

GELSON IEZZI  
OSVALDO DOLCE  
CARLOS MURAKAMI

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

## Logaritmos

2

LIVRO PARA ANÁLISE  
DO PROFESSOR  
• VENDA PROIBIDA •

ABRELIVROS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA  
DE EDITORES DE LIVROS

 **Atual**  
Editora

NOVAS QUESTÕES DE VESTIBULARES



GELSON IEZZI  
OSVALDO DOLCE  
CARLOS MURAKAMI

# FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR

Logaritmos

2

COMPLEMENTO PARA O PROFESSOR

10ª edição | São Paulo – 2013

 **Atual**  
Editora

© Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Carlos Murakami, 2013

Copyright desta edição:

**SARAIVA S.A. Livros Editores**, São Paulo, 2013

Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros

05413-010 — São Paulo — SP

Fone: (0xx11) 3611-3308 — Fax vendas: (0xx11) 3611-3268

SAC: 0800-0117875

www.editorasaraiva.com.br

Todos os direitos reservados.

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Iezzi, Gelson

Fundamentos de matemática elementar, 2 : logaritmos / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, Carlos Murakami. — 10. ed. — São Paulo : Atual, 2013.

ISBN 978-85-357-1682-5 (aluno)

ISBN 978-85-357-1683-2 (professor)

1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) — Problemas e exercícios etc. 3. Matemática (Vestibular) — Testes I. Dolce, Osvaldo. II. Murakami, Carlos. III. Título. IV. Título: Logaritmos.

12-12851

CDD-510.7

**Índice para catálogo sistemático:**

1. Matemática : Ensino Médio 510.7

**Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 2**

**Gerente editorial:** Lauri Cericato

**Editor:** José Luiz Carvalho da Cruz

**Editores-assistentes:** Fernando Manenti Santos/Juracy Vespucci/Guilherme Reghin Gaspar

**Auxiliares de serviços editoriais:** Daniella Haidar Pacífico/Rafael Rabaçallo Ramos/Margarete Aparecida de Lima/Vanderlei Aparecido Orso

**Digitação e cotejo de originais:** Guilherme Reghin Gaspar/Elillyane Kaori Kamimura

**Pesquisa iconográfica:** Cristina Akisino (coord.)/Enio Rodrigo Lopes

**Revisão:** Pedro Cunha Jr. e Lilian Semenichin (coords.)/Renata Palermo/Rhennan Santos/Felipe Toledo/Simone Garcia/Tatiana Malheiro/Fernanda Guerriero

**Propostas de textos e atividades:** Rosineide de Melo e Norberto Lourenço Nogueira Júnior

**Gerente de arte:** Nair de Medeiros Barbosa

**Supervisor de arte:** Antonio Roberto Bressan

**Projeto gráfico:** Carlos Magno

**Capa:** Homem de Melo & Tróia Design

**Imagem de capa:** Vetta/Getty Images

**Diagramação:** TPG

**Assessoria de arte:** Maria Paulo Santo Siqueira

**Encarregada de produção e arte:** Grace Alves

**Coordenadora de editoração eletrônica:** Sílvia Regina E. Almeida

**Produção gráfica:** Robson Cacau Alves

**Impressão e Acabamento:** Prol Editora Gráfica

729.185.010.001

Visite nosso site: [www.atualeditora.com.br](http://www.atualeditora.com.br)

Central de atendimento ao professor: (0xx11) 3613-3030

# Apresentação

Este livro é o *Complemento para o Professor* do volume 2, Logaritmos, da coleção *Fundamentos de Matemática Elementar*.

Cada volume desta coleção tem um complemento para o professor, com o objetivo de apresentar a solução dos exercícios mais complicados do livro e sugerir sua passagem aos alunos.

É nossa intenção aperfeiçoar continuamente os *Complementos*. Estamos abertos a sugestões e críticas, que nos devem ser encaminhadas através da Editora.

Agradecemos aos professores David Mauro Degenszajn e Erileide de Souza a colaboração na redação das soluções que são apresentadas neste *Complemento*.

Os Autores.

# Sumário

<b>CAPÍTULO I — Potências e raízes .....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO II — Função exponencial .....</b>	<b>7</b>
<b>CAPÍTULO III — Logaritmos .....</b>	<b>41</b>
<b>CAPÍTULO IV — Função logarítmica .....</b>	<b>54</b>
<b>CAPÍTULO V — Equações exponenciais e logarítmicas .....</b>	<b>58</b>
<b>CAPÍTULO VI — Inequações exponenciais e logarítmicas .....</b>	<b>114</b>
<b>CAPÍTULO VII — Logaritmos decimais .....</b>	<b>148</b>

**CAPÍTULO I** — Potências e raízes

3.  $A = (-1)^{2n} - (-1)^{2n} \cdot (-1)^3 + (-1)^{2n} \cdot (-1)^n - (-1)^n =$   
 $= 1 - 1 \cdot (-1) + (-1)^n - (-1)^n = 2$

7.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a \cdot b = 0$   
 $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$  ou  $b = 0$

8.  $(2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^2)x = M^3 \Rightarrow x = 2^{3-2} \cdot 3^{3-1} \cdot 5^{3-1} \cdot 7^{3-2} =$   
 $= 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 3\ 150$

9. Examinando os valores de  $14^n$ , com  $n \in \mathbb{N}^*$ , vemos que:  
 se  $n$  é ímpar,  $14^n$  tem como algarismo das unidades o 4  
 se  $n$  é par,  $14^n$  tem como algarismo das unidades o 6.  
 Assim,  $14^{14}$  termina em 6; portanto  $14^{14}$  é par e daí  $14^{14^{14}}$  termina em 6.

12.  $\frac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{xy}} = x + y$

15. f)  $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (a + b)^{-1} = \left(\frac{a + b}{a \cdot b}\right) \left(\frac{1}{a + b}\right) = a^{-1} \cdot b^{-1}$

g)  $(a^{-2} - b^2)(a^{-1} - b^{-1})^{-1} = \left(\frac{b^2 - a^2}{a^2 \cdot b^2}\right) \left(\frac{b - a}{ab}\right)^{-1} =$   
 $= \frac{(b + a)(b - a)}{a^2 \cdot b^2} \cdot \frac{ab}{b - a} = \frac{a + b}{ab}$

16. d)  $\frac{a^{n+4} - a^3 \cdot a^n}{a^4 \cdot a^n} = \frac{a^{n+4}}{a^{n+4}} - \frac{a^{3+n}}{a^{n+4}} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a - 1}{a}$

18. a)  $\sqrt{x^4} = \sqrt{(x^2)^2} = |x^2| = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$  (V)

b)  $\sqrt{x^{10}} = \sqrt{(x^5)^2} = |x^5| \neq x^5, \forall x \in \mathbb{R}$  (F)

c)  $\sqrt{x^6} = \sqrt{(x^3)^2} = |x^3| = x^3, \forall x \in \mathbb{R}_+$  (V)

d)  $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = x-1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } x \geq 1 \text{ (V)}$

e)  $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = 3-x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ e } x \leq 3 \text{ (V)}$

20. a)  $\sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = \begin{cases} x+2, & \text{se } x > -2 \\ 0, & \text{se } x = -2 \\ -x-2, & \text{se } x < -2 \end{cases}$

b)  $\sqrt{(2x+3)^2} = |2x+3| = \begin{cases} 2x+3, & \text{se } x > -\frac{3}{2} \\ 0, & \text{se } x = -\frac{3}{2} \\ -2x-3, & \text{se } x < -\frac{3}{2} \end{cases}$

c)  $\sqrt{(x-3)^2} = |x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{se } x > 3 \\ 0, & \text{se } x = 3 \\ 3-x, & \text{se } x < 3 \end{cases}$

d)  $\sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{se } x > -\frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } x = -\frac{1}{2} \\ -2x-1, & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$

30. b)  $(\sqrt{20} - \sqrt{45} + 3\sqrt{125}) : 2\sqrt{5} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{20}{5}} - \sqrt{\frac{45}{5}} + 3\sqrt{\frac{125}{5}} \right) = \frac{2-3+15}{2} = 7$

k)  $(1 - \sqrt{2})^4 = [(1 - \sqrt{2})^2]^2 = (3 - 2\sqrt{2})^2 = 17 - 12\sqrt{2}$

32. a)  $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 1$

b)  $\sqrt{7+\sqrt{24}} \cdot \sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{(7+\sqrt{24})(7-\sqrt{24})} = 5$

c)  $\sqrt{5+2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})} = 1$

d)  $\sqrt{2} \sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2(2+\sqrt{2}) \cdot (2+\sqrt{2+\sqrt{2}})(2-\sqrt{2+\sqrt{2}})} = \sqrt{(4+2\sqrt{2})(4-(2+\sqrt{2}))} = \sqrt{2(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 2$

33. a)  $\sqrt{a+\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a-\sqrt{b}} \cdot \sqrt{a^2-b} = \sqrt{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})(a^2-b)} = \sqrt{(a^2-b)^2} = a^2-b$



$$b) (2\sqrt{xy} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x}) : \sqrt{xy} = 2 \cdot \sqrt{\frac{xy}{xy}} + \sqrt{\frac{x^2y}{xy}} + \sqrt{\frac{xy^2}{xy}} = 2 + \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

$$c) \left( a\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{ab} + b\sqrt{\frac{b}{a}} \right) \cdot \sqrt{ab} = \left( \sqrt{\frac{a^3}{b}} + 2\sqrt{ab} + \sqrt{\frac{b^3}{a}} \right) \cdot \sqrt{ab} = \\ = \sqrt{\frac{a^4b}{b}} + 2\sqrt{(ab)^2} + \sqrt{\frac{b^3ab}{a}} = a^2 + 2|ab| + b^2 = (a + b)^2$$

$$d) \sqrt{p + \sqrt{p^2 - 1}} \cdot \sqrt{p - \sqrt{p^2 - 1}} = \sqrt{p^2 - (\sqrt{p^2 - 1})^2} = \sqrt{p^2 - p^2 + 1} = 1$$

$$e) \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - y^3}} \cdot \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - y^3}} = \sqrt[3]{x^2 - (x^2 - y^3)} = y$$

**36.** o) 
$$\frac{1}{(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} \cdot \frac{(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{5}}{(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{5}} = \frac{(2 + \sqrt{3}) - \sqrt{5}}{7 + 4\sqrt{3} - 5} = \\ = \frac{(2 + \sqrt{3} - \sqrt{5})(2 - 4\sqrt{3})}{(2 + 4\sqrt{3})(2 - 4\sqrt{3})} = \frac{4 + 3\sqrt{3} + \sqrt{5} - 2\sqrt{15}}{22}$$

p) 
$$\frac{5}{(2 - \sqrt{5}) + \sqrt{2}} = \frac{5}{(2 - \sqrt{5}) + \sqrt{2}} \cdot \frac{(2 - \sqrt{5}) - \sqrt{2}}{(2 - \sqrt{5}) - \sqrt{2}} = \frac{10 - 5\sqrt{5} - 5\sqrt{2}}{9 - 4\sqrt{5} - 2} = \\ = \frac{(10 - 5\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(7 + 4\sqrt{5})}{(7 - 4\sqrt{5})(7 + 4\sqrt{5})} = \frac{30 - 5\sqrt{5} + 35\sqrt{2} + 20\sqrt{10}}{31}$$

q) 
$$\frac{3}{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 1} = \frac{3(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1)}{[(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 1][(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 1]} = \frac{3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 3}{5 - 2\sqrt{6} - 1} = \\ = \frac{(3\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 3)(4 + 2\sqrt{6})}{(4 - 2\sqrt{6})(4 + 2\sqrt{6})} = \frac{6 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{4}$$

r) 
$$\frac{\sqrt[3]{9} - 1}{\sqrt[3]{3} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{3})^2 - 1}{\sqrt[3]{3} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{3} + 1)(\sqrt[3]{3} - 1)}{(\sqrt[3]{3} - 1)} = \sqrt[3]{3} + 1$$

**37.** 
$$\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{2})^2 - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[3]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} - 1)}{(\sqrt[3]{2} - 1)} = 1 + \sqrt[3]{2}$$

**38.** a) 
$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})}{\sqrt{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})}} = 4$$

b) Notemos inicialmente que

$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 = 6 \Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{3}} + \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{6}$$

e

$$(\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{2}.$$

Vamos agora fazer a simplificação pedida:

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}})}{(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2}-\sqrt{2+\sqrt{3}})} + \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})}{(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}})(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})} = \\
 &= \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6} - 2\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}}{-\sqrt{3}} + \\
 &+ \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{6} + 2\sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \\
 &= \frac{-2\sqrt{6} + 2(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}) + \sqrt{3}(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}})}{\sqrt{3}} = \\
 &= \frac{-2\sqrt{6} + 2\sqrt{6} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{\sqrt{48} + \sqrt{27} - \sqrt{125}}{\sqrt{12} + \sqrt{108} - \sqrt{180}} &= \frac{7\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}{8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}} = \frac{(7\sqrt{3} - 5\sqrt{5}) \cdot (8\sqrt{3} + 6\sqrt{5})}{(8\sqrt{3} - 6\sqrt{5}) \cdot (8\sqrt{3} + 6\sqrt{5})} = \\
 &= \frac{9 + \sqrt{15}}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}} &= \\
 &= \sqrt{\frac{(3-2\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})}{(17-12\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})}} - \sqrt{\frac{(3+2\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}{(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}} = \\
 &= \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(1+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}
 \end{aligned}$$

Notamos que  $1 - \sqrt{2} < 0$ , temos:  $\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$ .  
 Daí, o valor da expressão é:  $1 + \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 2$ .

$$\begin{aligned}
 \text{39. } \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2 - (x - \sqrt{x^2 - 1})^2}{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \\
 &= 4x\sqrt{x^2 - 1}
 \end{aligned}$$

$$\text{40. } x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{ab}} \right) = \frac{a - b}{2\sqrt{ab}} \quad (\text{A})$$

$$1 + x^2 = 1 + \left( \frac{a - b}{2\sqrt{ab}} \right)^2 = \frac{(a + b)^2}{4ab} \quad (\text{B})$$

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{(2a\sqrt{1+x^2})(x - \sqrt{1+x^2})}{(x + \sqrt{1+x^2})(x - \sqrt{1+x^2})} =$$

$$= 2a(1+x^2) - 2ax\sqrt{1+x^2} \stackrel{(\text{A}) \text{ e } (\text{B})}{=}$$

$$= 2a \cdot \frac{(a+b)^2}{4ab} - 2a \cdot \frac{(a-b)}{2\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4ab}} = \frac{(a+b)^2}{2b} - \frac{a^2 - b^2}{2b} = a + b$$

41. Fazendo  $X = \sqrt[3]{9(\sqrt[3]{2} - 1)}$  e  $Y = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$  e lembrando as identidades:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

temos:

$$\begin{aligned} X^3 &= 9(\sqrt[3]{2} - 1) = \frac{9(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \frac{9 \cdot [(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3]}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} = \\ &= \frac{9}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} \text{ e } Y^3 = \left[ \frac{(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(1 + \sqrt[3]{2})}{1 + \sqrt[3]{2}} \right]^3 = \left( \frac{1^3 + (\sqrt[3]{2})^3}{1 + \sqrt[3]{2}} \right)^3 = \\ &= \frac{27}{1 + 3\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4} + 2} = \frac{9}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}} \end{aligned}$$

então,  $X^3 = Y^3$  e daí  $X = Y$ .

42. 
$$\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} = \frac{3 \cdot \sqrt{7+2\sqrt{10}}}{\sqrt{7-2\sqrt{10}} \sqrt{7+2\sqrt{10}}} = \sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{2} + \sqrt{5} \text{ (A)}$$

$$\frac{4}{\sqrt{8-4\sqrt{3}}} = \frac{4\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}} \sqrt{8-4\sqrt{3}}} = \sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \text{ (B)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}} = \frac{\sqrt{11+2\sqrt{30}}}{\sqrt{11-2\sqrt{30}} \sqrt{11+2\sqrt{30}}} = \sqrt{11+2\sqrt{30}} = \sqrt{(\sqrt{6} + \sqrt{5})^2} = \sqrt{6} + \sqrt{5} \text{ (C)}$$

$$(A) + (B) = \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{6} + \sqrt{5} = (C)$$

43. 
$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} \Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} \Rightarrow \Rightarrow x^2 = 2 + x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ (pois } x > 0)$$

44. 
$$\frac{12}{\sqrt{7} + 3} = \frac{5}{8 - 3\sqrt{7}} = \frac{12(8 - 3\sqrt{7}) - 5(\sqrt{7} + 3)}{(\sqrt{7} + 3)(8 - 3\sqrt{7})} = \frac{81 - 41\sqrt{7}}{(3 - \sqrt{7})} \cdot \frac{(3 + \sqrt{7})}{(3 + \sqrt{7})} = -22 - 21\sqrt{7}$$

49. f) 
$$\left( 27^{\frac{2}{3}} - 27^{-\frac{2}{3}} \right) \left( 16^{\frac{3}{4}} - 16^{-\frac{3}{4}} \right) = (3^2 - 3^{-2})(2^3 - 2^{-3}) = \left( 9 - \frac{1}{9} \right) \left( 8 - \frac{1}{8} \right) = 70$$

g) 
$$\left( 125^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 343^{\frac{1}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( 5^2 + 2^2 + 7 \right)^{\frac{1}{2}} = 6$$

$$50. \quad (0,064^{\frac{1}{3}})(0,0625^{\frac{1}{4}}) = \left(\frac{64}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{625}{10000}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{20}{100} = 0,2$$

$$53. \quad a) \quad \left(n+3\sqrt[n-1]{a^2} \cdot \sqrt[n+1]{a^{-1}}\right)^{n^2-1} = \left(a^{\frac{2}{n-1}} \cdot a^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{n+3} \cdot n^2-1} = a^{\frac{n+3}{n^2-1} \cdot \frac{n^2-1}{n+3}} = a$$

$$b) \quad a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-1}} \cdot \sqrt{a^{-1} \cdot b^{\frac{2}{3}}} = a^{\frac{5}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-1})^{\frac{1}{3}} \cdot (a^{-1} \cdot b^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{6}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$$

$$c) \quad \left(a^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)(a\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2a^2} + \sqrt[3]{4}) = \left(a^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}\right)(a^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}) = \\ = a^2 - 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}} - 2^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} + 2 = a^2 + 2$$

$$d) \quad \frac{b-a}{a+b} \left[ a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^{-1} - \left( \frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \right] = \frac{b-a}{a+b} \left[ \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right] = \\ = \frac{b-a}{a+b} \left[ \frac{a + (ab)^{\frac{1}{2}} - (ab)^{\frac{1}{2}} + b}{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2} \right] = -1$$

$$e) \quad \sqrt{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} \right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left( \frac{b}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{-2}} + 1 = \sqrt{\left[ \frac{b^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2b^{\frac{1}{2}}} \right]^{-2}} + 1 = \\ \sqrt{\left[ \frac{b-a}{2(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}} \right]^{-2}} + 1 = \sqrt{\left[ \frac{2(a \cdot b)^{\frac{1}{2}}}{b-a} \right]^2} + 1 = \sqrt{\frac{(a+b)^2}{(b-a)^2}} = \frac{a+b}{|a-b|}$$

$$f) \quad [(a\sqrt{a} + b\sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{-1} + 3\sqrt{ab}]^{\frac{1}{2}} = \left[ (a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}) \left( \frac{1}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right) + 3a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \\ = \left[ \frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + 3ab^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{1}{2}}b}{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Lembrando que  $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$ , temos que a expressão pedida se reduz a:

$$\left[ \frac{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^3}{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})} \right]^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$54. \quad \frac{1}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[8]{a} + 1} + \frac{1}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[8]{a} + 1} - \frac{2(\sqrt[4]{a} - 1)}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + 1} = \\ = \frac{(\sqrt[4]{a} + 1 - \sqrt[8]{a} + \sqrt[4]{a} + 1 + \sqrt[8]{a})}{(\sqrt[4]{a} + 1 + \sqrt[8]{a})(\sqrt[4]{a} + 1 - \sqrt[8]{a})} - \frac{2(\sqrt[4]{a} - 1)}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a} + 1} =$$

$$= \frac{2(\sqrt[4]{a} + 1)}{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a} + 1} - \frac{2(\sqrt[4]{a} - 1)}{\sqrt{a} - \sqrt[4]{a} + 1} =$$

$$= \frac{(2\sqrt[4]{a} + 2)(\sqrt{a} + 1 - \sqrt[4]{a}) - (2\sqrt[4]{a} - 1)(\sqrt{a} + 1 + \sqrt[4]{a})}{(\sqrt{a} + 1 + \sqrt[4]{a})(\sqrt{a} + 1 - \sqrt[4]{a})} = \frac{4}{a + \sqrt{a} + 1}$$

56.  $\frac{2^{n+4} - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^{n+3}} = \frac{2^n \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n \cdot 2^3} = \frac{2^n(2^4 - 2)}{2 \cdot 2^n \cdot 2^3} = \frac{7}{8}$

57.  $(2^n + 2^{n-1})(3^n - 3^{n-1}) = \left(2^n + \frac{2^n}{2}\right) \left(3^n - \frac{3^n}{3}\right) = \frac{2^n(2+1)}{2} = \frac{3^n(3-1)}{6} = 6^n$

58.  $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$

$$= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 \cdot e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x})}{4} = \frac{2 \cdot e^0 + 2 \cdot e^0}{4} = 1$$

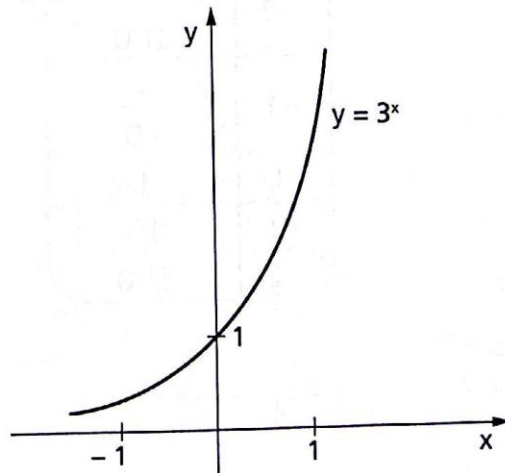
**CAPÍTULO II** — Função exponencial

59. A expressão  $\left(\frac{1}{2}\right)^y$  é decrescente com  $y$ . Seu menor valor é o que se obtém para o máximo valor de  $y = 4x - x^2$ . O valor de  $x$  que acarreta o máximo de  $y$  é  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{-2} = 2$  e  $y_{\text{máx}} = 4 \cdot 2 - 2^2 = 4$ .

Portanto, o menor valor de  $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x - x^2}$  é:  $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ .

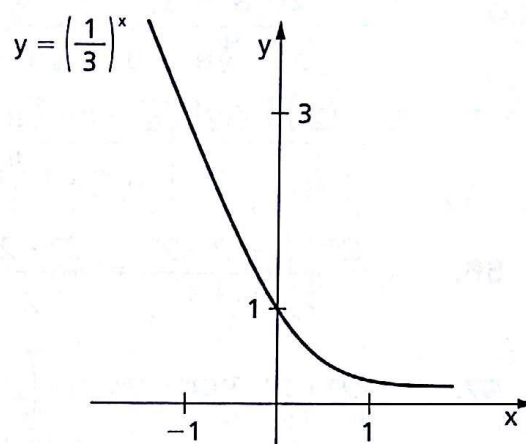
60. a)

x	y = 3 <sup>x</sup>
-3	$\frac{1}{27}$
-2	$\frac{1}{9}$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



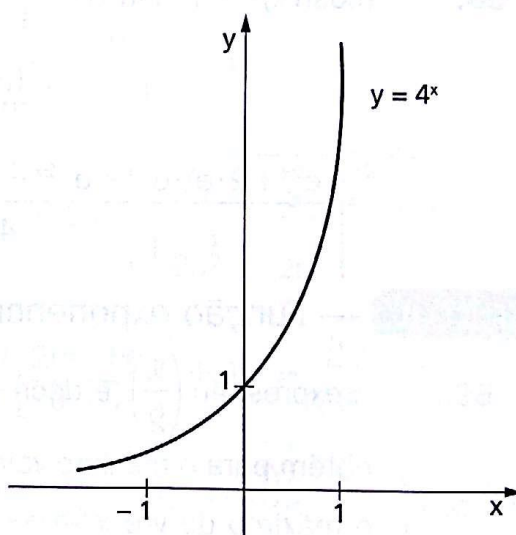
b)

x	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-2	9
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{9}$



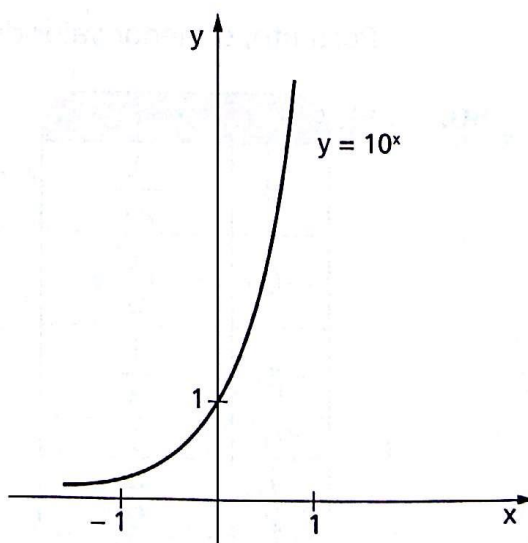
c)

x	$y = 4^x$
-2	$\frac{1}{16}$
-1	$\frac{1}{4}$
0	1
1	4
2	16



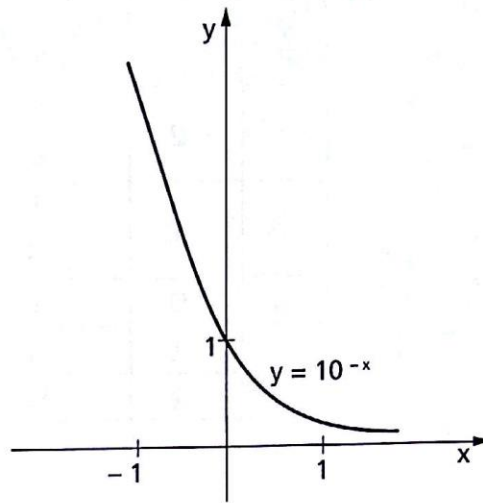
d)

x	$y = 10^x$
-2	$\frac{1}{100}$
-1	$\frac{1}{10}$
0	1
1	10
2	100



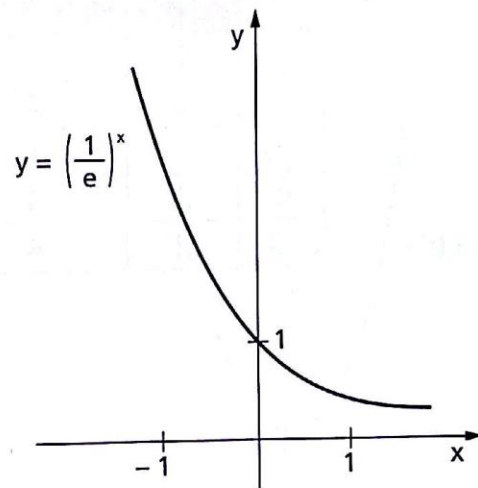
e)

x	$y = 10^{-x}$
-2	100
-1	10
0	1
1	$\frac{1}{10}$
2	$\frac{1}{100}$



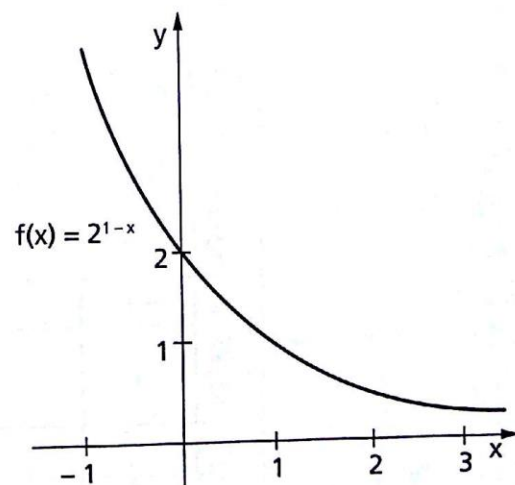
f)

x	$y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$
-2	7,39
-1	2,72
0	1
1	0,36
2	0,14



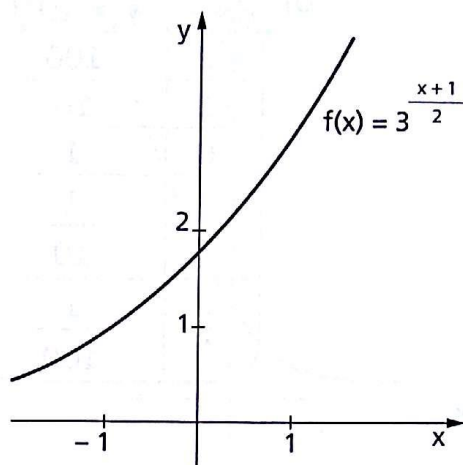
62. a)

x	$1 - x$	$f(x) = 2^{1-x}$
3	-2	$\frac{1}{4}$
2	-1	$\frac{1}{2}$
1	0	1
0	1	2
-1	2	4



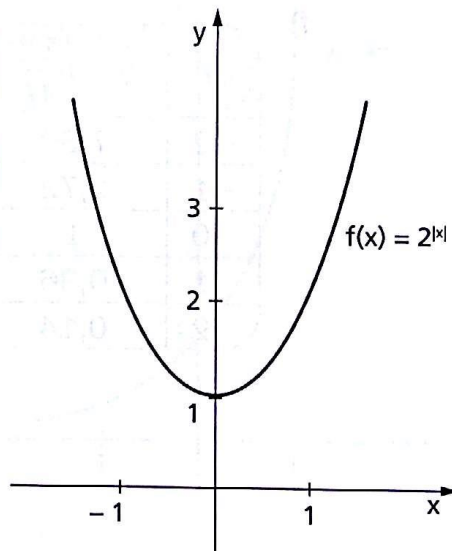
b)

x	$\frac{x+1}{2}$	$f(x) = 3^{\frac{x+1}{2}}$
-5	-2	$\frac{1}{9}$
-3	-1	$\frac{1}{3}$
-1	0	1
1	1	3
3	2	9



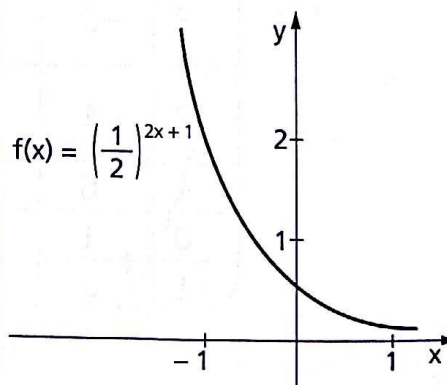
c)

x	x	$f(x) = 2^{ x }$
-1	1	2
1	1	2
0	0	1
-2	2	4
2	2	4



d)

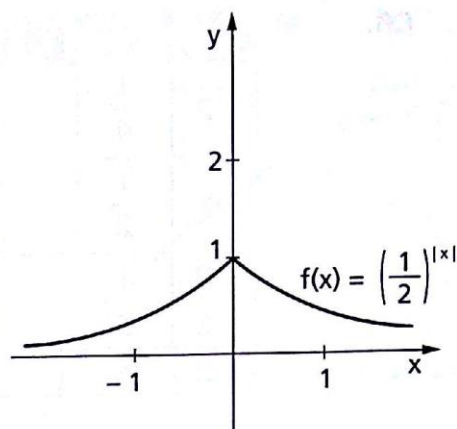
x	$2x+1$	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$
$-\frac{3}{2}$	-2	4
-1	-1	2
$-\frac{1}{2}$	0	1
0	1	$\frac{1}{2}$





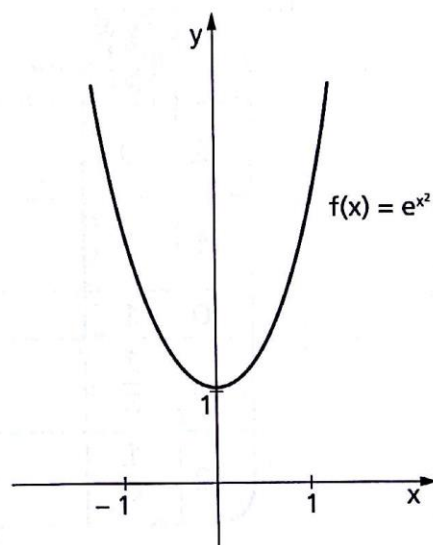
e)

x	x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ x }$
-1	1	$\frac{1}{2}$
1	1	$\frac{1}{2}$
0	0	1
-2	2	$\frac{1}{4}$
2	2	$\frac{1}{4}$



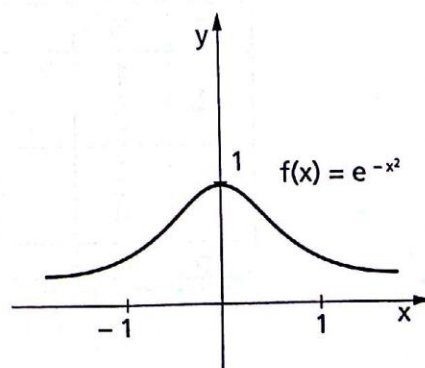
63.

x	$x^2$	$f(x) = e^{x^2}$
1	1	2,72
$\sqrt{2}$	2	7,39
$-\sqrt{2}$	2	7,39
0	0	1



64.

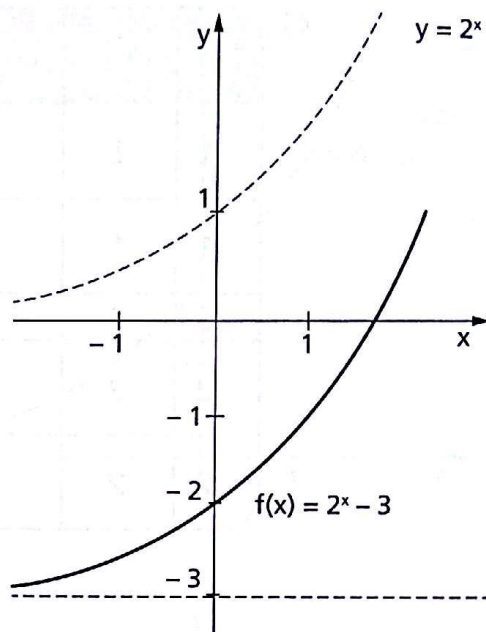
x	$x^2$	$f(x) = e^{-x^2}$
-1	1	0,36
1	1	0,36
0	0	1
-2	4	0,018
2	4	0,018



66.

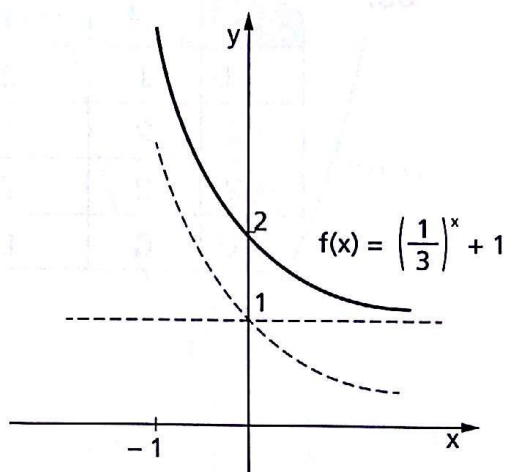
a)

x	$2^x$	$f(x) = 2^x - 3$
-2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{11}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$
0	1	-2
1	2	-1
2	4	1



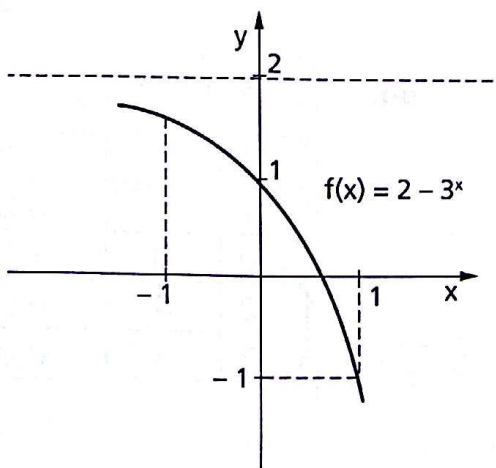
b)

x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$
-2	9	10
-1	3	4
0	1	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{10}{9}$



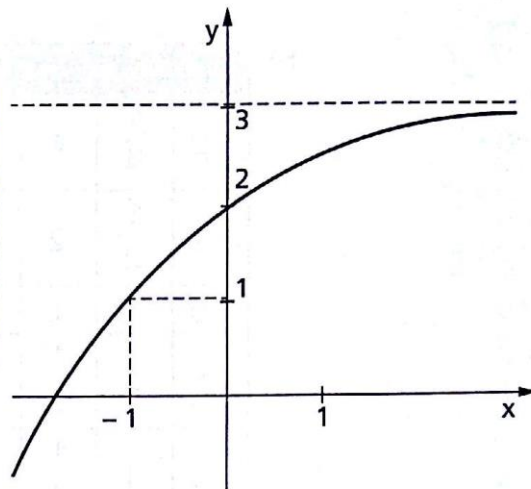
c)

x	$3^x$	$f(x) = 2 - 3^x$
0	1	1
1	3	-1
-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
-2	$\frac{1}{9}$	$\frac{17}{9}$
2	9	-7



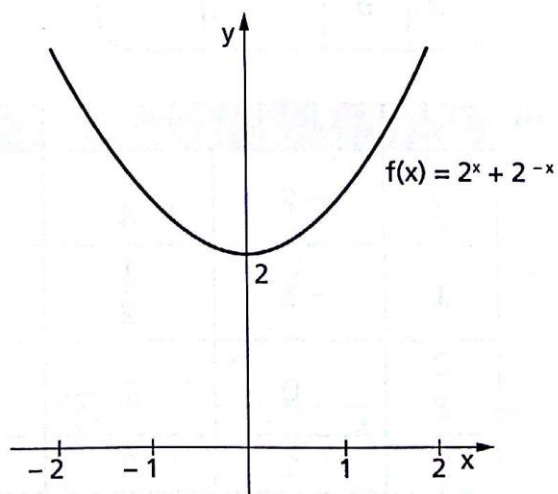
d)

$x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$f(x) = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$
0	1	2
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
-1	2	1
-2	4	-1



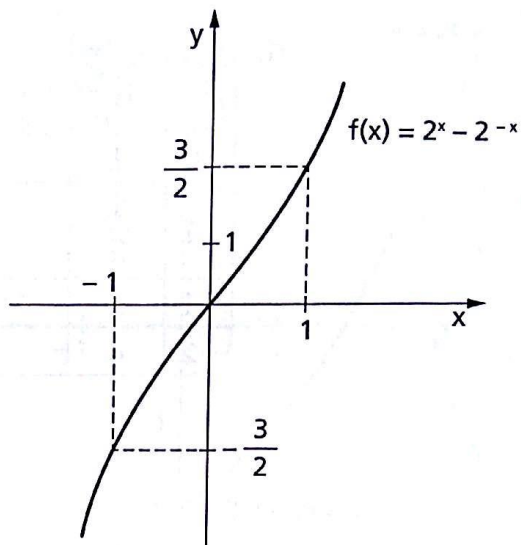
67. a)

$x$	$2^x$	$2^{-x}$	$f(x) = 2^x + 2^{-x}$
-2	$\frac{1}{4}$	4	$\frac{17}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
0	1	1	2
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{17}{4}$



b)

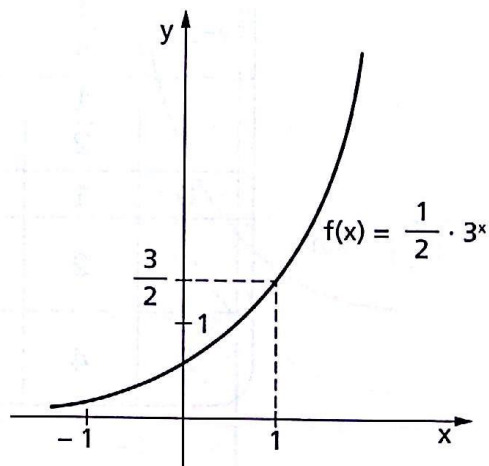
x	$2^x$	$2^{-x}$	$2^x - 2^{-x}$
-2	$\frac{1}{4}$	4	$-\frac{15}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{3}{2}$
0	1	1	0
1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{15}{4}$



69.

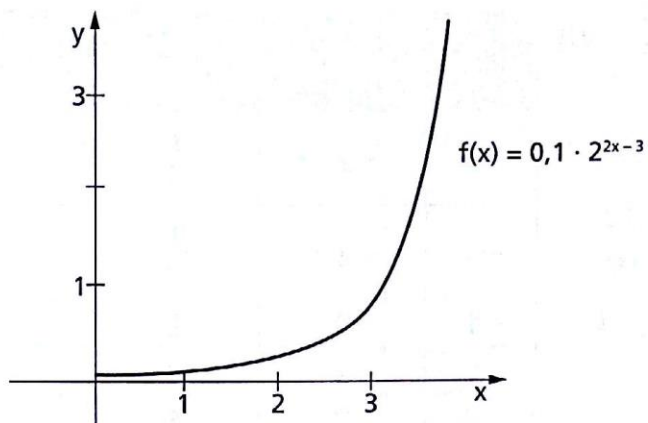
a)

x	$3^x$	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3^x$
0	1	$\frac{1}{2}$
-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
-2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	3	$\frac{3}{2}$
2	9	$\frac{9}{2}$



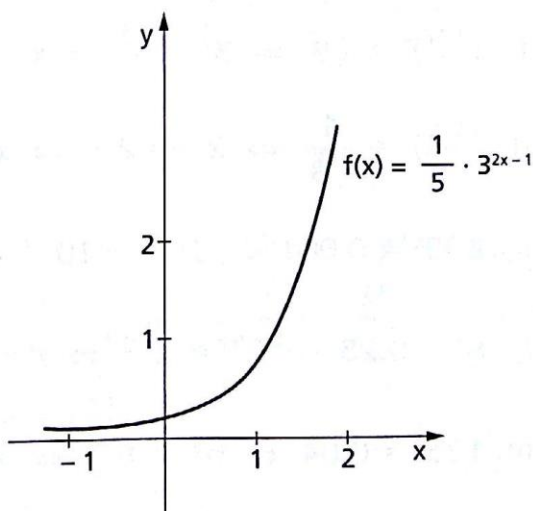
b)

x	$2x - 3$	$2^{2x - 3}$	$f(x) = 0,1 \cdot 2^{2x - 3}$
$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{4}$	0,025
1	-1	$\frac{1}{2}$	0,05
$\frac{3}{2}$	0	1	0,1
2	1	2	0,2
$\frac{5}{2}$	2	4	0,4



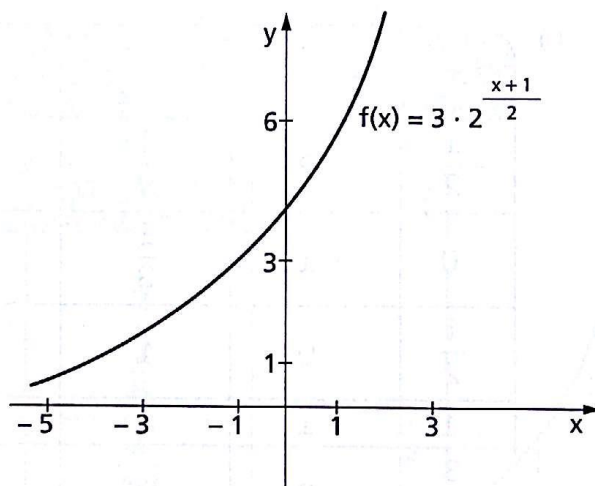
c)

$x$	$2x - 1$	$3^{2x - 1}$	$f(x) = \frac{1}{5} \cdot 3^{2x - 1}$
$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{9}$	0,02
0	-1	$\frac{1}{3}$	0,07
$\frac{1}{2}$	0	1	0,2
1	1	3	0,6
$\frac{3}{2}$	2	9	1,8



d)

x	$\frac{x+1}{2}$	$2^{\frac{x+1}{2}}$	$3 \cdot 2^{\frac{x+1}{2}}$
-5	-2	$\frac{1}{4}$	0,75
-3	-1	$\frac{1}{2}$	1,5
-1	0	1	3
1	1	2	6
3	2	4	12



- 71.
- e)  $(\sqrt[3]{2})^x = 8 \Leftrightarrow 2^{\frac{x}{3}} = 2^3 \Leftrightarrow x = 9, S = \{9\}$
  - f)  $(\sqrt[4]{3})^x = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{4}} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}, S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$
  - j)  $(\sqrt[5]{4})^x = \frac{1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x}{5}} = 2^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{15}{4}, S = \left\{-\frac{15}{4}\right\}$
  - k)  $100^x = 0,001 \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}, S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$
  - l)  $8^x = 0,25 \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{-2} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}, S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$
  - m)  $125^x = 0,04 \Leftrightarrow 5^{3x} = 5^{-2} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}, S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$
  - n)  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2,25 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{225}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = -2, S = \{-2\}$

72. i)  $5^{3x-1} = \left(\frac{1}{25}\right)^{2x+3} \Leftrightarrow 5^{3x-1} = 5^{-4x-6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{7}, S = \left\{-\frac{5}{7}\right\}$

j)  $(\sqrt{2})^{3x-1} = (\sqrt[3]{16})^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{2}-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{8x}{3}-\frac{4}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{7}, S = \left\{\frac{5}{7}\right\}$

k)  $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^x-1} \Leftrightarrow 2^{6x+3} = 2^{\frac{2x-2}{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{11}{16}, S = \left\{-\frac{11}{16}\right\}$

l)  $4^{x^2-1} = 8^x \Leftrightarrow 2^{2x^2-2} = 2^{3x} \Leftrightarrow \left(x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}\right), S = \left\{2, -\frac{1}{2}\right\}$

m)  $27^{x^2+1} = 9^{5x} \Leftrightarrow 3^{3x^2+3} = 3^{10x} \Leftrightarrow \left(x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{3}\right), S = \left\{3, \frac{1}{3}\right\}$

n)  $8^{x^2-x} = 4^{x+1} \Leftrightarrow 2^{3x^2-3x} = 2^{2x+2} \Leftrightarrow \left(x = 2 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}\right),$   
 $S = \left\{2, -\frac{1}{3}\right\}$

73.  $4^{x^2+4x} = 4^{12} \Leftrightarrow 2^{2x^2+8x} = 2^{24} \Leftrightarrow (x = -6 \text{ ou } x = 2), S = \{-6, 2\}$

74.  $100 \cdot 10^x = \sqrt[5]{1000^5} \Leftrightarrow 10^{2+x} = 10^{\frac{15}{x}} \Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x = -5 \text{ ou } x = 3), S = \{-5, 3\}$

76. a)  $(2^x)^{x+4} = 32 \Leftrightarrow 2^{x^2+4x} = 2^5 \Leftrightarrow (x = -5 \text{ ou } x = 1), S = \{-5, 1\}$

b)  $(9^{x+1})^{x-1} = 3^{x^2+x+4} \Leftrightarrow (3^{2x+2})^{x-1} = 3^{x^2+x+4} \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x = 3 \text{ ou } x = -2), S = \{-2, 3\}$

c)  $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x} \Leftrightarrow 2^{3x-1} \cdot 2^{4x+6} = 2^{9-3x} \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}, S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

d)  $(3^{2x-7})^3 : 9^{x+1} = (3^{3x-1})^4 \Leftrightarrow 3^{4x-23} = 3^{12x-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{19}{8}, S = \left\{-\frac{19}{8}\right\}$

e)  $2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1} \Leftrightarrow 2^{-3x+23} = 2^{2x-2} \Leftrightarrow x = 5, S = \{5\}$

f)  $\frac{3^{x+2} \cdot 9^x}{243^{5x+1}} = \frac{81^{2x}}{27^{3-4x}} \Leftrightarrow \frac{3^{3x+2}}{3^{25x+5}} = \frac{3^{8x}}{3^{9-12x}} \Leftrightarrow 3^{-22x-3} = 3^{20x-9} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{7}, S = \left\{\frac{1}{7}\right\}$

g)  $x+4 \sqrt{2^{3x-8}} = 2^{x-5} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x-8}{x+4}} = 2^{x-5} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x = 6 \text{ ou } x = -2), S = \{-2, 6\}$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad 8^{3x} &= \sqrt[3]{32^x} : 4^{x-1} \Leftrightarrow 2^{9x} = 2^{\frac{5x}{3}} : 2^{2x-2} \Leftrightarrow 2^{9x} = 2^{\frac{-x+6}{3}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{14}, S = \left\{ \frac{3}{14} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad x^{-1} \sqrt[3]{3 \sqrt[3]{2^{3x-1}}} - 3x^{-1} \sqrt[7]{8^{x-3}} &= 0 \Leftrightarrow 3x^{-3} \sqrt[3]{2^{3x-1}} = 3x^{-1} \sqrt[7]{2^{3x-9}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{\frac{3x-1}{3}} = 2^{\frac{3x-9}{7}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ não serve, pois } x \in \mathbb{N} \text{ e } x > 2. S = \emptyset \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad \sqrt{8^{x-1}} \cdot x^{+1} \sqrt[4]{4^{2x-3}} &= \sqrt[6]{2^{5x+3}} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x-3}{2}} \cdot 2^{\frac{4x-6}{x+1}} = 2^{\frac{5x+3}{6}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{3x-3}{2} + \frac{4x-6}{x+1} = \frac{5x+3}{6} \Leftrightarrow 4x^2 + 16x - 48 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = -6 \text{ ou } x = 2) \\ &x = -6 \text{ não serve, pois } x \in \mathbb{N}. S = \{2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{77.} \quad (4^{3-x})^{2-x} &= 1 \Leftrightarrow (2^{6-2x})^{2-x} = 2^0 \Leftrightarrow (6-2x)(2-x) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = 3 \text{ ou } x = 2), S = \{2, 3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{79.} \quad \text{a)} \quad 3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} &= 306 \Leftrightarrow 3^{x-1}(1-3+9+27) = 306 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3^{x-1} = 3^2 \Leftrightarrow x = 3, S = \{3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad 5^{x-2} - 5^x + 5^{x+1} &= 505 \Leftrightarrow 5^{x-2}(1-25+125) = 505 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5^{x-2} = 5^1 \Leftrightarrow x = 3, S = \{3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad 2^{3x} + 2^{3x+1} + 2^{3x+2} + 2^{3x+3} &= 240 \Leftrightarrow 2^{3x}(1+2+4+8) = 240 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{3x} = 2^4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}, S = \left\{ \frac{4}{3} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad 5^{4x-1} - 5^{4x} - 5^{4x+1} + 5^{4x+2} &= 480 \Leftrightarrow 5^{4x-1}(1-5-25+125) = 480 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 5^{4x-1} = 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, S = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad 3 \cdot 2^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+5} &= 2 \Leftrightarrow 2^x(3-10+40-32) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1, S = \{1\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad 2 \cdot 4^{x+2} - 5 \cdot 4^{x+1} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 4^x &= 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{2x+5} - 5 \cdot 2^{2x+2} - 3 \cdot 2^{2x+1} - 2^{2x} = 20 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2^{2x}(32-20-6-1) = 20 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^2 \Leftrightarrow x = 1, S = \{1\} \end{aligned}$$

$$\mathbf{81.} \quad \text{a)} \quad 4^x - 2^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^x - 2 = 0$$

Fazendo  $2^x = y$ , temos:

$$y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y = 2 \text{ ou } y = -1).$$

$y = -1$  não convém, pois  $2^x > 0$ .

