, 19, 20, 23, 28
 Página 174 – Complementares: 1, 5, 6

1. (Ifsul 2011) Simplificando-se a expressão $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9}$,

obtem-se

- a) $6x$
- b) $-6x$
- c) $\frac{x-3}{x+3}$
- d) $\frac{x+3}{x-3}$

2. (cftmg 2015) Simplificando a fração algébrica $\frac{x^2 - y^2 + 2x + 2y}{x^2 - y^2}$, sendo x e y números reais, tais que

$x + y \neq 0$ e $x - y = 4$, obtém-se o valor

- a) 1,5
- b) 1,0
- c) 0,5
- d) 0,0

3. (Espm 2016) O valor da expressão $2x^3 - 20x^2 + 50x$, para $x = 105$, é igual a:

- a) $1,05 \cdot 10^7$
- b) $2,1 \cdot 10^7$
- c) $2,1 \cdot 10^6$
- d) $1,05 \cdot 10^6$
- e) $2,05 \cdot 10^7$

4. (UTFPR 2016) Simplificando a expressão $\frac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - y^2}$, com

$x \neq y$, obtém-se:

- a) $2 - 4xy$
- b) $\frac{x-y}{x+y}$
- c) $\frac{2xy}{x+y}$
- d) $-2xy$
- e) $-\frac{4xy}{x-y}$

5. (Uemg/2023) Um professor lançou o seguinte desafio aos seus alunos, calcular o valor da expressão.

$$A = \left(\frac{14(x^3 - y^3)}{(7x^2 - 7y^2)(x^2 + xy + y^2)} \right)^{-1}, \text{ para } x = 2023 \text{ e } y =$$

2013. Respondeu, corretamente, o aluno que calculou o valor:

- a) 0,5
- b) 1

- c) 2018
- d) 4036

6. (Ufrgs/2023) O valor de $\frac{a^3 - b^3}{a - b}$ para $a = 27$ e $b = 26$ é

- a) 2017.
- b) 2071.
- c) 2107.
- d) 2170.
- e) 2710.

7. (Ufsc 2016) Guardadas as condições de existência, determine o valor numérico da expressão

$$\frac{(x^3 - 14x^2 + 49x) \cdot (ax - bx + 7a - 7b)}{(x^2 - 49) \cdot (2a - 2b) \cdot (7x - 49)}$$

para $x = 966$.

8. (Espm/2023) O valor da expressão $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{3x}{x^2 - x}$

para $x = 329$ é:

- a) -3
- b) 2
- c) -8
- d) 1
- e) 5

9. (Pucsp 2018) A senha de um cadeado é formada por 3 algarismos distintos, ABC, escolhidos entre os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7.

Sabendo que $B > A > C$, e que $B^2 - A^2 = 13$, nessas condições o valor de $A \cdot C$ é certamente

- a) um número primo.
- b) divisível por 5.
- c) múltiplo de 3.
- d) quadrado perfeito.

10. (Ufsc 2018) Guardadas as condições de existência, determine o valor numérico da expressão

$$\frac{(51x^4y + 51xy^4) \cdot (mx - 2m + nx - 2n) \cdot (x^2 - 4)}{(x^3 - 4x^2 + 4x) \cdot (17my + 17ny) \cdot (x^2 - xy + y^2) \cdot (69x + 69y)}$$

para $x = 343$.

11. (Espm 2018) O valor numérico da expressão

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + x^2y + xy^2}$$
 para $x = 0,8$ e $y = 0,3$ é igual a:

- a) 0,325
- b) 0,125
- c) 0,415
- d) 0,625

e) 0,275

12. (Espm 2013) O par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é solução da equação $x^3 + x^2y - 8x - 8y = 7$. O valor de $x - y$ é:

- a) 1
- b) 2
- c) -1
- d) 0
- e) -2

13. (Ifce 2012) Considerando-se $x \neq 1$ e $y \neq 0$, ao simplificar a expressão $\frac{x}{x-1} + \frac{x-y-1}{y(x-1)}$, obtém-se

- a) $\frac{y+1}{y}$.
- b) $\frac{y}{y+1}$.
- c) $\frac{x+1}{x}$.
- d) $\frac{x}{x+1}$.
- e) $\frac{x^2}{x-1}$.

