Produtos Notáveis e Fatoração

PRODUTOS NOTÁVEIS

Os produtos notáveis são identidades que podem ser obtidas de maneira prática. Assim, como são muito frequentes no cálculo algébrico, vamos listar os principais:

i) Quadrado da soma de dois termos

$(a + b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$

ii) Quadrado da diferença de dois termos

$(a - b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$

iii) Produto da soma pela diferença de dois termos

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

iv) Cubo da soma de dois termos

$(a + b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$

v) Cubo da diferença de dois termos

$(a - b)^3 = a^3 - 3.a^2.b + 3.a.b^2 - b^3$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Desenvolver os seguintes produtos notáveis:

A) $\left(\frac{a}{3} - b\right)^2$

Resolução:

$$\left(\frac{a}{3} - b\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2 - 2.\frac{a}{3}.b + (b)^2 = \frac{a^2}{9} - \frac{2ab}{3} + b^2$$

B) $(x + 3y)(x - 3y)$

Resolução:

$(x + 3y)(x - 3y) = (x)^2 - (3y)^2 = x^2 - 9y^2$

02. (UNIMEP-SP) A diferença entre o quadrado da soma de dois números inteiros e a soma de seus quadrados não pode ser:

A) 12.

B) 6.

C) 4.

D) 2.

E) 9.

Resolução:

Sejam **x** e **y** dois números inteiros. Temos:

$(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 - y^2 = 2xy$

Como o número obtido é par, temos que o único valor que não corresponde à expressão é 9. Portanto, a alternativa correta é a E.

FATORAÇÃO

Seja uma expressão algébrica escrita como uma soma de termos. Fatorar essa expressão significa escrevê-la na forma de um produto. Para tanto, existem determinadas técnicas, descritas a seguir:

Fator comum

Inicialmente, identificamos um termo comum a todas as parcelas da expressão. Em seguida, colocamos esse termo em evidência.

Exemplos:

1º) $ab + ac = a(b + c)$

2º) $24x^3y^2 - 6x^4y + 12x^2y^5 = 6x^2y(4xy - x^2 + 2y^4)$

Agrupamento

Às vezes, não é possível identificar, de início, um fator comum a todas as parcelas da expressão. Nesse caso, formamos dois ou mais grupos com um termo comum. Em seguida, colocamos em evidência um fator comum a todos os grupos.

Exemplos:

1º) $ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b)$

2º) $8x^2 - 4xz - 6xy + 3yz = 4x(2x - z) - 3y(2x - z) = (2x - z)(4x - 3y)$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

03. Fatorar a expressão $a^2 - 4ba + 3b^2$.

Resolução:

$$\begin{aligned} a^2 - 4ba + 3b^2 &= a^2 - ba - 3ba + 3b^2 \\ &= a(a - b) - 3b(a - b) \\ &= (a - b)(a - 3b) \end{aligned}$$

Soma e diferença de cubos

Trata-se de identidades muito úteis em cálculo algébrico. São elas:

i) Soma de cubos

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

ii) Diferença de cubos

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Exemplo:

Vamos fatorar a expressão $x^3 - 27$:

$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

Identificação de um produto notável

Exemplos:

1º) $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2 \Rightarrow$ Quadrado da soma.

2º) $a^4b^2 - c^6 = (a^2b)^2 - (c^3)^2 = (a^2b + c^3)(a^2b - c^3)$
$\Rightarrow$ Produto da soma pela diferença.

3º) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = (a - 1)^3 \Rightarrow$ Cubo da diferença.

Fatoração do trinômio da forma $ax^2 + bx + c$

Sejam x_1 e x_2 as raízes reais do trinômio $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Esse trinômio pode ser escrito na forma:

$$\boxed{a(x - x_1)(x - x_2)}$$

OBSERVAÇÃO

As raízes podem ser obtidas pela Fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\ }}{2a}, \text{ sendo D} = b^2 - 4ac.$$

Exemplo:

Vamos fatorar a expressão $x^2 - 5x + 6$.

Cálculo das raízes:

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x_1 = 2$ e $x_2 = 3$

Substituindo na forma fatorada, temos $1(x - 2)(x - 3)$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFCE) O valor da expressão $(a + b)^2 - (a - b)^2$ é:

A) ab
B) 2ab
C) 3ab
D) 4ab
E) 6ab

02. LGYZ (CEFET-MG) O valor numérico da expressão $\sqrt{68^2 - 32^2}$ está compreendido no intervalo:

A) [30,40[
B) [40,50[
C) [50,60[
D) [60,70[

03. (UTFPR–2017) Uma indústria fabrica uma placa metálica no formato de um retângulo de lados (ax + by) e (bx + ay). Encontre, de forma fatorada, o perímetro desse retângulo.

A) $2(a + b)(x + y)$
B) $4(a + b)(x + y)$
C) $2(a - b)(x - y)$
D) $4(a - b)(x - y)$
E) $(a + b)(x + y)$

04. (UFRGS–2016) Se $x + y = 13$ e $xy = 1$, então $x^2 + y^2$ é:

A) 166.
B) 167.
C) 168.
D) 169.
E) 170.

05. LQYP (PUC Rio) O produto $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ é igual a:

A) $x^3 - 1$
B) $x^3 + 3x^2 - 3x + 1$
C) $x^3 + 1$
D) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
E) $x^2 + 2$

06. TMSU (UEPB) Dado $x - \frac{1}{x} = 13$, o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$ é igual a:

A) 171.
B) 169.
C) 167.
D) 130.
E) $\frac{168}{13}$.

07. TFYD (IFCE) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $x + y = -16$ e $xy = 64$. O valor da expressão $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ é:

A) −2.
B) −1.
C) 0.
D) 1.
E) 2.

08. 7WAB (UTFPR–2018) Dados A = x + y, B = x − y e C = x.y, para $x \neq y$, $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Simplificando a expressão algébrica, $\frac{A^2 - B^2}{C}$ obtém-se:

A) 0
B) $\frac{2y}{x}$
C) 4
D) $-\frac{2x}{y}$
E) $\frac{4}{xy}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (CEFET-MG–2016) Se $M = \frac{(3^2 + 5^2)^2 - (3^2 - 5^2)^2}{(3^2 \cdot 5^2)^2}$, então o valor de **M** é:

A) 15.
B) 14.
C) $\frac{2}{15}$.
D) $\frac{4}{225}$.

02. (Insper-SP) O valor de $\frac{2\,009^2 - 4}{2\,009^2 + 2\,009 - 2}$ é igual a:

A) $\frac{2\,007}{2\,008}$.
B) $\frac{2\,008}{2\,009}$.
C) $\frac{2\,007}{2\,009}$.
D) $\frac{2\,009}{2\,008}$.
E) $\frac{2\,009}{2\,007}$.

03. (UTFPR) A expressão algébrica: $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1-x^2}{2}$ equivale a:

A) 2x
B) x
C) −2x
D) −x
E) $\frac{x^2}{x^2 - 1}$

04. DZMN (ESPM-SP) Considerando-se que $x = 9\,731^2$, $y = 3\,907^2$ e $z = 2\sqrt{xy}$, o valor da expressão $\sqrt{x + y - z}$ é:

A) 6 792.
B) 5 824.
C) 7 321.
D) 4 938.
E) 7 721.

05. 3K56 (IFCE) Se x + y = 2 e $x^2 + y^2 = 3$, então $x^3 + y^3$ vale:

A) 4.
B) 5.
C) 6.
D) 7.
E) 8.

06. (IFCE) Para cada número real positivo **m**, a expressão $\left(m^{\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}}\right)^2 + 1 + \frac{1}{\sqrt{m}} \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{m}}$ é igual a:

A) $m^{\frac{1}{2}}$
B) m + 1
C) m + 2
D) m + 3
E) $m + \frac{1}{m}$

07. 855T (CEFET-MG–2015) Simplificando a fração algébrica $\frac{x^2 - y^2 + 2x + 2y}{x^2 - y^2}$, sendo **x** e **y** números reais, tais que $x + y \neq 0$ e x − y = 4, obtém-se o valor:

A) 1,5.
B) 1,0.
C) 0,5.
D) 0,0.

08. SHAV (UTFPR–2016) Simplificando a expressão $\frac{(x+y)^2 - 4xy}{x^2 - y^2}$, com $x \neq y$, obtém-se:

A) 2 − 4xy
B) $\frac{x-y}{x+y}$
C) $\frac{2xy}{x+y}$
D) −2xy
E) $-\frac{4xy}{x-y}$

09. 5YNT (Fatec-SP) Sabe-se que $a^2 - 2bc - b^2 - c^2 = 40$ e a − b − c = 10, com **a**, **b** e **c** números reais. Então, o valor de a + b + c é igual a:

A) 1. B) 2. C) 4. D) 10. E) 20.

10. TLOS (CEFET-RJ) O único par de números naturais **m** e **n** que satisfaz a igualdade $m^2 - n^2 = 17$ é tal que

A) seu produto é 72.
B) sua soma é 18.
C) seu quociente é 17.
D) sua diferença é 2.

11. LH5G (EPCAR-MG–2016) O valor da expressão $\frac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}} \cdot \frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$, em que x e y $\in \mathbb{R}^*$ e $x \neq y$ e $x \neq -y$ é:

A) −1.
B) −2.
C) 1.
D) 2.

12. V2RG (FUVEST-SP) A diferença entre os quadrados de dois números naturais é 21. Um dos possíveis valores da soma dos quadrados desses dois números é

A) 29.
B) 97.
C) 132.
D) 184.
E) 252.

MATEMÁTICA

13. 08IØ (EPCAR-MG–2017) Simplificando as expressões

$$A = \frac{1 - \frac{y}{x}^{\;2} \cdot x^2}{\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^2 + 2\sqrt{xy}} \text{ e } B = \frac{x^2 - xy}{2x}\text{, nas quais } y > x > 0,$$

é correto afirmar que:

A) $\frac{A}{B} = 2^{-1}$

B) $\frac{B}{A} \in \mathbb{N}$

C) A.B > 0

D) A + B > 0

14. 6MWP (CEFET-MG) Simplificando a expressão $\frac{x^3 - 1}{x^2 - x} - \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x}$ para $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$ obtém-se:

A) x

B) x^2

C) $x - 1$

D) $x^2 - 1$

15. (Unesp) A expressão $\frac{4x + 8}{x^2 + 3x + 2} + \frac{3x - 3}{x^2 - 1}$, para $x \neq \pm 1$, $x \neq -2$, é equivalente a:

A) $\frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-1}$

B) $\frac{1}{x+1}$

C) $\frac{7}{x+1}$

D) $\frac{4}{x+1} + \frac{3}{x-1}$

E) $\frac{1}{x-1}$

16. 5UI6 (ESPM-SP–2015) Em relação ao número $N = 2^{48} - 1$, pode-se afirmar que

A) ele é primo.

B) ele é par.

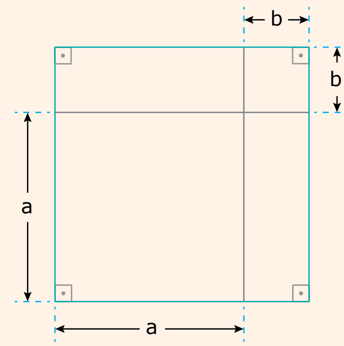
C) ele é múltiplo de 7.

D) ele não é múltiplo de $2^{24} + 1$.

E) ele não é divisível por 9.

SEÇÃO ENEM

01. Em Matemática, verifica-se, em várias situações, uma correspondência entre um modelo algébrico e um modelo geométrico. Como exemplo, observe a figura a seguir:



A área da figura anterior corresponde ao produto notável:

A) $(a - b)^2$

B) $(a + b)^2$

C) $(a + b)(a - b)$

D) $(a + b)^3$

E) $(a - b)^3$

02. Anselmo foi encarregado de calcular o valor da expressão $A = 4\,000 \,.\, 206^2 - 4\,000 \,.\, 204^2$ sem utilizar calculadora. Seu amigo Fernando recomendou a utilização de técnicas de fatoração, além do conhecimento dos produtos notáveis. Ao seguir o conselho de Fernando, Anselmo obteve:

A) 3 280 000.

B) 360 000.

C) 2 380 000.

D) 1 680 000.

E) 1 240 000.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

○ 01. D	○ 04. B	○ 07. E
○ 02. D	○ 05. C	○ 08. C
○ 03. A	○ 06. A	

Propostos

Acertei ______ Errei ______

○ 01. D	○ 05. B	○ 09. C	○ 13. C
○ 02. A	○ 06. D	○ 10. A	○ 14. A
○ 03. B	○ 07. A	○ 11. A	○ 15. C
○ 04. B	○ 08. B	○ 12. A	○ 16. C

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

○ 01. B

○ 02. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Potenciação e Radiciação

POTÊNCIA DE EXPOENTE INTEIRO

Definição

Dados um número real **a** e um número natural **n**, com n > 1, chama-se de potência de base **a** e expoente **n** o número a^n, que é o produto de **n** fatores iguais a **a**.

Por definição, temos ainda que $a^0 = 1$ (sendo $a \neq 0$) e $a^1 = a$.

Dessa definição, decorre que:

$a^2 = a.a$, $a^3 = a.a.a$, $a^4 = a.a.a.a$, etc.

$$\boxed{a^n = \underbrace{a.a.a.\ \dots\ .a}_{\textbf{n}\text{ fatores}}}$$

Dados um número real **a**, não nulo, e um número natural **n**, chama-se de potência de base **a** e expoente −n o número a^{-n}, que é o inverso de a^n.

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}$, então valem as seguintes propriedades:

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ a \neq 0$$

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$$

$$(a^m)^n = a^{m.n}$$

RAIZ ENÉSIMA ARITMÉTICA

Definição

Dados um número real não negativo **a** e um número natural **n**, $n \geq 1$, chama-se de raiz enésima aritmética de **a** o número real e não negativo **b** tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado radical, indica a raiz enésima aritmética de **a**. Nele, **a** é chamado de radicando, e **n**, de índice.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \ \text{ e } \ b \geq 0}$$

OBSERVAÇÕES

i) Da definição, decorre $\left(\sqrt[n]{a^n}\right) = a$, para todo $a \geq 0$.

ii) Observemos, na definição dada, que:

Correto	Incorreto
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{16} = \pm 4$
$\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{25}{81}} = \pm\frac{5}{9}$
$\sqrt[3]{-8} = -2$	$\sqrt{0{,}09} = \pm 0{,}3$
$\pm\sqrt{49} = \pm 7$	$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{64}} = \frac{\pm 6}{\pm 8}$

iii) Devemos estar atentos ao cálculo da raiz quadrada de um quadrado perfeito:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Exemplos:

1º) $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$, e não $\sqrt{(-5)^2} = -5$

2º) $\sqrt{x^2} = |x|$, e não $\sqrt{x^2} = x$

No conjunto dos números reais, temos situações distintas conforme **n** seja par ou ímpar.

1) Para **n** par:

Se $a < 0$, não existe raiz enésima de **a**.

Exemplo:

$\sqrt{-5}$ não existe no conjunto dos números reais.

Se $a = 0$, a única raiz enésima de **a** é zero.

Exemplo:

$\sqrt{0} = 0$

Se a > 0, a única raiz enésima de **a** é $\sqrt[n]{a}$.

Exemplo:

$\sqrt{4} = 2$

2) Para **n** ímpar:

Qualquer que seja o número real **a**, existe uma única raiz enésima, que é indicada por $\sqrt[n]{a}$ (ou $a^{\frac{1}{n}}$, como veremos adiante).

Exemplos:

1º) $\sqrt[3]{-8} = -2$

2º) $\sqrt[3]{1} = 1$

Propriedades

Se $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot p]{a^{m\cdot p}}$$

$$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n\cdot p]{a}$$

Se $b \in \mathbb{R}_+$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $b.\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a.b^n}$.

Exemplos:

1º) $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5.2^3} = \sqrt[3]{40}$

2º) $-3\sqrt{2} = -\sqrt{2.3^2} = -\sqrt{18}$

Assim, o coeficiente do radical pode ser colocado no radicando, com expoente igual ao índice do radical.

POTÊNCIA DE EXPOENTE RACIONAL

Definição

Dados um número real **a** (positivo), um número inteiro **p** e um número natural **q** ($q \geq 1$), chama-se de potência de base **a** e expoente $\frac{p}{q}$ a raiz com índice **q** de a^p.

$$a > 0 \qquad a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} > 0$$

Sendo $\frac{p}{q} > 0$, define-se $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Exemplos:

1º) $2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2.2} = 2\sqrt{2}$

2º) $3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}$

Propriedades

As propriedades a seguir se verificam para as potências de expoente racional.

Assim, se $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então valem as seguintes propriedades:

$$a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$$

$$\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$$

$$(a.b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.b^{\frac{p}{q}}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$$

$$\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$$

RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Para facilitar cálculos, é comum eliminar raízes dos denominadores das frações, através de um processo chamado racionalização.

Por exemplo, ao realizarmos a divisão $\frac{1}{\sqrt{2}}$, como $\sqrt{2}$ é, aproximadamente, 1,41, teremos de efetuar $\frac{1}{1,41}$. Porém, se racionalizarmos a fração dada (multiplicando numerador e denominador por $\sqrt{2}$), teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E, usando a mesma aproximação anterior, ficamos com a divisão $\frac{1,41}{2}$, que é mais simples que a primeira.

De modo geral, para racionalizarmos uma fração com denominador $\sqrt[n]{a^p}$, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt[n]{a^{n-p}}$, pois $\sqrt[n]{a^p}\,.\,\sqrt[n]{a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^{p+n-p}} = a$.

Exemplos:

1º) $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5^2}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

2º) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \dfrac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}} = \dfrac{\sqrt[5]{27}}{3}$

Caso apareça, no denominador de uma fração, uma soma de radicais, devemos utilizar os produtos notáveis.

Vejamos alguns exemplos de racionalizações:

Exemplo 1:

Quando o denominador é do tipo a + b ou a – b, e **a** e / ou **b** são raízes quadradas, lembrando que

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b),$$

devemos multiplicar numerador e denominador por a – b ou a + b, respectivamente. Assim:

1º) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

2º) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{5}$

Exemplo 2:

Quando o denominador é do tipo (a – b) ou (a + b), e um dos dois é uma raiz cúbica, lembrando que

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2),$$

devemos multiplicar o numerador e o denominador por $a^2 + ab + b^2$ ou $a^2 - ab + b^2$, respectivamente. Assim:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1^2\right)}{\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1^2\right)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{\left(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1\right)}{\sqrt[3]{2^3}-1^3} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFRGS-RS) A distância que a luz percorre em um ano, chamada ano-luz, é de aproximadamente $38 \cdot 4^5 \cdot 5^{12}$ quilômetros. A notação científica desse número é:

A) $9{,}5 \cdot 10^{10}$
B) $0{,}95 \cdot 10^{12}$
C) $9{,}5 \cdot 10^{12}$
D) $95 \cdot 10^{12}$
E) $9{,}5 \cdot 10^{14}$

02. DUHY (CEFET-MG–2015) Sendo $y = \dfrac{4^{10} \cdot 8^{-3} \cdot 16^{-2}}{32}$, a metade do valor de **y** vale:

A) 2^{-3}
B) 2^{-4}
C) 2^{-5}
D) 2^{-6}

03. TWKC (CEFET-MG–2015) O valor da expressão numérica $\dfrac{(1{,}25)^{-2} + 4 \cdot 5^{-1}}{(9 \cdot 9^{-1})^2 - 2(-10)^{-1}}$ é igual a:

A) $\dfrac{1}{5}$.
B) $\dfrac{3}{5}$.
C) $\dfrac{4}{5}$.
D) $\dfrac{6}{5}$.

04. (IFSC-SC–2015) Considere a expressão numérica $A = \dfrac{0{,}001}{1\,000} + 8^{\frac{2}{3}} + \sqrt{25}$. É correto afirmar que o valor de **A** é:

Disponível em: <pplware.sapo/o-pplware-apresenta-kids>. Acesso em: 10 ago. 2014.

A) 9.
B) 10.
C) 81,003.
D) 69.
E) 9,000001.

05. YFHI (UPF-RS–2018) Considere as afirmações a seguir, em que **a** e **b** são números reais.

I. $\sqrt{a^2} = a$

II. $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$

III. $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2}$

IV. $\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}} = \dfrac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}}$, $b \neq 0$

A) Apenas III e IV são verdadeiras.
B) Apenas IV é verdadeira.
C) Apenas II é falsa.
D) Apenas I, II e IV são verdadeiras.
E) Todas são verdadeiras.

06. CXTG (IFSC-SC) O valor correto da expressão numérica $E = (10^{-2}) \cdot (10^3) : (10^{-4}) + (8 \cdot 8^{-1}) + 10^{-4}$ é

A) 58,0001.
B) 8,000001.
C) 100001,0001.
D) 8.
E) 80.

07. JTNL (UFMG) O valor de

$m = (2\sqrt{8} + 3\sqrt{5} - 7\sqrt{2})(\sqrt{72} + \sqrt{20} - 4\sqrt{2})$ é:

A) 6 C) 16 E) $12\sqrt{5}$

B) $6\sqrt{6}$ D) 18

08. XAØJ (UNITAU-SP) A expressão $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ é igual a:

A) $-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ E) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

B) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UEL-PR) Simplificando-se a expressão $\dfrac{3^{3-n} + 3 \,.\, 3^{2-n} - 9 \,.\, 3^{1-n}}{9 \,.\, 3^{2-n}}$ para $n \in \mathbb{R}$, obtém-se:

A) $\dfrac{1}{6}$

B) $\dfrac{1}{3}$

C) $6 \,.\, 3^{n-1}$

D) $1 - 3^{1-n}$

E) -3^{n+1}

02. 56TO (UFRRJ) Encontre o valor da expressão mostrada a seguir:

$$\left[\sqrt{{\frac{1}{6}}^{-3} \,.\, 0{,}66\ldots} + \sqrt{{\frac{5}{7}}^{0} - \frac{1}{1{,}33\ldots}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

03. (UFLA-MG) O valor da expressão $\dfrac{10^{\frac{n}{2}}(10^{m-1} + 10^{m+1})}{10^{m}\left(10^{\frac{n}{2}} + 10^{2+\frac{n}{2}}\right)}$ é:

A) 1 C) $10^{m.\frac{n}{2}-2}$ E) 10^{-1}

B) 10 D) $10^{m.\frac{n}{2}+2}$

04. 32YA (UDESC) Se $h^2 = \dfrac{16}{2-\sqrt{2}} - 4$, então o valor absoluto de **h** é:

A) $12 + 8\sqrt{2}$ C) 2 E) $2\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

B) 4 D) $\dfrac{2}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$

05. VDC1 (UFMG) Uma fazenda tem uma área de 0,4 km². Suponha que essa fazenda seja um quadrado, cujo lado mede ℓ metros. O número ℓ satisfaz a condição:

A) $180 < \ell < 210$ C) $400 < \ell < 500$

B) $210 < \ell < 250$ D) $600 < \ell < 700$

06. 3866 (UEL-PR) O valor da expressão $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{1+\sqrt{2}} - \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$ é:

A) $-\sqrt{2}$ C) 0 E) 2

B) $-\dfrac{1}{2}$ D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

07. 9OXØ (Unimontes-MG–2015) A expressão $\left(\sqrt{5}-1\right)^2 + \dfrac{20}{5-\sqrt{5}}$ é igual a:

A) $9 + \sqrt{5}$ C) $11 - \sqrt{5}$

B) $-11 + \sqrt{5}$ D) $9 - \sqrt{5}$

08. (UNITAU-SP) A expressão $\dfrac{4}{\sqrt[3]{7}}$ é igual a:

A) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{7}\right)}{7}$

B) $\dfrac{4\left(\sqrt{7}\right)}{7}$

C) $\dfrac{4\left(\sqrt{49}\right)}{7}$

D) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{343}\right)}{7}$

E) $\dfrac{4\left(\sqrt[3]{49}\right)}{7}$

09. (PUC Rio–2018) Simplificando, $\sqrt[3]{9} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}\left(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{24}\right)$ encontramos:

A) 9. C) $\sqrt[3]{3}$. E) 1.

B) 10. D) 12.

10. B4ØB (CFT-RJ–2017) Alex, Beatriz e Camila foram convidados a fazerem afirmações sobre o número $N = 2^{50} + 4^{20}$.

- Alex afirmou que **N** é múltiplo de 8.
- Beatriz afirmou que metade de **N** é igual a $2^{25} + 4^{10}$.
- Camila afirmou que **N** é par.

Quantas das afirmações feitas pelos participantes são verdadeiras?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3

11. (Poli-USP) A expressão $\dfrac{3^{-2} \,.\, \sqrt[3]{243}}{\sqrt[6]{81}}$ é igual a:

A) $\dfrac{2}{9}$. C) $\dfrac{2}{3}$. E) $\dfrac{5}{3}$.

B) $\dfrac{1}{3}$. D) 1.

12. QSGI (PUC-SP) A tabela a seguir permite exprimir os valores de certas grandezas em relação a um valor determinado da mesma grandeza tomado como referência. Os múltiplos e submúltiplos decimais das unidades derivadas das unidades do Sistema Internacional de Unidades (SI) podem ser obtidos direta ou indiretamente dos valores apresentados e têm seus nomes formados pelo emprego dos prefixos indicados.

Nome	Símbolo	Fator pelo qual a unidade é multiplicada
tera	T	10^{12} = 1 000 000 000 000
giga	G	10^{9} = 1 000 000 000
mega	M	10^{6} = 1 000 000
quilo	k	10^{3} = 1 000
hecto	h	10^{2} = 100

deca	da	$10 = 10$
deci	d	$10^{-1} = 0,1$
centi	c	$10^{-2} = 0,01$
mili	m	$10^{-3} = 0,001$
micro	μ	$10^{-6} = 0,000001$
nano	n	$10^{-9} = 0,000000001$
pico	p	$10^{-12} = 0,000000000001$

Quadro Geral de Unidades de Medida, 2. ed. – INMETRO. Brasília, 2000.

Assim, por exemplo, se a unidade de referência fosse o metro (**m**), teríamos:

28 000 μm (micrômetros) = 28 000 . 10^{-6} m (metros) = 0,028 m (metros)

Considerando o bel (**b**) como unidade de referência, a expressão $\dfrac{(0{,}13\ \text{Mb})\,.\,(0{,}5\ \text{nb})}{2{,}5\ \text{kb}}$ é equivalente a

A) 0,0026 cb.

B) 0,026 μb.

C) 0,26 kb.

D) 2,6 db.

E) 26 pb.

13. QICR (Cesgranrio) O número de algarismos do produto $5^{17}\,.\,4^{9}$ é igual a:

A) 17.

B) 18.

C) 26.

D) 34.

E) 35.

14. HZKA (UNIFEI-MG) Sejam $A = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$, $B = \sqrt[3]{\dfrac{y^2}{x}}$ e $C = \sqrt[6]{\dfrac{x}{y}}$. Então, o produto A.B.C é igual a:

A) $\sqrt[3]{y}$

B) $\sqrt[3]{x}$

C) $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}$

D) $\sqrt[3]{xy}$

15. FAPZ (UEPB) Seja n > 1 um número natural. O valor da expressão $\sqrt[n]{\dfrac{72}{9^{2-n} - 3^{2-2n}}}$, quando simplificada, é:

A) 9

B) 9^{2n}

C) 9^{n}

D) $\sqrt[n]{9}$

E) 1

16. HRKS (ESPM-SP) O valor da expressão $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ é igual a:

A) $2\sqrt{2}$

B) $-2\sqrt{2}$

C) 0

D) $4\sqrt{2}$

E) $-4\sqrt{2}$

17. WCVG (PUC Rio–2016) Considere **x**, **y** e **z** reais positivos tais que $\sqrt{x} = 2015^3$, $\sqrt[3]{y^2} = 2\,015^4$, $z^3 = 2\,015^6$.

A expressão $\dfrac{1}{\sqrt{x.y.z}}$ vale:

A) $2\,015^{-7}$

B) $2\,015^{-13}$

C) $2\,015^{-17}$

D) $2\,015^{5}$

E) $2\,015^{7}$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem-2017) Uma das principais provas de velocidade do atletismo é a prova dos 400 metros rasos. No Campeonato Mundial de Sevilha, em 1999, o atleta Michael Johnson venceu essa prova com a marca de 43,18 segundos.

Esse tempo, em segundos, escrito em notação científica é:

A) $0{,}4318\ .\ 10^{2}$

B) $4{,}318\ .\ 10^{1}$

C) $43{,}18\ .\ 10^{0}$

D) $431{,}8\ .\ 10^{-1}$

E) $4\,318\ .\ 10^{-2}$

02. (Enem) Dentre outros objetos de pesquisa, a Alometria estuda a relação entre medidas de diferentes partes do corpo humano. Por exemplo, segundo a Alometria, a área **A** da superfície corporal de uma pessoa relaciona-se com a sua massa **m** pela fórmula $A = k.m^{\frac{2}{3}}$, em que **k** é uma constante positiva.

Se no período que vai da infância até a maioridade de um indivíduo sua massa é multiplicada por 8, por quanto será multiplicada a área da superfície corporal?

A) $\sqrt[3]{16}$

B) 4

C) $\sqrt{24}$

D) 8

E) 64

03. (Enem) A cor de uma estrela tem relação com a temperatura em sua superfície. Estrelas não muito quentes (cerca de 3 000 K) nos parecem avermelhadas. Já as estrelas amarelas, como o Sol, possuem temperatura em torno dos 6 000 K; as mais quentes são brancas ou azuis porque sua temperatura fica acima dos 10 000 K. A tabela apresenta uma classificação espectral e outros dados para as estrelas dessas classes.

Estrelas da sequência principal

Classe espectral	Temperatura	Luminosidade	Massa	Raio
O5	40 000	$5\ .\ 10^{5}$	40	18
B0	28 000	$2\ .\ 10^{4}$	18	7
A0	9 900	80	3	2,5
G2	5 770	1	1	1
M0	3 480	0,06	0,5	0,6

(Temperatura em Kelvin. Luminosidade, massa e raio, tomando o Sol como unidade.)

Disponível em: <http://www.zenite.nu>. Acesso em: 01 maio 2010 (Adaptação).

Se tomarmos uma estrela que tenha temperatura 5 vezes maior que a temperatura do Sol, qual será a ordem de grandeza de sua luminosidade?

A) 20 000 vezes a luminosidade do Sol.

B) 28 000 vezes a luminosidade do Sol.

C) 28 850 vezes a luminosidade do Sol.

D) 30 000 vezes a luminosidade do Sol.

E) 50 000 vezes a luminosidade do Sol.

MATEMÁTICA

04. (Enem) Um dos grandes problemas da poluição dos mananciais (rios, córregos e outros) ocorre pelo hábito de jogar óleo utilizado em frituras nos encanamentos que estão interligados com o sistema de esgoto. Se isso ocorrer, cada 10 litros de óleo poderão contaminar 10 milhões (10^7) de litros de água potável.

Manual de etiqueta. Parte integrante das revistas *Veja* (ed. 2 055), *Claudia* (ed. 555), *National Geographic* (ed. 93) e *Nova Escola* (ed. 208) (Adaptação).

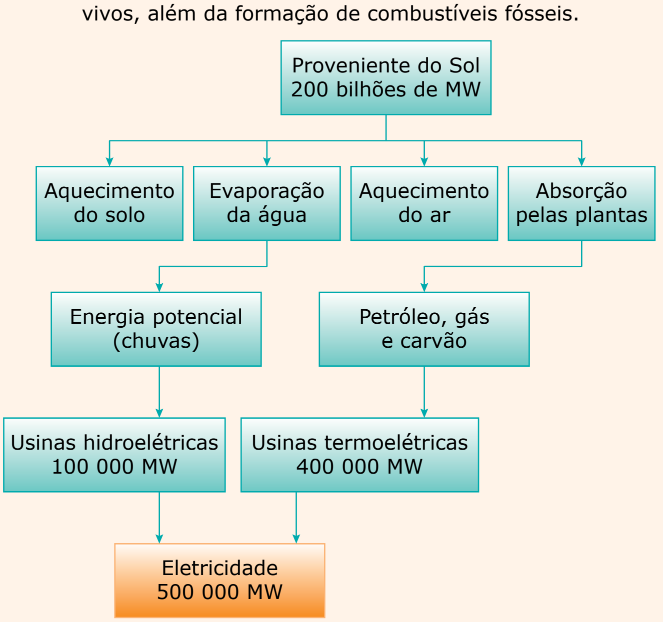
Suponha que todas as famílias de uma cidade descartem os óleos de frituras através dos encanamentos e consomem 1 000 litros de óleo em frituras por semana. Qual seria, em litros, a quantidade de água potável contaminada por semana nessa cidade?

A) 10^2
B) 10^3
C) 10^4
D) 10^5
E) 10^9

05. (Enem) No depósito de uma biblioteca, há caixas contendo folhas de papel de 0,1 mm de espessura e, em cada uma delas, estão anotados 10 títulos de livros diferentes. Essas folhas foram empilhadas formando uma torre vertical de 1 m de altura. Qual a representação, em potência de 10, correspondente à quantidade de títulos de livros registrados nesse empilhamento?

A) 10^2
B) 10^4
C) 10^5
D) 10^6
E) 10^7

06. (Enem) O diagrama seguinte representa a energia solar que atinge a Terra e sua utilização na geração de eletricidade. A energia solar é responsável pela manutenção do ciclo da água, pela movimentação do ar, e pelo ciclo do carbono que ocorre através da fotossíntese dos vegetais, da decomposição e da respiração dos seres vivos, além da formação de combustíveis fósseis.



De acordo com o diagrama, a humanidade aproveita, na forma de energia elétrica, uma fração da energia recebida como radiação solar correspondente a:

A) $4 \cdot 10^{-9}$
B) $2,5 \cdot 10^{-6}$
C) $4 \cdot 10^{-4}$
D) $2,5 \cdot 10^{-3}$
E) $4 \cdot 10^{-2}$

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03. D
- 04. E
- 05. A
- 06. C
- 07. D
- 08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. $\frac{\sqrt{2}}{5}$
- 03. E
- 04. E
- 05. D
- 06. C
- 07. C
- 08. E
- 09. D
- 10. C
- 11. B
- 12. B
- 13. B
- 14. B
- 15. A
- 16. E
- 17. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. B
- 03. A
- 04. E
- 05. C
- 06. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Equações e Problemas

INTRODUÇÃO

Estudaremos, neste módulo, alguns métodos de resolução de equações e de sistemas de equações. Resolver uma equação significa determinar suas raízes, ou seja, os valores que tornam a sentença verdadeira. O conjunto formado por todas as raízes da equação é denominado **conjunto verdade** ou **conjunto solução**.

Por exemplo, 7 é raiz da equação $2x + 1 = 15$, pois $2 \cdot 7 + 1 = 15$ é uma sentença verdadeira.

EQUAÇÃO DO 1º GRAU

Chamamos de equação do 1º grau a toda sentença da forma $ax + b = 0$, em que **a** e **b** são os coeficientes e $a \neq 0$.

Dessa forma, temos que:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$$

O conjunto solução é, então, $S = -\frac{b}{a}$.

EQUAÇÃO TIPO PRODUTO OU QUOCIENTE NULO

Para resolvermos uma equação do tipo a.b = 0, lembremos que, se a.b = 0, então a = 0 ou b = 0.

Exemplo:

$$(2x+1).(x-3) = 0 \qquad \begin{array}{c} 2x+1=0 \\ \text{ou} \\ x-3=0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{array}$$

Portanto, $S = -\frac{1}{2}, 3$.