De  $y = 2$  vem:  $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$ .

$$S = \{1\}$$



- b)  $9^x + 3^x = 90 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x - 90 = 0$   
 Fazendo  $3^x = y$ , temos:  
 $y^2 + y - 90 = 0 \Leftrightarrow (y = -10 \text{ ou } y = 9)$ .  
 $y = -10$  não convém, pois  $2^x > 0$ .  
 De  $y = 9$  vem:  $3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$ .  
 $S = \{2\}$
- c)  $4^x - 20 \cdot 2^x + 64 = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 = 0$   
 Fazendo  $2^x = y$ , temos:  
 $y^2 + 20y + 64 = 0 \Leftrightarrow (y = 16 \text{ ou } y = 4)$ .  
 De  $y = 16$  vem:  $2^x = 2^4 \Leftrightarrow x = 4$ ; de  $y = 4$  vem:  $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 2$ .  
 $S = \{2, 4\}$
- d)  $4^x + 4 = 5 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{2x} + 4 - 5 \cdot 2^x = 0$   
 Fazendo  $2^x = y$ , temos:  
 $y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y = 4 \text{ ou } y = 1)$ .  
 De  $y = 4$  vem:  $2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 2$ ; de  $y = 1$  vem:  $2^x = 2^0 \Leftrightarrow x = 0$ .  
 $S = \{0, 2\}$
- e)  $9^x + 3^{x+1} = 4 \Leftrightarrow 3^{2x} + 3 \cdot 3^x - 4 = 0$   
 Fazendo  $3^x = y$ , temos:  
 $y^2 + 3y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y = -4 \text{ ou } y = 1)$ .  
 $y = -4$  não convém, pois  $2^x > 0$ .  
 De  $y = 1$  vem:  $2^x = 2^0$ .  
 $S = \{0\}$
- f)  $5^{2x} + 5^x + 6 = 0$   
 Fazendo  $5^x = y$ , temos  $y^2 + y + 6 = 0 \Leftrightarrow \nexists y \in \mathbb{R}$ .  
 $S = \emptyset$
- g)  $2^{2x} + 2^{x+1} - 80 = 0$   
 Fazendo  $2^x = y$ , temos:  
 $y^2 + 2y - 80 = 0 \Leftrightarrow (y = -10 \text{ ou } y = 8)$ .  
 $y = -10$  não convém.  
 De  $y = 8$  vem:  $2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$ .  
 $S = \{3\}$
- h)  $10^{2x-1} - 11 \cdot 10^{x-1} + 1 = 0$   
 Fazendo  $10^x = y$ , temos:  
 $\frac{y^2}{10} - \frac{11y}{10} + 1 = 0 \Leftrightarrow (y = 10 \text{ ou } y = 1)$ .  
 De  $y = 10$  vem:  $10^x = 10 \Leftrightarrow x = 1$ ; de  $y = 1$  vem:  $10^x = 10^0 \Leftrightarrow x = 0$ .  
 $S = \{0, 1\}$
- i)  $4^{x+1} + 4^{3-x} = 257$   
 Fazendo  $4^x = y$ , temos:

$$4y + \frac{64}{4} - 257 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 64 - 257y = 0 \Leftrightarrow \left(y = 64 \text{ ou } y = \frac{1}{4}\right).$$

De  $y = 64$  vem:  $4^x = 4^3 \Leftrightarrow x = 3$ ; de  $y = \frac{1}{4}$  vem:  $4^x = 4^{-1} \Leftrightarrow x = -1$ .

$$S = \{-1, 3\}.$$

j)  $5 \cdot 2^{2x} - 4^{2x - \frac{1}{2}} - 8 = 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 2^{2x} - 4^{4x - 1} - 8 = 0$

Fazendo  $y = 2^{2x}$ , temos:

$$5y - \frac{y^2}{2} - 8 = 0 \Leftrightarrow -y^2 + 10y - 16 = 0 \Leftrightarrow (y = 8 \text{ ou } y = 2).$$

De  $y = 8$  vem:  $2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ ; de  $y = 2$  vem:  $2^{2x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ .

$$S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

**82.**  $25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125 \Leftrightarrow 5^{2\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} - 125 = 0$   
 Fazendo  $5^{\sqrt{x}} = y$ , vem:  $y^2 - 124y - 125 = 0 \Leftrightarrow (y = 125 \text{ ou } y = -1)$ .  
 $y = -1$  não convém.

De  $y = 125$  vem:  $5^{\sqrt{x}} = 5^3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ .  $S = \{9\}$ .

**83.**  $4^{x^2 + 2} - 3 \cdot 2^{x^2 + 3} = 160 \Leftrightarrow 2^{2x^2 + 4} - 3 \cdot 2^{x^2 + 3} - 160 = 0$   
 Fazendo  $2^{x^2} = y$ , temos:

$$16y^2 - 24y - 160 = 0 \Leftrightarrow \left(y = 4 \text{ ou } y = -\frac{5}{2}\right). y = -\frac{5}{2} \text{ não convém.}$$

De  $y = 4$  vem:  $2^{x^2} = 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow (x = \sqrt{2} \text{ ou } x = -\sqrt{2})$ .

O produto é  $-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = -2$ .

**84.** a)  $3^x - \frac{15}{3^{x-1}} + 3^{x-3} = \frac{23}{3^{x-2}} \Leftrightarrow 3^x - \frac{15}{3^x} + \frac{3^x}{3^3} = \frac{23}{3^x}$

Seja  $3^x = t$ . Temos:

$$t - \frac{45}{t} + \frac{t}{27} = \frac{207}{t} \Rightarrow t^2 = 243 \Rightarrow t = \pm 9\sqrt{3}$$

Desprezando a raiz negativa, pois  $t = 3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , temos  $t = 9\sqrt{3}$ ,

isto é,  $3^x = 9\sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{\frac{5}{2}} \Rightarrow x = \frac{5}{2}$ .  $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

b)  $2^{x+1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2^{x-1}} = \frac{30}{2^x} \Leftrightarrow 2^x \cdot 2 + \frac{2^x}{2^2} - \frac{3}{2^x} = \frac{30}{2^x}$

Fazendo  $2^x = t$ , temos:

$$2t + \frac{t}{4} - \frac{6}{t} = \frac{30}{t} \Rightarrow t^2 = 16 \Rightarrow t = -4 \text{ (não convém) ou } t = 4,$$

isto é,  $2^x = 4 \Rightarrow x = 2$ .  $S = \{2\}$

$$\begin{aligned} \text{c) } 16^{2x+3} - 16^{2x+1} &= 2^{8x+12} - 2^{6x+5} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{8x+12} - 2^{8x+4} - 2^{8x+12} + 2^{6x+5} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2^{6x+5} &= 2^{8x+4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, S = \left\{ \frac{1}{2} \right\} \end{aligned}$$

**85.** Seja  $x + \frac{1}{x} = t \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Então, temos:

$$3^{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{81}{3^{\left(x + \frac{1}{x}\right)}} \Leftrightarrow 3^{t^2-2} = \frac{81}{3^t} \Leftrightarrow 3^{t^2-2} = 3^{4-t} \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t = -3 \text{ ou } t = 2).$$

1ª possibilidade:  $t = -3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

2ª possibilidade:  $t = 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$$S = \left\{ \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right\}$$

**86.**  $2^x - \frac{1}{2^x} = k \Leftrightarrow 2^{2x} - k \cdot 2^x - 1 = 0$

Pondo  $2^x = y$ , temos  $y^2 - ky - 1 = 0$ .

Examinando  $\Delta = k^2 + 4$ , notamos que  $\Delta > 0, \forall k \in \mathbb{R}$ .

Então essa equação tem, para todo  $k$ , duas raízes reais e de sinais contrários, pois seu produto é  $-1$ .

Conclusão: para qualquer  $k$ , a equação dada só admite uma única solução

$$y = 2^x = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} > 0.$$

**87.**  $\frac{3^x + 3^{-x}}{3^x - 3^{-x}} = 2 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 2 \cdot 3^x - 2 \cdot 3^{-x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^x(1 - 2) = -3^{-x}(1 + 2) \Leftrightarrow 3^{2x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, S = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

**88.**  $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x} - 1 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x} - 1 = 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} \left( \frac{3}{2} \right) = 3^x \left( \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{3^x} = \frac{2}{3} \left( \frac{4}{\sqrt{3}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{4}{3} \right)^x = \frac{\sqrt{4^3}}{\sqrt{3^3}} \Leftrightarrow \left( \frac{4}{3} \right)^x = \left( \frac{4}{3} \right)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

**89.**  $3^{x-1} - \frac{5}{3^{x+1}} = 4 \cdot 3^{1-3x} \Leftrightarrow 3^{x-1} - 5 \cdot 3^{-x-1} - 4 \cdot 3^{1-3x} = 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \frac{3^x}{3} - \frac{5}{3 \cdot 3^x} - \frac{4 \cdot 3}{3^{3x}} = 0$

Pondo  $y = 3^x$ , temos:

$$\frac{y}{3} - \frac{5}{3y} - \frac{12}{y^3} = 0 \Leftrightarrow y^4 - 5y^2 - 36 = 0.$$

Fazendo  $y^2 = t$ , temos:  $t^2 - 5t - 36 = 0 \Leftrightarrow (t = 9 \text{ ou } t = -4)$ .

$t = -4$  não convém. De  $t = 9$  vem:  $y^2 = 9 \Rightarrow y = 3$ , pois  $y = -3$  não convém.

De  $y = 3$  vem:  $3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$ .

$$S = \{1\}$$

**90.**  $8^x - 3 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0 \Leftrightarrow 2^{3x} - 3 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x \cdot 2 + 8 = 0$

Fazendo  $2^x = y$ , vem:

$$y^3 - 3y^2 - 6y + 8 = 0. \text{ Lembrando da identidade:}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2), & \text{temos:} & & \end{array}$$

$$(y + 2)(y^2 - 2y + 4) - 3y(y + 2) = 0 \Rightarrow (y + 2) \cdot (y^2 - 5y + 4) = 0 \text{ donde:}$$

$$y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2, \text{ não convém pois } y = 2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

ou

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow (y = 1 \text{ ou } y = 4) \Leftrightarrow (2^x = 1 \text{ ou } 2^x = 4) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 2)$$

$$S = \{0, 2\}$$

**92.** a)  $x^{2-3x} = 1$ . Para  $x = 0$ , temos  $0^2 = 1$  (falso);  $x = 0$  não é solução; para  $x = 1$ , temos  $1^{-1} = 1$  (verdadeiro);  $x = 1$  é solução. Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:  $x^{2-3x} = x^0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ .

$$S = \left\{1, \frac{2}{3}\right\}$$

b)  $x^{2x+5} = 1$ .  $x = 0$  não é solução, pois  $0^5 = 1$  (falso);  $x = 1$  é solução, pois  $1^7 = 1$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:

$$x^{2x+5} = x^0 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2} \text{ não convém.}$$

$$S = \{1\}$$

c)  $x^{x^2-2} = 1$ .  $x = 0$  não é solução, pois  $0^{-2} = 1$  (falso);  $x = 1$  é solução, pois  $1^{-1} = 1$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:

$$x^{x^2-2} = x^0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

$$S = \{1, \sqrt{2}\}$$

d)  $x^{x^2-7x+12} = 1$ .  $x = 0$  não é solução, pois  $0^{12} = 1$  (falso);  $x = 1$  é solução, pois  $1^6 = 1$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:

$$x^{x^2-7x+12} = x^0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 3).$$

$$S = \{1, 3, 4\}$$

e)  $x^{x^2 - 3x - 4} = 1$ .  $x = 0$  não é solução, pois  $0^{-4} = 1$  (falso);  $x = 1$  é solução, pois  $1^{-6} = 1$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:  
 $x^{x^2 - 3x - 4} = x^0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = -1)$ , mas  $x = -1$  não convém.  
 $S = \{1, 4\}$

**93.** a)  $x^x = x$ .  $x = 0$  não é solução, pois  $0^0 = 0$  (falso);  $x = 1$  é solução, pois  $1^1 = 1$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:  $x^x = x^1 \Leftrightarrow x = 1$ .  
 $S = \{1\}$

b)  $x^{x+1} = x$ .  $x = 0$  é solução, pois  $0^1 = 0$  (verdadeiro);  $x = 1$  é solução, pois  $1^2 = 1$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:  
 $x^{x+1} = x \Leftrightarrow x + 1 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ .  
 $S = \{0, 1\}$ . Como  $U = \mathbb{R}_+ \Rightarrow S = \{1\}$ .

c)  $x^4 - 2x = x$ .  $x = 0$  é solução, pois  $0^4 = 0$  (verdadeiro);  $x = 1$  é solução, pois  $1^2 = 1$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:  
 $x^4 - 2x = x \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ .  $S = \left\{0, 1, \frac{3}{2}\right\}$ . Como  $U = \mathbb{R}_+ \Rightarrow S = \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$ .

d)  $x^{2x^2 - 5x + 3} = x$ .  $x = 0$  é solução, pois  $0^3 = 0$  (verdadeiro);  $x = 1$  é solução, pois  $1^0 = 1$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:  
 $x^{2x^2 - 5x + 3} = x \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2}\right)$ .  
 $S = \left\{0, 1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ . Como  $U = \mathbb{R}_+ \Rightarrow S = \left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}$ .

e)  $x^{x^2 - 2x - 7} = x$ .  $x = 0$  não é solução, pois  $0^{-7} = 0$  (falso);  $x = 1$  é solução, pois  $1^{-8} = 1$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:  
 $x^{x^2 - 2x - 7} = x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ou } x = -2)$ .  
 $S = \{1, 4\}$

**94.**  $(x^2 - x + 1)^{(2x^2 - 3x - 2)} = 1$ .  $x = 0$  é solução, pois  $1^{-2} = 1$  (verdadeiro);  $x = 1$  é solução, pois  $1^{-3} = 1$  (verdadeiro).

Supondo  $0 < x^2 - x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 > 0 \text{ (é satisfeita para } \forall x \in \mathbb{R}) \\ e \\ x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \end{cases}$

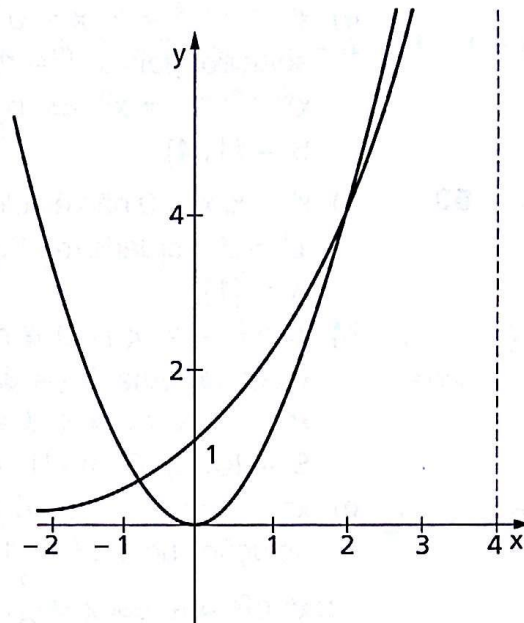
temos:

$(x^2 - x + 1)^{(2x^2 - 3x - 2)} = 1 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)^{(2x^2 - 3x - 2)} = (x^2 - x + 1)^0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 2\right)$ .  $S = \left\{-\frac{1}{2}, 0, 1, 2\right\}$

**95.**  $x^{x^3 - 8} = 1$ .  $x = 0$  não é solução, pois  $0^{-8} = 1$  (falso);  $x = 1$  é solução, pois  $1^{-7} = 1$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:  
 $x^{x^3 - 8} = x^0 \Leftrightarrow x^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ .  
 $S = \{1, 2\}$

96.

x	$2^x$	x	$x^2$
-2	$\frac{1}{4}$	-2	4
-1	$\frac{1}{2}$	-1	1
0	1	0	0
1	2	1	1
2	4	2	4
3	8	3	9
4	16	4	16



São duas soluções.

97.

$x^{2x} - (x^2 + x)x^x + x^3 = 0$ .  $x = 0$  não é solução, pois  $0^0 = 0$  (falso);  $x = 1$  é solução, pois  $1 - 2 + 1 = 0$  (verdadeiro). Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos  $(x^x)^2 - (x^2 + x)x^x + x^3 = 0$ ; fazendo  $x^x = y$ , temos:

$$y^2 - (x^2 + x)y + x^3 = 0 \Leftrightarrow (y = x^2 \text{ ou } y = x).$$

De  $y = x^2$  vem  $x^x = x^2 \Leftrightarrow x = 2$ ; de  $y = x$  vem  $x^x = x \Leftrightarrow x = 1$ .

$$S = \{1, 2\}$$

99.

$$a) 4^x + 2 \cdot 14^x = 3 \cdot 49^x \Leftrightarrow \frac{4^x}{49^x} + \frac{2 \cdot 14^x}{49^x} = \frac{3 \cdot 49^x}{49^x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^{2x} + 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x - 3 = 0$$

Fazendo  $\left(\frac{2}{7}\right)^x = y$ , temos:

$$y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y = -3 \text{ ou } y = 1).$$

$y = -3$  não serve.

De  $y = 1$  vem:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{7}\right)^x = \left(\frac{2}{7}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$S = \{0\}$$

$$b) 2^{2x+2} - 6^x - 2 \cdot 3^{2x+2} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4 \cdot 2^{2x}}{2^x \cdot 3^x} - \frac{2^x \cdot 3^x}{2^x \cdot 3^x} - \frac{18 \cdot 3^{2x}}{2^x \cdot 3^x} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x} - 18 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 = 0.$$

Fazendo  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = y$ , vem:

$$\frac{4}{y} - 18y - 1 = 0 \Leftrightarrow -18y^2 - y + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(y = -\frac{1}{2} \text{ ou } y = \frac{4}{9}\right).$$

$y = -\frac{1}{2}$  não convém.

De  $y = \frac{4}{9}$  vem  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{4}{9} \Leftrightarrow x = -2$ .

$S = \{-2\}$

**100.**

a)  $\begin{cases} 4^x = 16y \Leftrightarrow 2^{2x} - 16y = 0 \\ 2^{x+1} = 4y \Leftrightarrow 2 \cdot 2^x - 4y = 0 \end{cases}$

Fazendo  $2^x = z$ , vem:

$$\begin{cases} z^2 - 16y = 0 & (1) \\ 2z - 4y = 0 \Leftrightarrow z = 2y & (2) \end{cases}$$

De (2) em (1) vem  $4y^2 - 16y = 0 \Leftrightarrow (y = 0 \text{ ou } y = 4)$ .

Para  $y = 0$ , temos  $z = 0$ ; portanto,  $2^x = 0$  impossível.

Para  $y = 4$ , temos  $z = 8$ ; portanto,  $2^x = 2^3 \Leftrightarrow x = 3$ .

$S = \{(3, 4)\}$

b)  $\begin{cases} 2^{2(x^2 - y)} = 100 \cdot 5^{2(y - x^2)} \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2(x^2 - y)} = 2^2 \cdot 5^{-2(x^2 - y) + 2} \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x^2 - 2y - 2} = 5^{-2x^2 + 2y + 2} & (1) \\ y = 5 - x & (2) \end{cases}$$

De (2) em (1) vem  $2^{2x^2 + 2x - 12} = 5^{-2x^2 - 2x + 12}$ .

Fazendo  $2x^2 + 2x - 12 = z$ , vem:

$$2^z = 5^{-z} \Leftrightarrow 2^z \cdot 5^z = 1 \Leftrightarrow 10^z = 1 \Leftrightarrow z = 0.$$

Sendo assim:  $2x^2 + 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ou } x = 2)$ .

Para  $x = -3$  temos  $y = 8$ ; para  $x = 2$ , temos  $y = 3$ .

$S = \{(2, 3), (-3, 8)\}$

c)  $\begin{cases} 2^x - 2^y = 24 & (1) \\ x + y = 8 \Leftrightarrow x = 8 - y & (2) \end{cases}$

De (2) em (1) vem:

$$2^{8-y} - 2^y = 24 \Leftrightarrow 2^8 - 2^{2y} - 24 \cdot 2^y = 0.$$

Fazendo  $2^y = z$ , vem:

$$-z^2 - 24z + 256 = 0 \Leftrightarrow (z = -32 \text{ ou } z = 8).$$

$z = -32$  não convém.

De  $z = 8$  vem  $2^y = 2^3 \Leftrightarrow y = 3$ .

Para  $y = 3 \Rightarrow x = 5$ .

$$S = \{(5, 3)\}$$

$$d) \begin{cases} 3^x - 2^{(y^2)} = 77 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^{\left(\frac{y^2}{2}\right)} = 7 \end{cases}$$

Fazendo  $3^x = a$  e  $2^{(y^2)} = b$ , temos:

$$\begin{cases} a - b = 77 \Leftrightarrow a = 77 + b & (1) \\ \sqrt{a} - \sqrt{b} = 7 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 = (7 + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a - b - 49 = 14\sqrt{b} & (2) \end{cases}$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = 7 \Leftrightarrow (\sqrt{a})^2 = (7 + \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow a - b - 49 = 14\sqrt{b} \quad (2)$$

De (1) em (2) vem  $77 + b - b - 49 = 14\sqrt{b} \Leftrightarrow b = 4$  (3).

De (3) em (1) vem  $a = 81$ . Como  $3^x = a \Leftrightarrow 3^x = 3^4 \Leftrightarrow x = 4$ .

Como  $2^{(y^2)} = b \Leftrightarrow 2^{(y^2)} = 4 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$ .

$$S = \{(4, +\sqrt{2}), (4, -\sqrt{2})\}$$

$$101. \begin{cases} 3^{x+y} = 1 \\ 2^{x+2y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 & (1) \\ x + 2y = 1 & (2) \end{cases}$$

De (2) - (1) vem  $y = 1$  e  $x = -1$ , então  $x - y = -2$ .

$$102. \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^y = 2^2 \cdot 3^3 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ e } y = 3) \\ 4^x \cdot 2^y = 128 \Leftrightarrow 2^{2x+y} = 2^7 \Leftrightarrow 2x + y = 7 \text{ (que aceita a solução } (2, 3)) \end{cases}$$

O produto é  $2 \cdot 3 = 6$ .

$$103. \begin{cases} x^{y^2} - 15y + 56 = 1 \\ y - x = 5 \Leftrightarrow y = 5 + x \end{cases}$$

$x = 0$  não é solução, pois  $0^{y^2} - 15y + 56 = 1$  (falso).

$x = 1$  é solução, pois  $1^{y^2} - 15y + 56 = 1$  (verdadeiro).

Como  $y = 5 + x \Rightarrow y = 6 \Rightarrow (1, 6)$ . Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:

$$x^{y^2} - 15y + 56 = x^0 \Leftrightarrow y^2 - 15y + 56 = 0 \Leftrightarrow (y = 8 \text{ ou } y = 7).$$

Para  $y = 8$ , temos  $x = 3 \Rightarrow (3, 8)$ .

Para  $y = 7$ , temos  $x = 2 \Rightarrow (2, 7)$ .

$$S = \{(1, 6), (3, 8), (2, 7)\}$$

$$104. a) \begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} & (1) \\ x^2y = 1 \Leftrightarrow y = x^{-2} & (2) \end{cases}$$

$x = 0$  não é solução, pois  $0^y = y^{-y}$  e  $y \neq 0$ , pois  $x^2 \cdot y = 1$ .

$x = 1$  é solução, pois  $1^2 \cdot y = 1 \Rightarrow y = 1$  e  $1^2 = 1^0$  (verdadeiro).

De (2) em (1) vem:

$$x^x + x^{-2} = (x^{-2})^x - x^{-2} \Leftrightarrow x + x^{-2} = -2x + 2x^{-2} \Leftrightarrow$$



$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x^2} = -2x + \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow x = 3^{-\frac{1}{3}}.$$

Como  $y = x^{-2} \Rightarrow y = \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{-2} \Leftrightarrow y = 3^{\frac{2}{3}}.$

$$S = \left\{ (1, 1), \left(3^{-\frac{1}{3}}, 3^{\frac{2}{3}}\right) \right\}$$

b) 
$$\begin{cases} x^y = y^x & (1) \\ x^3 = y^2 \Leftrightarrow y = x^{\frac{3}{2}} & (2) \end{cases}$$

De (2) em (1) vem  $x^{x^{\frac{3}{2}}} = x^{\frac{3x}{2}}.$

$x = 0$  é solução, pois  $0^0 = 0^0$  (verdadeiro); então,  $x = 0$  e  $y = 0$  satisfazem.

$x = 1$  é solução, pois  $1^1 = 1^{\frac{3}{2}}$  (verdadeiro); então,  $x = 1$  e  $y = 1$  satisfazem.

Supondo  $0 < x \neq 1$ , temos:

$$x^{\frac{3}{2}} = \frac{3x}{2} \Leftrightarrow x(2x^{\frac{1}{2}} - 3) = 0 \Leftrightarrow \left(x = 0 \text{ ou } x = \frac{9}{4}\right).$$

Como  $y = \sqrt{x^3} \Rightarrow y = \sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^3} \Rightarrow y = \frac{27}{8}.$

$$S = \left\{ (0, 0), (1, 1), \left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right) \right\}. \text{ Como } U = \mathbb{R}_+ \Rightarrow S = \left\{ (1, 1), \left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right) \right\}.$$

**105.** 
$$\begin{cases} x^y = y^x \Leftrightarrow x = y^{\frac{x}{y}} \Rightarrow y^{\frac{x}{y}} = y^{\frac{n}{m}} \Rightarrow mx = ny & (1) \\ x^m = y^n \Leftrightarrow x = y^{\frac{n}{m}} & (2) \end{cases}$$

$x = 1$  é solução, pois  $1^y = y^1 \Rightarrow y = 1$ ; então,  $1^m = 1^n$  (verdade)  $\therefore (1, 1)$  é solução. De (2) em (1) vem:

$$m \cdot y^{\frac{n}{m}} = ny \Leftrightarrow y = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}.$$

Como  $x = y^{\frac{n}{m}} \Rightarrow x = \left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}\right]^{\frac{n}{m}} \Leftrightarrow x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}.$

$$S = \left\{ (1, 1), \left(\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{n-m}}, \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{n-m}}\right) \right\}$$

**107.** a)  $3^{2x} - (2m + 3) \cdot 3^x + (m + 3) = 0$

Fazendo  $y = 3^x$ , temos  $y^2 - (2m + 3)y + (m + 3) = 0$ . Como  $y > 0$ ,  $f(y) = y^2 - (2m + 3)y + (m + 3)$  deve admitir pelo menos uma raiz real e positiva.

1) as duas raízes são positivas:

$$y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0, S > 0 \text{ e } a \cdot f(0) > 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4m^2 + 8m - 3 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( m \leq \frac{-2 - \sqrt{7}}{2} \text{ ou } m \geq \frac{-2 + \sqrt{7}}{2} \right) \textcircled{I}$$

$$S > 0 \Rightarrow 2m + 3 > 0 \Rightarrow \left( m > -\frac{3}{2} \right) \textcircled{II}$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m + 3 > 0 \Rightarrow m > -3 \textcircled{III}$$

$$S_1 = \textcircled{I} \cap \textcircled{II} \cap \textcircled{III} = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid m \geq \frac{-2 + \sqrt{7}}{2} \right\}$$

2) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m < -3, \\ S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < -3\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \left( m > -\frac{3}{2} \text{ e } m = -3 \right), S_3 = \emptyset \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid m < -3 \text{ ou } m \geq \frac{-2 + \sqrt{7}}{2} \right\}$$

b)  $2^{2x+1} - (2m-3) \cdot 2^{x+1} + (7-2m) = 0$

Fazendo  $2^x = y$ , temos:  $2y^2 - (2m-3) \cdot 2y + (7-2m) = 0$ .

Como  $y > 0$ , temos:

1) as duas raízes são positivas:  $y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0, S > 0$  e  $a \cdot f(0) > 0$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m - 5 \geq 0 \Rightarrow \left( m \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } m \geq \frac{5}{2} \right) \textcircled{I}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{2(2m-3)}{2} > 0 \Rightarrow m > \frac{3}{2} \textcircled{II}$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow 2(7-2m) > 0 \Rightarrow m < \frac{7}{2} \textcircled{III}$$

$$S_1 = \textcircled{I} \cap \textcircled{II} \cap \textcircled{III} = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{2} \leq m < \frac{7}{2} \right\}$$

2) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow 14 - 4m < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow m > \frac{7}{2}, S_2 = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid m > \frac{7}{2} \right\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow (2m-3 > 0 \text{ e } \\ 7-2m = 0) \Rightarrow \left( m > \frac{3}{2} \text{ e } m = \frac{7}{2} \right), S_3 = \left\{ \frac{7}{2} \right\} \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid m \geq \frac{5}{2} \right\}$$

c)  $m \cdot 9^x - (2m + 1) \cdot 3^x + (m - 1) = 0$

Fazendo  $y = 3^x$ , temos:

$$my^2 - (2m + 1) \cdot y + (m - 1) = 0.$$

Como  $y > 0$ , temos:

1) as duas raízes são positivas:  $y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0, S > 0$  e  $a \cdot f(0) > 0$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (2m + 1)^2 - 4m^2 + 4m \geq 0 \Rightarrow m \geq -\frac{1}{8} \text{ (I)}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{2m + 1}{m} > 0 \Rightarrow \left(m < -\frac{1}{2} \text{ ou } m > 0\right) \text{ (II)}$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m(m - 1) > 0 \Rightarrow (m > 1 \text{ ou } m < 0) \text{ (III)}$$

$$S_1 = \text{(I)} \cap \text{(II)} \cap \text{(III)} = \{m \in \mathbb{R} \mid m > 1\}$$

2) somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m(m - 1) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < m < 1, S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 1\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{2m + 1}{m} > 0 \text{ e } m - 1 = 0\right) \Rightarrow \left(m < -\frac{1}{2} \text{ ou } \right. \\ \left. m > 0\right) \text{ e } (m = 1), S_3 = \{1\} \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{m \in \mathbb{R} \mid m > 0\}$$

**108.**

$$m(2^x - 1)^2 - 2^x(2^x - 1) + 1 = 0$$

Fazendo  $2^x = y$ , temos:  $m(y - 1)^2 - y(y - 1) + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (m - 1)y^2 - (2m - 1)y + (m + 1) = 0$ , mas  $y > 0$ , então:

As duas raízes são positivas:

$y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0, S > 0$  e  $a \cdot f(0) > 0$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (2m - 1)^2 - 4(m - 1)(m + 1) \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{5}{4} \text{ (I)}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{2m - 1}{m - 1} > 0 \Rightarrow \left(m < \frac{1}{2} \text{ ou } m > 1\right) \text{ (II)}$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0 \Rightarrow (m < -1 \text{ ou } m > 1) \text{ (III)}$$

$$S_1 = \text{(I)} \cap \text{(II)} \cap \text{(III)} = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m < -1 \text{ ou } 1 < m \leq \frac{5}{4}\right\}$$

Somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m^2 - 1 < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 < m < 1, S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid -1 < m < 1\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(m < \frac{1}{2} \text{ ou } m > 1\right) \text{ e } (m = -1), S_3 = \{-1\} \end{cases}$$

Notemos que, para  $m = 1$ , a equação proposta se reduz a:

$-2^x + 2 = 0$ , que apresenta uma raiz real ( $x = 1$ ). Assim,

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{m \in \mathbb{R} \mid m \leq \frac{5}{4}\right\}.$$

**109.**  $2^x + 2^{-x} = m \Leftrightarrow 2^{2x} - m \cdot 2^x + 1 = 0$

Fazendo  $2^x = y$ , temos:  $y^2 - my + 1 = 0$ , mas  $y = 2^x > 0$ , então:

As duas raízes são positivas:

$$y_1 \geq y_2 > 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \text{ e } S > 0 \text{ e } a \cdot f(0) > 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow m^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (m \leq -2 \text{ ou } m \geq 2) \text{ (I)}$$

$$S > 0 \Rightarrow m > 0 \text{ (II)}$$

$$a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow 1 > 0 \text{ (V)}$$

$$S_1 = \text{(I)} \cap \text{(II)} = \{m \in \mathbb{R} \mid m \geq 2\}$$

Somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow \begin{cases} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) = 1 < 0 \text{ (F), } S_2 = \emptyset \\ y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow m > 0 \text{ e } f(0) = 1 \neq 0, S_3 = \emptyset \end{cases}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{m \in \mathbb{R} \mid m \geq 2\}$$

**110.**  $\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = m \Leftrightarrow (m - 1)a^{2x} - m - 1 = 0$

Fazendo  $y = a^x$ , temos  $(m - 1)y^2 - (m + 1) = 0$ .

As duas raízes são positivas:

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow 4(m - 1)(m + 1) \geq 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (m \leq -1 \text{ ou } m \geq 1) \text{ (I)}$$

$$S > 0 \Rightarrow 0 > 0 \text{ (F); } \nexists m \in \mathbb{R} \text{ que satisfaz (II)}$$

$$a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow (m - 1)(-m - 1) > 0 \Rightarrow m^2 - 1 < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-1 < m < 1) \text{ (III)}$$

Tendo em vista (I), (II), (III), segue que  $S_1 = \emptyset$ .

Somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \Rightarrow y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m^2 - 1 > 0$$

$$S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < -1 \text{ ou } m > 1\}$$

$$y_1 > 0 \text{ e } y_2 = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0 > 0 \text{ (F) e } m - 1 = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_3 = \emptyset$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < -1 \text{ ou } m > 1\}$$

**111.**  $a^{2x} - (m + 1)a^x + (m - 1) = 0$

Fazendo  $a^x = y$ , temos:

$$y^2 - (m + 1)y + (m - 1) = 0$$

As duas raízes são positivas:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta \geq 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R} \text{ (I)} \\ S > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1 \text{ (II)} \\ a \cdot f(0) > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1 \text{ (III)} \end{array} \right\} S_1 = \text{(I)} \cap \text{(II)} \cap \text{(III)} = \{m \in \mathbb{R} \mid m > 1\}$$

Somente uma raiz é positiva:

$$y_1 > 0 \geq y_2 \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 > 0 > y_2 \Rightarrow a \cdot f(0) < 0 \Rightarrow m - 1 < 0 \Rightarrow m < 1 \\ S_2 = \{m \in \mathbb{R} \mid m < 1\} \\ y_1 > 0 \text{ e } y = 0 \Rightarrow (S > 0 \text{ e } f(0) = 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow (m > -1 \text{ e } m = 1) \\ S_3 = \{1\} \end{array} \right.$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{R}$$

**119.**

a)  $8 < 2^x < 32 \Leftrightarrow 2^3 < 2^x < 2^5 \Leftrightarrow 3 < x < 5$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$$

b)  $0,0001 < (0,1)^x < 0,01 \Leftrightarrow 10^{-4} < 10^{-x} < 10^{-2} \Leftrightarrow 2 < x < 4$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$$

c)  $\frac{1}{27} < 3^x < 81 \Leftrightarrow 3^{-3} < 3^x < 3^4 \Leftrightarrow -3 < x < 4$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$$

d)  $\frac{1}{8} \leq 4^x \leq 32 \Leftrightarrow 2^{-3} \leq 2^{2x} \leq 2^5 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}\right\}$$

e)  $\frac{8}{27} < \left(\frac{4}{9}\right)^x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^3 < \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$$

f)  $0,1 < 100^x < 1\,000 \Leftrightarrow 10^{-1} < 10^{2x} < 10^3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$$

g)  $4 < 8^{|x|} < 32 \Leftrightarrow 2^2 < 2^{3|x|} < 2^5 \Leftrightarrow 2 < 3|x| < 5$

se  $x > 0 \Rightarrow |x| = x$ , então:  $2 < 3x < 5 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{5}{3}$  ou

se  $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$ , então:  $2 < -3x < 5 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} < x < -\frac{2}{3}$ .

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} < x < -\frac{2}{3} \text{ ou } \frac{2}{3} < x < \frac{5}{3}\right\}$$

$$h) 25 < 125^{2x-1} < 125 \Leftrightarrow 5^2 < 5^{6x-3} < 5^3 \Leftrightarrow \frac{5}{6} < x < 1$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{6} < x < 1 \right\}$$

$$i) (0,3)^{x-5} \leq (0,09)^{2x+3} \leq (0,3)^{x+6} \Leftrightarrow$$

$$(0,3)^{x-5} \leq (0,3)^{4x+6} \leq (0,3)^{x+6} \Leftrightarrow$$

$$(x-5 \geq 4x+6 \text{ e } 4x+6 \geq x+6) \Leftrightarrow \left( x \leq -\frac{11}{3} \text{ e } x \geq 0 \right)$$

$$S = \emptyset$$

$$j) 1 \leq 7^{x^2-4x+3} \leq 343 \Leftrightarrow 7^0 \leq 7^{x^2-4x+3} \leq 7^3 \Leftrightarrow 0 \leq x^2-4x+3 \leq 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+3 \geq 0 \text{ e } x^2-4x+3 \leq 3)$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 3 \leq x \leq 4 \}$$

$$k) 3^{x^2-3} < 3^{x^2-5x+6} < 9 \Leftrightarrow 3^{x^2-3} < 3^{x^2-5x+6} < 3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-5x+6 > x^2-3 \text{ e } x^2-5x+6 < 2) \Leftrightarrow \left( x < \frac{9}{5} \text{ e } 1 < x < 4 \right)$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{9}{5} \right\}$$

**121.**

$$a) (2^x+1)^{2x-3} < 128 \Leftrightarrow 2^{2x^2-3x+2x-3} < 2^7 \Leftrightarrow 2x^2-x-10 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < \frac{5}{2}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < \frac{5}{2} \right\}$$

$$b) (27^x-2)^{x+1} \geq (9^x+1)^{x-3} \Leftrightarrow (3^{3x-6})^{x+1} \geq (3^{2x+2})^{x-3} \Leftrightarrow x^2+x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0)$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0 \}$$

$$c) \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{8}{27}\right)^{x-3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4x+2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{3x-9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{4}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{9}{4} \right\}$$

$$d) 25^3-4x : 125^{2-x} > 5^{3x+1} \Leftrightarrow 5^{-5x} > 5^{3x+1} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{8}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{8} \right\}$$

$$e) \frac{0,04^{3x+2} \cdot 25^{1-4x}}{0,008^{3-x} \cdot 125^{4-3x}} > 1 \Leftrightarrow \frac{(5^{-2})^{3x+2} \cdot (5^2)^{1-4x}}{(5^{-3})^{3-x} \cdot (5^3)^{4-3x}} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{5^{-14x-2}}{5^{-6x+3}} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^{-8x-5} > 5^0 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{8}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{8} \right\}$$

f)  $2^{\frac{2x-3}{x-1}} : 32^{\frac{1}{x+1}} > 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{2x-3}{x-1}} : 2^{\frac{5}{x+1}} > 2^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2x-3}{x-1} - \frac{5}{x+1} - 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{-6x+4}{(x-1)(x+1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( x < -1 \text{ ou } \frac{2}{3} < x < 1 \right)$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } \frac{2}{3} < x < 1 \right\}$$

g)  $(0,1)^{\frac{1}{x+1}} \cdot (0,01)^{\frac{1}{x+3}} < (0,001)^{\frac{1}{x+2}} \Leftrightarrow (0,1)^{\frac{1}{x+1}} \cdot (0,1)^{\frac{2}{x+3}} < (0,1)^{\frac{3}{x+2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} > \frac{3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{-x+1}{(x+1)(x+3)(x+2)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-3 < x < -2 \text{ ou } -1 < x < 1)$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -2 \text{ ou } -1 < x < 1 \}$$

h)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}} : \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x+2}} \leq \left[\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x+3}}\right]^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}} \leq \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{x^2-3x}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \leq \frac{3}{x^2+3x} \Leftrightarrow \frac{6x+6}{(x^2+3x)(x-1)(x+2)} \leq 0$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } -2 < x \leq -1 \text{ ou } 0 < x < 1 \}$$

**123.**

a)  $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^x \left( \frac{1}{2} + 1 + 2 - 4 + 8 \right) > 240 \Leftrightarrow 2^x > 2^5 \Leftrightarrow x > 5$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 5 \}$$

b)  $3^{x+5} - 3^{x+4} + 3^{x+3} - 3^{x+2} < 540 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^x(243 - 81 + 27 - 9) < 540 \Leftrightarrow 3^x < 3 \Leftrightarrow x < 1$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \}$$

c)  $4^{x+1} - 2^{2x+1} + 4^x - 2^{2x-1} - 4^{x-1} \geq 144 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} \left( 4 - 2 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \geq 144 \Leftrightarrow 2^{2x} \geq 2^6 \Leftrightarrow x \geq 3$$

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3 \}$$

d)  $3^{2x+1} - 9^x - 3^{2x-1} - 9^{x-1} \leq 42 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3^{2x} \left( 3 - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) \leq 42 \Leftrightarrow 3^{2x} \leq 3^3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & 3 \cdot 2^{2x+5} - 9 \cdot 2^{2x+3} - 5 \cdot 4^{x+1} + 7 \cdot 2^{2x+1} - 3 \cdot 4^x < 60 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2^{2x}(3 \cdot 2^5 - 9 \cdot 2^3 - 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 - 3) < 60 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 2^{2x} < 2^2 \Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & 3^{(x^2)} + 5 \cdot 3^{(x^2+1)} + 2 \cdot 3^{(x^2+2)} - 4 \cdot 3^{(x^2+3)} + 3^{(x^2+4)} < 63 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 3^{(x^2)} \cdot (1 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3^3 + 3^4) < 63 \Leftrightarrow 3^{(x^2)} \cdot 7 < 63 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow 3^{(x^2)} < 9 \Leftrightarrow x^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow (-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}\}$$

**125.** a)  $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

Fazendo  $2^x = y$ , temos:

$$y^2 - 6y + 8 < 0 \Leftrightarrow 2 < y < 4 \Leftrightarrow 2 < 2^x < 4 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$$

b)  $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 > 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 12 \cdot 3^x + 27 > 0$

Fazendo  $3^x = y$ , temos:

$$y^2 - 12y + 27 > 0 \Rightarrow (y < 3 \text{ ou } y > 9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^x < 3 \text{ ou } 3^x > 9) \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ou } x > 2).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 2\}$$

c)  $5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow 5 \cdot 5^{2x} - 26 \cdot 5^x + 5 \leq 0$

Fazendo  $5^x = y$ , temos:

$$5y^2 - 26y + 5 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq y \leq 5 \Rightarrow 5^{-1} \leq 5^x \leq 5 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$$

d)  $2^{2x} - 2^{x+1} - 8 \leq 0 \Leftrightarrow 2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 8 \leq 0$

Fazendo  $2^x = y$ , temos:

$$y^2 - 2y - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 4 \Rightarrow -2 \leq 2^x \leq 2^2 \Leftrightarrow x \leq 2, \text{ pois}$$

$$2^x \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$$

e)  $3^{2x} - 3^{x+1} > 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^{2x} - 3 \cdot 3^x - 3^x + 3 > 0$

Fazendo  $3^x = y$ , temos:

$$y^2 - 3y - y + 3 > 0 \Leftrightarrow (y < 1 \text{ ou } y > 3) \Rightarrow (3^x < 1 \text{ ou } 3^x > 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x < 0 \text{ ou } x > 1)$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 1\}$$

f)  $2^x(2^x + 1) < 2 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^x - 2 < 0$

Fazendo  $2^x = y$ , temos:

$$y^2 + y - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < y < 1 \Rightarrow -2 < 2^x < 2^0 \Leftrightarrow x < 0, \text{ pois}$$

$$2^x > -2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$



g)  $25^x + 6 \cdot 5^x + 5 > 0 \Leftrightarrow 5^{2x} + 6 \cdot 5^x + 5 > 0$   
 Fazendo  $5^x = y$ , temos:  
 $y^2 + 6y + 5 > 0 \Leftrightarrow (y < -5 \text{ ou } y > -1) \Rightarrow (5^x < -5 \text{ ou } 5^x > -1)$ ,  
 $5^x < -5$  impossível e  $5^x > -1, \forall x \in \mathbb{R}$ .  
 $S = \mathbb{R}$

h)  $3^x(3^x + 6) < 3(2 \cdot 3^{x-1} - 3) \Leftrightarrow 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 9 < 0$   
 Fazendo  $3^x = y$ , temos:  
 $y^2 - 4y + 9 < 0; \forall y \in \mathbb{R} \ y^2 - 4y + 9 > 0$ .  
 $S = \emptyset$

i)  $2^{x+3} + 2^{-x} < 6 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 1 < 0$   
 Fazendo  $2^x = y$ , temos:  
 $8y^2 - 6y + 1 < 0 \Rightarrow \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-2} < 2^x < 2^{-1} \Leftrightarrow -2 < x < -1$ .  
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1\}$

j)  $3(3^x - 1) \geq 1 - 3^{-x} \Leftrightarrow 3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 1 \geq 0$   
 Fazendo  $3^x = y$ , temos:  
 $3y^2 - 4y + 1 \geq 0 \Rightarrow \left(y \leq \frac{1}{3} \text{ ou } y \geq 1\right) \Rightarrow \left(3^x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } 3^x \geq 1\right) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0)$ .  
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0\}$ .

k)  $4^{x+\frac{3}{2}} - 2^{x+2} \geq 2^{x+1} - 1 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x - 2 \cdot 2^x + 1 \geq 0$   
 Fazendo  $2^x = y$ , temos:  
 $8y^2 - 6y + 1 \geq 0 \Rightarrow \left(y \leq \frac{1}{4} \text{ ou } y \geq \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(2^x \leq 2^{-2} \text{ ou } 2^x \geq 2^{-1}\right) \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (x \leq -2 \text{ ou } x \geq -1)$ .  
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq -1\}$

l)  $e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e < 0 \Leftrightarrow e^{2x} - (e+1)e^x + e < 0$   
 Fazendo  $e^x = y$ , temos:  
 $y^2 - (e+1)y + e < 0 \Rightarrow 1 < y < e \Rightarrow e^0 < e^x < e \Leftrightarrow 0 < x < 1$ .  
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

**126.**  $2^{2x+2} - 0,75 \cdot 2^{x+2} < 1 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 1 < 0$   
 Fazendo  $2^x = y$ , temos:  
 $4y^2 - 3y - 1 < 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} < y < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < 2^x < 1 \Rightarrow x < 0$ , pois  
 $2^x > -\frac{1}{4} \forall x \in \mathbb{R}$ .  
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

**127.**  $2^{x+5} + 3^x < 3^{x+2} + 2^{x+2} + 2^x \Leftrightarrow 2^x(2^5 - 2^2 - 1) - 3^x(-1 + 3^2) < 0 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x > 3$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$$

**128.**  $\frac{e^x + 1}{1 - x^2} < 0$

Como  $e^x + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , devemos ter:  $1 - x^2 < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x < -1 \text{ ou } x > 1)$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}$$

**130.** a)  $x^{5x-2} > 1$

1º caso:  $\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^{-2} > 1 \text{ (n\~ao se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^3 > 1 \text{ (falso)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se  $x > 1$  (I), temos:

$$x^{5x-2} > x^0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{5} \text{ (II)}$$

$$\text{(I)} \cap \text{(II)} \Rightarrow x > 1$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$  (III), temos:

$$x^{5x-2} > x^0 \Leftrightarrow 5x - 2 < 0 \Rightarrow x < \frac{2}{5} \text{ (IV)}$$

$$\text{(III)} \cap \text{(IV)} \Rightarrow 0 < x < \frac{2}{5}$$

$$S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{5}\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{5} \text{ ou } x > 1\right\}$$

b)  $x^{4x-3} < 1$

1º caso:  $\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^{-3} < 1 \text{ (n\~ao se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^1 < 1 \text{ (falso)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se  $x > 1$  (I), temos:

$$x^{4x-3} < x^0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{4} \text{ (II)}$$

$$\text{(I)} \cap \text{(II)} \Rightarrow S_2 = \emptyset$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$  (III), temos:

$$x^{4x-3} < x^0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{4} \text{ (IV)}$$

$$\textcircled{\text{III}} \cap \textcircled{\text{IV}} \Rightarrow \frac{3}{4} < x < 1$$

$$S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} < x < 1 \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} < x < 1 \right\}$$

c)  $x^{2x^2+x-1} < 1$

1º caso:  $\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^{-1} < 1 \text{ (não se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^2 < 1 \text{ (falso)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se  $x > 1$   $\textcircled{\text{I}}$ , temos:

$$x^{2x^2+x-1} < x^0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2} \textcircled{\text{II}}$$

$$\textcircled{\text{I}} \cap \textcircled{\text{II}} \Rightarrow S_2 = \emptyset$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$   $\textcircled{\text{III}}$ , temos:

$$x^{2x^2+x-1} < x^0 \Leftrightarrow \left( x < -1 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \right) \textcircled{\text{IV}}$$

$$\textcircled{\text{III}} \cap \textcircled{\text{IV}} \Rightarrow S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1 \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1 \right\}$$

d)  $x^{2x^2-5x-3} > 1$

1º caso:  $\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^{-3} > 1 \text{ (não se define)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-6} > 1 \text{ (falso)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se  $x > 1$   $\textcircled{\text{I}}$ , temos:

$$x^{2x^2-5x-3} > x^0 \Leftrightarrow \left( x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 3 \right) \textcircled{\text{II}}$$

$$\textcircled{\text{I}} \cap \textcircled{\text{II}} \Rightarrow S_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 3 \}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$   $\textcircled{\text{III}}$ , temos:

$$x^{2x^2-5x-3} > x^0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x < 3 \textcircled{\text{IV}}$$

$$\textcircled{\text{III}} \cap \textcircled{\text{IV}} \Rightarrow S_3 = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 3 \}$$

e)  $x^{3x^2-7x+2} \leq 1$

1º caso:  $\left. \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^2 \leq 1 \text{ (verdadeiro)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-2} \leq 1 \text{ (verdadeiro)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \{0, 1\}$

