27 POLIEDROS

Inicia-se aqui nosso estudo sobre figuras geométricas espaciais chamadas sólidos geométricos. Neste livro estudaremos os sólidos dos tipos: poliedros e corpos redondos.

Os poliedros

Poliedros são os sólidos limitados por porções de planos — polígonos planos — denominadas faces. Entre duas faces adjacentes estão as arestas, segmentos de reta cujas extremidades são os vértices do poliedro.

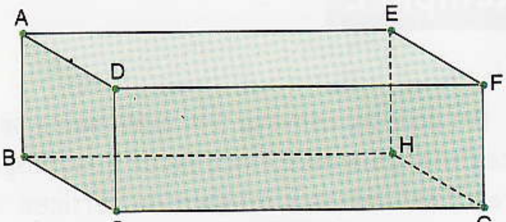


figura 1

O poliedro ABCDEFGH da figura acima apresenta os seguintes elementos:

- *A*, *B*, *C*, ...: vértices;
- $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, ...: arestas;
- ABCD, ADEF, ...: faces.

Em geral, cada aresta, como interseção de duas faces, forma com esses polígonos planos um diedro.

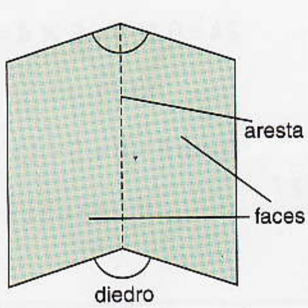


figura 2

Cada vértice pode ser interseção de três ou mais arestas. Na figura abaixo, por exemplo, em torno de cada um dos vértices forma-se um triedro.

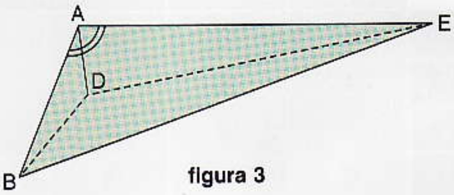


figura 3

A figura abaixo mostra um ângulo poliédrico formado em torno do vértice *A* do poliedro ABCDEF.

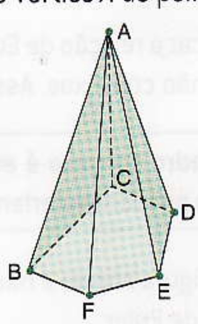


figura 4

Um poliedro é dito convexo quando todo plano que contém uma face deixa todas as outras faces num mesmo semi-espaço.

Por outro lado, em linguagem simplificada, um poliedro é não convexo quando apresenta alguma "reentrância".

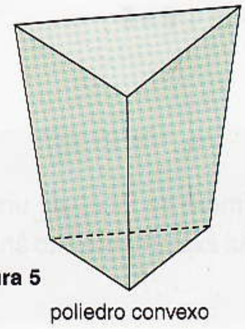
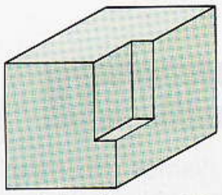


figura 5

poliedro convexo



poliedro não convexo

figura 6

Relação de Euler

O matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) estabeleceu uma relação entre os números de arestas, de faces e de vértices de qualquer poliedro convexo.

A relação de Euler, que envolve as quantidades de vértices (V), arestas (A) e faces (F), para qualquer poliedro convexo, é:

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

Vamos verificar essa relação, por simples contagem, observando os quatro poliedros convexos dados. Veja a tabela abaixo:

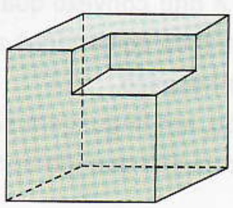
	V	A	F	V − A + F
Figura 1	8	12	6	2
Figura 3	4	6	4	2
Figura 4	6	10	6	2
Figura 5	6	9	5	2

↑
valor fixo: 2

Pode-se verificar a relação de Euler também para alguns poliedros não convexos. Assim dizemos:

Todo poliedro convexo é euleriano, porém nem todo poliedro euleriano é convexo.