Para resolvermos uma equação do tipo $\frac{a}{b} = 0$, lembremos que, para o quociente ser nulo, devemos ter a = 0 e $b \neq 0$.

Exemplo:

$$\frac{(3x+4).(x-1)}{x^2-1} = 0 \qquad \begin{array}{c} 3x+4=0 \\ \text{ou} \\ x-1=0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x = -\frac{4}{3} \\ \text{ou} \\ \cancel{x=1}, \text{ pois } x^2-1 \neq 0 \end{array}$$

Portanto, $S = -\frac{4}{3}$.

EQUAÇÃO DO 2º GRAU

Chamamos de equação do 2º grau a toda sentença que pode ser reduzida a $ax^2 + bx + c = 0$, em que **a**, **b** e **c** são coeficientes e $a \neq 0$.

A resolução desse tipo de equação é dada pela Fórmula de Bhaskara:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac}$$

Demonstração:

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$

$ax^2 + bx = -c$

Multiplicando os dois membros dessa última igualdade por 4a, tem-se:

$ax^2 + bx = -c \Leftrightarrow$

$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

Somando, agora, b^2 aos dois membros da igualdade, obtém-se:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

Para $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, tem-se:

$(2ax + b)^2 = \Delta \Leftrightarrow$

$2ax + b = \pm\sqrt{\Delta} \Leftrightarrow$

$2ax = -b \pm \sqrt{\Delta} \Leftrightarrow$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Discussão do número de raízes

A quantidade de raízes reais de uma equação do 2º grau depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado discriminante.

Se $\Delta < 0$, a equação não admite raízes reais.

Se $\Delta = 0$, a equação admite duas raízes reais e iguais.

Se $\Delta > 0$, a equação admite duas raízes reais e distintas.

EQUAÇÕES INCOMPLETAS

1ª) b ≠ 0 e c = 0

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$

$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow$

$$x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ ax + b = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{0, -\dfrac{b}{a}\right\}$.

Exemplo:

$2x^2 + 3x = 0 \Rightarrow$

$$x(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 2x + 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Portanto, $S = \left\{0, -\dfrac{3}{2}\right\}$.

2ª) b = 0 e c ≠ 0

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 = -\dfrac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\dfrac{c}{a}}$

Portanto, $S = \left\{-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right\}$, se $-\dfrac{c}{a} > 0$.

Se $-\dfrac{c}{a} < 0$, então não existe raiz real, e $S = \varnothing$.

Exemplos:

1º) $2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Portanto, $S = \{-2, 2\}$.

2º) $2x^2 + 8 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -8 \Rightarrow$

$x^2 = -4 \Rightarrow$

$x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$

Portanto, $S = \varnothing$.

3ª) b = 0 e c = 0

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Portanto, $S = \{0\}$.

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES

Sendo $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$ as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \neq 0$, vamos calcular $x_1 + x_2$ e $x_1.x_2$.

i) $x_1 + x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$

Portanto, a soma das raízes é dada por:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}}$$

ii) $x_1.x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{(2a)^2} \Rightarrow$

$x_1.x_2 = \dfrac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

Portanto, o produto das raízes é dado por:

$$\boxed{x_1.x_2 = \dfrac{c}{a}}$$

Exemplo:

Vamos determinar **k** a fim de que uma das raízes da equação $x^2 - 5x + (k + 3) = 0$ seja igual ao quádruplo da outra. Logo:

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = 5$ (I)

$x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow x_1.x_2 = k + 3$ (II)

Por hipótese, $x_1 = 4x_2$. (III)

Assim, substituindo (III) em (I):

$4x_2 + x_2 = 5 \Rightarrow$

$x_2 = 1$ e $x_1 = 4$

Daí, de (II), temos:

$4 . 1 = k + 3 \Rightarrow k = 1$

SISTEMA DE EQUAÇÕES

A solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas, **x** e **y**, é qualquer par ordenado de valores (x, y) que satisfaz a ambas as equações.

Observe que o par ordenado (8, 1) é solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Métodos de resolução de sistemas

Substituição

Esse método consiste em isolar uma das incógnitas numa das equações e em substituir a expressão encontrada na outra equação.

Exemplo:

Resolver o sistema $\begin{matrix} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{matrix}$.

Pelo método da substituição, escolhemos, por exemplo, a equação x + y = 7, e vamos isolar a incógnita **x**. Logo:

$x + y = 7 \Leftrightarrow$

$x = 7 - y$

Agora, substituindo **x** por 7 – y na equação x – y = 3, temos:

$x - y = 3 \Leftrightarrow 7 - y - y = 3 \Leftrightarrow$

$-2y = -4 \Leftrightarrow y = 2$

Agora, substituindo **y** por 2 na equação x + y = 7, temos:

$x + y = 7 \Leftrightarrow$

$x + 2 = 7 \Leftrightarrow x = 5$

Portanto, S = {(5, 2)}.

Adição

Para resolver um sistema pelo método da adição, adicionamos membro a membro as equações de modo a anular uma das incógnitas.

Exemplo:

Resolver o sistema $\begin{matrix} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{matrix}$.

Pelo método da adição, adicionamos membro a membro as duas equações.

$$+\begin{matrix} x + y = 8 \\ x - y = 6 \end{matrix}$$
$$\overline{2x = 14} \Leftrightarrow x = 7$$

Substituindo 7 na equação x + y = 8, por exemplo, temos:

$7 + y = 8 \Leftrightarrow y = 1$

Portanto, S = {(7, 1)}.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFMG) Um estudante planejou fazer uma viagem de férias e reservou uma certa quantia em dinheiro para o pagamento de diárias. Ele tem duas opções de hospedagem: a Pousada **A**, com diária de R$ 25,00, e a Pousada **B**, com diária de R$ 30,00. Se escolher a Pousada **A**, em vez da Pousada **B**, ele poderá ficar três dias a mais de férias. Nesse caso, é correto afirmar que, para o pagamento de diárias, esse estudante reservou:

A) R$ 300,00.

B) R$ 600,00.

C) R$ 350,00.

D) R$ 450,00.

Resolução:

Considere os seguintes dados:

- Preço de uma diária da pousada A: R$ 25,00
- Preço de uma diária da pousada B: R$ 30,00
- Dias em que o estudante ficou na pousada A: **a**
- Dias em que o estudante ficou na pousada B: **b**

Agora, de acordo com o enunciado, temos que:

$a = b + 3$ (I)

Seja **x** a quantia reservada por este estudante para viajar, temos:

$x = a.25$ (II)

$x = b.30$ (III)

Agora, substituindo (I) em (II), temos:

$x = (b + 3).25$ (IV)

$x = b.30$ (III)

Substituindo (IV) em (III), temos:

$(b + 3).25 = b.30 \Rightarrow$

$25b + 75 = 30b \Rightarrow$

$5b = 75 \Rightarrow$

$b = 15$

Portanto, para descobrir o valor reservado por esse estudante, basta multiplicar o preço da diária da pousada **b**, pelo total de dias em que o estudante ficou nesta pousada. Desta forma, temos:

$x = 15 . 30 = 450$

Então o estudante tinha reservado um total de R$ 450,00.

MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UTF-PR–2015) A soma de três números consecutivos é igual a 36. O dobro do menor número somado com o quadrado do maior número é:

A) 181.
B) 191.
C) 221.
D) 321.
E) 421.

02. OPJS (IFSP–2016) Em uma sala de aula com 40 alunos, o dobro do número de meninas excede o triplo do número de meninos em 5 unidades. Sendo assim, nessa sala, o número de meninas supera o número de meninos em

A) 11 unidades.
B) 12 unidades.
C) 10 unidades.
D) 13 unidades.
E) 14 unidades.

03. 97DT (UFF-RJ) Colocando-se 24 litros de combustível no tanque de uma caminhonete, o ponteiro do marcador, que indicava $\frac{1}{4}$ do tanque, passou a indicar $\frac{5}{8}$. Determine a capacidade total do tanque de combustível da caminhonete. Justifique sua resposta.

04. H37Y (IFRS–2015) Em uma travessa, havia morangos que foram distribuídos entre três pessoas. A primeira pessoa recebeu $\frac{2}{5}$ dos morangos que havia, mais 6; a segunda pessoa recebeu $\frac{1}{4}$ dos morangos que havia, mais 5; e a terceira pessoa recebeu 10 morangos que restaram na travessa. Quantos morangos havia na travessa?

A) 60
B) 62
C) 65
D) 70
E) 76

05. (IFPE–2015) Num laboratório de pesquisa de biologia do IFPE, há baratas e aranhas que serão estudadas. Foram contadas por um estudante, ao todo, 10 cabeças e 76 patas. Sabendo que cada aranha tem oito patas, cada barata tem seis e que cada um dos animais tem apenas uma cabeça, quantas aranhas há nesse laboratório?

A) 8
B) 2
C) 6
D) 4
E) 10

06. 89QB (IFRS–2015) Um comerciante vende potes grandes a R$ 3,00 a unidade e potes menores a R$ 2,50 cada um. Hoje ele vendeu 62 potes, recebendo o valor total de R$ 171,00 pela venda. Quantos potes menores foram vendidos?

A) 28
B) 30
C) 32
D) 34
E) 36

07. 5QBS (UECE–2015) José quer comprar chocolates e pipocas com os R$ 11,00 de sua mesada. Tem dinheiro certo para comprar dois chocolates e três pacotes de pipocas, mas faltam-lhe dois reais para comprar três chocolates e dois pacotes de pipocas. Nestas condições, podemos afirmar corretamente que um pacote de pipocas custa

A) R$ 2,00.
B) R$ 1,60.
C) R$ 1,40.
D) R$ 1,20.

08. LR28 (FUVEST-SP) A soma e o produto das raízes da equação de segundo grau $(4m + 3n)x^2 - 5nx + (m - 2) = 0$ valem, respectivamente, $\frac{5}{8}$ e $\frac{3}{32}$. Então, m + n é igual a:

A) 9.
B) 8.
C) 7.
D) 6.
E) 5.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UESPI) Um grupo de amigos divide a conta de um restaurante. Se cada um contribui com R$ 13,00, faltam R$ 24,00; se cada um contribui com R$ 16,00, sobram R$ 12,00. Quantos são os amigos?

A) 18
B) 16
C) 14
D) 12
E) 10

02. QWTJ (UECE–2016) Num certo instante, uma caixa-d'água está com um volume de líquido correspondente a um terço de sua capacidade total. Ao retirarmos 80 litros de água, o volume de água restante na caixa corresponde a um quarto de sua capacidade total. Nesse instante, o volume de água, em litros, necessário para encher totalmente a caixa-d'água é:

A) 720.
B) 740.
C) 700.
D) 760.

03. MBØØ (UFSM-RS) Em uma determinada região do mar, foi contabilizado um total de 340 mil animais, entre lontras marinhas, ouriços do mar e lagostas. Verificou-se que o número de lontras era o triplo do de ouriços e que o número de lagostas excedia em 20 mil unidades o total de lontras e ouriços. Pode-se dizer que o número de ouriços dessa região é

A) 30 mil.
B) 35 mil.
C) 40 mil.
D) 45 mil.
E) 50 mil.

04. X2TZ (Albert Einstein–2016) Em virtude do aumento dos casos de diferentes tipos de gripe que têm assolado a cidade de São Paulo, preventivamente, alguns prontos--socorros têm distribuído máscaras cirúrgicas àqueles que buscam atendimento. Todas as máscaras de um lote foram distribuídas em quatro dias sucessivos de uma Campanha de Vacinação: no primeiro dia foi distribuído $\frac{1}{8}$ do total; no segundo, $\frac{1}{6}$ do total; no terceiro, o dobro da quantidade distribuída nos dois primeiros dias. Se no último dia tiverem sido distribuídas as 105 máscaras restantes, o total de máscaras de tal lote é um número compreendido entre

A) 700 e 900.
B) 500 e 700.
C) 300 e 500.
D) 100 e 300.

05. OAQR
(UEMA–2016) Um vendedor oferece suco e sanduíche natural nas praias de São Luís durante os fins de semana. Num determinado sábado, ele vendeu 50 sanduíches e 75 copos de suco, arrecadando R$ 300,00. Já, no domingo, totalizou R$ 305,00 com a venda de 65 sanduíches e 55 copos de suco.

A) Monte um sistema que represente a situação descrita acima para o fim de semana de vendas realizadas.

B) Encontre os valores de venda dos copos de suco e dos sanduíches, praticados no fim de semana.

06. DØKC
(IFSC-SC–2016) Considere que a equação do segundo grau $3x^2 + ax + d = 0$ tem como raízes os números 4 e −3.

Assim sendo, é correto afirmar que os valores de (a + d) e (a.d) são, respectivamente,

A) −1 e −12.
B) −39 e 108.
C) 33 e −108.
D) −3 e −36.
E) 1 e 12.

07. 52ER
(Unicamp-SP) Quarenta pessoas em excursão pernoitam em um hotel. Somados, os homens despendem R$ 2 400,00. O grupo de mulheres gasta a mesma quantia, embora cada uma tenha pago R$ 64,00 a menos que cada homem.

Denotando por **x** o número de homens do grupo, uma expressão que modela esse problema e permite encontrar tal valor é:

A) $2\,400x = (2\,400 + 64x)(40 - x)$
B) $2\,400(40 - x) = (2\,400 - 64x)x$
C) $2\,400x = (2\,400 - 64x)(40 - x)$
D) $2\,400(40 - x) = (2\,400 + 64x)x$

08. KP2Ø
(Cesgranrio) Se x_1 e x_2 são as raízes de $x^2 + 57x - 228 = 0$, então $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ vale:

A) $-\frac{1}{4}$.
B) $\frac{1}{4}$.
C) $-\frac{1}{2}$.
D) $\frac{1}{2}$.
E) $\frac{1}{6}$ ou $-\frac{1}{6}$.

09. JCPW
(UECE–2015) No final do mês de outubro, os estudantes Carlos e Artur haviam gastado respectivamente dois terços e três quintos de suas mesadas. Embora a mesada de Carlos seja menor, ele gastou R$ 8,00 a mais do que Artur. Se a soma dos valores das duas mesadas é R$ 810,00, o valor monetário da diferença entre os valores das duas mesadas é

A) R$ 25,00.
B) R$ 30,00.
C) R$ 35,00.
D) R$ 40,00.

10. QHAZ
(UFJF-MG) Para um *show* de um artista, foram vendidos ingressos para pista e camarote. Os ingressos foram vendidos antes do dia do *show* e no dia do *show*, sendo que os preços dos ingressos vendidos antes do dia do *show* tiveram 50% de desconto. Antes do dia do *show*, foram vendidos 300 ingressos para pista e 200 para camarote, arrecadando-se um total de R$ 22 000,00. No dia do *show*, foram vendidos 100 ingressos para pista e 200 para camarote, arrecadando-se um total de R$ 28 000,00. Qual foi o preço do ingresso, para a pista, vendido antes do dia do *show*?

A) R$ 40,00.
B) R$ 55,00.
C) R$ 67,00.
D) R$ 70,00.
E) R$ 82,00.

11.
(UEL-PR) Marlene confecciona tapetes artesanais de dois modelos, redondo e retangular. Num certo mês, ela confeccionou 60 tapetes e teve um lucro líquido de R$ 500,00. Sabendo que cada tapete redondo foi vendido por R$ 10,00, cada tapete retangular por R$ 12,00 e que Marlene gastou R$ 160,00 em materiais, quantos tapetes de cada modelo ela confeccionou nesse mês?

A) 20 redondos e 40 retangulares.
B) 30 redondos e 30 retangulares.
C) 40 redondos e 20 retangulares.
D) 10 redondos e 50 retangulares.
E) 50 redondos e 10 retangulares.

12. NYKJ
(IFCE) Os números reais **p**, **q**, **r** e **s** são tais que 2 e 3 são raízes da equação $x^2 + px + q = 0$, e −2 e 3 são raízes da equação $x^2 + rx + s = 0$. Nessas condições, as raízes da equação $x^2 + px + s = 0$ são:

A) −1 e 6.
B) −2 e 2.
C) −3 e 6.
D) 2 e 6.
E) −1 e 1.

13.
(UFPB) Um produtor de soja deseja transportar a produção da sua propriedade até um armazém distante 2 225 km. Sabe-se que 2 000 km devem ser percorridos por via marítima, 200 km por via férrea, e 25 km por via rodoviária. Ao fazer um levantamento dos custos, o produtor constatou que, utilizando transporte ferroviário, o custo por quilômetro percorrido é:

- 100 reais mais caro do que utilizando transporte marítimo.
- A metade do custo utilizando transporte rodoviário.

Com base nessas informações e sabendo que o custo total para o produtor transportar toda sua produção será de 700 000 reais, é correto afirmar que o custo, em reais, por quilômetro percorrido, no transporte marítimo é de:

A) 200.
B) 250.
C) 300.
D) 350.
E) 400.

MATEMÁTICA

14. 8XOM (UFPR) Durante o mês de dezembro, uma loja de cosméticos obteve um total de R$ 900,00 pelas vendas de um certo perfume. Com a chegada do mês de janeiro, a loja decidiu dar um desconto para estimular as vendas, baixando o preço desse perfume em R$ 10,00. Com isso, vendeu em janeiro 5 perfumes a mais do que em dezembro, obtendo um total de R$ 1 000,00 pelas vendas de janeiro. O preço pelo qual esse perfume foi vendido em dezembro era de:

A) R$ 55,00.
B) R$ 60,00.
C) R$ 65,00.
D) R$ 70,00.
E) R$ 75,00.

15. (UFJF-MG) Uma mesa de massa total medindo 32 kg foi construída utilizando-se dois materiais: madeira e aço. Na confecção desse objeto, foi gasto o mesmo valor na compra de cada material. Sabendo que o custo de cada quilograma de aço foi um terço do custo de cada quilograma de madeira, qual a quantidade de aço utilizada na construção dessa mesa?

16. 6ITD (UFTM-MG) Em uma balança de dois pratos de uma farmácia de manipulação, 10 comprimidos **A** estão perfeitamente equilibrados com 15 comprimidos **B**. Se um dos 10 comprimidos **A** for colocado no prato dos comprimidos **B** e um dos 15 comprimidos **B** for colocado no prato que anteriormente tinha somente comprimidos **A**, este ficará com 40 mg a menos que o outro. A relação entre as massas dos comprimidos **A** e **B**, em mg, é dada corretamente por:

A) B = A – 30
B) B = A – 10
C) A = B + 5
D) A = B + 20
E) A = B + 40

17. (FUVEST-SP) Em uma festa com **n** pessoas, em um dado instante, 31 mulheres se retiraram e restaram convidados na razão de 2 homens para cada mulher. Um pouco mais tarde, 55 homens se retiraram e restaram, a seguir, convidados na razão de 3 mulheres para cada homem. O número **n** de pessoas presentes inicialmente na festa era igual a:

A) 100.
B) 105.
C) 115.
D) 130.
E) 135.

18. TNWE (Mackenzie-SP) Em uma urna há bolas verdes e bolas amarelas. Se retirarmos uma bola verde da urna, então um quinto das bolas restantes é de bolas verdes. Se retirarmos nove bolas amarelas, em vez de retirar uma bola verde, então um quarto das bolas restantes é de bolas verdes. O número total de bolas que há inicialmente na urna é:

A) 21.
B) 36.
C) 41.
D) 56.
E) 61.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2018) Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio.

Quantos alunos compraram somente um bilhete?

A) 34
B) 42
C) 47
D) 48
E) 79

02. HPWF (Enem–2017) Em uma cantina, o sucesso de venda no verão são sucos preparados à base de polpa de frutas. Um dos sucos mais vendidos é o de morango com acerola, que é preparado com $\frac{2}{3}$ de polpa de morango e $\frac{1}{3}$ de polpa de acerola.

Para o comerciante, as polpas são vendidas em embalagens de igual volume. Atualmente, a embalagem da polpa de morango custa R$ 18,00 e a de acerola, R$ 14,70. Porém, está prevista uma alta no preço da embalagem da polpa de acerola no próximo mês, passando a custar R$ 15,30.

Para não aumentar o preço do suco, o comerciante negociou com o fornecedor uma redução no preço da embalagem da polpa de morango. A redução, em real, no preço da embalagem da polpa de morango deverá ser de

A) 1,20.
B) 0,90.
C) 0,60.
D) 0,40.
E) 0,30.

03. (Enem–2017) Para incentivar a reciclagem e evitar lixo espalhado durante as festas de final de ano, a prefeitura de uma cidade fez uma campanha com sorteio de prêmios. Para participar do sorteio, era necessário entregar cinco latinhas de alumínio ou três garrafas de vidro vazias para ter direito a um cupom. Um grupo de estudantes de uma escola trocou suas latinhas e garrafas de vidro e com isso adquiriram dez cupons; outro grupo trocou o triplo das garrafas e a mesma quantia de latinhas do primeiro grupo, conseguindo vinte cupons.

Quantas garrafas de vidro e quantas latinhas, respectivamente, o segundo grupo trocou?

A) 5 e 5
B) 15 e 5
C) 15 e 25
D) 45 e 25
E) 45 e 75

04. (Enem–2015) Uma padaria vende, em média, 100 pães especiais por dia e arrecada com essas vendas, em média, R$ 300,00. Constatou-se que a quantidade de pães especiais vendidos diariamente aumenta, caso o preço seja reduzido, de acordo com a equação

$$q = 400 - 100p$$

na qual **q** representa a quantidade de pães especiais vendidos diariamente e **p**, o seu preço em reais.

A fim de aumentar o fluxo de clientes, o gerente da padaria decidiu fazer uma promoção. Para tanto, modificará o preço do pão especial de modo que a quantidade a ser vendida diariamente seja a maior possível, sem diminuir a média de arrecadação diária na venda desse produto.

O preço **p**, em reais, do pão especial nessa promoção deverá estar no intervalo

A) R$ 0,50 $\leq$ p $<$ R$ 1,50.

B) R$ 1,50 $\leq$ p $<$ R$ 2,50.

C) R$ 2,50 $\leq$ p $<$ R$ 3,50.

D) R$ 3,50 $\leq$ p $<$ R$ 4,50.

E) R$ 4,50 $\leq$ p $<$ R$ 5,50.

05. (Enem–2015) A expressão "Fórmula de Young" é utilizada para calcular a dose infantil de um medicamento, dada a dose do adulto:

$$\text{dose de criança} = \frac{\text{idade da criança (em anos)}}{\text{idade da criança (em anos)} + 12} \cdot \text{dose de adulto}$$

Uma enfermeira deve administrar um medicamento **X** a uma criança inconsciente, cuja dosagem de adulto é de 60 mg. A enfermeira não consegue descobrir onde está registrada a idade da criança no prontuário, mas identifica que, algumas horas antes, foi administrada a ela uma dose de 14 mg de um medicamento **Y**, cuja dosagem de adulto é de 42 mg. Sabe-se que a dose da medicação **Y** administrada à criança estava correta.

Então, a enfermeira deverá ministrar uma dosagem do medicamento **X**, em miligramas, igual a:

A) 15.
B) 20.
C) 30.
D) 36.
E) 40.

06. (Enem) Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.

A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era

A) R$ 166,00.
B) R$ 156,00.
C) R$ 84,00.
D) R$ 46,00.
E) R$ 24,00.

07. (Enem) Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a **y** centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com **N** unidades e, na caixa, é especificada a área máxima **S** que pode ser coberta pelas **N** placas.

Devido a uma demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta **S** não fosse alterada.

A quantidade **X** de placas do novo modelo, em cada nova caixa, será igual a:

A) $\frac{N}{9}$
B) $\frac{N}{6}$
C) $\frac{N}{3}$
D) 3N
E) 9N

08. (Enem) Na aferição de um novo semáforo, os tempos são ajustados de modo que, em cada ciclo completo (verde-amarelo-vermelho), a luz amarela permaneça acesa por 5 segundos, e o tempo em que a luz verde permaneça acesa seja igual a $\frac{2}{3}$ do tempo em que a luz vermelha fica acesa. A luz verde fica acesa, em cada ciclo, durante **X** segundos e cada ciclo dura **Y** segundos. Qual é a expressão que representa a relação entre **X** e **Y**?

A) $5X - 3Y + 15 = 0$

B) $5X - 2Y + 10 = 0$

C) $3X - 3Y + 15 = 0$

D) $3X - 2Y + 15 = 0$

E) $3X - 2Y + 10 = 0$

09. (Enem) A capacidade mínima, em BTU/h, de um aparelho de ar-condicionado, para ambientes sem exposição ao Sol, pode ser determinada da seguinte forma:

- 600 BTU/h por m², considerando-se até duas pessoas no ambiente;
- para cada pessoa adicional nesse ambiente, acrescentar 600 BTU/h;
- acrescentar mais 600 BTU/h para cada equipamento eletrônico em funcionamento no ambiente.

Será instalado um aparelho de ar-condicionado em uma sala sem exposição ao Sol, de dimensões 4 m x 5 m, em que permaneçam quatro pessoas e que possua um aparelho de televisão em funcionamento.

A capacidade mínima, em BTU/h, desse aparelho de ar-condicionado deve ser:

A) 12 000.

B) 12 600.

C) 13 200.

D) 13 800.

E) 15 000.

10. (Enem) Desde 2005, o Banco Central não fabrica mais a nota de R$ 1,00 e, desde então, só produz dinheiro nesse valor em moedas. Apesar de ser mais caro produzir uma moeda, a durabilidade do metal é 30 vezes maior que a do papel. Fabricar uma moeda de R$ 1,00 custa R$ 0,26, enquanto uma nota custa R$ 0,17; entretanto, a cédula dura de oito a onze meses.

Disponível em: <http://noticias.r7.com>.
Acesso em: 26 abr. 2010.

Com R$ 1 000,00 destinados a fabricar moedas, o Banco Central conseguiria fabricar, aproximadamente, quantas cédulas a mais?

A) 1 667
B) 2 036
C) 3 846
D) 4 300
E) 5 882

11. (Enem) Uma escola recebeu do governo uma verba de R$ 1 000,00 para enviar dois tipos de folhetos pelo correio. O diretor da escola pesquisou que tipos de selos deveriam ser utilizados. Concluiu que, para o primeiro tipo de folheto, bastava um selo de R$ 0,65 enquanto para folhetos do segundo tipo seriam necessários três selos, um de R$ 0,65, um de R$ 0,60 e um de R$ 0,20. O diretor solicitou que se comprassem selos de modo que fossem postados exatamente 500 folhetos do segundo tipo e uma quantidade restante de selos que permitisse o envio do máximo possível de folhetos do primeiro tipo. Quantos selos de R$ 0,65 foram comprados?

A) 476
B) 675
C) 923
D) 965
E) 1 538

12. (Enem) O salto triplo é uma modalidade do atletismo em que o atleta dá um salto em um só pé, uma passada e um salto, nessa ordem. Sendo que o salto com impulsão em um só pé será feito de modo que o atleta caia primeiro sobre o mesmo pé que deu a impulsão; na passada ele cairá com o outro pé, do qual o salto é realizado.

Disponível em: <www.cbat.org.br> (Adaptação).

Um atleta da modalidade salto triplo, depois de estudar seus movimentos, percebeu que, do segundo para o primeiro salto, o alcance diminuía em 1,2 m, e, do terceiro para o segundo salto, o alcance diminuía 1,5 m. Querendo atingir a meta de 17,4 m nessa prova e considerando os seus estudos, a distância alcançada no primeiro salto teria de estar entre:

A) 4,0 m e 5,0 m.
B) 5,0 m e 6,0 m.
C) 6,0 m e 7,0 m.
D) 7,0 m e 8,0 m.
E) 8,0 m e 9,0 m.

13. (Enem) Na cidade de João e Maria, haverá *shows* em uma boate. Pensando em todos, a boate propôs pacotes para que os fregueses escolhessem o que seria melhor para si.
Pacote 1: taxa de 40 reais por *show*.
Pacote 2: taxa de 80 reais mais 10 reais por *show*.
Pacote 3: taxa de 60 reais para 4 *shows*, e 15 reais por cada *show* a mais.
João assistirá a 7 *shows* e Maria, a 4. As melhores opções para João e Maria são, respectivamente, os pacotes

A) 1 e 2.
B) 2 e 2.
C) 3 e 1.
D) 2 e 1.
E) 3 e 3.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

○ 01. B
○ 02. C
○ 03. 64 L
○ 04. A
○ 05. A
○ 06. B
○ 07. C
○ 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

○ 01. D
○ 02. A
○ 03. C
○ 04. A
05.
○ A) $\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 13x + 11y = 61 \end{cases}$
○ B) Sanduíches: R$ 3,00
Copo de suco: R$ 2,00

○ 06. B
○ 07. C
○ 08. B
○ 09. B
○ 10. A
○ 11. B
○ 12. A
○ 13. C
○ 14. B
○ 15. $m_a = 24$ kg
○ 16. D
○ 17. D
○ 18. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

○ 01. D
○ 02. E
○ 03. D
○ 04. A
○ 05. B
○ 06. B
○ 07. A
○ 08. B
○ 09. D
○ 10. B
○ 11. C
○ 12. D
○ 13. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Função

CONCEITOS BÁSICOS

Produto cartesiano

O produto cartesiano A × B de dois conjuntos **A** e **B** não vazios é definido como o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), nos quais **x** pertence a **A**, e **y** pertence a **B**.

$$\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}}$$

Exemplo:

Sejam os conjuntos A = {2, 3, 4} e B = {1, 5}. Obter os produtos cartesianos A × B, A^2 e B × A.

$A \times B = \{(2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (4, 1), (4, 5)\}$

$A^2 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$

$B \times A = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$

Relação

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, não vazios, definimos uma relação **R** de **A** em **B** como um subconjunto de A × B.

Considere A = {–1, 0, 1, 2} e B = {1, 2}.

$A \times B = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$

Assim, duas relações de **A** em **B** poderiam ser:

$R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x\} = \{(1, 1), (2, 2)\}$

$R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x + 1\} = \{(0, 1), (1, 2)\}$

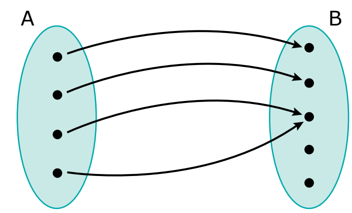
DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO

Dados dois conjuntos, **A** e **B**, não vazios, uma relação **f** de **A** em **B** é função de **A** em **B** se, e somente se, para todo $x \in A$ se associa a um único $y \in B$, tal que $(x, y) \in f$.

Sistema de notação
A função **f** de **A** em **B** pode ser indicada por $f: A \rightarrow B$.

Esquematicamente, temos:

$f: A \rightarrow B$



Em outras palavras, cada um dos elementos do conjunto **A** está relacionado a um único elemento do conjunto **B**.

No diagrama anterior, definimos o seguinte:

i) O conjunto **A** é o domínio da função.

ii) O conjunto **B** é o contradomínio da função.

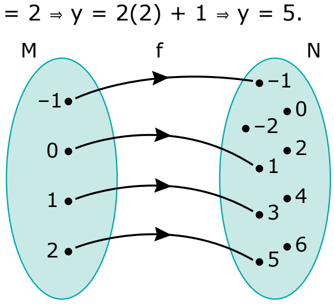
iii) Os elementos do contradomínio que estão relacionados, por setas, com os elementos de **A** formam o conjunto imagem da função.

FUNÇÕES DEFINIDAS POR FÓRMULAS

Algumas funções têm a sua lei de correspondência definida por fórmulas. Por exemplo, sejam dois conjuntos, M = {–1, 0, 1, 2} e N = {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}. Seja **f** uma função que associa a cada elemento de **M** o seu dobro, acrescido de uma unidade. Denotando por **x** um elemento genérico do domínio **M** e denotando por **y** a sua correspondente imagem no conjunto **N**, temos a fórmula:

$$y = 2x + 1, x \in M$$

- Para $x = -1 \Rightarrow y = 2(-1) + 1 \Rightarrow y = -1$.
- Para $x = 0 \Rightarrow y = 2(0) + 1 \Rightarrow y = 1$.
- Para $x = 1 \Rightarrow y = 2(1) + 1 \Rightarrow y = 3$.
- Para $x = 2 \Rightarrow y = 2(2) + 1 \Rightarrow y = 5$.



Dizemos que **x** é a variável independente, e **y**, a variável dependente. Assim, a variável **y** é dita função de **x**, e escrevemos y = f(x).

DOMÍNIO DE UMA FUNÇÃO

Determinar o domínio de uma função significa saber para quais valores de **x** a expressão matemática **y** está definida, ou seja, quais valores podem ser atribuídos à variável **x** de modo a não violar as condições de existência da expressão matemática.

Exemplos:

1º) Na função y = 3x + 7, para qualquer valor real de **x** existe uma imagem **y** correspondente. Logo, o domínio dessa função é D = $\mathbb{R}$.

2º) Na função $y = \dfrac{1}{x - 4}$, devemos observar que x – 4 é denominador de uma fração e, portanto, deve ser diferente de zero, ou seja, $x - 4 \neq 0$, portanto, $x \neq 4$. Então, o domínio dessa função é $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 4\}$.

3º) Na função $y = \sqrt{x - 5}$, devemos observar que x – 5 é o radicando de uma raiz quadrada. Esse radicando deve ser maior ou igual a zero, ou seja, $x - 5 \geq 0$, portanto, $x \geq 5$. Então, o domínio dessa função deve ser $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5\}$.

GRÁFICOS DE FUNÇÕES

O gráfico de uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dado pelo conjunto de todos os pontos (x, y) do plano cartesiano tais que y = f(x). Seguem alguns exemplos de gráficos de funções:

Gráfico I

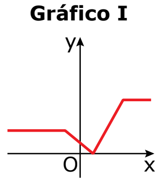


Gráfico II

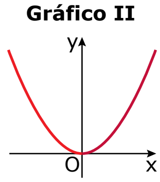


Gráfico III

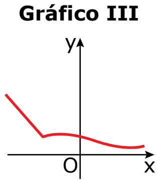
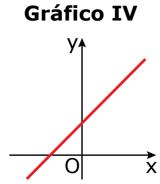


Gráfico IV



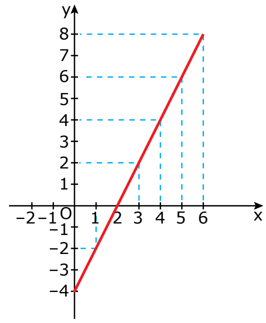
Exemplo:

Dada a função f: A $\to$ $\mathbb{R}$, na qual f(x) = 2x – 4 e A = [0, 6], representar o seu gráfico no plano cartesiano.

Vamos escolher alguns valores para **x** dentro do domínio **A** fornecido e substituí-los na expressão matemática dada. Com os resultados, temos a seguinte tabela:

x	y
0	–4
1	–2
2	0
3	2
4	4
5	6
6	8

Marcando esses pares (x, y) no plano cartesiano, obtemos o gráfico da função.



RECONHECIMENTO DO GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Observe os seguintes gráficos:

Gráfico I

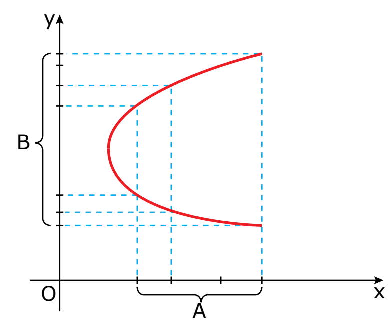
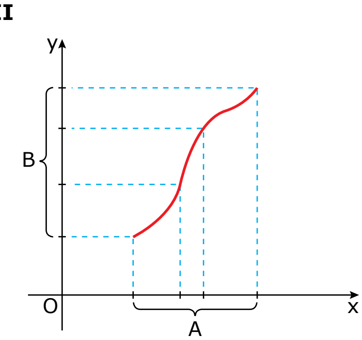


Gráfico II



Sejam **A** e **B** os intervalos numéricos destacados em cada gráfico.