2º caso: Se  $x > 1$   $\textcircled{\text{I}}$ , temos:

$$x^{3x^2-7x+2} \leq x^0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 2 \textcircled{\text{II}}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$   $\textcircled{III}$ , temos:

$$x^{3x^2 - 7x + 2} \leq x^0 \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 2\right) \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{3}\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } 1 \leq x \leq 2\right\}$$

f)  $x^{4x^2 - 11x + 6} \geq 1$

1º caso:  $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^6 \geq 1 \text{ (falso)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-1} \geq 1 \text{ (verdadeiro)} \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 = \{1\}$

2º caso: Se  $x > 1$   $\textcircled{I}$ , temos:

$$x^{4x^2 - 11x + 6} \geq x^0 \Leftrightarrow \left(x \leq \frac{3}{4} \text{ ou } x \geq 2\right) \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$   $\textcircled{III}$ , temos:

$$x^{4x^2 - 11x + 6} \geq x^0 \Leftrightarrow \frac{3}{4} \leq x \leq 2 \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} \leq x < 1\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\right\}$$

**131.**

$$|x|^{3x^2 - 4x - 4} > 1$$

1º caso:  $\left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^{-4} > 1 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-5} > 1 \text{ (F)} \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso:  $|x| > 1$ , ou seja,  $x < -1$  ou  $x > 1$   $\textcircled{I}$

Temos:

$$|x|^{3x^2 - 4x - 4} > 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 > 0 \Leftrightarrow \left(x < -\frac{2}{3} \text{ ou } x > 2\right) \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$$

3º caso:  $0 < |x| < 1$ , ou seja,  $-1 < x < 1$  e  $x \neq 0$   $\textcircled{III}$

Temos:

$$|x|^{3x^2 - 4x - 4} > 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3} < x < 2\right) \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < 1 \text{ e } x \neq 0\right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } \left(-\frac{2}{3} < x < 1 \text{ e } x \neq 0\right) \text{ ou } x > 2\right\}$$

132. a)  $x^{2x+4} < x$

1º caso:  $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^4 < 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^6 < 1 \text{ (F)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se  $x > 1$  (I), temos:

$$x^{2x+4} < x^1 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2} \text{ (II)}$$

$$\text{(I)} \cap \text{(II)} \Rightarrow S_2 = \emptyset$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$  (III), temos:

$$x^{2x+4} < x^1 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2} \text{ (IV)}$$

$$\text{(III)} \cap \text{(IV)} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$$

b)  $x^{4x-1} \geq x$

1º caso:  $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^{-1} \geq 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^3 \geq 1 \text{ (V)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \{1\}$

2º caso: Se  $x > 1$  (I), temos:

$$x^{4x-1} \geq x^1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \text{ (II)}$$

$$\text{(I)} \cap \text{(II)} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 1\}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$  (III), temos:

$$x^{4x-1} \geq x^1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \text{ (IV)}$$

$$\text{(III)} \cap \text{(IV)} \Rightarrow S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 1 \right\}$$

c)  $x^{4x^2-17x+5} < x$

1º caso:  $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^5 < 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-8} < 1 \text{ (F)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se  $x > 1$  (I), temos:

$$x^{4x^2-17x+5} < x^1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 4 \text{ (II)}$$

$$\text{(I)} \cap \text{(II)} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 1 < x < 4\}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$  (III), temos:

$$4x^2 - 17x + 4 > 0 \Leftrightarrow \left( x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 4 \right) \text{ (IV)}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < \frac{1}{4} \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < \frac{1}{4} \text{ ou } 1 < x < 4 \right\}$$

d)  $x^{5x^2 - 11x + 3} > x$

1º caso:  $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^3 > 0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^{-3} > 1 \text{ (F)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se  $x > 1$  (I), temos:

$$x^{5x^2 - 11x + 3} > x^1 \Leftrightarrow \left( x < \frac{1}{5} \text{ ou } x > 2 \right) \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 2\}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$  (III), temos:

$$5x^2 - 11x + 2 < 0 \Leftrightarrow \left( \frac{1}{5} < x < 2 \right) \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid \frac{1}{5} < x < 1 \right\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \left\{ x \in \mathbb{R}_+ \mid \frac{1}{5} < x < 1 \text{ ou } x > 2 \right\}$$

e)  $x^{x^2 - 5x + 7} \leq x$

1º caso:  $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^7 \leq 0 \text{ (V)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^3 \leq 1 \text{ (V)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \{0, 1\}$

2º caso: Se  $x > 1$  (I), temos:

$$x^{x^2 - 5x + 7} \leq x^1 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 3 \textcircled{II}$$

$$\textcircled{I} \cap \textcircled{II} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 2 \leq x \leq 3\}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$  (III), temos:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3) \textcircled{IV}$$

$$\textcircled{III} \cap \textcircled{IV} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$$

**133.** a)  $x^{(x^2)} > x^{2x}$

1º caso:  $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^0 > 0^0 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^1 > 1^1 \text{ (F)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se  $x > 1$  (I), temos:

$$x^{x^2} > x^{2x} \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow (x < 0 \text{ ou } x > 2) \textcircled{II}$$

$$\textcircled{\text{I}} \cap \textcircled{\text{II}} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 2\}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$   $\textcircled{\text{III}}$ , temos:

$$x^{x^2} > x^{2x} \Leftrightarrow 0 < x < 2 \textcircled{\text{IV}}$$

$$\textcircled{\text{III}} \cap \textcircled{\text{IV}} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$$

b)  $x^2 < x^{x^2 - 7x + 8}$

1º caso:  $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^2 < 0^8 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1^2 < 1^2 \text{ (F)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \emptyset$

2º caso: Se  $x > 1$   $\textcircled{\text{I}}$ , temos:

$$x^2 < x^{x^2 - 7x + 8} \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 > 0 \Leftrightarrow (x < 1 \text{ ou } x > 6) \textcircled{\text{II}}$$

$$\textcircled{\text{I}} \cap \textcircled{\text{II}} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 6\}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$   $\textcircled{\text{III}}$ , temos:

$$x^2 < x^{x^2 - 7x + 8} \Leftrightarrow 1 < x < 6 \textcircled{\text{IV}}$$

$$\textcircled{\text{III}} \cap \textcircled{\text{IV}} \Rightarrow S_3 = \emptyset$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x > 6\}$$

c)  $x^{x^2 - x - 2} \geq x^4$

1º caso:  $\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 0^{-2} \geq 0^4 \text{ (F)} \\ x = 1 \Rightarrow 1 \geq 1 \text{ (V)} \end{array} \right\} \Rightarrow S_1 = \{1\}$

2º caso: Se  $x > 1$   $\textcircled{\text{I}}$ , temos:

$$x^{x^2 - x - 2} \geq x^4 \Leftrightarrow (x \leq -2 \text{ ou } x \geq 3) \textcircled{\text{II}}$$

$$\textcircled{\text{I}} \cap \textcircled{\text{II}} \Rightarrow S_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid x \geq 3\}$$

3º caso: Se  $0 < x < 1$   $\textcircled{\text{III}}$ , temos:

$$x^2 - x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow (-2 \leq x \leq 3) \textcircled{\text{IV}}$$

$$\textcircled{\text{III}} \cap \textcircled{\text{IV}} \Rightarrow S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x < 1\}$$

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \{x \in \mathbb{R}_+ \mid 0 < x \leq 1 \text{ ou } x \geq 3\}$$

## CAPÍTULO III — Logaritmos

135. a)  $\log_4 16 = x \Leftrightarrow 4^x = 16 \Leftrightarrow 4^x = 4^2 \Leftrightarrow x = 2$

$$b) \log_3 \frac{1}{9} = x \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-2} \Leftrightarrow x = -2$$

$$c) \log_{81} 3 = x \Leftrightarrow 81^x = 3 \Leftrightarrow 3^{4x} = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$d) \log_{\frac{1}{2}} 8 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^3 \Leftrightarrow x = -3$$

$$e) \log_7 \frac{1}{7} = x \Leftrightarrow 7^x = \frac{1}{7} \Leftrightarrow 7^x = 7^{-1} \Leftrightarrow x = -1$$

$$f) \log_{27} 81 = x \Leftrightarrow 27^x = 81 \Leftrightarrow 3^{3x} = 3^4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$g) \log_{125} 25 = x \Leftrightarrow 125^x = 25 \Leftrightarrow 5^{3x} = 5^2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$h) \log_{\frac{1}{4}} 32 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 32 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$i) \log_9 \frac{1}{27} = x \Leftrightarrow 9^x = \frac{1}{27} \Leftrightarrow 3^{2x} = 3^{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$j) \log_{0,25} 8 = x \Leftrightarrow (0,25)^x = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 8 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$k) \log_{25} 0,008 = x \Leftrightarrow 25^x = 0,008 \Leftrightarrow 5^{2x} = 5^{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$l) \log_{0,01} 0,001 = x \Leftrightarrow (0,01)^x = 0,001 \Leftrightarrow 10^{-2x} = 10^{-3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$136. \log_{10} \frac{M_1}{M_2} = R_1 - R_2 = 8 - 6 = 2 \Rightarrow \frac{M_1}{M_2} = 10^2 = 100$$

$$137. a) \log_2 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 2^x = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$b) \log_{\sqrt[3]{7}} 49 = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{7})^x = 7^2 \Leftrightarrow x = 6$$

$$c) \log_{100} \sqrt[3]{10} = x \Leftrightarrow 100^x = \sqrt[3]{10} \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$d) \log_{\sqrt{8}} \sqrt{32} = x \Leftrightarrow (\sqrt{8})^x = \sqrt{32} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$e) \log_{\sqrt[3]{5}} \sqrt[4]{5} = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{5})^x = \sqrt[4]{5} \Leftrightarrow 5^{\frac{x}{3}} = 5^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$f) \log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9} = x \Leftrightarrow (\sqrt{27})^x = \sqrt[3]{9} \Leftrightarrow 3^{\frac{3x}{2}} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{4}{9}$$

$$g) \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{27} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x = \sqrt{27} \Leftrightarrow 3^{-\frac{x}{2}} = 3^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -3$$



$$\text{h) } \log_{\sqrt[3]{4}} \frac{1}{\sqrt{8}} = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{4})^x = \frac{1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow 2^{\frac{2x}{3}} = 2^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{4}$$

$$\text{i) } \log_{\sqrt[4]{3}} \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = x \Leftrightarrow (\sqrt[4]{3})^x = \frac{3}{\sqrt[3]{3}} \Leftrightarrow 3^{\frac{x}{4}} = 3^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{8}{3}$$

$$\mathbf{138.} \quad \log_{\frac{3}{5}} \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x = \sqrt[3]{\frac{25}{9}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$V = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

$$\mathbf{139.} \quad \text{a) } \log_{100} 0,001 = x \Leftrightarrow 100^x = 0,001 \Leftrightarrow 10^{2x} = 10^{-3} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$$

$$\log_{1,5} \frac{4}{9} = y \Leftrightarrow (1,5)^y = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^y = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow y = -2$$

$$\log_{1,25} 0,64 = z \Leftrightarrow (1,25)^z = 0,64 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^z = \frac{16}{25} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2} \Leftrightarrow z = -2$$

$$S = x + y - z = -\frac{3}{2} - 2 + 2 = -\frac{3}{2}$$

$$\text{b) } \log_8 \sqrt{2} = x \Leftrightarrow 8^x = \sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$\log_{\sqrt{2}} 8 = y \Leftrightarrow (\sqrt{2})^y = 8 \Leftrightarrow 2^{\frac{y}{2}} = 2^3 \Leftrightarrow y = 6$$

$$\log_{\sqrt{2}} \sqrt{8} = z \Leftrightarrow (\sqrt{2})^z = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2^{\frac{z}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow z = 3$$

$$S = x + y - z = \frac{1}{6} + 6 - 3 = \frac{19}{6}$$

$$\text{c) } \log_{\sqrt[3]{9}} \sqrt{\frac{1}{27}} = x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{9})^x = \sqrt{\frac{1}{27}} \Leftrightarrow 3^{\frac{2x}{3}} = 2^{-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = -\frac{9}{4}$$

$$\log_{\sqrt[3]{0,5}} \sqrt{8} = y \Leftrightarrow (\sqrt[3]{0,5})^y = \sqrt{8} \Leftrightarrow 2^{-\frac{y}{3}} = 2^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow y = -\frac{9}{2}$$

$$\log_{\sqrt[3]{100}} \sqrt[6]{0,1} = z \Leftrightarrow (\sqrt[3]{100})^z = \sqrt[6]{0,1} \Leftrightarrow 10^{\frac{2z}{3}} = 10^{-\frac{1}{6}} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{4}$$

$$S = x - y + z = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - \frac{1}{4} = 2$$

$$\mathbf{140.} \quad \log_4 (\log_3 9) = \log_4 2 = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 (\log_{81} 3) = \log_2 \frac{1}{4} = -2$$

$$\log_{0,8} (\log_{16} 32) = \log_{0,8} \frac{5}{4} = x \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = -1$$

$$S = \frac{1}{2} - 2 - 1 = -\frac{5}{2}$$

**141.** a)  $\text{antilog}_3 4 = x \Leftrightarrow \log_3 x = 4 \Leftrightarrow x = 3^4 = 81$

b)  $\text{antilog}_{16} \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow \log_{16} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 16^{\frac{1}{2}} = 4$

c)  $\text{antilog}_3 (-2) = x \Leftrightarrow \log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

d)  $\text{antilog}_{\frac{1}{2}} (-4) = x \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = -4 \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

**142.**  $2^{\log_3(x+4)} = 8 = 2^3 \Leftrightarrow \log_3(x+4) = 3 \Leftrightarrow x+4 = 3^3 \Leftrightarrow x = 23$

**144.** a)  $3^{\log_3 2} = 2$

b)  $5^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$

c)  $5^{\log_{25} 2} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_{25} 2} = (25^{\log_{25} 2})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

d)  $8^{\log_4 5} = \left(4^{\frac{3}{2}}\right)^{\log_4 5} = (4^{\log_4 5})^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{5}$

e)  $2^1 + \log_2 5 = 2^1 \cdot 2^{\log_2 5} = 2 \cdot 5 = 10$

f)  $3^2 - \log_3 6 = 3^2 \cdot 3^{-\log_3 6} = 3^2 \cdot (3^{\log_3 6})^{-1} = 3^2 \cdot 6^{-1} = \frac{3}{2}$

g)  $8^1 + \log_2 3 = 8^1 \cdot 8^{\log_2 3} = 8^1 \cdot (2^{\log_2 3})^3 = 8 \cdot 3^3 = 216$

h)  $9^2 - \log_3 \sqrt{2} = 9^2 \cdot 9^{-\log_3 \sqrt{2}} = 9^2 \cdot (3^{\log_3 \sqrt{2}})^{-2} = 9^2 \cdot (\sqrt{2})^{-2} = \frac{81}{2}$

**145.** a)  $\text{antilog}_2 (\log_2 3) = x \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 3 \Leftrightarrow x = 3$

b)  $\text{antilog}_3 (\log_3 5) = x \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 5$

**146.**  $A = 5^{\log_{25} 2} = (\sqrt{25})^{\log_{25} 2} = (25^{\log_{25} 2})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$

$$A^3 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

**147.**  $4^{\log_2 A} = (2^2)^{\log_2 A} = (2^{\log_2 A})^2 = A^2$

então

$$A^2 + 2A - 2 = 0 \Rightarrow A = -1 \pm \sqrt{3}$$

mas  $A > 0$ , então  $A = -1 + \sqrt{3}$ .

**148.**  $\log_{\sqrt[3]{9}} x = 0,75 \Leftrightarrow x = (\sqrt[3]{9})^{0,75} = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} = 3^{\frac{1}{2}}$   
 $x^2 - 1 = 3 - 1 = 2$

**149.**  $\log_{16} x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = (16)^{\frac{2}{3}} = (2^4)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{8}{3}}$   
 $\log_{\frac{1}{4}} x = \log_{\frac{1}{4}} 2^{\frac{8}{3}} = y \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^y = 2^{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow 2^{-2y} = 2^{\frac{8}{3}} \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}$

**150.**  $\log_a x = 4 \Leftrightarrow a^4 = x$  (1)  
 $\log_{\frac{a}{3}} x = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{3}\right)^8 = x \Leftrightarrow a^8 = 3^8 x$  (2)

Substituindo (1) em (2), vem:

$$x^2 = 3^8 x \Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 3^8)$$

Como  $x = 0$  não convém,  $x = 3^8 = 6561$ .

**151.**  $\log_{2\sqrt{3}} 144 = x \Leftrightarrow (2\sqrt{3})^x = 144 \Leftrightarrow 2^x \cdot 3^{\frac{x}{2}} = 2^4 \cdot 3^2 \Leftrightarrow x = 4$

**152.**  $\log_x \sqrt{2} = -1 \Leftrightarrow x^{-1} = \sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**154.** a)  $\log_5 \left(\frac{5a}{bc}\right) = \log_5 (5a) - \log_5 (bc) = 1 + \log_5 a - \log_5 b - \log_5 c$

b)  $\log_3 \left(\frac{ab^2}{c}\right) = \log_3 (ab^2) - \log_3 c = \log_3 a + 2 \cdot \log_3 b - \log_3 c$

c)  $\log_2 \left(\frac{a^2 \sqrt{b}}{\sqrt[3]{c}}\right) = \log_2 (a^2 \sqrt{b}) - \log_2 \sqrt[3]{c} =$

$$= 2 \cdot \log_2 a + \frac{1}{2} \cdot \log_2 b - \frac{1}{3} \cdot \log_2 c$$

d)  $\log_3 \left(\frac{ab^3}{c \cdot \sqrt[3]{a^2}}\right) = \log_3 (ab^3) - \log_3 (c \sqrt[3]{a^2}) =$

$$= \log_3 a + 3 \cdot \log_3 b - \log_3 c - \frac{2}{3} \cdot \log_3 a =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \log_3 a + 3 \cdot \log_3 b - \log_3 c$$

e)  $\log \frac{\sqrt{ab^3}}{c^2} = \frac{1}{2} \cdot \log \left(\frac{ab^3}{c^2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \log (ab^3) - \frac{1}{2} \cdot \log c^2 =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log a + \frac{3}{2} \cdot \log b - \log c$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \log \sqrt[3]{\frac{a}{b^2 \sqrt{c}}} &= \frac{1}{3} \cdot \log \left( \frac{a}{b^2 \sqrt{c}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \log a - \frac{1}{3} \cdot \log (b^2 \sqrt{c}) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \log a - \frac{2}{3} \cdot \log b - \frac{1}{6} \cdot \log c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \log_2 \sqrt{\frac{4a\sqrt{ab}}{b^3 \sqrt[3]{a^2 b}}} &= \frac{1}{2} \cdot \log_2 \frac{4a\sqrt{ab}}{b^3 \sqrt[3]{a^2 b}} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log_2 (4a\sqrt{ab}) - \frac{1}{2} \cdot \log_2 (b^3 \sqrt[3]{a^2 b}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \log_2 4 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 a + \frac{1}{2} \cdot \log_2 \sqrt{ab} - \frac{1}{2} \cdot \log_2 b - \frac{1}{2} \cdot \log_2 \sqrt[3]{a^2 b} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \log_2 a + \frac{1}{4} \cdot \log_2 a + \frac{1}{4} \cdot \log_2 b - \frac{1}{2} \cdot \log_2 b - \frac{2}{6} \cdot \log_2 a - \\ &\quad - \frac{1}{6} \cdot \log_2 b = 1 + \frac{5}{12} \cdot \log_2 a - \frac{5}{12} \cdot \log_2 b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } \log \left( \sqrt[3]{\frac{a^4 \sqrt{ab}}{b^2 \sqrt[3]{bc}}} \right)^2 &= \frac{2}{3} \cdot \log \left( \frac{a^4 \sqrt{ab}}{b^2 \sqrt[3]{bc}} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \log (a^4 \sqrt{ab}) - \frac{2}{3} \cdot \log (b^2 \sqrt[3]{bc}) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \log a^4 + \frac{2}{3} \cdot \log \sqrt{ab} - \frac{2}{3} \cdot \log b^2 - \frac{2}{3} \cdot \log \sqrt[3]{bc} = \\ &= \frac{8}{3} \cdot \log a + \frac{2}{6} \cdot \log a + \frac{2}{6} \cdot \log b - \frac{4}{3} \cdot \log b - \frac{2}{9} \cdot \log b - \frac{2}{9} \cdot \log c = \\ &= 3 \cdot \log a - \frac{11}{9} \cdot \log b - \frac{2}{9} \cdot \log c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{155. } \log m &= \log \left( \frac{bc}{d^2} \right) = \\ &= \log (bc) - \log d^2 = \log b + \log c - 2 \cdot \log d \end{aligned}$$

$$\text{156. } \log x = \log \left( \frac{\sqrt{a}}{bc} \right) = \log \sqrt{a} - \log (bc) = \frac{1}{2} \cdot \log a - \log b - \log c$$

$$\begin{aligned} \text{157. a) } \log_2 \frac{2a}{(a+b)(a-b)} &= \log_2 (2a) - \log_2 [(a+b)(a-b)] = \\ &= 1 + \log_2 a - \log_2 (a+b) - \log_2 (a-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \log_3 \frac{a^2 \sqrt{ab}}{\sqrt[5]{(a+b)^3}} &= \log_3 (a^2 \sqrt{ab}) - \log_3 \sqrt[5]{(a+b)^3} = \\ &= \log_3 a^2 + \log_3 \sqrt{bc} - \frac{3}{5} \cdot \log_3 (a+b) = \\ &= 2 \cdot \log_3 a + \frac{1}{2} \cdot \log_3 b + \frac{1}{2} \cdot \log_3 c - \frac{3}{5} \cdot \log_3 (a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \log \left( c \cdot \sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}} \right) &= \log c + \log \sqrt[3]{\frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}}} = \\
 &= \log c + \frac{1}{3} \cdot \log \frac{a(a+b)^2}{\sqrt{b}} = \\
 &= \log c + \frac{1}{3} \cdot \log [a(a+b)^2] - \frac{1}{3} \cdot \log \sqrt{b} = \\
 &= \log c + \frac{1}{3} \cdot \log a + \frac{2}{3} \cdot \log (a+b) - \frac{1}{6} \cdot \log b \\
 \text{d) } \log \frac{\sqrt[5]{a(a-b)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} &= \log \sqrt[5]{a(a-b)^2} - \log \sqrt{a^2+b^2} = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \log (a(a-b)^2) - \frac{1}{2} \cdot \log (a^2+b^2) = \\
 &= \frac{1}{5} \cdot \log a + \frac{2}{5} \cdot \log (a-b) - \frac{1}{2} \cdot \log (a^2+b^2)
 \end{aligned}$$

- 159.**
- a)  $\log_2 a + \log_2 b - \log_2 c = \log_2 (ab) - \log_2 c =$   
 $= \log_2 \frac{ab}{c}$ , então  $E = \frac{ab}{c}$ .
- b)  $2 \cdot \log a - \log b - 3 \cdot \log c = \log a^2 - \log b - \log c^3 =$   
 $= \log a^2 - \log (bc^3) = \log \frac{a^2}{bc^3}$ , então  $E = \frac{a^2}{bc^3}$ .
- c)  $2 - \log_3 a + 3 \cdot \log_3 b - 2 \cdot \log_3 c =$   
 $= \log_3 3^2 - \log_3 a + \log_3 b^3 - \log_3 c^2 =$   
 $= \log_3 (3^2 \cdot b^3) - \log_3 (ac^2) = \log_3 \frac{9b^3}{ac^2}$ , então  $E = \frac{9b^3}{ac^2}$ .
- d)  $\frac{1}{2} \cdot \log a - 2 \cdot \log b - \frac{1}{3} \cdot \log c =$   
 $= \log \sqrt{a} - \log b^2 - \log \sqrt[3]{c} =$   
 $= \log \sqrt{a} - \log (b^2 \sqrt[3]{c}) = \log \frac{\sqrt{a}}{b^2 \sqrt[3]{c}}$ ,  
 então  $E = \frac{\sqrt{a}}{b^2 \sqrt[3]{c}}$ .
- e)  $\frac{1}{3} \cdot \log a - \frac{1}{2} \cdot \log c - \frac{3}{2} \cdot \log b =$   
 $= \log \sqrt[3]{a} - \log \sqrt{c} - \log \sqrt{b^3} =$   
 $= \log \sqrt[3]{a} - \log \sqrt{cb^3} = \log \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3c}}$

$$\text{então } E = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^3 c}}.$$

$$\begin{aligned} \text{f) } 2 + \frac{1}{3} \cdot \log_2 a + \frac{1}{6} \cdot \log_2 b - \log_2 c &= \\ &= \log_2 4 + \log_2 \sqrt[3]{a} + \log_2 \sqrt[6]{b} - \log_2 c = \\ &= \log_2 (4 \sqrt[3]{a} \sqrt[6]{b}) - \log_2 c = \log_2 \frac{4 \sqrt[3]{a} \sqrt[6]{b}}{c}, \text{ então } E = \frac{4 \sqrt[3]{a} \sqrt[6]{b}}{c}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \frac{1}{4} (\log a - 3 \cdot \log b - 2 \cdot \log c) &= \frac{1}{4} (\log a - \log b^3 - \log c^2) = \\ &= \frac{1}{4} [\log a - \log (b^3 c^2)] = \frac{1}{4} \cdot \log \frac{a}{b^3 c^2} = \log \sqrt[4]{\frac{a}{b^3 c^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{então } E = \sqrt[4]{\frac{a}{b^3 c^2}}.$$

**160.** a)  $1 + \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b) =$   
 $= \log_2 2 + \log_2 (a + b) - \log_2 (a - b) = \log_2 \frac{2(a + b)}{a - b},$   
então  $E = \frac{2(a + b)}{a - b}.$

b)  $2 \cdot \log (a + b) - 3 \cdot \log a - \log (a - b) =$   
 $= \log (a + b)^2 - \log a^3 - \log (a - b) =$   
 $= \log \frac{(a + b)^2}{a^3(a - b)}, \text{ então } E = \frac{(a + b)^2}{a^3(a - b)}.$

c)  $\frac{1}{2} \cdot \log (a - b) + \log a - \log (a + b) =$   
 $= \log \sqrt{a - b} + \log a - \log (a + b) = \log \frac{a\sqrt{a - b}}{a + b},$   
então  $E = \frac{a\sqrt{a - b}}{a + b}.$

d)  $\frac{1}{2} \cdot \log (a^2 + b^2) - \frac{1}{3} \cdot \log (a + b) + \log (a - b) =$   
 $= \log \sqrt{a^2 + b^2} - \log \sqrt[3]{a + b} + \log (a - b) =$   
 $= \log \frac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt[3]{a + b}}, \text{ então } E = \frac{(a - b)\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt[3]{a + b}}.$

e)  $\frac{3 \log (a - b) - 2 \log (a + b) + 4 \log b}{5} =$   
 $= \log (a - b)^{\frac{3}{5}} - \log (a + b)^{\frac{2}{5}} + \log b^{\frac{4}{5}} =$   
 $= \log \left[ \frac{(a - b)^{\frac{3}{5}} \cdot b^{\frac{4}{5}}}{(a + b)^{\frac{2}{5}}} \right] = \log \left[ \frac{\sqrt[5]{(a - b)^3 \cdot b^4}}{\sqrt[5]{(a + b)^2}} \right] = \log \left( \sqrt[5]{\frac{(a - b)^3 \cdot b^4}{(a + b)^2}} \right)$

- 161.**  $\log x = \log b + \log c^2 - \log \sqrt[3]{a} = \log \left( \frac{bc^2}{\sqrt[3]{a}} \right)$ ,  
então,  $x = \frac{bc^2}{\sqrt[3]{a}}$ .
- 162.** a)  $\log 6 = \log (2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 = a + b$   
 b)  $\log 4 = \log 2^2 = 2 \cdot \log 2 = 2a$   
 c)  $\log 12 = \log (4 \cdot 3) = \log 4 + \log 3 = 2a + b$   
 d)  $\log \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \log 2 = \frac{a}{2}$ .  
 e)  $\log 0,5 = \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 = -a$   
 f)  $\log 20 = \log (2 \cdot 10) = \log 2 + \log 10 = a + 1$   
 g)  $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - a$   
 h)  $\log 15 = \log \frac{3 \cdot 10}{2} = \log 3 + \log 10 - \log 2 = b + 1 - a$
- 163.**  $\text{pH} = \log \frac{1}{\text{H}^+} = \log \frac{1}{10^{-8}} = \log 10^8 = 8$
- 164.**  $\log \frac{125}{\sqrt[5]{2}} = \log \frac{5^3}{\sqrt[5]{2}} = 3 \cdot \log 5 - \frac{1}{5} \cdot \log 2 =$   
 $= 3 \cdot \log \frac{10}{2} - \frac{1}{5} \cdot \log 2 = 3 - 3 \cdot \log 2 - \frac{1}{5} \cdot \log 2 =$   
 $= 3 - \frac{16}{5} \cdot \log 2 = 3 - \frac{16}{5} \cdot (0,3010) = 3 - 0,9632 = 2,0368$
- 165.**  $\log 20 + \log 40 + \log 800 = \log (2 \cdot 10) + \log (4 \cdot 10) + \log (8 \cdot 100) =$   
 $= \log (2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 100) = \log (2^6 \cdot 10^4) = 6 \cdot \log 2 + 4 =$   
 $= 5,806$
- 166.** Fazendo  $\log_a 16 = x$ , vem:  
 $a^x = 16 \Rightarrow \log_2 a^x = \log_2 16 \Rightarrow x \cdot \log_2 a = 4$  (1)  
 Fazendo  $\log_a 4 = y$ , vem:  
 $a^y = 4 \Rightarrow \log_2 a^y = \log_2 4 \Rightarrow y \cdot \log_2 a = 2$  (2)  
 Dividindo (1) por (2), vem:  
 $\frac{x}{y} = \frac{4}{2} = 2.$
- 167.**  $\log \frac{1}{a} + \log \frac{1}{b} = -\log a - \log b = -p$
- 168.**  $\log_2 (a^2 - b^2) = \log_2 [(a + b)(a - b)] = \log_2 (a + b) + \log_2 (a - b) =$   
 $= \log_2 8 + \log_2 (a - b) = 3 + m$

- 169.**  $\log_9 x + \log_9 y = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_9 (xy) = \frac{1}{2} \Rightarrow xy = 9^{\frac{1}{2}} = 3$
- 170.**  $\log_a \sqrt[3]{x^2 y} = \frac{1}{3} \cdot \log_a (x^2 y) = \frac{1}{3} \cdot \log_a x^2 + \frac{1}{3} \cdot \log_a y =$   
 $= \frac{2}{3} \cdot \log_a x + \frac{1}{3} \cdot \log_a y = \frac{2n}{3} + \frac{6n}{3} = \frac{8n}{3}$
- 171.**  $\log_m \frac{64}{2,7} - \log_m 60 = \log_m 64 - \log_m 2,7 - \log_m 60 =$   
 $= \log_m 2^6 - \log_m \left( \frac{3^3}{10} \right) - \log_m (2 \cdot 3 \cdot 10) =$   
 $= 6 \cdot \log_m 2 - 3 \log_m 3 + \log_m 10 - \log_m 2 - \log_m 3 - \log_m 10 =$   
 $= 6a - 3b - a - b = 5a - 4b$
- 172.**  $\operatorname{colog}_2 \frac{1}{32} = x \Rightarrow \log_2 \frac{1}{32} = -x \Rightarrow 2^{-x} = \frac{1}{32} \Rightarrow x = 5$   
 $\log_y 256 = 4 \Rightarrow y^4 = 256 = 2^8 \Rightarrow y = 2^2 = 4$ , então  $x + y = 9$ .
- 173.**  $\log 2^{20} = 20 \cdot \log 2 = 20 \cdot 0,3010300 = 6,0206$
- 174.**  $2^n > 10^4 \Rightarrow \log 2^n > \log 10^4 \Rightarrow n \cdot \log 2 > 4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow n > \frac{4}{\log 2} = \frac{40}{3} \Rightarrow n = 14$
- 176.**  $\log_6 5 = \frac{\log_{20} 5}{\log_{20} 6} = \frac{\log_{20} \frac{20}{4}}{\log_{20} (2 \cdot 3)} = \frac{\log_{20} 20 - \log_{20} 4}{\log_{20} 2 + \log_{20} 3} = \frac{1 - 2a}{a + b}$
- 177.**  $\log_{ab} a = 4 \Rightarrow \log_a (ab) = \frac{1}{4} \Rightarrow 1 + \log_a b = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_a b = -\frac{3}{4}$   
 $\log_{ab} \left( \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} \right) = \frac{\log_a \left( \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} \right)}{\log_a (ab)} = \left( \frac{1}{3} \cdot \log_a a - \frac{1}{2} \cdot \log_a b \right) \cdot 4 =$   
 $= \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) \cdot 4 = \frac{17}{6}$
- 178.**  $\log_{12} 27 = a \Rightarrow 3 \cdot \log_{12} 3 = a \Rightarrow \log_{12} 3 = \frac{a}{3} \Rightarrow \log_3 12 = \frac{3}{a}$   
 $\Rightarrow 2 \cdot \log_3 2 + \log_3 3 = \frac{3}{a} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{3 - a}{2a}$   
 $\log_6 16 = 4 \cdot \log_6 2 = \frac{4 \cdot \log_3 2}{\log_3 6} = \frac{4 \cdot \log_3 2}{\log_3 2 + 1} = \frac{4(3 - a)}{a + 3}$
- 179.**  $\log_{0,04} 125 = \log_{5^{-2}} 5^3 = x \Leftrightarrow 5^{-2x} = 5^3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$



**180.**  $\log_8 m = \frac{\log_2 m}{\log_2 8} = \frac{k}{3}$

**181.**  $\log_9 20 = \frac{\log 20}{\log 9} = \frac{\log 2 + \log 10}{2 \cdot \log 3} = \frac{a + 1}{2b}$

**182.**  $\log_3 5 \cdot \log_{25} 27 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 27}{\log_3 25} = \log_3 5 \cdot \frac{3}{2 \cdot \log_3 5} = \frac{3}{2}$

**183.**  $\log_{\frac{1}{2}} b^2 = \frac{\log_b b^2}{\log_b \frac{1}{a}} = \frac{2}{-\log_b a} = -\frac{2}{m}$

**184.**  $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7 \cdot \log_9 8 \cdot \log_{10} 9 =$   
 $= \frac{\log 2}{\log 3} \cdot \frac{\log 3}{\log 4} \cdot \frac{\log 4}{\log 5} \cdot \frac{\log 5}{\log 6} \cdot \frac{\log 6}{\log 7} \cdot \frac{\log 7}{\log 8} \cdot \frac{\log 8}{\log 9} \cdot \log 9 =$   
 $= \log 2$

**185.**  $\log_b \sqrt{a} = \frac{1}{2} \cdot \log_b a = \frac{1}{2} \cdot \log_b \frac{1}{b} = -\frac{1}{2}$

**186.**  $\log_{35} 28 = \frac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35} = \frac{\log_{14} \left(\frac{14^2}{7}\right)}{\log_{14} (7 \cdot 5)} = \frac{2 - \log_{14} 7}{\log_{14} 7 + \log_{14} 5} =$   
 $= \frac{2 - a}{a + b}$

**187.**  $A = \frac{\log 5}{\log 3} \cdot \frac{\log 27}{\log 4} \cdot \frac{\log \sqrt{2}}{\log 25} = \frac{(\log 5) \cdot (3 \cdot \log 3) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \log 2\right)}{(\log 3) \cdot (2 \cdot \log 2) \cdot (2 \cdot \log 5)} = \frac{3}{8}$

**188.**  $A = (a^{\log_a b})^{\log_b c} \cdot \log_c d = (b^{\log_b c})^{\log_c d} = c^{\log_c d} = d$

**189.** Fazendo  $x = a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$ , vem:

$$\log x = \log a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}} = \frac{\log(\log a)}{\log a} \cdot \log a = \log(\log a),$$

então  $x = \log a$ .

**190.** Sejam  $x$  e  $y$  dois números positivos e diferentes de 1 e seja  $a$  a base do sistema de logaritmos. Temos:

$$\frac{\log_a x}{\log_a y} = \log_y x \text{ para todo } a \text{ com } 0 < a \neq 1.$$

**191.**  $(\log_{ac} b)(1 + \log_a c) = (\log_{ac} b)(\log_a ac) \frac{\log_{ac} b}{\log_{ac} a} = \log_a b$

**192.**  $a = b \cdot c \Rightarrow \log_c a = \log_c (b \cdot c) \Rightarrow \log_c a = \log_c b + \log_c c \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{1}{\log_a c} = \frac{1}{\log_b c} + 1$

**193.** Escrevendo os logaritmos em base a temos:

$$\frac{\log_a c \cdot \log_b c}{(\log_{ab} c)^2} = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_{ab} c \cdot \log_{ab} c} = \frac{\log_a c \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b}}{\frac{\log_a c}{\log_a (ab)} \cdot \frac{\log_a c}{\log_a (ab)}} =$$

$$= \frac{(\log_a (ab))^2}{\log_a b} = \frac{(1 + \log_a b)^2}{\log_a b}, \text{ que é o que queríamos demonstrar.}$$

**194.**  $\log_a d \cdot \log_b d + \log_b d \cdot \log_c d + \log_c d \cdot \log_a d =$   
 $= \frac{1}{\log_d a} \cdot \frac{1}{\log_d b} + \frac{1}{\log_d b} \cdot \frac{1}{\log_d c} + \frac{1}{\log_d c} \cdot \frac{1}{\log_d a} =$   
 $= \frac{\log_d c + \log_d a + \log_d b}{\log_d a \cdot \log_d b \cdot \log_d c} = \frac{\log_d (abc)}{\log_d a \cdot \log_d b \cdot \log_d c} =$   
 $= \frac{\log_a d \cdot \log_b d \cdot \log_c d}{\log_{abc} d}$

**195.**  $a^{\log b} = a^{\frac{\log b}{\log a}} \cdot \log a = a^{\log_a b} \cdot \log a = (a^{\log_a b})^{\log a} = b^{\log a}$

**196.**  $\log_a b^{(\log_c d)} = (\log_c d)(\log_a b) = (\log_a b)(\log_c d) = \log_c d^{(\log_a b)}$

**197.**  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+\log_c(ab)} + \frac{1}{1+\log_b(ac)} + \frac{1}{1+\log_a(bc)} =$   
 $= \frac{1}{\log_c c + \log_c(ab)} + \frac{1}{\log_b b + \log_b(ac)} + \frac{1}{\log_a a + \log_a(bc)} =$   
 $= \frac{1}{\log_c(abc)} + \frac{1}{\log_b(abc)} + \frac{1}{\log_a(abc)} = \log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c =$   
 $= \log_{abc}(abc) = 1$

**198.**  $\frac{\log_a d}{\log_c d} = \frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} \Leftrightarrow \log_a c = \frac{\log_a d - \log_b d}{\log_b d - \log_c d} \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \log_a c \cdot \log_b d - \log_a c \cdot \log_c d = \log_a d - \log_b d \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow \log_a c \cdot \log_b d + \log_b d = \log_a c \cdot \log_c d + \log_a d \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (\log_b d)(1 + \log_a c) = 2 \cdot \log_a d \Leftrightarrow \frac{\log_b d}{\log_a d} \cdot (1 + \log_a c) = 2 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow (\log_b a)(\log_a ac) = 2 \Leftrightarrow \log_a ac = 2 \cdot \log_a b \Leftrightarrow ac = b^2$

**199.**  $\log_q a^a + \log_q b^b + \log_q a^b + \log_q b^a =$   
 $= a \cdot \log_q a + b \cdot \log_q b + b \cdot \log_q a + a \cdot \log_q b =$   
 $= (a + b)(\log_q a + \log_q b) = (a + b) \cdot \log_q (ab) = p \cdot \log_q q = p$

**200.** De fato,

$$\begin{aligned} \log_{a+b} c + \log_{a-b} c &= \frac{1}{\log_c (a+b)} + \frac{1}{\log_c (a-b)} = \\ &= \frac{\log_c (a-b) + \log_c (a+b)}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)} = \frac{\log_c [(a-b)(a+b)]}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)} = \\ &= \frac{\log_c (a^2 - b^2)}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)} \stackrel{\text{Pitágoras}}{=} \frac{\log_c c^2}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)} = \\ &= \frac{2}{\log_c (a+b) \cdot \log_c (a-b)} = 2 \log_{a+b} c \cdot \log_{a-b} c, \text{ que é o que} \\ &\text{queríamos demonstrar.} \end{aligned}$$

**201.** De acordo com o exercício 195, sabemos que  $x^{\log y} = y^{\log x}$ , para quaisquer  $x > 0$ , e  $y > 0$ . Temos, então:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log b} = \frac{a^{\log c}}{b^{\log c}} \cdot \frac{b^{\log a}}{c^{\log a}} \cdot \frac{c^{\log b}}{a^{\log b}} = 1,$$

pois  $a^{\log c} = c^{\log a}$ ,  $b^{\log a} = a^{\log b}$  e  $c^{\log b} = b^{\log c}$ .

**202.**  $x = 10^{\frac{1}{1 - \log z}} \Leftrightarrow \log x = \frac{1}{1 - \log z} \quad (1)$

$$y = 10^{\frac{1}{1 - \log x}} \Leftrightarrow \log y = \frac{1}{1 - \log x} \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem:

$$\log y = \frac{1 - \log z}{-\log z} \Leftrightarrow \log z = \frac{1}{1 - \log y} \Leftrightarrow z = 10^{\frac{1}{1 - \log y}}.$$

**203.** De  $a^b \cdot b^a = b^c \cdot c^b$  resulta:

$$\begin{aligned} \frac{a^b}{c^b} &= \frac{b^c}{b^a} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^b = b^{c-a} \Rightarrow \left(\frac{ab}{c}\right)^b = b^{b+c-a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow b \cdot \log \frac{ab}{c} = (b+c-a) \cdot \log b \Rightarrow \log \frac{ab}{c} = \frac{(b+c-a) \cdot \log b}{b} \quad (I). \end{aligned}$$

Analogamente, de  $a^b \cdot b^a = a^c \cdot c^a$  resulta:

$$\log \frac{ab}{c} = \frac{(a+c-b) \cdot \log a}{b} \quad (II).$$

Comparando (I) e (II), resulta:

$$\frac{(b+c-a) \cdot \log b}{b} = \frac{(a+c-b) \cdot \log a}{a}$$

e daí vem a tese:

$$\frac{a(b+c-a)}{\log a} = \frac{b(a+c-b)}{\log b}.$$

**204.** Notemos que cada parcela do 1º membro é da forma

$$\frac{1}{\log_x 2^{p-1} \cdot \log_x 2^p} = \frac{1}{p(p-1)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}, \text{ em que } p \text{ varia de } 2 \text{ até } n.$$

Temos, usando a sugestão dada:

$$\frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} = \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

$$\frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} = \frac{1}{3 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

$$\frac{1}{\log_x 8 \cdot \log_x 16} = \frac{1}{4 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

etc.

$$\frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \frac{1}{n \cdot (n-1)} \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2}$$

Somando essas igualdades membro a membro, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} + \frac{1}{\log_x 8 \cdot \log_x 16} + \dots + \frac{1}{\log_x 2^{n-1} \cdot \log_x 2^n} = \\ & = \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \right] \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} = \\ & = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{(\log_x 2)^2} \end{aligned}$$

## CAPÍTULO IV — Função logarítmica

**206.** Permutando as variáveis  $x = e^y$ , então  $y = \log_e x$ , em que  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

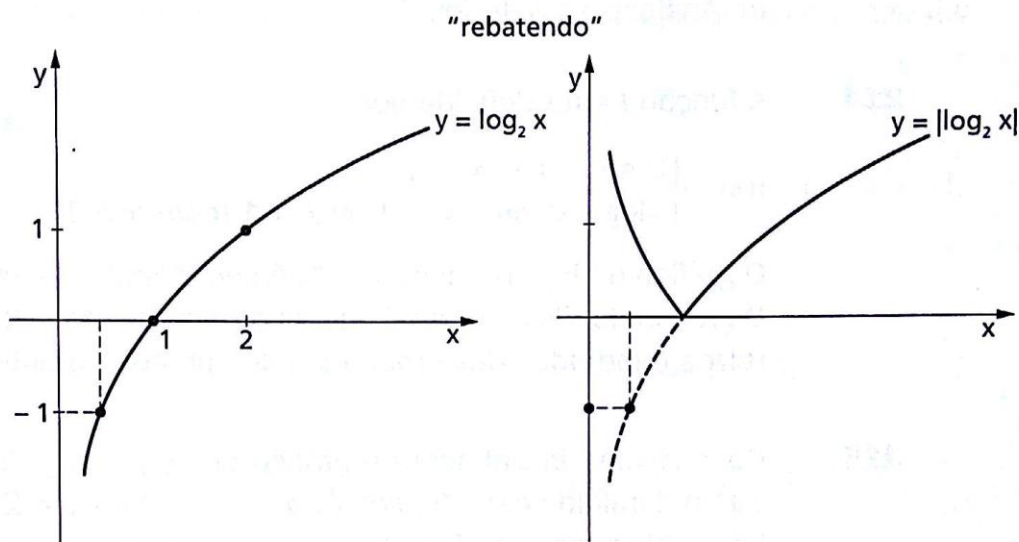
**207.**  $f(e^3) = \log_e \frac{1}{e^3} = \log_e e^{-3} = -3.$

**208.** A função  $f$  é definida pela lei  $f(x^2) = \log_2 x^2.$

Se  $f(x^2) = 2$ , então  $\log_2 x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2.$

**209.** O domínio de cada uma das funções dadas é  $x > 0$  (pois para que o logaritmo seja real devemos ter logaritmando positivo). Assim, em cada uma das funções propostas, basta construir uma tabela de valores de  $x$  e  $y = f(x)$ , atribuindo valores convenientes de  $x$  e tais que  $x > 0.$

- 210.** a) Basta construir a tabela de valores de  $x$  e  $y$ , lembrando que o domínio de  $y = \log_2 |x|$  é:  $|x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ .
- b) Construimos inicialmente o gráfico de  $y = \log_2 x$ ;  $x > 0$ .  
Como queremos o gráfico de  $y = |\log_2 x|$ , basta “rebatendo” a parte do gráfico  $y = \log_2 x$  em que  $y < 0$ . Vejamos:



Notemos que “rebatendo a parte do gráfico em que  $y < 0$ ” equivale a fazer uma nova construção simétrica à anterior em relação ao eixo das abscissas.

- c) Construimos inicialmente o gráfico da função  $g(x) = \log_2 |x|$  (item a) e a partir dele “rebatemos” a parte do gráfico em que  $y < 0$ , obtendo o gráfico de  $y = |\log_2 x|$ .

**211.** Análogo ao item a do exercício anterior.

- 212.** a) Como o domínio dessa função é:  $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ , devemos construir a tabela atribuindo valores convenientes para  $x$  e tais que  $x > 1$ .
- b) O domínio da função é:  $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ . A partir dessa condição, construimos a tabela.
- c) Notemos que  $f(x) = \log_2 x^2 = 2 \log_2 x$ . O gráfico de  $f$  é obtido diretamente do gráfico  $g(x) = \log_2 x$ , notando que, se, por exemplo, o ponto  $(4, 2)$  pertence ao gráfico de  $g$ , então o ponto  $(4, 4)$  pertence ao gráfico de  $f$  (isto é, a ordenada de cada ponto do gráfico de  $g$  fica multiplicada por 2).
- d) Notemos que  $f(x) = \log_2 \sqrt{x} = \log_2 x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 x$ . Procedese de forma análoga ao anterior.

- 213.** a) Construimos inicialmente o gráfico de  $g(x) = \log_2 x$ .  
 Para obtermos o gráfico de  $f(x) = 2 + g(x)$ , deslocamos cada ponto do gráfico da função  $g$  duas unidades “para cima”.  
 Por exemplo, se  $(2, 1)$  pertence ao gráfico de  $g$ , então  $(2, 3)$  pertence ao gráfico de  $f$ .
- b) Análogo ao anterior.

**214.** A função  $f$  está definida por

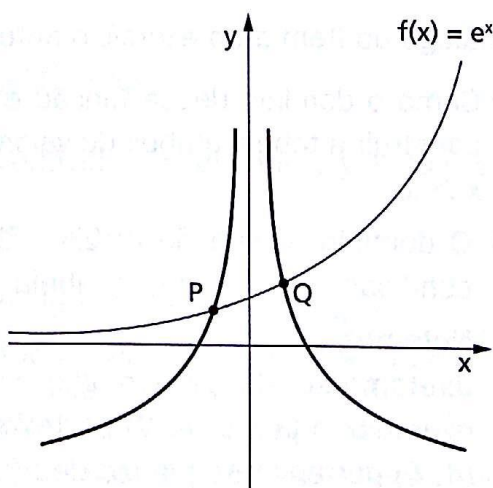
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < x < 1 \\ \sqrt{\log_a |x|} & \text{se } x \leq -1 \text{ ou } x \geq 1 \text{ (com } a > 1) \end{cases}$$

O gráfico de  $\log_a |x|$ , com  $a > 1$ , é semelhante ao exercício 210.

O gráfico de  $\sqrt{\log_a |x|}$  é tal que as ordenadas de seus pontos são as raízes quadradas das ordenadas dos pontos do anterior.

- 215.** Construimos inicialmente o gráfico de  $g(x) = \log_2 |x - 2|$ , notando que o domínio dessa função é:  $|x - 2| > 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ .  
 Para obtermos o gráfico de  $f(x) = |g(x)|$ , basta “rebater” a parte em que  $y < 0$  do gráfico de  $g(x)$ .

**216.** Vamos construir o gráfico das duas funções num mesmo plano cartesiano.



Assim, há 2 pontos comuns (P e Q) aos gráficos das funções dadas.

