FUNÇÃO INVERSA

Agora que já sabemos classificar funções com respeito à injetividade e à sobrejetividade, podemos estudar a **função inversa**. Essencialmente, a inversa de uma função f é uma função g que desfaz o que f faz. Se f eleva um número ao quadrado, por exemplo, faz sentido que sua inversa tire a raiz quadrada de um número. Observe a definição:

Seja f:A→B uma **função bijetora**. A inversa de f é a função f^{-1}: B→A tal que $f(x) = y \leftrightarrow f^{-1}(y) = x$. Neste caso, dizemos que f é inversível.

Da definição acima, podemos tirar duas conclusões muito importantes:

- Só podemos inverter funções bijetoras;
- Se f é inversível, então $D(f) = \mathrm{Im}(f^{-1})$ e $D(f^{-1}) = \mathrm{Im}(f)$.

INVERSA DE UMA FUNÇÃO QUALQUER

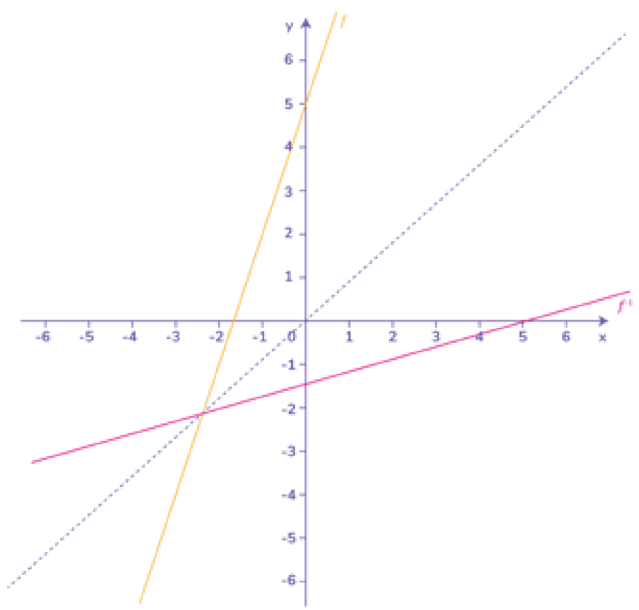
Para encontrar a inversa de uma função, trocamos x por y e y por x e isolamos y. No final, trocamos y por $f^{-1}(x)$.

Exemplo: Encontre a inversa da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x) = 4x + 5$.

Primeiramente, temos que f é bijetora, então existe sua inversa. Seguindo os passos acima, temos:

$$y = 4x + 5 \Rightarrow x = 4y + 5 \Rightarrow x - 5 = 4y \Rightarrow \frac{x-5}{4} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-5}{4}$$

O gráfico de f e de f^{-1} estão esboçados na imagem abaixo:



Observando o gráfico do exemplo anterior, podemos visualizar uma propriedade muito importante a respeito da função inversa, que está enunciada a seguir:

O gráfico de uma função e o gráfico de sua função inversa são **simétricos** em relação à **bissetriz dos quadrantes ímpares.**

INVERSA DE UMA FUNÇÃO QUOCIENTE

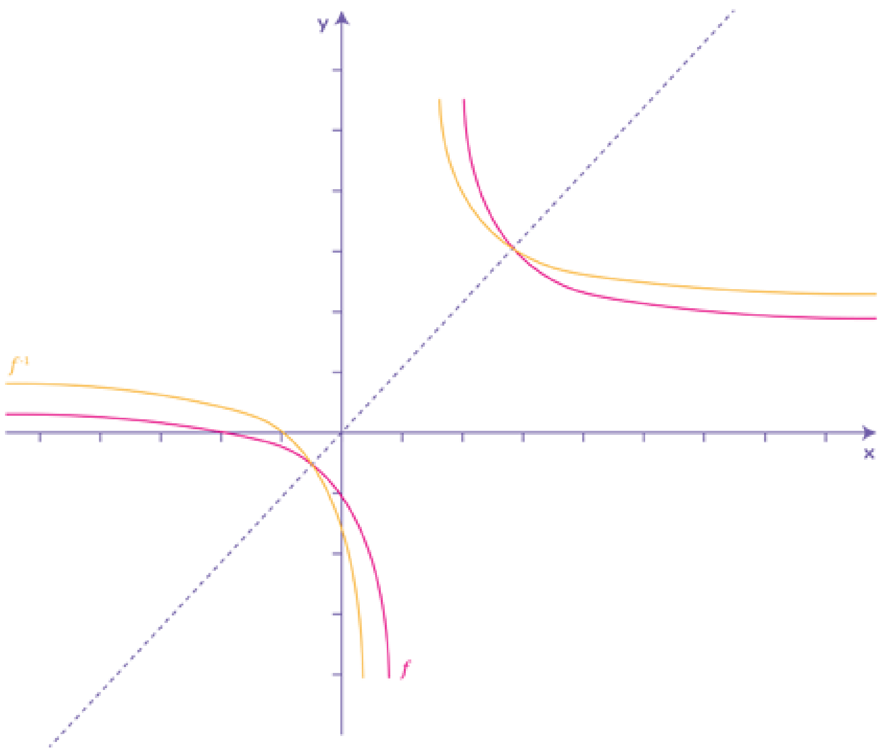
Considere uma função bijetora da forma $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, em que $g(x)$ e $h(x)$ são funções afim. Podemos encontrar a inversa de f pelo método explicado acima, mas no caso especial de funções quociente com $g(x)$ e $h(x)$ sendo funções afim, existe um método mais rápido:

Trocamos a posição dos elementos da diagonal principal e trocamos o sinal dos elementos da diagonal secundária. Desta forma, se $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, temos $f^{-1}(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$.

Exemplo: Encontre a inversa da função $f(x) = \frac{4x+9}{5x-7}$.

Trocando a posição dos elementos da diagonal principal, temos $\frac{-7x+9}{5x+4}$. Agora, trocando o sinal dos elementos da diagonal secundária, temos $\frac{-7x-9}{-5x+4}$. Logo, $f^{-1}(x) = \frac{-7x-9}{-5x+4} = \frac{7x+9}{5x-4}$.

Veja que a função f em questão e sua inversa satisfazem a propriedade de seus gráficos serem simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares:

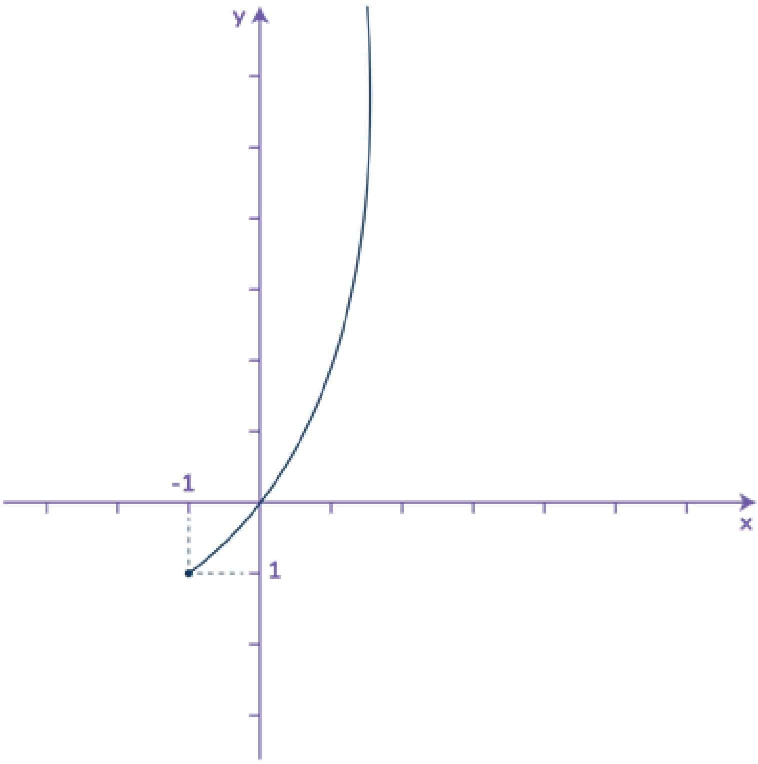


INVERSA DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Considere uma função quadrática $y = ax^2+bx+c$. Para encontrar sua inversa, começamos escrevendo $x=ay^2+by+c$. Em seguida, escrevemos $ay^2+by+(c\text{-}x)=0$ e resolvemos esta equação usando a Fórmula de Bhaskara. Encontraremos duas expressões para y que dependem de x. Para saber qual delas corresponde à função inversa, olhamos para a imagem da função original! Observe o exemplo a seguir:

Exemplo: Encontre a inversa da função f:[-1,∞)→[-1,∞) dada por $f(x)=x^2+2x$.