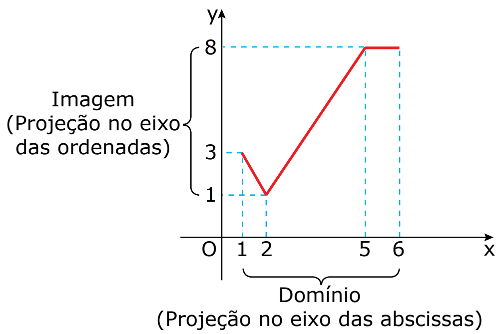
No gráfico I, existem elementos do conjunto **A** que estão relacionados com mais de um elemento do conjunto **B**. Portanto, tal gráfico não representa uma função de **A** em **B**.

No gráfico II, cada elemento de **A** está relacionado com um único elemento de **B**. Portanto, tal gráfico representa uma função de **A** em **B**.

De modo geral, para verificarmos se um gráfico representa uma função de **A** em **B**, basta traçarmos retas paralelas ao eixo Oy a partir dos elementos de **A**. Assim, se cada reta interceptar o gráfico em um único ponto, trata-se do gráfico de uma função.

DOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO A PARTIR DO SEU GRÁFICO

Considere o gráfico da função a seguir:



Observe que a função está definida para um intervalo limitado de valores de **x**, a saber, o intervalo [1, 6]. Esse intervalo, que é a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo das abscissas, é o domínio da função. Os correspondentes valores de **y** são dados pelo intervalo [1, 8]. Esse intervalo, que é a projeção ortogonal do gráfico sobre o eixo das ordenadas, é a imagem da função.

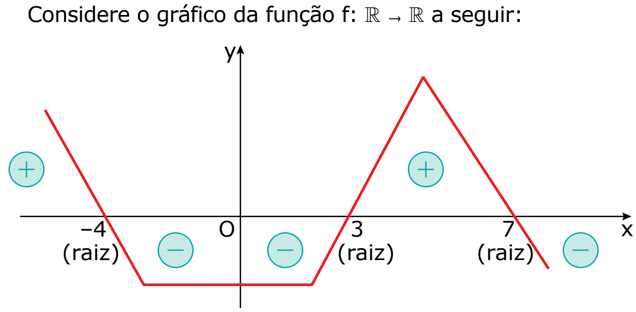
Portanto, temos domínio: D = [1, 6] e imagem: Im = [1, 8].

ESTUDO DO SINAL DE UMA FUNÇÃO

Estudar o sinal de uma função significa determinar para quais valores de **x** os correspondentes valores de **y** são negativos, nulos ou positivos.

Exemplo:

Considere o gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a seguir:



Analisando o gráfico anterior, temos:

i) Para $-4 < x < 3$ ou $x > 7$, os valores correspondentes de **y** são negativos. Apresentamos esse fato com os sinais de menos indicados no gráfico.

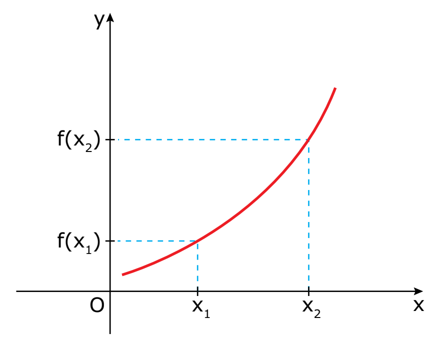
ii) Para $x = -4$, $x = 3$ ou $x = 7$, a ordenada correspondente é nula. Esses pontos são chamados raízes ou zeros da função.

iii) Para $x < -4$ ou $3 < x < 7$, os valores correspondentes de **y** são positivos. Apresentamos esse fato com os sinais de mais indicados no gráfico.

FUNÇÃO CRESCENTE, DECRESCENTE E CONSTANTE

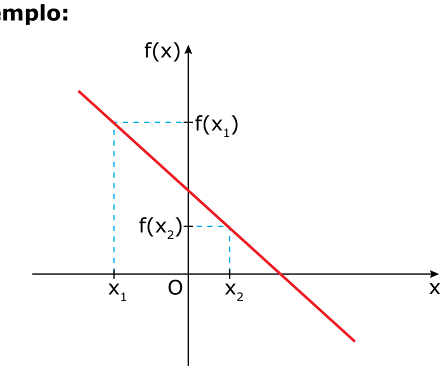
i) **Função crescente:** Uma função é dita crescente quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, tais que $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) < f(x_2)$. Em outras palavras, quando os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** também aumentam.

Exemplo:



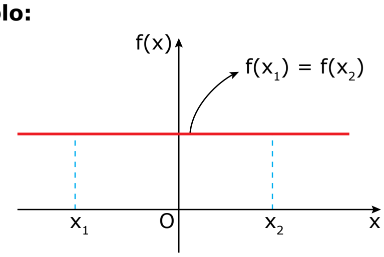
ii) **Função decrescente:** Uma função é dita decrescente quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, tais que $x_1 < x_2$, temos $f(x_1) > f(x_2)$. Em outras palavras, quando os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** diminuem.

Exemplo:



iii) **Função constante:** Uma função é dita constante quando, para quaisquer valores x_1 e x_2 do seu domínio, temos $f(x_1) = f(x_2)$. Em outras palavras, quando os valores de **x** aumentam, os valores correspondentes de **y** permanecem iguais.

Exemplo:

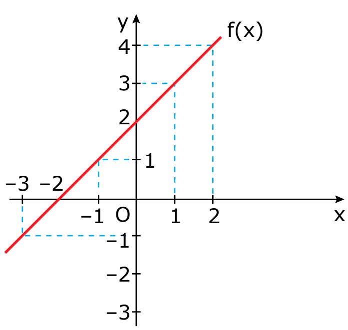


GRÁFICOS: TRANSLAÇÕES E REFLEXÕES

Em várias situações, é possível efetuar a construção de gráficos mais complexos a partir de translações ou reflexões de gráficos de funções mais simples.

1) Tomemos como exemplo o gráfico da função f(x) = x + 2, com domínio ℝ.

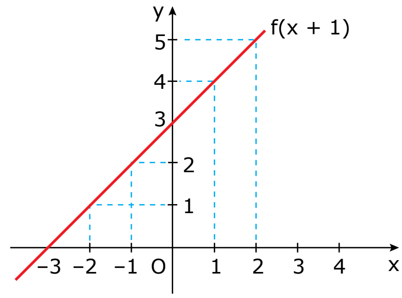
x	f(x) = x + 2
−3	−1
−2	0
−1	1
0	2
1	3
2	4



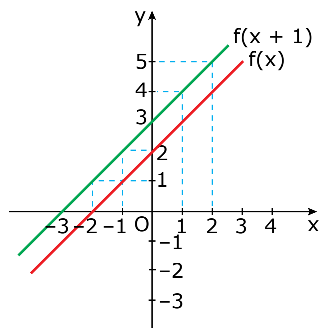
Como seria o gráfico da função f(x + 1) para todo **x** real? Para responder a essa pergunta, tomemos os seguintes valores tabelados:

x	f(x + 1) = (x + 1) + 2 = x + 3
−3	0
−2	1
−1	2
0	3
1	4
2	5

O gráfico correspondente é:



Observe que o gráfico da função f(x + 1) equivale ao gráfico da função f(x) deslocado uma unidade para a esquerda. Portanto, o gráfico de f(x + 1) é obtido pela translação de uma unidade para a esquerda do gráfico de f(x).

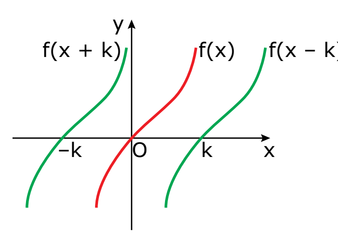


De maneira geral, seja o gráfico de uma função f(x) com domínio ℝ e **k** um número real positivo. Assim, temos:

i) O gráfico da função f(x + k) é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades **para a esquerda.**

ii) O gráfico da função f(x − k) é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades **para a direita.**

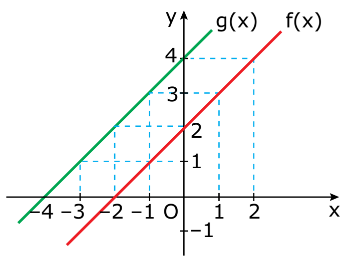
Exemplo:



2) Considere, agora, o gráfico da função f(x) = x + 2 para todo **x** real. Seja uma função g: ℝ → ℝ dada por g(x) = 2 + f(x). Assim, temos:

x	f(x) = x + 2	g(x) = 2 + f(x)
−3	−1	1
−2	0	2
−1	1	3
0	2	4
1	3	5
2	4	6

Na figura a seguir, encontram-se representados os gráficos das funções f(x) e g(x) em um mesmo sistema cartesiano.



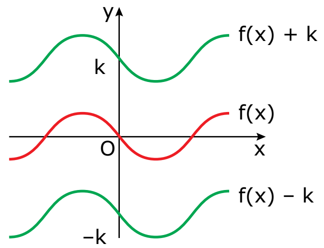
Observe que o gráfico de g(x) é obtido pela translação do gráfico de f(x) duas unidades para cima.

Generalizando, seja o gráfico de uma função f(x) com domínio ℝ e **k** um número real positivo. Assim, temos:

i) O gráfico da função g(x) = f(x) + k é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades **para cima**.

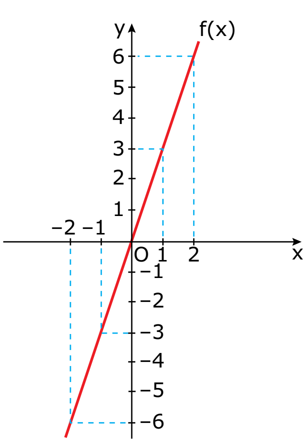
ii) O gráfico da função g(x) = f(x) – k é obtido pelo deslocamento do gráfico de f(x) de **k** unidades **para baixo**.

Exemplo:



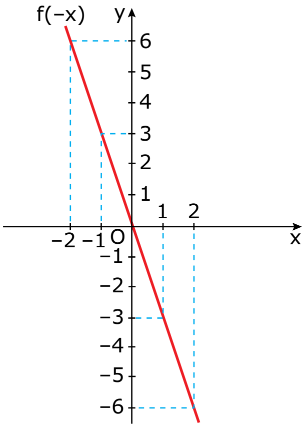
3) Considere, a seguir, o gráfico da função f(x) = 3x com domínio ℝ.

x	f(x) = 3x
–2	–6
–1	–3
0	0
1	3
2	6



Agora, vamos construir o gráfico da função f(–x) para todo **x** real.

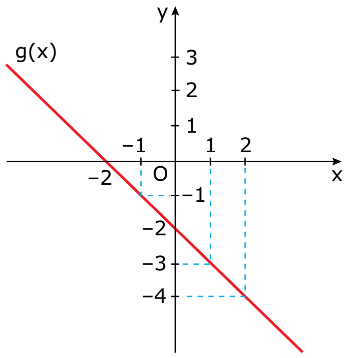
x	f(–x) = 3(–x) = –3x
–2	6
–1	3
0	0
1	–3
2	–6



Observe que o gráfico da função f(–x) é obtido por uma **reflexão**, em relação ao eixo **y**, do gráfico da função f(x).

4) Novamente, vamos utilizar o exemplo da função f(x) = x + 2, cujo gráfico foi representado no item 1. A partir desse exemplo, vamos construir o gráfico da função g(x) = –f(x).

x	f(x) = x + 2	g(x) = –f(x)
–2	0	0
–1	1	–1
0	2	–2
1	3	–3
2	4	–4



Observe que o gráfico da função –f(x) é obtido por uma **reflexão**, em relação ao eixo **x**, do gráfico da função f(x).

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFPA) Sejam os conjuntos A = {1, 2} e B = {0, 1, 2}. Qual das afirmativas a seguir é verdadeira?

A) f: $x \to 2x$ é uma função de **A** em **B**.

B) f: $x \to x + 1$ é uma função de **A** em **B**.

C) f: $x \to x^2 - 3x + 2$ é uma função de **A** em **B**.

D) f: $x \to x^2 - x$ é uma função de **B** em **A**.

E) f: $x \to x - 1$ é uma função de **B** em **A**.

02. 4IML (CEFET-MG) Seja a função real $f(x) = \dfrac{1}{2 + \dfrac{2}{3 + \dfrac{3}{4 + x}}}$, $x \neq -4$. O valor de f(5) é uma fração racional equivalente a:

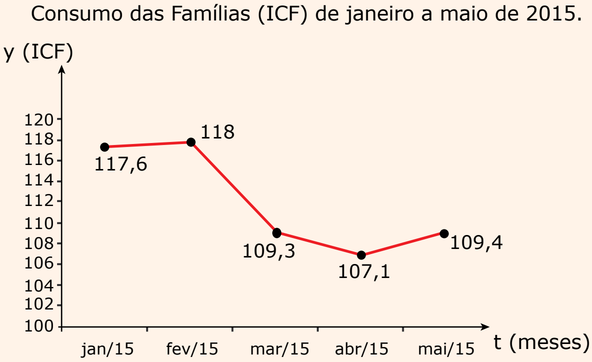
A) $\dfrac{2}{5}$.

B) $\dfrac{5}{13}$.

C) $\dfrac{5}{2}$.

D) $\dfrac{13}{5}$.

03. (CEFET-MG–2016) O gráfico a seguir mostra a Intenção de Consumo das Famílias (ICF) de janeiro a maio de 2015.



Disponível em: <http://www.dm.com.br/economia/2015/05/comercio-esperafaturar-mais-no-mes-dos-namorados-revela-presidente-da-fecomercio.html> Acesso em: 28 ago. 2015 (Adaptação).

Se este gráfico representa uma função **f** que mostra o valor da ICF em função do tempo, de janeiro a maio, então seu conjunto imagem é:

A) Im{f} = [107,1; 118]

B) Im{f} = [jan/15; mai/15]

C) Im{f} = {107,1; 109,3; 117,6; 118}

D) Im{f} = {jan/15; fev/15; mar/15; abr/15; mai/15}

04. 1IQJ (UFF-RJ) Em Mecânica Clássica, a norma **G** do campo gravitacional gerado por um corpo de massa **m** em um ponto a uma distância d > 0 do corpo é diretamente proporcional a **m** e inversamente proporcional ao quadrado de **d**.

Seja G = f(d) a função que descreve a norma **G** do campo gravitacional, gerado por um corpo de massa constante **m** em um ponto a uma distância d > 0 desse corpo.

É correto afirmar que f(2d) é igual a:

A) $\dfrac{f(d)}{4}$

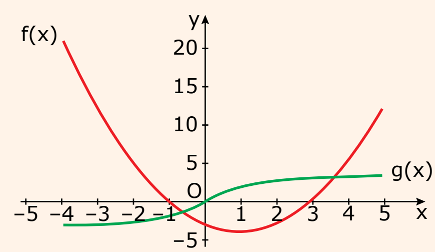
B) $\dfrac{f(d)}{2}$

C) 4f(d)

D) 2f(d)

E) f(d)

05. RP8V (Unesp) Os gráficos de duas funções f(x) e g(x), definidas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, estão representados no mesmo plano cartesiano.



No intervalo [–4, 5], o conjunto solução da inequação f(x).g(x) < 0 é:

A) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$

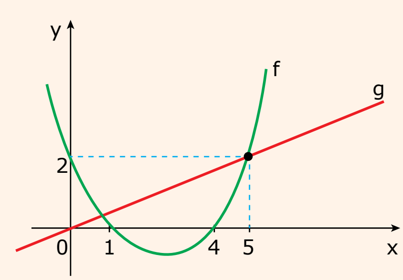
B) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } 3 < x \leq 5\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < -1 \text{ ou } 0 < x < 3\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 0\}$

E) $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < -1 \text{ ou } 3 < x < 5\}$

06. ZL21 (CEFET-MG–2016) Na figura a seguir, estão representados os gráficos de duas funções reais, **f** e **g**, com domínios reais. Para cada $x \in \mathbb{R}$, a função **h** é definida por h(x) = f(x).g(x).



Nessas condições, o valor de h(5) é igual a:

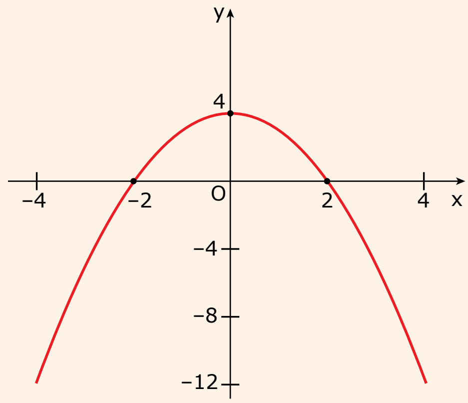
A) 0.

B) 4.

C) 10.

D) 25.

07. GDEM (PUC RS) A função real **f** é definida por $f(x) = \sqrt{g(x)}$. A representação gráfica de **g** está na figura a seguir:



Determine o domínio da função **f**.

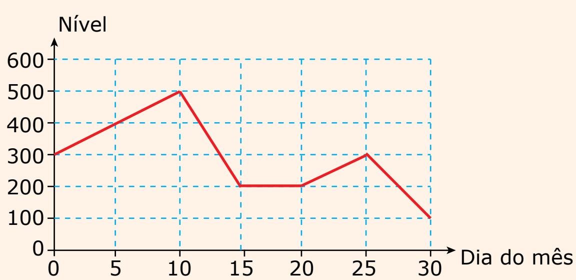
08. 7HW6 (UFMG) Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $f(5x) = 5f(x)$ para todo número real **x**. Se $f(25) = 75$, então o valor de $f(1)$ é:

A) 3.
B) 5.
C) 15.
D) 25.
E) 45.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

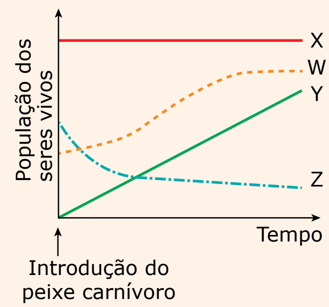
01. (Insper-SP) O gráfico a seguir mostra o nível de água no reservatório de uma cidade, em centímetros.



O período do mês em que as variações diárias do nível do reservatório, independentemente se para enchê-lo ou esvaziá-lo, foram as maiores foi

A) nos dez primeiros dias.
B) entre o dia 10 e o dia 15.
C) entre o dia 15 e o dia 20.
D) entre o dia 20 e o dia 25.
E) nos últimos cinco dias.

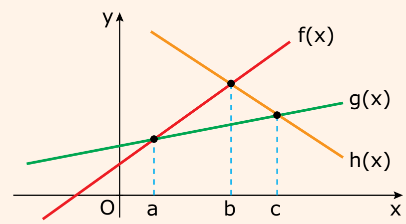
02. (UERJ) Em um ecossistema lacustre habitado por vários peixes de pequeno porte, foi introduzido um determinado peixe carnívoro. A presença desse predador provocou variação das populações de seres vivos ali existentes, conforme mostra o gráfico a seguir.



A curva que indica a tendência da variação da população de fitoplâncton nesse lago, após a introdução do peixe carnívoro, é a identificada por

A) W.
B) X.
C) Y.
D) Z.

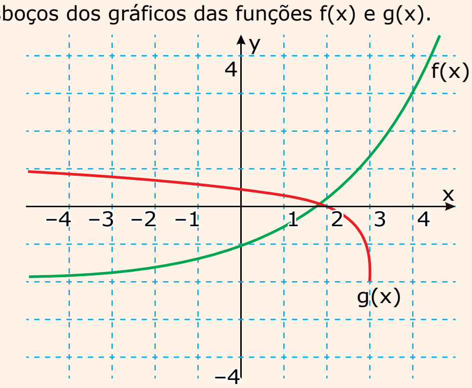
03. XNFJ (UFMG) Observe a figura.



Nessa figura, estão esboçados os gráficos das funções f(x), g(x) e h(x). A única afirmativa falsa é:

A) Para todo **x** tal que $x \leq a$ tem-se $g(x) \geq f(x)$.
B) Para todo **x** tal que $b \leq x \leq c$ tem-se $h(x) \geq g(x)$.
C) Para todo **x** tal que $a \leq x \leq c$ tem-se $h(x) \geq f(x)$.
D) Para todo **x** tal que $x \geq c$ tem-se $g(x) \geq h(x)$.

04. 32Q7 (UFSJ-MG) Na figura a seguir, estão representados os esboços dos gráficos das funções f(x) e g(x).

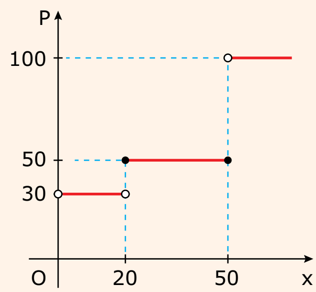


Sobre essas funções, é correto afirmar que

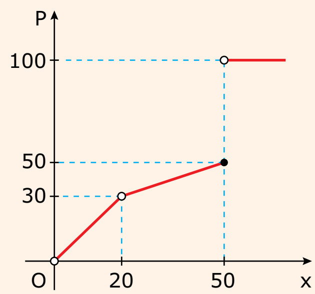
A) quando **x** assume valores cada vez maiores, g(x) assume valores cada vez maiores.
B) à medida que **x** assume valores cada vez maiores, g(x) assume valores cada vez menores.
C) à medida que **x** assume valores cada vez menores, f(x) se aproxima de zero.
D) quando **x** assume valores cada vez menores, f(x) assume valores próximos de zero.

05. (PUC-Campinas-SP) Numa certa cidade, as agências de correio cobram R\$ 0,30 na postagem de cartas até 20 g, exclusive; R\$ 0,50 se o peso variar de 20 g a 50 g e R\$ 1,00 se o peso for maior que 50 g. O gráfico da função que ao peso **x** da carta, em gramas, associa o preço **P** da postagem, em centavos, da carta é:

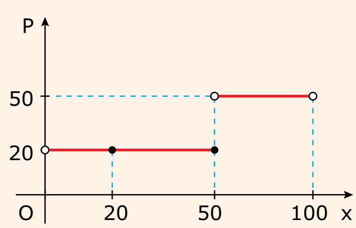
A)



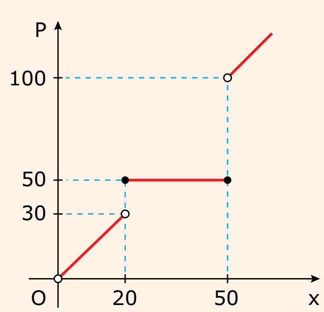
B)



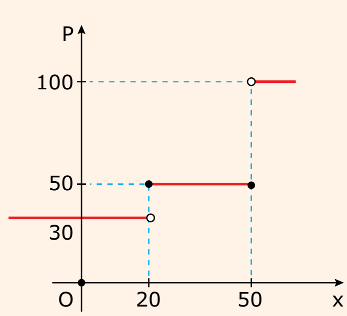
C)



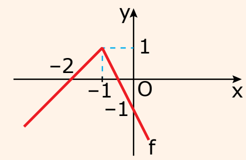
D)



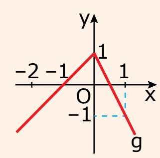
E)



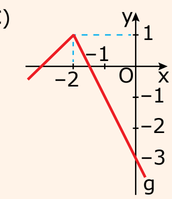
06. 5J9O (UFU-MG) Se **f** é uma função cujo gráfico é dado a seguir, então o gráfico da função **g**, tal que g(x) = f(x – 1), será dado por:



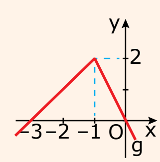
A)



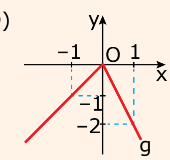
C)



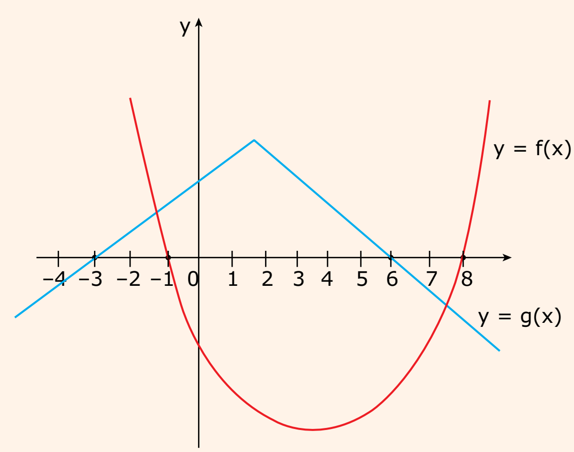
B)



D)



07. WQSØ (EsPCEx-SP–2017) Na figura estão representados os gráficos das funções reais **f** (quadrática) e **g** (modular) definidas em $\mathbb{R}$. Todas as raízes das funções **f** e **g** também estão representadas na figura.



Desenho ilustrativo fora de escala

Sendo $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, assinale a alternativa que apresenta os intervalos em que **h** assume valores negativos.

A)]–3, –1] U]6, 8]

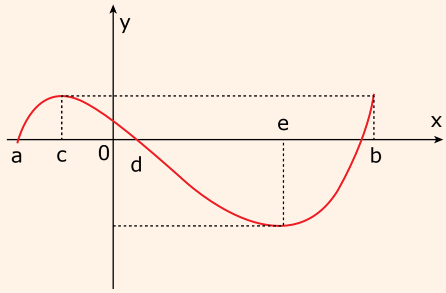
B)]–∞, –3[U]–1, 6[ ]8, + ∞[

C)]–∞, 2[U [4, + ∞[

D)]–∞, –3[U [–1, 2[U [7, + ∞[

E)]–3, –1] U [2, 4[U]6, 8]

08. (EsPCEx-SP) Na figura seguinte está representado o gráfico da função polinomial **f**, definida no intervalo real [a, b].



Desenho ilustrativo fora de escala

Com base nas informações fornecidas pela figura, podemos afirmar que:

A) **f** é crescente no intervalo [a, 0].

B) f(x) ≤ f(e) para todo **x** no intervalo [d, b].

C) f(x) ≤ 0 para todo **x** no intervalo [c, 0].

D) a função **f** é decrescente no intervalo [c, e].

E) se x_1 [a, c] e x_2 [d, e] então $f(x_1) < f(x_2)$.

09. WCM8 (Mackenzie-SP) Considere a função **f** tal que para todo **x** real tem-se $f(x + 2) = 3f(x) + 2^x$. Se $f(-3) = \frac{1}{4}$ e $f(-1) = a$, então o valor de a^2 é:

A) $\frac{25}{36}$.

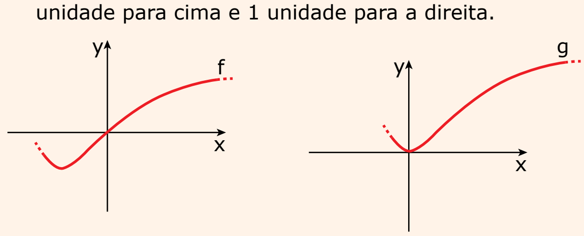
B) $\frac{36}{49}$.

C) $\frac{64}{100}$.

D) $\frac{16}{81}$.

E) $\frac{49}{64}$.

10. G33I (ESPM-RS) Na figura a seguir, o gráfico da função g(x) foi obtido pelo deslocamento do gráfico da função f(x) de 1 unidade para cima e 1 unidade para a direita.



Podemos concluir que:

A) g(x) = 1 + f(x)

B) g(x) = f(x + 1)

C) g(x) = 1 + f(x + 1)

D) g(x) = f(x − 1)

E) g(x) = 1 + f(x − 1)

11. QLTO (Mackenzie-SP) A função **f**, de domínio real mais amplo possível, é tal que $f(x) = \frac{ax + b - 5}{ax + 3b}$. Se f(3) não existe e f(−1) = 1, então o valor de $a^2 + b^2$ é

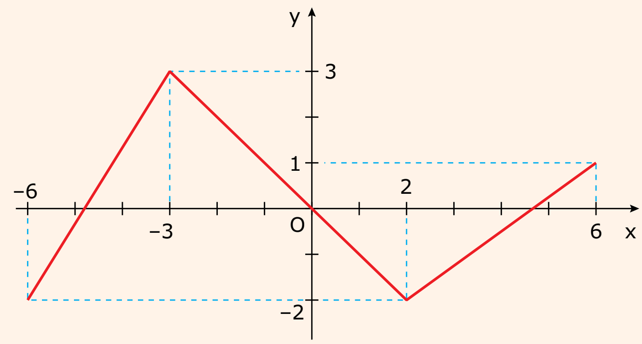
A) $\frac{25}{2}$.

B) $\frac{25}{4}$.

C) $\frac{5}{2}$.

D) $\frac{2}{25}$.

12. 4MM6 (UFMG) Na figura, está representado o gráfico da função y = f(x), cujo domínio é $\{x \in \mathbb{R}: -6 \leq x \leq 6\}$, e cuja imagem é $\{y \in \mathbb{R}: -2 \leq y \leq 3\}$.



Sendo g(x) = f(x) + 2 e h(x) = f(x + 2),

A) determine g(0) e h(0).

B) esboce os gráficos de y = g(x) e y = h(x).

C) determine os domínios das funções **g** e **h**.

13. BIGB (FUVEST-SP–2018) Considere a função real definida por

$$f(x) = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} - x.$$

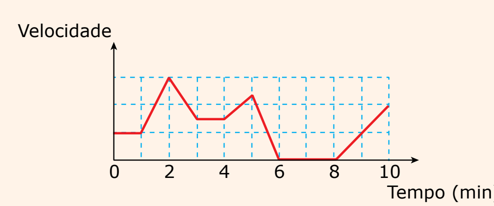
A) Qual é o domínio de **f**?

B) Encontre o(s) valor(es) de **x** para o(s) qual(is) f(x) = 0.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. SEPT (Enem–2017) Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

A) 4

B) 3

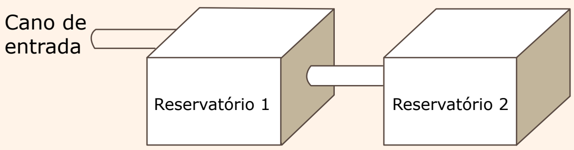
C) 2

D) 1

E) 0

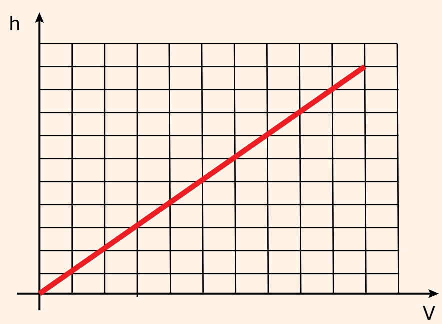
02. 1GOO

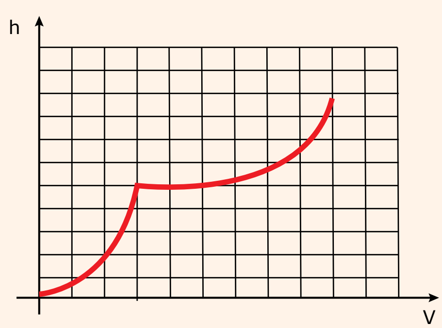
(Enem–2017) A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.

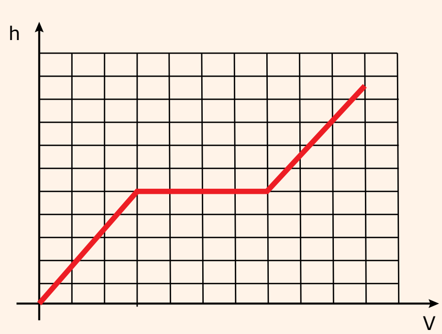


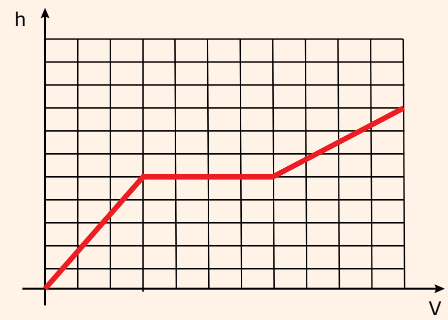
A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.

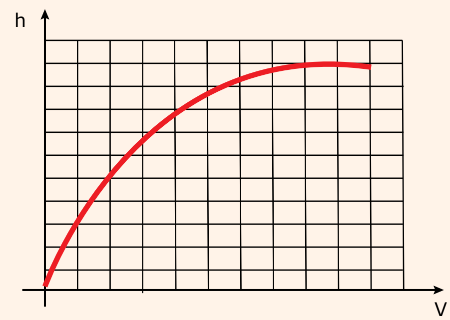
Qual dos gráficos melhor descreverá a altura **h** do nível da água no Reservatório 1, em função do volume **V** de água no sistema?

A) 

B) 

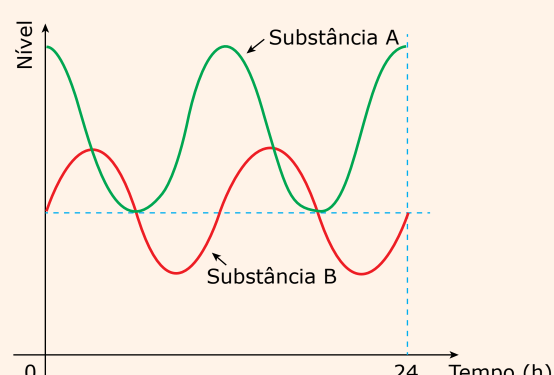
C) 

D) 

E) 

03. TKRM

(Enem–2016) Em um exame, foi feito o monitoramento dos níveis de duas substâncias presentes (A e B) na corrente sanguínea de uma pessoa, durante um período de 24 h, conforme o resultado apresentado na figura. Um nutricionista, no intuito de prescrever uma dieta para essa pessoa, analisou os níveis dessas substâncias, determinando que, para uma dieta semanal eficaz, deverá ser estabelecido um parâmetro cujo valor será dado pelo número de vezes em que os níveis de A e de B forem iguais, porém, maiores que o nível mínimo da substância A durante o período de duração da dieta.



Considere que o padrão apresentado no resultado do exame, no período analisado, se repita para os dias subsequentes.

O valor do parâmetro estabelecido pelo nutricionista, para uma dieta semanal, será igual a

A) 28.

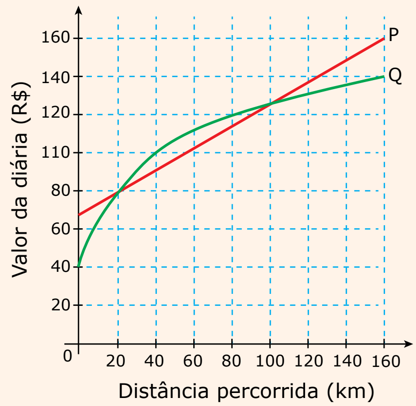
B) 21.

C) 2.

D) 7.

E) 14.

04. (Enem–2015) Atualmente existem diversas locadoras de veículos, permitindo uma concorrência saudável para o mercado, fazendo com que os preços se tornem acessíveis. Nas locadoras **P** e **Q**, o valor da diária de seus carros depende da distância percorrida, conforme o gráfico.