218. a) Devemos ter:  $1 - 2x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$ ,  $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$ .

b) Devemos ter:  $(4x - 3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq \frac{3}{4}$ ,  $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{4}\right\}$ .

c) Devemos ter:  $\frac{x + 1}{1 - x} > 0$ . Fazendo o quadro-quociente, temos:

$f(x) = x + 1$	-	+	+
$g(x) = 1 - x$	+	+	-
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-	+	-

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$ .

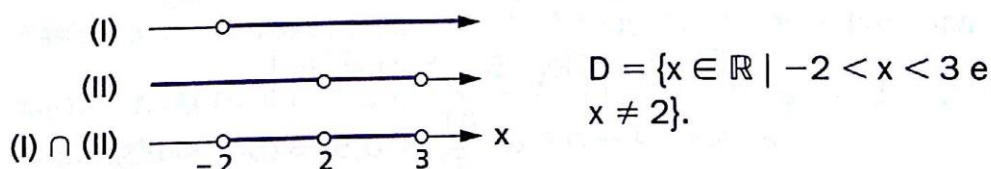
d) Devemos ter:  $x^2 + x - 12 > 0 \Rightarrow x < -4$  ou  $x > 3$ ,  
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -4$  ou  $x > 3\}$ .

219. Devemos ter:  $x^2 - 6x + 9 > 0 \Rightarrow (x - 3)^2 > 0 \Rightarrow x \neq 3$ ,  
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$ .

220. Como queremos que o domínio da função  $f$  seja  $\mathbb{R}$ , devemos ter:  
 $x^2 + Kx + K > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a = 1 > 0$  e  $\Delta < 0$ , isto é:  
 $K^2 - 4 \cdot 1 \cdot K < 0 \Rightarrow K^2 - 4K < 0 \Rightarrow 0 < K < 4$ .

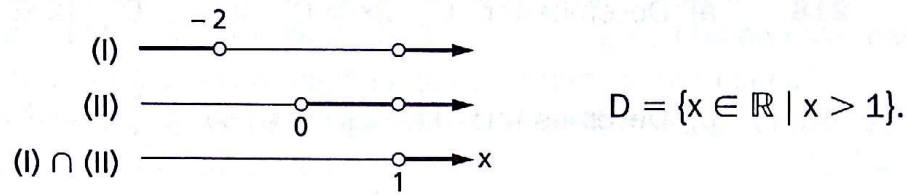
222. a) Devemos ter:  $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ e \\ 0 < 3 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -2 \text{ (I)} \\ e \\ x < 3 \text{ e } x \neq 2 \text{ (II)} \end{cases}$

Fazendo a interseção, vem:



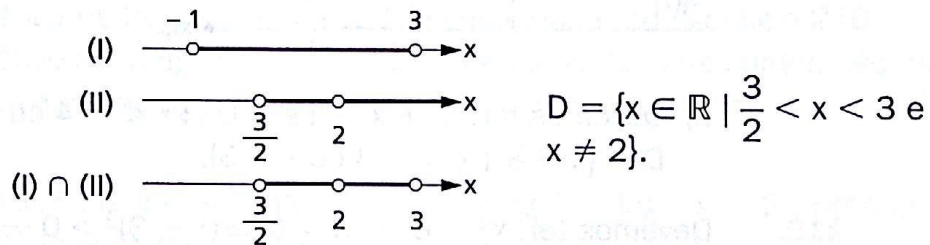
b) Devemos ter:  $\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ e \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ e \\ 0 < x \neq 1 \text{ (II)} \end{cases}$

Fazendo a interseção, vem:



c) Devemos ter: 
$$\begin{cases} 3 + 2x - x^2 > 0 \\ 0 < 2x - 3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 3 & \text{(I)} \\ \frac{3}{2} < x \neq 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Fazendo a interseção, vem:



**CAPÍTULO V** — Equações exponenciais e logarítmicas

- 224.**
- a)  $5^x = 4 \Rightarrow x = \log_5 4, S = \{\log_5 4\}$
  - b)  $3^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \log_3 \frac{1}{2}, S = \left\{ \log_3 \frac{1}{2} \right\}$
  - c)  $7^{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \log_7 2 \Rightarrow \sqrt{x} \Rightarrow x = (\log_7 2)^2, S = \{(\log_7 2)^2\}$
  - d)  $3^{(x^2)} = 5 \Rightarrow \log_3 5 = x^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\log_3 5}$   
 $S = \left\{ -\sqrt{\log_3 5}; +\sqrt{\log_3 5} \right\}$
  - e)  $5^{4x-3} = 0,5 \Leftrightarrow \frac{5^{4x}}{5^3} = 0,5 \Leftrightarrow (5^4)^x = 62,5 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = \log_{625} 62,5, S = \{\log_{625} 62,5\}$
  - f)  $3^{2x+1} = 2 \Leftrightarrow 3^{2x} \cdot 3^1 = 2 \Leftrightarrow (3^2)^x = \frac{2}{3} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = \log_9 \frac{2}{3}, S = \left\{ \log_9 \frac{2}{3} \right\}$



$$g) 7^{2-3x} = 5 \Leftrightarrow \frac{7^2}{7^{3x}} = 5 \Leftrightarrow (7^3)^x = \frac{49}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \log_{343} \frac{49}{5}, S = \left\{ \log_{343} \frac{49}{5} \right\}$$

**225.** Aplicando o logaritmo decimal a ambos os membros, vem:

$$\log a^x = \log b \Leftrightarrow x \cdot \log a = \log b \Rightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$$

$$S = \left\{ \frac{\log b}{\log a} \right\}$$

**227.** Devemos ter:  $A(t) = \frac{A(0)}{2}$ .

$$\text{Daí, } \frac{A(0)}{2} = A(0) \cdot e^{-3t} \Leftrightarrow \frac{1}{(e^t)^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^t = \sqrt[3]{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = \log_e \sqrt[3]{2} = \ell n \sqrt[3]{2}.$$

**228.** A quantidade inicial de rádio é:

$$M(0) = C \cdot e^0 = C.$$

Do enunciado, após 1600 a quantidade de rádio é  $\frac{C}{2}$ , isto é,

$$\frac{C}{2} = C e^{-K \cdot 1600} \Rightarrow K = \ell n 2^{\frac{1}{1600}}$$

Após 100 anos, a quantidade de rádio é:

$$M(100) = C \cdot e^{-100 \cdot \ell n 2^{\frac{1}{1600}}} = C \cdot \left( e^{\ell n 2^{\frac{1}{1600}}} \right)^{-100} =$$

$$= C \cdot \left( 2^{\frac{1}{1600}} \right)^{-100} = C \cdot 2^{-\frac{1}{16}}$$

Assim, a quantidade perdida em 100 anos é dada pela diferença.

$$M(0) - M(100) = C - C \cdot 2^{-\frac{1}{16}} = C \cdot \left( 1 - 2^{-\frac{1}{16}} \right), \text{ isto é, } 1 - 2^{-\frac{1}{16}}$$

da quantidade inicial.

**230.** a)  $2^x = 3^{x+2} \Rightarrow 2^x = 3^x \cdot 3^2 \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} = 3^2 \Rightarrow \left( \frac{2}{3} \right)^x = 9 \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 9$

$$S = \left\{ \log_{\frac{2}{3}} 9 \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 7^{2x-1} &= 3^{3x+4} \Rightarrow \frac{7^{2x}}{7} = 3^{3x} \cdot 3^4 \Rightarrow \frac{(7^2)^x}{(3^3)^x} = 567 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{49}{27}\right)^x = 567 \Rightarrow x = \log_{\frac{49}{27}} 567 \end{aligned}$$

$$S = \left\{ \log_{\frac{49}{27}} 567 \right\}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 5^{x-1} &= 3^{4-2x} \Rightarrow \frac{5^x}{5} = \frac{3^4}{3^{2x}} \Rightarrow 5^x \cdot 9^x = 405 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 45^x = 405 \Rightarrow x = \log_{45} 405 \end{aligned}$$

$$S = \{ \log_{45} 405 \}$$

**231.** a)  $3^x = 2^x + 2^{x+1} \Rightarrow 3^x = 2^x + 2^x \cdot 2 \Rightarrow 3^x = 2^x(1 + 2) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 3 \Rightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 3$

$$S = \left\{ \log_{\frac{3}{2}} 3 \right\}$$

b)  $5^x + 5^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 5^x + 5^x \cdot 5 = 3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 5^x(1 + 5) = 3^x(1 + 3 + 9) \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \frac{13}{6} \Rightarrow x = \log_{\frac{5}{3}} \frac{13}{6}$

$$S = \left\{ \log_{\frac{5}{3}} \frac{13}{6} \right\}$$

c)  $2^{x+1} - 2^x = 3^{x+2} - 3^x \Rightarrow 2^x \cdot 2 - 2^x = 3^x \cdot 3^2 - 3^x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2^x(2 - 1) = 3^x(9 - 1) \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 8 \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} 8$

$$S = \left\{ \log_{\frac{2}{3}} 8 \right\}$$

**232.**  $2^{3x+2} \cdot 3^{2x-1} = 8 \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2^2 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-1} = 8 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 8^x \cdot 9^x = 6 \Rightarrow 72^x = 6 \Rightarrow x = \log_{72} 6$

$$S = \{ \log_{72} 6 \}$$

**233.** a)  $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$ . Seja  $2^x = t$ . Temos:  
 $t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3) \Leftrightarrow (2^x = 2 \text{ ou } 2^x = 3) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = \log_2 3)$ .

$$S = \{1, \log_2 3\}$$

b)  $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 5 = 0$ . Seja  $2^x = t$ . Temos:  
 $t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 5) \Rightarrow (2^x = 1 \text{ ou } 2^x = 5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x = 0 \text{ ou } x = \log_2 5).$$

$$S = \{0, \log_2 5\}$$

c)  $(3^x)^2 - 3^x \cdot 3 - 4 = 0$ . Seja  $3^x = t$ , vem:

$$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t = 4 \text{ ou } t = -1).$$

Como  $3^x > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , vem que  $3^x = 4 \Rightarrow x = \log_3 4$ .

$$S = \{\log_3 4\}$$

d)  $3^{2x} \cdot 3 - 3^x \cdot 3 + 2 = 0$ . Seja  $3^x = t$ . Temos:  $3 \cdot t^2 - 3t + 2 = 0$ .

Como essa equação não tem raízes reais, resulta que não existe  $x$  que a satisfaz. Logo,  $S = \emptyset$ .

e)  $(2^x)^2 \cdot 4 - 2^x \cdot 2^4 + 15 = 0$ . Fazendo  $2^x = t$ , vem:

$$4t^2 - 16t + 15 = 0 \Rightarrow \left(t = \frac{5}{2} \text{ ou } t = \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(2^x = \frac{5}{2} \text{ ou } 2^x = \frac{3}{2}\right) \Rightarrow \left(x = \log_2 \frac{5}{2} \text{ ou } x = \log_2 \frac{3}{2}\right).$$

$$S = \left\{\log_2 \frac{5}{2}, \log_2 \frac{3}{2}\right\}$$

f)  $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29 \Rightarrow 3^x \cdot 3 + \frac{18}{3^x} = 29$

Seja  $3^x = t$ . Temos:

$$3t + \frac{18}{t} = 29 \Leftrightarrow 3t^2 - 29t + 18 = 0 \Rightarrow \left(t = \frac{2}{3} \text{ ou } t = 9\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(3^x = \frac{2}{3} \text{ ou } 3^x = 9\right) \Rightarrow \left(x = \log_3 \frac{2}{3} \text{ ou } x = 2\right).$$

$$S = \left\{\log_3 \frac{2}{3}, 2\right\}$$

**234.** Como  $9^x \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , podemos dividir ambos os membros por  $9^x$ .

Temos:

$$\frac{4^x}{9^x} + \frac{6^x}{9^x} = \frac{9^x}{9^x} \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{3}\right)^x\right]^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.$$

Fazendo  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ , temos:

$$t^2 + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Desprezando a raiz negativa (pois  $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ), temos:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

$$S = \left\{\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$$

**235.** Dividindo ambos os membros por  $49^x$ , temos:

$$\left(\frac{4}{49}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{14}{49}\right)^x + 3 \Rightarrow \left[\left(\frac{2}{7}\right)^x\right]^2 = 2 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^x + 3.$$

Seja  $\left(\frac{2}{7}\right)^x = t$ . Temos:

$$t^2 = 2t + 3 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 3), \text{ donde } \left(\frac{2}{7}\right)^x = 3 \Rightarrow x = \log_{\frac{2}{7}} 3.$$

$$S = \left\{ \log_{\frac{2}{7}} 3 \right\}$$

**236.** Fazendo  $a^{2x} = t$ , vem:

$$t^2 + t = 1 \Rightarrow t = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (n\~ao conv\~em)} \text{ ou } t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Daí,  $a^{2x} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ . Aplicando logaritmo de base  $a$  a ambos os

membros, vem:  $2x = \log_a \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \log_a \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right)$ .

$$S = \left\{ \frac{1}{2} \cdot \log_a \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$$

**237.** 
$$\begin{cases} (64^x)^2 + (64^y)^2 = 40 \\ 64^x \cdot 64^y = 12 \end{cases}$$

Fazendo  $64^x = a$  e  $64^y = b$ , temos: 
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 40 \\ ab = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{b} \end{cases}$$

Substituindo na 1ª equação, temos:

$$b^4 - 40b^2 + 144 = 0 \Rightarrow b = \pm 6 \text{ ou } b = \pm 2.$$

Lembrando que  $b$  deve ser estritamente positivo, temos 2 possibilidades:

$$(I) (b = 6 \text{ e } a = 2) \Rightarrow (64^y = 6 \text{ e } 64^x = 2) \Rightarrow \left( y = \log_{64} 6 \text{ e } x = \frac{1}{6} \right)$$

$$(II) (b = 2 \text{ e } a = 6) \Rightarrow (64^y = 2 \text{ e } 64^x = 6) \Rightarrow \left( y = \frac{1}{6} \text{ e } x = \log_{64} 6 \right)$$

$$\text{Assim, } S = \left\{ \left( \frac{1}{6}, \log_{64} 6 \right); \left( \log_{64} 6, \frac{1}{6} \right) \right\}$$

**238.** a)  $\log_4 (3x + 2) = \log_4 (2x + 5) \Rightarrow 3x + 2 = 2x + 5 > 0$

Resolvendo  $3x + 2 = 2x + 5$ , vem  $x = 3$ , que convém, pois

$$3 \cdot 3 + 2 > 0.$$

$$S = \{3\}.$$

b) Devemos ter:  $5x - 6 = 3x - 5 > 0$ .

De  $5x - 6 = 3x - 5$  segue que  $x = \frac{1}{2}$ .

$x = \frac{1}{2}$  não é solução, pois  $5 \cdot \frac{1}{2} - 6 < 0$ . Daí,  $S = \emptyset$ .

c) Devemos ter:  $5x^2 - 14x + 1 = 4x^2 - 4x - 20 > 0$ .

De  $5x^2 - 14x + 1 = 4x^2 - 4x - 20 \Rightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x = 7 \text{ ou } x = 3)$ .

$x = 7$  é solução, pois  $5 \cdot 7^2 - 14 \cdot 7 + 1 = 148 > 0$ .

$x = 3$  é solução, pois  $5 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 + 1 = 4 > 0$ .

$S = \{3, 7\}$

d) Devemos ter:  $3x^2 - 4x - 17 = 2x^2 - 5x + 3 > 0$ .

$3x^2 - 4x - 17 = 2x^2 - 5x + 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = -5)$ .

$x = 4$  é solução, pois  $3 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 - 17 = 15 > 0$ .

$x = -5$  é solução, pois  $3 \cdot (-5)^2 - 4 \cdot (-5) - 17 = 78 > 0$ .

$S = \{-5, 4\}$

e) Devemos ter:  $4x^2 + 13x + 2 = 2x + 5 > 0$ .

$4x^2 + 13x + 2 = 2x + 5 \Leftrightarrow 4x^2 + 11x - 3 = 0 \Rightarrow$

$(x = -3 \text{ ou } x = \frac{1}{4})$

$x = -3$  não é solução, pois  $4 \cdot (-3)^2 + 13 \cdot (-3) + 2 = -1 < 0$ .

$x = \frac{1}{4}$  é solução, pois  $4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 13 \cdot \frac{1}{4} + 2 = \frac{11}{2} > 0$ .

$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

f) Devemos ter:  $5x^2 - 3x - 11 = 3x^2 - 2x - 8 > 0$ .

$5x^2 - 3x - 11 = 3x^2 - 2x - 8 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = -1 \text{ ou } x = \frac{3}{2})$ .

$x = -1$  não é solução, pois  $5 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 11 = -3 < 0$ .

$x = \frac{3}{2}$  não é solução, pois  $5 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} - 11 = -\frac{17}{4} < 0$ .

Daí,  $S = \emptyset$ .

**239.** a)  $\log_5(4x - 3) = 1 \Rightarrow 5^1 = 4x - 3 \Rightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

b)  $\log_{\frac{1}{2}}(3 + 5x) = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 3 + 5x \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$

$S = \left\{-\frac{2}{5}\right\}$

$$\begin{aligned} \text{c) } \log_{\sqrt{2}}(3x^2 + 7x + 3) = 0 &\Rightarrow (\sqrt{2})^0 = 3x^2 + 7x + 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(x = -2 \text{ ou } x = -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

$$S = \left\{-2, -\frac{1}{3}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \log_4(2x^2 + 5x + 4) = 2 &\Rightarrow 4^2 = 2x^2 + 5x + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 12 = 0 \Rightarrow \left(x = -4 \text{ ou } x = \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$S = \left\{-4, \frac{3}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 9x + 4) = -2 &\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 2x^2 - 9x + 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 5 = 0 \Rightarrow \left(x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 5\right) \end{aligned}$$

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, 5\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \log_3(x - 1)^2 = 2 &\Rightarrow 3^2 = (x - 1)^2 \Rightarrow (x - 1 = -3 \text{ ou } x - 1 = 3) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 4) \end{aligned}$$

$$S = \{-2, 4\}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \log_4(x^2 - 4x + 3) = \frac{1}{2} &\Rightarrow 4^{\frac{1}{2}} = x^2 - 4x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x = 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x = 2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$S = \{2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\}$$

**240.** Temos:  $\log_3 x = y$  (1).

Do enunciado:  $\log_3(x + 16) = y + 2$  (2).

De (1) vem que  $3^y = x$  e de (2) vem que:

$$3^{y+2} = x + 16 \Rightarrow 3^y \cdot 3^2 = x + 16 \Rightarrow 9x = x + 16 \Rightarrow x = 2.$$

**241.** Notemos inicialmente que:

$$\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{32} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{8}\right)^y = \frac{1}{32} \Rightarrow y = \frac{5}{3}.$$

Então, podemos escrever:

$$\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

- 242.**
- a)  $\log_3(\log_2 x) = 1 \Rightarrow 3^1 = \log_2 x \Rightarrow 2^3 = x \Rightarrow x = 8$
- b)  $\log_{\frac{1}{2}}[\log_3(\log_4 x)] = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \log_3(\log_4 x) \Rightarrow 3^1 = \log_4 x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = 4^3 = 64$   
 $S = \{64\}$
- c)  $\log_{\frac{1}{4}}\{\log_3[\log_2(3x - 1)]\} = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \log_3[\log_2(3x - 1)] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3^1 = \log_2(3x - 1) \Rightarrow 8 = 3x - 1 \Leftrightarrow x = 3$   
 $S = \{3\}$
- d)  $\log_2[1 + \log_3(1 + \log_4 x)] = 0 \Rightarrow 2^0 = 1 + \log_3(1 + \log_4 x) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3^0 = 1 + \log_4 x \Rightarrow 4^0 = x \Leftrightarrow x = 1$   
 $S = \{1\}$
- e)  $\log_{\sqrt{2}}\{2 \cdot \log_3[1 + \log_4(x + 3)]\} = 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\sqrt{2})^2 = 2 \cdot \log_3[1 + \log_4(x + 3)] \Rightarrow \log_3[1 + \log_4(x + 3)] = 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3^1 = 1 + \log_4(x + 3) \Rightarrow 4^2 = x + 3 \Rightarrow x = 13$   
 $S = \{13\}$
- f)  $\log_3[1 + 2 \cdot \log_2(3 - \log_4 x^2)] = 1 \Rightarrow 3^1 = 1 + 2 \cdot \log_2(3 - \log_4 x^2) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 1 = \log_2(3 - \log_4 x^2) \Rightarrow 2^1 = 3 - \log_4 x^2 \Leftrightarrow \log_4 x^2 = 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 4^1 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$   
 $S = \{-2, 2\}$
- g)  $\log_2\{2 + 3 \cdot \log_3[1 + 4 \cdot \log_4(5x + 1)]\} = 3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2^3 = 2 + 3 \cdot \log_3[1 + 4 \cdot \log_4(5x + 1)] \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2 = \log_3[1 + 4 \cdot \log_4(5x + 1)] \Rightarrow 3^2 = 1 + 4 \cdot \log_4(5x + 1) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2 = \log_4(5x + 1) \Rightarrow 4^2 = 5x + 1 \Rightarrow x = 3$   
 $S = \{3\}$

- 243.**  $\log_3[\log_2(3x^2 - 5x + 2)] = \log_3 2 \Rightarrow \log_2(3x^2 - 5x + 2) = 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2^2 = 3x^2 - 5x + 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow \left(x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 2\right),$   
 que satisfazem a condição de existência.  
 $S = \left\{-\frac{1}{3}, 2\right\}$

- 244.**
- a)  $x^{\log_x(x+3)} = 7 \Rightarrow \log_x 7 = \log_x(x+3) \Rightarrow 7 = x+3 > 0; x > 0 \text{ e } x \neq 1.$   
 Daí,  $x = 4$ , que satisfaz as condições de existência.  
 $S = \{4\}$
- b)  $x^{\log_x(x-5)^2} = 9 \Rightarrow \log_x 9 = \log_x(x-5)^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 9 = (x-5)^2 > 0, x \neq 1 \text{ e } x > 0.$   
 De  $9 = (x-5)^2$ , segue que  $x = 2$  ou  $x = 8$ .  
 $S = \{2, 8\}$

c)  $x^{\log_x(x+3)^2} = 16 \Rightarrow \log_x 16 = \log_x(x+3)^2 \Rightarrow 16 = (x+3)^2 > 0$ ,  
 $x > 0$  e  $x \neq 1$ . De  $16 = (x+3)^2$ , segue que  $x = 1$  (não convém)  
 ou  $x = -7$  (não convém).

Daí,  $S = \emptyset$ .

d) Notemos que  $\log_3 \sqrt{27} = y \Rightarrow 3^y = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ .

Então, podemos reescrever a equação na forma:

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\log_x(x^2+2)} = 2 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow x^{\log_x(x^2+2)} = 3^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x 3^3 = \log_x(x^2+2) \Rightarrow x^2+2 = 3^3, x > 0 \text{ e } x \neq 1.$$

De  $x^2+2 = 27$  vem que  $x = \pm 5$ . Desprezando a raiz negativa,  
 segue que  $x = 5$ .

$S = \{5\}$

**245.** Da 2ª equação, temos:

$$\log_2 y = \sqrt{x} \Rightarrow (\log_2 y)^2 = x \text{ para } x > 0 \text{ e } y > 0 \text{ (1).}$$

Substituindo esse valor de  $x$  na 1ª equação, temos:

$$2 \cdot [(\log_2 y)^2]^y - \frac{1}{[(\log_2 y)^2]^y} = 1.$$

Fazendo  $(\log_2 y)^{2y} = t$ , vem:

$$2t - \frac{1}{t} = 1 \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = 1 \text{ ou } t = -\frac{1}{2}\right).$$

Como  $t > 0$ , segue que:

$$t = 1 \Leftrightarrow (\log_2 y)^{2y} = 1 \stackrel{2y \neq 0}{\Leftrightarrow} \log_2 y = 1 \Rightarrow y = 2.$$

Em (1) temos:

$$x = (\log_2 y)^2 = (\log_2 2)^2 = 1.$$

$S = \{(1, 2)\}$

**246.** a)  $\log_4^2 x - 2 \log_4 x - 3 = 0 \Leftrightarrow (\log_4 x)^2 - 2 \log_4 x - 3 = 0$

Fazendo  $\log_4 x = t$ , vem:

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_4 x = -1 \text{ ou } \log_4 x = 3) \Rightarrow (4^{-1} = x \text{ ou } 4^3 = x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 64\right), \text{ que satisfazem a condição de existência.}$$

$$S = \left\{\frac{1}{4}, 64\right\}$$

b)  $6 \log_2^2 x - 7 \log_2 x + 2 = 0 \Leftrightarrow 6 (\log_2 x)^2 - 7 \log_2 x + 2 = 0$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$6t^2 - 7t + 2 = 0 \Rightarrow \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = \frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\log_2 x = \frac{1}{2} \text{ ou } \log_2 x = \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \left(x = 2^{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = 2^{\frac{2}{3}}\right), \text{ isto é,}$$



$$x = \sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt[3]{4}.$$

Como  $x > 0$ , vem:

$$S = \{\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}\}$$

c)  $\log x(\log x - 1) = 6$

Fazendo  $\log x = t$ , vem:

$$t(t - 1) = 6 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t = -2 \text{ ou } t = 3) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\log x = -2 \text{ ou } \log x = 3) \Rightarrow (x = 10^{-2} \text{ ou } x = 10^3)$ , que são raízes da equação proposta, pois  $x > 0$ .

$$S = \left\{ \frac{1}{100}, 1\,000 \right\}$$

d)  $\log_2 x \cdot (2 \log_2 x - 3) = 2$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , temos:

$$t(2t - 3) = 2 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t - 2 = 0 \Rightarrow \left( t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = 2 \right) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \left( \log_2 x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_2 x = 2 \right) \Rightarrow \left( x = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = 4 \right)$ , que satisfazem

a condição  $x > 0$ .

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 4 \right\}$$

e)  $2 \log_4^2 x + 2 = 5 \log_4 x \Leftrightarrow 2 (\log_4 x)^2 + 2 = 5 \log_4 x$

Fazendo  $\log_4 x = t$ , vem:

$$2t^2 + 2 = 5t \Rightarrow \left( t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2 \right) \Leftrightarrow \left( \log_4 x = \frac{1}{2} \text{ ou } \log_4 x = 2 \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x = 2 \text{ ou } x = 16)$ , que satisfazem a condição  $x > 0$ .

$$S = \{2, 16\}$$

f)  $\log^3 x = 4 \log x \Leftrightarrow (\log x)^3 = 4 \log x$

Fazendo  $\log x = t$ , vem:

$$t^3 = 4t \Leftrightarrow t(t^2 - 4) = 0 \Rightarrow (t = 0 \text{ ou } t = -2 \text{ ou } t = 2) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\log x = 0 \text{ ou } \log x = -2 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left( x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{100} \text{ ou } x = 100 \right)$ , que satisfazem a condição  $x > 0$ .

$$S = \left\{ \frac{1}{100}, 1, 100 \right\}$$

247.  $\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{x}} - 3^{\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{2}} = 2$

Fazendo  $\frac{1}{x} = 2y$ , temos:

$$3^{2y} - 3^{2y \cdot \frac{1}{2}} = 2 \Leftrightarrow (3y)^2 - 3y - 2 = 0.$$

Fazendo  $3^y = t$ , vem:

$$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2).$$

Como  $3^y > 0$ ,  $\forall y \in \mathbb{R}$ , segue que  $t = -1$  não convém. Daí,  $3^y = 2 \Rightarrow \Rightarrow \log_3 2 = y$ .

$$\text{Logo, } \frac{1}{x} = 2 \log_3 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \log_3 2^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\log_3 4}.$$

Transformando o logaritmo para a base 10, vem:

$$x = \frac{1}{\frac{\log 4}{\log 3}} = \frac{\log 3}{\log 4}, \text{ não convém pois } x \in \mathbb{N}^*.$$

$$S = \emptyset$$

**248.** a) Fazendo  $\log x = t$ , temos:

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\log x = 2 \text{ ou } \log x = 3) \Rightarrow (x = 100 \text{ ou } x = 1000)$ , que satisfazem a condição  $x > 0$ .

$$S = \{100, 1000\}$$

b) Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$\frac{3+t}{t} + \frac{2-t}{3-t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow t^2 - 11t + 18 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 9) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\log_2 x = 2 \text{ ou } \log_2 x = 9) \Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 2^9 = 512)$ , que satisfazem a condição  $x > 0$ .

$$S = \{4, 512\}$$

c) Fazendo  $\log_3 x = t$ , vem:

$$\frac{t}{1+t} + \frac{t+2}{t+3} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow 3t^2 + 4t - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( t = 1 \text{ ou } t = -\frac{7}{3} \right) \Rightarrow \left( \log_3 x = 1 \text{ ou } \log_3 x = -\frac{7}{3} \right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left( x = 3 \text{ ou } x = 3^{-\frac{7}{3}} \right)$ , que satisfazem a condição  $x > 0$ .

$$S = \left\{ 3, 3^{-\frac{7}{3}} \right\}$$

d) Fazendo  $\log x = t$ , temos:

$$\frac{1-t}{2+t} - \frac{1+t}{2-t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 4) \Rightarrow$$

$\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 4) \Rightarrow (x = 10^{-1} \text{ ou } x = 10^4)$ , que satisfazem a condição  $x > 0$ .

$$S = \{10^{-1}, 10^4\}$$

e) Fazendo  $\log_2 x = t$ , segue que:

$$\frac{1-t}{2-t} - \frac{2-t}{3-t} = \frac{4-t}{5-t} - \frac{5-t}{6-t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{t^2 - 5t + 6} = \frac{-1}{30 - 11t + t^2} \Leftrightarrow t = 4.$$

Então,  $\log_2 x = 4 \Rightarrow x = 16$ .

Como  $x > 0$ ,  $x = 16$  é solução.

$$S = \{16\}$$

**250.** a) Devemos ter:

$$0 < x \neq 1 \text{ (I) e } 3x^2 - 13x + 15 = x^2 \text{ (II).}$$

De (II) temos que  $x = 5$  ou  $x = \frac{3}{2}$ , que são soluções, pois satisfazem (I).

$$S = \left\{ \frac{3}{2}, 5 \right\}$$

b) Devemos ter:

$$0 < x \neq 1 \text{ (I) e } 4 - 3x = x^2 \text{ (II).}$$

De (II) temos que  $x = 1$  ou  $x = -4$ , que não satisfazem (I).

$$S = \emptyset$$

c) Devemos ter:

$$0 < x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow 2 < x \neq 3 \text{ (I) e } 2x^2 - 11x + 16 = (x - 2)^2 \text{ (II).}$$

De (II) temos que  $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 4$  ou  $x = 3$ . Somente  $x = 4$  satisfaz (I). Então,  $S = \{4\}$ .

d) Devemos ter:

$$0 < \sqrt{x} \neq 1 \text{ (I) e } (\sqrt{x})^4 = 2x^2 + 5x + 6 \text{ (II).}$$

De (II) temos que  $x = -2$  ou  $x = -3$ , que não satisfazem (I).

Assim,  $S = \emptyset$ .

e) Devemos ter:

$$0 < x - 1 \neq 1 \Leftrightarrow 1 < x \neq 2 \text{ (I) e } x^3 - x^2 + x - 3 = (x - 1)^3 \text{ (II).}$$

De (II) temos que:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \left( x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

Somente  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  é solução, pois satisfaz (I).

$$S = \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

f) Devemos ter:

$$0 < x + 2 \neq 1 \Leftrightarrow -2 < x \neq -1 \text{ (I) e } x^3 + 7x^2 + 8x + 11 = (x + 2)^3 \text{ (II).}$$

De (II) temos que  $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 3)$ , que são soluções pois satisfazem (I).

$$S = \{1, 3\}$$

g) Devemos ter:

$$0 < 2 - x \neq 1 \Leftrightarrow 2 > x \neq 1 \text{ (I) e } 2x^3 - x^2 - 18x + 8 = (2 - x)^3 \text{ (II).}$$

De (II) temos que:

$$3x^3 - 7x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(3x^2 - 7x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \right).$$

$x = 3$  não é solução, pois não satisfaz (I).

$$S = \left\{ 0, -\frac{2}{3} \right\}$$

**251.**

Devemos ter:

$$0 < x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow -1 < x \neq 0 \text{ (I) e } x^2 + x + 6 = (x + 1)^3 \text{ (II).}$$

De (II) temos que  $x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = 0$ . As possíveis raízes racionais dessa equação pertencem ao conjunto  $\{-1, 1, -5, 5\}$ .

$x = 1$  é raiz da equação, pois  $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 = 0$  (V).

Logo, o polinômio  $x^3 + 2x^2 + 2x - 5$  é divisível por  $x - 1$ . Efetuando a divisão, podemos escrever:

$$x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = (x - 1)(x^2 + 3x + 5)$$

Como  $x^2 + 3x + 5 = 0$  não admite raízes reais, segue que a única solução real de (II) é  $x = 1$ , que satisfaz (I).

$$S = \{1\}$$

**253.**

a) Devemos ter:

$$0 < x \neq 1 \text{ (I) e } 4x - 3 = 2x + 1 > 0 \text{ (II).}$$

De (II) temos que  $x = 2$ .

$x = 2$  é solução, pois satisfaz (I) e (II), pois  $4 \cdot 2 - 3 > 0$ .

$$S = \{2\}$$

b) Devemos ter:

$$0 < x \neq 1 \text{ (I) e } 5x + 2 = 3x + 4 > 0 \text{ (II).}$$

Resolvendo (II), temos que  $x = 1$ , que não é solução, pois não satisfaz (I).

$$S = \emptyset$$

c) Devemos ter:

$$0 < x + 1 \neq 1 \Leftrightarrow -1 < x \neq 0 \text{ (I) e } 3x + 14 = 2 - x > 0 \text{ (II).}$$

Resolvendo (II), temos que  $x = -3$  que não é solução, pois não satisfaz (I).

$$S = \emptyset$$

d) Devemos ter:

$$0 < x + 5 \neq 1 \Leftrightarrow -5 < x \neq -4 \text{ (I) e } 3x^2 - 5x - 8 = 2x^2 - 3x > 0 \text{ (II).}$$

Resolvendo (II), temos que  $x = -2$  ou  $x = 4$ .

$x = -2$  satisfaz (II), pois  $3 \cdot (-2)^2 - 5(-2) - 8 = 14 > 0$  e satisfaz (I).

Logo,  $x = -2$  é solução.

$x = 4$  satisfaz (II), pois  $3 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4 - 8 = 20 > 0$  e satisfaz (I).

Logo,  $x = 4$  é solução.

$$S = \{-2, 4\}$$

e) Devemos ter:

$$0 < 2x - 4 \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < x \neq \frac{5}{2} \text{ (I) e } 5x^2 - 15x + 7 = x^2 - 3x + 2 > 0 \text{ (II).}$$

Resolvendo (II), temos que  $x = \frac{1}{2}$  ou  $x = \frac{5}{2}$ .

$x = \frac{1}{2}$  não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = \frac{5}{2}$  não é solução, pois não satisfaz (I).

Daí,  $S = \emptyset$ .

f) Devemos ter:

$$0 < x + 2 \neq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < x \neq -1 \text{ (I) e } 3x^2 - 8x - 2 = 2x^2 - 5x + 2 > 0 \text{ (II).}$$

Resolvendo (II), temos que  $x = -1$  ou  $x = 4$ .

$x = -1$  não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = 4$  satisfaz (II), pois  $3 \cdot 4^2 - 8 \cdot 4 - 2 = 14 > 0$  e satisfaz (I).

Assim,  $x = 4$  é solução.

$S = \{4\}$

**254.** a) Fazendo  $\log_x (5x - 6) = t$ , vem:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 2), \text{ isto é,}$$

$$(1) \log_x (5x - 6) = 1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ e \\ 5x - 6 = x \text{ (II)} \end{cases}$$

De (II),  $x = \frac{3}{2}$ , que é solução, pois satisfaz (I).

$$(2) \log_x (5x - 6) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ 5x - 6 = x^2 \text{ (II)} \end{cases}$$

De (II), segue que  $x = 2$  ou  $x = 3$ , que são soluções, pois satisfazem (I).

Assim, de (1) e (2), temos que:

$$S = \left\{ \frac{3}{2}, 2, 3 \right\}$$

b) Fazendo  $\log_x (x + 1) = t$ , temos:

$$t^2 = 2 + t \Rightarrow t = -1 \text{ ou } t = 2, \text{ isto é,}$$

$$(1) \log_x (x + 1) = -1 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ e \\ x + 1 = x^{-1} > 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Resolvendo (II), temos que  $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  ou  $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ .

$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$  não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  é solução, pois satisfaz (I).

$$(2) \log_x (x + 1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \text{ (I)} \\ e \\ x + 1 = x^2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Resolvendo (II), temos que:  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ou  $x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

Somente  $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  é solução, pois deve satisfazer (I).

Assim, de (1) e (2) segue que:

$$S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

c) Fazendo  $\log_{3x-2} (4-x) = t$ , vem:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow \left( t = 2 \text{ ou } t = \frac{1}{2} \right), \text{ isto é:}$$

$$(1) \log_{3x-2} (4-x) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x \neq 1 \text{ (I)} \\ e \\ 4 - x = (3x - 2)^2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Resolvendo (II), temos que:

$$9x^2 - 11x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{11}{9}.$$

$x = 0$  não é solução, pois não satisfaz (I).

$x = \frac{11}{9}$  é solução, pois satisfaz (I).

$$(2) \log_{3x-2} (4-x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3x - 2 \neq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x \neq 1 \text{ (I)} \\ e \\ 4 - x = (3x - 2)^{\frac{1}{2}} \text{ (II)} \end{cases}$$

Resolvendo a equação irracional em (II), vem que  $x = 2$ , que é solução, pois satisfaz (I).

De (1) e (2) vem:

$$S = \left\{ \frac{11}{9}, 2 \right\}$$

**256.** A condição de existência dos logaritmos é  $x > \frac{1}{3}$  (I).

Para  $x > \frac{1}{3}$ , temos:

$$\begin{aligned} \log\left(x + \frac{1}{3}\right) + \log\left(x - \frac{1}{3}\right) &= \log \frac{24}{9} \Rightarrow \log\left[\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)\right] = \log \frac{24}{9} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \log\left(x^2 - \frac{1}{9}\right) &= \log \frac{24}{9} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{9} = \frac{24}{9} \Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(x = -\frac{5}{3} \text{ ou } x = \frac{5}{3}\right). \end{aligned}$$

Como somente  $x = \frac{5}{3}$  satisfaz (I), vem que:  $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$ .

**257.** Notemos que as condições  $2^x > 0$  e  $1 + 2^x > 0$  são satisfeitas para  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Temos:

$$\log 2^x + \log(1 + 2^x) = \log 6 \Rightarrow \log[2^x \cdot (1 + 2^x)] = \log 6 \Rightarrow 2^x \cdot (1 + 2^x) = 6.$$

$$\text{Fazendo } 2^x = t, \text{ vem: } t(1 + t) = 6 \Rightarrow t = -3 \text{ ou } t = 2.$$

Como  $t > 0$ , vem que  $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ .

$$S = \{1\}$$

**258.** Notemos inicialmente que  $1 + 2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

Temos:

$$x + \log(1 + 2^x) = x \log 5 + \log 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \log(1 + 2^x) = x \cdot \log\left(\frac{10}{2}\right) + \log 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \log(1 + 2^x) = x \cdot [\log 10 - \log 2] + \log 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + \log(1 + 2^x) = x - x \log 2 + \log 6 \Leftrightarrow \log(1 + 2^x) = \log 6 - \log 2^x \Rightarrow$$

$$= \log(1 + 2^x) = \log\left(\frac{6}{2^x}\right) \Rightarrow 1 + 2^x = \frac{6}{2^x}.$$

Fazendo  $2^x = t$ , vem:

$$1 + t = \frac{6}{t} \Rightarrow (t = -3 \text{ ou } t = 2).$$

Como  $2^x > 0$ , segue que  $2^x = 2 \Rightarrow x = 1$ .

$$S = \{1\}$$

**259.** a) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 3$  (I).

Para  $x > 3$ , temos:

$$\log_2(x - 3) + \log_2(x + 3) = 4 \Rightarrow \log_2[(x - 3)(x + 3)] = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 2^4 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = -5 \text{ ou } x = 5.$$

Somente  $x = 5$  é solução, pois deve satisfazer (I).

$$S = \{5\}$$

b) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 2$  (I).

Para  $x > 2$ , temos:

$$\log_2(x + 1) + \log_2(x - 2) = 2 \Rightarrow \log_2[(x + 1) \cdot (x - 2)] = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 2) = 2^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 3.$$

Somente  $x = 3$  é solução, pois deve satisfazer (I).

$$S = \{3\}$$

c) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 21$  (I).

Para  $x > 21$ , temos:

$$\begin{aligned} \log x + \log(x - 21) &= 2 \Rightarrow \log[x \cdot (x - 21)] = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x(x - 21) &= 10^2 \Leftrightarrow x^2 - 21x - 100 = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ ou } x = 25. \end{aligned}$$

Como somente  $x = 25$  satisfaz (I),  $S = \{25\}$ .

d) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 1$  (I).

Para  $x > 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \log_2(5x - 2) - [\log_2 x + \log_2(x - 1)] &= 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2(5x - 2) - \log_2[x \cdot (x - 1)] &= 2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{5x - 2}{x(x - 1)}\right) = 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{5x - 2}{x(x - 1)} &= 2^2 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 2. \end{aligned}$$

Somente  $x = 2$  é solução, pois deve satisfazer (I).

$S = \{2\}$ .

e) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 2$  (I).

Para  $x > 2$ , temos:

$$\begin{aligned} \log_3(5x + 4) - [\log_3 x + \log_3(x - 2)] &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3(5x + 4) - \log_3[x \cdot (x - 2)] &= 1 \Rightarrow \log_3\left(\frac{5x + 4}{x(x - 2)}\right) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{5x + 4}{x(x - 2)} &= 3^1 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 4. \end{aligned}$$

Somente  $x = 4$  é solução, pois deve satisfazer (I).

$S = \{4\}$ .

f) A condição de existência dos logaritmos é  $x \neq -\frac{2}{3}$  e  $x \neq \frac{3}{2}$  (I).

Para  $x \neq -\frac{2}{3}$  e  $x \neq \frac{3}{2}$ , temos:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(3x + 2)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(2x - 3)^2 &= -4 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{(3x + 2)^2}{(2x - 3)^2}\right) = -4 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{3x + 2}{2x - 3}\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow \left(\frac{3x + 2}{2x - 3}\right)^2 = 2^4 \Rightarrow \left|\frac{3x + 2}{2x - 3}\right| = 4 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x + 2}{2x - 3} = 4 \Rightarrow x = \frac{14}{5} \\ \text{ou} \\ \frac{3x + 2}{2x - 3} = -4 \Rightarrow x = \frac{10}{11} \end{cases}$$

Os dois valores encontrados são soluções, pois satisfazem (I).

$$S = \left\{ \frac{14}{5}, \frac{10}{11} \right\}$$



g) A condição de existência dos logaritmos é  $x \neq -2$  e  $x \neq 3$  (I).

Para  $x \neq -2$  e  $x \neq 3$ , temos:

$$\log_{36} (x+2)^2 + \log_{36} (x-3)^2 = 1 \Rightarrow \log_{36} [(x+2)^2(x-3)^2] = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)^2(x-3)^2 = 36 \Rightarrow (x^2 - x - 6) = \pm 6$$

$$x^2 - x - 6 = 6 \Rightarrow x = -3 \text{ ou } x = 4$$

$$x^2 - x - 6 = -6 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Esses quatro valores são soluções, pois satisfazem (I).

$$S = \{-3, 0, 1, 4\}$$

**260.** A condição de existência dos logaritmos é  $x > 0$ .

$$(0,4)^{\log^2 x + 1} = (6,25)^{2 - \log x^3} \Rightarrow \left(\frac{4}{10}\right)^{\log^2 x + 1} = \left(\frac{25}{4}\right)^{2 - 3 \log x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\log^2 x + 1} = \left[\left(\frac{5}{2}\right)^2\right]^{2 - 3 \log x} \Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-\log^2 x - 1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{4 - 6 \log x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log^2 x - 1 = 4 - 6 \log x \Rightarrow \log^2 x - 6 \log x + 5 = 0.$$

Fazendo  $\log x = t$ , vem:

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 5) \Rightarrow (\log x = 1 \text{ ou } \log x = 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x = 10^1 \text{ ou } x = 10^5).$$

$$S = \{10, 10^5\}$$

**261.** Notemos que  $9^{x-1} + 7 > 0$  e  $3^{x-1} + 1 > 0$  são satisfeitas para todo  $x$  real. Temos:

$$\log_2 (9^{x-1} + 7) - \log_2 (3^{x-1} + 1) = 2 \Rightarrow \log_2 \left(\frac{9^{x-1} + 7}{3^{x-1} + 1}\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9^{x-1} + 7}{3^{x-1} + 1} = 2^2 \Rightarrow 9^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-1} + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{9^x}{9} = 4 \cdot \frac{3^x}{3} + 3 = 0.$$

Fazendo  $3^x = t$ , vem:

$$\frac{t^2}{9} - \frac{4t}{3} + 3 = 0 \Rightarrow t^2 - 12t + 27 = 0 \Rightarrow (t = 3 \text{ ou } t = 9) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3^x = 3 \text{ ou } 3^x = 9) \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2).$$

$$S = \{1, 2\}$$

**262.** a) A condição de existência dos logaritmos é  $x > \frac{15}{4}$  (I).

Temos:

$$\frac{\log_3 (2x)}{\log_3 (4x - 15)} = 2 \Rightarrow \log_3 2x = 2 \cdot \log_3 (4x - 15) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 2x = \log_3 (4x - 15)^2 \Rightarrow 2x = (4x - 15)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 122x + 225 = 0 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \text{ ou } x = \frac{25}{8}.$$

Como  $x = \frac{25}{8}$  não satisfaz (I) e  $x = \frac{9}{2}$  satisfaz, a única solução é  $x = \frac{9}{2}$ .

$$S = \left\{ \frac{9}{2} \right\}$$

b)  $\frac{\log_2(35 - x^3)}{\log_2(5 - x)} = 3 \Rightarrow \log_2(35 - x^3) = 3 \log_2(5 - x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_2(35 - x^3) = \log_2(5 - x)^3 \Rightarrow 35 - x^3 = (5 - x)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 3.$$

Verificando  $x = 2$ :  $35 - 2^3 > 0$  e  $5 - 2 > 0$ .

Verificando  $x = 3$ :  $35 - 3^3 > 0$  e  $5 - 3 > 0$ .

$$S = \{2, 3\}$$

c)  $\frac{\log(\sqrt{x+1} + 1)}{\log \sqrt[3]{x-40}} = 3 \Rightarrow \log(\sqrt{x+1} + 1) = 3 \log \sqrt[3]{x-40} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log(\sqrt{x+1} + 1) = \log(\sqrt[3]{x-40})^3 \Rightarrow \sqrt{x+1} + 1 = x - 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} = x - 41 \Rightarrow x^2 - 83x + 1680 = 0 \Rightarrow (x = 48 \text{ ou } x = 35)$$

( $x = 35$  não convém, pois  $\sqrt{35+1} \neq 35 - 41$ ).

Verificando  $x = 48$ :  $\sqrt{48+1} + 1 > 0$  e  $\sqrt[3]{48-40} > 0$ .

$$S = \{48\}$$

**263.** A condição de existência dos logaritmos é  $x > 16$  (I).

$$\frac{1}{2} \log_3(x-16) - \log_3(\sqrt{x}-4) = 1 \Rightarrow \log_3(x-16)^{\frac{1}{2}} - \log_3(\sqrt{x}-4) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3 \frac{(x-16)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}-4} = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{x-16}}{\sqrt{x}-4} = 3^1 \Rightarrow 3\sqrt{x} - 12 = \sqrt{x-16}.$$

Resolvendo essa equação irracional, temos  $x = 25$  ou  $x = 16$ .

$x = 25$  é solução dessa equação irracional, pois:

$$3 \cdot \sqrt{25} - 12 = \sqrt{25-16} \text{ (V), mas não satisfaz (I).}$$

$x = 16$  é solução da equação irracional, pois:

$$3 \cdot \sqrt{16} - 12 = \sqrt{16-16} \text{ (V), mas não satisfaz (I).}$$

Daí,  $S = \{25\}$ .

**264.** A condição de existência dos logaritmos é  $2^{x+2} - 3 > 0$ , pois  $4^x + 15 \cdot 2^x + 27 > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  (I).

Temos:

$$\log_3(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = 2 \log_3(2^{x+2} - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = \log_3(2^{x+2} - 3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^x + 15 \cdot 2^x + 27 = (2^{x+2})^2 - 6 \cdot 2^{x+2} + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^x + 15 \cdot 2^x + 27 = 2^{2x} \cdot 2^4 - 6 \cdot 2^x \cdot 2^2 + 9.$$

Fazendo  $2^x = t$ , vem:

$$t^2 + 15t + 27 = 16t^2 - 24t + 9 \Rightarrow 15t^2 - 39t - 18 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = -\frac{2}{5} \text{ (não convém, pois } t > 0) \text{ ou } t = 3.$$

Daí,  $2^x = 3 \Rightarrow x = \log_2 3$ , que satisfaz (I), pois:

$$2^{\log_2 3 + 2} - 3 = 2^{\log_2 3} \cdot 2^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 > 0.$$

$$S = \{\log_2 3\}$$

- 266.** a) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 3$  (I).

Temos:

$$\log_2 (x + 4) + \log_2 (x - 3) = \log_2 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 [(x + 4)(x - 3)] = \log_2 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 18 \Rightarrow x^2 + x - 30 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ ou } x = -6.$$

Somente  $x = 5$  satisfaz (I).

$$S = \{5\}$$

- b) A condição de existência dos logaritmos é  $x < 1$  (I).

Temos:

$$\log_5 (1 - x) + \log_5 (2 - x) = \log_5 (8 - 2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_5 [(1 - x)(2 - x)] = \log_5 (8 - 2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - x)(2 - x) = 8 - 2x \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 3.$$

Somente  $x = -2$  é solução, pois satisfaz (I).

$$S = \{-2\}$$

- c) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 5$  (I).