14. (Ifce 2019) Simplificando a expressão $\frac{a^6b^6 - 4x^2}{a^3b^3 + 2x}$, com $a^3b^3 + 2x \neq 0$, encontramos o resultado

- a) $a^4b^6 - 2x$.
- b) $a^4b^3 - 2x$.
- c) $a^3b^4 - 2x$.
- d) $a^3b^3 - 2x$.
- e) $a^3b^6 - 2x$.

15. Ao considerar $x = 2.020$ e $y = 2.019$, o valor da expressão $E = \frac{x^8 - y^8}{x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6}$ é:

- a) 1.
- b) 2019.
- c) 2020.
- d) 4039.
- e) 4040.

16. (Fuvest 2016) A igualdade correta para quaisquer a e b , números reais maiores do que zero, é

- a) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$
- b) $\frac{1}{a - \sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{1}{b}$
- c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - b$
- d) $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

$$e) \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = a - b$$

17. (Epcar 2016) O valor da expressão

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) \cdot \left(\frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2} \right), \text{ em que } x \text{ e } y \in \mathbb{R}^* \text{ e } x \neq y \text{ e}$$

$x \neq -y$, é

- a) -1
- b) -2
- c) 1
- d) 2

Aprofundamento:

18. (Espm 2015) Em relação ao número $N = 2^{48} - 1$, pode-se afirmar que:

- a) ele é primo
- b) ele é par
- c) ele é múltiplo de 7
- d) ele **não** é múltiplo de $2^{24} + 1$
- e) ele **não** é divisível por 9

19. (Cefet MG 2015) Se $x + \frac{1}{x} = 3$ e $8x^6 + 4x^3y^2 \neq 0$, então o valor numérico da expressão

$$\frac{4x^9 + 2x^6y^2 + 4x^3 + 2y^2}{8x^6 + 4x^3y^2}$$

é igual a

- a) 4.
- b) 7.
- c) 9.
- d) 12.
- e) 18.

20. (Efomm/2023) Da expressão numérica abaixo, resulta um número inteiro k .

$$\frac{3^{12} - 2^{12}}{(3^6 + 2^6)(3^3 + 2^3)}$$

A diferença entre o maior e o menor algarismo que compõem k é

- a) 5.
- b) 6.
- c) 7.
- d) 8.
- e) 9.

21. (Ifce 2014) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, com $x + y = -16$ e $xy = 64$. O valor da expressão $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ é

- a) -2.
- b) -1.

- c) 0.
d) 1.
e) 2.

22. (cftrj 2020) Uma professora propôs como desafio para sua turma de 7º ano simplificar a fração:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 12 \cdot 20 + 7 \cdot 21 \cdot 35}$$

Depois de alguns minutos, três alunos fizeram as seguintes afirmações:

- I. O resultado na simplificação é um número inteiro.
II. O resultado da simplificação é $\frac{2}{5}$.
III. O resultado da simplificação é 5.

Sobre as afirmações, é correto dizer que:

- a) Todas são falsas.
b) Duas são verdadeiras.
c) Apenas uma é verdadeira.
d) Todas são verdadeiras.

23. (cftmg 2020) Se $x + y = 4$, então $P = x^3 + x^2y + x^2 - y^2$ é equivalente à expressão algébrica

- a) $3x - 16$
b) $x^3 + 8$
c) $3x^2 + 2x - 1$
d) $4x^2 + 8x - 16$

24. (Fuvest 2013) Considere o polinômio $p(x) = x^4 + 1$.

Escreva $p(x)$ como produto de dois polinômios de segundo grau, com coeficientes reais.

25. (cotuca 2020) Calcule o valor de X , sabendo que $a = 2020$ e $b = 2018$.

$$X = \frac{\frac{a^4}{2} - a^2b^2 + \frac{b^4}{2}}{4a^2 + 8ab + 4b^2}$$

- a) $1/16$
b) $1/8$
c) $1/4$
d) $1/2$
e) 1

GABARITO:

Resposta da questão 1: [D]

Resposta da questão 2: [A]

$$\frac{x^2 - y^2 + 2x + 2y}{x^2 - y^2} = \frac{(x+y) \cdot (x-y+2)}{(x+y) \cdot (x-y)} = \frac{(x-y)+2}{(x-y)} = \frac{4+2}{4} = 1,5$$