Disponível em: <sempretops.com>. Acesso em: 07 ago. 2012.

O valor pago na locadora **Q** é menor ou igual àquele pago nas locadoras **P** para distâncias, em quilômetros, presentes em qual(is) intervalo(s)?

A) De 20 a 100.

B) De 80 a 130.

C) De 100 a 160.

D) De 0 a 20 e de 100 a 160.

E) De 40 a 80 e de 130 a 160.

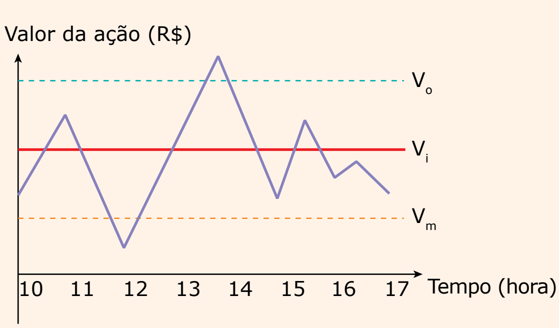
05. (Enem–2015) Um investidor inicia um dia com **x** ações de uma empresa. No decorrer desse dia, ele efetua apenas dois tipos de operações, comprar ou vender ações. Para realizar essas operações, ele segue estes critérios:

I. vende metade das ações que possui, assim que seu valor fica acima do valor ideal (V_i);

II. compra a mesma quantidade de ações que possui, assim que seu valor fica abaixo do valor mínimo (V_m);

III. vende todas as ações que possui, quando seu valor fica acima do valor ótimo (V_o);

O gráfico apresenta o período de operações e a variação do valor de cada ação, em reais, no decorrer daquele dia e a indicação dos valores ideal, mínimo e ótimo.



Quantas operações o investidor fez naquele dia?

A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7

06. (Enem) A temperatura **T** de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com **t** em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 °C. Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

A) 19,0

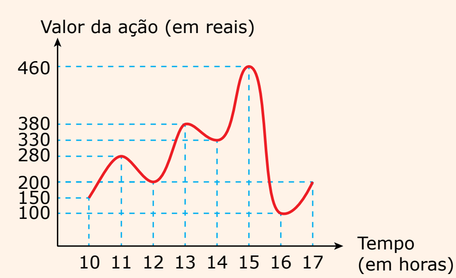
B) 19,8

C) 20,0

D) 38,0

E) 39,0

07. (Enem) O gráfico fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.



Nesse dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com a seguinte tabela.

Investidor	Hora da compra	Hora da venda
1	10:00	15:00
2	10:00	17:00
3	13:00	15:00
4	15:00	16:00
5	16:00	17:00

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. B
- 03. A
- 04. A
- 05. C
- 06. B
- 07. $-2 \leq x \leq 2$
- 08. A

Propostos

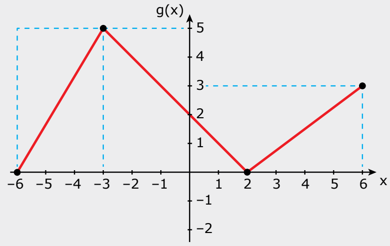
Acertei ______ Errei ______

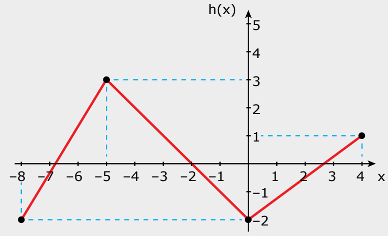
- 01. B
- 02. A
- 03. C
- 04. B
- 05. A
- 06. A
- 07. B
- 08. D
- 09. E
- 10. E
- 11. A

12.

A) g(0) = 2
h(0) = −2

B)





C) D(g) = [−6, 6]
D(h) = [−8, 4]

13.

A) D = [−1, 0[∪ [1, +∞[

B) $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. D
- 03. E
- 04. D
- 05. B
- 06. D
- 07. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

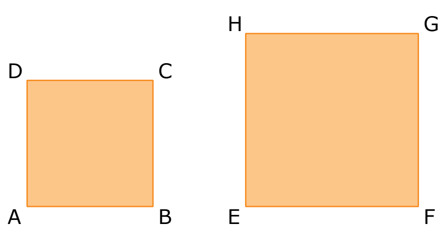
Semelhança de Triângulos e Teorema de Tales

SEMELHANÇA DE FIGURAS PLANAS

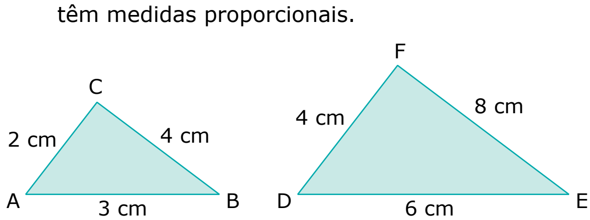
A ideia de semelhança de figuras planas é uma das mais importantes da Geometria. Dizemos que duas figuras planas são semelhantes quando possuem a mesma forma.

Exemplos:

1º) Dois quadrados quaisquer sempre são semelhantes.

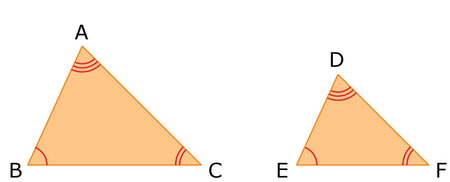


2º) Dois triângulos são semelhantes quando seus lados têm medidas proporcionais.



Definição

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se,
i) os ângulos são congruentes;
ii) os lados opostos a ângulos congruentes são proporcionais.



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{D} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \text{ e } \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

OBSERVAÇÕES

i) Indicamos a semelhança pelo símbolo **~**.

ii) Lados opostos a ângulos congruentes são chamados de lados homólogos.

iii) A razão entre dois lados homólogos (**k**) é a razão de semelhança.

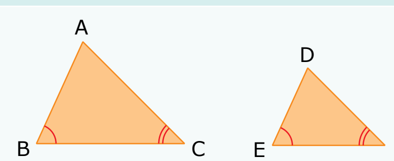
CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Vimos que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos congruentes e os três lados proporcionais. Porém, para verificar se dois triângulos são semelhantes, não é necessário conferir todas essas condições.

A seguir, enunciamos os casos de semelhança, que são alguns grupos de condições capazes de garantir a semelhança dos triângulos.

Caso AA (ângulo, ângulo)

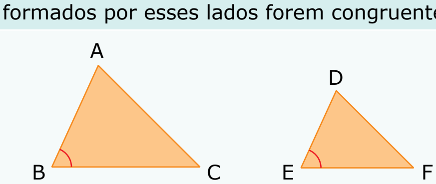
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois ângulos respectivamente congruentes.



$$\begin{cases} \hat{B} \equiv \hat{E} \\ \hat{C} \equiv \hat{F} \end{cases} \Rightarrow ABC \sim DEF$$

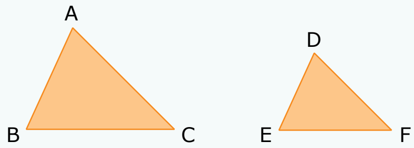
Caso LAL (lado, ângulo, lado)

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm dois lados respectivamente proporcionais e se os ângulos formados por esses lados forem congruentes.



$$\begin{cases} \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} \\ \hat{B} \equiv \hat{E} \end{cases} \Rightarrow ABC \sim DEF$$

Caso LLL (lado, lado, lado)
Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, têm os três lados respectivamente proporcionais.

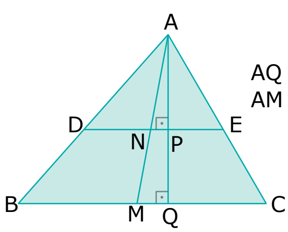


$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} \qquad ABC \sim DEF$$

Razão de semelhança

A razão de semelhança de dois triângulos é a razão entre as medidas de dois segmentos correspondentes (lados, alturas, medianas, etc.). Essa razão também é válida para os perímetros.

Considere os triângulos semelhantes ABC e ADE.



AQ e AP são alturas.
AM e AN são medianas.

A razão de semelhança do triângulo ABC para o triângulo ADE é o número **k**, tal que:

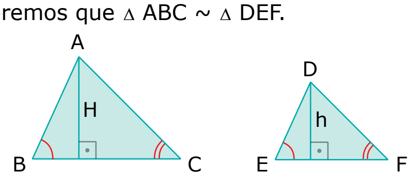
$$\boxed{k = \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{AQ}{AP} = \frac{AM}{AN}}$$

Razão entre áreas

A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é dada pelo quadrado da razão de semelhança entre eles.

Demonstração:

Consideremos que Δ ABC ~ Δ DEF.



$$S_{ABC} = \frac{BC.H}{2} \quad \text{(I)} \qquad S_{DEF} = \frac{EF.h}{2} \quad \text{(II)}$$

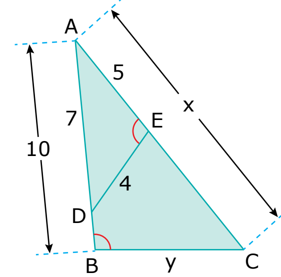
Mas $\frac{BC}{EF} = \frac{H}{h} = k.$ (III)

Portanto, considerando (I), (II) e (III), temos que:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = \frac{\frac{BC.H}{\cancel{2}}}{\frac{EF.h}{\cancel{2}}} = \frac{BC}{EF}.\frac{H}{h} = k.k \qquad \boxed{\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}} = k^2}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. Na figura, sabe-se que $\hat{E}$ e $\hat{B}$ são congruentes, AD = 7 cm, AE = 5 cm, ED = 4 cm e AB = 10 cm.



A) Determinar AC = x e BC = y.

B) Determinar a razão entre as áreas do triângulo ADE e do quadrilátero BCED.

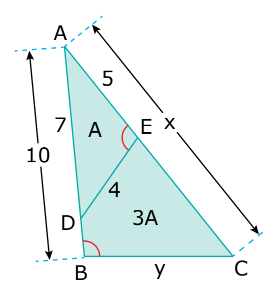
Resolução:

A) Os triângulos ADE e ABC são semelhantes, pois os ângulos $\hat{E}$ e $\hat{B}$ são congruentes, e o ângulo $\hat{A}$ é comum aos dois triângulos (caso AA). Então:

$$\frac{x}{7} = \frac{10}{5} = \frac{y}{4} \qquad x = 14 \text{ cm e } y = 8 \text{ cm}$$

B) Seja **A** a área do triângulo ADE. A razão entre as áreas de ADE e de ABC é $k^2 = \frac{1}{4}$. Assim, $\frac{A_{ADE}}{A_{ABC}} = k^2 = \frac{1}{4}$.

Então, $A_{ABC} = 4A_{ADE} = 4A$ e $A_{BCED} = 3A$, como mostrado na figura a seguir:



Portanto, $\frac{A_{ADE}}{A_{BCED}} = \frac{\cancel{A}}{3\cancel{A}} = \frac{1}{3}$.

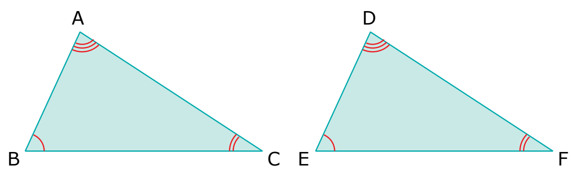
CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Definição

Se a razão de semelhança entre dois triângulos é k = 1, os triângulos são chamados congruentes e possuem

i) os ângulos congruentes;

ii) os lados homólogos congruentes.

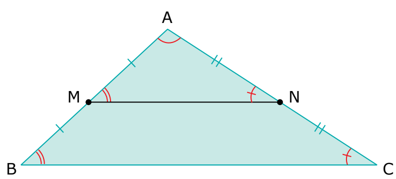


ABC ≡ DEF $\Leftrightarrow$ $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$, $\hat{C} \equiv \hat{F}$ e $\overline{AB} \equiv \overline{DE}$, $\overline{AC} \equiv \overline{DF}$, $\overline{BC} \equiv \overline{EF}$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

BASE MÉDIA DE TRIÂNGULO

Sejam o triângulo ABC e os pontos médios **M** e **N** dos lados AB e AC, respectivamente.



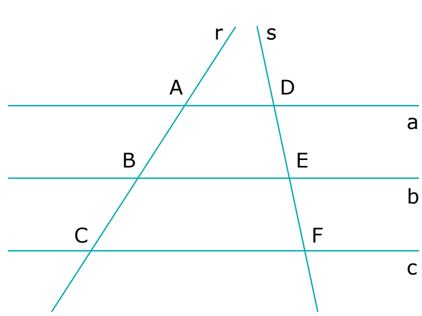
Os triângulos AMN e ABC são semelhantes pelo caso LAL, e a razão de semelhança é $k = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$.

Logo, $MN = \frac{1}{2}BC$, $\hat{B} \equiv \hat{M}$, $\hat{C} \equiv \hat{N}$ e, consequentemente, MN // BC. O segmento MN é chamado base média do triângulo ABC e, esquematicamente, temos:

MN é base média do triângulo ABC $\Leftrightarrow$ $MN = \frac{1}{2}BC$ e MN // BC

TEOREMA DE TALES

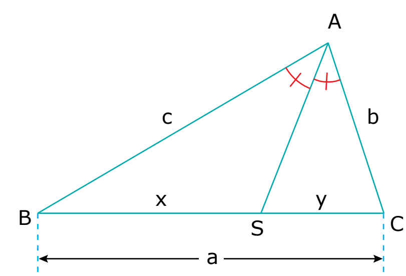
Considere três retas paralelas **a**, **b**, **c** "cortadas" por duas transversais **r** e **s**.



Pelo Teorema de Tales, temos que a razão entre segmentos correspondentes nas duas transversais é constante, isto é:

TEOREMA DA BISSETRIZ INTERNA

Em qualquer triângulo, uma bissetriz interna divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

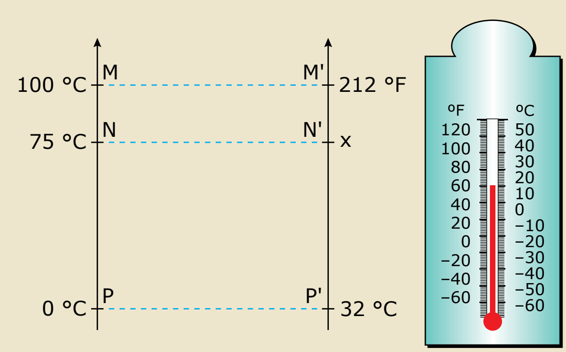


$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}$$

ESCALAS TERMOMÉTRICAS

A escala Celsius adota, sob pressão normal, o valor 0 (zero) para a temperatura de fusão do gelo e o valor 100 (cem) para a temperatura sob a qual a água entra em ebulição. Na escala Fahrenheit, são atribuídos os valores 32 (trinta e dois) e 212 (duzentos e doze) a essas temperaturas de fusão e ebulição, respectivamente. Os símbolos °C e °F indicam graus Celsius e graus Fahrenheit, respectivamente.

Aplicando o Teorema de Tales, podemos transformar medidas de uma dessas escalas em medidas de outra. Por exemplo, para transformar 75 °C em graus Fahrenheit, agimos da seguinte maneira:



Termômetro graduado nas escalas Fahrenheit e Celsius.

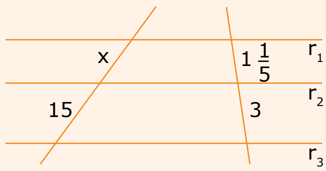
$$\frac{MP}{NP} = \frac{M'P'}{N'P'} \Rightarrow \frac{100-0}{75-0} = \frac{212-32}{x-32} \Rightarrow x = 167$$

Logo, 75 °C equivalem a 167 °F.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. VSC2 (Cesgranrio) As retas r_1, r_2 e r_3 são paralelas, e os comprimentos dos segmentos de transversais são os indicados na figura. Então, **x** é igual a:



A) $4\frac{1}{5}$.

B) $5\frac{1}{5}$.

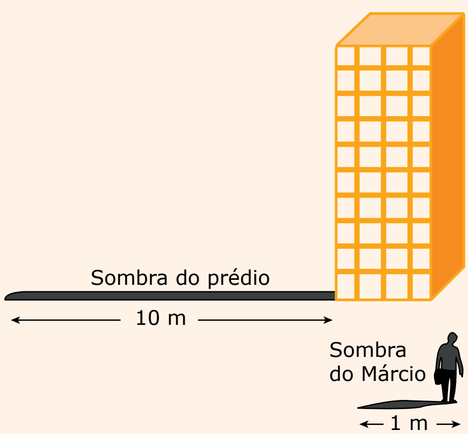
C) 5.

D) $\frac{8}{5}$.

E) 6.

02. (IFSC-SC–2016) Em um determinado local e horário do dia, Márcio observou que sua sombra era de 1 metro e que a sombra projetada por um prédio em construção, no mesmo local e horário em que ele estava, era de 10 metros.

Sabendo-se que Márcio tem 1,62 m de altura, é correto afirmar que a altura desse prédio é de, aproximadamente,



A) 6,2 metros.

B) 8,1 metros.

C) 16,2 metros.

D) 14 metros.

E) 13,8 metros.

03. 2OZN (UFRN) Numa projeção de filme, o projetor foi colocado a 12 m de distância da tela. Isso fez com que aparecesse a imagem de um homem com 3 m de altura. Numa sala menor, a projeção resultou na imagem de um homem com apenas 2 m de altura. Nessa nova sala, a distância do projetor em relação à tela era de

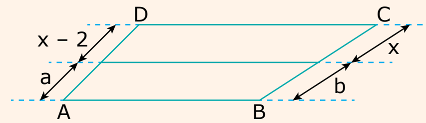
A) 18 m.

B) 8 m.

C) 36 m.

D) 9 m.

04. VAEC (CEFET-MG) A figura representa um perfil de um reservatório-d'água com lado AB paralelo a CD.



Se **a** é o menor primo e **b** é 50% maior que **a**, então, o valor de **x** é:

A) 4.

B) 6.

C) 8.

D) 10.

05. AKST (CEFET-MG) Numa festa junina, além da tradicional brincadeira de roubar bandeira no alto do pau de sebo, quem descobrisse a sua altura ganharia um prêmio. O ganhador do desafio fincou, paralelamente a esse mastro, um bastão de 1 m. Medindo-se as sombras projetadas no chão pelo bastão e pelo pau, ele encontrou, respectivamente, 25 dm e 125 dm. Portanto, a altura do "pau de sebo", em metros, é:

A) 5,0.

B) 5,5.

C) 6,0.

D) 6,5.

06. IGMY (UNEB-BA) Um turista está subindo uma trilha, em linha reta, em uma montanha que dá acesso a um mirante com uma vista muito bela. Após ter andado 200 m, ele observa uma placa com os seguintes dizeres:

> *Parabéns! Você já está a 34 m de altura! O mirante está a 170 m de altura: agora falta pouco! Não desista. A vista é linda!*

Nessas condições, o turista ainda vai ter que andar

A) 720 m.

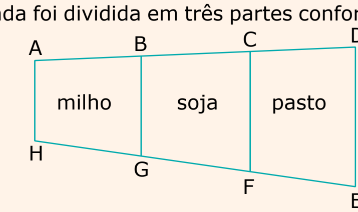
B) 740 m.

C) 760 m.

D) 780 m.

E) 800 m.

07. (ETECs-SP) Para melhorar a qualidade do solo, aumentando a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes conforme a figura.



Considere que

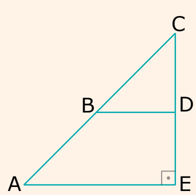
- os pontos **A**, **B**, **C** e **D** estão alinhados;
- os pontos **H**, **G**, **F** e **E** estão alinhados;
- os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são, dois a dois, paralelos entre si;
- AB = 500 m, BC = 600 m, CD = 700 m e HE = 1 980 m.

Nessas condições, a medida do segmento $\overline{GF}$ é, em metros:

A) 665.
B) 660.
C) 655.
D) 650.
E) 645.

08. 8M5A (CEFET-MG) A figura a seguir tem as seguintes características:

- O ângulo $\hat{E}$ é reto;
- O segmento de reta $\overline{AE}$ é paralelo ao segmento BD;
- Os segmentos AE, BD e DE, medem, respectivamente, 5, 4 e 3.



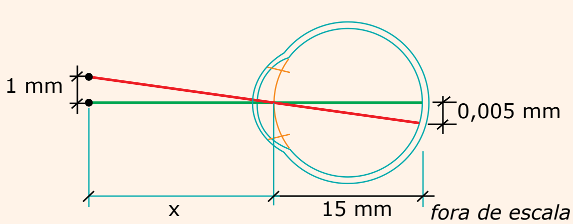
O segmento AC, em unidades de comprimento, mede:

A) 8
B) 12
C) 13
D) $\sqrt{61}$
E) $5\sqrt{10}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

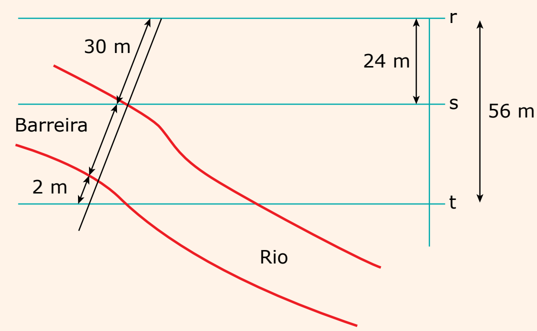
01. OS2Y (Unesp) Para que alguém, com o olho normal, possa distinguir um ponto separado de outro, é necessário que as imagens desses pontos, que são projetadas em sua retina, estejam separadas uma da outra a uma distância de 0,005 mm.



Adotando-se um modelo muito simplificado do olho humano no qual ele possa ser considerado uma esfera cujo diâmetro médio é igual a 15 mm, a maior distância **x**, em metros, que dois pontos luminosos, distantes 1 mm um do outro, podem estar do observador, para que este os perceba separados, é:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

02. (UFSM-RS) A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscarem alternativas na geração de energia elétrica para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações. Observando a figura e admitindo que as linhas retas **r**, **s** e **t** sejam paralelas, pode-se afirmar que a barreira mede

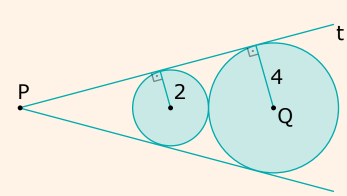


A) 33 m.
B) 38 m.
C) 43 m.
D) 48 m.
E) 53 m.

03. 8H1J (PUC Rio) Uma reta paralela ao lado BC de um triângulo ABC intercepta os lados AB e AC do triângulo em **P** e **Q**, respectivamente, onde AQ = 4, PB = 9 e AP = QC. Então o comprimento de AP é:

A) 5.
B) 6.
C) 8.
D) 2.
E) 1.

04. FJGO (UFRGS-RS) Observe os discos de raios 2 e 4, tangentes entre si e às semirretas **s** e **t**, representados na figura a seguir.

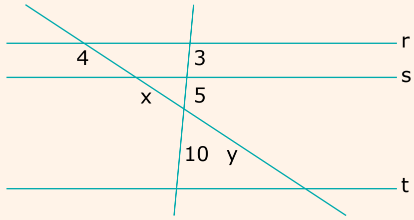


A distância entre os pontos **P** e **Q** é:

A) 9.
B) 10.
C) 11.
D) 12.
E) 13.

MATEMÁTICA

05. (Unesp) Considere 3 retas coplanares paralelas, **r**, **s** e **t**, cortadas por 2 outras retas, conforme a figura.



Os valores dos segmentos identificados por **x** e **y** são, respectivamente,

A) $\frac{3}{20}$ e $\frac{3}{40}$.

B) 6 e 11.

C) 9 e 13.

D) 11 e 6.

E) $\frac{20}{3}$ e $\frac{40}{3}$.

06. RNVD (PUC Rio) Considere um triângulo ABC retângulo em **A**, onde $\overline{AB} = 21$, e $\overline{AC} = 20$. $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$. Quanto mede $\overline{AD}$?

A) $\frac{42}{5}$

B) $\frac{21}{20}$

C) $\frac{20}{21}$

D) 9

E) 8

07. ØAVI (IFCE) Sobre os lados AB e AC do triângulo ABC, são marcados os pontos **D** e **E**, respectivamente, de tal forma, que $\overline{DE}$ // $\overline{BC}$, $\overline{AE} = 6$ cm, $\overline{DB} = 2$ cm, $\overline{EC} = 3$ cm e $\overline{DE} = 8$ cm. Nessas condições, a soma das medidas dos segmentos AD e BC, em centímetros, vale:

A) 12.

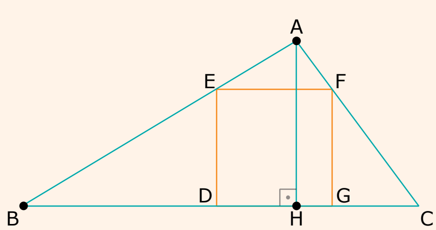
B) 16.

C) 18.

D) 24.

E) 30.

08. (CEFET-MG) A figura a seguir apresenta um quadrado DEFG e um triângulo ABC cujo lado BC mede 40 cm e a altura AH, 24 cm.



A medida do lado desse quadrado é um número

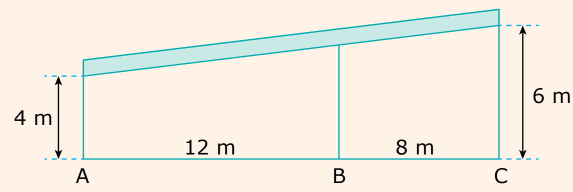
A) par.

B) primo.

C) divisível por 4.

D) múltiplo de 5.

09. E82P (UFPR) Um telhado inclinado reto foi construído sobre três suportes verticais de aço, colocados nos pontos **A**, **B** e **C**, como mostra a figura a seguir. Os suportes nas extremidades **A** e **C** medem, respectivamente, 4 metros e 6 metros de altura.



A altura do suporte em **B** é, então, de

A) 4,2 metros.

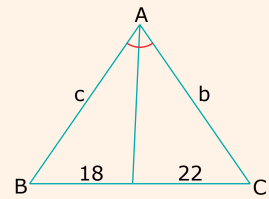
B) 4,5 metros.

C) 5 metros.

D) 5,2 metros.

E) 5,5 metros.

10. Y96N (CEFET-MG–2015) O perímetro do triângulo ABC vale 120 cm e a bissetriz do ângulo Â divide o lado oposto em dois segmentos de 18 e 22 cm, conforme a figura.



A medida do maior lado desse triângulo, em cm é:

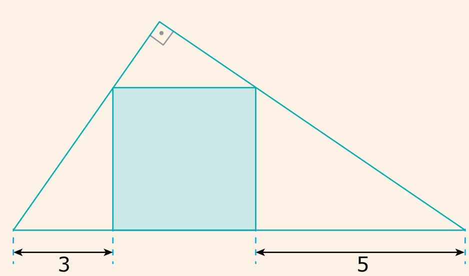
A) 22.

B) 36.

C) 44.

D) 52.

11. YPLX (Mackenzie-SP) A área do quadrado assinalado na figura é igual a:



A) 15.

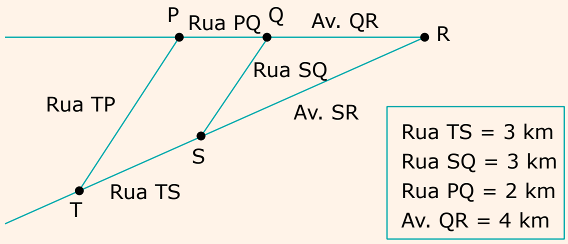
B) 20.

C) 12.

D) 18.

E) 16.

12. XBBW (UFF-RJ) O circuito triangular de uma corrida está esquematizado na figura a seguir:



As ruas TP e SQ são paralelas. Partindo de **S**, cada corredor deve percorrer o circuito passando, sucessivamente, por **R**, **Q**, **P**, **T**, retornando, finalmente, a **S**.

Assinale a opção que indica o perímetro do circuito.

A) 4,5 km.

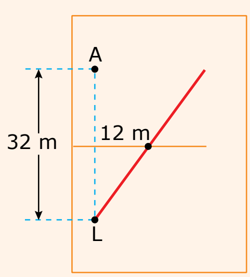
B) 19,5 km.

C) 20,0 km.

D) 22,5 km.

E) 24,0 km.

13. (FUVEST-SP) Um lateral **L** faz um lançamento para um atacante **A**, situado 32 m à sua frente em uma linha paralela à lateral do campo de futebol. A bola, entretanto, segue uma trajetória retilínea, mas não paralela à lateral e, quando passa pela linha de meio do campo, está a uma distância de 12 m da linha que une o lateral ao atacante. Sabendo-se que a linha de meio do campo está à mesma distância dos dois jogadores, a distância mínima que o atacante terá que percorrer para encontrar a trajetória da bola será de



A) 18,8 m.

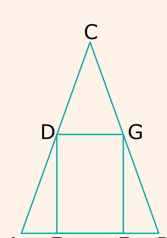
B) 19,2 m.

C) 19,6 m.

D) 20,0 m.

E) 20,4 m.

14. (PUC Rio) O retângulo DEFG está inscrito no triângulo isósceles ABC, como na figura a seguir:



Assumindo $\overline{DE} = \overline{GF} = 12$, $\overline{EF} = \overline{DG} = 8$ e $\overline{AB} = 15$, a altura do triângulo ABC é:

A) $\frac{35}{4}$.

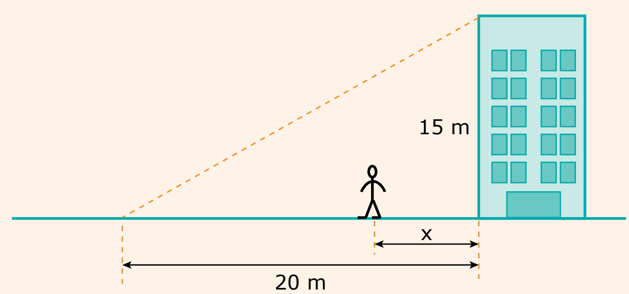
B) $\frac{150}{7}$.

C) $\frac{90}{7}$.

D) $\frac{180}{7}$.

E) $\frac{28}{5}$.

15. (ESPM-SP–2015) Um prédio de 15 m de altura projeta uma sombra de 20 m de comprimento sobre um piso horizontal plano, como mostra a figura a seguir. A máxima distância que uma pessoa de 1,80 m de altura pode se afastar do prédio para que continue totalmente à sua sombra é:



A) 17,60 m.

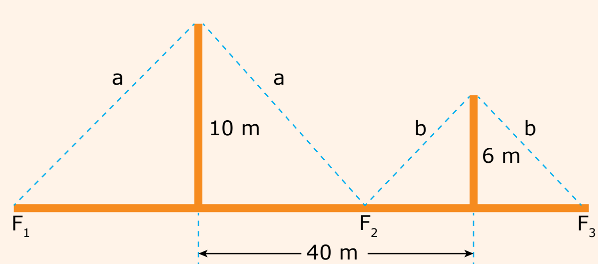
B) 18,20 m.

C) 17,40 m.

D) 17,80 m.

E) 18,00 m.

16. 1X5W (UFRN) Dois postes, um de 10 m e outro de 6 m, devem ser sustentados, respectivamente, por cabos de aço de comprimentos **a** e **b**, conforme ilustra a figura a seguir.



Os pontos de fixação F_1, F_2 e F_3 devem ser determinados de modo que a quantidade de cabo de aço seja mínima.

A distância do ponto F_2 até a base do poste menor deverá ser:

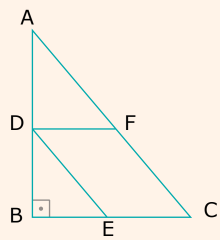
A) 10 m.

B) 15 m.

C) 20 m.

D) 25 m.

17. WHC8 (FUVEST-SP) Na figura, o triângulo ABC é retângulo com catetos BC = 3 e AB = 4. Além disso, o ponto **D** pertence ao cateto $\overline{AB}$, o ponto **E** pertence ao cateto $\overline{BC}$ e o ponto **F** pertence à hipotenusa $\overline{AC}$, de tal forma que DECF seja um paralelogramo. Se $DE = \frac{3}{2}$, então a área do paralelogramo DECF vale:



A) $\frac{63}{25}$.

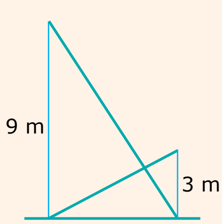
B) $\frac{12}{5}$.

C) $\frac{58}{25}$.

D) $\frac{56}{25}$.

E) $\frac{11}{5}$.

18. 2KWB (UEL-PR) Após um tremor de terra, dois muros paralelos em uma rua de uma cidade ficaram ligeiramente abalados. Os moradores se reuniram e decidiram escorar os muros utilizando duas barras metálicas, como mostra a figura a seguir. Sabendo que os muros têm alturas de 9 m e 3 m, respectivamente, a que altura do nível do chão as duas barras se interceptam? Despreze a espessura das barras.



A) 1,50 m.

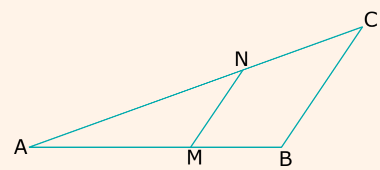
B) 1,75 m.

C) 2,00 m.

D) 2,25 m.

E) 2,50 m.

19. DFSN (CEFET-MG–2016) No triângulo ABC da figura a seguir, $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$ e a medida de $\overline{AC}$ é igual a 30 cm. Sabe-se que o ponto **M** dista 8 cm do vértice **B**, que $\overline{AB}$ mede $\frac{2}{3}$ da medida de $\overline{AC}$ e que a medida de $\overline{BC}$ vale a metade da medida de $\overline{AC}$.



O perímetro do triângulo AMN da figura, mede, em cm,

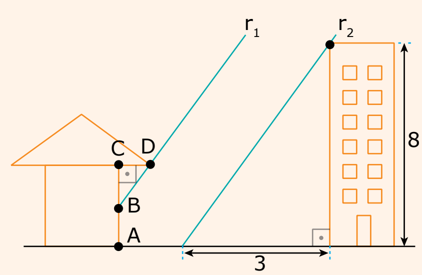
A) 15.

B) 21.

C) 27.

D) 39.

20. IPYG (CEFET-MG–2016) Na figura a seguir, o segmento AC representa uma parede cuja altura é 2,9 m. A medida do segmento AB é 1,3 m o segmento CD representa o beiral da casa. Os raios de Sol r_1 e r_2 passam ao mesmo tempo pela casa e pelo prédio, respectivamente.



Se r_1 é paralelo com r_2, então, o comprimento do beiral, em metros, é:

A) 0,60.

B) 0,65.

C) 0,70.

D) 0,75.

21. ØWQ7 (FUVEST-SP) Uma circunferência de raio 3 cm está inscrita no triângulo isósceles ABC, no qual AB = AC. A altura relativa ao lado $\overline{BC}$ mede 8 cm. O comprimento de $\overline{BC}$ é, portanto, igual a:

A) 24 cm.

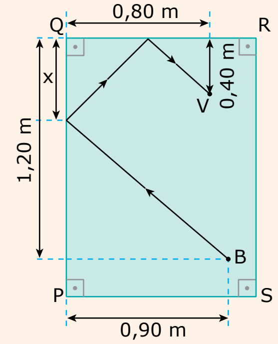
B) 13 cm.

C) 12 cm.

D) 9 cm.

E) 7 cm.