Temos:

$$\log_{\frac{1}{2}} (x + 1) + \log_{\frac{1}{2}} (x - 5) = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} [(x + 1)(x - 5)] = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x + 1)(x - 5) = 2x - 3 \Rightarrow x^2 - 6x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 - \sqrt{11} \text{ ou } x = 3 + \sqrt{11}.$$

Somente  $x = 3 + \sqrt{11}$  satisfaz (I).

$$S = \{3 + \sqrt{11}\}$$

- d) A condição de existência dos logaritmos é  $x > \frac{1 + \sqrt{17}}{4}$  (I).

Temos:

$$\log (2x + 1) + \log (4x - 3) = \log (2x^2 - x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log [(2x + 1)(4x - 3)] = \log (2x^2 - x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x + 1)(4x - 3) = 2x^2 - x - 2 \Rightarrow 6x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = \frac{1}{2}, \text{ que não satisfazem (I).}$$

$$S = \emptyset$$

- e) A condição de existência dos logaritmos é  $\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$  (I).

Temos:

$$\log_2 (4 - 3x) - \log_2 (2x - 1) = \log_2 (3 - x) - \log_2 (x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 \left( \frac{4 - 3x}{2x - 1} \right) = \log_2 \left( \frac{3 - x}{x + 1} \right) \Rightarrow \frac{4 - 3x}{2x - 1} = \frac{3 - x}{x + 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \text{ ou } x = 1.$$

Somente  $x = 1$  satisfaz (I).

$$S = \{1\}$$

f) A condição de existência dos logaritmos é  $x > \frac{1}{3}$  (I).

Temos:

$$\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 13x) + \operatorname{colog}_{\frac{1}{3}} (x + 3) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 13x) - \log_{\frac{1}{3}} (x + 3) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{x^2 + 13x}{x + 3} \right) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 1) \Rightarrow \frac{x^2 + 13x}{x + 3} = 3x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 3.$$

Somente  $x = 3$  satisfaz (I).

$$S = \{3\}$$

g) A condição de existência dos logaritmos é  $x > -1 + \sqrt{3}$  (I).

Temos:

$$\log (2x^2 + 4x - 4) + \operatorname{colog} (x + 1) = \log 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log (2x^2 + 4x - 4) - \log (x + 1) = \log 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \left( \frac{2x^2 + 4x - 4}{x + 1} \right) = \log 4 \Rightarrow \frac{2x^2 + 4x - 4}{x + 1} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2.$$

Somente  $x = 2$  satisfaz (I).

$$S = \{2\}$$

**267.** Fazendo  $\log x = y$ , vem:

$$2 \log y = \log (7 - 2y) - \log 5 \Rightarrow \log y^2 = \log \left( \frac{7 - 2y}{5} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{7 - 2y}{5} \Rightarrow 5y^2 + 2y - 7 = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{5} \text{ ou } y = 1.$$

$$\text{Daí, } \log x = -\frac{7}{5} \text{ ou } \log x = 1.$$

Notemos que, se  $x = -\frac{7}{5}$  no primeiro membro, teremos:

$$\log (\log x) = \log \left( -\frac{7}{5} \right) \notin \mathbb{R}!$$

$$\text{Então, } \log x = 1 \Rightarrow x = 10.$$

$$S = \{10\}$$

**268.** A condição de existência dos logaritmos é  $x > -\frac{5}{7}$  (I).

Temos:

$$\log \sqrt{7x + 5} + \frac{1}{2} \log (2x + 7) = 1 + \log \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \sqrt{7x + 5} + \log (2x + 7)^{\frac{1}{2}} = \log 10 + \log \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log [\sqrt{7x + 5} \cdot \sqrt{2x + 7}] = \log \left( 10 \cdot \frac{9}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(7x + 5)(2x + 7)} = 45 \Rightarrow 14x^2 + 59x - 1990 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -\frac{199}{14} \text{ ou } x = 10.$$

Somente  $x = 10$  satisfaz (I).

$$S = \{10\}$$

**269.** a) Temos:

$$\sqrt{\log x} = \log \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{\log x} = \frac{1}{2} \cdot \log x$$

Fazendo  $\log x = t$ , vem:

$$\sqrt{t} = \frac{1}{2}t \Rightarrow \frac{1}{4}t^2 = t \Rightarrow (t = 0 \text{ ou } t = 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log x = 0 \text{ ou } \log x = 4) \Rightarrow (x = 10^0 \text{ ou } x = 10^4).$$

$$\text{Verificando } x = 1: \sqrt{\log 1} = \log \sqrt{1}. \text{ (V)}$$

$$\text{Verificando } x = 10^4: \sqrt{\log 10^4} = \sqrt{10^4}. \text{ (V)}$$

$$S = \{1, 10^4\}$$

b)  $\log^{-1} x = 2 + \log x^{-1} \Rightarrow (\log x)^{-1} = 2 - \log x$

Fazendo  $\log x = t$ , vem:

$$t^{-1} = 2 - t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

$$\text{Então, } \log x = 1 \Rightarrow x = 10^1 = 10.$$

$x = 10$  é solução, pois  $x > 0$ .

$$S = \{10\}$$

c) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 0$ .

Temos:

$$\log_8 x^3 = 5 + \frac{12}{\log_8 x} \Rightarrow 3 \log_8 x = 5 + \frac{12}{\log_8 x}.$$

Fazendo  $\log_8 x = t$ , vem:

$$3t = 5 + \frac{12}{t} \Rightarrow \left( t = -\frac{4}{3} \text{ ou } t = 3 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \log_8 x = -\frac{4}{3} \text{ ou } \log_8 x = 3 \right) \Rightarrow \left( x = 8^{-\frac{4}{3}} \text{ ou } x = 8^3 \right),$$

$$x = \frac{1}{16} \text{ ou } x = 512, \text{ que satisfazem a condição de existência.}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{16}, 512 \right\}$$

**270.**  $\log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 6 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^x \cdot 3 - 3) = 6 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 [3 \cdot (3^x - 1)] = 6 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_3 (3^x - 1) \cdot [\log_3 3 + \log_3 (3^x - 1)] = 6$   
 Fazendo  $\log_3 (3^x - 1) = t$ , vem:  
 $t \cdot [1 + t] = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t = -3 \text{ ou } t = 2)$ .  
 Daí,  
 $\log_3 (3^x - 1) = -3 \Rightarrow 3^x - 1 = 3^{-3} \Rightarrow 3^x = \frac{28}{27} \Rightarrow x = \log_3 \frac{28}{27}$   
 ou  
 $(3^x - 1) = 2 \Rightarrow 3^x - 1 = 9 \Rightarrow 3^x = 10 \Rightarrow x = \log_3 10$ .  
 Os valores encontrados garantem a existência dos logaritmos acima e são, portanto, soluções.  
 $S = \left\{ \log_3 \frac{28}{27}, \log_3 10 \right\}$

**271.** a) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 0$ . Temos:  
 $\log^2 x^3 - 20 \cdot \log \sqrt{x} + 1 = 0 \Leftrightarrow (\log x^3)^2 - 20 \cdot \log x^{\frac{1}{2}} + 1 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (3 \cdot \log x)^2 - 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log x + 1 = 0$ .  
 Fazendo  $\log x = t$ , vem:  
 $(3 \cdot t)^2 - 10t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{9} \text{ ou } t = 1$ . Daí,  
 $\log x = \frac{1}{9} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{10}$   
 ou  
 $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$ .  
 Os dois valores encontrados satisfazem a condição de existência.  
 $S = \{ \sqrt[9]{10}, 10 \}$ .

b) A condição de existência dos logaritmos é  $0 < x \neq 1$ . Temos:  
 $\log_x 5\sqrt{5} - 1,25 = \log_x^2 \sqrt{5} \Rightarrow \log_x 5 + \log_x \sqrt{5} - 1,25 = (\log_x \sqrt{5})^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_x 5 + \log_x 5^{\frac{1}{2}} - 1,25 = \left( \log_x 5^{\frac{1}{2}} \right)^2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_x 5 + \frac{1}{2} \log_x 5 - 1,25 = \left( \frac{1}{2} \cdot \log_x 5 \right)^2$   
 Fazendo  $\log_x 5 = t$ , vem:  
 $t + \frac{1}{2} t - 1,25 = \left( \frac{1}{2} t \right)^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t = 5 \text{ ou } t = 1) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\log_x 5 = 5 \text{ ou } \log_x 5 = 1) \Rightarrow (x^5 = 5 \text{ ou } x^1 = 5) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x = \sqrt[5]{5} \text{ ou } x = 5)$ , que satisfazem a condição de existência.  
 $S = \{ \sqrt[5]{5}, 5 \}$

c) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 0$  (I). Temos:

$$\frac{\log_8 \left( \frac{8}{x^2} \right)}{\log_8^2 x} = 3 \Rightarrow \frac{\log_8 8 - \log_8 x^2}{(\log_8 x)^2} = 3 \Rightarrow \frac{1 - 2 \log_8 x}{(\log_8 x)^2} = 3.$$

Fazendo  $\log_8 x = t$ , vem:

$$\frac{1 - 2t}{t^2} = 3 \Rightarrow 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow \left( t = -1 \text{ ou } t = \frac{1}{3} \right), \text{ isto é,}$$

$$\left( \log_8 x = -1 \text{ ou } \log_8 x = \frac{1}{3} \right) \Rightarrow \left( x = 8^{-1} \text{ ou } x = 8^{\frac{1}{3}} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{8} \text{ ou } x = 2, \text{ que satisfazem (I).}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{8}, 2 \right\}$$

**272.** Escrevendo  $\log 5$  como  $\log \left( \frac{10}{2} \right)$ , temos:

$$\log 5 = \log \left( \frac{10}{2} \right) = \log 10 - \log 2 = 1 - \log 2.$$

A equação proposta é, então,  $x^2 + x \cdot (1 - \log 2) - \log 2 = 0$ . Temos:

$$\Delta = (1 - \log 2)^2 + 4 \log 2 = (1 + \log 2)^2.$$

Daí,

$$x = \frac{-(1 - \log 2) \pm \sqrt{(1 + \log 2)^2}}{2} = \frac{(\log 2 - 1) \pm (1 + \log 2)}{2},$$

donde  $x' = \log 2$  e  $x'' = -1$ .

$$S = \{\log 2, -1\}$$

**274.** a) Devemos ter  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Aplicando a propriedade dos logaritmos na 2ª equação, temos:

$$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 8 \Rightarrow \log_2 (x \cdot y) = \log_2 8 \Rightarrow xy = 8.$$

Então o sistema fica:  $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 8 \end{cases}$ , cujas soluções são

$$(x = 4 \text{ e } y = 2) \text{ ou } (x = 2 \text{ e } y = 4).$$

$$S = \{(4, 2); (2, 4)\}$$

b) Devemos ter  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Da 1ª equação temos:

$$4^x - y = 8 \Rightarrow 2^{2x} - 2y = 2^3 \Rightarrow 2x - 2y = 3.$$

Da 2ª equação, aplicando a propriedade dos logaritmos, vem:

$$\log_2 x - \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 \left( \frac{x}{y} \right) = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2^2 \Rightarrow x = 4y.$$

Então o sistema proposto fica reduzido a  $\begin{cases} 2x - 2y = 3 \\ x = 4y \end{cases}$   
 cuja solução é  $x = 2$  e  $y = \frac{1}{2}$ .  
 $S = \left\{ \left( 2, \frac{1}{2} \right) \right\}$

c) Devemos ter:  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Aplicando a propriedade dos logaritmos na 2ª equação, temos:  
 $\log x + \log y = 2 \Rightarrow \log (x \cdot y) = 2 \Rightarrow x \cdot y = 10^2 = 100$ .

Então, o sistema proposto fica reduzido a  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ xy = 100 \end{cases}$   
 cujas soluções são  $(x = 20$  e  $y = 5)$  ou  $(x = 5$  e  $y = 20)$ .  
 $S = \{(20, 5); (5, 20)\}$

d) Devemos ter:  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Aplicando as propriedades dos logaritmos na 2ª equação, vem:  
 $2 \log x + \log y = 2 \log 2 + \log 3 \Rightarrow \log x^2 - \log y = \log 2^2 + \log 3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log \left( \frac{x^2}{y} \right) = \log (2^2 \cdot 3) \Rightarrow \frac{x^2}{y} = 12 \Rightarrow x^2 = 12y$ .

Assim, o sistema proposto fica reduzido a  $\begin{cases} 2x^2 + y = 75 \\ x^2 = 12y \end{cases}$   
 cujas soluções são  $(x = 6$  e  $y = 3)$  ou  $(x = -6$  e  $y = 3)$ .  
 (Note que  $x = -6$  não convém.)  
 $S = \{(6, 3)\}$

e) Devemos ter:  $x > 0$  e  $y > 0$ . Da 1ª equação vem:

$$2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 512 \Rightarrow 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2^9 \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9.$$

Da 2ª equação, aplicando as propriedades dos logaritmos, vem:

$$\log \sqrt{xy} = 1 + \log 2 \Rightarrow \log \sqrt{xy} = \log 10 = \log 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log \sqrt{xy} = \log (10 \cdot 2) \Rightarrow \sqrt{xy} = 20.$$

Assim, o sistema proposto fica reduzido a  $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \\ \sqrt{xy} = 20 \end{cases}$ , cujas

soluções são  $(x = 25$  e  $y = 16)$  ou  $(x = 16$  e  $y = 25)$ .

$$S = \{(25, 16); (16, 25)\}$$

**275.** Devemos ter  $x + y > 0$ ,  $x - y > 0$ ,  $x > 0$  e  $y > 0$  (I).

Da 1ª equação segue que:

$$2^{\log_{\frac{1}{2}}(x+y)} = 5^{\log_5(x-y)} \Rightarrow \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{-1} \right]^{\log_{\frac{1}{2}}(x+y)} = 5^{\log_5(x-y)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{\log_{\frac{1}{2}}(x+y)} \right]^{-1} = 5^{\log_5(x-y)} \Rightarrow (x+y)^{-1} = x-y \Rightarrow x^2 - y^2 = 1.$$



Da 2ª equação vem:

$$\log_2 x + \log_2 y = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 (x \cdot y) = \frac{1}{2} \Rightarrow xy = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Assim, o sistema proposto fica reduzido a  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ xy = \sqrt{2} \end{cases}$

cuja única solução é  $x = \sqrt{2}$  e  $y = 1$ , pois deve satisfazer (I).

$$S = \{(\sqrt{2}, 1)\}.$$

**277.** a) Devemos ter  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Fazendo  $\log x = a$  e  $\log y = b$ , vem:  $\begin{cases} 3a - 2b = 0 \\ 4a + 3b = 17 \end{cases}$

que resolvido fornece  $a = 2$  e  $b = 3$ , isto é,

$$(\log x = 2 \text{ e } \log y = 3) \Rightarrow (x = 10^2 \text{ e } y = 10^3).$$

$$S = \{(100, 1000)\}$$

b) Devemos ter  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Fazendo  $\log_2 x = a$  e  $\log_2 y = b$ , vem  $\begin{cases} 2a + 3b = 27 \\ 5a - 2b = 1 \end{cases}$

que resolvido dá  $a = 3$  e  $b = 7$ . Então:

$$(\log_2 x = 3 \text{ e } \log_2 y = 7) \Rightarrow (x = 2^3 = 8 \text{ e } y = 2^7 = 128).$$

$$S = \{(8, 128)\}$$

**278.** Devemos ter  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Aplicando propriedades na 1ª equação, temos:

$$\log_2 (xy) \cdot \log_2 \left(\frac{x}{y}\right) = -3 \Rightarrow (\log_2 x + \log_2 y) \cdot (\log_2 x - \log_2 y) = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 x)^2 - (\log_2 y)^2 = -3.$$

Então, o sistema proposto fica reduzido a  $\begin{cases} (\log_2 x)^2 - (\log_2 y)^2 = -3 \\ (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = 5 \end{cases}$

Somando membro a membro as equações acima, vem:

$$(\log_2 x)^2 = 1 \Rightarrow (\log_2 x = -1 \text{ ou } \log_2 x = 1) \Rightarrow \left(x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2\right).$$

• Se  $x = \frac{1}{2}$ , na 1ª equação, segue que:

$$(\log_2 y)^2 = 4 \Rightarrow (\log_2 y = -2 \text{ ou } \log_2 y = 2) \Rightarrow \left(y = \frac{1}{4} \text{ ou } y = 4\right).$$

• Se  $x = 2$ , na 1ª equação, temos novamente  $y = \frac{1}{4}$  ou  $y = 4$ .

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right); \left(\frac{1}{2}, 4\right); \left(2, \frac{1}{4}\right); (2; 4) \right\}$$

- 280.** a) Aplicando logaritmo de base 3 a ambos os membros, temos:  
 $9 \cdot x^{\log_3 x} = x^3 \Rightarrow \log_3 (9 \cdot x^{\log_3 x}) = \log_3 x^3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_3 9 + \log_3 x^{\log_3 x} = 3 \log_3 x \Rightarrow 2 + (\log_3 x) \cdot (\log_3 x) = 3 \log_3 x.$   
 Fazendo  $\log_3 x = t$ , vem:  
 $2 + t^2 = 3t \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow (\log_3 x = 1 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (x = 3 \text{ ou } x = 9), \text{ que satisfazem a condi\c{c}o\~{e} } x > 0.$   
 $S = \{3, 9\}$
- b) Aplicando logaritmo decimal a ambos os membros, temos:  
 $x^{\log x} = 100 \cdot x \Rightarrow \log (x^{\log x}) = \log (100 \cdot x) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\log x) \cdot (\log x) = \log 100 + \log x.$   
 Fazendo  $\log x = t$ , vem:  
 $t \cdot t = 2 + t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{10} \text{ ou } x = 100\right), \text{ que}$   
 satisfazem a condi\c{c}o\~{e} } x > 0.  
 $S = \left\{\frac{1}{10}, 100\right\}$
- c) A condi\c{c}o\~{e} de exist\~{e}ncia do logaritmo \e{ }  $0 < x \neq 1$ .  
 Aplicando logaritmo de base x a ambos os membros, temos:  
 $16^{\log_x 2} = 8x \Rightarrow \log_x (16^{\log_x 2}) = \log_x (8 \cdot x) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\log_x 2) \cdot (\log_x 16) = \log_x 8 + \log_x x \Rightarrow (\log_x 2) \cdot (\log_x 2^4) = \log_x 2^3 + 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\log_x 2) \cdot 4 \cdot \log_x 2 = 3 \cdot \log_x 2 + 1.$   
 Fazendo  $\log_x 2 = t$ , temos:  
 $t \cdot 4t = 3t + 1 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{4} \text{ ou } t = 1\right) \Rightarrow \left(\log_x 2 = -\frac{1}{4} \text{ ou } \log_x 2 = 1\right) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \left(x^{-\frac{1}{4}} = 2 \text{ ou } x = 2\right) \Rightarrow (x = 16^{-1} \text{ ou } x = 2).$   
 $S = \left\{2, \frac{1}{16}\right\}$
- d) A condi\c{c}o\~{e} de exist\~{e}ncia do logaritmo \e{ }  $0 < x \neq 1$ .  
 Aplicando logaritmo de base  $\sqrt{x}$  a ambos os membros, temos:  
 $9^{\log_{\sqrt{x}} 3} = 27x \Rightarrow \log_{\sqrt{x}} (9^{\log_{\sqrt{x}} 3}) = \log_{\sqrt{x}} (27x) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\log_{\sqrt{x}} 3) \cdot (\log_{\sqrt{x}} 9) = \log_{\sqrt{x}} 27 + \log_{\sqrt{x}} x \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (\log_{\sqrt{x}} 3) \cdot (2 \log_{\sqrt{x}} 3) = 3 \log_{\sqrt{x}} 3 + 2.$   
 Fazendo  $\log_{\sqrt{x}} 3 = t$ , vem:  
 $2t^2 = 3t + 2 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = 2\right) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \left(\log_{\sqrt{x}} 3 = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_{\sqrt{x}} 3 = 2\right) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{81} \text{ ou } x = 3\right).$   
 $S = \left\{\frac{1}{81}, 3\right\}$

e) A condição de existência do logaritmo é:  $0 < x \neq 1$ . Temos:

$$3^{2 \log_x 3} = x^{\log_x 3x} \Rightarrow 3^{\log_x 3^2} = 3x$$

Aplicando logaritmo de base  $x$  a ambos os membros, vem:

$$3^{\log_x 9} = 3x \Rightarrow \log_x (3^{\log_x 9}) = \log_x (3x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_x 9) \cdot (\log_x 3) = \log_x 3 + \log_x x \Rightarrow 2 \log_x 3 \cdot \log_x 3 = \log_x 3 + 1.$$

Fazendo  $\log_x 3 = t$ , vem:

$$2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left( t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = 1 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \log_x 3 = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_x 3 = 1 \right) \Rightarrow \left( x = \frac{1}{9} \text{ ou } x = 3 \right).$$

$$S = \left\{ \frac{1}{9}, 3 \right\}$$

**281.** A condição de existência dos logaritmos é  $0 < x \neq 1$  e  $x \neq 3$  (I).

Notemos inicialmente  $\log_x \sqrt{x} = \frac{1}{2}$ . Então, a equação proposta pode ser escrita como:

$$2^{\log_x (x^2 - 6x + 9)} = 3^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} \Rightarrow 2^{\log_x (x - 3)^2} = 1 \Rightarrow \log_x (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 = x^0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 1 \Rightarrow (x - 3 = -1 \text{ ou } x - 3 = 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x = 2 \text{ ou } x = 4), \text{ que satisfazem (I).}$$

$$S = \{2, 4\}$$

**282.** a) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 0$  (I). Temos:

$$\log (x^{\log x}) = 1 \Rightarrow (\log x) \cdot (\log x) = 1 \Rightarrow (\log x)^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 1) \Rightarrow \left( x = \frac{1}{10} \text{ ou } x = 10 \right), \text{ que satisfazem (I).}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{10}, 10 \right\}$$

b) A condição de existência dos logaritmos é  $0 < x \neq 1$  (I). Temos:

$$x^{\log x - 1} = 100 \Rightarrow \log_x 100 = \log x - 1.$$

Escrevendo  $\log_x 100$  na base 10, temos:

$$\frac{\log 100}{\log x} = \log x - 1 \Rightarrow \frac{2}{\log x} = \log x - 1.$$

Fazendo  $\log x = t$ , vem:

$$\frac{2}{t} = t - 1 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log x = -1 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow \left( x = \frac{1}{10} \text{ ou } x = 100 \right), \text{ que satisfazem (I).}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{10}, 100 \right\}$$

c) Temos:

$$\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10 \Rightarrow x^{\log \sqrt{x}} = 100 \Rightarrow \log_x 100 = \log \sqrt{x} \Rightarrow \Rightarrow \log_x 100 = \frac{1}{2} \log x.$$

Escrevendo  $\log_x 100$  em base 10, vem:

$$\frac{\log 100}{\log x} = \frac{1}{2} \log x \Rightarrow \frac{2}{\log x} = \frac{\log x}{2} \Rightarrow (\log x)^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log x = -2 \text{ ou } \log x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{100} \text{ ou } x = 100\right).$$

Verificando  $x = \frac{1}{100}$ , temos:

$$\sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^{\log \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)}}} = \sqrt{\left(\frac{1}{100}\right)^{-1}} = 10.$$

Verificando  $x = 100$ , temos:

$$\sqrt{100^{\log \sqrt{100}}} = \sqrt{100^1} = 10.$$

$$S = \left\{ \frac{1}{100}, 100 \right\}$$

**283.** a) A condição de existência do logaritmo é:  $0 < x \neq 1$ . Temos:

$$x^3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x = 100 \cdot \sqrt[3]{10} \Rightarrow x^3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x = 10^{\frac{7}{3}} \Rightarrow \Rightarrow \log_x 10^{\frac{7}{3}} = 3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x \Rightarrow \frac{7}{3} \log_x 10 = 3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x.$$

Escrevendo  $\log_x 10$  em base 10, vem:

$$\frac{7}{3} \cdot \frac{\log 10}{\log x} = 3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x \Rightarrow \frac{7}{3 \log x} = 3 \log^2 x - \frac{2}{3} \log x.$$

Fazendo  $\log x = t$ , vem:

$$\frac{7}{3t} = 3t^2 - \frac{2t}{3} \Rightarrow 9t^3 - 2t^2 - 7 = 0 \Rightarrow 7t^3 + 2t^3 - 2t^2 - 7 = 0.$$

Fatorando por agrupamento, vem:

$$7(t - 1)(t^2 + t + 1) + 2t^2(t - 1) = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow (t - 1)(7t^2 + 7t + 7 + 2t^2) = 0 \Rightarrow (t - 1)(9t^2 + 7t + 7) = 0, \text{ donde } t - 1 = 0 \text{ ou } \underbrace{9t^2 + 7t + 7 = 0}_{\Delta < 0} \Rightarrow t = 1.$$

$$\Delta < 0 \\ (t \notin \mathbb{R})$$

Daí,  $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$ , que é solução, pois satisfaz (I).

$$S = \{10\}$$

b) Notemos inicialmente que:  $\log_{2\sqrt{2}} 4 = y \Rightarrow (2\sqrt{2})^y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$ .  
Então:

$$x^{\log_3 x} - \log_3 x^3 = 3^{-3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) + 8} \Rightarrow x^{(\log_3 x)^3} - 3 \log_3 x = 3^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x 3^4 = (\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x \Rightarrow 4 \log_x 3 = (\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x$$

Escrevendo  $\log_x 3$  em base 3, vem:

$$4 \cdot \frac{\log_3 3}{\log_3 x} = (\log_3 x)^3 - 3 \log_3 x.$$

Fazendo  $\log_3 x = t$ , vem:

$$4 \cdot \frac{1}{t} = t^3 - 3t \Rightarrow t^4 - 3t^2 - 4 = 0 \Rightarrow (t = -2 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x = -2 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow \left(x = \frac{1}{9} \text{ ou } x = 9\right).$$

$$S = \left\{\frac{1}{9}, 9\right\}$$

c) Devemos ter:  $0 < x \neq 1$ .

$$x^{\log^2 x - 3 \log x + 1} = 1000 \Rightarrow \log_x 1000 = \log^2 x - 3 \log x + 1.$$

Escrevendo  $\log_x 1000$  em base 10, temos:

$$\frac{\log 1000}{\log x} = \log^2 x - 3 \log x + 1 \Rightarrow \frac{3}{\log x} = (\log x)^2 - 3 \log x + 1.$$

Fazendo  $\log x = t$ , temos:

$$\frac{3}{t} = t^2 - 3t + 1 \Rightarrow t^3 - 3t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow t^2(t - 3) + (t - 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t - 3)(t^2 + 1) = 0 \Rightarrow (t - 3 = 0 \text{ ou } \underbrace{t^2 + 1 = 0}_{(t \notin \mathbb{R})}) \Rightarrow t = 3.$$

Dai,  $\log x = 3 \Rightarrow x = 1000$ .

$$S = \{1000\}$$

**284.**  $\log_x (2 \cdot x^{x-2} - 1) = 2x - 4 \Rightarrow 2 \cdot x^{x-2} - 1 = x^{2x-4} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 2 \cdot x^{x-2} - 1 = x^{2 \cdot (x-2)}.$

Fazendo  $x^{x-2} = t$ , vem:

$$2 \cdot t - 1 = t^2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1, \text{ isto é, } x^{x-2} = 1.$$

Como  $0 < x \neq 1$ , temos:  $x^{x-2} = 1 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ .

$$S = \{2\}$$

**285.** Devemos ter:  $0 < x \neq 1$ .

$$3 + \log_x \left(\frac{x^{4x-6} + 1}{2}\right) = 2x \Rightarrow \log_x \left(\frac{x^{4x-6} + 1}{2}\right) = 2x - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^{4x-6} + 1}{2} = x^{2x-3} \Rightarrow \frac{x^{2 \cdot (2x-3)} + 1}{2} = x^{2x-3}$$

Fazendo  $x^{2x-3} = t$ , vem:

$$\frac{t^2 + 1}{2} = t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow x^{2x - 3} = 1.$$

Como  $0 < x \neq 1$ , temos:

$$x^{2x - 3} = 1 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

**286.** a) Devemos ter:  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Aplicando a propriedade dos logaritmos à 2ª equação, temos:

$$\log_2 x - \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 \left( \frac{x}{y} \right) = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2^2 \Rightarrow x = 4y.$$

Então, o sistema proposto fica reduzido a  $\begin{cases} x \cdot y = 16 \\ x = 4y \end{cases}$

donde  $y = -2$  (não convém) ou  $y = 2$  e  $x = 8$ .

$$S = \{(8, 2)\}$$

b) Devemos ter  $0 < x \neq 1$  e  $y > 0$ .

Da 2ª equação temos:

$$x^{\log_2 y} = 64 \Rightarrow \log_x 64 = \log_2 y \text{ (I)}.$$

$$\text{Da 1ª equação vem } y = \frac{32}{x} \text{ (II)}.$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\log_x 64 = \log_2 \left( \frac{32}{x} \right) \Rightarrow \log_x 64 = \log_2 32 - \log_2 x.$$

Passando  $\log_x 64$  para a base 2, vem:

$$\frac{\log_2 64}{\log_2 x} = 5 - \log_2 x.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$\frac{6}{t} = 5 - t \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 x = 2 \text{ ou } \log_2 x = 3) \Rightarrow (x = 4 \text{ ou } x = 8).$$

Se  $x = 4$ , de (II), segue que  $y = 8$ .

Se  $x = 8$ , de (II), segue que  $y = 4$ .

$$S = \{(4, 8); (8, 4)\}$$

c) Devemos ter:  $0 < x \neq 1$  e  $y > 0$ .

Da 1ª equação temos:

$$\log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \Rightarrow \log_5 x + y = 7.$$

Da 2ª equação temos:

$$x^y = 5^{12} \Rightarrow \log_x 5^{12} = y.$$

Então, o sistema proposto fica reduzido a  $\begin{cases} \log_5 x + y = 7 \text{ (I)} \\ y = \log_x 5^{12} \text{ (II)} \end{cases}$   
 Substituindo (II) em (I), vem:

$$\log_5 x + \log_x 5^{12} = 7 \Rightarrow \log_5 x + 12 \log_x 5 = 7.$$

Escrevendo  $\log_x 5$  em base 5, vem:

$$\log_5 x + 12 \cdot \frac{\log_5 5}{\log_5 x} = 7.$$

Fazendo  $\log_5 x = t$ , vem:

$$t + \frac{12}{t} = 7 \Rightarrow t^2 - 7t + 12 = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ ou } t = 4, \text{ isto é,}$$

$$t = 3 \Leftrightarrow \log_5 x = 3 \Rightarrow x = 5^3. \text{ Em (II): } y = \log_{5^3} 5^{12} \Rightarrow y = 4.$$

$$t = 4 \Leftrightarrow \log_5 x = 4 \Rightarrow x = 5^4. \text{ Em (II): } y = \log_{5^4} 5^{12} \Rightarrow y = 3.$$

$$S = \{(125, 4); (625, 3)\}$$

**288.** a) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 6$  (I).

Escrevendo  $\log_{\frac{1}{3}}(x - 6)$  em base 3 e aplicando propriedades dos logaritmos, vem:

$$\log_3(x + 2) - \log_{\frac{1}{3}}(x - 6) = \log_3(2x - 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x + 2) - \frac{\log_3(x - 6)}{\log_3 \frac{1}{3}} = \log_3(2x - 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x + 2) + \log_3(x - 6) = \log_3(2x - 5) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3[(x + 2)(x - 6)] = \log_3(2x - 5) \Rightarrow (x + 2)(x - 6) = 2x - 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow (x = -1 \text{ ou } x = 7).$$

Apenas  $x = 7$  satisfaz (I).

$$S = \{7\}$$

b) A condição de existência dos logaritmos é  $1 < x < 5$  (I).

Aplicando propriedades e escrevendo os logaritmos em base 2, vem:

$$\log_2(x + 2) + \log_{\frac{1}{2}}(5 - x) + \text{colog}_{\frac{1}{2}}(x - 1) = \log_2(8 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x + 2) + \frac{\log_2(5 - x)}{\log_2 \frac{1}{2}} - \frac{\log_2(x - 1)}{\log_2 \frac{1}{2}} = \log_2(8 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(x + 2) - \log_2(5 - x) + \log_2(x - 1) = \log_2(8 - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 \left[ \frac{(x + 2)(x - 1)}{5 - x} \right] = \log_2(8 - x) \Rightarrow \frac{(x + 2)(x - 1)}{5 - x} = 8 - x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3, \text{ que é solução, pois satisfaz (I).}$$

$$S = \{3\}$$

c) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 4$  (I).

Aplicando propriedades e escrevendo os logaritmos em base 3, vem:

$$\begin{aligned} \log_3(x^2 - 2x + 2) + \log_{\frac{1}{3}}(2x + 1) &= \log_3(x - 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3(x^2 - 2x + 2) + \frac{\log_3(2x + 1)}{\log_3 \frac{1}{3}} &= \log_3(x - 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3(x^2 - 2x + 2) - \log_3(2x + 1) &= \log_3(x - 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_3\left(\frac{x^2 - 2x + 2}{2x + 1}\right) &= \log_3(x - 4) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{2x + 1} = x - 4 &\Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 6. \end{aligned}$$

Apenas  $x = 6$  satisfaz (I).

$$S = \{6\}$$

**290.** a) Devemos ter  $x > 0$ .

Escrevendo  $\log_9 x$  em base 3, vem:

$$\log_3^2 x - 5 \log_9 x + 1 = 0 \Rightarrow (\log_3 x)^2 - 5 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 9} + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x)^2 - \frac{5}{2} \log_3 x + 1 = 0.$$

Fazendo  $\log_3 x = t$ , temos:

$$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0 \Rightarrow \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_3 x = \frac{1}{2} \text{ ou } \log_3 x = 2\right) \Rightarrow (x = \sqrt{3} \text{ ou } x = 9).$$

$$S = \{\sqrt{3}, 9\}$$

b) Devemos ter  $x > 0$ .

Aplicando propriedades dos logaritmos e passando-os para a base 2, vem:

$$\log_2^2 x - \log_8 x^8 = 1 \Rightarrow (\log_2 x)^2 - 8 \cdot \log_8 x = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 x)^2 - 8 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 8} = 1 \Rightarrow (\log_2 x)^2 - \frac{8}{3} \log_2 x = 1.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$t^2 - \frac{8}{3}t - 1 = 0 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{3} \text{ ou } t = 3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_2 x = -\frac{1}{3} \text{ ou } \log_2 x = 3\right) \Rightarrow \left(x = 2^{-\frac{1}{3}} \text{ ou } x = 8\right).$$

$$S = \left\{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 8\right\}$$

c) Devemos ter  $x > 0$ .

Aplicando propriedades dos logaritmos e escrevendo-os em base 3, vem:

$$\log_3^2 x = 2 + \log_9 x^2 \Rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 + 2 \log_9 x \Rightarrow$$



$$\Rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 + 2 \cdot \frac{\log_3 x}{\log_3 9} \Rightarrow (\log_3 x)^2 = 2 + 2 \cdot \frac{\log_3 x}{2}$$

Fazendo  $\log_3 x = t$ , vem:

$$t^2 = 2 + t \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow (\log_3 x = -1 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 9\right).$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}, 9\right\}$$

- 291.** a) Aplicando propriedades dos logaritmos e passando-os para a base 2, podemos escrever:

$$\sqrt{\log_2 x^4} + 4 \cdot \log_4 \sqrt{\frac{2}{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{4 \cdot \log_2 x} + 4 \cdot \log_4 \left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 2 \log_4 \left(\frac{2}{x}\right) = 2 \Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 2 \cdot (\log_4 2 - \log_4 x) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 2 \left(\frac{1}{2} - \log_4 x\right) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 1 - 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{4 \log_2 x} + 1 - \log_2 x = 2$$

$$\text{Fazendo } \log_2 x = t, \text{ vem: } \sqrt{4t} + 1 - t = 2 \Rightarrow \sqrt{4t} = 1 + t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2,$$

que de fato é solução, por verificação.

$$S = \{2\}$$

- b) Escrevendo  $\log_4 x$  em base 2, vem:

$$\sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \log_4 x - 2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{4 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} - 2} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 + \log_2 x} + \sqrt{2 \cdot \log_2 x - 2} = 4.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$\sqrt{1 + t} + \sqrt{2t - 2} = 4 \Rightarrow (t = 99 \text{ ou } t = 3).$$

$$\text{Verificando } t = 99: \sqrt{100} + \sqrt{196} = 4 \text{ (F).}$$

$$\text{Verificando } t = 3: \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4 \text{ (V).}$$

Assim,  $t = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 3 \Rightarrow x = 8$ , que é de fato solução, pois:

$$\sqrt{1 + \log_2 8} + \sqrt{4 \cdot \log_4 8 - 2} = \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4 \text{ (V)!}$$

$$S = \{8\}$$

**292.** 
$$\frac{1 + \log_2 (x - 4)}{\log_{\sqrt{2}} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})} = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + \log_2 (x - 4) &= \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 2 &= \log_2 (x - 4) = \log_{\sqrt{2}} (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3}). \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade dos logaritmos e escrevendo-os em base 2, vem:

$$\begin{aligned} \log_2 [2 \cdot (x - 4)] &= \frac{\log_2 (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})}{\log_2 \sqrt{2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 (2x - 8) &= 2 \log_2 (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 (2x - 8) &= \log_2 (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - 8 &= (\sqrt{x + 3} - \sqrt{x - 3})^2 \Rightarrow (x = -5 \text{ ou } x = 5). \end{aligned}$$

Como  $x = -5$  não convém, a única solução é  $x = 5$ .  
 $S = \{5\}$

**293.** a) Devemos ter  $y > 0$  e  $x < y$ .

Da 1ª equação, vem:

$$\log_{\frac{1}{2}} (y - x) + \log_2 \left(\frac{1}{y}\right) = -2 \Rightarrow \frac{\log_2 (y - x)}{\log_2 \frac{1}{2}} + \log_2 \left(\frac{1}{y}\right) = -2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\log_2 (y - x) + \log_2 \left(\frac{1}{y}\right) &= -2 \Rightarrow \log_2 \left(\frac{\frac{1}{y}}{y - x}\right) = -2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\frac{1}{y}}{y - x} &= 2^{-2} \Rightarrow x = \frac{y^2 - 4}{y} \text{ (I)}. \end{aligned}$$

Substituindo esse valor de  $x$  na 2ª equação, vem  $\left(\frac{y^2 - 4}{y}\right)^2 + y^2 = 25$ .  
 Fazendo  $y^2 = t$ , segue que:

$$\begin{aligned} \frac{(t - 4)^2}{t} + t &= 25 \Rightarrow 2t^2 - 33t + 16 = 0 \Rightarrow \left(t = 16 \text{ ou } t = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(y^2 = 16 \text{ ou } y^2 = \frac{1}{2}\right) &\xrightarrow{y > 0} y = 4 \text{ ou } y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Em (I), temos que:

$$\begin{aligned} y = 4 \Rightarrow x &= \frac{4^2 - 4}{4} = 3 \text{ e } y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

$$S = \left\{ (3, 4); \left(-\frac{7\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

b) Devemos ter  $y > 2$  e  $x^2 - 2y^2 + 10y - 7 > 0$  (I).

Da 1ª equação, vem:

$$\log_9 (x^2 + 1) - \log_3 (y - 2) = 0 \Rightarrow \frac{\log_3 (x^2 + 1)}{\log_3 9} = \log_3 (y - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(x^2 + 1) = 2 \log_3(y - 2) \Rightarrow \log_3(x^2 + 1) = \log_3(y - 2)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 1 = (y - 2)^2 \Rightarrow x^2 = y^2 - 4y + 3 \text{ (II)}.$$

De 2ª equação vem:

$$\log_2(x^2 - 2y^2 + 10y - 7) = 2 \Rightarrow x^2 - 2y^2 + 10y - 7 = 2^2.$$

$$\text{Por (II): } (y^2 - 4y + 3) - 2y^2 + 10y - 7 - 4 = 0 \Rightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 2, \text{ que não convém, pois não satisfaz (I), ou } y = 4.$$

Substituindo  $y = 4$  em (II), temos:

$$x^2 = 4^2 - 4 \cdot 4 + 3 \Rightarrow x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3}.$$

$$S = \{(-\sqrt{3}, 4); (\sqrt{3}, 4)\}$$

c) Devemos ter  $x + y > 0$  e  $x - y > 0$  (I).

Da 1ª equação temos que:

$$\log_9(x^2 + 2) + \log_{81}(y^2 + 9) = 2 \Rightarrow \log_9(x^2 + 2) + \frac{\log_9(y^2 + 9)}{\log_9 81} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_9(x^2 + 2) + \frac{1}{2} \log_9(y^2 + 9) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_9 \left[ (x^2 + 2) \cdot (y^2 + 9)^{\frac{1}{2}} \right] = 2 \Rightarrow (x^2 + 2) \cdot (y^2 + 9)^{\frac{1}{2}} = 81 \text{ (III)}.$$

Da 2ª equação temos que:

$$2 \cdot \log_4(x + y) = \log_2(x - y) \Rightarrow 2 \cdot \frac{\log_2(x + y)}{\log_2 4} = \log_2(x - y) \Rightarrow \\ \Rightarrow x + y = x - y \Rightarrow y = 0.$$

Substituindo  $y = 0$  em (III), vem:

$$(x^2 + 2) \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 81 \Rightarrow x = -5 \text{ ou } x = 5.$$

$x = -5$  e  $y = 0$  não satisfazem (I).

$x = 5$  e  $y = 0$  satisfazem (I).

$$S = \{(5, 0)\}$$

d) Da 1ª equação vem:

$$\log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(\log_2 x) + \frac{\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right)}{\log_3 \frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_3(\log_2 x) - \log_3\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right) = 1 \Rightarrow \log_3\left(\frac{\log_2 x}{\log_{\frac{1}{2}} y}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_{\frac{1}{2}} y} = 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \log_{\frac{1}{2}} y \text{ (I)}.$$

Da 2ª equação, aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros, vem:

$$xy^2 = 4 \Rightarrow \log_2(x \cdot y^2) = \log_2 4 \Rightarrow \log_2 x + \log_2 y^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x + 2 \log_2 y = 2.$$

Por (I), podemos escrever:

$$3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} y + 2 \log_2 y = 2 \Rightarrow 3 \cdot \frac{\log_2 y}{\log_2 \frac{1}{2}} + 2 \log_2 y = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3 \log_2 y + 2 \log_2 y = 2 \Rightarrow \log_2 y = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}.$$

Substituindo  $y = \frac{1}{4}$  em (I) segue que:

$$\log_2 x = 3 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \Rightarrow \log_2 x = 6 \Rightarrow x = 2^6 = 64.$$

$$S = \left\{ \left( 64, \frac{1}{4} \right) \right\}$$

e) Devemos ter:  $x > 0$  e  $y > 0$ .

Escrevendo os logaritmos das duas equações em base 2, vem:

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = a \\ \log_4 x - \log_8 y = b \end{cases} = \begin{cases} \log_2 x - \frac{\log_2 y}{\log_2 4} = a \\ \frac{\log_2 x}{\log_2 4} - \frac{\log_2 y}{\log_2 8} = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 y = a \quad (I) \\ \frac{1}{2} \log_2 x - \frac{1}{3} \log_2 y = b \end{cases}$$

Somando à 2ª equação a 1ª multiplicada por  $\left(-\frac{1}{2}\right)$ , vem:

$$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \log_2 y = -\frac{a}{2} + b \Rightarrow \frac{1}{12} \log_2 y = \frac{a - 2b}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 y = 6a - 12b \Rightarrow y = 2^{6a - 12b}.$$

Substituindo  $y = 2^{6a - 12b}$  em (I), segue que:

$$\log_2 x - \frac{1}{2} \log_2 2^{6a - 12b} = a \Rightarrow \log_2 x - \frac{1}{2} \cdot (6a - 12b) = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x = 4a - 6b \Rightarrow x = 2^{4a - 6b}.$$

$$S = \{(2^{4a - 6b}, 2^{6a - 12b})\}$$

**295.** Escrevendo  $\log_{16} (x - 3)$  em base 4, vem:

$$\log_4 (x - 3) - \log_{16} (x - 3) = 1 \Rightarrow \log_4 (x - 3) - \frac{\log_4 (x - 3)}{\log_4 16} = 1.$$

Fazendo  $\log_4 (x - 3) = t$ , vem:

$$t - \frac{t}{2} = 1 \Rightarrow t = 2, \text{ isto é, } \log_4 (x - 3) = 2 \Rightarrow x - 3 = 4^2 \Rightarrow x = 19,$$

que é solução, pois satisfaz a condição  $x > 3$ .

$$S = \{19\}$$

**296.** A equação  $x^2 - x \cdot (\log_b a) + 2 \log_a b = 0$  tem duas raízes reais e iguais se, e somente se,  $\Delta = 0$ , isto é,

$$(-\log_b a)^2 - 4 \cdot 2 \log_a b = 0 \Rightarrow (\log_b a)^2 - 8 \log_a b = 0.$$

Lembrando que  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ , temos:  $(\log_b a)^2 - 8 \frac{1}{\log_b a} = 0$ .

Fazendo  $\log_b a = t$ , vem:

$$t^2 - \frac{8}{t} = 0 \Rightarrow t = 2, \text{ isto é, } \log_b a = 2 \Rightarrow a = b^2.$$

**297.** A condição de existência dessa equação é:  $0 < x \neq 1$ .

Notemos inicialmente que:

$$\log_{\sqrt{x}} x^2 = y \Rightarrow (\sqrt{x})^y = x^2 \Rightarrow y = 4 \text{ e } \log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}.$$

Então, temos:

$$\log_2 x = \log_{\sqrt{x}} x^2 + \log_x 2 \Rightarrow \log_2 x = 4 + \frac{1}{\log_2 x}.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , temos:

$$t = 4 + \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 4t - 1 = 0 \Rightarrow t = 2 - \sqrt{5} \text{ ou } t = 2 + \sqrt{5},$$

isto é,  $\log_2 x = 2 - \sqrt{5}$  ou  $\log_2 x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = 2^{2 - \sqrt{5}}$  ou  $x = 2^{2 + \sqrt{5}}$ .

$$S = \{2^{2 - \sqrt{5}}, 2^{2 + \sqrt{5}}\}$$

**298.** Como sabemos,  $\log_{a^2} x = \frac{1}{\log_x a^2} = \frac{1}{2 \log_x a}$ .

Escrevendo  $\log_{x^2} a$  em base  $x$ , vem:

$$\log_{x^2} a = \frac{\log_x a}{\log_x x^2} = \frac{\log_x a}{2}.$$

Então, temos:

$$\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1 \Rightarrow \frac{1}{2 \log_x a} + \frac{\log_x a}{2} = 1.$$

Fazendo  $\log_x a = t$ , temos:

$$\frac{1}{2t} + \frac{t}{2} = 1 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t - 1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x a = 1 \Rightarrow x = a.$$

**299.** A condição de existência dessa equação é  $0 < x \neq 1$  (I).

Expressando  $\log_{(x+1)} x$  em base  $x$ , temos:

$$\log_x (x+1) = \log_{(x+1)} x \Rightarrow \log_x (x+1) = \frac{\log_x x}{\log_x (x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x (x+1) = \frac{1}{\log_x (x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_x (x + 1))^2 = 1 \Rightarrow \log_x (x + 1) = -1 \text{ ou } \log_x (x + 1) = 1.$$

Se  $\log_x (x + 1) = -1 \Rightarrow x^{-1} = x + 1 \Rightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ , que não convém, pois não satisfaz (I), ou  $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$  (satisfaz (I)).

Se  $\log_x (x + 1) = 1 \Rightarrow x + 1 = x \Rightarrow 0 = -1$ , absurdo!

$$S = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

**300.** a) Devemos ter:  $0 < x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \log_2 x = \log_x 2 &\Rightarrow \log_2 x = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} \Rightarrow (\log_2 x)^2 = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log_2 x = -1 \text{ ou } \log_2 x = 1) \Rightarrow \left( x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \right). \\ S &= \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\} \end{aligned}$$

b) Devemos ter:  $0 < x \neq 1$ .

$$\log_3 x = 1 + \log_x 9 \Rightarrow \log_3 x = 1 + \frac{\log_3 9}{\log_3 x}.$$

Fazendo  $\log_3 x = t$ , vem:

$$t = 1 + \frac{2}{t} \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow (t = -1 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x = -1 \text{ ou } \log_3 x = 2) \Rightarrow \left( x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 9 \right).$$

$$S = \left\{ \frac{1}{3}, 9 \right\}$$

c) Devemos ter:  $0 < x \neq 1$ .

$$\begin{aligned} \log_2 x - 8 \log_{x^2} 2 = 3 &\Rightarrow \log_2 x - 8 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 x^2} = 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2 x - \frac{8}{2 \log_2 x} = 3. \end{aligned}$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$t - \frac{8}{2t} = 3 \Rightarrow 2t^2 - 6t - 8 = 0 \Rightarrow (t = 4 \text{ ou } t = -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 x = 4 \text{ ou } \log_2 x = -1) \Rightarrow \left( x = 16 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \right).$$

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, 16 \right\}$$

d) Devemos ter:  $0 < x \neq 1$ .

$$\log_{\sqrt{x}} 2 + 4 \cdot 2 \log_4 x + 9 = 0 \Rightarrow \frac{\log_2 2}{\log_2 \sqrt{x}} + 8 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_2 x^{\frac{1}{2}}} + 4 \log_2 x + 9 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2} \log_2 x} + 4 \log_2 x + 9 = 0.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$\frac{2}{t} + 4t + 9 = 0 \Rightarrow 4t^2 + 9t + 2 = 0 \Rightarrow \left( t = -\frac{1}{4} \text{ ou } t = -2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \log_2 x = -\frac{1}{4} \text{ ou } \log_2 x = -2 \right) \Rightarrow \left( x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ ou } x = \frac{1}{4} \right).$$

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{4} \right\}$$

**301.**

a) Notemos inicialmente que:

$$\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} = y \Rightarrow (\sqrt{5})^y = 5\sqrt{5} \Rightarrow 5^{\frac{y}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y = 3.$$

$$\text{Então: } \log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + 3} = -\sqrt{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{\frac{\log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}}{\log_{\sqrt{5}} x} + 3} = -\sqrt{6}.$$

Fazendo  $\log_{\sqrt{5}} x = t$ , vem:

$$t \cdot \sqrt{\frac{3}{t} + 3} = -\sqrt{6} \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = -2).$$

$t = 1$  não é solução da equação irracional, pois

$$1 \cdot \sqrt{\frac{3}{1} + 3} = -\sqrt{6}. \text{ (F)}$$

$t = -2$  é solução da equação irracional, pois

$$(-2) \sqrt{-\frac{3}{2} + 3} = -\sqrt{6}. \text{ (V)}$$

$$\text{Assim, } t = -2 \Rightarrow \log_{\sqrt{5}} x = -2 \Rightarrow x = (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{5}.$$

$$S = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$$

b) Escrevendo  $\log_x \sqrt{27}$  em base 3, vem:

$$\sqrt{1 + \log_x \sqrt{27}} \cdot \log_3 x + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{1 + \frac{\log_3 \sqrt{27}}{\log_3 x}} \cdot \log_3 x + 1 = 0.$$

Fazendo  $\log_3 x = t$  e lembrando que  $\log_3 \sqrt{27} = \frac{3}{2}$ , vem:

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2t}} \cdot t + 1 = 0 \Rightarrow t^2 + \frac{3}{2}t - 1 = 0 \Rightarrow \left( t = -2 \text{ ou } t = \frac{1}{2} \right).$$

$t = -2$  é solução da equação irracional, pois:

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2(-2)}} \cdot (-2) + 1 = 0. \text{ (V)}$$

$t = \frac{1}{2}$  não é solução da equação irracional, pois:

$$\sqrt{1 + \frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2}} + 1 = 0. \text{ (F)}$$

Daí,  $t = -2 \Rightarrow \log_3 x = -2 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$ .

$$S = \left\{ \frac{1}{9} \right\}$$

**302.** Devemos ter  $0 < x < 10$  e  $x \neq 1$  (I).

$$1 + 2 \log_x 2 \cdot \log_4 (10 - x) = \frac{2}{\log_4 x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \cdot \frac{\log_4 2}{\log_4 x} \cdot \log_4 (10 - x) = \frac{2}{\log_4 x}$$

Fazendo  $\log_4 x = a$  e  $\log_4 (10 - x) = b$  (II), temos:

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b = \frac{2}{a} \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a = 2 - b \text{ (III)}$$

De (II) segue que:  $\begin{cases} 4^a = x \\ 4^b = 10 - x \end{cases}$

Utilizando (III) na 1ª equação, vem:

$$4^{2-b} = x \Leftrightarrow \frac{4^2}{4^b} = x \Rightarrow \frac{16}{10-x} = x \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x = 2 \text{ ou } x = 8)$ , que são soluções, pois satisfazem (I).

$$S = \{2, 8\}$$

**303.** a) Devemos ter  $0 < x \neq 1$  e  $0 < y \neq 1$ .

Como  $\log_y x = \frac{1}{\log_x y}$ , temos na 1ª equação:

$$\log_y x + \log_x y = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{\log_x y} + \log_x y = \frac{5}{2} \text{ (I)}$$

Aplicando logaritmo de base  $x$  à 2ª equação, vem:

$$xy = 8 \Rightarrow \log_x (x \cdot y) = \log_x 8 \Rightarrow 1 + \log_x y = \log_x 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x y = \log_x 8 - 1 \text{ (II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos:  $\frac{1}{\log_x 8 - 1} + \log_x 8 - 1 = \frac{5}{2}$ .