Resposta da questão 3: [B]

Simplificando a expressão, tem-se:

$$\frac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - 4xy}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{(x-y)^2}{(x+y) \cdot (x-y)} = \frac{(x-y)}{(x+y)}$$

Resposta da questão 4: [C]

$$A = \left(\frac{14(x^3 - y^3)}{(7x^2 - 7y^2)(x^2 + xy + y^2)} \right)^{-1} \Rightarrow A = \frac{(7x^2 - 7y^2)(x^2 + xy + y^2)}{14(x^3 - y^3)} \Rightarrow$$

$$A = \frac{7 \cdot (x+y) \cdot \cancel{(x-y)} \cdot (x^2 + xy + y^2)}{14 \cdot \cancel{(x-y)} \cdot (x^2 + xy + y^2)} \Rightarrow A = \frac{x+y}{2} \Rightarrow A = \frac{2023+2013}{2} \Rightarrow$$

$$A = 2018$$

Resposta da questão 5: [C]

Sendo

$$2x^3 - 20x^2 + 50x = 2x(x^2 - 10x + 25) = 2x(x-5)^2,$$

para $x = 105$, temos

$$2 \cdot 105 \cdot (105 - 5)^2 = 210 \cdot 10^4 = 2,1 \cdot 10^6.$$

Resposta da questão 6: [C]

Fatorando:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = \frac{\cancel{(a-b)}(a^2 + ab + b^2)}{\cancel{a-b}} = a^2 + ab + b^2$$

Logo:

$$27^2 + 27 \cdot 26 + 26^2 = 729 + 702 + 676 = 2107$$

Resposta da questão 7: 69.

Calculando:

$$\frac{(x^3 - 14x^2 + 49x) \cdot (ax - bx + 7a - 7b)}{(x^2 - 49) \cdot (2a - 2b) \cdot (7x - 49)} = \frac{x \cdot (x^2 - 14x + 49) \cdot (x \cdot (a-b) + 7 \cdot (a-b))}{(x-7) \cdot (x+7) \cdot 2(a-b) \cdot 7(x-7)}$$

$$\frac{x \cdot (x-7)^2 \cdot (a-b) \cdot (x+7)}{(x-7) \cdot (x+7) \cdot 2(a-b) \cdot 7(x-7)} = \frac{x}{2 \cdot 7} \rightarrow \frac{966}{2 \cdot 7} = \frac{966}{14} = 69$$

Resposta da questão 8: [D]

Simplificando a expressão, obtemos:

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1} - \frac{3x}{x^2 - x} = \frac{(x+2) \cancel{(x-1)}}{(x-1)^2} - \frac{3 \cancel{x}}{\cancel{x}(x-1)}$$

$$= \frac{x+2}{x-1} - \frac{3}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$$

Ou seja, o valor da expressão é sempre 1 para qualquer valor de x do seu domínio.

Resposta da questão 9: [C]

$$B^2 - A^2 = 13 \Rightarrow (B + A) \cdot (B - A) = 13$$

Como A e B são números naturais, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} B + A = 13 \\ B - A = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 6 \text{ e } B = 7$$

Portanto, os possíveis valores de C são 3, 4 e 5.

Então,

$$A \cdot C = 6 \cdot 3 = 18 \quad \text{ou} \quad A \cdot C = 6 \cdot 4 = 24 \quad \text{ou}$$

$$A \cdot C = 6 \cdot 5 = 30.$$

Logo, A · C é certamente um múltiplo de 3.

Resposta da questão 10: 15.

De

$$\frac{(51x^4y + 51xy^4) \cdot (mx - 2m + nx - 2n) \cdot (x^2 - 4)}{(x^3 - 4x^2 + 4x) \cdot (17my + 17ny) \cdot (x^2 - xy + y^2) \cdot (69x + 69y)}$$

$$\frac{51xy \cdot (x^3 + y^3) \cdot (m \cdot (x - 2) + n \cdot (x - 2)) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{x \cdot (x^2 - 4x + 4) \cdot 17y \cdot (m + n) \cdot (x^2 - xy + y^2) \cdot 69 \cdot (x + y)}$$