22. FVVT (FUVEST-SP) Em uma mesa de bilhar, coloca-se uma bola branca na posição **B** e uma bola vermelha na posição **V**, conforme o esquema a seguir.

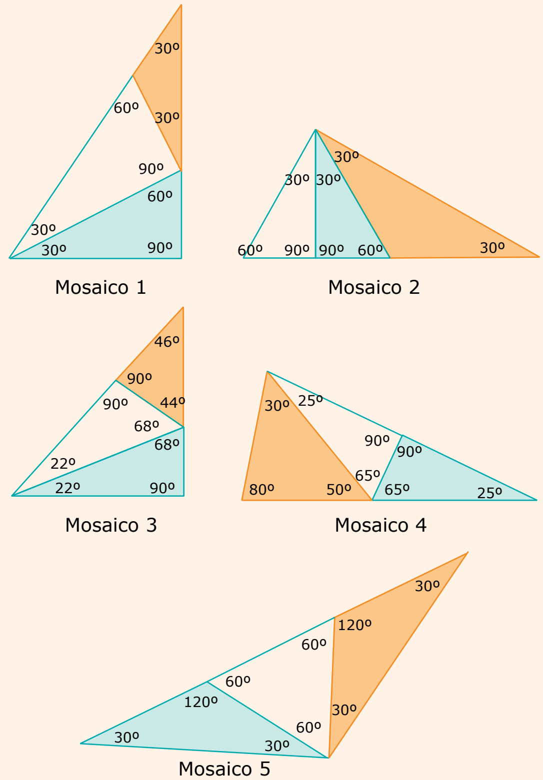


Deve-se jogar a bola branca de modo que ela siga a trajetória indicada na figura e atinja a bola vermelha.

Assumindo que, em cada colisão da bola branca com uma das bordas da mesa, os ângulos de incidência e de reflexão são iguais, a que distância **x** do vértice **Q** deve-se jogar a bola branca?

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas retângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

A) 1.

B) 2.

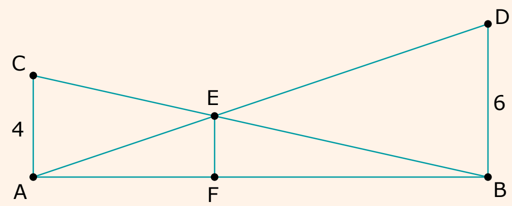
C) 3.

D) 4.

E) 5.

MATEMÁTICA

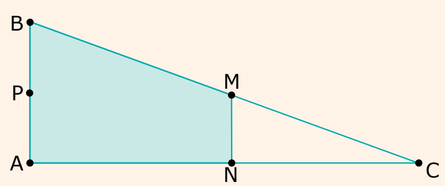
02. (Enem) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6 m e 4 m. A figura representa a situação real, na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD, e a haste é representada pelo segmento EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

A) 1 m.
B) 2 m.
C) 2,4 m.
D) 3 m.
E) $2\sqrt{6}$ m.

03. (Enem) Em canteiros de obras de construção civil, é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros, foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.



A região demarcada pelas estacas **A**, **B**, **M** e **N** deveria ser calçada com concreto.

Nessas condições, a área a ser calçada corresponde:

A) à mesma área do triângulo AMC.
B) à mesma área do triângulo BNC.
C) à metade da área formada pelo triângulo ABC.
D) ao dobro da área do triângulo MNC.
E) ao triplo da área do triângulo MNC.

04. (Enem) A sombra de uma pessoa que tem 1,80 m de altura mede 60 cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede 2,00 m. Se, mais tarde, a sombra do poste diminui 50 cm, a sombra da pessoa passa a medir:

A) 30 cm.
B) 45 cm.
C) 50 cm.
D) 80 cm.
E) 90 cm.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. C
- 03. B
- 04. B
- 05. A
- 06. E
- 07. B
- 08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. B
- 03. B
- 04. D
- 05. E
- 06. A
- 07. B
- 08. D
- 09. D
- 10. C
- 11. A
- 12. B
- 13. B
- 14. D
- 15. A
- 16. B
- 17. A
- 18. D
- 19. D
- 20. A
- 21. C
- 22. $\frac{6}{17}$ m

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. C
- 03. E
- 04. B

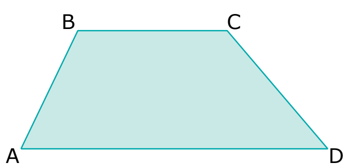
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Quadriláteros

QUADRILÁTEROS NOTÁVEIS

Trapézios

Os trapézios são os quadriláteros que possuem dois lados paralelos, chamados bases.



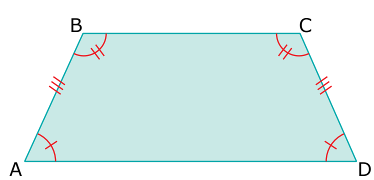
$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

O quadrilátero ABCD é um trapézio de bases $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$.

Classificação

Trapézio isósceles

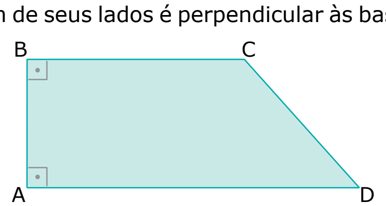
Os lados não paralelos são congruentes ($\overline{AB} \equiv \overline{CD}$), e os ângulos das bases são congruentes ($\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{C}$).



$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

Trapézio retângulo

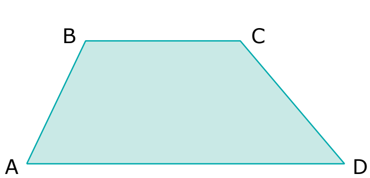
Um de seus lados é perpendicular às bases ($\hat{A} = \hat{B} = 90°$).



$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

Trapézio escaleno

Os lados não paralelos não são congruentes, e nenhum ângulo interno é reto.



$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

$AB \neq CD$

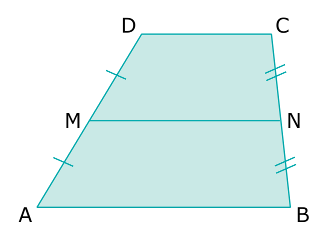
$\hat{A} \neq \hat{B} \neq \hat{C} \neq \hat{D}$

Base média do trapézio

Seja $\overline{MN}$ um segmento com extremidades nos pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio ABCD. Então:

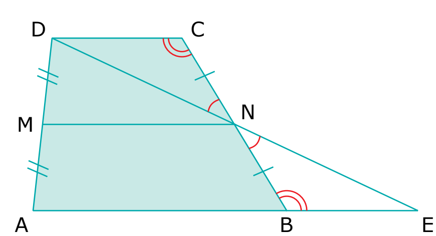
i) $\overline{MN}$ é paralelo às bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

ii) $\overline{MN}$ é igual à semissoma das bases.



MN é base média do trapézio ABCD $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} MN = \dfrac{AB + DC}{2} \\ MN \,//\, AB \,//\, CD \end{cases}$

Demonstração: prolongamos DN até encontrar o prolongamento de AB.



Na figura, os triângulos DCN e NBE são congruentes, pois possuem os ângulos congruentes e $CN \equiv NB$ (caso ALA).

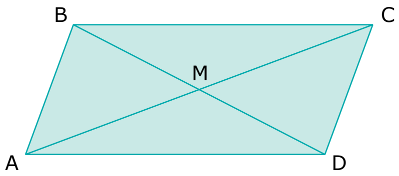
Então, $BE \equiv CD$ e $NE \equiv DN$.

Como MN é base média do triângulo ADE, então:

$$MN \,//\, AB \,//\, CD \text{ e } MN = \frac{AE}{2} = \frac{AB + BE}{2} = \frac{AB + CD}{2}$$

Paralelogramos

Os paralelogramos são os quadriláteros que possuem os lados opostos paralelos.



$\overline{AB}$ // $\overline{CD}$

$\overline{AD}$ // $\overline{BC}$

Propriedades

i) Os lados opostos são paralelos e congruentes.

ii) Os ângulos opostos são congruentes.

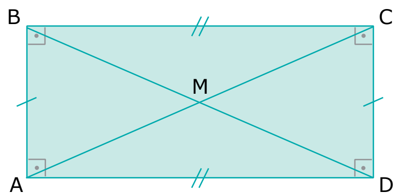
iii) Os ângulos consecutivos $\left(\text{como } \hat{A} \text{ e } \hat{D}\right)$ são suplementares, ou seja, somam 180°.

iv) As diagonais se cortam ao meio, ou seja, **M** é ponto médio dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Classificação

Retângulos

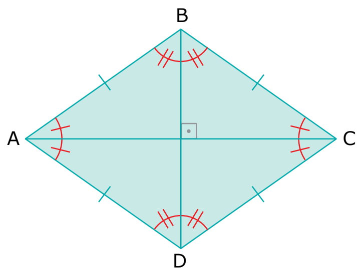
Os retângulos são os paralelogramos que possuem todos os ângulos retos.



Além das propriedades válidas para os paralelogramos, temos que os retângulos possuem as diagonais congruentes.

Losangos

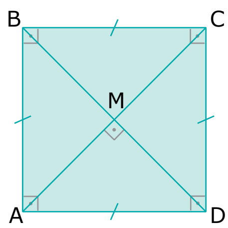
Os losangos são os paralelogramos que possuem todos os lados congruentes.



Além das propriedades de paralelogramo, suas diagonais são perpendiculares e são bissetrizes dos ângulos internos do losango.

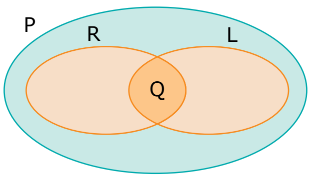
Quadrados

Os quadrados são os paralelogramos que possuem todos os lados e ângulos congruentes.



Todo quadrado é um paralelogramo, um retângulo e um losango; portanto, para ele, são válidas todas as propriedades vistas para esses quadriláteros.

Podemos representar os conjuntos dos quadriláteros notáveis pelo seguinte esquema.



P: Conjunto dos paralelogramos
R: Conjunto dos retângulos
L: Conjunto dos losangos
Q: Conjunto dos quadrados

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. VZL9 (UNIFESP) Em um paralelogramo, as medidas de dois ângulos internos consecutivos estão na razão 1 : 3. O menor ângulo desse paralelogramo mede:

A) 45°.

B) 50°.

C) 55°.

D) 60°.

E) 65°.

02. (IFSC-SC) O perímetro de um losango é 40 cm e uma diagonal mede 16 cm. A outra diagonal mede

A) 10 cm.

B) 6 cm.

C) 12 cm.

D) 8 cm.

E) 5 cm.

03. M4H8 (UFU-MG) Em um quadrilátero ABCD, o ângulo $\hat{C}$ é igual a $\frac{1}{3}$ do ângulo $\hat{B}$, o ângulo $\hat{A}$ mede o quíntuplo do ângulo $\hat{C}$ e o ângulo $\hat{D}$ vale 45°. Pode-se dizer que $\hat{A} - \hat{B}$ vale

A) 50°.

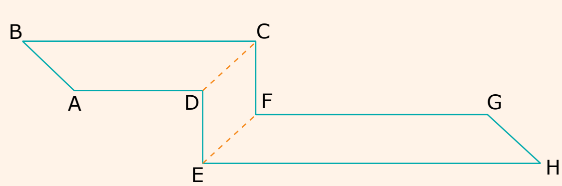
B) 60°.

C) 70°.

D) 80°.

E) 90°.

04. (CEFET-MG–2015) A figura a seguir é plana e composta por dois trapézios isósceles e um losango.



O comprimento da base maior do trapézio ABCD é igual ao da base menor do trapézio EFGH, que vale 2x e, a base maior de cada trapézio é o dobro da base menor, e o lado EF do losango vale **y**. O perímetro da figura dada, expresso em função de **x** e **y**, é:

A) 6x + 4y

B) 9x + 4y

C) 12x + 2y

D) 15x + 2y

05. ISUT (PUC-SP)

Sendo:

A = {x | x é quadrilátero}

B = {x | x é quadrado}

C = {x | x é retângulo}

D = {x | x é losango}

E = {x | x é trapézio}

F = {x | x é paralelogramo}

Então, vale a relação:

A) $A \supset D \supset E$

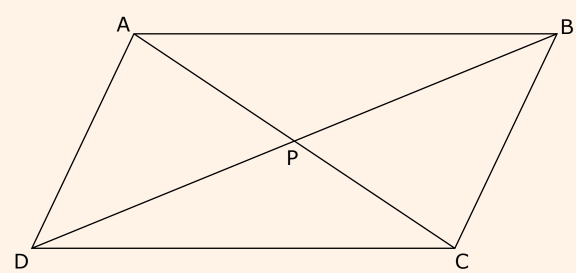
B) $A \supset F \supset D \supset B$

C) $F \subset D \subset A$

D) $A \supset F \supset B \supset C$

E) $B \subset D \subset A \subset E$

06. 3RYF (CEFET-CE) No paralelogramo ABCD, calcule as medidas das diagonais, de acordo com a figura a seguir:



Dados:

AP = x

BP = x + 14

CP = 2y – 5

DP = 3y + 2

07. UØBD (FGV-SP) A diagonal menor de um losango decompõe esse losango em dois triângulos congruentes. Se cada ângulo obtuso do losango mede 130°, quais são as medidas dos três ângulos de cada um dos triângulos considerados?

08. ØMQN (IFCE) As medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo são inversamente proporcionais a 5, 8, 10 e 40, então as medidas, em graus, dos ângulos são, respectivamente, iguais a:

A) 160°; 100°; 80° e 20°.

B) 100°; 80°; 20° e 160°.

C) 80°; 50°; 40° e 10°.

D) 50°; 40°; 10º e 80°.

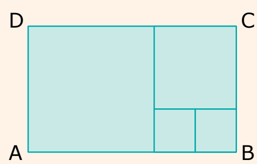
E) 75°; 45°; 40° e 20°.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. CJRO (Unicamp-SP–2015) A figura a seguir exibe um retângulo ABCD decomposto em quatro quadrados.

O valor da razão $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ é igual a:



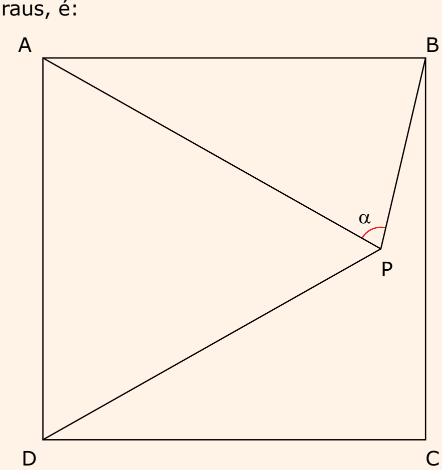
A) $\frac{5}{3}$.

B) $\frac{5}{2}$.

C) $\frac{4}{3}$.

D) $\frac{3}{2}$.

02. ELCX (Mackenzie-SP) Na figura, ABCD é um quadrado e APD é um triângulo equilátero. A medida do ângulo α, em graus, é:



A) 65.

B) 55.

C) 80.

D) 60.

E) 75.

03. (UECE–2018) Em um plano, duas circunferências têm seus centros nos pontos **P** e **Q** e as medidas de seus raios são ambas iguais a 3 m. Se essas circunferências cortam-se nos pontos **R** e **S** e se a distância entre **P** e **Q** é igual à distância entre **R** e **S**, então a medida da área do quadrilátero convexo cujos vértices são os pontos **P**, **Q**, **R** e **S**, em m², é

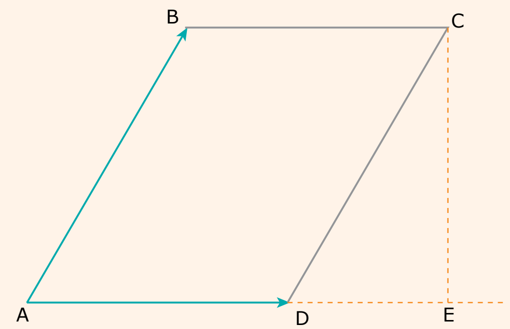
A) 18.

B) $9\sqrt{2}$.

C) $9\sqrt{3}$.

D) 9.

04. MH63 (UCS-RS–2016) Na figura a seguir, o quadrilátero ABCD é um paralelogramo, em que os segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{AD}$ representam duas forças, sendo med $(\overline{AD}) = 80$, med$(\overline{AB}) = 100$ e med$(A\hat{B}C) = 120°$.



Assinale a alternativa que contém a afirmação correta sobre a med $(\overline{AE})$ do segmento $\overline{AE}$, e sobre a medida **q** do ângulo $D\hat{A}C$.

A) med $(\overline{AE}) = 50$ e $q = 30°$

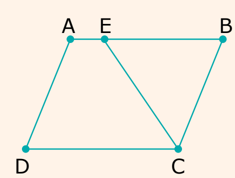
B) med $(\overline{AE}) = 130$ e $q = 30°$

C) med $(\overline{AE}) = 130$ e $q > 30°$

D) med $(\overline{AE}) = 50$ e $q < 30°$

E) med $(\overline{AE}) = 85$ e $q = 30°$

05. LRDM (UDESC) No paralelogramo ABCD, conforme mostra a figura, o segmento CE é a bissetriz do ângulo DCB.



Sabendo que AE = 2 e AD = 5, então o valor do perímetro do paralelogramo ABCD é:

A) 26.

B) 16.

C) 20.

D) 22.

E) 24.

06. SX28 (UFRGS-RS) Considere as seguintes afirmações sobre um quadrilátero convexo.

I. Se as diagonais se interceptam em seus respectivos pontos médios, então o quadrilátero é um retângulo.

II. Se as diagonais se interceptam perpendicularmente em seus respectivos pontos médios, então o quadrilátero é um losango.

III. Se as diagonais se interceptam perpendicularmente e são congruentes, então o quadrilátero é um quadrado.

Quais estão corretas?

A) Apenas II

B) Apenas III

C) Apenas I e II

D) Apenas I e III

E) I, II e III

07. (UFV-MG) Em um trapézio isósceles de bases diferentes, uma diagonal é também bissetriz de um ângulo adjacente à base maior. Isso significa que

A) os ângulos adjacentes à base menor não são congruentes.

B) a base menor tem medida igual à dos lados oblíquos.

C) as diagonais se interceptam formando ângulo reto.

D) a base maior tem medida igual à dos lados oblíquos.

E) as duas diagonais se interceptam no seu ponto médio.

08. ØVB1 (ITA-SP) Dadas as afirmações:

I. Quaisquer dois ângulos opostos de um quadrilátero são suplementares.

II. Quaisquer dois ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

III. Se as diagonais de um paralelogramo são perpendiculares entre si e se cruzam em seu ponto médio, então esse paralelogramo é um losango.

Podemos garantir que

A) todas são verdadeiras.

B) apenas I e II são verdadeiras.

C) apenas II e III são verdadeiras.

D) apenas II é verdadeira.

E) apenas III é verdadeira.

09. (Unimontes-MG / Adaptado) Se ABCD é um paralelogramo, com AB > BC, $\overline{AP}$ é bissetriz, $\overline{AD}$ = 6 cm e $\overline{PC}$ = 2 cm, o seu perímetro é:

A) 24 cm.

B) 14 cm.

C) 32 cm.

D) 28 cm.

10. PFD7 (UFJF-MG–2016) Sejam **A**, **B**, **C** e **D** os vértices de um trapézio isósceles. Os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ ambos agudos são os ângulos da base desse trapézio, enquanto que os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{D}$ são ambos obtusos e medem cada um, o dobro da medida de cada ângulo agudo desse trapézio. Sabe-se ainda que a diagonal $\overline{AC}$ é perpendicular ao lado $\overline{BC}$. Sendo a medida do lado $\overline{AB}$ igual a 10 cm, o valor da medida do perímetro do trapézio ABCD, em centímetros, é:

A) 21.

B) 22.

C) 23.

D) 24.

E) 25.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem) Diariamente, uma residência consome 20 160 Wh. Essa residência possui 100 células solares retangulares (dispositivos capazes de converter a luz solar em energia elétrica) de dimensões 6 cm x 8 cm. Cada uma das tais células produz, ao longo do dia, 24 Wh por centímetro de diagonal. O proprietário dessa residência quer produzir, por dia, exatamente a mesma quantidade de energia que sua casa consome.

Qual deve ser a ação desse proprietário para que ele atinja o seu objetivo?

A) Retirar 16 células.

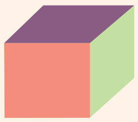
B) Retirar 40 células.

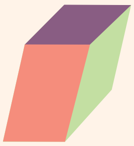
C) Acrescentar 5 células.

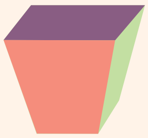
D) Acrescentar 20 células.

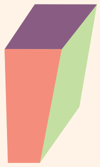
E) Acrescentar 40 células.

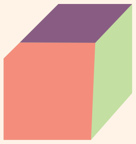
02. (Enem) Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos retos. Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?

A) 

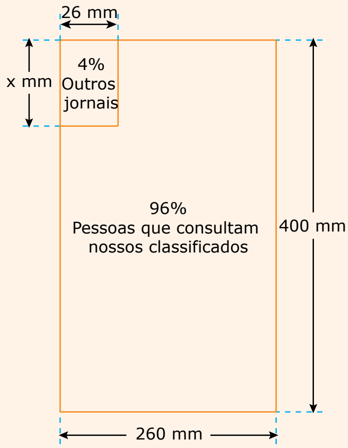
B) 

C) 

D) 

E) 

03. (Enem) O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados.



Para que a propaganda seja fidedigna à porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de aproximadamente:

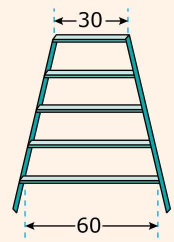
A) 1 mm.
B) 10 mm.
C) 17 mm.
D) 160 mm.
E) 167 mm.

04. (Enem) A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.

Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm x 50 cm). Em seguida, faz uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm x 100 cm). O valor da segunda encomenda será:

A) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.
B) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.
C) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.
D) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.
E) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

05. (Enem) Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura.



Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

A) 144.
B) 180.
C) 210.
D) 225.
E) 240.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. C
- 03. C
- 04. B
- 05. B
- 06. AC = 18
  BD = 46
- 07. 50°, 65°, 65°
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. E
- 03. D
- 04. C
- 05. E
- 06. A
- 07. B
- 08. C
- 09. D
- 10. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. C
- 03. D
- 04. B
- 05. D

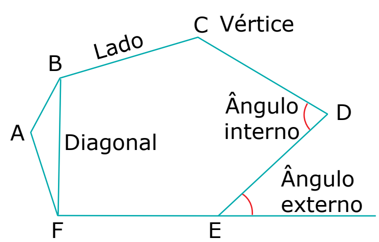
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Polígonos

POLÍGONO

Um polígono é uma figura geométrica plana formada por segmentos de reta (não colineares dois a dois), tais que cada extremidade de qualquer um deles é comum a apenas um outro.

A seguir, temos um polígono com seis lados (hexágono) e seus principais elementos:



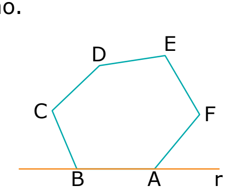
A tabela a seguir mostra os nomes que recebem os polígonos, conforme o seu número **n** de lados (ou de vértices).

Nº de lados (Nº de vértices)	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

Aos demais polígonos, não daremos nomes especiais, referindo-nos a eles explicitando o seu número de lados.

Polígono convexo

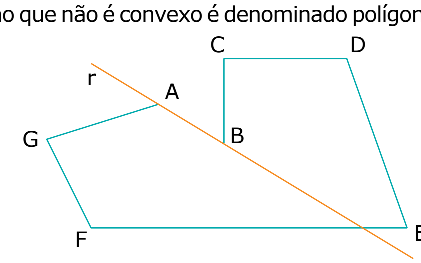
Observe que a reta **r**, que contém o lado $\overline{AB}$ do hexágono a seguir, isola, em um mesmo semiplano, todos os demais lados do hexágono.



O mesmo acontece com as retas que contêm qualquer um dos outros lados. Por isso, dizemos que esse hexágono é convexo.

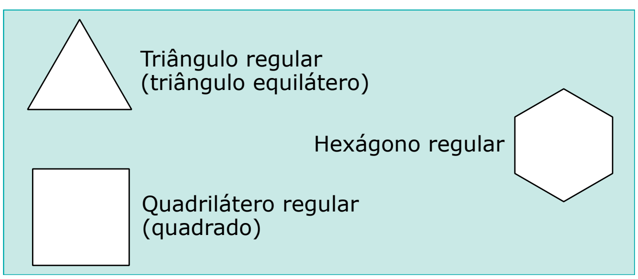
Um polígono é **convexo** se, e somente se, as retas que contêm qualquer um de seus lados deixam todos os demais lados contidos em um mesmo semiplano.

Observando o polígono ABCDEFG, constatamos que ele não é convexo, pois a reta **r**, que contém o lado $\overline{AB}$, não deixa os demais lados contidos em um mesmo semiplano. O polígono que não é convexo é denominado polígono **côncavo**.



Polígono regular

Um polígono convexo que possui todos os lados congruentes entre si (equilátero) e todos os ângulos internos congruentes entre si (equiângulo) é chamado de **polígono regular**.



DIAGONAIS E SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS

Se um polígono tem **n** lados, $n \geq 3$, então ele possui $\dfrac{n(n-3)}{2}$ diagonais.	$d = \dfrac{n(n-3)}{2}$
A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de **n** lados é $(n - 2)180°$.	$S_i = (n - 2)180°$
A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é 360°.	$S_e = 360°$

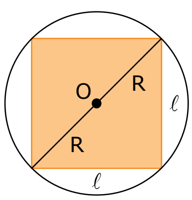
CIRCUNFERÊNCIAS CIRCUNSCRITA E INSCRITA EM POLÍGONOS REGULARES

Todo polígono regular admite a circunferência circunscrita (aquela que passa por todos os vértices do polígono) e a circunferência inscrita (aquela que tangencia todos os lados do polígono). Essas duas circunferências têm o mesmo centro **O**, chamado também de centro do polígono regular.

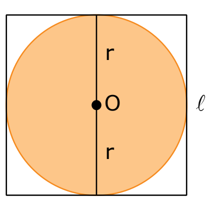
Vamos estudar o cálculo das medidas dos raios das circunferências circunscrita e inscrita em alguns polígonos regulares. Ao raio da circunferência inscrita em um polígono regular, damos o nome de apótema.

Quadrado

A medida da diagonal de um quadrado de lado ℓ é $\ell\sqrt{2}$. Portanto, temos:



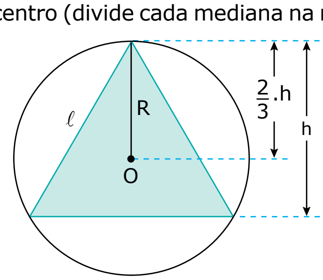
Raio **R** da circunferência circunscrita: $\boxed{R = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}}$



Raio **r** da circunferência inscrita (apótema): $\boxed{r = \dfrac{\ell}{2}}$

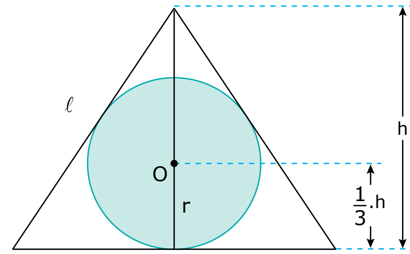
Triângulo equilátero

A medida da altura **h** de um triângulo equilátero de lado ℓ é $\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Como, no triângulo equilátero, as alturas estão contidas nas mediatrizes e coincidem com as bissetrizes e com as medianas, temos que o ponto comum às alturas é circuncentro (centro da circunferência circunscrita), é, também, incentro (centro da circunferência inscrita) e, também, baricentro (divide cada mediana na razão 2 para 1).



Raio **R** da circunferência circunscrita:

$$R = \frac{2}{3}.h \qquad R = \frac{2}{3}.\frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}}$$

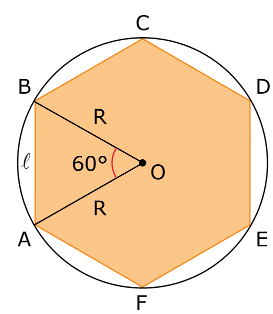


Raio **r** da circunferência inscrita:

$$r = \frac{1}{3}.h \qquad r = \frac{1}{3}.\frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}}$$

Hexágono regular

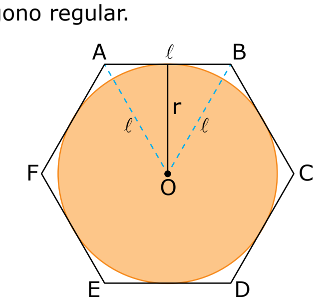
Os vértices de um hexágono regular dividem a circunferência circunscrita em seis arcos congruentes; logo, cada um desses arcos mede 60°. Assim, o ângulo central correspondente a cada um desses arcos também mede 60°.



Como AO = OB e $A\hat{O}B$ = 60°, temos que $O\hat{A}B = O\hat{B}A$ = 60° e, portanto, o triângulo AOB é equilátero. Sendo ℓ a medida do lado desse hexágono, concluímos que o raio **R** da circunferência circunscrita é:

$$\boxed{R = \ell}$$

Vamos analisar o caso em que a circunferência está inscrita em um hexágono regular.



Como **r** é a medida da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ, então o raio **r** da circunferência inscrita (apótema) mede:

$$\boxed{r = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

ÂNGULOS EM POLÍGONOS REGULARES

Ângulo cêntrico

Todos os ângulos cêntricos de um polígono regular são congruentes. Então, a medida de cada um deles é dada por:

$$\boxed{a_c = \frac{360°}{n}}$$

Ângulo interno

Como o polígono regular possui os **n** ângulos congruentes, a medida de cada um deles é dada por:

$$\boxed{a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)180°}{n}}$$

Ângulo externo

Como todos os ângulos externos são congruentes, a medida de cada um dos **n** ângulos externos é dada por:

$$\boxed{a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UNITAU-SP) O polígono regular convexo em que o número de lados é igual ao número de diagonais é o:

A) dodecágono.

B) pentágono.

C) decágono.

D) hexágono.

E) heptágono.

Resolução:

Admitindo que **n** seja o número de lados de um polígono e **d** o número de diagonais, temos:

$n = d \quad n = \frac{n(n-3)}{2} \quad 2n = n^2 - 3n \quad n^2 - 5n = 0$

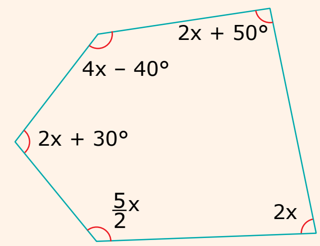
$n(n-5) = 0 \quad \cancel{n = 0}$ (não convém)

$n = 5$

Logo, o valor de **n** é 5, sendo o polígono regular um pentágono.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

01. (UTFPR–2016) O valor de **x** no pentágono a seguir é igual a



A) 25°.

B) 40°.

C) 250°.

D) 540°.

E) 1 000°.

02. DNPF (UECE) Se, em um polígono convexo, o número de lados **n** é um terço do número de diagonais, então o valor de **n** é:

A) 9.

B) 11.

C) 13.

D) 15.

03. KJIK (Cesgranrio) Se um polígono convexo de **n** lados tem 54 diagonais, então **n** é:

A) 8.

B) 9.

C) 10.

D) 11.

E) 12.

04. (IFCE–2016) Um hexágono convexo possui três ângulos internos retos e outros três que medem **y** graus cada. O valor de **y** é:

A) 135.

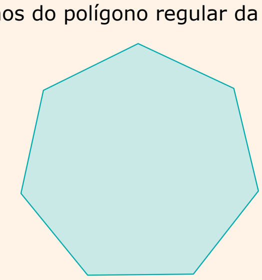
B) 150.

C) 120.

D) 60.

E) 30.

05. SFCQ (IFSP–2016) Ana estava participando de uma gincana na escola em que estuda e uma das questões que ela tinha de responder era "quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular da figura?"



Para responder a essa pergunta, ela lembrou que seu professor ensinou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, e que todo polígono pode ser decomposto em um número mínimo de triângulos. Sendo assim, Ana respondeu corretamente à pergunta dizendo:

A) 720°.

B) 900°.

C) 540°.

D) 1 080°.

E) 630°.

06. AZFW (UTFPR–2015) Os ângulos externos de um polígono regular medem 15°. O número de diagonais desse polígono é:

A) 56.
B) 24.
C) 252.
D) 128.
E) 168.

07. JLV2 (IFSul–2015) Sabe-se que a medida de cada ângulo interno de um polígono regular é 144°, então qual é o número de diagonais de tal polígono?

A) 10
B) 14
C) 35
D) 72

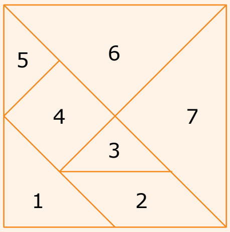
08. QN19 (IFCE) Um robô, caminhando em linha reta, parte de um ponto **A** em direção a um ponto **B**, que distam entre si cinco metros. Ao chegar ao ponto **B**, gira novamente 60° à esquerda e caminha mais cinco metros, repetindo o movimento e o giro até retornar ao ponto de origem. O percurso do robô formará um polígono regular de

A) 10 lados.
B) 9 lados.
C) 8 lados.
D) 7 lados.
E) 6 lados.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFPE–2015) O tangram é um quebra-cabeça formado por sete peças, como mostra a figura a seguir.



1. triângulo retângulo e isósceles médio.

2. paralelogramo.

3 e **5**. triângulos retângulos e isósceles pequenos (congruentes).

4. quadrado.

6 e **7**. triângulos retângulos e isósceles grandes (congruentes).

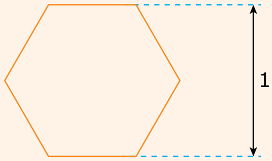
Somando os ângulos internos de todas as sete peças do tangram, teremos o seguinte resultado:

A) 1 620°.
B) 1 530°.
C) 980°.
D) 720°.
E) 360°.

02. (IFAL–2016) Um pai possui um terreno no formato de um hexágono regular com lado 12 m. Ele pretende construir um muro dividindo o terreno em dois trapézios de mesma área, um com frente para uma rua e outro para a outra, que serão dados para seus dois filhos. Qual o comprimento do muro?

A) 12 m.
B) 18 m.
C) 24 m.
D) 30 m.
E) 36 m.

03. 8G2T (PUC-RS) Para uma engrenagem mecânica, deseja-se fazer uma peça de formato hexagonal regular. A distância entre os lados paralelos é de 1 cm, conforme a figura a seguir.



O lado desse hexágono mede _______ cm.

A) $\frac{1}{2}$

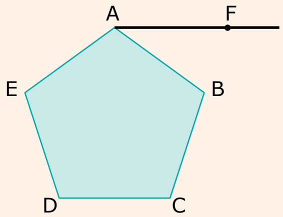
B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C) $\sqrt{3}$

D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

E) 1

04. FOF7 (Unimontes-MG) Na figura a seguir, temos um pentágono regular ABCDE. Se as retas $\overleftrightarrow{DC}$ e $\overleftrightarrow{AF}$ são paralelas, podemos afirmar que a medida do ângulo $B\hat{A}F$ vale

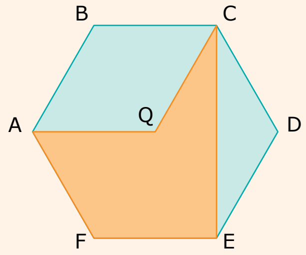


A) 32°.
B) 72°.
C) 36°.
D) 54°.