Fazendo  $\log_x 8 = t$ , vem:

$$\frac{1}{t-1} + t - 1 = \frac{5}{2} \Rightarrow 2t^2 - 9t + 9 = 0 \Rightarrow \left( t = 3 \text{ ou } t = \frac{3}{2} \right)$$

Se  $t = 3$ ,  $\log_x 8 = 3 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$ .

Em (II):  $\log_2 y = \log_2 8 - 1 \Rightarrow \log_2 y = 2 \Rightarrow y = 4$ .

Se  $t = \frac{3}{2}$ ,  $\log_x 8 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = 4$ .



Em (II):  $\log_4 y = \log_4 8 - 1 \Rightarrow \log_4 y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$ .

$$S = \{(2, 4); (4, 2)\}$$

b) Devemos ter:  $0 < x \neq 1$  e  $0 < y \neq 1$ .

Expressando os logaritmos da 1ª equação em base  $x$ , vem:

$$3 \cdot \left( \log_{y^2} x - \log_{\frac{1}{x}} y \right) = 10 \Rightarrow 3 \cdot \left( 2 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x y^2} - \frac{\log_x y}{\log_x \left( \frac{1}{x} \right)} \right) = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \left( \frac{2}{2 \log_x y} + \log_x y \right) = 10 \Rightarrow \frac{1}{\log_x y} + \log_x y = \frac{10}{3} \text{ (I)}.$$

Aplicando logaritmo de base  $x$  a ambos os membros da 2ª equação, temos:

$$xy = 81 \Rightarrow \log_x (xy) = \log_x 81 \Rightarrow 1 + \log_x y = \log_x 81 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x y = \log_x 81 - 1 \text{ (II)}.$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\frac{1}{\log_x 81 - 1} + \log_x 81 - 1 = \frac{10}{3}.$$

Fazendo  $\log_x 81 = t$ , temos:

$$\frac{1}{t - 1} + t - 1 = \frac{10}{3} \Rightarrow 3t^2 - 16t + 16 = 0 \Rightarrow \left( t = 4 \text{ ou } t = \frac{4}{3} \right).$$

1ª possibilidade:  $t = 4$

Temos:  $\log_x 81 = 4 \Rightarrow x^4 = 81 \Rightarrow x = -3$  (não convém) ou  $x = 3$ .

Se  $x = 3$ , em (II), temos:  $\log_3 y = \log_3 81 - 1 \Rightarrow y = 3^3 = 27$ .

2ª possibilidade:  $t = \frac{4}{3}$

Temos:  $\log_x 81 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 27$ . Se  $x = 27$ , em (II) temos:

$$\log_{27} y = \log_{27} 81 - 1 \Rightarrow \log_{27} y = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3.$$

$$S = \{(3, 27), (27, 3)\}$$

**304.** Devemos ter  $\begin{cases} 4 - x > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow -3 < x < 4$ .

Expressando os logaritmos em base 2, temos:

$$\log_6 (x + 3) = \frac{\log_2 (x + 3)}{\log_2 6}; \log_{0,25} (4 - x) = \frac{\log_2 (4 - x)}{\log_2 0,25} =$$

$$= -\frac{1}{2} \log_2 (4 - x).$$

Então, voltando à equação, temos:

$$\frac{1}{\log_6 (x + 3)} + \frac{2 \log_{0,25} (4 - x)}{\log_2 (x + 3)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 6}{\log_2 (x + 3)} + \frac{2 \left( -\frac{1}{2} \right) \log_2 (4 - x)}{\log_2 (x + 3)} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 6 - \log_2 (4 - x)}{\log_2 (x + 3)} = 1 (*) \Rightarrow \log_2 \left( \frac{6}{4 - x} \right) = \log_2 (x + 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6}{4 - x} = x + 3 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x = -2 \text{ ou } x = 3).$$

Notemos, porém, que  $x = -2$  não convém, pois  $x = -2$  anula o denominador de (\*).

Logo, a única solução da equação é  $x = 3$ .

$$S = \{3\}$$

**306.** a)  $\log_x 3 \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 \left( \frac{x}{3} \right)} + \frac{1}{\log_3 \left( \frac{x}{81} \right)} = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{1}{\log_3 x} \cdot \frac{1}{\log_3 x - 1} + \frac{1}{\log_3 x - 4} = 0.$

Fazendo  $\log_3 x = t$ , vem:

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{t - 1} + \frac{1}{t - 4} = 0 \Rightarrow t^2 - 4 = 0 \Rightarrow (t = -2 \text{ ou } t = 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 x = 2 \text{ ou } \log_3 x = -2) \Rightarrow \left( x = 9 \text{ ou } x = \frac{1}{9} \right).$$

$$S = \left\{ 9, \frac{1}{9} \right\}$$

b)  $\log_{3x} \left( \frac{3}{x} \right) + \log_3 27x^2 = 5 \Rightarrow \frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 3x} + \log_3 27x^2 = 5 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + (3 + 2 \cdot \log_3 x) = 5$

Fazendo  $\log_3 x = t$ , vem:

$$\frac{1 - t}{1 + t} + (3 + 2t) = 5 \Rightarrow (1 - t) + (3 + 2t)(1 + t) = 5(1 + t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2t^2 - t - 1 = 0 \Rightarrow \left( t = 1 \text{ ou } t = -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \log_3 x = 1 \text{ ou } \log_3 x = -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$S = \left\{ 3, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$$

c) Expressando os logaritmos em base 2, vem:

$$\log_x 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 x} = \frac{3}{\log_2 x}; \log_{2x} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 2x} = \frac{3}{1 + \log_2 x};$$

$$\log_{4x} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4x} = \frac{3}{2 + \log_2 x}.$$

Temos:

$$\frac{1}{\log_x 8} + \frac{1}{\log_{2x} 8} + \frac{1}{\log_{4x} 8} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{1 + \log_2 x} + \frac{1}{2 + \log_2 x} = 2$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$\frac{t}{3} + \frac{1+t}{3} + \frac{2+t}{3} = 2 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2, \text{ que}$$

é, de fato, solução.

$$S = \{2\}$$

d) Notemos que  $x = 1$  é solução particular da equação.

Expressando os logaritmos em base  $x$ , vem:

$$\log_x x^2 - 14 \cdot \log_{16x} x^3 + 40 \cdot \log_{4x} \sqrt{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \log_x x - 42 \cdot \log_{16x} x + 20 \cdot \log_{4x} x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x \left(\frac{x}{2}\right)} - 42 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x (16x)} + 20 \cdot \frac{\log_x x}{\log_x 4x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1 - \log_x 2} - \frac{42}{\log_x 2^4 + 1} + \frac{20}{\log_x 2^2 + 1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1 - \log_x 2} - \frac{42}{4 \log_x 2 + 1} + \frac{20}{2 \log_x 2 + 1} = 0.$$

Fazendo  $\log_x 2 = t$ , vem:

$$\frac{2}{1-t} - \frac{42}{4t+1} + \frac{20}{2t+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-t} + \frac{10}{2t+1} = \frac{21}{4t+1} \Rightarrow 2t^2 + 3t - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = -2\right), \text{ isto é,}$$

$$\log_x 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \text{ ou}$$

$$\log_x 2 = -2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Como  $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$  não convém,  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

$$S = \left\{1, 4, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

**307.** Como  $\log_{\frac{1}{\sqrt{1+x}}} 10 = \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)}$ , podemos escrever:

$$\frac{1}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} \cdot \log(x^2 - 3x + 2) = -2 + \frac{1}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} \cdot \log(x - 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x^2 - 3x + 2)}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} - \frac{\log(x - 3)}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}\right)}{\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)} = -2 \Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}\right) = -2 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}\right) = \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)^{-2} \Rightarrow \log\left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}\right) = \log(1+x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} = 1 + x \Rightarrow x = 5.$$

$$S = \{5\}$$

**308.** Lembrando que  $a^{\log_a b} = b$ , temos:

$$x^{\log_2^2 x^2 - \log_2(2x) - 2} + \left( [(x + 2)^2]^{\log_{(x+2)^2} 4} \right)^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{(2 \log_2 x)^2 - [\log_2 2 + \log_2 x] - 2} + 4^{\frac{1}{2}} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{(2 \log_2 x)^2 - \log_2 x - 3} = 1$$

Notando que  $x = 1$  é solução particular dessa equação exponencial, para  $x \neq 1$  temos:

$$(2 \log_2 x)^2 - \log_2 x - 3 = 0.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$4t^2 - t - 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{4} \text{ ou } t = 1, \text{ isto é,}$$

$$\log_2 x = -\frac{3}{4} \text{ ou } \log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2^{-\frac{3}{4}} \text{ ou } x = 2.$$

$$S = \left\{ 1, 2^{-\frac{3}{4}}, 2 \right\}$$

**309.** a)  $\log_a(ax) \cdot \log_x(ax) = \log_{a^2} \frac{1}{a} \Rightarrow \log_a(ax) \cdot \frac{\log_a(ax)}{\log_a x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\log_a x + 1) \cdot \frac{(1 + \log_a x)}{\log_a x} = -\frac{1}{2}$$

Fazendo  $\log_a x = t$ , vem:

$$(t + 1) \cdot \frac{(1 + t)}{t} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2t^2 + 5t + 2 = 0 \Rightarrow \left(t = -\frac{1}{2} \text{ ou } t = -2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_a x = -\frac{1}{2} \text{ ou } \log_a x = -2\right) \Rightarrow \left(x = a^{-\frac{1}{2}} \text{ ou } x = a^{-2}\right).$$

$$S = \left\{a^{-\frac{1}{2}}, a^{-2}\right\}$$

b)  $2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2x} a = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \log_x a + \frac{\log_x a}{\log_x(ax)} + 3 \cdot \frac{\log_x a}{\log_x(a^2 \cdot x)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \log_x a + \frac{\log_x a}{1 + \log_x a} + 3 \cdot \frac{\log_x a}{1 + 2 \log_x a} = 0$$

Fazendo  $\log_x a = t$ , vem:

$$2t + \frac{t}{1 + t} + \frac{3t}{1 + 2t} = 0 \Rightarrow 4t^3 + 11t^2 + 6t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(4t^2 + 11t + 6) = 0.$$

1ª possibilidade:  $t = 0$ , isto é,  $\log_x a = 0 \Rightarrow a = 1$ , o que é impossível por hipótese.

2ª possibilidade:  $4t^2 + 11t + 6 = 0 \Rightarrow (t = -2 \text{ ou } t = -\frac{3}{4})$ . Daí,

$$t = -2, \log_x a = -2 \Rightarrow x^{-2} = a \Rightarrow x = a^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{ou } t = -\frac{3}{4}, \log_x a = -\frac{3}{4} \Rightarrow x^{-\frac{3}{4}} = a \Rightarrow x = a^{-\frac{4}{3}}$$

$$S = \left\{a^{-\frac{1}{2}}, a^{-\frac{4}{3}}\right\}$$

c) Como  $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$ , podemos escrever:

$$\log_x(ax) \cdot \frac{1}{\log_x a} = 1 + \log_x \sqrt{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_x a + 1) \cdot \frac{1}{\log_x a} = 1 + \log_x a^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_x a + 1) \cdot \frac{1}{\log_x a} = 1 + \frac{1}{2} \log_x a.$$

Fazendo  $\log_x a = t$ , vem:

$$(t + 1) \cdot \frac{1}{t} = 1 + \frac{t}{2} \Rightarrow \frac{t + 1}{t} = \frac{2 + t}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 - 2 = 0 \Rightarrow (t = -\sqrt{2} \text{ ou } t = \sqrt{2}).$$

$$\text{Se } t = -\sqrt{2}, \log_x a = -\sqrt{2} \Rightarrow a = x^{-\sqrt{2}} \Rightarrow x = a^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

ou

$$\text{Se } t = \sqrt{2}, \log_x a = \sqrt{2} \Rightarrow a = x^{\sqrt{2}} \Rightarrow x = a^{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

$$S = \left\{ a^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}, a^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right\}$$

d) Expressando os logaritmos em base  $x$ ,  $0 < x \neq 1$ , vem:

$$\log_{a^2\sqrt{x}} a = \frac{\log_x a}{\log_x (a^2 \sqrt{x})} = \frac{\log_x a}{\log_x a^2 + \log_x \sqrt{x}} = \frac{\log_x a}{2\log_x a + \frac{1}{2}}$$

$$\log_{2x} a = \frac{\log_x a}{\log_x (2x)} = \frac{\log_x a}{1 + \log_x 2}; a > 0 \text{ e } 0 < x \neq \frac{1}{2} (*).$$

$$\log_{ax} a = \frac{\log_x a}{\log_x (ax)} = \frac{\log_x a}{1 + \log_x a}$$

$$\log_{\frac{1}{a}} 2x = \frac{\log_x (2x)}{\log_x \left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\log_x 2 + 1}{-\log_x a}.$$

Fazendo  $\log_x a = m$  e  $\log_x 2 = n$ , a equação pode ser reescrita como:

$$\frac{\frac{m}{2m + \frac{1}{2}}}{\frac{m}{1+n}} + \frac{m}{1+m} \cdot \frac{n+1}{-m} = 0 \Rightarrow \frac{1+n}{2m + \frac{1}{2}} - \frac{n+1}{m+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n+1) \left( \frac{1}{2m + \frac{1}{2}} - \frac{1}{m+1} \right) = 0$$

$$1^{\text{a}} \text{ possibilidade: } n+1 = 0 \Rightarrow n = -1 \Rightarrow \log_x 2 = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2},$$

não convém, pois não satisfaz (\*).

$$2^{\text{a}} \text{ possibilidade: } \frac{1}{2m + \frac{1}{2}} - \frac{1}{m+1} = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x a = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = a \Rightarrow x = a^2.$$

$$S = \{a^2\}$$

**310.** Expressando os logaritmos em base 2, temos:

$$\frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - 2 \frac{\log_a x}{\log_{\frac{1}{b}} a} = \log_{\sqrt[3]{a}} x \cdot \log_a x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2^2 a} - 2 \cdot \frac{\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 a}\right)}{\left(\frac{\log_2 a}{\log_2 \frac{1}{b}}\right)} = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt[3]{a}} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2 x}{(\log_2 a)^2} + 2 \cdot \frac{\log_2 x \cdot \log_2 b}{(\log_2 a)^2} = 3 \cdot \frac{(\log_2 x)^2}{(\log_2 a)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x + 2 \cdot \log_2 x \cdot \log_2 b = 3(\log_2 x)^2$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$t + 2t \cdot \log_2 b = 3t^2 \Rightarrow 3t^2 - t - 2t \log_2 b = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(3t - 1 - 2 \log_2 b) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } 3t - 1 - 2 \log_2 b = 0.$$

1ª possibilidade:  $t = 0$

$$t = 0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$2^\text{ª} \text{ possibilidade: } 3t - 1 - 2 \log_2 b = 0 \Rightarrow t = \frac{1 + 2 \log_2 b}{3}. \text{ Daí,}$$

$$\log_2 x = \frac{1 + 2 \log_2 b}{3} \Rightarrow 3 \log_2 x = 1 + 2 \log_2 b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \log_2 x = \log_2 2 + \log_2 b^2 \Rightarrow \log_2 x^3 = \log_2 (2 \cdot b^2) \Rightarrow x^3 = 2b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{2b^2}.$$

$$S = \{1, \sqrt[3]{2b^2}\}$$

**311.** Devemos ter:  $x > 0$ .

Expressando os logaritmos em base 2, vem:

$$\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = 1 \Rightarrow \log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 3} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , temos:

$$t + \frac{t}{\log_2 3} + \frac{t}{2} = 1 \Rightarrow t \left(1 + \frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot \left(\frac{2 \log_2 3 + 2 + \log_2 3}{2 \log_2 3}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot (2 \log_2 3 + 2 + \log_2 3) = 2 \log_2 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot (\log_2 3^2 + \log_2 4 + \log_2 3) = \log_2 3^2 \Rightarrow t[\log_2 (3^2 \cdot 4 \cdot 3)] = \log_2 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log_2 9}{\log_2 108} = \log_{108} 9.$$

Então,

$$\log_2 x = \log_{108} 9 \Rightarrow x = 2^{\log_{108} 9}.$$

$$S = \{2^{\log_{108} 9}\}$$

**312.**  $10^{\log_a (x^2 - 3x + 5)} = 3^{\log_a 10} \Rightarrow \log_{10} 3^{\log_a 10} = \log_a (x^2 - 3x + 5) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_a 10 \cdot \log_{10} 3 &= \log_a (x^2 - 3x + 5) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_{10} 3 &= \frac{\log_a (x^2 - 3x + 5)}{\log_a 10} \Rightarrow \log_{10} 3 = \log_{10} (x^2 - 3x + 5) \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 3x + 5 &= 3 \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } x = 2). \\ S &= \{1, 2\} \end{aligned}$$

**313.** Escrevendo os logaritmos em base 10, temos:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\log(a-x)}{\log(x+b)} &= \frac{2 - \log_{(a-b)} 4}{\log_{(a-b)}(x+b)} \Rightarrow 1 + \frac{\log(a-x)}{\log(x+b)} = \\ &= \frac{2 - \frac{\log 4}{\log(a-b)}}{\frac{\log(x+b)}{\log(a-b)}} \Rightarrow \frac{\log(x+b) + \log(a-x)}{\log(x+b)} = \\ &= \frac{2 \log(a-b) - \log 4}{\log(x+b)} \Rightarrow \frac{\log[(x+b)(a-x)]}{\log(x+b)} = \\ &= \frac{\log(a-b)^2}{4} \xrightarrow{x \neq (1-b)} \log[(x+b)(a-x)] = \log \frac{(a-b)^2}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+b)(a-x) &= \frac{(a-b)^2}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x^2 - 4x(a-b) + (a^2 - 6ab + b^2) &= 0, \text{ cujo discriminante é:} \\ \Delta &= [-4(a-b)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (a^2 - 6ab + b^2) \\ \Delta &= 64ab \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x &= \frac{4a - 4b \pm 8\sqrt{ab}}{8}, \text{ donde } x = \frac{a-b}{2} + \sqrt{ab} \text{ ou } x = \frac{a-b}{2} - \sqrt{ab}. \\ S &= \left\{ \frac{a-b}{2} + \sqrt{ab}; \frac{a-b}{2} - \sqrt{ab} \right\} \end{aligned}$$

**314.** a) Expressando os logaritmos da 2ª equação em base 2, vem:

$$\begin{aligned} \log_{y^2} 2 &= \log_{xy} 4 \Rightarrow \frac{\log_2 2}{\log_2 y^2} = \frac{\log_2 4}{\log_2 (xy)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2 \log_2 y} &= \frac{2}{\log_2 x + \log_2 y} \Rightarrow 4 \log_2 y = \log_2 x + \log_2 y \Rightarrow \\ \Rightarrow 3 \log_2 y &= \log_2 x = \log_2 y^3 = \log_2 x \Rightarrow x = y^3 \text{ (I)}. \end{aligned}$$

Substituindo (I) na 1ª equação, vem:

$$x^2 + 4y^3 = 96 \Rightarrow x^2 + 4 \cdot x - 96 = 0 \Rightarrow x = -12 \text{ ou } x = 8.$$

$$\text{Se } x = -12, \text{ em (I), vem: } y^3 = -12 \Rightarrow y = \sqrt[3]{-12}.$$

$$\text{Se } x = 8, \text{ em (I), vem: } y^3 = 8 \Rightarrow y = 2.$$

$$S = \{(-12, \sqrt[3]{-12}); (8, 2)\}$$



b) Da 2ª equação vem:

$$\log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \Rightarrow \frac{1}{\log_y 4} \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_y (y - 3x) = \log_y 4 \Rightarrow y - 3x = 4 \text{ (I).}$$

Aplicando logaritmo de base  $y$  a ambos os membros da 1ª equação, vem:

$$y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \log_y (y \cdot x^{\log_y x}) = \log_y x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + (\log_y x) \cdot (\log_y x) = \frac{5}{2} (\log_y x).$$

Fazendo  $\log_y x = t$ , vem:

$$1 + t^2 = \frac{5t}{2} \Rightarrow \left( t = \frac{1}{2} \text{ ou } t = 2 \right), \text{ isto é,}$$

$$\left( \log_y x = \frac{1}{2} \text{ ou } \log_y x = 2 \right) \Rightarrow x = \sqrt{y} \text{ ou } x = y^2 \text{ (II).}$$

Substituindo (II) em (I), temos:

1º caso:  $x = \sqrt{y}$  e  $y - 3x = 4 \Rightarrow y - 3\sqrt{y} = 4 \Rightarrow y = 1$  (não convém, pois  $y$  é base do sistema de logaritmo) ou  $y = 16$ .

Se  $y = 16$ ,  $x = \sqrt{16} = 4$ .

2º caso:  $x = y^2$  e  $y - 3x = 4 \Rightarrow y - 3y^2 = 4 \Rightarrow 3y^2 - y + 4 = 0$ , que não apresenta raízes reais.

$$S = \{(4, 16)\}$$

c) Escrevendo os logaritmos da 1ª equação em base  $y$  ( $0 < y \neq 1$ ), vem:

$$x \cdot \log_2 y \cdot \log_{\frac{1}{x}} 2 = y\sqrt{y} \cdot (1 - \log_x 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{\log_y y}{\log_y 2} \cdot \frac{\log_y 2}{\log_y \left(\frac{1}{x}\right)} = y^{\frac{3}{2}} \cdot \left(1 - \frac{\log_y 2}{\log_y x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{\log_y x} = y^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(\log_y x - \log_y 2)}{\log_y x} \text{ (I).}$$

Escrevendo os logaritmos da 2ª equação em base 2, vem:

$$\log_{y^3} 2 \cdot \log_{\sqrt{2}} x = 1 \Rightarrow \frac{\log_2 2}{\log_2 y^3} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3 \log_2 y} \cdot \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 y} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \log_y x = 1 \Rightarrow \log_y x = \frac{3}{2} \text{ (II).}$$

Substituindo (II) em (I) e notando que, por (II),  $x = y^{\frac{3}{2}}$ , vem:

$$\begin{aligned}
 -\frac{x}{\log_y x} &= y^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(\log_y x - \log_y^2)}{\log_y x} \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\frac{x}{\frac{3}{2}} &= x \cdot \frac{\left(\frac{3}{2} - \log_y 2\right)}{\frac{3}{2}} \xrightarrow{x \neq 0} -1 = \frac{3}{2} - \log_y 2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \log_y 2 &= \frac{5}{2} \Rightarrow y^{\frac{5}{2}} = 2 \Rightarrow y = 2^{\frac{2}{5}}. \\
 \text{De (II), } x &= y^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{5}}. \\
 S &= \left\{ \left(2^{\frac{3}{5}}, 2^{\frac{2}{5}}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

**315.** Da 2ª equação vem:

$$\begin{aligned}
 x^2 - y^2 = 2 &\Rightarrow \log_2 (x^2 - y^2) = \log_2 2 \Rightarrow \log_2 [(x + y)(x - y)] = 1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \log_2 (x + y) + \log_2 (x - y) &= 1 \Rightarrow \log_2 (x + y) = 1 - \log_2 (x - y).
 \end{aligned}$$

Substituindo essa expressão na 1ª equação, vem:

$$\begin{aligned}
 \log_2 (x + y) - \log_3 (x - y) &= 1 \Rightarrow 1 - \log_2 (x - y) - \log_3 (x - y) = 1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \log_2 (x - y) &= -\log_3 (x - y) \Rightarrow \log_2 (x - y) = \log_3 (x - y)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Transformando para a base 2, vem:

$$\begin{aligned}
 \log_2 (x - y) &= \log_3 \left( \frac{1}{x - y} \right) \Rightarrow \log_2 (x - y) = \frac{\log_2 \left( \frac{1}{x - y} \right)}{\log_2 3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \log_2 (x - y) &= \frac{-\log_2 (x - y)}{\log_2 3} \Rightarrow \log_2 (x - y) \cdot \log_2 3 = -\log_2 (x - y) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \log_2 (x - y) \cdot \log_2 3 + \log_2 (x - y) &= 0 \Rightarrow \log_2 (x - y) \cdot [\log_2 3 + 1] = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \log_2 (x - y) &= 0 \text{ ou } \log_2 3 + 1 = 0 \text{ (F)!}
 \end{aligned}$$

Então:  $\log_2 (x - y) = 0 \Rightarrow x - y = 1$  (I)

Como  $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ , vem:

$$2 = (x + y) \cdot 1 \Rightarrow x + y = 2 \text{ (II)}$$

De (I) e (II) vem que  $x = \frac{3}{2}$  e  $y = \frac{1}{2}$ .

$$S = \left\{ \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right) \right\}$$

**316.** Escrevendo cada um dos logaritmos das três equações em base 2, vem:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \frac{\log_2 y}{\log_2 4} + \frac{\log_2 z}{\log_2 4} = 2 \\ \frac{\log_2 y}{\log_2 3} + \frac{\log_2 z}{\log_2 9} + \frac{\log_2 x}{\log_2 9} = 2 \\ \frac{\log_2 z}{\log_2 4} + \frac{\log_2 x}{\log_2 16} + \frac{\log_2 y}{\log_2 16} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \frac{\log_2 y}{2} + \frac{\log_2 z}{2} = 2 \\ \frac{\log_2 y}{\log_2 3} + \frac{\log_2 z}{2 \log_2 3} + \frac{\log_2 x}{2 \log_2 3} = 2 \\ \frac{\log_2 z}{2} + \frac{\log_2 x}{4} + \frac{\log_2 y}{4} = 2 \end{cases}$$

Fazendo  $\log_2 x = a$ ,  $\log_2 y = b$  e  $\log_2 z = c$ , vem:

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 2 \\ \frac{b}{\log_2 3} + \frac{c}{2 \log_2 3} + \frac{a}{2 \log_2 3} = 2 \\ \frac{c}{2} + \frac{a}{4} + \frac{b}{4} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b + c = 4 \\ a + 2b + c = 4 \log_2 3 \\ a + b + 2c = 8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima por Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad a = \frac{D_A}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 \log_2 3 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{4 - \log_2 81}{4} = \frac{\log_2 16 - \log_2 81}{4} = \frac{\log_2 \left(\frac{16}{81}\right)}{4} =$$

$$= \frac{\log_2 \left(\frac{2}{3}\right)^4}{4} = \log_2 \left(\frac{2}{3}\right).$$

Analogamente,

$$b = \frac{12 \log_2 3 - 12}{4} = \frac{12(\log_2 3 - 1)}{4} = 3(\log_2 3 - \log_2 2) =$$

$$= 3 \cdot \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) = \log_2 \left(\frac{27}{8}\right);$$

$$c = \frac{20 - 4 \log_2 3}{4} = \frac{4(5 - \log_2 3)}{4} = \log_2 32 - \log_2 3 = \log_2 \left(\frac{32}{3}\right).$$

Dessa forma, temos:

$$\log_2 x = a \Rightarrow \log_2 x = \log_2 \left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$\log_2 y = b \Rightarrow \log_2 y = \log_2 \left(\frac{27}{8}\right) \Rightarrow y = \frac{27}{8}$$

$$\log_2 z = c \Rightarrow \log_2 z = \log_2 \left(\frac{32}{3}\right) \Rightarrow z = \frac{32}{3}.$$

$$S = \left\{ \left( \frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3} \right) \right\}$$

**317.** Aplicando logaritmo de base  $a$  ( $0 < a \neq 1$ ) a ambos os membros da 1ª equação, vem:

$$a^x \cdot b^y = ab \Rightarrow \log_a (a^x \cdot b^y) = \log_a (ab) \Rightarrow x + y \log_a b = 1 + \log_a b \Rightarrow \\ \Rightarrow x - 1 = (1 - y) \log_a b \text{ (I)}.$$

Transformando para a base  $a$  os logaritmos da 2ª equação, temos:

$$2 \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b \Rightarrow 2 \log_a x = \frac{\log_a y}{\log_a \frac{1}{b}} \cdot \frac{\log_a b}{\log_a \sqrt{a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a x^2 = \frac{\log_a y}{-\log_a b} \cdot \frac{\log_a b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \log_a x^2 = -2 \log_a y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_a x^2 = \log_a y^{-2} \Rightarrow x^2 = y^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{y} \text{ ou } x = -\frac{1}{y}.$$

Voltando a (I), temos:

1º caso:  $x = \frac{1}{y}$ , isto é,

$$x - 1 = (1 - y) \log_a b \Rightarrow \frac{1}{y} - 1 = (1 - y) \log_a b \Rightarrow \frac{1 - y}{y} = (1 - y) \log_a b$$

$$(1 - y) \cdot \left( \frac{1}{y} - \log_a b \right) = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{1}{\log_a b} = \log_b a$$

Se  $y = 1$ ,  $x = \frac{1}{y} = 1$ .

Se  $y = \log_b a$ ,  $x = \frac{1}{\log_b a} = \log_a b$ .

2º caso:  $x = -\frac{1}{y}$  não ocorre, pois, para garantir a existência dos logaritmos do sistema devemos ter  $x > 0$  e  $y > 0$ .

$$S = [(1, 1); (\log_a b, \log_b a)]$$

**318.** Da 1ª equação temos:

$$\log_{12} x \cdot (\log_2 x + \log_2 y) = \log_2 x \Rightarrow \log_{12} x \cdot \log_2 (xy) = \log_2 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{12} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 (xy)}, xy \neq 1.$$

Por outro lado, escrevendo  $\log_{12} x$  em base 2, temos:

$$\log_{12} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 (xy)} \Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 12} = \frac{\log_2 x}{\log_2 (xy)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 x \left( \frac{1}{\log_2 12} - \frac{1}{\log_2 (xy)} \right) = 0 \Rightarrow \left( \log_2 x = 0 \text{ ou } \log_2 12 = \log_2 (xy) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ (não convém)}$$

ou

$$\log_2 12 = \log_2 (xy) \Rightarrow xy = 12 \text{ (I)}.$$

Da 2ª equação temos que:

$$\log_2 x \cdot \log_3 (x + y) = 3 \log_3 x \Rightarrow \log_2 x = \frac{\log_3 x^3}{\log_3 (x + y)} = \log_{x+y} x^3.$$

Passando para a base 2, vem:

$$\begin{aligned} \log_2 x &= \frac{\log_2 x^3}{\log_2 (x + y)} \Rightarrow \log_2 x = \frac{3 \log_2 x}{\log_2 (x + y)} \xrightarrow{\text{por (I)}} \\ \Rightarrow \log_2 x &= \frac{3 \log_2 x}{\log_2 \left(x + \frac{12}{x}\right)} \xrightarrow{x \neq 1} \log_2 \left(x + \frac{12}{x}\right) = 3 \Rightarrow x + \frac{12}{x} = 8 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 6.$$

Se  $x = 2$ , por (I), vem que  $y = 6$ .

Se  $x = 6$ , por (I), vem com  $y = 2$ .

$$S = \{(2, 6); (6, 2)\}$$

**319.** a) Notemos que  $x = y = 1$  é solução particular desse sistema.

Para  $0 < x \neq 1$  e  $0 < y \neq 1$ , aplicando logaritmo decimal a ambos os membros da 1ª e da 2ª equações, vem:

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log(x^{x+y}) = \log y^{12} \\ \log(y^{x+y}) = \log x^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y) \cdot \log x = 12 \log y \\ (x+y) \cdot \log y = 3 \log x \end{cases}$$

Dividindo membro a membro, temos que:

$$\frac{\log x}{\log y} = 4 \cdot \frac{\log y}{\log x} \Rightarrow (\log x)^2 = 4 (\log y)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log x = 2 \log y \text{ ou } \log x = -2 \log y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log x = \log y^2 \text{ ou } \log x = \log y^{-2}) \Rightarrow \left(x = y^2 \text{ ou } x = \frac{1}{y^2}\right).$$

1º caso: Se  $x = y^2$ , substituindo na 1ª equação (original), vem:

$$(y^2)^{y^2+y} = y^{12} \Rightarrow 2y^2 + 2y - 12 = 0 \Rightarrow y = -3 \text{ (não convém)}$$

ou  $y = 2$ , donde  $x = 2^2 = 4$ .

2º caso: Se  $x = \frac{1}{y^2}$ , vem, na 1ª equação:

$$\left(\frac{1}{y^2}\right)^{\frac{1}{y^2}+y} = y^{12} \Rightarrow (y^{-2})^{\frac{1}{y^2}+y} = y^{12} \Rightarrow -\frac{2}{y^2} - 2y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y^2} - y = 12 \Rightarrow y^3 + 6y^2 + 1 = 0, \text{ que não apresenta raiz real positiva.}$$

$$S = \{(1, 1); (4, 2)\}$$

b) Notemos que  $x = y = 1$  é solução particular desse sistema.

Para  $0 < x \neq 1$  e  $0 < y \neq 1$ , aplicando logaritmo de base  $x$  a ambos os membros da 1ª e da 2ª equações, vem:

$$\begin{cases} x^x + y = y^3 \\ y^x + y = x^6 y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_x (x^x + y) = \log_x y^3 \\ \log_x (y^x + y) = \log_x (x^6 y^3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \log_x y \\ (x + y) \log_x y = 6 + 3 \log_x y \end{cases}$$

Dividindo membro a membro, vem:

$$\frac{1}{\log_x y} = \frac{3 \log_x y}{6 + 3 \log_x y}. \text{ Fazendo } \log_x y = t, \text{ vem:}$$

$$\frac{1}{t} = \frac{3t}{6 + 3t} \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t = -1 \text{ ou } t = 2.$$

1ª possibilidade:  $t = -1$

Temos:  $\log_x y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$ . Substituindo esse valor de  $y$  na 1ª equação, temos:

$$x^x + y = y^3 \Rightarrow x^{x + \frac{1}{x}} = x^{-3} \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (não convém)} \text{ e } x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ (não convém)}$$

2ª possibilidade:  $t = 2$

Temos:  $\log_x y = 2 \Rightarrow y = x^2$ . Na 1ª equação temos:

$$x^x + y = y^3 \Rightarrow x^x + x^2 = x^6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0,$$

que, desprezando a raiz negativa, fornece  $x = 2$  e  $y = 4$ .

$$S = \{(1, 1); (2, 4)\}$$

- c)  $x = y = 1$  não é solução desse sistema. Para  $0 < x \neq 1$  e  $0 < y \neq 1$ , aplicando logaritmo de base  $x$  a ambos os membros da 1ª equação, temos:

$$x^y = y^x \Rightarrow \log_x (x^y) = \log_x (y^x) \Rightarrow y = x \log_x y \text{ (I)}.$$

Aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros da 2ª equação, vem:

$$2^x = 3^y \Rightarrow \log_2 (2^x) = \log_2 (3^y) \Rightarrow x = y \cdot \log_2 3.$$

Vamos chamar  $\log_2 3 = a$ ; daí  $x = y \cdot a$  (II).

Substituindo (I) em (II), vem:

$$x = x \cdot \log_x y \cdot a \xrightarrow{x \neq 0} \log_x y \cdot a = 1 \Rightarrow \log_x y = \frac{1}{a} \Rightarrow y = x^{\frac{1}{a}} \text{ (III)}.$$

Em (II) temos:

$$x = y \cdot a \Rightarrow x = x^{\frac{1}{a}} \cdot a \Rightarrow x^{\frac{a-1}{a}} = a \Rightarrow x = a^{\frac{a}{a-1}},$$

que, substituído em (III), fornece:

$$y = \left( a^{\frac{a}{a-1}} \right)^{\frac{1}{a}} \Rightarrow y = a^{\frac{1}{a-1}}.$$

$$S = \left\{ \left( a^{\frac{a}{a-1}}, a^{\frac{1}{a-1}} \right), \text{ em que } a = \log_2 3 \right\}$$

**320.** a) Aplicando logaritmo decimal a ambos os membros da 2ª equação, vem:

$$\sqrt{x^{\log y} \cdot y^{\log x}} = y \Rightarrow x^{\log y} \cdot y^{\log x} = y^2 \Rightarrow \log(x^{\log y} \cdot y^{\log x}) = \log y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log x^{\log y} + \log y^{\log x} = 2 \log y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log y) \cdot (\log x) + (\log x) \cdot (\log y) = 2 \log y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \log x \log y - 2 \log y = 0 \Rightarrow 2 \log y (\log x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log y = 0 \text{ ou } \log x = 1.$$

1ª possibilidade: Se  $\log y = 0 \Rightarrow y = 1$ . Na 1ª equação teremos:  
 $x^0 + 1^{\log x} = 200$ , o que é absurdo!

2ª possibilidade:  $\log x = 1 \Rightarrow x = 10$ . Na 1ª equação teremos:

$$10^{\log y} + y^{\log 10} = 200 \Rightarrow 10^{\log y} = 200 - y \Rightarrow \log_{10}(200 - y) = \log_{10} y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 - y = y \Rightarrow y = 100.$$

$$S = \{(10, 100)\}$$

b) Da 2ª equação vem:

$$\sqrt[x]{(\log x \cdot \log y)^y} = 1024 \Rightarrow \log x \cdot \log y = 1024^{\frac{x}{y}}.$$

Aplicando logaritmo de base 2 a ambos os membros dessa última expressão, vem:

$$\log_2[\log x \cdot \log y] = \log_2 1024^{\frac{x}{y}} \Rightarrow \log_2(\log x) = \log_2(\log y) = \frac{x}{y} \log_2 2^{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2(\log x) + \log_2(\log y) = \frac{10x}{y}.$$

Fazendo  $\log x = a$  e  $\log y = b$  ( $x = 10^a$  e  $y = 10^b$ ), temos:

$$\log_2 a + \log_2 b = 10 \cdot \frac{10^a}{10^b} \Rightarrow \log_2(ab) = 10^{a+1-b} \text{ (I)}.$$

Em termos das novas variáveis, a 1ª equação pode ser escrita como:

$$x^{\log y} + y^{\log x} = 200 \Rightarrow (10^a)^b + (10^b)^a = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{ab} + 10^{ab} = 200 \Rightarrow 2 \cdot 10^{ab} = 200 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{ab} = 100 \Rightarrow ab = 2 \text{ (II)}.$$

Substituindo (II) em (I), vem:

$$\log_2(ab) = 10^{a+1-b} \Rightarrow \log_2 2 = 10^{a+1-b} \Rightarrow 10^{a+1-b} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a + 1 - b = 0 \Rightarrow a - b = -1 \text{ (III)}$$

De (II) e (III) temos:  $\begin{cases} ab = 2 \\ a - b = -1 \end{cases}$ , que resolvido fornece

( $a = 1$  e  $b = 2$ ) ou ( $a = -2$  e  $b = -1$ ).

1ª possibilidade:  $a = 1$  e  $b = 2$ , isto é,  $\log x = 1$  e  $\log y = 2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ e } y = 100.$$

2ª possibilidade:  $a = -2$  e  $b = -1$ , isto é,  $\log x = -2$  e  $\log y = -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{100} \text{ e } y = \frac{1}{10} \text{ (não convém, pois } x \text{ deve ser natural, já que}$$

é índice de raiz).

$$S = \{(10, 100)\}$$

c) Da 2ª equação vem:

$$\log \sqrt{xy} = 1 \Rightarrow \sqrt{xy} = 10 \Rightarrow xy = 100 \text{ (I)}$$

Fazendo  $\log x = a$  e  $\log y = b$  ( $x = 10^a$  e  $y = 10^b$ ) e tendo em vista

(I), o sistema pode ser reescrito da forma:

$$\begin{cases} (10^a)^b = (10^b)^a = 20 \\ 10^a \cdot 10^b = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 10^{ab} = 20 \\ 10^{a+b} = 100 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab = 1 \\ a + b = 2 \end{cases}, \text{ que resolvido fornece } a = 1 \text{ e } b = 1 \text{ isto é,}$$

$$\log x = 1 \text{ e } \log y = 1 \Rightarrow x = 10 \text{ e } y = 10.$$

$$S = \{(10, 10)\}$$

## CAPÍTULO VI — Inequações exponenciais e logarítmicas

- 322.**
- a)  $4^x > 7 \Rightarrow \log_4 4^x > \log_4 7 \Rightarrow x \cdot \log_4 4 > \log_4 7 \Rightarrow x > \log_4 7$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_4 7\}$
- b)  $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 5 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \log_{\frac{1}{3}} 5 \Rightarrow x \cdot \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} \geq \log_{\frac{1}{3}} 5 \Rightarrow x \geq \log_{\frac{1}{3}} 5$   
 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \log_{\frac{1}{3}} 5\right\}$
- c)  $2^{3x+2} > 9 \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2^2 > 9 \Rightarrow 8^x > \frac{9}{4} \Rightarrow \log_8 8^x > \log_8 \left(\frac{9}{4}\right) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x > \log_8 \frac{9}{4}$   
 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_8 \left(\frac{9}{4}\right)\right\}$
- d)  $5^{4x-1} < 3 \Rightarrow \frac{5^{4x}}{5} < 3 \Rightarrow 625^x < 15 \Rightarrow \log_{625} 625^x < \log_{625} 15 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x \cdot \log_{625} 625 < \log_{625} 15 \Rightarrow x < \log_{625} 15$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{625} 15\}$
- e)  $3^{2-3x} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3^2}{3^{3x}} < \frac{1}{4} \Rightarrow 27^x > 36 \Rightarrow \log_{27} 27^x > \log_{27} 36 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x \cdot \log_{27} 27 > \log_{27} 36 \Rightarrow x > \log_{27} 36$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{27} 36\}$
- f)  $3^{\sqrt{x}} > 4 \Rightarrow \log_3 3^{\sqrt{x}} > \log_3 4 \Rightarrow \sqrt{x} > \log_3 4 \Rightarrow x > \log_3^2 4$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_3^2 4\}$
- g)  $2^{(x^2)} \leq 5 \Rightarrow \log_2 2^{x^2} \leq \log_2 5 \Rightarrow x^2 \cdot \log_2 2 \leq \log_2 5 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x^2 \leq \log_2 5 \Rightarrow x^2 - \log_2 5 \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{\log_2 5} \leq x \leq \sqrt{\log_2 5}$   
 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{\log_2 5} \leq x \leq \sqrt{\log_2 5}\right\}$



- 324.** a)  $2^x > 3^{x-1} \Rightarrow 2^x > \frac{3^x}{3} \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} > \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > \frac{1}{3} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} \Rightarrow x \cdot \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{3} < \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3} \Rightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{3}$
- b)  $2^{3x-1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \Rightarrow \frac{2^{3x}}{2} \leq \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} \Rightarrow \frac{(2^3)^x}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^x} \leq \frac{2}{\frac{1}{27}}$   
 $\frac{8^x}{\left(\frac{1}{9}\right)^x} \leq 54 \Rightarrow 72^x \leq 54 \Rightarrow \log_{72} 72^x \leq \log_{72} 54 \Rightarrow x \leq \log_{72} 54$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \log_{72} 54\}$
- c)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+3} > 2^{4x-3} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 > \frac{2^{4x}}{2^3} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{25}\right)^x}{16^x} > \frac{1}{2^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \left(\frac{1}{400}\right)^x > \frac{125}{8} \Rightarrow 400^x < \frac{8}{125} \Rightarrow \log_{400} 400^x < \log_{400} \frac{8}{125} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x < \log_{400} \frac{8}{125}$   
 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{400} \frac{8}{125}\right\}$
- d)  $2^{x-2} > 3^{2x-1} \Rightarrow \frac{2^x}{2^2} > \frac{3^{2x}}{3} \Rightarrow \frac{2^x}{9^x} > \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{2}{9}\right)^x > \frac{4}{3} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_{\frac{2}{9}} \left(\frac{2}{9}\right)^x < \log_{\frac{2}{9}} \frac{4}{3} \Rightarrow x < \log_{\frac{2}{9}} \frac{4}{3}$   
 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\frac{2}{9}} \frac{4}{3}\right\}$
- 325.** a)  $5^x > 3^x + 3^{x+1} \Rightarrow 5^x > 3^x + 3^x \cdot 3 \Rightarrow 5^x > 3^x \cdot (1+3) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{5^x}{3^x} > 4 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x > 4 \Rightarrow \log_{\frac{5}{3}} \left(\frac{5}{3}\right)^x > \log_{\frac{5}{3}} 4 \Rightarrow x > \log_{\frac{5}{3}} 4$   
 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{\frac{5}{3}} 4\right\}$
- b)  $3^x + 3^{x+1} \leq 2^x - 2^{x-1} \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 \leq 2^x - \frac{2^x}{2} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 3^x \cdot (1+3) \leq 2^x \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \leq \frac{1}{8} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{3}{2} \right)^x \leq \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{8} \Rightarrow x \leq \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{8}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq \log_{\frac{3}{2}} \frac{1}{8} \right\}$$

c)  $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} > 3^{x+1} - 3^x \Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 > 3^x \cdot 3 - 3^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^x (1 + 2 + 4) > 3^x (3 - 1) \Rightarrow \frac{2^x}{3^x} > \frac{2}{7} \Rightarrow \left( \frac{2}{3} \right)^x > \frac{2}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{2}{3}} \left( \frac{2}{3} \right)^x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{7} \Rightarrow x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{7}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\frac{2}{3}} \frac{2}{7} \right\}$$

d)  $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} < 2^{x-2} - 2^x \Rightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 < \frac{2^x}{2^2} - 2^x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3^x \cdot (1 + 3 + 9) < 2^x \cdot \left( \frac{1}{4} - 1 \right) \Rightarrow \frac{3^x}{2^x} < \frac{-\frac{3}{4}}{13} \Rightarrow \left( \frac{3}{2} \right)^x < -\frac{3}{52}.$$

Como  $\left( \frac{3}{2} \right)^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , a desigualdade acima nunca é satisfeita.

$$S = \emptyset$$

e)  $2^x + 2^{x+1} - 2^{x+3} < 5^{x+2} - 5^{x-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2^x + 2^x \cdot 2 - 2^x \cdot 2^3 < 5^x \cdot 5^2 - \frac{5^x}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^x \cdot (1 + 2 - 8) < 5^x \cdot \left( 25 - \frac{1}{5} \right) \Rightarrow (-5) \cdot 2^x < \frac{124}{5} \cdot 5^x.$$

Multiplicando a desigualdade acima por  $(-1)$ , vem:

$$5 \cdot 2^x > -\frac{124}{5} \cdot 5^x \Rightarrow \frac{2^x}{5^x} > -\frac{124}{25} \Rightarrow \left( \frac{2}{5} \right)^x > -\frac{124}{25}.$$

Como  $\left( \frac{2}{5} \right)^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , a desigualdade acima é sempre satisfeita.

$$S = \mathbb{R}$$

**326.** a)  $2^{3x+1} \cdot 5^{2x-3} > 6 \Rightarrow 2^{3x} \cdot 2 \cdot \frac{5^{2x}}{5^3} > 6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 8^x \cdot 25^x > 375 \Rightarrow 200^x > 375 \Rightarrow \log_{200} 200^x > \log_{200} 375 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x > \log_{200} 375$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{200} 375 \right\}$$

b)  $3^{2x-1} \cdot 2^{5-4x} > 5 \Rightarrow \frac{3^{2x}}{3} \cdot \frac{2^5}{2^{4x}} > 5 \Rightarrow \frac{9^x}{16^x} > \frac{15}{32} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{9}{16}\right)^x > \frac{15}{32} \Rightarrow \log_{\frac{9}{16}} \left(\frac{9}{16}\right)^x < \log_{\frac{9}{16}} \frac{15}{32} \Rightarrow x < \log_{\frac{9}{16}} \frac{15}{32}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_{\frac{9}{16}} \frac{15}{32}\right\}$$

**327.** a)  $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 > 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 6 > 0.$

Fazendo  $3^x = t$ , temos:

$$t^2 - 5t + 6 > 0 \Rightarrow (t < 2 \text{ ou } t > 3) \Rightarrow (3^x < 2 \text{ ou } 3^x > 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_3 3^x < \log_3 2 \text{ ou } x > 1) \Rightarrow (x < \log_3 2 \text{ ou } x > 1).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_3 2 \text{ ou } x > 1\}$$

b)  $4^x - 2^{x+2} + 3 < 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x \cdot 2^2 + 3 < 0.$

Fazendo  $2^x = t$ , vem:

$$t^2 - 4t + 3 < 0 \Rightarrow 1 < t < 3 \Rightarrow 1 < 2^x < 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 1 < \log_2 2^x < \log_2 3 \Rightarrow 0 < x < \log_2 3.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \log_2 3\}$$

c)  $25^x - 5^x - 6 \geq 0 \Rightarrow (5^x)^2 - 5^x - 6 \geq 0.$

Fazendo  $5^x = t$ , temos:

$$t^2 - t - 6 \geq 0 \Rightarrow t \leq -2 \text{ ou } t \geq 3.$$

Se  $t \leq -2$ , vem:  $5^x \leq -2$  nunca é satisfeita.

