Nesses exercícios, o seguinte teorema é muito importante:

TEOREMA DO RESTO

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual a $P(a)$.

1. Qual é o resto da divisão do polinômio $x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 15x + 6$ por $x - 2$?

$a = 2$

$R(x) = P(a)$

$R(x) = P(2)$

$P(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 15 \cdot 2 + 6$

$P(2) = 16 - 8 \cdot 8 + 4 \cdot 4 + 30 + 6$

$P(2) = 16 - 64 + 16 + 30 + 6$

$P(2) = 4$

$\boxed{R(x) = 4}$

2. Determine o resto de $x^2 + x + 1$ dividido por $x + 1$.

$a = -1$

$R(x) = P(a)$

$R(x) = P(-1)$

$P(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1$

$P(-1) = 1 - \cancel{1} + \cancel{1}$

$P(-1) = 1$

$\boxed{R(x) = 1}$

3. Qual é o resto da divisão de $x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 1$ por $x + 1$?

$a = -1$

$R(x) = P(a)$

$R(x) = P(-1)$

$P(-1) = (-1)^4 - 2 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) + 1$

$P(-1) = 1 + 2 + 1 + 1 + 1$

$P(-1) = 6$

$\boxed{R(x) = 6}$

4. Qual é o resto da divisão de $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ por $x + 1$?

$a = -1$

$R(x) = P(a)$

$R(x) = P(-1)$

$P(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$

$P(-1) = 1 - \cancel{1} + \cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{1}$

$P(-1) = 1$

$\boxed{R(x) = 1}$

Já nesses exercícios, outro teorema é muito importante:

TEOREMA DE D'ALEMBERT

Se um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$, então $P(a) = 0$ e a é raiz de $P(x)$.

5. Determine a de modo que a divisão de $f = x^4 - 2ax^3 + (a+2)x^2 + 3a + 1$ por $g = x - 2$ apresente resto igual a 7.

$a = 2$

$R(x) = 7$

$R(x) = f(a)$

$R(x) = f(2) = 7$

$f(2) = 2^4 - 2 \cdot a \cdot 2^3 + (a+2) \cdot 2^2 + 3a + 1$

$7 = 16 - 16a + 4(a+2) + 3a + 1$

$7 = 16 - 16a + 4a + 8 + 3a + 1$

$9a = 16 + 8 + 1 - 7$

$9a = 18$

$a = \frac{18}{9} \Rightarrow a = 2$

$\boxed{a = 2}$

6. Determine p de modo que o polinômio $f = 2x^3 + px^2 - (2p+1)x + (p+3)$ seja divisível por $g = x + 4$.

$a = -4$

$R(x) = 0$

$R(x) = f(a)$

$R(x) = f(-4) = 0$

$f(-4) = 2 \cdot (-4)^3 + p \cdot (-4)^2 - (2p+1) \cdot (-4) + (p+3)$

$0 = 2 \cdot (-64) + 16p + 4(2p+1) + p + 3$

$0 = -128 + 16p + 8p + 4 + p + 3$

$25p = 128 - 4 - 3$

$25p = 121$

$p = \frac{121}{25}$

$\boxed{p = \frac{121}{25}}$

7. Determine p e q de modo que o polinômio $x^3 - 2px^2 + (p+3)x + (2p+q)$ seja divisível por x e $x - 2$.

$a_1 = 0 \quad a_2 = 2$

$R(x) = 0$

$R(x) = f(a_1) = f(a_2)$

$R(x) = f(0) = f(2) = 0$

$f(0) = 0^3 - 2 \cdot p \cdot 0^2 + (p+3) \cdot 0 + (2p+q)$

$0 = \cancel{0^3} - 2 \cdot \cancel{p} \cdot 0^2 + (p + \cancel{3}) \cdot 0 + (2p+q)$

$0 = 2p + q \quad (1)$

$f(2) = 2^3 - 2 \cdot p \cdot 2^2 + (p+3) \cdot 2 + (2p+q)$

$0 = 8 - 8p + 2p + 6 + 2p + q$

$-14 = -4p + q \quad (2)$

$\begin{cases} 2p + q = 0 & \times(-1) \\ -4p + q = -14 \end{cases}$

$\begin{cases} -2p - q = 0 \\ -4p + q = -14 \end{cases}$

$-6p \quad / \quad = -14$

$p = \frac{14}{6} \Rightarrow p = \frac{7}{3}$

De (1): $q = -2p$

$q = -2 \cdot \frac{7}{3}$

$q = \frac{-14}{3}$

$\boxed{(p = 7/3, q = -14/3)}$

8. Qual o valor de a para que o resto da divisão de $ax^3 - 2x + 1$ por $x - 3$ seja 4?

$a = 3$

$R(x) = 4$

$R(x) = f(a)$

$R(x) = f(3) = 4$

$f(3) = a \cdot 3^3 - 2 \cdot 3 + 1$

$4 = 27a - 6 + 1$

$27a = 4 + 6 - 1$

$27a = 9$

$a = \frac{9}{27} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$\boxed{a = \frac{1}{3}}$