05. (UFU-MG) Num quadrilátero ABCD, o ângulo $\hat{C}$ é igual a $\frac{1}{3}$ do ângulo $\hat{B}$, o ângulo $\hat{A}$ mede o quíntuplo do ângulo $\hat{C}$, e o ângulo $\hat{D}$ vale 45°. Pode-se dizer que $\hat{A} - \hat{B}$ vale:

A) 50°.
B) 60°.
C) 70°.
D) 80°.
E) 90°.

06. 15J0 (FGV) Na figura, ABCDEF é um hexágono regular de lado 1 dm, e **Q** é o centro da circunferência inscrita a ele. O perímetro do polígono AQCEF, em dm, é igual a:



A) $4+\sqrt{2}$

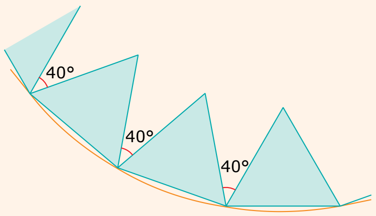
B) $4+\sqrt{3}$

C) 6

D) $4+\sqrt{5}$

E) $2\left(2+\sqrt{2}\right)$

07. W370 (UFRGS-RS–2016) Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura a seguir.



Se o desenho estivesse completo, ele seria um polígono regular composto por triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um círculo, e formando um ângulo de 40°, como indicado na figura.

Quando a figura estiver completa, o número de triângulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é:

A) 10.

B) 12.

C) 14.

D) 16.

E) 18.

08. (UECE–2016) Se a partir de cada um dos vértices de um polígono convexo com **n** lados podemos traçar tantas diagonais quantas são a totalidade das diagonais de um hexágono convexo, então, o valor de **n** é:

A) 9.

B) 10.

C) 11.

D) 12.

09. HO8K (ESPM-SP) Os pontos **A**, **B**, **C** e **D** são vértices consecutivos de um polígono regular com 20 diagonais, cujo lado mede 1. O comprimento do segmento AD é igual a:

A) $\sqrt{2}$

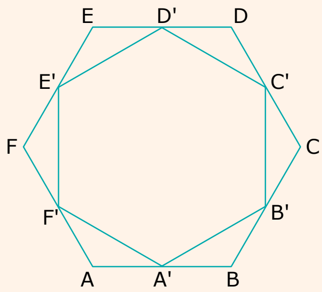
B) $1+\sqrt{2}$

C) $2\sqrt{2}-1$

D) $2\sqrt{2}+1$

E) $2\sqrt{2}$

10. PK2P (CEFET-MG–2018) Considere um hexágono regular ABCDEF. A partir dos pontos médios dos lados traça-se um novo hexágono A’B’C’D’E’F’.



A medida do ângulo BÂ’B’, em graus, é

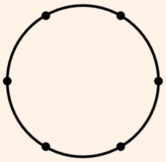
A) 20.

B) 30.

C) 40.

D) 60.

11. XGWV (UEG-GO–2018) A melhor maneira de alocarmos pontos igualmente espaçados em um círculo é escrevê-los nos vértices de polígonos regulares, conforme a figura a seguir exemplifica com 6 pontos.



Para alocarmos 36 pontos igualmente espaçados em um círculo de raio 1, a distância mínima entre eles deve ser aproximadamente

Use sen(5°) = 0,08

A) 0,12.

B) 0,11.

C) 0,16.

D) 0,14.

E) 0,19.

MATEMÁTICA

12. (UECE–2018) No quadrilátero XYZW, as medidas dos ângulos internos Z e W são respectivamente 128 graus e 76 graus. Se as bissetrizes dos ângulos internos X e Y cortam-se no ponto O, pode-se afirmar corretamente que a medida do ângulo $X\hat{O}Y$ é igual a

A) 156 graus.

B) 78 graus.

C) 204 graus.

D) 102 graus.

13. RSV6 (Insper-SP) Um polígono regular possui **n** lados, sendo **n** um número par maior ou igual a 4. Uma pessoa uniu dois vértices desse polígono por meio de um segmento de reta, dividindo-o em dois polígonos convexos P_1 e P_2, congruentes entre si. O número de lados do polígono P_1 é igual a:

A) $\frac{n}{2} + 2$

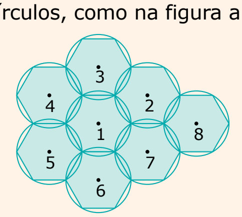
B) $\frac{n}{2} + 1$

C) $\frac{n}{2}$

D) $\frac{n}{2} - 1$

E) $\frac{n}{2} - 2$

14. NMF7 (UFF-RJ) No estudo da distribuição de torres em uma rede de telefonia celular, é comum se encontrar um modelo no qual as torres de transmissão estão localizadas nos centros de hexágonos regulares, congruentes, justapostos e inscritos em círculos, como na figura a seguir.



Supondo que, nessa figura, o raio de cada círculo seja igual a 1 km, é correto afirmar que a distância $d_{3,8}$ (entre as torres 3 e 8), a distância $d_{3,5}$ (entre as torres 3 e 5) e a distância $d_{5,8}$ (entre as torres 5 e 8) são, respectivamente, em km, iguais a:

A) $d_{3,8} = 2\sqrt{3},\ d_{3,5} = 3,\ d_{5,8} = 3 + 2\sqrt{3}$

B) $d_{3,8} = 4,\ d_{3,5} = 3,\ d_{5,8} = 5$

C) $d_{3,8} = 4,\ d_{3,5} = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ d_{5,8} = 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

D) $d_{3,8} = 2\sqrt{3},\ d_{3,5} = 3,\ d_{5,8} = \sqrt{21}$

E) $d_{3,8} = 4,\ d_{3,5} = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ d_{5,8} = \frac{9}{2}$

15. AØAP (UFRGS-RS) Um hexágono regular tem lado de comprimento 1. A soma dos quadrados de todas as suas diagonais é:

A) 6.

B) 12.

C) 18.

D) 24.

E) 30.

16. CSAV (UECE) Sejam **P** e **Q** polígonos regulares. Se **P** é um hexágono e se o número de diagonais do **Q**, partindo de um vértice, é igual ao número total de diagonais de **P**, então a medida de cada um dos ângulos internos de **Q** é

A) 144 graus.

B) 150 graus.

C) 156 graus.

D) 162 graus.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

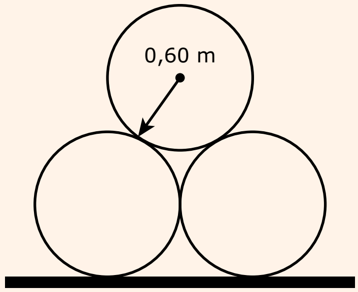
01. UKVJ (Enem–2017) A manchete demonstra que o transporte de grandes cargas representa cada vez mais preocupação quando feito em vias urbanas.

Caminhão entala em viaduto no Centro

Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.

Disponível em: <www.caminhoes-e-carretas.com>. Acesso em: 21 maio 2012 (Adaptação).

Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja 0,60 m e que eles estejam em cima de uma carroceria cuja parte superior está a 1,30 m do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.



A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo, 0,50 m menor do que a altura do vão do viaduto.

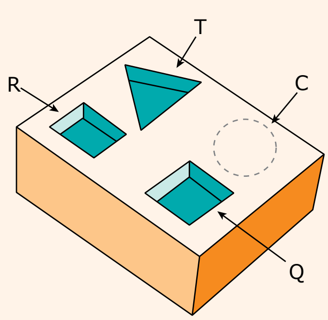
Observação: Considere 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

A) 2,82
B) 3,52
C) 3,70
D) 4,02
E) 4,20

02. B8BJ (Enem–2016) Um marceneiro está construindo um material didático que corresponde ao encaixe de peças de madeira com 10 cm de altura e formas geométricas variadas, num bloco de madeira em que cada peça se posicione na perfuração com seu formato correspondente, conforme ilustra a figura. O bloco de madeira já possui três perfurações prontas de bases distintas: uma quadrada (Q), de lado 4 cm, uma retangular (R), com base 3 cm e altura 4 cm, e uma em forma de um triângulo equilátero (T), de lado 6,8 cm. Falta realizar uma perfuração de base circular (C).

O marceneiro não quer que as outras peças caibam na perfuração circular e nem que a peça de base circular caiba nas demais perfurações e, para isso, escolherá o diâmetro do círculo que atenda a tais condições. Procurou em suas ferramentas uma serra copo (broca com formato circular) para perfurar a base em madeira, encontrando cinco exemplares, com diferentes medidas de diâmetros, como segue: (I) 3,8 cm; (II) 4,7 cm; (III) 5,6 cm; (IV) 7,2 cm e (V) 9,4 cm.

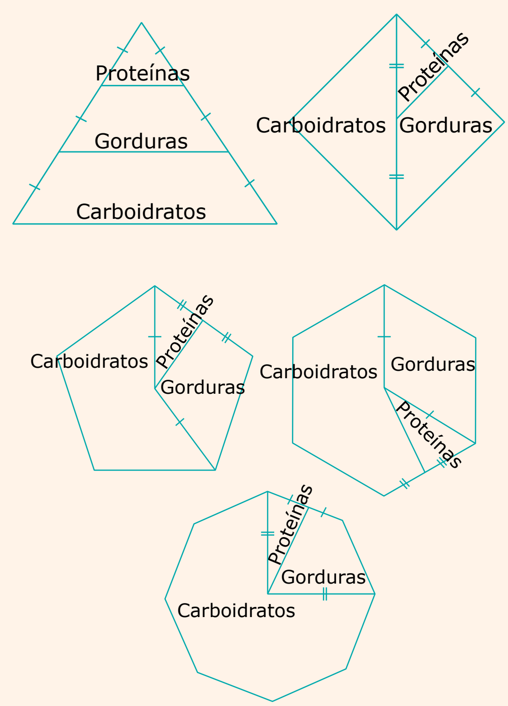


Considere 1,4 e 1,7 como aproximações para $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente.

Para que seja atingido o seu objetivo, qual dos exemplares de serra copo o marceneiro deverá escolher?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

03. (Enem–2015) Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras. Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono. Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas. Ela desenhou as seguintes figuras:



Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o:

A) triângulo.
B) losango.
C) pentágono.
D) hexágono.
E) octógono.

MATEMÁTICA

04. (Enem) Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias. Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma. Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida **R** do raio adequado para a plataforma em termos da medida **L** do lado da base da estátua.

Qual relação entre **R** e **L** o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

A) $R \geq \frac{L}{\sqrt{2}}$

B) $R \geq \frac{2L}{\pi}$

C) $R \geq \frac{L}{\sqrt{\pi}}$

D) $R \geq \frac{L}{2}$

E) $R \geq \frac{L}{2\sqrt{2}}$

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. A
- 03. E
- 04. B
- 05. B
- 06. C
- 07. C
- 08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. C
- 03. B
- 04. C
- 05. C
- 06. B
- 07. E
- 08. D
- 09. B
- 10. B
- 11. C
- 12. D
- 13. B
- 14. D
- 15. E
- 16. B

Seção Enem

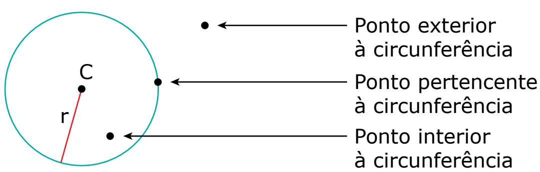
Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. B
- 03. C
- 04. A

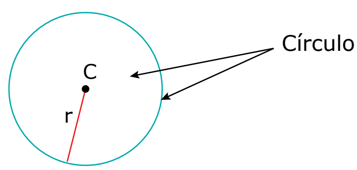
Total dos meus acertos: ______ de ______ . ______ %

Circunferência

Sendo **C** um ponto de um plano α e **r** uma medida positiva, chamamos circunferência de centro **C** e raio **r** o conjunto dos pontos do plano α que distam de **C** a medida **r**.

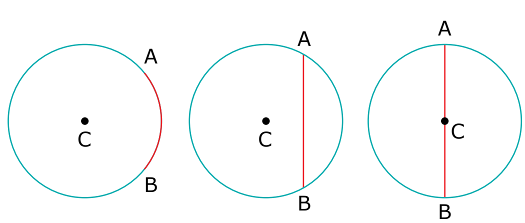


A união de uma circunferência com o conjunto de seus pontos interiores é chamada de **círculo**.



Arcos e cordas

Dois pontos **A** e **B** de uma circunferência dividem-na em duas partes chamadas **arcos**. O segmento de reta $\overline{AB}$ é chamado de **corda**. Uma corda que passa pelo centro **C** da circunferência é chamada de **diâmetro**.



PERÍMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA

Todas as circunferências são semelhantes entre si. Por isso, a razão entre a medida **C** do comprimento (perímetro) de uma circunferência e a medida 2r de seu diâmetro é constante, isto é:

$$\boxed{\frac{C}{2r} = \text{constante}}$$

A constante $\frac{C}{2r}$ é simbolizada pela letra grega π (pi), e sabemos, hoje, que essa constante é um número irracional, isto é, tem infinitas casas decimais e não é periódica:

$$\pi = 3{,}14159265...$$

Da sentença $\frac{C}{2r} = \pi$, podemos concluir que:

$$\boxed{C = 2\pi r}$$

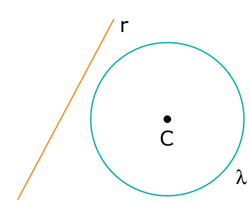
Portanto, o perímetro de uma circunferência é igual ao produto da medida do diâmetro por π.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Uma reta **r** e uma circunferência λ, contidas em um mesmo plano, admitem as seguintes posições relativas:

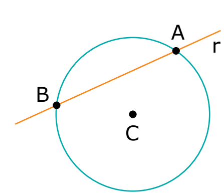
Exterior

r é exterior a λ quando não há ponto comum entre elas.



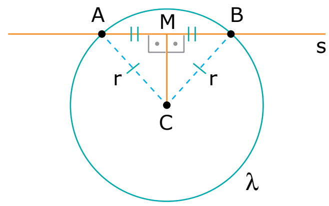
Secante

Uma secante a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos.



Dizemos que a reta e a circunferência são secantes.

Propriedades da secante

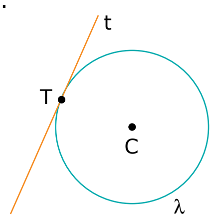


i) Se uma reta **s**, secante a uma circunferência λ (C, r), intercepta λ em dois pontos distintos **A** e **B** e se **M** é o ponto médio da corda $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{CM}$ é perpendicular à secante **s** (ou perpendicular à corda $\overline{AB}$).

ii) Se uma reta **s**, secante a uma circunferência λ (C, r), intercepta λ em dois pontos distintos **A** e **B**, então a reta perpendicular a **s**, conduzida pelo centro **C**, passa pelo ponto médio da corda $\overline{AB}$.

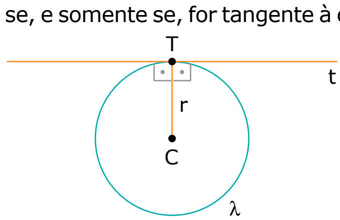
Tangente

Uma tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência num único ponto, denominado ponto de tangência.



Propriedade da tangente

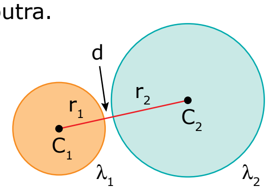
Toda reta é perpendicular a um raio na extremidade da circunferência se, e somente se, for tangente à circunferência.



POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

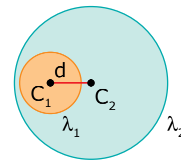
Duas circunferências λ_1 e λ_2, de centros C_1 e C_2 e de raios r_1 e r_2, contidas em um mesmo plano, admitem as posições relativas a seguir:

Externas: quando todos os pontos de qualquer uma delas são externos à outra.



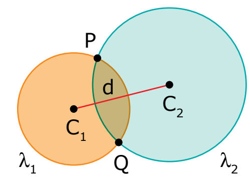
$d > r_1 + r_2$

Uma interna à outra: quando todos os pontos de uma delas são internos à outra.



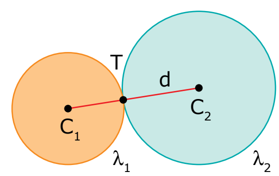
$d < |r_1 - r_2|$

Secantes: quando têm exatamente dois pontos distintos em comum.

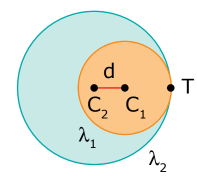


$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$

Tangentes: quando têm um único ponto em comum.



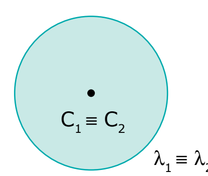
$d = r_1 + r_2$



$d = |r_1 - r_2|$

Em duas circunferências tangentes, os centros C_1 e C_2 e o ponto de tangência **T** são colineares.

Coincidentes: quando possuem todos os seus pontos em comum.

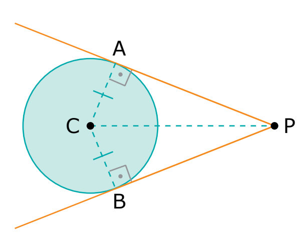


$$\begin{cases} d = 0 \\ r_1 = r_2 \end{cases}$$

QUADRILÁTEROS CIRCUNSCRITÍVEIS E INSCRITÍVEIS

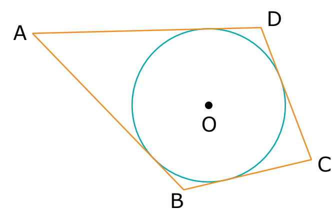
Segmentos tangentes

Se de um ponto **P** conduzimos os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, ambos tangentes a uma circunferência, com **A** e **B** na circunferência, então $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.



Quadrilátero circunscrito

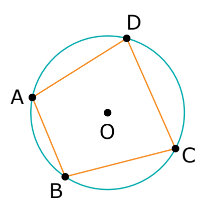
Um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência se, e somente se, seus quatro lados são tangentes à circunferência.



A soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

Quadrilátero inscrito

Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, tem os vértices numa circunferência.

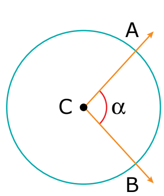


Os ângulos opostos são suplementares.

ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

Ângulo central de uma circunferência

Todo ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é chamado de **ângulo central** dessa circunferência.

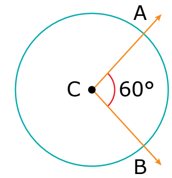


α = Ângulo central
$\widehat{AB}$ = Arco determinado pelo ângulo central

$$a = \widehat{AB}$$

Define-se a medida, em graus, de um arco de circunferência como a medida do ângulo central que o determina.

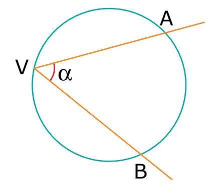
Exemplo:



$m(A\hat{C}B) = m(\widehat{AB}) = 60°$

Ângulo inscrito em uma circunferência

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e os lados são secantes a ela é chamado de **ângulo inscrito** dessa circunferência.

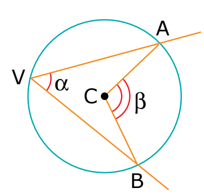


α = Ângulo inscrito
$\widehat{AB}$ = Arco determinado pelo ângulo inscrito

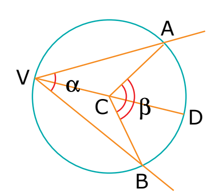
A medida do ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente.

Demonstração:

Traçando o ângulo central b e o diâmetro $\overline{VD}$ passando por **C**, temos:



e



Observe que os triângulos CVA e CVB são isósceles, portanto $C\hat{V}A = C\hat{A}V$ e $C\hat{V}B = C\hat{B}V$.

$A\hat{C}D$ é ângulo externo ao triângulo CVA, assim:

$$A\hat{C}D = C\hat{V}A + C\hat{A}V = 2.C\hat{V}A \Rightarrow C\hat{V}A = \frac{A\hat{C}D}{2}$$

$B\hat{C}D$ é ângulo externo ao triângulo CVB, assim:

$$B\hat{C}D = C\hat{V}B + C\hat{B}V = 2.C\hat{V}B \Rightarrow C\hat{V}B = \frac{B\hat{C}D}{2}$$

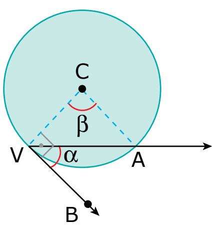
$$a = C\hat{V}A + C\hat{V}B = \frac{A\hat{C}D}{2} + \frac{B\hat{C}D}{2} \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{2}.(A\hat{C}D + B\hat{C}D) \Rightarrow$$

$$a = \frac{\beta}{2}$$

Ângulo de segmento

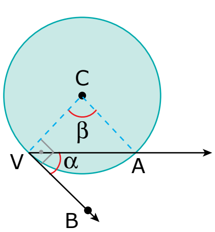
Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência, com um lado tangente e o outro secante à circunferência, é chamado de **ângulo de segmento**.



Um ângulo de segmento e um ângulo central que determinam o mesmo arco são chamados de **ângulos correspondentes** dessa circunferência.

A medida do ângulo de segmento é metade da medida do ângulo central correspondente.

Demonstração:



O ângulo $C\hat{V}A$ é complementar de $A\hat{V}B$.

Logo, $m(C\hat{V}A) = 90° - \alpha$.

Se o triângulo CVA é isósceles, pois $\overline{CV} \equiv \overline{CA}$, então $C\hat{V}A = C\hat{A}V = 90° - \alpha$. Assim, pela soma dos ângulos internos do $\triangle$ CVA:

$$\beta + 90° - \alpha + 90° - \alpha = 180° \Rightarrow 2\alpha = \beta \Rightarrow$$

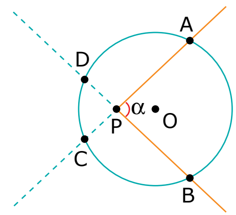
$$\boxed{\alpha = \frac{\beta}{2}}$$

Ângulo excêntrico

Interior

Se o vértice de um ângulo é interior à circunferência e não coincide com o seu centro, esse ângulo é chamado **ângulo excêntrico interior**.

A medida de um ângulo excêntrico interior é igual à semissoma das medidas dos arcos interceptados por ele e por seu oposto pelo vértice.

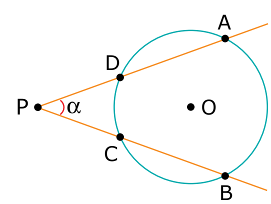


$$\boxed{\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2}}$$

Exterior

Se o vértice de um ângulo é exterior à circunferência e seus lados são secantes a ela, esse ângulo é chamado **ângulo excêntrico exterior**.

A medida de um ângulo excêntrico exterior é igual à semidiferença das medidas dos arcos que ele intercepta.



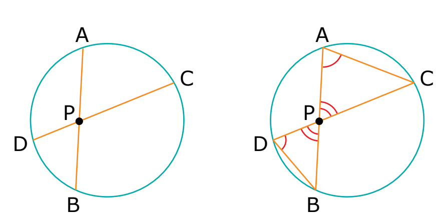
$$\boxed{\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{CD}}{2}}$$

RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Ponto interior à circunferência

Se, em uma circunferência, duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ concorrem em um ponto **P**, então:

$$\boxed{PA.PB = PC.PD}$$



Demonstração:

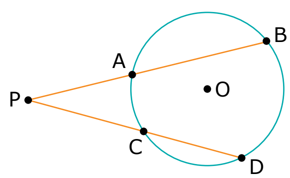
Observe que os triângulos APC e DPB são semelhantes, pelo caso AA ($P\hat{A}C$ e $P\hat{D}B$ são ângulos inscritos que determinam o mesmo arco, e $A\hat{P}C$ e $D\hat{P}B$ são opostos pelo vértice). Assim, temos a proporção:

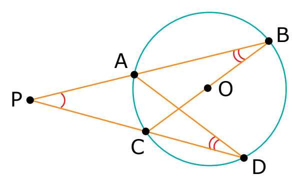
$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

Ponto exterior à circunferência

i) Se duas retas secantes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, concorrentes em **P**, interceptam uma circunferência em **A**, **B**, **C** e **D**, conforme a figura a seguir, então:

$$\boxed{PA.PB = PC.PD}$$





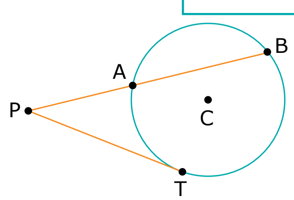
Demonstração:

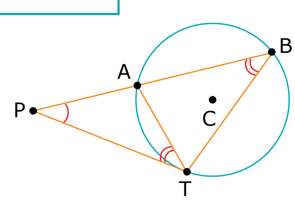
Observe que os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pelo caso AA ($A\hat{P}C$ é ângulo comum aos dois triângulos, e $P\hat{B}C$ e $P\hat{D}A$ são ângulos inscritos que determinam o mesmo arco). Assim, temos a proporção:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

ii) Se uma reta secante $\overleftrightarrow{AB}$ e uma tangente $\overleftrightarrow{PT}$, concorrentes em **P**, interceptam uma circunferência em **A**, **B** e **T**, conforme a figura a seguir, então:

$$\boxed{(PT)^2 = PA.PB}$$





Demonstração:

Observe que os triângulos PAT e PTB são triângulos semelhantes, pelo caso AA ($A\hat{P}T$ é um ângulo comum aos dois triângulos; $P\hat{B}T$, inscrito na circunferência, e $P\hat{T}A$, ângulo de segmento, determinam o mesmo arco). Assim, temos a proporção:

$$\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \Rightarrow (PT)^2 = PA.PB$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IFAL–2016) Pedro, passeando de bicicleta pela bela orla de Maceió percorreu 900π m. Se o diâmetro da roda de sua bicicleta tem 60 cm, então o número de voltas realizadas pela roda é:

A) 15.
B) 500.
C) 1 500.
D) 5 000.
E) 50.

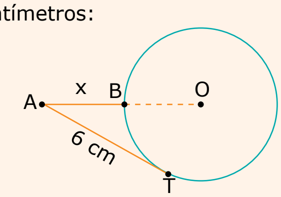
02. CVWY (UFTM-MG) O maior relógio de torre de toda a Europa é o da Igreja St. Peter, na cidade de Zurique, Suíça, que foi construído durante uma reforma do local, em 1970.

O ESTADO DE S. PAULO (Adaptação).

O mostrador desse relógio tem formato circular, e o seu ponteiro dos minutos mede 4,35 m. Considerando $\pi \cong 3{,}1$, a distância que a extremidade desse ponteiro percorre durante 20 minutos é, aproximadamente,

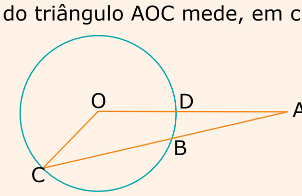
A) 10 m.
B) 9 m.
C) 8 m.
D) 7 m.
E) 6 m.

03. VI8C (FUVEST-SP) O raio da circunferência da figura é 2,5 cm. AT = 6 cm (**T** é o ponto de tangência). Então, AB = x vale, em centímetros:



A) 2. B) 9. C) 3. D) 3,5. E) 4.

04. 9ØLA (Cesgranrio) Na figura a seguir, AB = 8 cm, BC = 10 cm, AD = 4 cm e o ponto **O** é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em cm:



A) 36. B) 45. C) 48. D) 50. E) 54.

05. 5AOU (IFCE–2016) Em uma engrenagem, uma roda tem 90 cm de comprimento e dá 600 voltas, enquanto outra, menor, dá 1 800 voltas. O raio da roda menor, em centímetros, é:

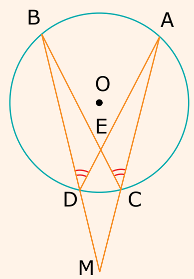
A) $\frac{12}{\neq}$
B) $\frac{15}{\neq}$
C) $\frac{5}{2\neq}$
D) $\frac{3\neq}{2}$
E) π

06. (IFSC-SC–2016) Considere a seguinte situação: Durante a Oktoberfest, em Blumenau-SC, um conjunto de bicicletas com rodas de diâmetro 26 polegadas percorreu 855,6 m em linha reta, durante o desfile na Rua XV de Novembro. Sabendo-se que 1 polegada equivale a 2,5 cm e que $\pi = 3{,}1$, é correto afirmar que, durante o desfile, a roda realizou

A) 600 voltas.
B) 800 voltas.
C) menos de 400 voltas.
D) mais de 1 200 voltas.
E) entre 400 e 500 voltas.

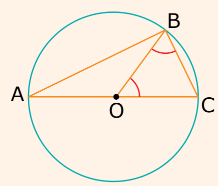
MATEMÁTICA

07. C6IZ
(Mackenzie-SP) Na figura a seguir, sabe-se que $C\hat{A}D = 20°$ e $C\hat{E}D = 70°$. Então, $A\hat{M}B$ é igual a:



A) 50°.
B) 45°.
C) 60°.
D) 22°30'.
E) 30°.

08. 3D1C
(UFRRJ) Um arquiteto vai construir um obelisco de base circular. Serão elevadas sobre essa base duas hastes triangulares, conforme figura a seguir, em que o ponto **O** é o centro do círculo de raio 2 m e os ângulos $B\hat{O}C$ e $O\hat{B}C$ são iguais.



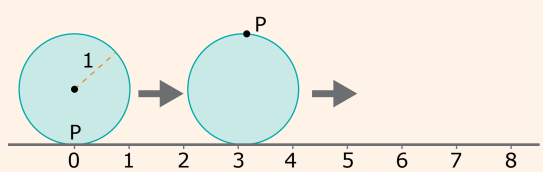
O comprimento do segmento AB é:

A) 2 m.
B) 3 m.
C) $3\sqrt{2}$ m.
D) $2\sqrt{5}$ m.
E) $2\sqrt{3}$ m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. APA2
(UFRGS-RS) Um disco de raio 1 gira ao longo de uma reta coordenada na direção positiva, como representado na figura a seguir.



Considerando-se que o ponto **P** está inicialmente na origem, a coordenada de **P**, após 10 voltas completas, estará entre

A) 60 e 62.
B) 62 e 64.
C) 64 e 66.
D) 66 e 68.
E) 68 e 70.

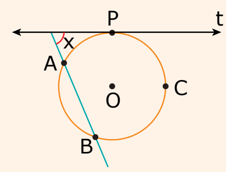
02. (FGV–2017) Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre. Nesse caso, se uma pessoa de 2 m de altura desse uma volta completa na Terra pela linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola dos seus pés em, aproximadamente,

A) 63 cm.
B) 12,6 m.
C) 6,3 km.
D) 12,6 km.
E) 63 km.

03. (UTFPR–2016) Duas cordas cortam-se no interior de um círculo. Os segmentos da primeira são expressos por 6x e 2x + 2 e os da segunda por 2x e 8x – 2. Com isso podemos determinar que o comprimento da maior corda vale:

A) 24.
B) 30.
C) 32.
D) 34.
E) 38.

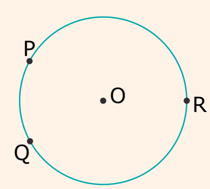
04. IHDG
(IFSP) Na figura, a reta **t** é tangente, no ponto **P**, ao círculo de centro **O**. A medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 100° e a do arco $\overset{\frown}{BCP}$ é 194°. O valor de **x**, em graus, é:



A) 53.
B) 57.
C) 61.
D) 64.
E) 66.

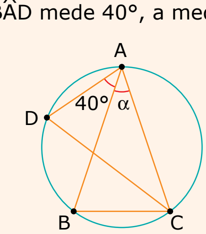
05. (CEFET-RJ–2016) Na figura a seguir temos uma circunferência com centro em **O**. Os pontos **P**, **Q** e **R** são pontos sobre a circunferência, sendo PQ um lado de um hexágono regular inscrito nessa circunferência. Uma formiga estava sobre o ponto **P** e se deslocou sobre a circunferência no sentido horário, até o ponto **Q**, passando pelo ponto **R** uma única vez. Calcule a distância percorrida pela formiga, sabendo que PQ = 3 cm.

Observação: A relação entre o comprimento da circunferência "C" com seu raio "r" é dado por: $C = 2\pi r$.



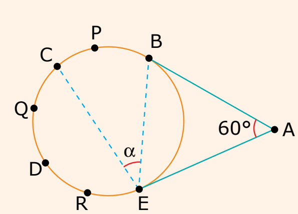
A) 6π cm.
B) 5π cm.
C) 3π cm.
D) 2π cm.

06. EØEB
(UFES) Na figura, **A**, **B**, **C** e **D** são pontos de uma circunferência, a corda CD é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e as cordas AB e AC têm o mesmo comprimento. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede 40°, a medida α do ângulo $B\hat{A}C$ é:



A) 10°.
B) 15°.
C) 20°.
D) 25°.
E) 30°.

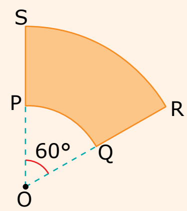
07. M7YB
(FGV) Na figura, AB e AE são tangentes à circunferência nos pontos **B** e **E**, respectivamente, e $B\hat{A}E = 60°$.



Se os arcos $\overset{\frown}{BPC}$, $\overset{\frown}{CQD}$ e $\overset{\frown}{DRE}$ têm medidas iguais, a medida do ângulo $B\hat{E}C$, indicada na figura por α, é igual a

A) 20°.
C) 45°.
E) 80°.
B) 40°.
D) 60°.

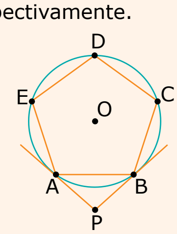
08. NT95 (UFRGS-RS–2016) Considere o setor circular de raio 6 e ângulo central 60° da figura a seguir.



Se **P** e **Q** são pontos médios, respectivamente, de OS e OR, então o perímetro da região sombreada é:

A) $\pi + 6$
D) $\pi + 12$
B) $2\pi + 6$
E) $3\pi + 12$
C) $3\pi + 6$

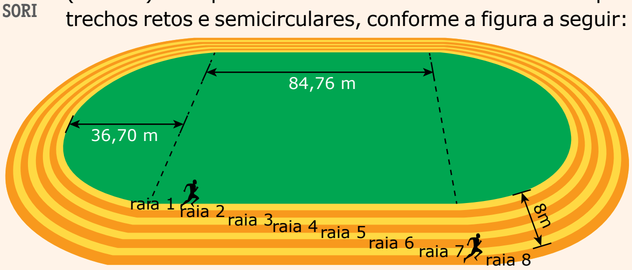
09. 6624 (CEFET-MG–2016) Na figura a seguir, o pentágono regular está inscrito numa circunferência de centro **O** e as semirretas $\overrightarrow{PA}$ e $\overrightarrow{PB}$ são tangentes à circunferência nos pontos **A** e **B**, respectivamente.



A medida do ângulo $A\hat{P}B$, em graus, é igual a:

A) 36.
C) 108.
B) 72.
D) 154.

10. SORI (UEL-PR) Uma pista de corrida de 400 m é constituída por trechos retos e semicirculares, conforme a figura a seguir:



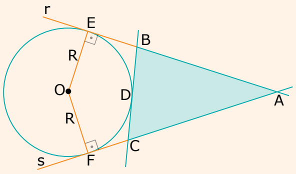
Suponha que dois atletas, nas curvas, sempre se mantenham na parte mais interna de suas raias, de modo a percorrerem a menor distância nas curvas, e que a distância medida a partir da parte interna da raia 1 até a parte interna da raia 8 seja de 8 m.