Se  $t \geq 3$ , vem:  $5^x \geq 3 \Rightarrow \log_5 5^x \geq \log_5 3 \Rightarrow x \geq \log_5 3.$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_5 3\}$$

d)  $4^{x+\frac{1}{2}} - 2^x - 3 \leq 0 \Rightarrow 4^x \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 2^x - 3 \leq 0.$

Fazendo  $2^x = t$ , vem:

$$t^2 \cdot 2 - t - 3 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq t \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -1 \leq 2^x \leq \frac{3}{2}.$$

Como  $2^x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ , temos:

$$2^x \leq \frac{3}{2} \Rightarrow \log_2 2^x \leq \log_2 \frac{3}{2} \Rightarrow x \leq \log_2 \frac{3}{2}.$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \log_2 \frac{3}{2}\right\}$$

e)  $25^x + 5^{x+1} + 4 \leq 0 \Rightarrow (5^x)^2 + 5^x \cdot 5 + 4 \leq 0.$

Fazendo  $5^x = t$ , vem:

$$t^2 + 5t + 4 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq t \leq -1, \text{ isto é, } -4 \leq 5^x \leq -1.$$

Como a 2ª parte da inequação simultânea nunca é satisfeita, pois  $5^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , não há solução.

$$S = \emptyset$$

f)  $2 \cdot 9^x + 3^{x+2} + 4 > 0 \Rightarrow 2 \cdot (3^2)^x + 3^x \cdot 3^2 + 4 > 0.$

Fazendo  $3^x = t$ , vem:

$$2t^2 + 9t + 4 > 0 \Rightarrow \left( t < -4 \text{ ou } t > -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( 3^x < -4 \text{ ou } 3^x > -\frac{1}{2} \right).$$

A 1ª desigualdade nunca é satisfeita e a 2ª desigualdade é satisfeita  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

$$S = \mathbb{R}$$

**328.**  $9^x - 6^x - 4^x > 0 \Rightarrow 9^x - 6^x > 4^x$ .

Como  $4^x > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , podemos dividir membro a membro por  $4^x$ :

$$\frac{9^x - 6^x}{4^x} > \frac{4^x}{4^x} \Rightarrow \left( \frac{9}{4} \right)^x - \left( \frac{6}{4} \right)^x > 1 \Rightarrow \left( \frac{3}{2} \right)^{2x} - \left( \frac{3}{2} \right)^x > 1.$$

Fazendo  $\left( \frac{3}{2} \right)^x = t$ , temos:

$$t^2 - t - 1 > 0 \Rightarrow \left( t < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } t > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \left( \frac{3}{2} \right)^x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (absurdo!) ou } \left( \frac{3}{2} \right)^x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{3}{2} \right)^x > \log_{\frac{3}{2}} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x > \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right\}$$

**329.** Como  $25^x > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , podemos dividir ambos os membros por  $25^x$ :

$$4^x - 6 \cdot 10^x + 8 \cdot 25^x \leq 0 \Rightarrow \frac{4^x - 6 \cdot 10^x + 8 \cdot 25^x}{25^x} \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{4}{25} \right)^x - 6 \cdot \left( \frac{10}{25} \right)^x + 8 \leq 0 \Rightarrow \left( \frac{2}{5} \right)^{2x} - 6 \cdot \left( \frac{2}{5} \right)^x + 8 \leq 0.$$

Fazendo  $\left( \frac{2}{5} \right)^x = t$ , temos:

$$t^2 - 6t + 8 \leq 0 \Rightarrow 2 \leq t \leq 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \leq \left( \frac{2}{5} \right)^x \leq 4 \Rightarrow \log_{\frac{2}{5}} 2 \geq \log_{\frac{2}{5}} \left( \frac{2}{5} \right)^x \geq \log_{\frac{2}{5}} 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{2}{5}} 4 \leq x \leq \log_{\frac{2}{5}} 2.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \log_{\frac{2}{5}} 4 \leq x \leq \log_{\frac{2}{5}} 2 \right\}$$

**330.**  $4^{x+1} - 8 \cdot 6^x + 9^{x+\frac{1}{2}} \geq 0 \Rightarrow 4^x \cdot 4 - 8 \cdot 6^x + 9^x \cdot 9^{\frac{1}{2}} \geq 0$ .

Como  $9^x > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , podemos dividir os membros por  $9^x$ :

$$\frac{4^x \cdot 4 - 8 \cdot 6^x + 9^x \cdot 3}{9^x} \geq 0 \Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 8 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^x + 3 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 \geq 0.$$

Fazendo  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$ , temos:

$$4t^2 - 8t + 3 \geq 0 \Rightarrow \left(t \leq \frac{1}{2} \text{ ou } t \geq \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{1}{2} \text{ ou } \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^x \geq \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \text{ ou } \log_{\frac{2}{3}} \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \log_{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x \geq \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2} \text{ ou } x \leq -1\right).$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}\right\}$$

**331.** a)  $\log_3 (5x - 2) < \log_3 4 \Rightarrow 0 < 5x - 2 < 4 \Rightarrow \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}.$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{6}{5}\right\}$$

b)  $\log_{0,3} (4x - 3) < \log_{0,3} 5 \Rightarrow 4x - 3 > 5 \Rightarrow 4x > 8 \Rightarrow x > 2.$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

c)  $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 1) \geq \log_{\frac{1}{2}} (2x + 3) \Rightarrow 0 < 3x - 1 \leq 2x + 3 \Rightarrow \frac{1}{3} < x \leq 4.$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} < x \leq 4\right\}$$

d)  $\log_2 (2x^2 - 5x) \leq \log_2 3 \Rightarrow 0 < 2x^2 - 5x \leq 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x^2 - 5x > 0 \text{ e } 2x^2 - 5x \leq 3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x < 0 \text{ ou } x > \frac{5}{2} \text{ (I) e } -\frac{1}{2} \leq x \leq 3 \text{ (II)}\right)$$

Determinando (I)  $\cap$  (II), temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < 0 \text{ ou } \frac{5}{2} < x \leq 3\right\}$$

e)  $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 1) > \log_{\frac{1}{2}} (3x + 9) \Rightarrow 0 < x^2 - 1 < 3x + 9 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1 < 3x + 9 \text{ e } 0 < x^2 - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 < x < 5 \text{ (I) e } x < -1 \text{ ou } x > 1 \text{ (II)})$$

Determinando (I)  $\cap$  (II), temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } 1 < x < 5\}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \log_{\frac{1}{10}}(x^2 + 1) < \log_{\frac{1}{10}}(2x - 5) &\Rightarrow x^2 + 1 > 2x - 5 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^2 + 1 > 2x - 5 \text{ e } 2x - 5 > 0) \Rightarrow x > \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{5}{2}\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \log(x^2 - x - 2) < \log(x - 4) &\Rightarrow 0 < x^2 - x - 2 < x - 4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - x - 2 > 0 \text{ e } x^2 - x - 2 < x - 4) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x < -1 \text{ ou } x > 2) \text{ e } (x^2 - 2x + 2 < 0) \end{aligned}$$

Como a 2ª desigualdade não é nunca satisfeita, pois  $\forall x \in \mathbb{R}$ , tem-se  $x^2 - 2x + 2 > 0$ , segue que não há solução.

$$s = \emptyset$$

$$\begin{aligned} \text{332. a) } \log_5(x^2 - x) > \log_{0,2} \frac{1}{6} &\Rightarrow \log_5(x^2 - x) > \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{6} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_5(x^2 - x) > -\log_5 \frac{1}{6} \Rightarrow \log_5(x^2 - x) > \log_5 \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - x > 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow (x < -2 \text{ ou } x > 3). \end{aligned}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 3\}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > 2 - \log_2 5 &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > \log_2 4 - \log_2 5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > \log_2 \left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - x - \frac{3}{4}\right) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < x^2 - x - \frac{3}{4} < \frac{5}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(x^2 - x - \frac{3}{4} > 0 \text{ e } x^2 - x - \frac{3}{4} < \frac{5}{4}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{3}{2} \text{ (I) e } -1 < x < 2 \text{ (II)}\right) \end{aligned}$$

Determinando (I)  $\cap$  (II), temos:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } \frac{3}{2} < x < 2\right\}$$

$$\text{333. } \log x - \text{colog}(x + 1) > \log 12 \Rightarrow \log x + \log(x + 1) > \log 12$$

Lembrando que as propriedades operatórias só podem ser aplicadas se estabelecermos a condição de existência dos logaritmos, temos:  $x > 0$  e  $x + 1 > 0 \Rightarrow x > 0$  (I). Então:

$$\log x + \log(x + 1) > \log 12 \Rightarrow \log [x \cdot (x + 1)] > \log 12 \Rightarrow x^2 + x > 12 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x < -4 \text{ ou } x > 3) \text{ (II)}.$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$$

- 334.** a) Para mudarmos de base precisamos garantir a existência dos logaritmos, isto é,  $2 - x > 0$  e  $x + 1 > 0 \Rightarrow -1 < x < 2$  (I). Assim, temos:

$$\log_2(2 - x) < \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) \Rightarrow \log_2(2 - x) < \log_2(x + 1)^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 - x < \frac{1}{x + 1} \Rightarrow (2 - x)(x + 1) < 1 \text{ (esta passagem é}$$

garantida por (I))  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -x^2 + x + 1 < 0 \Rightarrow \left(x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } x > \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \text{ (II)}.$$

De (I) e (II) vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ ou } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} < x < 2\right\}$$

- b) 1º caso:  $\log_2 x > 0 \Rightarrow x > 1$  (I)

Temos:

$$\frac{1}{\log_2 x} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{x + 2}} \Rightarrow 1 \leq \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{x + 2}} \Rightarrow \log_2 x \geq \log_2 \sqrt{x + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \geq \sqrt{x + 2} \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow (x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2) \text{ (II)}.$$

De (I)  $\cap$  (II) temos:  $x \geq 2$ .

$$2^\circ \text{ caso: } \log_2 x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1 \text{ (I)}$$

Temos:

$$\frac{1}{\log_2 x} \leq \frac{1}{\log_2 \sqrt{x + 2}} \Rightarrow 1 \geq \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{x + 2}} \Rightarrow \log_2 x \leq \log_2 \sqrt{x + 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \text{ (II)}.$$

De (I)  $\cap$  (II) resulta  $0 < x < 1$ .

Juntando os dois casos, temos:  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \text{ ou } 0 < x < 1\}$ .

- 335.** a)  $\log_2(3x + 5) > 3 \Rightarrow 3x + 5 > 2^3 \Rightarrow 3x + 5 > 8 \Rightarrow x > 1$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

b)  $\log_{\frac{1}{3}}(4x - 3) \geq 2 \Rightarrow 0 < 4x - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{3}{4} < x \leq \frac{7}{9}$ .

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{4} < x \leq \frac{7}{9}\right\}$$

c)  $\log_2(x^2 + x - 2) \leq 2 \Rightarrow 0 < x^2 + x - 2 \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ \text{e} \\ x^2 + x - 6 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x < -2 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ e \\ -3 \leq x \leq 2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < -2 \text{ ou } 1 < x \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \log_{\frac{1}{2}}(2x^2 - 6x + 3) < 1 &\Rightarrow 2x^2 - 6x + 3 > \left(\frac{1}{2}\right)^1 \Rightarrow 2x^2 - 6x + \frac{5}{2} > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > \frac{5}{2}\right\}$$

$$\text{e) } \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) > -4 \Rightarrow 0 < x^2 + 4x - 5 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 5 > 0 \\ e \\ x^2 + 4x - 21 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -5 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ e \\ -7 < x < 3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < -5 \text{ ou } 1 < x < 3\}$$

$$\text{f) } \log_{\frac{5}{8}}\left(2x^2 - x - \frac{3}{8}\right) \geq 1 \Rightarrow 0 < 2x^2 - x - \frac{3}{8} \leq \frac{5}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - \frac{3}{8} > 0 \\ e \\ 2x^2 - x - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{4} \text{ ou } x > \frac{3}{4} \text{ (I)} \\ e \\ -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), vem:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x < -\frac{1}{4} \text{ ou } \frac{3}{4} < x \leq 1\right\}$$

$$\begin{aligned} \text{g) } \log(x^2 + 3x + 3) > 0 &\Rightarrow x^2 + 3x + 3 > 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > -1. \end{aligned}$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -1\}$$

$$\text{h) } \log_{0,3}(x^2 - 4x + 1) \geq 0 \Rightarrow 0 < x^2 - 4x + 1 \leq 0,3^0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 > 0 \\ e \\ x^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 - \sqrt{3} \text{ ou } x > 2 + \sqrt{3} \text{ (I)} \\ e \\ 0 \leq x \leq 4 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II) vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 2 - \sqrt{3} \text{ ou } 2 + \sqrt{3} < x \leq 4\}$$



**336.**  $\log_a(2x - 3) > 0 \xrightarrow{0 < a < 1} 0 < 2x - 3 < a^0 \Rightarrow 0 < 2x - 3 < 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \frac{3}{2} < x < 2.$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 2 \right\}$$

**337.** a)  $2 < \log_2(3x + 1) < 4 \Rightarrow 2^2 < 3x + 1 < 2^4 \Rightarrow 4 < 3x + 1 < 16 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 1 < x < 5.$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 5\}$$

b)  $2 < \log_2(3 - 2x) \leq 3 \Rightarrow 4 < 3 - 2x \leq 8 \Rightarrow -\frac{5}{2} \leq x < -\frac{1}{2}.$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} \leq x < -\frac{1}{2} \right\}$$

c)  $\frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}}(2x) < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} > 2x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < 2x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < \frac{1}{\sqrt{8}} \right\}$$

d)  $0 < \log_3(x^2 - 4x + 3) < 1 \Rightarrow 1 < x^2 - 4x + 3 < 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 2 > 0 \\ e \\ x^2 - 4x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 - \sqrt{2} \text{ ou } x > 2 + \sqrt{2} \text{ (I)} \\ e \\ 0 < x < 4 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), vem;

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 - \sqrt{2} \text{ ou } 2 + \sqrt{2} < x < 4\}$$

**338.** Temos:  $1 \leq \log_{10}(x - 1) \leq 2 \Rightarrow 10 \leq x - 1 \leq 100 \Rightarrow 11 \leq x \leq 101.$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 11 \leq x \leq 101\}$

**339.** a)  $|\log_2 x| > 1 \Rightarrow (\log_2 x < -1 \text{ ou } \log_2 x > 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \left( 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \right).$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \right\}$$

b)  $|\log_3(x - 3)| \geq 2 \Rightarrow (\log_3(x - 3) \leq -2 \text{ ou } \log_3(x - 3) \geq 2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left( 0 < x - 3 \leq \frac{1}{9} \text{ ou } x - 3 \geq 9 \right) \Rightarrow \left( 3 < x \leq \frac{28}{9} \text{ ou } x \geq 12 \right).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq \frac{28}{9} \text{ ou } x \geq 12 \right\}$$

c)  $|\log x| < 1 \Rightarrow -1 < \log x < 1 \Rightarrow 10^{-1} < x < 10 \Rightarrow \frac{1}{10} < x < 10.$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10} < x < 10 \right\}$$

d)  $|2 + \log_2 x| \geq 3 \Rightarrow (2 + \log_2 x \leq -3 \text{ ou } 2 + \log_2 x \geq 3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\log_2 x \leq -5 \text{ ou } \log_2 x \geq 1) \Rightarrow (0 < x \leq 2^{-5} \text{ ou } x \geq 2).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{32} \text{ ou } x \geq 2 \right\}$$

e)  $|\log_3(x^2 - 1)| < 1 \Rightarrow -1 < \log_3(x^2 - 1) < 1 \Rightarrow 3^{-1} < x^2 - 1 < 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 > \frac{1}{3} \\ e \\ x^2 - 1 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } x > \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ (I)} \\ e \\ -2 < x < 2 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), vem:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ou } \frac{2}{\sqrt{3}} < x < 2 \right\}$$

**340.** a) Fazendo  $\log_3 x = t$ , vem:

$$3 \log_3^2 x + 5 \log_3 x - 2 \leq 0 \Rightarrow 3t^2 + 5t - 2 \leq 0 \Rightarrow -2 \leq t \leq \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 \leq \log_3 x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 3^{-2} \leq x \leq 3^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{1}{9} \leq x \leq \sqrt[3]{3}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{9} \leq x \leq \sqrt[3]{3} \right\}$$

b) Fazendo  $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ , vem:

$$\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 3 \log_{\frac{1}{2}} x - 4 > 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 > 0 \Rightarrow (t < -1 \text{ ou } t > 4)$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x < -1 \text{ ou } \log_{\frac{1}{2}} x > 4) \Rightarrow \left( x > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ ou } 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^4 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( x > 2 \text{ ou } 0 < x < \frac{1}{16} \right).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{16} \text{ ou } x > 2 \right\}$$

c)  $\log_2^2 x < 4.$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$t^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < t < 2 \Rightarrow -2 < \log_2 x < 2 \Rightarrow \frac{1}{4} < x < 4.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < 4 \right\}$$

$$d) 1 < \log^2 x < 3 \Rightarrow \begin{cases} \log^2 x > 1 \\ e \\ \log^2 x < 3 \end{cases}$$

Fazendo  $\log x = t$ , temos:

$$\begin{cases} t^2 > 1 \\ e \\ t^2 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t < -1 \text{ ou } t > 1 \text{ (I)} \\ e \\ -\sqrt{3} < t < \sqrt{3} \text{ (II)} \end{cases}$$

De (I) e (II) vem:

$$\begin{aligned} &(-\sqrt{3} < t < -1 \text{ ou } 1 < t < \sqrt{3}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-\sqrt{3} < \log x < -1 \text{ ou } 1 < \log x < \sqrt{3}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (10^{-\sqrt{3}} < x < 10^{-1} \text{ ou } 10 < x < 10^{\sqrt{3}}). \end{aligned}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{10^{\sqrt{3}}} < x < \frac{1}{10} \text{ ou } 10 < x < 10^{\sqrt{3}} \right\}$$

e) Fazendo  $\log^2 x = t$ , temos:

$$\log^4 x - 5 \log^2 x + 4 < 0 \Rightarrow t^2 - 5t + 4 < 0 \Rightarrow 1 < t < 4, \text{ isto é, } 1 < \log^2 x < 4.$$

Se fizermos  $\log x = v$ , teremos:

$$1 < v^2 < 4 \Rightarrow \begin{cases} v^2 > 1 \\ e \\ v^2 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v < -1 \text{ ou } v > 1 \\ e \\ -2 < v < 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 < v < -1 \text{ ou } 1 < v < 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2 < \log x < -1 \text{ ou } 1 < \log x < 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (10^{-2} < x < 10^{-1} \text{ ou } 10 < x < 10^2).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 10^{-2} < x < 10^{-1} \text{ ou } 10 < x < 10^2\}$$

f) Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t-1} < 1 \Rightarrow \frac{-t^2 + t - 1}{t^2 - t} < 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$(t < 0 \text{ ou } t > 1) \Rightarrow (\log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x > 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0 < x < 1 \text{ ou } x > 2).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$$

**341.** Fazendo  $\log_e x = t$ , temos:

$$\begin{aligned} 2(\log_e x)^2 - \log_e x > 6 &\Rightarrow 2t^2 - t - 6 > 0 \Rightarrow \left(t < -\frac{3}{2} \text{ ou } t > 2\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\log_e x < -\frac{3}{2} \text{ ou } \log_e x > 2\right) \Rightarrow \left(0 < x < e^{-\frac{3}{2}} \text{ ou } x > e^2\right). \end{aligned}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < e^{-\frac{3}{2}} \text{ ou } x > e^2 \right\}$$

**342.** a) Como  $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$ , temos:

$$\log_2 x - 6 \log_x 2 + 1 > 0 \Rightarrow \log_2 x - 6 \cdot \frac{1}{\log_2 x} + 1 > 0.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$t - \frac{6}{t} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{t^2 + t - 6}{t} > 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$(-3 < t < 0 \text{ ou } t > 2) \Rightarrow (-3 < \log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x > 2) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \frac{1}{8} < x < 1 \text{ ou } x > 4 \right).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{8} < x < 1 \text{ ou } x > 4 \right\}$$

b)  $\log_2 x - \log_x 8 - 2 \geq 0 \Rightarrow \log_2 x - \frac{\log_2 8}{\log_2 x} - 2 \geq 0.$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$t - \frac{3}{t} - 2 \geq 0 \Rightarrow \frac{t^2 - 2t - 3}{t} \geq 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$(-1 \leq t < 0 \text{ ou } t \geq 3) \Rightarrow (-1 \leq \log_2 x < 0 \text{ ou } \log_2 x \geq 3) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left( \frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ ou } x \geq 8 \right).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 1 \text{ ou } x \geq 8 \right\}$$

c) Como sabemos,  $\log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^5}{4} \right) = \frac{\log_2 \left( \frac{x^5}{4} \right)}{\log_2 \frac{1}{2}} = -\log_2 \left( \frac{x^5}{4} \right) =$

$$= -[\log_2 x^5 - \log_2 4] = 2 - 5 \log_2 x.$$

Então, a desigualdade proposta é equivalente a:

$$(\log_2 x)^4 - (2 - 5 \log_2 x)^2 - 20 \log_2 x + 148 < 0.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$t^4 - (2 - 5t)^2 - 20t + 148 < 0 \Rightarrow t^4 - 25t^2 + 144 < 0.$$

Fazendo  $t^2 = v$ , temos:

$$v^2 - 25v + 144 < 0 \Rightarrow 9 < v < 16 \Rightarrow 9 < t^2 < 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-4 < t < -3 \text{ ou } 3 < t < 4) \Rightarrow (-4 < \log_2 x < -3 \text{ ou } \\ 3 < \log_2 x < 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \frac{1}{16} < x < \frac{1}{8} \text{ ou } 8 < x < 16 \right).$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{16} < x < \frac{1}{8} \text{ ou } 8 < x < 16 \right\}$$

**343.** Como  $\log_x e = \frac{1}{\log_e x}$ , podemos escrever:

$$\frac{1}{\log_e x} + \frac{1}{\frac{1}{\log_e x} - 1} > 1.$$

Fazendo  $\log_e x = t$ , vem:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{\frac{1}{t} - 1} > 1 \Rightarrow \frac{2t^2 - 2t + 1}{t - t^2} > 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$0 < t < 1 \Rightarrow 0 < \log_e x < 1 \Rightarrow 1 < x < e.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < e\}$$

**344.** A condição de existência dos logaritmos é  $1 - 8(\log_{\frac{1}{4}} x)^2 \geq 0$  e  $x > 0$ .

Fazendo  $\log_{\frac{1}{4}} x = t$ , vem:

$$1 - 8t^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq t \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow -\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \log_{\frac{1}{4}} x \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ e } x > 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leq x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \text{ (I).}$$

Voltando à desigualdade proposta, temos:

$$1 - \sqrt{1 - 8(\log_{\frac{1}{4}} x)^2} < 3 \log_{\frac{1}{4}} x \Rightarrow 1 - \sqrt{1 - 8t^2} < 3t \Rightarrow$$

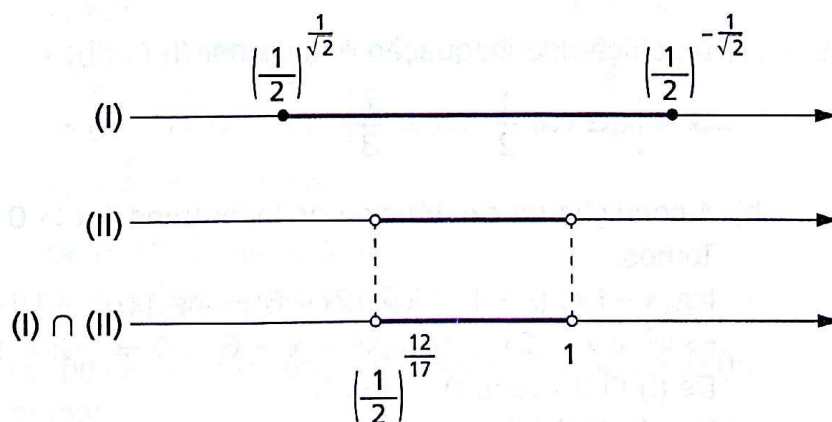
$$\Rightarrow 1 - 3t < \sqrt{1 - 8t^2} \Rightarrow 0 \leq (1 - 3t)^2 < 1 - 8t^2.$$

Como  $(1 - 3t)^2 \geq 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ , temos apenas:

$$(1 - 3t)^2 < 1 - 8t^2 \Rightarrow 17t^2 - 6t < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < t < \frac{6}{17} \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{4}} x < \frac{6}{17} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{17}} < x < 1 \text{ (II).}$$

A solução da inequação é dada pela interseção de (I) e (II):



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{17}} < x < 1\right\}$$

**345.** Escrevendo os logaritmos em base 2, temos:

$$\log_{\frac{x}{2}} 8 + \log_{\frac{x}{4}} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4} \Rightarrow \frac{\log_2 8}{\log_2 \left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{\log_2 8}{\log_2 \left(\frac{x}{4}\right)} < \frac{4 \log_2 x}{2 \log_2 x - 4}.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , temos:

$$\frac{3}{t-1} + \frac{3}{t-2} < \frac{4t}{2t-4} \Rightarrow \frac{-2t^2 + 8t - 9}{t^2 - 3t + 2} < 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, obtemos:

$$(t < 1 \text{ ou } t > 2) \Rightarrow (\log_2 x < 1 \text{ ou } \log_2 x > 2) \Rightarrow (0 < x < 2 \text{ ou } x > 4).$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } x > 4\}$$

**346.** Fazendo  $\log_a x = t$ , temos:

$$\frac{1 + \log_a^2 x}{1 + \log_a x} > 1 \Rightarrow \frac{1 + t^2}{1 + t} > 1 \Rightarrow \frac{t^2 - t}{1 + t} > 0.$$

Fazendo o quadro-quociente, obtemos:  $-1 < t < 0$  ou  $t > 1$ , isto é:

$$-1 < \log_a x < 0 \xrightarrow{0 < a < 1} 1 < x < \frac{1}{a}$$

ou

$$\log_a x > 1 \xrightarrow{0 < a < 1} 0 < x < a.$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{1}{a} \text{ ou } 0 < x < a\right\}$$

**348.** a) A condição de existência dos logaritmos é  $x > \frac{1}{2}$  (I).

Temos:

$$\begin{aligned} \log_3 (3x + 4) - \log_3 (2x - 1) > 1 &\Rightarrow \log_3 \left(\frac{3x + 4}{2x - 1}\right) > 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3x + 4}{2x - 1} > 3 &\xrightarrow{x > \frac{1}{2}} 3x + 4 > 3(2x - 1) \Rightarrow x < \frac{7}{3} \text{ (II)}. \end{aligned}$$

A solução da inequação é dada por  $(I) \cap (II)$ :

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < \frac{7}{3}\right\}$$

b) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 0$  (I).

Temos:

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 (x + 1) < \log_2 (2x + 6) &\Rightarrow \log_2 [x \cdot (x + 1)] < \log_2 (2x + 6) \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + x < 2x + 6 &\Rightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Rightarrow -2 < x < 3 \text{ (II)}. \end{aligned}$$

De  $(I) \cap (II)$  vem:  $0 < x < 3$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$$

c) A condição de existência dos logaritmos é  $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$  (I).

Temos:

$$\log_2(3x + 2) - \log_2(1 - 2x) > 2 \Rightarrow \log_2\left(\frac{3x + 2}{1 - 2x}\right) > 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3x + 2}{1 - 2x} > 4 \xrightarrow{1 - 2x > 0} 3x + 2 > 4 - 8x \Rightarrow x > \frac{2}{11} \text{ (II)}.$$

De (I)  $\cap$  (II) segue que:  $\frac{2}{11} < x < \frac{1}{2}$ .

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{11} < x < \frac{1}{2}\right\}$$

d) A condição de existência dos logaritmos é  $x > \frac{1}{2}$  (I).

Temos:

$$\log(2x - 1) - \log(x + 2) < \log 3 \Rightarrow \log\left(\frac{2x - 1}{x + 2}\right) < \log 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x - 1}{x + 2} < 3 \xrightarrow{x + 2 > 0} 2x - 1 < 3x + 6 \Rightarrow x > -7 \text{ (II)}.$$

De (I)  $\cap$  (II) temos:  $x > \frac{1}{2}$ .

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{2}\right\}$$

e) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 2$  (I).

Temos:  $\log_3(x^2 + x - 6) - \log_3(x + 1) > \log_3 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_3\left(\frac{x^2 + x - 6}{x + 1}\right) > \log_3 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x + 1} > 4 \xrightarrow{(I)} x^2 + x - 6 > 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > 5 \text{ (II)}.$$

(I)  $\cap$  (II):  $x > 5$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

f) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 1$  (I).

Temos:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) + \log_{\frac{1}{2}}(3x - 2) \geq -2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}[(x - 1)(3x - 2)] \geq -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 1)(3x - 2) \leq 4 \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x \leq 2 \text{ (II)}$$

De (I)  $\cap$  (II) temos  $1 < x \leq 2$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$$

**349.** A condição de existência dos logaritmos é  $x > 0$  (I).

Temos:

$$\log_{10} x + \log_{10}(x + 3) < 1 \Rightarrow \log_{10}[x \cdot (x + 3)] < 1 \Rightarrow x^2 + 3x < 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 10 < 0 \Rightarrow -5 < x < 2 \text{ (II)}.$$

De (I)  $\cap$  (II) vem:  $0 < x < 2$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\}$$

- 350.** a) A condição de existência dos logaritmos é  $x > -\frac{1}{6}$  (I).

Temos:

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt{6x+1} + \log_2 \sqrt{x+1} &> \log_4 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 [\sqrt{6x+1} \cdot \sqrt{x+1}] &> \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 \sqrt{6x^2 + 7x + 1} &> \frac{1}{2} \cdot \log_2 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \cdot \log_2 \sqrt{6x^2 + 7x + 1} &> \log_2 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 (\sqrt{6x^2 + 7x + 1})^2 &> \log_2 3 \Rightarrow 6x^2 + 7x + 1 > 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow 6x^2 + 7x - 2 > 0 \Rightarrow x < \frac{-7 - \sqrt{97}}{12} &\text{ ou } x > \frac{-7 + \sqrt{97}}{12} \text{ (II)}. \end{aligned}$$

De (I)  $\cap$  (II) temos:  $x > \frac{-7 + \sqrt{97}}{12}$ .

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{-7 + \sqrt{97}}{12} \right\}$$

- b) A condição de existência dos logaritmos é  $x > 1$  (I).

Como  $\log_4 (8x) = \frac{\log_2 (8x)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 (8x) = \log_2 (8x)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{8x}$ ,

podemos escrever:

$$\begin{aligned} \log_4 (8x) - \log_2 \sqrt{x-1} - \log_2 \sqrt{x+1} &< \log_2 3 \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 \sqrt{8x} &< \log_2 3 + \log_2 \sqrt{x-1} + \log_2 \sqrt{x+1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 \sqrt{8x} &< \log_2 (3 \cdot \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log_2 \sqrt{8x} &< \log_2 (3 \cdot \sqrt{x-1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow 8x < 9(x^2 - 1) &\Rightarrow 9x^2 - 8x - 9 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x < \frac{4 - \sqrt{97}}{9} &\text{ ou } x > \frac{4 + \sqrt{97}}{9} \text{ (II)}. \end{aligned}$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), obtemos:  $x > \frac{4 + \sqrt{97}}{9}$ .

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{4 + \sqrt{97}}{9} \right\}$$

- 351.** A condição de existência dos logaritmos é:

$$\begin{cases} 2x^2 + x + 1 > 0 \text{ (é satisfeita para } \forall x \in \mathbb{R}) \\ e \\ 2x - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > \frac{1}{2} \text{ (I)}$$

Como  $\log_4 (2x^2 + x + 1) = \frac{\log_2 (2x^2 + x + 1)}{\log_2 4} = \frac{1}{2} \cdot \log_2 (2x^2 + x + 1) = \log_2 (2x^2 + x + 1)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{2x^2 + x + 1}$ , podemos escrever:

$$\log_4 (2x^2 + x + 1) - \log_2 (2x - 1) \leq 1 \Rightarrow$$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow \log_2 \sqrt{2x^2 + x + 1} - \log_2(2x - 1) \leq 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log_2 \left( \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{2x - 1} \right) \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{\sqrt{2x^2 + x + 1}}{2x - 1} \leq 2 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow \sqrt{2x^2 + x + 1} \leq 2(2x - 1) \Rightarrow 2x^2 + x + 1 \leq [2(2x - 1)]^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 14x^2 - 17x + 3 \geq 0 \Rightarrow \left( x \leq \frac{3}{14} \text{ ou } x \geq 1 \right) \text{ (II)}. \end{aligned}$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), temos:  $x \geq 1$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

**353.** a)  $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x) < 0 \Rightarrow \log_2 x > \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Rightarrow \log_2 x > 1 \Rightarrow x > 2$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$$

b)  $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{3}} x) \geq 0 \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}} x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x < 1$ .

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x < 1 \right\}$$

c)  $\log_2(\log_{\frac{1}{2}} x) \geq 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geq 2 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{4}$ .

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{4} \right\}$$

d)  $\log_2[\log_3(\log_5 x)] > 0 \Rightarrow \log_3(\log_5 x) > 1 \Rightarrow \log_5 x > 3 \Rightarrow x > 125$ .

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 125\}$$

e)  $\log_{\frac{1}{2}}[\log_3(\log_{\frac{1}{2}} x)] < 0 \Rightarrow \log_3(\log_{\frac{1}{2}} x) > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x > 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 < x < \frac{1}{8}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{8} \right\}$$

f)  $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)] > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x) > 2 \Rightarrow 0 < \log_3 x < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 < \log_3 x < \frac{1}{4} \Rightarrow 1 < x < \sqrt[4]{3}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \sqrt[4]{3}\}$$

**354.**  $\log_{\frac{1}{3}}[\log_{\frac{1}{3}} x] \geq 0 \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}} x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x < 1$ .

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x < 1 \right\}$$

**355.** Temos:

$$\log_a (\log_a x) < 0 \xrightarrow{a > 1} 0 < \log_a x < 1 \xrightarrow{a > 1} 1 < x < a.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < a\}$$

**356.** Temos:

$$\log_a (\log_{\frac{1}{a}} x) \leq 0 \xrightarrow{0 < a < 1} \log_{\frac{1}{a}} x \geq 1 \xrightarrow{\frac{1}{a} > 1} x \geq \frac{1}{a}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{a} \right\}$$

**357.** Temos:

$$\log_a \left[ \log_{\frac{1}{a}} (\log_a x) \right] \geq 0 \xrightarrow{a > 1} \log_{\frac{1}{a}} (\log_a x) \geq 1 \xrightarrow{0 < \frac{1}{a} < 1} 0 < \log_a x \leq \frac{1}{a} \Rightarrow \xrightarrow{a > 1} 1 < x \leq a^{\frac{1}{a}}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq \sqrt[a]{a}\}$$

**358.** Temos:

$$\log_{\frac{1}{a}} [\log_a (\log_a x)] \leq 0 \xrightarrow{\frac{1}{a} > 1} 0 < \log_a (\log_a x) \leq 1 \xrightarrow{0 < a < 1}$$

$$\Rightarrow a \leq \log_a x < 1 \xrightarrow{0 < a < 1} a < x \leq a^a.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq a^a\}$$

**359.** a)  $\log_2 \{1 + \log_3 [\log_2 (x^2 - 3x + 2)]\} \geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + \log_3 [\log_2 (x^2 - 3x + 2)] \geq 1 \Rightarrow \log_3 [\log_2 (x^2 - 3x + 2)] \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (x^2 - 3x + 2) \geq 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3\}$$

b)  $\log_{\frac{1}{3}} [\log_4 (x^2 - 5)] > 0 \Rightarrow 0 < \log_4 (x^2 - 5) < 1 \Rightarrow 1 < x^2 - 5 < 4 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5 > 1 \\ e \\ x^2 - 5 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -\sqrt{6} \text{ ou } x > \sqrt{6} \text{ (I)} \\ e \\ -3 < x < 3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < -\sqrt{6} \text{ ou } \sqrt{6} < x < 3\}$$

c)  $\log_2 \left( \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x-1} \right) < 0 \Rightarrow 0 < \log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{x-1} \right) < 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{x-1} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-1} > \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x-1} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4-x}{x-1} > 0 \text{ (I)} \\ \frac{2-x}{x-1} < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo o quadro-quociente para (I), decorre  $1 < x < 4$ , e para (II) decorre  $x < 1$  ou  $x > 2$ .

Fazendo a interseção desses intervalos, vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \log_{\frac{1}{2}} \left( \log_8 \frac{x^2 - 2x}{x-3} \right) \leq 0 &\Rightarrow \log_8 \left( \frac{x^2 - 2x}{x-3} \right) \geq 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x}{x-3} \geq 8 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{x^2 - 10x + 24}{x-3} \geq 0. \end{aligned}$$

Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 4 \text{ ou } x \geq 6\}$$

**360.** a) Devemos ter:  $\log_2 x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ .

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

b) Devemos ter:  $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq 1$ .

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$$

c) Devemos ter:  $\log_2 (\log_{\frac{1}{2}} x) \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x \geq 1 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2}$ .

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{1}{2} \right\}$$

d) Neste caso, precisamos garantir somente a existência do logaritmo, isto é,  $\log_2 x > 0 \Rightarrow x > 1$ .

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

e) Devemos ter:  $\log_3 \frac{x^2 + 2x - 7}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 2x - 7}{x-1} \geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + x - 6}{x-1} \geq 0.$$

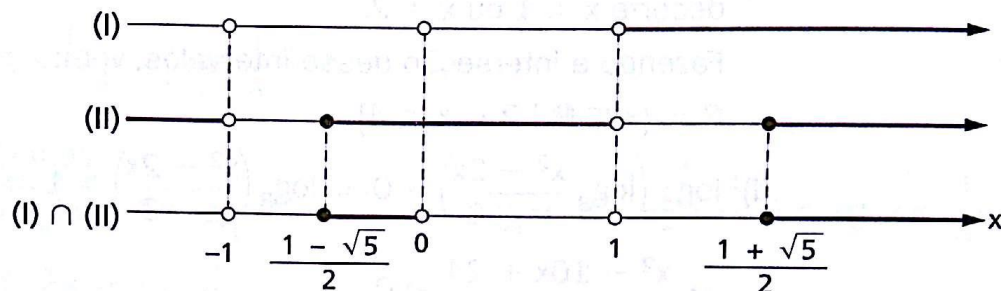
Fazendo o quadro-quociente, temos:

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x < 1 \text{ ou } x \geq 2\}$$

f) Devemos ter:  $\log_{\frac{1}{2}} \left( \frac{x}{x^2 - 1} \right) \geq 0 \Rightarrow 0 < \frac{x}{x^2 - 1} \leq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1} > 0 \\ \frac{x}{x^2 - 1} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 1} > 0 \text{ (I)} \\ e \\ \frac{-x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \leq 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Fazendo o quadro-quociente para (I) e (II), obtemos:



$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x < 0 \text{ ou } x \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\}$$

**361.** Devemos ter:  $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) \geq 0 \Rightarrow 0 < x - 1 \leq 1 \Rightarrow 1 < x \leq 2$ .

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 2\}$$

**362.** A desigualdade  $\sqrt{\log_a \frac{3 - 2x}{1 - x}} < 1$  é equivalente à desigualdade

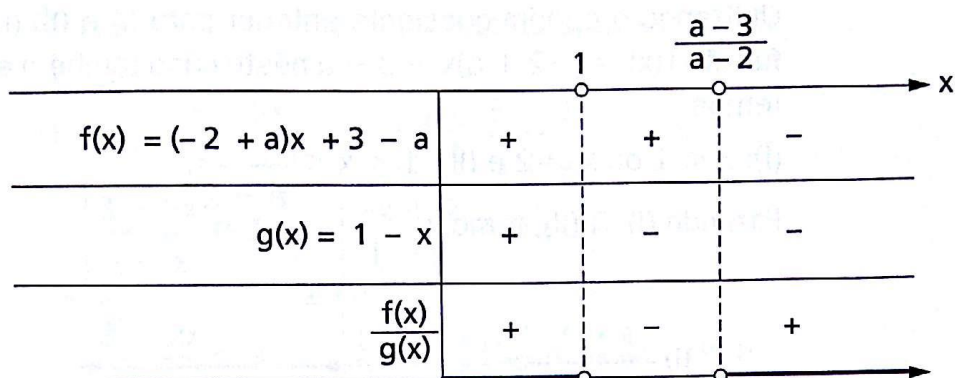
$$0 \leq \log_a \frac{3 - 2x}{1 - x} < 1.$$

1º caso:  $0 < a < 1$

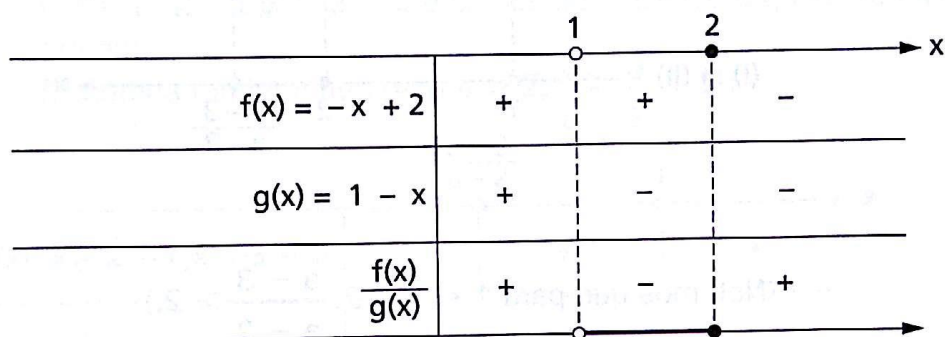
$$0 \leq \log_a \frac{3 - 2x}{1 - x} < 1 \Rightarrow a < \frac{3 - 2x}{1 - x} \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3 - 2x}{1 - x} > a \text{ (I)} \\ e \\ \frac{3 - 2x}{1 - x} \leq 1 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{(-2 + a)x + 3 - a}{1 - x} > 0 \text{ (I)} \\ e \\ \frac{-x + 2}{1 - x} \leq 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

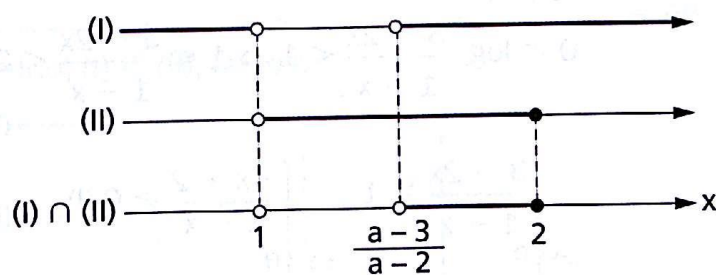
Para resolver (I), notemos que, como  $0 < a < 1$ ,  $-2 + a < 0$  e, portanto, a função  $f(x) = (-2 + a)x + 3 - a$  é decrescente. Então, fazendo o quadro-quociente, temos:



Fazendo o quadro-quociente para (II), obtemos:



Fazendo  $(I) \cap (II)$ , vem:



2º caso:  $a > 1$  e  $-2 + a < 0$ , isto é,  $1 < a < 2$

Temos:

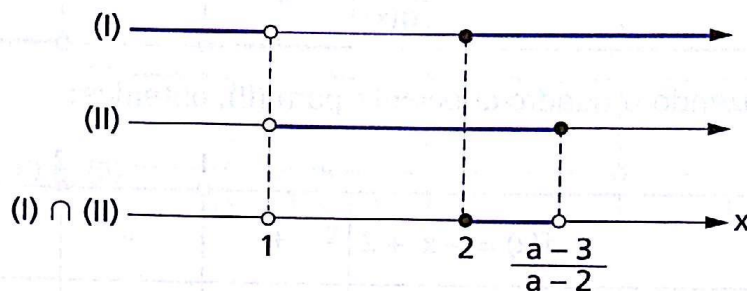
$$0 \leq \log_a \frac{3 - 2x}{1 - x} < 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3 - 2x}{1 - x} < a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3 - 2x}{1 - x} \geq 1 \\ \frac{3 - 2x}{1 - x} < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x + 2}{1 - x} \geq 0 \text{ (I)} \\ \frac{(-2 + a)x + 3 - a}{1 - x} < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Utilizando o quadro-quociente anterior para (I) e (II) (notemos que a função  $f(x) = (-2 + a)x + 3 - a$  neste caso também é decrescente), temos:

(I):  $x < 1$  ou  $x \geq 2$  e (II):  $1 < x < \frac{a-3}{a-2}$ .

Fazendo  $(I) \cap (II)$ , temos:



(Notemos que para  $1 < a < 2$ ,  $\frac{a-3}{a-2} > 2$ .)

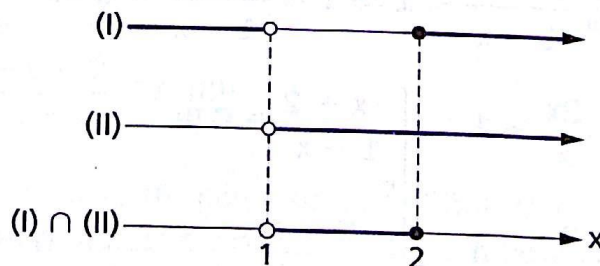
3º caso:  $a > 1$  e  $-2 + a = 0$ , isto é,  $a = 2$

Temos:

$$0 \leq \log_a \frac{3-2x}{1-x} < 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3-2x}{1-x} < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3-2x}{1-x} \geq 1 \\ \frac{3-2x}{1-x} < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x+2}{1-x} \geq 0 \text{ (I)} \\ \frac{1}{1-x} < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Temos:



4º caso:  $a > 1$  e  $-2 + a > 0$ , isto é,  $a > 2$

Temos:

$$0 \leq \log_a \left( \frac{3-2x}{1-x} \right) < 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{3-2x}{1-x} < a \Rightarrow$$

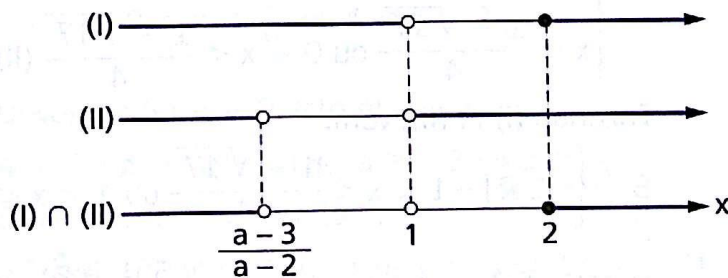
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3-2x}{1-x} \geq 1 \\ \frac{3-2x}{1-x} < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-x+2}{1-x} \geq 0 \text{ (I)} \\ \frac{(-2+a)x+3-a}{1-x} < 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

Para resolvermos (II), notemos que, como  $a > 2$ , a função  $f(x) = (-2+a)x + 3 - a$  é crescente. Fazendo o quadro-quociente, temos:

(Notemos também que para  $a > 2$ ,  $\frac{a-3}{a-2} < 1$ .)

		$\frac{a-3}{a-2}$	1	
		○	○	→ x
$f(x) = (-2+a)x + 3 - a$	-	+	+	
$g(x) = 1 - x$	+	+	-	
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-	+	-	
		○	○	→ (II)

Fazendo, então, (I)  $\cap$  (II), temos:



Agrupando os 4 casos, temos:

$$0 < a < 1 \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{a-3}{a-2} < x \leq 2 \right\}$$

$$1 < a < 2 \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < \frac{a-3}{a-2} \right\}$$

$$a = 2 \Rightarrow S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2 \};$$

$$a > 2 \Rightarrow S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{a-3}{a-2} \text{ ou } x \geq 2 \right\}$$

363. a)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 9x + 5)} > 2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 9x + 5)} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow$   
 $\log_{\frac{1}{3}}(4x^2 - 9x + 5) < -1 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 5 > 3 \Rightarrow 4x^2 - 9x + 2 > 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 2$   
 $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{4} \text{ ou } x > 2\right\}$

b)  $3^{\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 6x)}{2}} \leq \frac{1}{81} \Rightarrow 3^{\frac{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 6x)}{2}} \leq 3^{-4} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 6x) \leq -4 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x^2 + 6x \geq 16 \Rightarrow x^2 + 6x - 16 \geq 0 \Rightarrow x \leq -8 \text{ ou } x \geq 2$   
 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -8 \text{ ou } x \geq 2\}$

c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \left[ \log_{\frac{1}{2}} \left( x - \frac{1}{x} \right) \right]} < 1 \Rightarrow \log_3 \left[ \log_{\frac{1}{2}} \left( x - \frac{1}{x} \right) \right] > 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left( x - \frac{1}{x} \right) > 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow 0 < x - \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{x} > 0 \\ x - \frac{1}{x} < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x} > 0 \\ \frac{2x^2 - x - 2}{2x} < 0 \end{cases}$

Fazendo o quadro-quociente, vem:

$$\Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \text{ ou } x > 1 \text{ (I)} \\ x < \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } 0 < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \text{ (II)}. \end{cases}$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), vem:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{1 - \sqrt{17}}{4} \text{ ou } 1 < x < \frac{1 + \sqrt{17}}{4} \right\}$$

d)  $(1,25)^{1 - \log_2^2 x} < (0,64)^{2 + \log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{1 - \log_2^2 x} < \left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^{(2 + \log_{\sqrt{2}} x)} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{1 - \log_2^2 x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4 + 2 \log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}\right]^{1 - \log_2^2 x} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4 + 2 \log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_2^2 x - 1} < \left(\frac{4}{5}\right)^{4 + 2 \log_{\sqrt{2}} x} \Rightarrow \log_2^2 x - 1 > 4 + 2 \log_{\sqrt{2}} x$

Como  $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} = 2 \log_2 x$ , podemos escrever:

$$(\log_2 x)^2 - 1 > 4 + 4 \log_2 x.$$



Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$t^2 - 1 > 4 + 4t \Rightarrow t^2 - 4t - 5 > 0 \Rightarrow (t < -1 \text{ ou } t > 5), \text{ isto é,}$$

$$\left(\log_2 x < -1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{2}\right) \text{ ou } (\log_2 x > 5 \Rightarrow x > 32)$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 32\right\}$$

**364.**

1º caso:  $0 < x < 1$  (I)

$$x^{2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2} > x^{-1} \Rightarrow 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 < -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - (\log_2 x)^2 - 2 \cdot \log_2 x < -1.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$2 - t^2 - 2t < -1 \Rightarrow -t^2 - 2t + 3 < 0 \Rightarrow (t < -3 \text{ ou } t > 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 x < -3 \text{ ou } \log_2 x > 1) \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{8} \text{ ou } x > 2 \text{ (II).}$$

A solução do 1º caso é dada por (I)  $\cap$  (II), isto é:  $0 < x < \frac{1}{8}$ .