$$\frac{51xy \cdot (x^3 + y^3) \cdot (m \cdot (x - 2) + n \cdot (x - 2)) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{x \cdot (x^2 - 4x + 4) \cdot 17y \cdot (m + n) \cdot (x^2 - xy + y^2) \cdot 69 \cdot (x + y)}$$

$$\frac{3 \cdot (x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) \cdot (x - 2) \cdot (m + n) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{(x - 2)^2 \cdot (m + n) \cdot (x^2 - xy + y^2) \cdot 69 \cdot (x + y)}$$

$$\frac{(x + y) \cdot (x^2 - xy + y^2) \cdot (x - 2) \cdot (m + n) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)}{(x - 2)^2 \cdot (m + n) \cdot (x^2 - xy + y^2) \cdot 23 \cdot (x + y)}$$

$$\frac{(x + 2)}{23}$$

$$\frac{343 + 2}{23}$$

$$\frac{345}{23}$$

$$15$$

Resposta da questão 11: [D]

Calculando:

$$\frac{x^3 - y^3}{x^3 + x^2y + xy^2} = \frac{0,8^3 - 0,3^3}{0,8^3 + 0,8^2 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,3^2} = \frac{0,512 - 0,027}{0,512 + 0,192 + 0,072} = \frac{0,485}{0,776} = 0,625$$

Resposta da questão 12: [C]

Temos

$$x^3 + x^2y - 8x - 8y = 7 \Leftrightarrow x^2(x + y) - 8(x + y) = 7$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x^2 - 8) = 7.$$

Por inspeção, concluímos que $(x, y) = (3, 4)$ e, portanto, $x - y = -1$.

Resposta da questão 13: [A]

$$\frac{x}{x-1} + \frac{x-y-1}{y(x-1)} = \frac{yx+x-y-1}{y(x-1)} = \frac{x(y+1)-(y+1)}{y \cdot (x-1)} = \frac{(y+1) \cdot (x-1)}{y \cdot (x-1)} = \frac{(y+1)}{y}$$

Resposta da questão 14: [D]

$$\frac{a^6b^6 - 4x^2}{a^3b^3 + 2x} = \frac{(a^3 \cdot b^3)^2 - (2x)^2}{a^3b^3 + 2x} = \frac{(a^3b^3 + 2x) \cdot (a^3b^3 - 2x)}{a^3b^3 + 2x} = a^3b^3 - 2x$$

Resposta da questão 15: [D]

$$E = \frac{x^8 - y^8}{x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6} = \frac{(x^4)^2 - (y^4)^2}{x^4 \cdot (x^2 + y^2) + y^4 \cdot (x^2 + y^2)} =$$

$$\frac{(x^4 + y^4) \cdot (x^4 - y^4)}{(x^4 + y^4) \cdot (x^2 + y^2)} = \frac{(x^2)^2 - (y^2)^2}{(x^2 + y^2)} = \frac{(x^2 + y^2) \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)} =$$

$$(x + y) \cdot (x - y) = (2020 + 2019) \cdot (2020 - 2019) = 4039$$

Resposta da questão 16: [A]

Resolvendo a expressão do enunciado, tem-se:

$$\left(\frac{x^2 - y^2}{x^{-1} + y^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}\right) = \left(\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}\right) \cdot \left(\frac{xy \cdot (x + y)}{(x + y) \cdot (x - y)}\right) = \left(\frac{y^2 - x^2}{x^2y^2}\right) \cdot \left(\frac{xy \cdot (x + y)}{(x + y) \cdot (x - y)}\right)$$

$$\left(\frac{y^2 - x^2}{(xy)^2}\right) \cdot \left(\frac{xy}{y + x}\right) \cdot \left(\frac{xy \cdot (x + y)}{(x + y) \cdot (x - y)}\right) = \frac{(y^2 - x^2)}{1} \cdot \frac{1}{(x + y)} \cdot \frac{1}{(x - y)} = \frac{(y + x) \cdot (y - x)}{(x + y) \cdot (x - y)} = \frac{-1 \cdot (x - y)}{(x - y)} = -1$$

Resposta da questão 17: [E]

[A] Tomando a = 2 e b = 1, temos $\sqrt[3]{9} = 3$. Absurdo.

[B] Tomando a = 2 e b = 1, vem $\frac{1}{2 - \sqrt{5}} = -1$. Absurdo.