Para que ambos percorram 400 m, quantos metros o atleta da raia mais externa deve partir à frente do atleta da raia mais interna?

Dado: $\pi = 3,14$

A) 10,00 m.
C) 32,46 m.
E) 100,48 m.
B) 25,12 m.
D) 50,24 m.

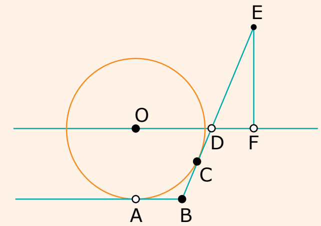
11. 3LLF (EPCAR-MG–2017) Na figura, **E** e **F** são, respectivamente, pontos de tangência das retas **r** e **s** com a circunferência de centro **O** e raio **R**. **D** é ponto de tangência de BC com a mesma circunferência e $\overline{AE}$ = 20 cm.



O perímetro do triângulo ABC (hachurado), em centímetros, é igual a:

A) 20.
B) 10.
C) 40.
D) 15.

12. (CEFET-RJ) Na figura a seguir, **O** é o centro de uma circunferência que tangencia a semirreta BA no ponto **A** e tangencia o segmento BE no ponto **C**. Sabendo ainda que BA é paralela à reta OF, que o segmento EF é perpendicular à OF e que o menor arco da circunferência com extremidades em **A** e **C** mede 60°, podemos afirmar que o ângulo $D\hat{E}F$ mede



A) 20°.
B) 30°.
C) 50°.
D) 60°.

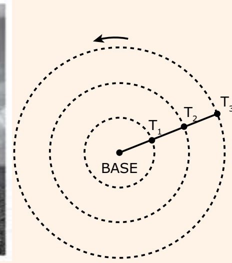
13. B9VH (ITA-SP) Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se **r** é o raio da circunferência inscrita e **a** é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma a + r (em cm) é igual a:

A) 12.
C) 10.
E) 8.
B) 11.
D) 9.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. SC3S (Enem–2017) Pivô central é um sistema de irrigação muito usado na agricultura, em que uma área circular é projetada para receber uma estrutura suspensa. No centro dessa área, há uma tubulação vertical que transmite água através de um cano horizontal longo, apoiado em torres de sustentação, as quais giram, sobre rodas, em torno do centro do pivô, também chamado de base, conforme mostram as figuras. Cada torre move-se com velocidade constante.



Um pivô de três torres (T_1, T_2 e T_3) será instalado em uma fazenda, sendo que as distâncias entre torres consecutivas bem como da base à torre T_1 são iguais a 50 m. O fazendeiro pretende ajustar as velocidades das torres, de tal forma que o pivô efetue uma volta completa em 25 horas. Use 3 como aproximação para π.

Para atingir seu objetivo, as velocidades das torres T_1, T_2 e T_3 devem ser, em metro por hora, de

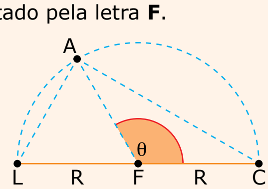
A) 12, 24 e 36.
B) 6, 12 e 18.
C) 2, 4 e 6.
D) 300, 1 200 e 2 700.
E) 600, 2 400 e 5 400.

02. (Enem) Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro **d** em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.

Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando-se a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível. Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

A) πd B) $2\pi d$ C) $4\pi d$ D) $5\pi d$ E) $10\pi d$

03. (Enem) Durante seu treinamento, um atleta percorre metade de uma pista circular de raio **R**, conforme figura a seguir. A sua largada foi dada na posição representada pela letra **L**, a chegada está representada pela letra **C** e a letra **A** representa o atleta. O segmento LC é um diâmetro da circunferência e o centro da circunferência está representado pela letra **F**.

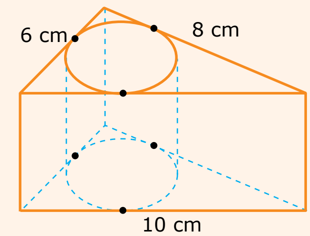


Sabemos que, em qualquer posição que o atleta esteja na pista, os segmentos LA e AC são perpendiculares. Seja θ o ângulo que o segmento AF faz com segmento FC.

Quantos graus medirá o ângulo θ quando o segmento AC medir **R** durante a corrida?

A) 15°. B) 30°. C) 60°. D) 90°. E) 120°.

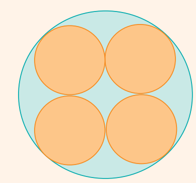
04. (Enem) Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a

A) 1 cm.
B) 2 cm.
C) 3 cm.
D) 4 cm.
E) 5 cm.

05. (Enem) Uma fábrica de tubos acondiciona tubos cilíndricos menores dentro de outros tubos cilíndricos. A figura mostra uma situação em que quatro tubos cilíndricos estão acondicionados perfeitamente em um tubo com raio maior.



Suponha que você seja o operador da máquina que produzirá os tubos maiores em que serão colocados, sem ajustes ou folgas, quatro tubos cilíndricos internos. Se o raio da base de cada um dos cilindros menores for igual a 6 cm, a máquina por você operada deverá ser ajustada para produzir tubos maiores, com raio da base igual a:

A) 12 cm.
B) $12\sqrt{2}$ cm.
C) $24\sqrt{2}$ cm.
D) $6(1 + \sqrt{2})$ cm.
E) $12(1 + \sqrt{2})$ cm.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. E	05. B	07. E
02. B	04. E	06. E	08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B	06. C	11. C
02. B	07. B	12. B
03. E	08. C	13. C
04. D	09. C	
05. B	10. D	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. A	03. C	05. D
02. D	04. B	

Total dos meus acertos: _____ de _____ . ______ %

Médias

MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética dos números reais $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definida por:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

Exemplos:

1º) Calcular a média aritmética dos números $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{4}{63}$.

$$A = \frac{\frac{5}{7} + \frac{2}{9} + \frac{4}{63}}{3} = \frac{9.5 + 7.2 + 4}{3.7.9} = \frac{63}{189} = \frac{1}{3}$$

2º) (FUVEST-SP) O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0 e 2. Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

A média aritmética da primeira rodada foi de $\frac{5+3+1+4+0+2}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ gols por jogo. A média da primeira e segunda rodadas é 20% superior, ou seja, é de $\frac{5}{2}.1,2 = \frac{5}{2}.\frac{6}{5} = 3$ gols por jogo.

Como serão realizadas 11 partidas, teremos um total de 33 gols. Porém, na primeira rodada, já foram feitos 15 gols. Portanto, na segunda rodada, o número de gols a serem marcados é 18.

MÉDIA GEOMÉTRICA

A média geométrica dos números reais positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ é definida por:

$$G = \sqrt[n]{x_1.x_2.x_3. \ ... \ .x_n}$$

Exemplos:

1º) Calcular a média geométrica dos números 90, 75 e 4.

$$G = \sqrt[3]{90 \ . \ 75 \ . \ 4} = \sqrt[3]{27\ 000} = 30$$

2º) José investiu um capital **C** na bolsa há 3 anos. No primeiro ano, ele obteve um rendimento de 27%, no segundo ano, o rendimento caiu para 12% e, no terceiro ano, ocorreu um prejuízo de 8%. Qual foi o rendimento médio anual?

O montante obtido por José ao final dos três anos é dado por M = 1,27 . 1,12 . 0,92.C. Desejamos encontrar uma taxa média **i** tal que $M = (1 + i)^3.C$. Logo, temos:

$(1 + i)^3.C = 1,27 \ . \ 1,12 \ . \ 0,92.C \Rightarrow$

$(1 + i)^3 = 1,27 \ . \ 1,12 \ . \ 0,92 \Rightarrow$

$(1 + i) = \sqrt[3]{1,27 \ . \ 1,12 \ . \ 0,92}$

Observe que (1 + i) é a média geométrica dos números 1,27, 1,12 e 0,92. Essa média é dada por $\sqrt[3]{1,308608}$, que é, aproximadamente, 1,0938. Logo, o rendimento médio anual é, aproximadamente, 9,38%.

MÉDIA HARMÔNICA

Dados os números reais não nulos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, a média harmônica desses números é definida por:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \cdots + \frac{1}{x_n}}$$

Exemplos:

1º) Calcular a média harmônica dos números 15 e 5.

$$H = \frac{2}{\frac{1}{15} + \frac{1}{5}} = \frac{2}{\frac{4}{15}} = 2.\frac{15}{4} = \frac{15}{2}$$

2º) João está fazendo uma viagem. Na primeira metade da viagem, sua velocidade média é 80 km/h. Na segunda metade da viagem, sua velocidade média aumentou para 120 km/h. Qual a velocidade média no total do percurso?

A velocidade média **v** é dada pela média harmônica das velocidades nas duas metades da viagem. Assim:

$$v = \frac{2}{\frac{1}{80} + \frac{1}{120}} = \frac{2}{\frac{5}{240}} = 2.\frac{240}{5} = 96$$

Portanto, a velocidade média ao longo de toda a viagem foi de 96 km/h.

PROPRIEDADE DAS MÉDIAS

Dados a, b ∈ $\mathbb{R}^*_+$, com a ≥ b, valem as seguintes desigualdades:

$$b \leq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq a$$

Essa propriedade também é verificada para três ou mais números reais positivos. As médias estão no intervalo que vai do menor até o maior número tomado. Quando elas são diferentes, a maior entre elas é a aritmética, e a menor, a harmônica.

MÉDIA PONDERADA

A média ponderada dos números reais positivos $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, com pesos $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ (também números reais positivos), respectivamente, é definida por:

$$P = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + \cdots + x_nm_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$$

Exemplos:

1º) Calcular a média ponderada dos números 15, 20 e 40, com pesos 6, 3 e 1, respectivamente.

$$M = \frac{15 \, . \, 6 + 20 \, . \, 3 + 40}{6+3+1} = \frac{90+60+40}{10} = \frac{190}{10} = 19$$

2º) No processo seletivo de uma empresa, os candidatos são submetidos a testes de Português e Matemática, além de uma entrevista. A cada um desses é atribuída uma nota que varia de zero a dez. Porém, a entrevista tem peso três vezes maior que os testes de Matemática e Português. A nota final do candidato é a média das notas de cada etapa, considerando-se o peso de cada uma delas. Essa empresa só seleciona candidatos que obtiverem uma nota final igual ou superior a oito. Maria obteve nota 6 no teste de Português e 7 em Matemática. Qual é a nota mínima que ela deve obter na entrevista para ser selecionada?

Considere que as notas no teste de Português, no de Matemática e na entrevista sejam, respectivamente, n_p, n_m e n_e. Dessa forma, a nota final **N** de um candidato é dada por:

$$N = \frac{n_p + n_m + 3n_e}{1+1+3}$$

Assim, para Maria obter nota 8, devemos ter:

$$\frac{6+7+3n_e}{5} = 8 \Rightarrow 13 + 3n_e = 40 \Rightarrow 3n_e = 27 \Rightarrow n_e = 9$$

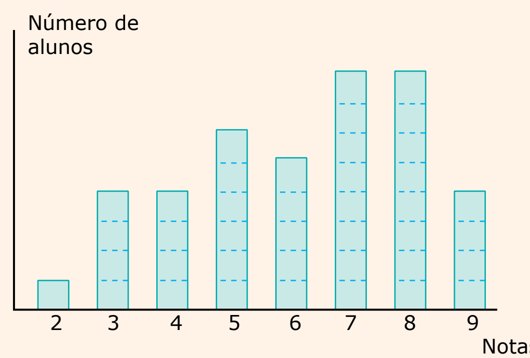
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. J5PM (UEG-GO–2015) A Universidade Estadual de Goiás mudou seu sistema de avaliação e uma das mudanças é o cálculo da média final, que passou a ser dado por: média final $= \frac{2.N_1 + 3.N_2}{5}$, onde N_1 e N_2 são a primeira e segunda nota do aluno, respectivamente. Se um aluno tiver 5,0 e 7,0 na primeira e na segunda nota, respectivamente, a média final desse aluno será:

A) 6,3.
B) 6,2.
C) 6,1.
D) 6,0.

02. 2Q39 (ESPM-SP–2015) O gráfico a seguir mostra a distribuição das notas obtidas por uma turma de 40 alunos numa prova de Matemática:



Pode-se concluir que a média aritmética das notas dessa turma foi:

A) 6,35.
B) 7,05.
C) 6,85.
D) 7,25.
E) 6,15.

03. (UERJ) Na tabela a seguir, estão indicados os preços do rodízio de *pizzas* de um restaurante.

Dias da semana	Valor unitário do rodízio (R$)
Segunda-feira, terça-feira, quarta-feira e quinta-feira	18,50
Sexta-feira, sábado e domingo	22,00

Considere um cliente que foi a esse restaurante todos os dias de uma mesma semana, pagando um rodízio em cada dia.

Determine o valor médio que esse cliente pagou, em reais, pelo rodízio nessa semana.

04. F5S8 (UEG-GO–2016) A tabela a seguir apresenta o número de ônibus utilizados no transporte público de um município e o número de passageiros transportados num período de cinco dias.

Número de ônibus	Número de passageiros
47	1 410
50	1 400
48	1 536
52	1 352
49	1 666

Os dados da tabela indicam que o número médio de passageiros transportados por ônibus nesse município durante esse período é

A) superior a 30 e inferior a 40.

B) inferior a 30.

C) superior a 40 e inferior a 50.

D) superior a 50.

05. WM1K (UEL-PR) Um automóvel subiu uma ladeira a uma velocidade média de 60 km/h e, em seguida, desceu a mesma ladeira à velocidade média de 100 km/h. A velocidade média desse veículo no percurso inteiro foi de

A) 72 km/h. C) 78 km/h. E) 84 km/h.

B) 75 km/h. D) 80 km/h.

06. NTKW (FDSBC-SP–2016) Um escritório de advocacia tem 22 funcionários cuja média salarial é igual a R$ 3 500,00. Se nenhum funcionário for dispensado e forem contratados três novos funcionários, com salários de R$ 900,00, R$ 1 200,00 e R$ 1 800,00, a média salarial passará a ser igual a

A) R$ 3 236,00. C) R$ 3 350,00.

B) R$ 3 248,00. D) R$ 3 384,00.

07. (Mackenzie-SP)

Turma	N. de alunos	Média das notas obtidas
A	60	5,0
B	50	4,0
C	40	7,0
D	50	3,0

A tabela anterior se refere a uma prova aplicada a 200 alunos, distribuídos em 4 turmas, **A**, **B**, **C** e **D**. A média aritmética das notas dessa prova é:

A) 4,65. C) 4,45. E) 4,35.

B) 4,25. D) 4,55.

08. 26CL (UCB-DF–2016) A média salarial dos 100 funcionários de uma empresa é R$ 3 200,00. Se forem dispensados 20 funcionários com média salarial de R$ 4 000,00, a média salarial, em reais, dos que ficarem na empresa será igual a:

A) 2 800. C) 3 200. E) 4 000.

B) 3 000. D) 3 600.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFG-GO) De acordo com diagnóstico do Banco Central a respeito de meios de pagamento de varejo no Brasil, no ano de 2006, constata-se que 24% dos pagamentos foram feitos com cheque e 46%, com cartão. O valor médio desses pagamentos foi de R$ 623,00 para os cheques e de R$ 65,00 para os cartões. O valor médio, quando se consideram todos os pagamentos efetuados com cheque e cartão, é, aproximadamente,

A) R$ 179,00. D) R$ 302,00.

B) R$ 240,00. E) R$ 344,00.

C) R$ 256,00.

02. 84CZ (Unifor-CE–2016) Um professor de uma faculdade particular de Fortaleza implantou, em sua disciplina, o seguinte critério para avaliar seus alunos: o aluno fará duas avaliações durante o semestre, a primeira com peso 2 e a segunda com peso 3. Se o aluno não obter média 7 nessas avaliações, ele terá que fazer uma avaliação final. Sua média final será então a média entre a nota da avaliação final, com peso 2 e a média das avaliações do semestre, com peso 3. Um aluno obteve nota 4 na primeira avaliação e nota 6 na segunda avaliação. Se a média final para aprovação é 5, qual a menor nota que esse aluno precisa obter na avaliação final para ser aprovado?

A) 4,5 C) 5,2 E) 5,7

B) 4,7 D) 5,5

03. (Uncisal–2016) Num certo dia do mês de novembro de 2015, seis barracas da Feirinha de Artesanato da Pajuçara vendiam castanhas de caju em embalagens com pesos variados de acordo com a tabela.

Barraca	Embalagem (g)	Preço (R$)
A	1 000	48,00
B	800	44,00
C	1 000	45,00
D	1 000	48,00
E	800	40,00
F	800	40,00

Nesse dia, o preço médio de venda do quilo da castanha, desprezando-se os centavos, era

A) R$ 44,00. C) R$ 49,00. E) R$ 900,00.

B) R$ 47,00. D) R$ 59,00.

04. (PUC Minas) Ao misturar 2 kg de café em pó do tipo I com 3 kg de café em pó do tipo II, um comerciante obtém um tipo de café cujo preço é R$ 6,80 o quilograma. Mas, se misturar 3 kg de café em pó do tipo I com 2 kg de café em pó do tipo II, o quilo da nova mistura custará R$ 8,20. Com base nessas informações, é correto afirmar que o preço de um quilo do café em pó do tipo I é igual a:

A) R$ 4,00. C) R$ 11,00.

B) R$ 7,50. D) R$ 12,40.

MATEMÁTICA

05. (PUC-Campinas-SP) A análise do biotipo de cada um dos atletas que integraram a delegação brasileira na última Olimpíada permitiu que se calculasse, certo dia, a média de pesos das 122 mulheres participantes: 62 kg. Supondo-se que uma dessas atletas fosse excluída do grupo, a média de pesos das 121 restantes passaria a ser 61,9 kg. Nessas condições, o peso, em quilogramas, da atleta excluída seria:

A) 75,5.
B) 75,2.
C) 74,6.
D) 74,1.
E) 73,8.

06. 74WM (FUVEST-SP–2016) Em uma classe com 14 alunos, 8 são mulheres e 6 são homens. A média das notas das mulheres no final do semestre ficou 1 ponto acima da média da classe. A soma das notas dos homens foi metade da soma das notas das mulheres. Então, a média das notas dos homens ficou mais próxima de:

A) 4,3.
B) 4,5.
C) 4,7.
D) 4,9.
E) 5,1.

07. UH7V (UECE) A média aritmética de 50 números é 40. Dentre esses estão os números 75, 125 e 155, os quais são suprimidos. A média aritmética dos 47 números restantes é:

A) 39.
B) 37.
C) 35.
D) 33.

08. 8PHZ (PUC Rio) Foi feita uma pesquisa sobre a qualidade do doce de abóbora da empresa Bora-Bora. Cada entrevistado dava ao produto uma nota de 0 a 10. Na primeira etapa da pesquisa, foram entrevistados 1 000 consumidores e a média das notas foi igual a 7. Após a realização da segunda etapa da pesquisa, constatou-se que a média das notas dadas pelos entrevistados nas duas etapas foi igual a 8. O número de entrevistados na segunda etapa foi, no mínimo, igual a:

A) 300.
B) 400.
C) 500.
D) 700.
E) 850.

09. CWO9 (FGV–2016) Um professor de Matemática aplica três provas em seu curso (P_1, P_2, P_3), cada uma valendo de 0 a 10 pontos. A nota final do aluno é a média aritmética ponderada das três provas, sendo que o peso da prova P_n é igual a n^2. Para ser aprovado na matéria, o aluno tem que ter nota final maior ou igual a 5,4. De acordo com esse critério, um aluno será aprovado nessa disciplina, independentemente das notas tiradas nas duas primeiras provas, se tirar na P_3, no mínimo, nota

A) 7,6.
B) 7,9.
C) 8,2.
D) 8,4.
E) 8,6.

10. ZQDC (UEL-PR) A média aritmética dos números **a** e **b** é $\frac{a+b}{2}$, e a média geométrica de **a** e **b** é $\sqrt{ab}$. Dois números têm média aritmética 4,1 e média geométrica 4. A alternativa que apresenta o maior deles é:

A) 1.
B) 4.
C) 2.
D) 8,2.
E) 5.

11. RDZZ (FGV-SP) Uma sala de aula é constituída por 10% de mulheres e 90% de homens. Em uma prova valendo de 0 a 100 pontos, todas as mulheres tiraram a mesma nota, a média aritmética das notas dos homens foi 83, e a média aritmética das notas de toda a classe foi 84. Nessas condições, cada mulher da sala fez um total de pontos igual a:

A) 90.
B) 91.
C) 92.
D) 93.
E) 94.

12. (ESPM-SP–2016) Seja A = {2x, x + 10, x, 3x + 10, 4x} um conjunto de 5 números positivos. Se o menor deles for retirado, a média aritmética desses valores aumenta em 7 unidades. Podemos afirmar que a diferença entre o maior valor e o menor valor dos elementos desse conjunto é igual a:

A) 50.
B) 55.
C) 60.
D) 65.
E) 70.

13. 3C3I (Insper) Para fazer parte do time de basquete de uma escola, é necessário ter, no mínimo, 11 anos. A média das idades dos cinco jogadores titulares desse time é 13 anos, sendo que o mais velho deles tem 17 anos. Dessa forma, o segundo mais velho do time titular pode ter, no máximo,

A) 17 anos.
B) 16 anos.
C) 15 anos.
D) 14 anos.
E) 13 anos.

14. VPE2 (Uncisal–2016) Um professor prometeu um churrasco para sua turma de 20 alunos se a média aritmética das notas finais da turma fosse superior ou igual a 7,50. O planejamento da disciplina previa a realização de três avaliações (um trabalho individual, um trabalho em grupo e uma prova, realizadas nesta ordem) e a nota final de cada aluno seria a média ponderada dessas avaliações, com pesos 2, 3 e 5, respectivamente. Mesmo levando em conta que Joana (7,00 no trabalho individual e 5,00 no trabalho em grupo) não compareceu à prova por motivo de doença, o professor verificou que a média dos outros dezenove alunos foi igual a 7,60. Que nota mínima Joana precisa obter na segunda chamada para a turma ganhar o churrasco?

A) 9,18
B) 9,00
C) 6,60
D) 5,40
E) 4,80

15. 9A4Y (UECE–2015) Se **x** é a média aritmética dos números reais **a**, **b** e **c**, **y** é a média aritmética de seus quadrados, então a média aritmética de seus produtos dois a dois ab, ac, bc, em função de **x** e **y** é

Sugestão: Considere o quadrado da soma dos três números.

A) $\frac{3x^2 - y}{2}$
B) $\frac{3x + y}{2}$
C) $\frac{3x^2 + y}{2}$
D) $\frac{3x - y}{2}$

16. F9EM (Albert Einstein-SP–2018) Pedro e Luíza estão jogando cartas, sendo que, em cada carta está escrito algum número inteiro e positivo. Cada um inicia o jogo com 5 cartas e informa ao adversário a média dos números de suas cartas. No início do jogo, Pedro avisou que a média de suas cartas era 6 e Luíza avisou que a média de suas cartas era 4. Na primeira rodada Pedro passou uma carta para Luíza e Luíza passou uma carta para Pedro que estava escrito o número 1.

Se a média das cartas que Pedro passou a ter ficou igual a 4,8, o número da carta que Pedro passou para Luíza era

A) 4. B) 5. C) 6. D) 7.

17. (Insper-SP) A média das idades dos seis jogadores titulares de um time de vôlei é 27 anos e a média das idades dos seis jogadores reservas é 24 anos. Devido a uma contusão, um dos jogadores titulares foi afastado da equipe. Com isso, um dos reservas assumiu seu lugar no sexteto titular, ficando a equipe com apenas cinco reservas. Após a substituição, a média das idades dos titulares caiu para 26 anos, enquanto a dos reservas subiu para 24,8 anos. A idade do jogador que foi afastado por contusão é:

A) 26 anos.
B) 27 anos.
C) 28 anos.
D) 29 anos.
E) 30 anos.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2018) A Comissão Interna de Prevenção de Acidentes (CIPA) de uma empresa, observando os altos custos com os frequentes acidentes de trabalho ocorridos, fez, a pedido da diretoria, uma pesquisa do número de acidentes sofridos por funcionários. Essa pesquisa, realizada com uma amostra de 100 funcionários, norteará as ações da empresa na política de segurança no trabalho.

Os resultados obtidos estão no quadro.

Número de acidentes sofridos	Número de trabalhadores
0	50
1	17
2	15
3	10
4	6
5	2

A média do número de acidentes por funcionário na amostra que a CIPA apresentará à diretoria da empresa é

A) 0,15.
B) 0,30.
C) 0,50.
D) 1,11.
E) 2,22.

02. (Enem–2018) Os alunos da disciplina de estatística, em um curso universitário, realizam quatro avaliações por semestre com os pesos de 20%, 10%, 30% e 40%, respectivamente. No final do semestre, precisam obter uma média nas quatro avaliações de, no mínimo, 60 pontos para serem aprovados. Um estudante dessa disciplina obteve os seguintes pontos nas três primeiras avaliações: 46, 60 e 50, respectivamente.

O mínimo de pontos que esse estudante precisa obter na quarta avaliação para ser aprovado é

A) 29,8.
B) 71,0.
C) 74,5.
D) 75,5.
E) 84,0.

03. 7JHJ (Enem–2016) Preocupada com seus resultados, uma empresa fez um balanço dos lucros obtidos nos últimos sete meses, conforme dados do quadro.

Mês	I	II	III	IV	V	VI	VII
Lucro (em milhões de reais)	37	33	35	22	30	35	25

Avaliando os resultados, o conselho diretor da empresa decidiu comprar, nos dois meses subsequentes, a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês em que o lucro mais se aproximou da média dos lucros mensais dessa empresa nesse período de sete meses. Nos próximos dois meses, essa empresa deverá comprar a mesma quantidade de matéria-prima comprada no mês

A) I.
B) II.
C) IV.
D) V.
E) VII.

04. (Enem–2015) Um concurso é composto por cinco etapas. Cada etapa vale 100 pontos. A pontuação final de cada candidato é a média de suas notas nas cinco etapas. A classificação obedece à ordem decrescente das pontuações finais. O critério de desempate baseia-se na maior pontuação na quinta etapa.

Candidato	Média nas quatro primeiras etapas	Pontuação na quinta etapa
A	90	60
B	85	85
C	80	95
D	60	90
E	60	100

A ordem de classificação final desse concurso é:

A) A, B, C, E, D.
B) B, A, C, E, D.
C) C, B, E, A, D.
D) C, B, E, D, A.
E) E, C, D, B, A.

MATEMÁTICA

05. (Enem) Ao final de uma competição de ciências em uma escola, restaram apenas três candidatos. De acordo com as regras, o vencedor será o candidato que obtiver a maior média ponderada entre as notas das provas finais nas disciplinas Química e Física, considerando, respectivamente, os pesos 4 e 6 para elas. As notas são sempre números inteiros. Por questões médicas, o candidato II ainda não fez a prova final de Química. No dia em que sua avaliação for aplicada, as notas dos outros dois candidatos, em ambas as disciplinas, já terão sido divulgadas.

O quadro apresenta as notas obtidas pelos finalistas nas provas finais.

Candidato	Química	Física
I	20	23
II	X	25
III	21	18

A menor nota que o candidato II deverá obter na prova final de Química para vencer a competição é:

A) 18.
B) 19.
C) 22.
D) 25.
E) 26.

06. (Enem) Um pesquisador está realizando várias séries de experimentos com alguns reagentes para verificar qual é o mais adequado para a produção de um determinado produto. Cada série consiste em avaliar um dado reagente em cinco experimentos diferentes. O pesquisador está especialmente interessado naquele reagente que apresentar a maior quantidade dos resultados de seus experimentos acima da média encontrada para aquele reagente. Após a realização de cinco séries de experimentos, o pesquisador encontrou os seguintes resultados.

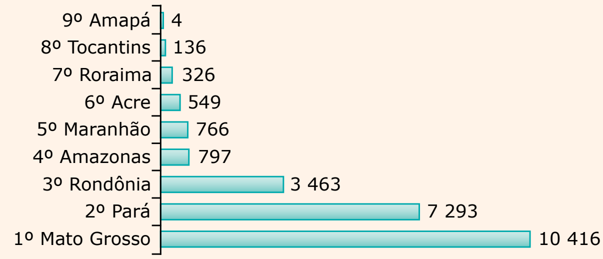
	Reagente 1	Reagente 2	Reagente 3	Reagente 4	Reagente 5
Experimento 1	1	0	2	2	1
Experimento 2	6	6	3	4	2
Experimento 3	6	7	8	7	9
Experimento 4	6	6	10	8	10
Experimento 5	11	5	11	12	11

Levando-se em consideração os experimentos feitos, o reagente que atende às expectativas do pesquisador é o

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

07. (Enem) Em sete de abril de 2004, um jornal publicou o *ranking* de desmatamento, conforme gráfico, da chamada Amazônia Legal, integrada por nove estados.

Ranking **do desmatamento em km²**



Disponível em: <www.folhaonline.com.br>. Acesso em: 30 abr. 2010 (Adaptação).

Considerando-se que até 2009 o desmatamento cresceu 10,5% em relação aos dados de 2004, o desmatamento médio por estado em 2009 está entre

A) 100 km² e 900 km².
B) 1 000 km² e 2 700 km².
C) 2 800 km² e 3 200 km².
D) 3 300 km² e 4 000 km².
E) 4 100 km² e 5 800 km².

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. E
- 03. R$ 20,00
- 04. B
- 05. B
- 06. A
- 07. A
- 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. B
- 03. C
- 04. C
- 05. D
- 06. C
- 07. C
- 08. C
- 09. D
- 10. E
- 11. D
- 12. C
- 13. C
- 14. D
- 15. A
- 16. D
- 17. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. C
- 03. D
- 04. B
- 05. A
- 06. B
- 07. C

Total dos meus acertos: ______ de ______ . ______ %

MATEMÁTICA

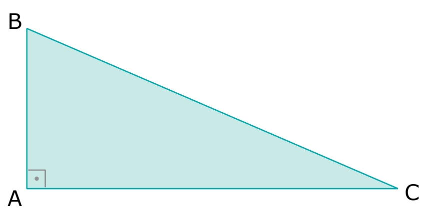
FRENTE C — MÓDULO 06

Trigonometria no Triângulo Retângulo

TRIÂNGULO RETÂNGULO

Triângulo retângulo é todo triângulo que tem um ângulo reto.

Na figura, $B\hat{A}C$ é reto. Costumamos dizer que o triângulo ABC é retângulo em **A**.

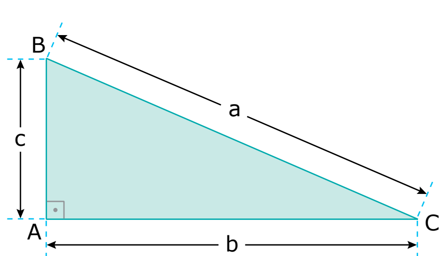


Em todo triângulo retângulo, os lados que formam o ângulo reto são denominados **catetos**, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de **hipotenusa**, e os ângulos agudos são denominados **complementares**.

TEOREMA DE PITÁGORAS

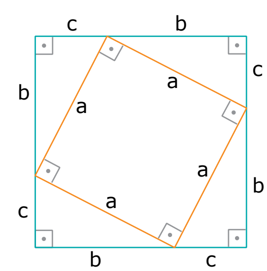
> Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

Na figura, **b** e **c** são as medidas dos catetos; e **a**, a medida da hipotenusa. Assim, temos:



$$\boxed{c^2 + b^2 = a^2}$$

A demonstração formal do Teorema de Pitágoras pode ser feita a partir das relações métricas no triângulo retângulo. Oferecemos, aqui, apenas uma ideia de como obter tal resultado, utilizando um quadrado (de lado b + c), subdividido em quatro triângulos retângulos (de lados **a**, **b** e **c**), e um quadrado menor (de lado **a**).



Somando as áreas dos quatro triângulos retângulos e do quadrado menor, obtemos a área do quadrado maior. Logo:

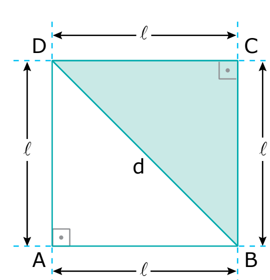
$$4.\frac{bc}{2} + a^2 = (b + c)^2 \Rightarrow 2bc + a^2 = b^2 + 2bc + c^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Aplicações

Vamos deduzir, num quadrado, a relação entre as medidas **d** de uma diagonal e ℓ de um lado e, num triângulo equilátero, a relação entre as medidas **h** de uma altura e ℓ de um lado.

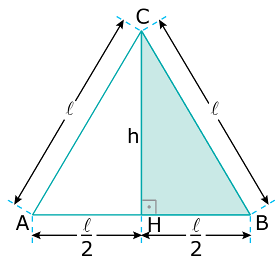
Diagonal do quadrado



No triângulo BCD, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2 \Rightarrow \boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$

Altura do triângulo equilátero



No triângulo HBC, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4} \Rightarrow \boxed{h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}$$

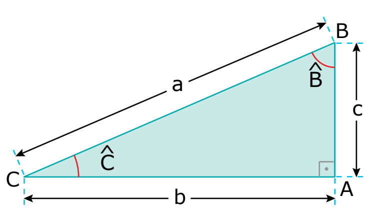
RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

i) Seno: Em todo triângulo retângulo, o seno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

ii) Cosseno: Em todo triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto adjacente a esse ângulo e a medida da hipotenusa.

iii) Tangente: Em todo triângulo retângulo, a tangente de um ângulo agudo é a razão entre a medida do cateto oposto a esse ângulo e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.

Num triângulo ABC, retângulo em **A**, vamos indicar por $\hat{B}$ e $\hat{C}$ as medidas dos ângulos internos, respectivamente, de vértices **B** e **C**.

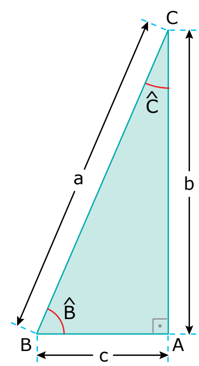


	$\hat{B}$	$\hat{C}$
Seno (sen)	$\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$
Cosseno (cos)	$\frac{c}{a}$	$\frac{b}{a}$
Tangente (tg)	$\frac{b}{c}$	$\frac{c}{b}$

Utilizando o quadrado e o triângulo equilátero, é possível construir uma tabela com os valores do seno, do cosseno e da tangente dos ângulos 30°, 45° e 60°.

a	30°	45°	60°
sen a	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos a	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg a	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

RELAÇÕES ENTRE SENO, COSSENO E TANGENTE



Na figura, temos:

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{c}{a}, \ \cos \hat{C} = \frac{b}{a}, \ \text{tg } \hat{C} = \frac{c}{b}$$

Dividindo sen $\hat{B}$ por cos $\hat{B}$, obtemos:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{B}}{\cos\hat{B}} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{c} = \text{tg}\,\hat{B}$$

$$\boxed{\text{tg a} = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}}$$

Portanto, a tangente de um ângulo é o quociente entre o seno e o cosseno desse ângulo.

Dividindo os membros de $b^2 + c^2 = a^2$ por a^2, temos:

$$\frac{b^2 + c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1$$

Substituindo $\frac{b}{a}$ por sen $\hat{B}$, e $\frac{c}{a}$ por cos $\hat{B}$, obtemos:

$$\boxed{\text{sen}^2\,\hat{B} + \cos^2\hat{B} = 1}$$

Portanto, a soma dos quadrados do seno e do cosseno de um ângulo é igual a 1.