2º caso:  $x > 1$  (I)

$$x^{2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2} > x^{-1} \Rightarrow 2 - \log_2^2 x - \log_2 x^2 > -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - (\log_2 x)^2 - 2 \cdot \log_2 x + 1 > 0.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$2 - t^2 - 2t + 1 > 0 \Rightarrow -t^2 - 2t + 3 > 0 \Rightarrow -3 < t < 1, \text{ isto é,}$$

$$-3 < \log_2 x < 1 \Rightarrow \frac{1}{8} < x < 2 \text{ (II).}$$

A solução do 2º caso é dada por (I)  $\cap$  (II), isto é:  $1 < x < 2$ .

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{8} \text{ ou } 1 < x < 2\right\}$$

**366.**

a) Devemos ter  $\Delta \geq 0$ , isto é:

$$4 + 4 \log_2 a \geq 0 \Rightarrow \log_2 a \geq -1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}.$$

b) Devemos ter  $\Delta \geq 0$ , isto é:

$$36 - 4 \cdot 3 \cdot \log a \geq 0 \Rightarrow \log a \leq 3 \Rightarrow 0 < a \leq 10^3.$$

c) Devemos ter  $\Delta \geq 0$ , isto é:

$$(-\log_3 a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \geq 0 \Rightarrow (\log_3 a)^2 - 16 \geq 0.$$

Fazendo  $\log_3 a = t$ , vem:

$$t^2 - 16 \geq 0 \Rightarrow (t \leq -4 \text{ ou } t \geq 4), \text{ isto é,}$$

$$(\log_3 a \leq -4 \text{ ou } \log_3 a \geq 4) \Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{81} \text{ ou } a \geq 81.$$

d) Devemos ter  $\Delta \geq 0$ , isto é:

$$(-\log_2 a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \log_2 a \geq 0 \Rightarrow (\log_2 a)^2 - 4 \log_2 a \geq 0.$$

Fazendo  $\log_2 a = t$ , vem:

$$t^2 - 4t \geq 0 \Rightarrow (t \leq 0 \text{ ou } t \geq 4), \text{ isto é,}$$

$$(\log_2 a \leq 0 \text{ ou } \log_2 a \geq 4) \Rightarrow 0 < a \leq 1 \text{ ou } a \geq 16.$$

**367.** Devemos ter  $\Delta < 0$ , isto é,

$$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\log_{10} m) < 0 \Rightarrow 4 + 4 \log_{10} m < 0 \Rightarrow \log_{10} m < -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{10}.$$

**368.** A equação admitirá raízes de sinais contrários se o produto das raízes for negativo, isto é,  $P = \frac{c}{a} < 0$ .

Temos, então:

$$\frac{\log_{10} N}{1} < 0 \Rightarrow \log_{10} N < 0 \Rightarrow 0 < N < 1.$$

**369.** Devemos ter  $\Delta > 0$ , isto é,

$$[-(\log_e t + 3)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\log_e t) > 0 \Rightarrow (\log_e t)^2 + 10 \log_e t + 9 > 0.$$

Fazendo  $\log_e t = y$ , vem:

$$y^2 + 10y + 9 > 0 \Rightarrow y < -9 \text{ ou } y > -1, \text{ isto é,}$$

$$\log_e t < -9 \text{ ou } \log_e t > -1 \Rightarrow 0 < t < e^{-9} \text{ ou } t > \frac{1}{e}.$$

**370.** Devemos ter  $P = \frac{c}{a} < 0$ , isto é,

$$\frac{\log(2a^2 - 9a + 10)}{3} < 0 \Rightarrow \log(2a^2 - 9a + 10) < 0 \Rightarrow$$

$$0 < 2a^2 - 9a + 10 < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2a^2 - 9a + 10 > 0 \\ 2a^2 - 9a + 9 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 2 \text{ ou } a > \frac{5}{2} \text{ (I)} \\ \frac{3}{2} < a < 3 \text{ (II)} \end{cases}$$

Devemos ter  $\frac{3}{2} < a < 2$  ou  $\frac{5}{2} < a < 3$  para satisfazer (I) e (II).

**371.** a) 1º caso: Se  $\log_2(1 - x) \geq 0$ , isto é,  $1 - x \geq 1 \Rightarrow x \leq 0$  (I).

Temos:

$$(4 - x^2) \cdot \log_2(1 - x) \leq 0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 4 - x^2 \leq 0 \Rightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2 \text{ (II)}.$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), temos  $x \leq -2$ .

2º caso: Se  $\log_2(1 - x) \leq 0$ , isto é,  $0 < 1 - x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x < 1$  (I).

Temos:

$$(4 - x^2) \cdot \log_2(1 - x) \leq 0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 4 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \text{ (II)}.$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), temos  $0 \leq x < 1$ .

Assim, agrupando as 2 possibilidades, vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } 0 \leq x < 1\}$$

b) 1º caso: Se  $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \geq 0 \Rightarrow 0 < 3x - 4 \leq 1 \Rightarrow \frac{4}{3} < x \leq \frac{5}{3}$  (I)

Temos:

$$(5x^2 + x - 6) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \geq 0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 5x^2 + x - 6 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \leq -\frac{6}{5} \text{ ou } x \geq 1 \text{ (II)}.$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), temos:  $\frac{4}{3} < x \leq \frac{5}{3}$ .

2º caso:  $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \leq 0 \Rightarrow 3x - 4 \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3}$  (I).

Temos:

$$(5x^2 + x - 6) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) \geq 0 \stackrel{(I)}{\Rightarrow} 5x^2 + x - 6 \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{6}{5} \leq x \leq 1 \text{ (II)}.$$

Fazendo (I)  $\cap$  (II), temos: (I)  $\cap$  (II) =  $\emptyset$ .

Assim, temos soluções apenas no 1º caso.

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{4}{3} < x \leq \frac{5}{3} \right\}$$

**372.** A condição de existência dos logaritmos é  $x > 0$ .

Fazendo  $\log x = t$  ( $x = 10^t$ ), vem:

$$\frac{1}{x^{\log x}} \cdot \log x < 1 \Rightarrow (10^t)^{\frac{1}{t}} \cdot t < 1 \Rightarrow t < \frac{1}{10} \Rightarrow \log x < \frac{1}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < x < 10^{\frac{1}{10}}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \sqrt[10]{10} \right\}$$

**374.** a) A condição de existência do logaritmo é

$$x > -2 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1 \text{ e } x \neq 1 \text{ (I)}.$$

1º caso:  $x^2 > 1$ , isto é,  $x < -1$  ou  $x > 1$  (II).

Temos:

$$\log_{x^2}(x + 2) < 1 \Rightarrow x + 2 < x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ ou } x > 2 \text{ (III)}.$$

A solução é dada por (I)  $\cap$  (II)  $\cap$  (III):  $-2 < x < -1$  ou  $x > 2$ .

2º caso:  $0 < x^2 < 1$ , isto é,  $-1 < x < 1$  e  $x \neq 0$  (IV).

Temos:

$$\log_{x^2}(x + 2) < 1 \Rightarrow x + 2 > x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow -1 < x < 2 \text{ (V)}.$$

A solução, neste caso, é dada por (I)  $\cap$  (IV)  $\cap$  (V):  $-1 < x < -1$  e  $x \neq 0$ .

Considerando as duas possibilidades, temos:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < -1 \text{ ou } x > 2 \text{ ou } (-1 < x < 1 \text{ e } x \neq 0)\}$ ,  
que é equivalente a  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid (-2 < x < 1 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1) \text{ ou } x > 2\}$ .

- b) A condição de existência do logaritmo é  $x > -\frac{3}{2}$  e  $x \neq -1$  e  $x \neq 0$  (I).

1º caso: Se  $2x + 3 > 1$ , isto é,  $x > -1$  (II).

Temos:  $\log_{2x+3} x^2 < 1 \Rightarrow x^2 < 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow -1 < x < 3$  (III).

A solução  $S_1$  neste caso é dada por  $(I) \cap (II) \cap (III)$ :

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \text{ e } -1 < x < 3\}$ .

2º caso: Se  $0 < 2x + 3 < 1$ , isto é,  $-\frac{3}{2} < x < -1$  (IV).

Temos:  $\log_{2x+3} x^2 < 1 \Rightarrow x^2 > 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x < -1 \text{ ou } x > 3$  (V).

A solução  $S_2$  neste caso é dada por  $S_2 = (I) \cap (IV) \cap (V)$ .

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < -1\right\}$$

A solução da inequação proposta é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < 3 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1\right\}$$

- c) A condição de existência do logaritmo é  $(x < 1 \text{ e } x \neq 0 \text{ e } x \neq -1)$  ou  $x > 4$  (I).

1º caso: Se  $x^2 > 1$ , isto é,  $x < -1$  ou  $x > 1$  (II), temos:

$\log_{x^2} (x^2 - 5x + 4) < 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 < x^2 \Rightarrow x > \frac{4}{5}$  (III).

A solução  $S_1$  neste caso é dada por  $(I) \cap (II) \cap (III)$ :

$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$

2º caso: Se  $x^2 < 1$ , isto é,  $-1 < x < 1$  e  $x \neq 0$  (IV), temos:

$\log_{x^2} (x^2 - 5x + 4) < 1 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 > x^2 \Rightarrow x < \frac{4}{5}$  (V).

A solução  $S_2$  neste caso é dada por  $(I) \cap (IV) \cap (V)$ , isto é,

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{4}{5} \text{ e } x \neq 0\right\}.$$

A solução da inequação proposta é:  $S = S_1 \cup S_2$ , isto é,

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{4}{5} \text{ e } x \neq 0 \text{ ou } x > 4\right\}.$$

- d) A condição de existência do logaritmo é  $0 < x < \frac{6}{5}$  e  $x \neq 1$  (I).

1º caso: Se  $x > 1$  (II), então:

$\log_x \left(\frac{4x+5}{6-5x}\right) < -1 \Rightarrow \frac{4x+5}{6-5x} < x^{-1} \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -3 < x < \frac{1}{2} \text{ (III)}.$$

A solução  $S_1$  neste caso é dada por  $(I) \cap (II) \cap (III)$ , isto é,  $S_1 = \emptyset$ .

2º caso: Se  $0 < x < 1$  (IV), então:

$$\log_x \left( \frac{4x + 5}{6 - 5x} \right) < -1 \Rightarrow \frac{4x + 5}{6 - 5x} > x^{-1} \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x < -3 \text{ ou } x > \frac{1}{2} \text{ (V)}.$$

A solução  $S_2$  neste caso é dada por  $(I) \cap (IV) \cap (V)$ , isto é:

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1 \right\}.$$

A solução da inequação proposta é:  $S = S_1 \cup S_2 = S_2 =$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x < 1 \right\}.$$

- e) A condição de existência do logaritmo é  $0 < 3x^2 + 1 \neq 1$ . Como  $\forall x \in \mathbb{R}, 3x^2 + 1 > 0$ , devemos ter:  $3x^2 + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$  (I). Notemos que, para  $\forall x \in \mathbb{R}^*$ , vem  $3x^2 + 1 > 1$ . Assim, há um único caso a considerar:

$$\log_{3x^2 + 1} 2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < (3x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}, \text{ isto é, } 2 < \sqrt{3x^2 + 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 < 3x^2 + 1 \Rightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1 \text{ (II)}.$$

A solução da inequação proposta é:  $S = (I) \cap (II)$ , isto é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 1\}.$$

- f) A condição de existência do logaritmo é  $\begin{cases} \frac{x+3}{x-1} > 0 \\ e \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x < -3 \text{ ou } x > 1) \\ e \\ 0 < x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1$  (I).

Como  $x < 1$ , temos:

$$\log_x \left( \frac{x+3}{x-1} \right) > 1 \Rightarrow \frac{x+3}{x-1} > x \Rightarrow -1 < x < 3 \text{ (II)}.$$

A solução  $S$  neste caso é dada por:  $(I) \cap (II)$ , isto é,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}.$$

- g) A condição de existência do logaritmo é  $(-6 < x < -1 \text{ e } x \neq -5)$  ou  $x > 2$  (I).

1º caso: Se  $x + 6 > 1$ , isto é,  $x > -5$  (II), temos:

$$\log_{x+6} (x^2 - x - 2) \geq 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq x + 6 \Rightarrow x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4 \text{ (III)}.$$

A solução  $S_1$  neste caso é dada por  $(I) \cap (II) \cap (III)$ :

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}.$$

2º caso: Se  $0 < x + 6 < 1$ , isto é,  $-6 < x < -5$  (IV), temos:

$$\log_{x+6} (x^2 - x - 2) \geq 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leq x + 6 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4 \text{ (V)}.$$

A solução  $S_2$  neste caso é dada por:  $(I) \cap (IV) \cap (V)$ , isto é,  $S_2 = \emptyset$ .

A solução da inequação proposta é  $S = S_1 \cup S_2 = S_1$ , isto é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$$

h) A condição de existência do logaritmo é  $x > -\frac{5}{2}$  e  $x \neq \frac{3}{2}$  e  $x \neq 5$  e  $x \neq -\frac{3}{2}$  (I).

1º caso: Se  $\frac{2x+5}{2} > 1 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$  (II), temos:

$$\log_{\left(\frac{2x+5}{2}\right)} \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 1 \Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x + 16}{(2x-3)^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} -3x^2 + 2x + 16 > 0 \xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} -2 < x < \frac{8}{3} \text{ (III)}.$$

A solução  $S_1$  neste caso é dada por (I)  $\cap$  (II)  $\cap$  (III), isto é:

$$S_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < \frac{8}{3} \text{ e } x \neq \frac{3}{2} \right\}.$$

2º caso: Se  $0 < \frac{2x+5}{2} < 1 \Rightarrow -\frac{5}{2} < x < -\frac{3}{2}$  (IV), temos:

$$\log_{\left(\frac{2x+5}{2}\right)} \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 > 0 \Rightarrow \left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-3x^2 + 2x + 16}{(2x-3)^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 2x + 16 < 0 \Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > \frac{8}{3} \text{ (V)}.$$

A solução  $S_2$  neste caso é dada por: (I)  $\cap$  (IV)  $\cap$  (V), isto é:

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{2} < x < -2 \right\}.$$

A solução S da inequação proposta é  $S = S_1 \cup S_2$ , isto é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{2} < x < \frac{8}{2} \text{ e } x \neq \frac{3}{2} \text{ ou } -\frac{5}{2} < x < -2 \right\}.$$

i) A condição de existência do logaritmo é

$$\begin{cases} \frac{x}{3} > 0 \\ e \\ 0 < 2x^2 - 7x + 6 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ e \\ \left(x < \frac{3}{2} \text{ ou } x > 2\right) \text{ e } x \neq \frac{5}{2} \text{ e } x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(0 < x < \frac{3}{2} \text{ e } x \neq 1\right) \text{ ou } \left(x > 2 \text{ e } x \neq \frac{5}{2}\right).$$

1º caso: Se  $\sqrt{2x^2 - 7x + 6} > 1 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 6 > 1 \Rightarrow x < 1$  ou

$$x > \frac{5}{2} \text{ (II), temos: } \log_{\sqrt{2x^2 - 7x + 6}} \left(\frac{x}{3}\right) > 0 \Rightarrow \frac{x}{3} > 1 \Rightarrow x > 3 \text{ (III)}.$$

A solução  $S_1$  neste caso é dada por (I)  $\cap$  (II)  $\cap$  (III), isto é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}.$$

2º caso: Se  $0 < \sqrt{2x^2 - 7x + 6} < 1 \Rightarrow 1 < x < \frac{5}{2}$  (IV), temos:

$$\log_{\sqrt{2x^2 - 7x + 6}} \left(\frac{x}{3}\right) > 0 \Rightarrow \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow x < 3 \text{ (V)}.$$

A solução  $S_2$  neste caso é dada por  $(I) \cap (IV) \cap (V)$ :

$$S_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{3}{2} \text{ ou } 2 < x < \frac{5}{2} \right\}.$$

A solução da inequação proposta é  $S = S_1 \cup S_2$ , isto é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < \frac{3}{2} \text{ ou } 2 < x < \frac{5}{2} \text{ ou } x > 3 \right\}.$$

**375.** A condição de existência do logaritmo é  $\frac{1}{2} < x \neq 1$  (I).

1º caso: Se  $x > 1$  (II), temos:

$$\begin{aligned} \log_x(2x - 1) \leq 2 &\Rightarrow 2x - 1 \leq x^2 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)^2 \geq 0, \text{ que é satisfeita } \forall x \in \mathbb{R} \text{ (III)}. \end{aligned}$$

A solução  $S_1$  neste caso é dada por  $(I) \cap (II) \cap (III)$ , isto é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}.$$

2º caso: Se  $0 < x < 1$  (IV), temos:

$$\begin{aligned} \log_x(2x - 1) \leq 2 &\Rightarrow 2x - 1 \geq x^2 \Rightarrow -x^2 + 2x - 1 \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (V)}. \end{aligned}$$

A solução  $S_2$  neste caso é dada por  $(I) \cap (IV) \cap (V)$ , isto é,  $S_2 = \emptyset$ .

A solução da inequação proposta é  $S = S_1 \cup S_2 = S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ .

**376.**

A condição de existência da equação é: 
$$\begin{cases} a^2b > 0 \\ 0 < a \neq 1 \text{ (I)} \\ 0 < b \neq 1 \end{cases}$$

Temos:

$$\log_a(a^2b) > \log_b a^{-5} \Rightarrow 2 + \log_a b > -5 \log_b a.$$

$$\text{Como } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}, \text{ temos: } 2 + \log_a b > -\frac{5}{\log_a b}.$$

Fazendo  $\log_a b = t$ , vem:

$$2 + t > -\frac{5}{t} \Rightarrow \frac{t^2 + 2t + 5}{t} > 0.$$

Como para  $\forall t \in \mathbb{R}$ , temos  $t^2 + 2t + 5 > 0$ , devemos ter  $t > 0$ , isto é,  $\log_a b > 0$ .

1º caso:  $a > 1 \Rightarrow \log_a b > 0 \Rightarrow b > 1$  (II).

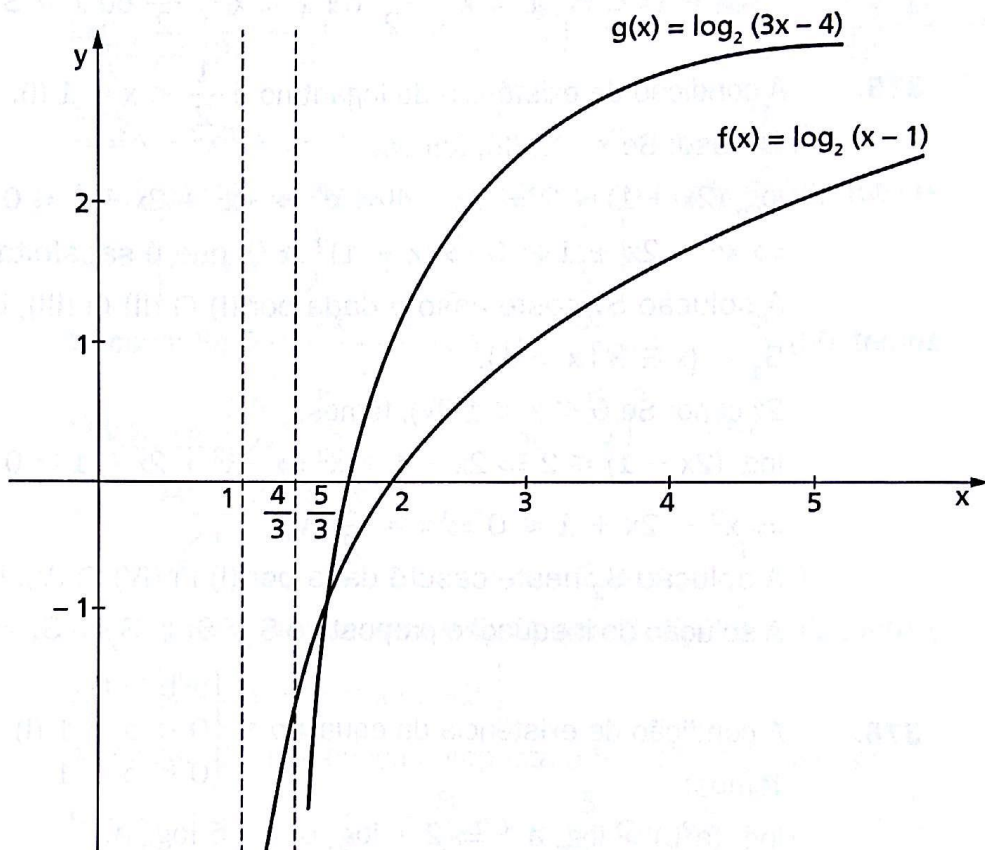
De  $(I) \cap (II)$  resulta que  $a > 1$  e  $b > 1$ .

2º caso:  $0 < a < 1 \Rightarrow \log_a b > 0 \Rightarrow 0 < b < 1$  (III).

De  $(I) \cap (III)$  resulta que  $0 < a < 1$  e  $0 < b < 1$ .

Assim há 2 possibilidades 
$$\begin{cases} a > 1 \text{ e } b > 1 \\ \text{ou} \\ 0 < a < 1 \text{ e } 0 < b < 1 \end{cases}$$

- 377.** Como  $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) = -\log_2(3x - 4)$ , a inequação proposta equivale a:  
 $\log_2(x - 1) \cdot [-\log_2(3x - 4)] > 0 \Rightarrow \log_2(x - 1) \cdot \log_2(3x - 4) < 0$ .  
 Vamos obter graficamente a solução. Para isso, precisamos construir os gráficos de  $f(x) = \log_2(x - 1)$  e  $g(x) = \log_2(3x - 4)$ .  
 Temos:



Notemos que  $(\frac{3}{2}, -1)$  é o ponto de interseção das duas curvas, pois corresponde à solução da equação:  $\log_2(x - 1) = \log_2(3x - 4)$ .  
 O que desejamos encontrar são os valores de  $x$  tais que  $f(x) \cdot g(x) < 0$ .  
 Notemos que para  $\frac{5}{3} < x < 2$  temos  $g(x) > 0$  e  $f(x) < 0$ , de modo que  $f(x) \cdot g(x) < 0$ .

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{5}{3} < x < 2 \right\}$$

- 378.** Aplicando logaritmo de base  $a$  ( $a > 1$ ) a ambos os membros da desigualdade, vem:

$$\begin{aligned} x^{\log_a x + 1} &> a^2 x \xrightarrow{a > 1} \log_a(x^{\log_a x + 1}) > \log_a(a^2 x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log_a x + 1) \cdot \log_a x > 2 + \log_a x. \end{aligned}$$



Fazendo  $\log_a x = t$ , vem:

$$(t + 1)t > 2 + t \Rightarrow t^2 - 2 > 0 \Rightarrow t < -\sqrt{2} \text{ ou } t > \sqrt{2}, \text{ isto é,}$$

$$\log_a x < -\sqrt{2} \text{ ou } \log_a x > \sqrt{2} \xrightarrow{a > 1} 0 < x < a^{-\sqrt{2}} \text{ ou } x < a^{\sqrt{2}}.$$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < a^{-\sqrt{2}} \text{ ou } x > a^{\sqrt{2}}\}$$

**379.** Escrevendo os logaritmos em base 2, temos:

$$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1 \Rightarrow \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} + \frac{\log_2 x}{\log_3 2} > 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_3 2} > 1.$$

Fazendo  $\log_2 x = t$ , vem:

$$-t + \frac{t}{\log_3 2} > 1 \Rightarrow t \cdot \left( \frac{1}{\log_3 2} - 1 \right) > 1 \Rightarrow t < \frac{\log_2 3}{1 - \log_2 3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t < \frac{\log_2 3}{\log_2 2 - \log_2 3} \Rightarrow t < \frac{\log_2 3}{\log_2 \left( \frac{2}{3} \right)} \Rightarrow t < \log_{\frac{2}{3}} 3, \text{ isto é:}$$

$$\log_2 x < \log_{\frac{2}{3}} 3 \Rightarrow 0 < x < 2^{\log_{\frac{2}{3}} 3}.$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2^{\log_{\frac{2}{3}} 3} \right\}$$

**380.** A condição de existência é  $x > 0$  (I)

Temos:

$$\log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2^{x+1} - 2) > -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2^x \cdot 2 - 2) > -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 (2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}} [2(2^x - 1)] > -2.$$

Fazendo  $2^x - 1 = t$ , vem:

$$\log_2 t \cdot \log_{\frac{1}{2}} (2t) > -2 \Rightarrow \log_2 t \cdot \left[ \log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{2}} t \right] > -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_2 t \cdot (-1 - \log_2 t) > -2.$$

Fazendo  $\log_2 t = r$ , vem:

$$r \cdot (-1 - r) > -2 \Rightarrow -r^2 - r + 2 > 0 \Rightarrow r^2 + r - 2 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 < r < 1, \text{ isto é,}$$

$$-2 < \log_2 t < 1 \Rightarrow \frac{1}{4} < t < 2, \text{ isto é,}$$

$$\frac{1}{4} < 2^x - 1 < 2 \Rightarrow \frac{5}{4} < 2^x < 3 \Rightarrow \log_2 \left( \frac{5}{4} \right) < x < \log_2 3 \text{ (II).}$$

A solução da inequação proposta é dada por  $(I) \cap (II)$ , isto é,

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \log_2 \left( \frac{5}{4} \right) < x < \log_2 3 \right\}.$$

**381.** Como  $\log_3 27 = 3$  e  $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$ , a desigualdade proposta equivale a:

$$(x - 3) \cdot \left( x - \frac{3}{2} \right) < 0.$$

Fazendo o quadro-produto, temos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{2} < x < 3 \right\}.$$

**382.** 1º caso: Se  $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) > 0$ , isto é,  $0 < x - 1 < 1 \Rightarrow 1 < x < 2$  (I), temos:  
 $x \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < 0 \Rightarrow x < 0$  (II).

A solução neste caso é dada por  $(I) \cap (II)$ , isto é,  $S_1 = \emptyset$ .

2º caso: Se  $\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < 0$ , isto é,  $x - 1 > 1 \Rightarrow x > 2$  (I), temos:  
 $x \cdot \log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < 0 \Rightarrow x > 0$  (II).

A solução neste caso é dada por  $(I) \cap (II)$ , isto é,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}.$$

A solução da inequação proposta é  $S = S_1 \cup S_2 = S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ .

## CAPÍTULO VII — Logaritmos decimais

**383.** Utilizando as regras (I) e (II), temos:

$$\log 7 \rightarrow C = 0$$

$$\log 0,032 \rightarrow C = -2$$

$$\log 10^5 \rightarrow C = 5$$

$$\log 0,00010 \rightarrow C = -4$$

**384.** a) A característica é 3 e a mantissa é 0,5065.

$$\text{Temos, então: } \log 3210 = 3 + 0,5065 = 3,5065.$$

b) A característica é 1 e a mantissa é 0,4048.

$$\text{Assim, } \log 25,4 = 1 + 0,4048 = 1,4048.$$

c) A característica é 0 e a mantissa é 0,7574.

$$\text{Assim, } \log 5,72 = 0 + 0,7574 = 0,7574.$$

d) A característica é -1 e a mantissa é 0,8692.

$$\text{Assim, } \log 0,74 = -1 + 0,8692 = \bar{1},8692.$$

e) A característica é -3 e a mantissa é 0,5527.

$$\text{Assim, } \log 0,00357 = -3 + 0,5527 = \bar{3},5527.$$

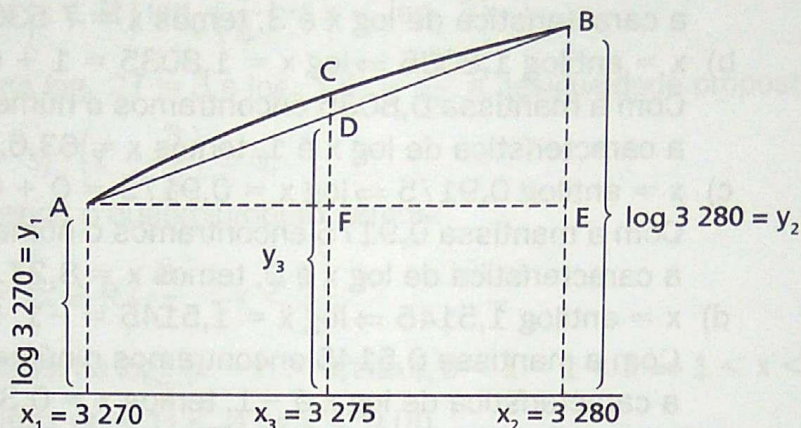
- 385.**
- a)  $x = \text{antilog } 3,8768 \Rightarrow \log x = 3,8768 = 3 + 0,8768$ .  
Com a mantissa 0,8768 encontramos o número 753, mas, como a característica de  $\log x$  é 3, temos  $x = 7\,530$ .
- b)  $x = \text{antilog } 1,8035 \Rightarrow \log x = 1,8035 = 1 + 0,8035$ .  
Com a mantissa 0,8035 encontramos o número 636, mas, como a característica de  $\log x$  é 1, temos  $x = 63,6$ .
- c)  $x = \text{antilog } 0,9175 \Rightarrow \log x = 0,9175 = 0 + 0,9175$ .  
Com a mantissa 0,9175 encontramos o número 827, mas, como a característica de  $\log x$  é 0, temos  $x = 8,27$ .
- d)  $x = \text{antilog } \bar{1},5145 \Rightarrow \log x = \bar{1},5145 = -1 + 0,5145$ .  
Com a mantissa 0,5145 encontramos o número 327, mas, como a característica de  $\log x$  é  $-1$ , temos  $x = 0,327$ .
- e)  $\text{antilog } \bar{3},6693 = x \Rightarrow \log x = \bar{3},6693 = -3 + 0,6693$ .  
Com a mantissa 0,6693 encontramos o número 467, mas, como a característica de  $\log x$  é  $-3$ , temos  $x = 0,00467$ .
- f)  $x = \text{antilog } \bar{2},1271 \Rightarrow \log x = \bar{2},1271 \Rightarrow \log x = -2 + 0,1271$ .  
Com a mantissa 0,1271 encontramos o número 134, mas, como a característica de  $\log x$  é  $-2$ , temos  $x = 0,0134$ .

- 386.**
- a)  $\text{antilog } -2,0899 = x \Rightarrow \log x = -2,0899 = -2 - 0,0899 =$   
 $= -2 - 1 + 1 - 0,0899 = -3 + 0,9101$ .  
Com a mantissa 0,9101 encontramos o número 813, mas, como a característica de  $\log x$  é  $-3$ , temos  $x = 0,00813$ .
- b)  $\text{antilog } -3,2147 = x \Rightarrow \log x = -3,2147 = -3 - 0,2147 =$   
 $= -3 - 1 + 1 - 0,2147 = -4 + 0,7853$ .  
Com a mantissa 0,7853 encontramos o número 610, mas, como a característica de  $\log x$  é  $-4$ , temos  $x = 0,00061$ .
- c)  $\text{antilog } -0,4473 = x \Rightarrow \log x = -0,4473 = -1 + 1 - 0,4473 =$   
 $= -1 + 0,5527$ .  
Com a mantissa 0,5527 encontramos o número 357, mas, como a característica de  $\log x$  é  $-1$ , temos  $x = 0,357$ .
- d)  $\text{antilog } -1,6517 = x \Rightarrow \log x = -1,6517 = -1 - 0,6517 =$   
 $= -1 - 1 + 1 - 0,6517 = -2 + 0,3483$ .  
Com a mantissa 0,3483 encontramos o número 223, mas, como a característica de  $\log x$  é  $-2$ , vem que  $x = 0,0223$ .

- 387.** a) Considerando a função  $y = \log x$ , temos:

$x$	$y = \log x$
$x_1 = 3270$	$y_1 = 3 + 0,5145 = 3,5145$
$x_3 = 3275$	$y_3 = ?$
$x_2 = 3280$	$y_2 = 3 + 0,5159 = 3,5159$

Utilizando a aproximação linear para a função logarítmica, temos:



$\triangle AFD \sim \triangle AEB$ , donde:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{y_3 - 3,5145}{3,5159 - 3,5145} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_3 = 3,5152, \text{ isto é, } \log 3275 = 3,5152.$$

b) Considerando a função  $y = \log x$ , temos:

x	y = log x
$x_1 = 23,7$	$y_1 = 1 + 0,3747 = 1,3747$
$x_3 = 23,72$	$y_3 = ?$
$x_2 = 23,8$	$y_2 = 1 + 0,3766 = 1,3766$

Por raciocínio idêntico ao anterior, temos:

$$y_3 = \log 23,72 = 1,3751.$$

c) Considerando a função  $y = \log x$ , temos:

x	y = log x
$x_1 = 0,0457$	$y_1 = -2 + 0,6599$
$x_3 = 0,04576$	$y_3 = ?$
$x_2 = 0,0458$	$y_2 = -2 + 0,6609$

Por raciocínio idêntico aos anteriores, vem:

$$y_3 = \log 0,04576 = -1,3395 = \bar{2},6605.$$

d) Considerando a função  $y = \log x$ , temos:

x	y = log x
$x_1 = 0,835$	$y_1 = -1 + 0,9217$
$x_3 = 0,8358$	$y_3 = ?$
$x_2 = 0,836$	$y_2 = -1 + 0,9222$

Analogamente aos anteriores, segue que:

$$y_3 = \log 0,8358 = -0,0779 = \bar{1},9221.$$

e) Considerando a função  $y = \log x$ , temos:

x	y = log x
$x_1 = 2,71$	$y_1 = 0 + 0,4330$
$x_3 = 2,718$	$y_3 = ?$
$x_2 = 2,7$	$y_2 = 0 + 0,4346$

Analogamente aos anteriores, vem:

$$y_3 = \log 2,718 \cong \log e \cong 0,4343.$$

**388.** a)  $x = \text{antilog } 1,3552 \Rightarrow \log x = 1,3552 = 1 + 0,3552.$

A mantissa 0,3552 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,3541 e 0,3560.

Considerando a função  $y = \log x$ , temos:

x	y = log x
$x_1 = 22,6$	$y_1 = \log 22,6 = 1,3541$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = 1,3552$
$x_2 = 22,7$	$y_2 = \log 22,7 = 1,3560$

Analogamente ao exercício anterior, temos que  $x_3 \cong 22,65.$

Assim,  $\text{antilog } 1,3552 \cong 22,65.$

b)  $x = \text{antilog } 0,4357 \Rightarrow \log x = 0,4357 = 0 + 0,4357.$

A mantissa 0,4357 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,4346 e 0,4362. Temos:

x	y = log x
$x_1 = 2,72$	$y_1 = \log 2,72 = 0,4346$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = 0,4357$
$x_2 = 2,73$	$y_2 = \log 2,73 = 0,4362$

Analogamente ao anterior, vem:

$$x_3 = 2,727, \text{ isto é, antilog } 0,4357 = 2,727.$$

c)  $x = \text{antilog } \bar{1},7383 \Rightarrow \log x = \bar{1},7383 = -1 + 0,7383.$

A mantissa 0,7383 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,7380 e 0,7388. Temos:

x	y = log x
$x_1 = 0,547$	$y_1 = \log 0,547 = -0,262$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = -0,2617$
$x_2 = 0,548$	$y_2 = \log 0,548 = -0,261$

Do raciocínio anterior, vem:

$$x_3 = 0,5474, \text{ isto é, antilog } \bar{1},7383 = 0,5474.$$

d)  $x = \text{antilog } -1,6336 \Rightarrow \log x = -1,6336 \Rightarrow \log x = -1 - 0,6336 =$   
 $= -1 - 1 + 1 - 0,6336 = -2 + 0,3664.$

A mantissa 0,3664 não aparece na tábua, porém está compreendida entre as mantissas 0,3655 e 0,3674. Temos:

x	y = log x
$x_1 = 0,0232$	$y_1 = \log 0,0232 = -1,6345$
$x_3 = ?$	$y_3 = \log x_3 = -1,6336$
$x_2 = 0,0233$	$y_2 = \log 0,0233 = -1,6326$

Teremos:  $x_3 = 0,02325$ , isto é, antilog  $-1,6336 = 0,02325.$

**389.**

(I) Para calcularmos  $a_1$ , notemos que:

$$\log 12\ 300 = 4 + 0,0899 = 4,0899$$

e

$$\log 12\ 400 = 4 + 0,0934 = 4,0934$$

Por interpolação linear, temos que  $a_1 = \log 12\ 345 = 4,0909.$

(II) Para calcularmos  $a_2$ , notemos que:

$$\log 4 = 0 + 0,6021 = 0,6021$$

e

$$\log 4,1 = 0 + 0,6128 = 0,6128$$

Por interpolação linear, temos que  $a_2 = \log 4,0909 = 0,6118.$

(III) Para calcularmos  $a_3$ , notemos que:

$$\log 0,61 = -1 + 0,7853 = -0,2147$$

e

$$\log 0,62 = -1 + 0,7924 = -0,2076$$

Por interpolação linear, temos que  $a_3 = \log 0,6118 = -0,2134.$

(V) Como  $a_4 = \log a_3$  e  $a_3 < 0$ ,  $a_4$  não está definido em  $\mathbb{R}$ , pois precisamos ter logaritmando positivo.

Assim, o maior valor de  $n$  é  $n = 3$ .

**391.** a)  $\log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{0,3010}{0,4771} = 0,6309$

b)  $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{0,6990}{0,3010} = 2,3222$

c)  $\log_5 3 = \frac{\log 3}{\log 5} = \frac{0,4771}{0,6990} = 0,6825$

d)  $\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{0,7782}{0,6990} = 1,1133$

e)  $\log_6 4 = \frac{\log 4}{\log 6} = \frac{0,6021}{0,7782} = 0,7737$

**392.** Temos:

$$\log_3 800 = \frac{\log 800}{\log 3} = \frac{2 + 0,9031}{0,4771} = 6,084.$$

Assim,  $\log_3 800 = 6,084$ ; temos então característica 6.

**393.** Seja  $N = 50^{50}$ . Temos:

$$\begin{aligned} N = 50^{50} &\Rightarrow \log N = \log(50^{50}) \Rightarrow \log N = 50 \cdot \log 50 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \log N = 50 \cdot (1 + 0,699) \Rightarrow \log N = 84,95 = \underbrace{84}_c + \underbrace{0,95}_m. \end{aligned}$$

Como a característica de  $\log N$  é 84, pela regra I, segue que  $N = 50^{50}$  possui 85 algarismos.

**394.** a)  $5^x = 100 \Rightarrow \log 5^x = \log 100 \Rightarrow x \cdot \log 5 = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{0,699} \cong 2,86.$

b)  $3^x = 20 \Rightarrow \log 3^x = \log 20 \Rightarrow x \cdot \log 3 = \log 20 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x \cdot 0,4771 = (1 + 0,3010) \Rightarrow x \cong 2,73.$

c)  $2^x = 30 \Rightarrow \log 2^x = \log 30 \Rightarrow x \cdot \log 2 = \log 30 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = \frac{(1 + 0,4771)}{0,3010} \cong 4,91.$

d)  $7^x = 0,3 \Rightarrow \log 7^x = \log 0,3 \Rightarrow x \cdot \log 7 = \log 0,3 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x \cdot 0,8451 = (-1 + 0,4771) \Rightarrow x \cong -0,62.$

e)  $e^x = 50 \Rightarrow \log e^x = \log 50 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 50.$

Pelo item e do exercício 387,  $\log e \cong 0,4343$ .

$$\text{Então, } x = \frac{1,6990}{0,4343} \cong 3,91.$$

**395.** a) Fazendo  $2^x = t$ , equação proposta é equivalente a:

$$t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t = 3 \text{ ou } t = 5), \text{ isto é:}$$

$$2^x = 3 \Rightarrow \log 2^x = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58$$

ou

$$2^x = 5 \Rightarrow \log 2^x = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log 2} = 2,32.$$

$$S = \{1,58; 2,32\}$$

b) Fazendo  $3^x = t$ , a equação proposta é equivalente a:

$$t^2 - 5t + 4 = 0 \Rightarrow (t = 1 \text{ ou } t = 4), \text{ isto é:}$$

$$3^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

ou

$$3^x = 4 \Rightarrow x = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26.$$

$$S = \{0; 1,26\}$$

c) Fazendo  $10^x = t$ , a equação proposta é equivalente a:

$$t^2 - 7t + 10 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 5), \text{ isto é:}$$

$$10^x = 2 \Rightarrow x = \log 2 = 0,30$$

ou

$$10^x = 5 \Rightarrow x = \log 5 = 0,69$$

$$S = \{0,30; 0,69\}$$

d) Fazendo  $e^x = t$ , a equação proposta é equivalente a:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow (t = 2 \text{ ou } t = 3), \text{ isto é:}$$

$$e^x = 2 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 2 \Rightarrow x = 0,69$$

ou

$$e^x = 3 \Rightarrow x \cdot \log e = \log 3 \Rightarrow x = 1,10$$

$$S = \{0,69; 1,10\}$$

**396.** Inicialmente, notemos que:

$$\log_{10} 6 = \log_{10} (2 \cdot 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0,30 + 0,48 = 0,78$$

e

$$\log_{10} 12 = \log_{10} (2^2 \cdot 3) = 2 \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 2 \cdot 0,30 + 0,48 = 1,08$$

Então, temos:

$$3^x \cdot 2^{3x-1} = 6^{2x+1} \Rightarrow 3^x \cdot \frac{2^{3x}}{2} = 6^{2x} \cdot 6 \Rightarrow 3^x \cdot 2^{3x} = 12 \cdot 6^{2x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_{10} (3^x \cdot 2^{3x}) = \log_{10} (12 \cdot 6^{2x}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \log_{10} 3 + 3x \cdot \log_{10} 2 = \log_{10} 12 + 2x \cdot \log_{10} 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot 0,48 + 3x \cdot 0,30 = 1,08 + 2x \cdot 0,78 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1,38x = 1,08 + 1,56x \Rightarrow x = -6.$$

$$S = \{-6\}$$



- 398.** a)  $x = \sqrt[6]{3} \Rightarrow \log x = \log \sqrt[6]{3} \Rightarrow \log x = \log 3^{\frac{1}{6}} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log x = \frac{1}{6} \cdot \log 3 \Rightarrow \log x = \frac{1}{6} \cdot 0,4771 = 0,0795$   
 Por interpolação linear,  $x = 1,201$ .
- b)  $x = \sqrt[4]{10} \Rightarrow \log x = \log \sqrt[4]{10} \Rightarrow \log x = \log 10^{\frac{1}{4}} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log x = \frac{1}{4} \cdot \log 10 \Rightarrow \log x = 0,25$ .  
 Por interpolação linear,  $x = 1,778$ .
- c)  $x = 2^{3,4} \Rightarrow \log x = \log 2^{3,4} \Rightarrow \log x = 3,4 \cdot \log 2 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log x = 3,4 \cdot 0,3010 = 1,0234$ .  
 Por interpolação linear,  $x = 10,554$ .
- d)  $x = 5^{2,3} \Rightarrow \log x = 2,3 \cdot \log 5 \Rightarrow \log x = 2,3 \cdot 0,6990 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \log x = 1,6077$ .  
 Por interpolação linear,  $x = 40,520$ .

**399.** Temos:

$$V = \frac{4\pi R^3}{3} \Rightarrow R^3 = \frac{3V}{4\pi} \cong \frac{3 \cdot 20}{4 \cdot 3,14} \cong 4,78.$$

Assim,

$$R^3 = 4,78 \Rightarrow \log R^3 = \log 4,78 \Rightarrow 3 \log R = \log 4,78.$$

Da tábua,  $\log 4,78 = 0 + 0,6794$ , isto é,  $\log 4,78 \cong 0,6794$ , donde  
 $\log R \cong 0,2264$ ,

Novamente por interpolação linear, vem que  $R \cong 1,68$  cm.

**400.** Temos:

$$A = \sqrt[5]{(3,4)^3 \cdot (1,73)^2} \Rightarrow A = [(3,4)^3 \cdot (1,73)^2]^{\frac{1}{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log A = \frac{1}{5} \cdot \log [(3,4)^3 \cdot (1,73)^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log A = \frac{1}{5} \cdot [3 \log 3,4 + 2 \log 1,73].$$

Da tábua temos:

$$\log 3,4 = 0,5315 \text{ e } \log 1,73 = 0,2380, \text{ donde:}$$

$$\log A = \frac{1}{5} \cdot [3 \cdot 0,5315 + 2 \cdot 0,2380] \Rightarrow \log A = 0,414.$$

Por interpolação linear,  $A = 2,60$ .

**402.** Devemos ter:  $C = 3C_0$ , isto é:

$$C = C_0 \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 3 \cdot C_0 = C_0 \cdot (1 + 0,03)^t \Rightarrow (1,03)^t = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \cdot \log 1,03 = \log 3 \Rightarrow t \cdot 0,0128 = 0,4771 \Rightarrow t = 37,2.$$

Resposta: 38 meses.

**403.** Devemos ter:  $C = 2C_0$ , isto é:

$$C = C_0 \cdot (1 + i)^t \Rightarrow 2 \cdot C_0 = C_0 \cdot (1 + 0,105)^t \Rightarrow 2 = 1,105^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 2 = t \cdot \log 1,105.$$

Como  $\log 1,1 = 0,0414$  e  $\log 1,2 = 0,0792$ , por interpolação linear,  $\log 1,105 = 0,0433$ .

$$\text{Daí, } t = \frac{0,301}{0,0433} = 6,95.$$

Resposta: 7 trimestres.

**404.** Temos:  $C_0 = 10^6$ ,  $i = 0,03$  e  $t = 18$ .

Daí,

$$C = C_0 \cdot (1 + i)^t \Rightarrow C = 10^6 \cdot (1 + 0,03)^{18} \Rightarrow C = 10^6 \cdot 1,03^{18} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log C = \log (10^6 \cdot 1,03^{18}) \Rightarrow \log C = 6 + 18 \cdot \log 1,03.$$

Da tábua,  $\log 1,03 = 0,0128$ .

$$\text{Daí, } \log C = 6 + 18 \cdot 0,0128 = 6,2304 = 6 + 0,2304.$$

Com a mantissa 0,2304 encontramos na tábua o número 170.

Como a característica de  $\log C$  é 6, segue que  $C = 1\,700\,000$ .

Resposta: R\$ 1\,700\,000,00.

**405.** Temos:  $C_0 = 5 \cdot 10^5$ ,  $i = 0,04$  e  $t = 48$  trimestres.

Daí,

$$C = C_0 \cdot (1 + i)^t \Rightarrow C = 5 \cdot 10^5 \cdot (1,04)^{48} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log C = \log [5 \cdot 10^5 \cdot (1,04)^{48}] \Rightarrow \log C = \log 5 + 5 + 48 \cdot \log 1,04.$$

$$\text{Como } \begin{cases} \log 1,04 = 0,017 \\ \log 5 = 0,699 \end{cases}, \text{ vem que } \log C = 6,515.$$

Por interpolação linear, segue que  $C = 3\,273\,000$ .

Resposta: R\$ 3\,273\,000,00.

**406.** O número de bactérias após 3 horas é dado por:

$$N(3) = 2000 \cdot 10^{\frac{3}{36}} \Rightarrow \log N(3) = \log (2000 \cdot 10^{\frac{3}{36}}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \log N(3) = \log 2000 + \frac{1}{12} \log 10.$$

Como  $\log 2000 = 3,3010$ , vem que:

$$\log N(3) = 3,3010 + \frac{1}{12} \cong 3,3843.$$

Por interpolação linear,  $N(3) = 2\,422$ .

Resposta: Após 3 horas, haverá 2 422 bactérias.

**407.** Temos:

$$Q(t) = Q_0 \cdot 10^{-Kt} \Rightarrow Q(20) = Q_0 \cdot 10^{-20K} \Rightarrow \\ \Rightarrow 400 = 500 \cdot 10^{-20K} \Rightarrow \frac{4}{5} = 10^{-20K} \Rightarrow 0,8 = 10^{-20K} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log 0,8 = \log 10^{-20K} \xrightarrow{\text{tábua}} (-1 + 0,9031) = -20K \Rightarrow \\ \Rightarrow -20K = -0,0969 \Rightarrow K = 0,004845.$$



FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

<b>VOLUME 1</b>	conjuntos, funções
<b>VOLUME 2</b>	logaritmos
<b>VOLUME 3</b>	trigonometria
<b>VOLUME 4</b>	sequências, matrizes, determinantes, sistemas
<b>VOLUME 5</b>	combinatória, probabilidade
<b>VOLUME 6</b>	complexos, polinômios, equações
<b>VOLUME 7</b>	geometria analítica
<b>VOLUME 8</b>	limites, derivadas, noções de integral
<b>VOLUME 9</b>	geometria plana
<b>VOLUME 10</b>	geometria espacial
<b>VOLUME 11</b>	matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

 **Atual**  
Editora

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de questões de vestibulares, acompanhadas de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de questões de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes e questões dissertativas selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.