Primeiramente, note que essa função não seria inversível se considerássemos o domínio e o contradomínio como ℝ. Porém, nos conjuntos indicados, f é bijetora:

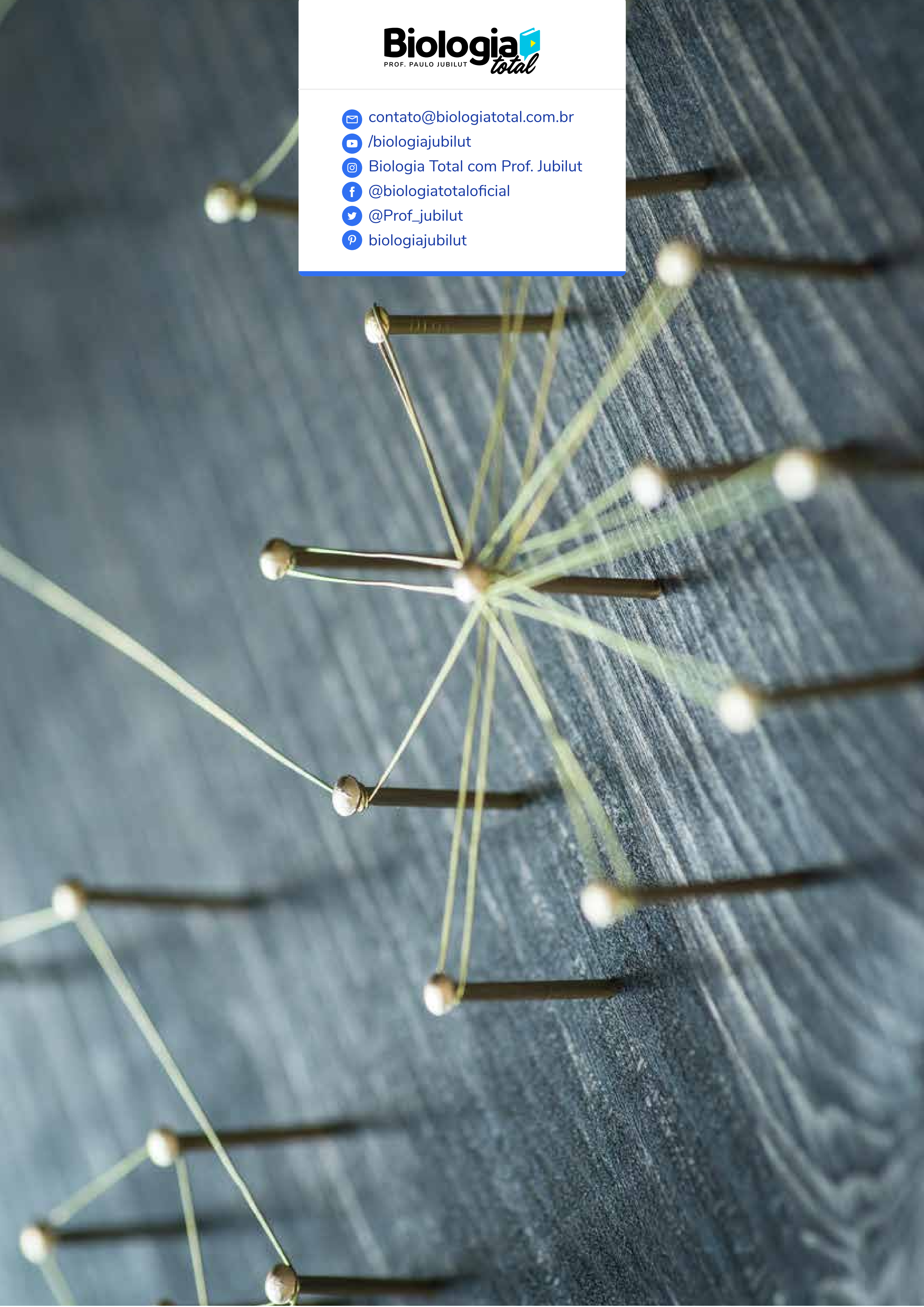


Agora, escrevemos $x=y^2+2y \Rightarrow y^2+2y\text{-}x=0$. Resolvendo com a fórmula de Bhaskara, obtemos:

$$y_1 = \frac{-2+\sqrt{4+4x}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{1+x}}{2} = -1+\sqrt{x+1} \quad \text{e}$$

$$y_2 = \frac{-2-\sqrt{4+4x}}{2} = \frac{-2-2\sqrt{1+x}}{2} = -1-\sqrt{x+1}$$

Observe que a imagem de y_2 não é igual ao domínio de f. Por exemplo, para $x=2$, temos $y_2(x) = -1-\sqrt{3} < -1 \Rightarrow y_2(2) \notin Im(f^{-1}) = D(f)$. Logo, a inversa de f será dada por y_1, isto é, $f^{-1}(x) = -1+\sqrt{x+1}$.



Biologia total
PROF. PAULO JUBILUT

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@biologiatotaloficial
@Prof_jubilut
biologiajubilut