O poliedro da figura abaixo é não convexo, embora valha a relação de Euler.



$$V - A + F = 14 - 21 + 9 = 2$$

exemplo 1

Vamos encontrar o número de faces de um poliedro convexo que possui exatamente oito ângulos triédricos.

A cada um dos oito vértices do poliedro concorrem três arestas; assim, o número A de arestas é dado por:

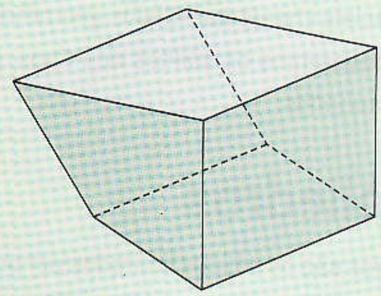
$$A = \frac{3 \times 8}{2} = 12$$

Pela relação de Euler:

$$8 - 12 + F = 2$$

Daí, $F = 6$ (o poliedro possui 6 faces).

Veja um poliedro com essas características:



exemplo 2

Um poliedro convexo tem exatamente seis faces triangulares e cinco faces quadrangulares. Calculemos o número de vértices do poliedro.

Inicialmente devemos observar que em seis faces triangulares temos 6×3 arestas e em cinco faces quadrangulares há 5×4 arestas. Como cada aresta é comum a duas faces, cada aresta terá sido computada duas vezes:

$$2A = \underbrace{6 \times 3 + 5}_{F = 11} \times 4 \Rightarrow 2A = 38 \Rightarrow A = 19$$

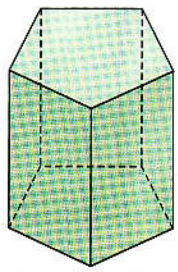
Como $F = 6 + 5 = 11$, pela relação de Euler:

$$V - 19 + 11 = 2 \Rightarrow V = 10$$

exercícios

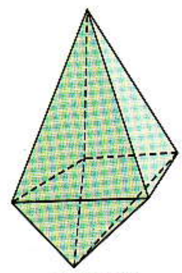
1. Para cada poliedro, proceda à contagem dos vértices, arestas e faces, verificando a relação de Euler.

a)



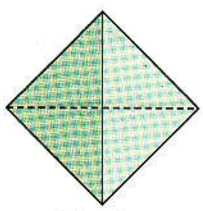
prisma pentagonal

c)



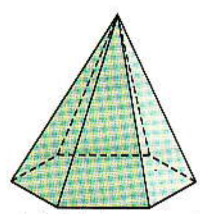
octaedro

b)



tetraedro

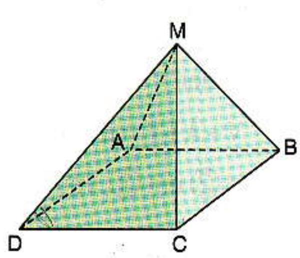
d)



pirâmide hexagonal

2. Descreva completamente o poliedro abaixo, considerando:

- o número de faces de cada tipo;
- o número total de lados das faces;
- o número de arestas do poliedro;
- o número de vértices das faces;
- o número de vértices do poliedro;
- a soma dos ângulos das faces.



pirâmide quadrangular

Verifique a relação de Euler.

3. É possível a existência de um poliedro convexo para o qual coincidem as quantidades de vértices e arestas? Justifique.

4. Certo undecaedro (poliedro de onze faces) convexo possui cinco faces quadrangulares e as demais, triangulares. Quantos são os vértices e quantas são as arestas desse poliedro?

5. Determine o número de vértices de um poliedro convexo que tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais.

6. Ache o número de faces de um poliedro convexo que possui dezesseis ângulos triédricos.

7. Num poliedro convexo, quatro faces são quadrangulares e as demais são triangulares. Determine o número de faces do poliedro, sabendo que o número de arestas é o dobro do número de faces triangulares.

8. Um poliedro convexo tem exatamente oito faces triangulares e seis faces quadrangulares. Quantos são os vértices e as arestas desse poliedro?

9. Um poliedro convexo contém unicamente faces triangulares. Quantos são os vértices desse poliedro quando há

a) oito faces?

b) quatro faces?

c) vinte faces?