[C] Tomando a = 2 e b = 1, segue que $3 - 2\sqrt{2} = 1$. Absurdo.

[D] Tomando a = 2 e b = 1, obtém-se $\frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 1$. Absurdo.

[E] De fato, pois

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} = \frac{(a - b)(a^2 + ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = a - b,$$

para quaisquer a e b reais positivos.

Resposta da questão 18: [C]

Desenvolvendo a expressão dada, tem-se:

$$N = 2^{48} - 1 = (2^{24} - 1) \cdot (2^{24} + 1) = (2^{12} - 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot (2^{24} + 1) = (2^6 - 1) \cdot (2^6 + 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot (2^{24} + 1)$$

$$N = 2^{48} - 1 = (2^3 - 1) \cdot (2^3 + 1) \cdot (2^6 + 1) \cdot (2^{12} + 1) \cdot (2^{24} + 1)$$

$$N = (7) \cdot (9) \cdot (65) \cdot (2^{12} + 1) \cdot (2^{24} + 1)$$

Logo, pode-se concluir que o número N não é primo (pois é divisível por 7, 9 e 65, pelo menos), não é par (pois é resultado de multiplicações de números ímpares), é múltiplo de $2^{24} + 1$, é divisível por 9 e é múltiplo de 7.

Resposta da questão 19: [C]

Desde que $x + \frac{1}{x} = 3$, temos

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7.$$

Logo, segue que

$$\frac{4x^9 + 2x^6y^2 + 4x^3 + 2y^2}{8x^6 + 4x^3y^2} = \frac{2x^6(2x^3 + y^2) + 2(2x^3 + y^2)}{4x^3(2x^3 + y^2)}$$

$$= \frac{(2x^3 + y^2)(2x^6 + 2)}{4x^3(2x^3 + y^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$$

$$= 9.$$

Resposta da questão 20: [D]

O inteiro k vale:

$$\frac{3^{12} - 2^{12}}{(3^6 + 2^6)(3^3 + 2^3)} = \frac{\cancel{(3^6 + 2^6)}(3^6 - 2^6)}{\cancel{(3^6 + 2^6)}(3^3 + 2^3)} = \frac{\cancel{(3^3 + 2^3)}(3^3 - 2^3)}{\cancel{3^3 + 2^3}} = 27 - 8 = 19$$

Logo, a diferença entre o maior e o menor algarismo que compõem k é:

$$9 - 1 = 8$$

Resposta da questão 21: [E]

Tem-se que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

$$= \frac{(x + y)^2 - 2xy}{xy}$$

$$= \frac{(x + y)^2}{xy} - 2$$

$$= \frac{(-16)^2}{64} - 2$$

$$= 4 - 2$$

$$= 2.$$

Resposta da questão 22: [C]

Fatorando o numerador e o denominador da fração, obtemos.

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 12 + 7 \cdot 14 \cdot 21}{1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 \cdot 10 + 4 \cdot 12 \cdot 20 + 7 \cdot 21 \cdot 35} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 7 \cdot 7)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

Resposta da questão 23: [D]

$$P = x^3 + x^2y + x^2 - y^2$$

$$P = x^2 \cdot (x + y) + (x + y) \cdot (x - y)$$

$$P = x^2 \cdot 4 + 4 \cdot (x - (4 - x))$$

$$P = x^2 \cdot 4 + 4 \cdot (x - 4 + x)$$

$$P = 4x^2 + 8x - 16$$

Resposta da questão 24:

b) $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$

$$P(x) = (x^2 + 1) - (\sqrt{2} \cdot x)^2$$

$$P(x) = (x^2 - \sqrt{2} \cdot x + 1)(x^2 + \sqrt{2} \cdot x + 1)$$

Resposta da questão 25: [D]

$$X = \frac{\frac{a^4}{2} - a^2b^2 + \frac{b^4}{2}}{4a^2 + 8ab + 4b^2} = \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4}{(2a + 2b)^2} =$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)^2}{2 \cdot 4(a + b)^2} = \frac{(a + b)^2 \cdot (a - b)^2}{8 \cdot (a + b)^2} =$$

$$= \frac{(a - b)^2}{8} = \frac{(2020 - 2018)^2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Resposta: $X = \frac{1}{2}$.