10. Doze pentágonos regulares são as faces de um poliedro convexo. Quantos são os seus vértices? E quantas as arestas?

11. De um poliedro com sete faces, uma é hexagonal e as demais, triangulares. Quantas são as arestas? E os vértices?

Soma dos ângulos das faces de um poliedro

As faces de um poliedro são polígonos. Sabemos que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada por $S_n = (n - 2) \cdot 180°$, sendo *n* o número de lados desse polígono.

Dependendo, então, do número de lados de cada face e da quantidade de faces do poliedro, podemos determinar a soma dos ângulos das faces desse poliedro.

exemplo 3

Vamos determinar a soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo com 9 arestas e 6 vértices.

Pela relação de Euler:

$$6 - 9 + F = 2 \Rightarrow F = 5$$

Como são 5 faces, elas devem ser apenas triangulares ou quadrangulares. Se *x* é o número de faces triangulares e *y* é o número de faces quadrangulares, temos $x + y = 5$ e, quanto às arestas, $\frac{x \cdot 3 + y \cdot 4}{2} = 9$.

Resolvendo o sistema, temos $x = 2$ e $y = 3$ e a soma dos ângulos das faces obtém-se como $S = 2 \cdot 180° + 3 \cdot 360° = 1\,440°$.

De modo geral, a soma *S* dos ângulos das faces de um poliedro convexo é dada por $S = (V - 2) \cdot 360°$. De fato, no exemplo acima, temos:

$$S = (6 - 2) \cdot 360° = 1\,440°$$

Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado poliedro de Platão quando preenche as seguintes condições:

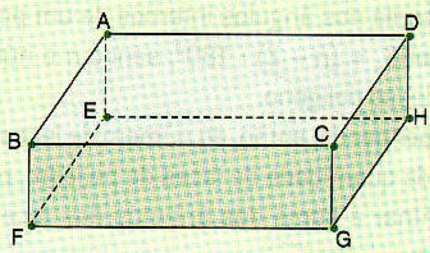
- todas as faces têm o mesmo número *n* de arestas;
- todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número *m* de arestas;
- vale a relação de Euler.

exemplo 4

O prisma quadrangular da figura a seguir é um poliedro de Platão, pois:

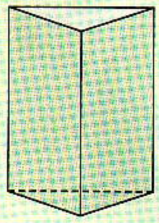
- todas as 6 faces são quadriláteros ($n = 4$);
- todos os ângulos são triédricos ($m = 3$);
- sendo $V = 8$, $F = 6$ e $A = 12$, temos:

$$8 - 12 + 6 = 14 - 12 = 2$$



exemplo 5

O prisma triangular da figura abaixo não é poliedro de Platão, pois 2 faces são triangulares e 3 faces são quadrangulares.



Propriedade

Existem exatamente cinco classes de poliedros de Platão.

Demonstração

Um poliedro de Platão cumpre necessariamente as três condições a seguir:

- Cada uma das *F* faces tem *n* arestas ($n \geq 3$) e, como cada aresta está em duas faces, temos:

$$n \cdot F = 2A \Rightarrow F = \frac{2A}{n} \quad ①$$

- Cada um dos *V* ângulos poliédricos tem *m* arestas ($m \geq 3$) e, como cada aresta contém dois vértices, temos:

$$m \cdot V = 2A \Rightarrow V = \frac{2A}{m} \quad ②$$

- Vale a relação de Euler:

$$V - A + F = 2 \quad ③$$

Substituindo ① e ② em ③, vem:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$$

Sabemos que $n \geq 3$ e $m \geq 3$. No entanto, se ambos fossem simultaneamente maiores que 3, teríamos:

$$\left.\begin{array}{l} m > 3 \Rightarrow m \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow n \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \leq 0$$

o que constitui absurdo, pois $A > 0$.

Concluímos que nos poliedros de Platão temos obrigatoriamente:

m = 3 (o poliedro possui triedros)
ou
n = 3 (o poliedro possui triângulos como faces)

- Para m = 3:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow n < 6$$

	m	n	
triedros	3	3	faces triangulares
	3	4	faces quadrangulares
	3	5	faces pentagonais

- Para n = 3:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow m < 6$$

	m	n	
ângulos triédricos	3	3	faces triangulares
ângulos tetraédricos	4	3	
ângulos pentaédricos	5	3	

Concluindo, os poliedros de Platão são determinados apenas pelos pares ordenados (m, n) da tabela abaixo. Portanto, são exatamente cinco as classes de poliedros de Platão, o que demonstra a propriedade.

m	n
3	3
3	4
3	5
4	3
5	3

exemplo 6

Vamos estudar a possibilidade m = 4 e n = 3. Temos:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 12$$

Ainda: $F = \frac{2A}{n} = \frac{2 \cdot 12}{3} \Rightarrow F = 8$, e o poliedro tem 8 faces, além de 6 vértices ($V - 12 + 8 = 2$).

Procedendo como no exemplo, para denominar e caracterizar os poliedros de Platão, podemos montar a tabela:

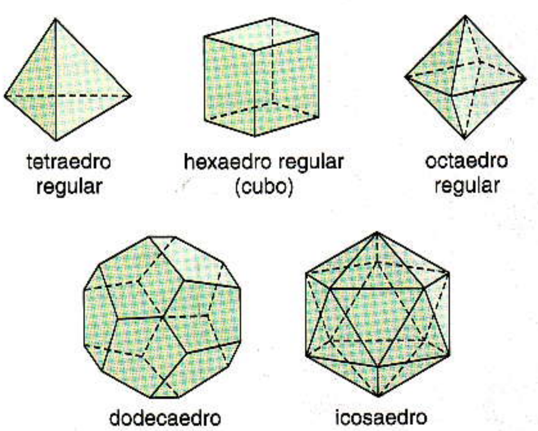
m	n	A	V	F	Poliedro
3	3	6	4	4	tetraedro
3	4	12	8	6	hexaedro
4	3	12	6	8	octoedro
3	5	30	20	12	dodecaedro
5	3	30	12	20	icosaedro

Poliedros regulares

Um poliedro convexo é regular quando:

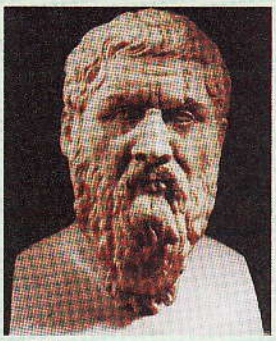
- suas faces são polígonos regulares e congruentes;
- seus ângulos poliédricos são congruentes.

Pelas condições estabelecidas acima, podemos observar que os poliedros regulares são poliedros de Platão. Assim, existem exatamente cinco poliedros regulares. São eles:



tetraedro regular; hexaedro regular (cubo); octaedro regular; dodecaedro regular; icosaedro regular

Filosofia e poliedros


Gianni Dagli Orti/Corbis/Latin Stock

Platão

O filósofo grego Platão, que viveu entre os séculos V e IV a.C., deixou-nos uma extensa obra sobre diversos assuntos, entre eles Filosofia, Matemática e leis.

Ele estudou algumas propriedades interessantes dos poliedros. Recebem o nome de poliedros de Platão aqueles que, sendo eulerianos, apresentam todas as faces com mesmo número de arestas e, igualmente, ângulos poliédricos também com mesmo número de arestas. Há cinco classes de poliedros de Platão. Os poliedros regulares apresentados neste capítulo pertencem a essas classes.

Em um de seus diálogos preservados até hoje — de nome Timeu, sobre a natureza —, Platão descreveu a construção do Universo a partir dos elementos terra, água, ar e fogo. Cada um deles foi associado a um poliedro regular em função da idéia de que tais elementos são corpos e, como corpos, são sólidos e, portanto, limitados por superfícies.

De acordo com as características de cada sólido e as propriedades de cada elemento, como leveza, estabilidade e fluidez, observadas pelo filósofo, a comparação feita resultou na associação a seguir:


tetraedro
↑
fogo

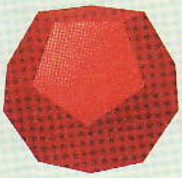

cubo
↑
terra


octaedro
↑
ar


icosaedro
↑
água

fotos: Emiliano Martinelli

Restou ao dodecaedro (doze pentágonos) o papel de Universo ou Cosmos, pois apresenta a forma mais harmoniosa e não se decompõe em outros poliedros regulares.


Emiliano Martinelli

dodecaedro
↑
Cosmos

Por sua vez, o icosaedro (vinte triângulos) decompõe-se em dois octaedros (oito triângulos cada) e um tetraedro (quatro triângulos). Platão pôde, assim, sugerir explicações para algumas transformações que ocorrem na natureza. Por exemplo, a interação da água com o fogo, que resulta em vapor.

Para saber mais sobre este assunto, você pode pesquisar em:
MACHADO, José Nílson. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão*. São Paulo: Scipione, 2000. (Col. Vivendo a Matemática).
RONAN, Colin A. *História Ilustrada da Ciência*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2002. 4 v.
www.apm.pt/apm/amm/paginas/231_249.pdf

exercícios

12. Em quais poliedros de Platão há faces cuja soma dos ângulos vale 180°?

13. Calcule, em graus, a soma dos ângulos das faces de cada um dos poliedros de Platão.

14. Um poliedro convexo apresenta faces triangulares e quadrangulares. A soma dos ângulos das faces vale 2 160°. Determine o número de faces de cada espécie, sabendo que o poliedro possui 15 arestas.

15. (FEI-SP) Um poliedro convexo com faces quadrangulares e pentagonais tem 15 arestas. Calcule o número de faces de cada tipo sabendo que a soma de todos os ângulos dos polígonos das faces é 32 retos.

testes de vestibulares

1. (UF-AM) O número de faces de um poliedro convexo de 22 arestas é igual ao número de vértices. Então o número de faces do poliedro é:

a) 6
b) 8
c) 10
d) 11
e) 12

2. (UF-PI) Um poliedro convexo constituído de faces triangulares e quadrangulares possui 20 arestas, e a soma dos ângulos de suas faces é igual a 2 880°. É correto afirmar que esse poliedro possui:

a) 8 faces triangulares
b) 12 vértices
c) 10 faces
d) 8 faces quadrangulares

3. (FMU/Fiam/Faam-SP) Um poliedro convexo tem seis vértices. De cada vértice partem quatro arestas. Esse poliedro possui:

a) 2 faces
b) 16 faces
c) 20 faces
d) 8 faces
e) 4 faces

4. (PUC-PR) Um poliedro convexo tem 7 faces. De um dos seus vértices partem 6 arestas e de cada um dos vértices restantes partem 3 arestas. Quantas arestas tem esse poliedro?

a) 8
b) 10
c) 12
d) 14
e) 16

5. (FMU/Fiam-SP) O hexaedro regular é um poliedro com:

a) 4 faces triangulares, 6 arestas e 4 vértices.
b) 3 faces quadradas, 4 arestas e 6 vértices.
c) 6 faces triangulares, 12 arestas e 8 vértices.
d) 4 faces quadradas, 8 arestas e 8 vértices.
e) 6 faces quadradas, 12 arestas e 8 vértices.

6. (PUC-PR) Um poliedro convexo é formado por faces quadrangulares e 4 faces triangulares. A soma dos ângulos de todas as faces é igual a 12 retos. Qual o número de arestas desse poliedro?

a) 8
b) 6
c) 4
d) 2
e) 1

7. (U. F. Santa Maria-RS) Um poliedro convexo tem três faces triangulares, uma quadrangular, uma pentagonal e duas hexagonais. A soma dos ângulos de todas as faces desse poliedro é:

a) 2 880°
b) 2 890°
c) 3 000°
d) 4 000°
e) 4 320°

8. (UE-CE) Um poliedro convexo de nove vértices possui quatro ângulos triédricos e cinco ângulos tetraédricos. Assim, o número de faces do poliedro é:

a) 12
b) 11
c) 10
d) 9
e) 8

desafio

(UF-MG) Considere um tetraedro regular de vértices A, B, C e D, cujas arestas medem r. Considere, ainda, que M e N são pontos médios das arestas $\overline{BD}$ e $\overline{CD}$, respectivamente. Calcule a área do triângulo AMN.