Observamos ainda que sen $\hat{B}$ = cos $\hat{C}$ e sen $\hat{C}$ = cos $\hat{B}$.

Portanto, o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do complemento desse ângulo e vice-versa.

$\text{sen}^2 \text{ a} + \cos^2 \text{ a} = 1$
$\cos \text{ a} = \text{sen } (90° - \text{a})$
$\text{sen a} = \cos (90° - \text{a})$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio) O valor de $\dfrac{\cos 45° + \text{sen}\,30°}{\cos 60°}$ é:

A) $\sqrt{2} + 1$

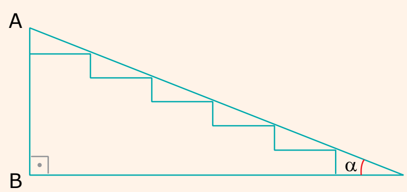
B) 2

C) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

E) 0

02. N58R (Vunesp) A figura representa o perfil de uma escada cujos degraus têm todos a mesma extensão e a mesma altura. Se AB = 2 m e α mede 30°, então a medida da extensão de cada degrau é:



A) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ m

B) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ m

C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ m

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m

E) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ m

03. (PUC Rio) Queremos encostar uma escada de sete metros de comprimento em uma parede, de modo que ela forme um ângulo de 30° com a parede. A que distância da parede devemos apoiar a escada no solo?

A) 1 m.

B) 2 m.

C) 2,5 m.

D) 3,5 m.

E) 5 m.

04. ECR4 (UFSC) Um observador, a 100 metros de uma torre e com a cabeça ao nível da base desta, enxerga o topo da torre inclinando a cabeça em um ângulo de 30°. A altura da torre é:

A) 100.tg 30° m.

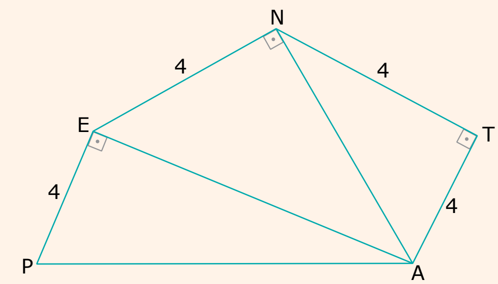
B) 100.sen 30° m.

C) 100.cos 30° m.

D) 100.tg 60° m.

E) $100\sqrt{2}$.tg 30° m.

05. 8JEU (UFPA) O perímetro, em cm, do pentágono PENTA da figura é igual a:



A) 16.

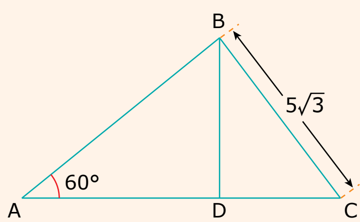
B) 24.

C) 32.

D) 64.

E) 80.

06. AC40 (CEFET-MG–2016) O triângulo ABC é retângulo em $A\hat{B}C$ e os segmentos $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são perpendiculares.



Assim, a medida do segmento $\overline{DC}$ vale:

A) $10\sqrt{3}$

B) $6\sqrt{3}$

C) $\dfrac{15}{2}$

D) $\dfrac{13}{2}$

07. (PUC-Campinas-SP–2016) "...tudo teria começado com a haste vertical ao Sol, que projetava sua sombra num plano horizontal demarcado." Com um ângulo de inclinação de 30°, em relação ao solo plano, os raios solares incidindo sobre uma haste vertical de 2,5 m de comprimento geram uma sombra de x m. Um pouco mais tarde, quando o ângulo de inclinação dos raios solares é de 45° graus, a mesma sombra gerada agora é de y m. A diferença ente **x** e **y** é de, aproximadamente,

sen 30° = 0,5	cos 30° = 0,866	tg 30° = 0,577
sen 45° = 0,707	cos 45° = 0,707	tg 45° = 1

A) 1 m.

B) 1,83 m.

C) 2,45 m.

D) 0,88 m.

E) 2,27 m.

08. 1FY1 (UECE–2016) Uma pessoa, com 1,7 m de altura, está em um plano horizontal e caminha na direção perpendicular a um prédio cuja base está situada neste mesmo plano. Em certo instante, essa pessoa visualiza o ponto mais alto do prédio sob um ângulo de 30 graus. Ao caminhar mais 3 m, visualiza o ponto mais alto do prédio, agora sob um ângulo de 45 graus. Nestas condições, a medida da altura do prédio, em metros, é, aproximadamente,

A) 5,6.

B) 6,6.

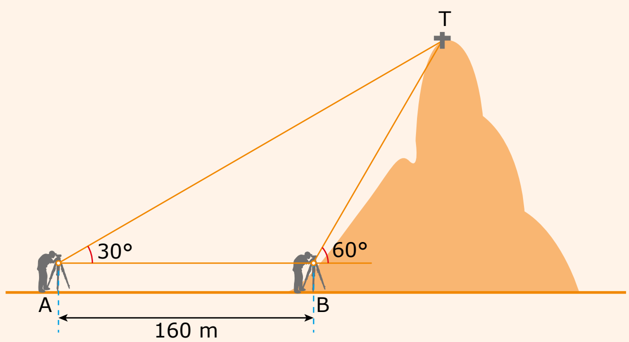
C) 7,6.

D) 8,6.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. 14VH
(UFSJ-MG) O teodolito é um instrumento de medida de ângulos bastante útil na topografia. Com ele, é possível determinar distâncias que não poderiam ser medidas diretamente. Para calcular a altura de um morro em relação a uma região plana no seu entorno, o topógrafo pode utilizar esse instrumento adotando o seguinte procedimento: situa o teodolito no ponto **A** e, mirando o ponto **T** no topo do morro, mede o ângulo de 30° com a horizontal; desloca o teodolito 160 metros em direção ao morro, colocando-o agora no ponto **B**, do qual, novamente mirando o ponto **T**, mede o ângulo de 60° com a horizontal.



Se a altura do teodolito é de 1,5 metro, é correto afirmar que a altura do morro com relação à região plana à qual pertencem **A** e **B** é, em metros:

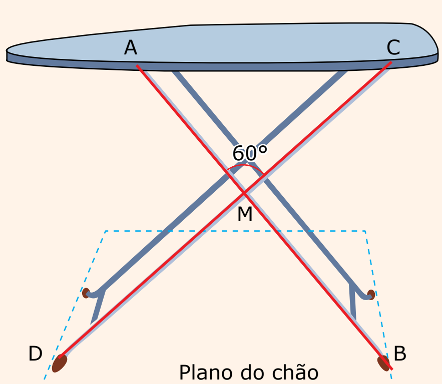
A) $80\sqrt{3}+1,5$

B) $80\sqrt{3}-1,5$

C) $\dfrac{160\sqrt{3}}{3}+1,5$

D) $\dfrac{160\sqrt{3}}{3}-1,5$

02. AFRR
(Unesp–2016) Uma mesa de passar roupa possui pernas articuladas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, conforme indica a figura. Sabe-se que AB = CD = 1 m, e que **M** é ponto médio dos segmentos coplanares AB e CD. Quando a mesa está armada, o tampo fica paralelo ao plano do chão e a medida do ângulo $A\hat{M}C$ é 60°.



Considerando-se desprezíveis as medidas dos pés e da espessura do tampo e adotando $\sqrt{3}=1,7$, a altura do tampo dessa mesa armada em relação ao plano do chão, em centímetros, está entre

A) 96 e 99.

B) 84 e 87.

C) 80 e 83.

D) 92 e 95.

E) 88 e 91.

03. UNZB
(FUVEST-SP) Um móvel parte de **A** e segue numa direção que forma com a reta $\overleftrightarrow{AC}$ um ângulo de 30°. Sabe-se que o móvel caminha com uma velocidade constante de 50 km/h. Após 3 horas de percurso, a distância que o móvel se encontra da reta $\overleftrightarrow{AC}$ é de

A) 75 km.

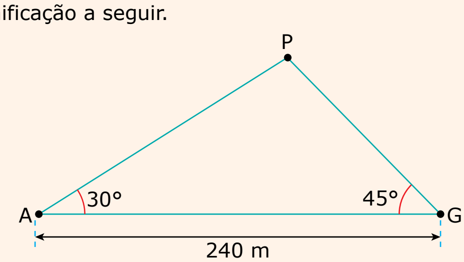
B) $75\sqrt{3}$ km.

C) $50\sqrt{3}$ km.

D) $75\sqrt{2}$ km.

E) 50 km.

04. 5ZD3
(PUC-SP) Abílio (**A**) e Gioconda (**G**) estão sobre uma superfície plana de uma mesma praia e, num dado instante, veem, sob respectivos ângulos de 30° e 45°, um pássaro (**P**) voando, conforme é representado na planificação a seguir.



Considerando desprezíveis as medidas das alturas de Abílio e Gioconda e sabendo que, naquele instante, a distância entre **A** e **G** era de 240 m, a quantos metros de altura o pássaro distava da superfície da praia?

A) $60(\sqrt{3}+1)$

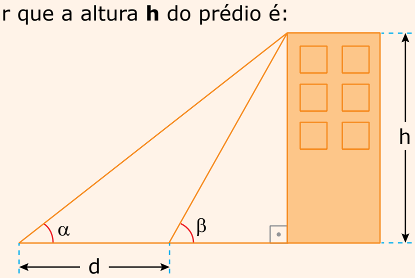
B) $120(\sqrt{3}-1)$

C) $120(\sqrt{3}+1)$

D) $180(\sqrt{3}-1)$

E) $180(\sqrt{3}+1)$

05. AUXK
(UFOP-MG) Um observador vê um prédio segundo um ângulo α. Após caminhar uma distância **d** em direção ao prédio, ele passa a vê-lo segundo um ângulo β. Podemos afirmar que a altura **h** do prédio é:



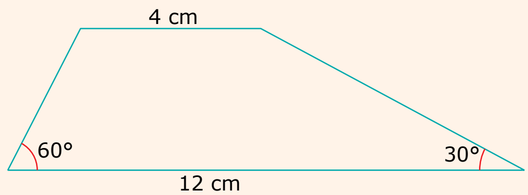
A) $\dfrac{d.\text{tg }\alpha.\text{tg }\beta}{\text{tg }\beta-\text{tg }\alpha}$

B) $\dfrac{d.\text{tg }\alpha.\text{tg }\beta}{\text{tg }\alpha-\text{tg }\beta}$

C) $\dfrac{d.\text{tg }\alpha.\text{tg }\beta}{\text{tg }\beta+\text{tg }\alpha}$

D) d

06. JABR (UEFS-BA–2016)



O trapézio representado, na figura, tem bases medindo 12 cm e 4 cm, e os ângulos internos da base maior medem 60° e 30°.

Seu perímetro, em cm, é igual a:

A) $16 + 4\sqrt{2}$

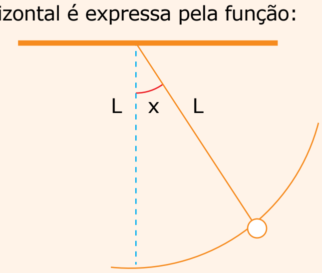
B) $16 + 4\sqrt{3}$

C) $20 + 3\sqrt{2}$

D) $20 + 4\sqrt{2}$

E) $20 + 4\sqrt{3}$

07. (PUC RS) Tales, um aluno do curso de Matemática, depois de terminar o semestre com êxito, resolveu viajar para a Europa. Ao visitar o Panteon, em Paris, Tales conheceu o Pêndulo de Foucault. O esquema a seguir indica a posição do pêndulo fixado a uma haste horizontal, num certo instante. Sendo **L** o seu comprimento e **x** o ângulo em relação a sua posição de equilíbrio, então a altura **h** do pêndulo em relação à haste horizontal é expressa pela função:



A) h(x) = L.cos x

B) h(x) = L.sen x

C) h(x) = L.sen 2x

D) h(x) = L.cos 2x

E) h(x) = 2L.cos x

08. (UECE–2018) Se a razão entre as medidas dos catetos de um triângulo retângulo é igual a $\frac{1}{\sqrt{2}}$, o valor do seno do menor dos ângulos internos desse triângulo é

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

09. CWQ8 (UECE–2016) No triângulo XYZ, retângulo em **X**, a medida do ângulo interno em **Y** é 30°. Se **M** é a interseção da bissetriz do ângulo interno em **Z** com o lado XY, e a medida do segmento ZM é $6\sqrt{3}$ m, então, pode-se afirmar corretamente que o perímetro deste triângulo é uma medida, em metros, situada entre

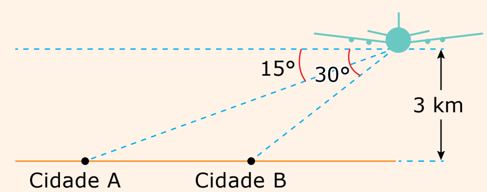
A) 40 e 45.

B) 45 e 50.

C) 50 e 55.

D) 55 e 60.

10. 8IF6 (UFV-MG) Um passageiro em um avião avista duas cidades, **A** e **B**, sob ângulos de 15° e 30°, respectivamente, conforme a figura a seguir.



Se o avião está a uma altitude de 3 km, a distância entre as cidades **A** e **B** é:

A) 7 km.

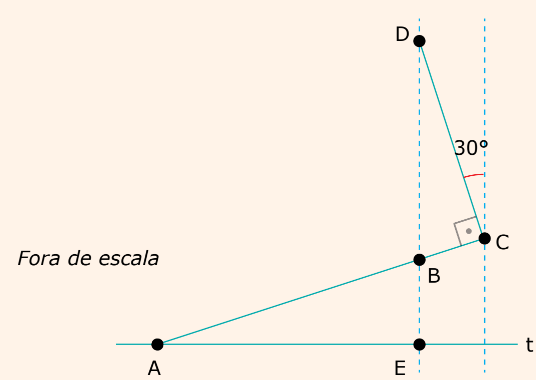
B) 5,5 km.

C) 6 km.

D) 6,5 km.

E) 5 km.

11. (FGV–2016) Na figura seguinte, as retas **r** e **s** são paralelas entre si, e perpendiculares à reta **t**. Sabe-se, ainda, que AB = 6 cm, CD = 3 cm, $\overline{AC}$ é perpendicular a $\overline{CD}$, e a medida do ângulo entre $\overline{CD}$ e a reta **s** é 30°.



Nas condições descritas, a medida de $\overline{DE}$, em cm, é igual a:

A) $12 + 3\sqrt{3}$

B) $12 + 2\sqrt{3}$

C) $6 + 4\sqrt{3}$

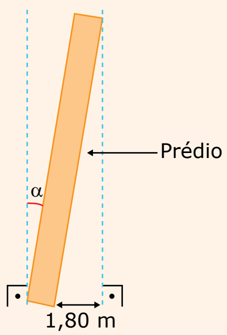
D) $6 + 2\sqrt{3}$

E) $3 + 2\sqrt{3}$

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2017) A famosa Torre de Pisa, localizada na Itália, assim como muitos outros prédios, por motivos adversos, sofrem inclinações durante ou após suas construções.

Um prédio, quando construído, dispunha-se verticalmente e tinha 60 metros de altura. Ele sofreu uma inclinação de um ângulo α e a projeção ortogonal de sua fachada lateral sobre o solo tem largura medindo 1,80 metro, conforme mostra a figura.



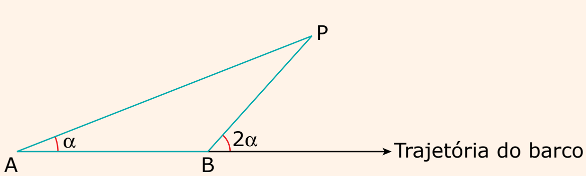
O valor do ângulo de inclinação pode ser determinado fazendo-se o uso de uma tabela como a apresentada.

Ângulo α (Grau)	Seno
0,0	0,0
1,0	0,017
1,5	0,026
1,8	0,031
2,0	0,034
3,0	0,052

Uma estimativa para o ângulo de inclinação quando dado em grau é tal que:

A) $0 \leq \alpha < 1,0$
B) $1,0 \leq \alpha < 1,5$
C) $1,5 \leq \alpha < 1,8$
D) $1,8 \leq \alpha < 2,0$
E) $2,0 \leq \alpha < 3,0$

02. (Enem) Para determinar a distância de um barco até a praia, um navegante utilizou o seguinte procedimento: a partir de um ponto **A**, mediu o ângulo visual α fazendo mira em um ponto fixo **P** da praia. Mantendo o barco no mesmo sentido, ele seguiu até um ponto **B**, de modo que fosse possível ver o mesmo ponto **P** da praia, no entanto sob um ângulo visual 2α. A figura a seguir ilustra essa situação:

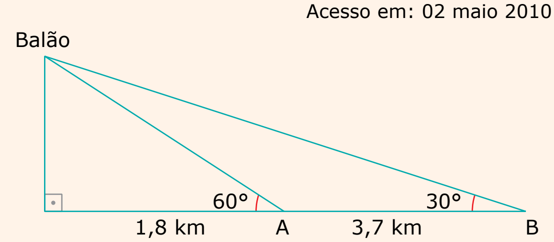


Suponha que o navegante tenha medido o ângulo $\alpha = 30°$ e, ao chegar ao ponto **B**, verificou que o barco havia percorrido a distância AB = 2 000 m. Com base nesses dados e mantendo a mesma trajetória, a menor distância do barco até o ponto fixo **P** será:

A) 1 000 m.
B) $1\,000\sqrt{3}$ m.
C) $2\,000\frac{\sqrt{3}}{3}$ m.
D) 2 000 m.
E) $2\,000\sqrt{3}$ m.

03. (Enem) Um balão atmosférico, lançado em Bauru (343 quilômetros a noroeste de São Paulo), na noite do último domingo, caiu nesta segunda-feira em Cuiabá Paulista, na região de Presidente Prudente, assustando agricultores da região. O artefato faz parte do programa Projeto Hibiscus, desenvolvido por Brasil, França, Argentina, Inglaterra e Itália, para a medição do comportamento da camada de ozônio, e sua descida se deu após o cumprimento do tempo previsto de medição.

Disponível em: <http://www.correiodobrasil.com.br>. Acesso em: 02 maio 2010.



Na data do acontecido, duas pessoas avistaram o balão. Uma estava a 1,8 km da posição vertical do balão e o avistou sob um ângulo de 60°; a outra estava a 5,5 km da posição vertical do balão, alinhada com a primeira e no mesmo sentido, conforme se vê na figura, e o avistou sob um ângulo de 30°. Qual a altura aproximada em que se encontrava o balão?

A) 1,8 km.
B) 1,9 km.
C) 3,1 km.
D) 3,7 km.
E) 5,5 km.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

○ 01. A ○ 03. D ○ 05. B ○ 07. B
○ 02. E ○ 04. A ○ 06. C ○ 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

○ 01. A ○ 04. B ○ 07. A ○ 10. C
○ 02. B ○ 05. A ○ 08. B ○ 11. E
○ 03. A ○ 06. E ○ 09. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

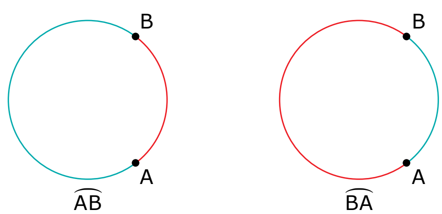
○ 01. C ○ 02. B ○ 03. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

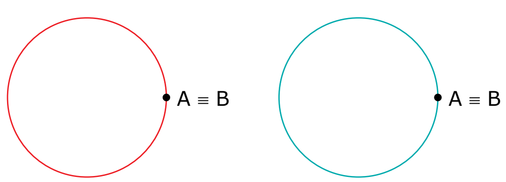
Arcos e Ciclo Trigonométrico

ARCO DE CIRCUNFERÊNCIA

Dois pontos, **A** e **B**, de uma circunferência dividem-na em duas partes denominadas **arcos**; **A** e **B** são as extremidades de cada um desses arcos, que indicaremos por $\overset{\frown}{AB}$ ou $\overset{\frown}{BA}$.



Se **A** coincide com **B**, temos um arco de uma volta e um arco nulo.

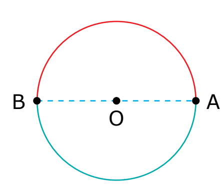


Arco de 1 volta | Arco nulo

Se **A** e **B** são as extremidades de um mesmo diâmetro, temos um arco de meia-volta.

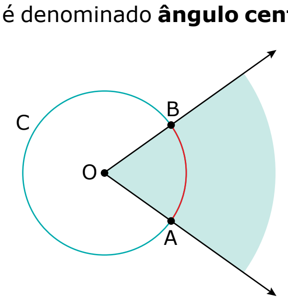
O: centro da circunferência

$\overset{\frown}{AB}$: arco de meia-volta



ÂNGULO CENTRAL

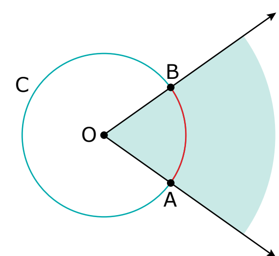
Todo ângulo coplanar com uma circunferência **C**, cujo vértice é o centro de **C**, é denominado **ângulo central** relativo a **C**.



$\overset{\frown}{AB}$: arco correspondente ao ângulo central $A\hat{O}B$

O arco de circunferência contido num ângulo central é chamado de arco correspondente a esse ângulo.

Como a todo ângulo central de **C** corresponde um único arco de **C** contido nesse ângulo, e a todo arco de **C** corresponde um único ângulo central de **C**, a medida de um ângulo central, relativo a uma circunferência, e a medida do arco correspondente, numa mesma unidade, são iguais.



$m(A\hat{O}B) = m(\overset{\frown}{AB})$

MEDIDAS DE ÂNGULOS E ARCOS

Medida em graus

Dividindo-se uma circunferência em 360 arcos congruentes entre si, cada um desses arcos medirá um grau (1°).

Dividindo-se um arco de 1° em 60 arcos congruentes entre si, cada um desses arcos medirá um minuto (1').

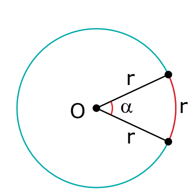
Dividindo-se um arco de 1' em 60 arcos congruentes entre si, cada um desses arcos medirá um segundo (1").

Portanto, 1° = 60' e 1' = 60".

Para um arco de circunferência com medida **a** graus, **b** minutos e **c** segundos, escrevemos a°b'c".

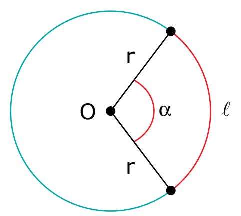
Radiano

Arco de 1 radiano (rad) é o arco cujo comprimento é igual à medida do raio da circunferência que o contém.



Arco de 1 radiano (1 rad)

Indicando por α a medida, em radianos, de um arco de comprimento ℓ contido numa circunferência de raio **r**, temos:



$$\boxed{\alpha = \frac{\ell}{r}}$$

É importante observar que a medida de um ângulo, em radianos, só é igual ao comprimento de seu arco se r = 1.

As medidas de arcos de circunferências em graus e em radianos são diretamente proporcionais:

$$\frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi}$$

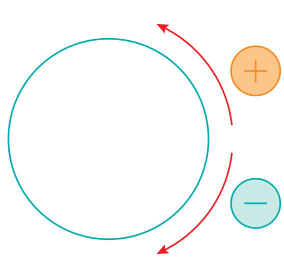
Esse fato nos possibilita obter uma forma de conversão de unidades por meio de uma regra de três simples:

Medida em graus		Medida em radianos
a	———	α
180	———	π

$$\boxed{\frac{a}{180} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

Arco orientado

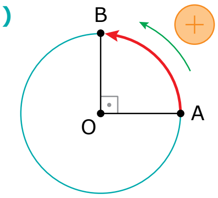
Em Trigonometria, adotamos o sentido anti-horário de percurso como positivo e o sentido horário de percurso como negativo.



Todo arco de circunferência não nulo no qual adotamos um sentido de percurso é chamado de **arco orientado**.

Exemplos:

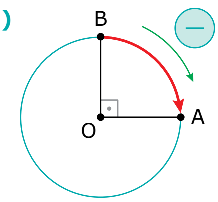
1º)



O: centro da circunferência

Arco orientado $\overset{\frown}{AB}$ tem medida $\frac{\pi}{2}$ rad ou 90°.

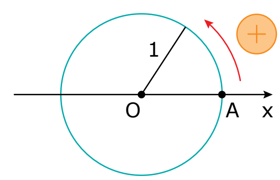
2º)



O: centro da circunferência

Arco orientado $\overset{\frown}{BA}$ tem medida $-\frac{\pi}{2}$ rad ou −90°.

Ciclo trigonométrico

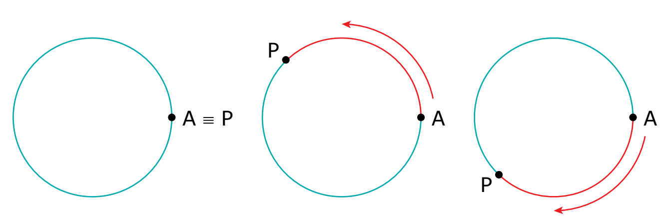


Toda circunferência orientada de centro **O** e raio unitário na qual escolhemos um ponto de origem dos arcos é denominada **circunferência trigonométrica** ou **ciclo trigonométrico**. Adotaremos, como origem dos arcos, o ponto **A** de interseção do ciclo com o semieixo positivo das abscissas Ox.

No ciclo trigonométrico, a medida absoluta α, em radianos, de um arco e o comprimento ℓ desse arco são iguais, pois $\alpha = \frac{\ell}{r}$ e r = 1.

Logo, podemos associar cada número real a um único ponto **P** do ciclo trigonométrico com o seguinte procedimento:

> Se $\alpha = 0$, tomamos P ≡ A.
> Se $\alpha > 0$, percorremos o ciclo no sentido anti-horário.
> Se $\alpha < 0$, percorremos o ciclo no sentido horário.

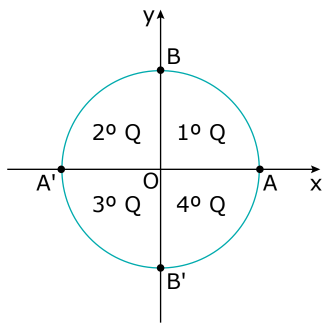


$m(\overset{\frown}{AP}) = 0$ $m(\overset{\frown}{AP}) = \alpha > 0$ $m(\overset{\frown}{AP}) = \alpha < 0$

O ponto **P** é a imagem de α no ciclo trigonométrico.

Convenções

i) O sistema de coordenadas xOy divide a circunferência trigonométrica em quatro quadrantes:

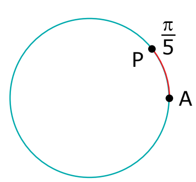


ii) Será omitido o símbolo rad nos arcos trigonométricos em radianos.

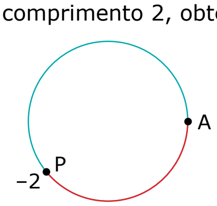
iii) Como todo arco trigonométrico tem, como extremidade, um mesmo ponto, denotaremos o arco apenas pelo outro ponto.

Exemplos:

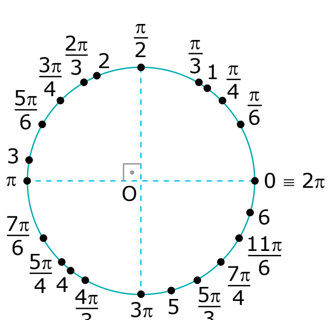
1º) Partindo de **A** e percorrendo, no sentido anti-horário, um arco de comprimento $\frac{\neq}{5}$, obtemos o arco de $\frac{\neq}{5}$.

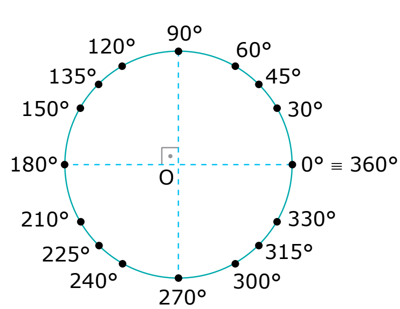


2º) Partindo de **A** e percorrendo, no sentido horário, um arco de comprimento 2, obtemos o arco −2.



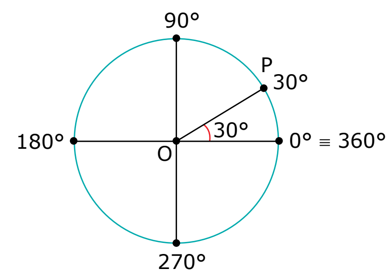
Obtemos, assim, o ciclo trigonométrico em radianos e em graus.





ARCOS CÔNGRUOS

Consideremos **P** a imagem de um arco de 30° no ciclo trigonométrico.



No sentido anti-horário, dando 1, 2, 3, ... voltas completas, obtemos os arcos de 30° + 1 . 360° = 390°, 30° + 2 . 360° = 750°; 30° + 3 . 360° = 1 110°, ..., todos associados a **P**.

Também no sentido horário, dando 1, 2, 3, ... voltas completas, obtemos os arcos de 30° – 1 . 360° = –330°, 30° – 2 . 360° = –690°; 30° – 3 . 360° = –1 050°, ..., todos associados a **P**.

Logo, podemos associar ao ponto **P** infinitos arcos de medida positiva, bem como infinitos arcos de medida negativa. Tais arcos podem ser representados por:

$30° + k.360°;\ k \in \mathbb{Z}$ ou, em radianos, $\frac{\neq}{6} + k.2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$

Como os arcos têm a mesma origem, **A**, e a mesma imagem, **P**, dizemos que eles são côngruos entre si ou, simplesmente, **côngruos**.

As medidas dos arcos côngruos a um arco de medida α são dadas por:

$\alpha + k.2\pi;\ k \in \mathbb{Z}$ ou, em graus, $\alpha + k.360°;\ k \in \mathbb{Z}$

Se $0 \leq \alpha < 2\pi$ (ou $0° \leq \alpha < 360°$), o arco de medida α é a **determinação principal** ou a 1ª determinação não negativa desses arcos côngruos entre si.

Notemos que a diferença entre as medidas de dois arcos côngruos entre si é igual ao produto de um número inteiro por 2π (ou é múltiplo de 360°), isto é, sempre equivale a um número inteiro de voltas completas.

Exemplos:

1º) Os arcos de medidas $\frac{27\neq}{5}$ e $-\frac{13\pi}{5}$ são côngruos entre si, pois $\frac{27\pi}{5} - \left(-\frac{13\pi}{5}\right) = \frac{27\pi}{5} + \frac{13\pi}{5} = 8\pi = 4.2\pi$.

MATEMÁTICA

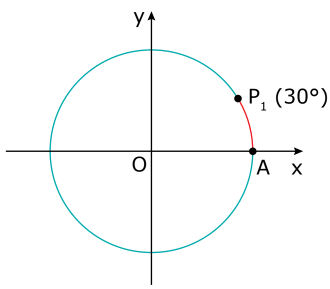
2º) Os arcos de medidas $\frac{27\neq}{7}$ e $\frac{6\neq}{7}$ não são côngruos entre si, pois $\frac{27\pi}{7} - \frac{6\pi}{7} = 3\pi$ (não é um produto de um inteiro por 2π).

3º) Os arcos de medidas 1 110° e 390° são côngruos entre si, pois 1 110° – 390° = 720° = 2 . 360°.

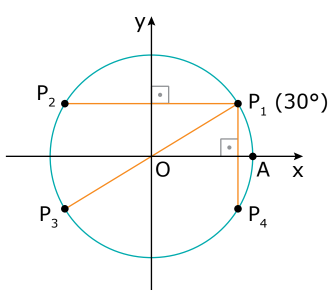
4º) Os arcos de medidas –30° e 320° não são côngruos entre si, pois –30° – 320° = –350° (não é múltiplo de 360°).

SIMETRIAS

Consideremos o ponto P_1 associado à medida 30°, no ciclo trigonométrico.

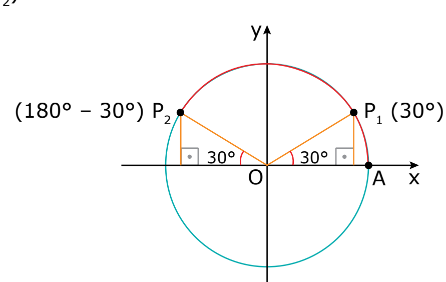


Pelo ponto P_1, traçando três retas, uma delas perpendicular ao eixo das ordenadas, outra que passa pela origem do sistema, e a terceira perpendicular ao eixo das abscissas, obtemos os pontos P_2, P_3 e P_4, respectivamente.



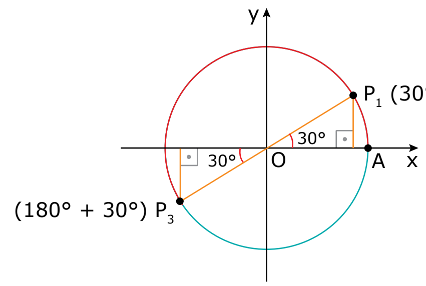
Os pontos P_2, P_3 e P_4 são chamados de simétricos (ou correspondentes) do ponto P_1 nos diversos quadrantes. Suas medidas **x** (0° ≤ x ≤ 360°) são:

P_2) 180° – 30° = 150°

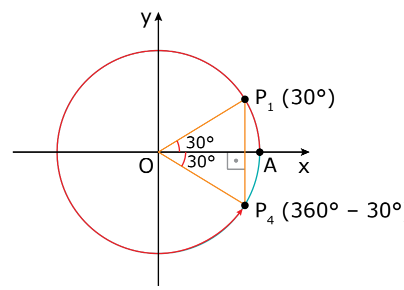


Analogamente, temos:

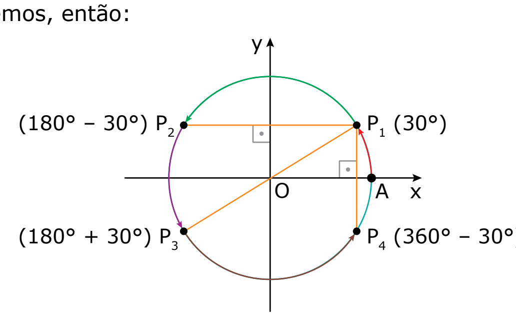
P_3) 180° + 30° = 210°



P_4) 360° – 30° = 330°

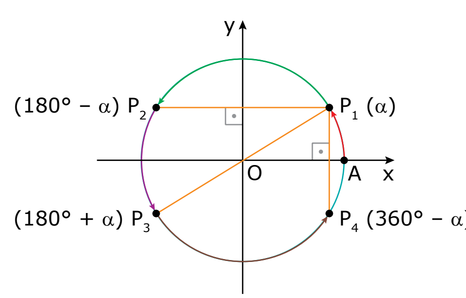


Temos, então:

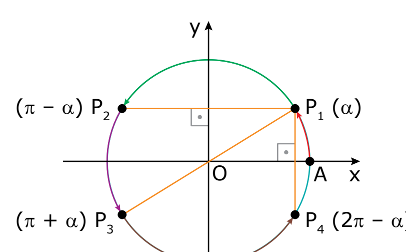


De maneira geral:

i) Se α for uma medida em graus:



ii) Se α for uma medida em radianos:



EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO **Bernoulli Play**

01. ZPX7 (Unemat-MT) Quanto ao arco 4555°, é correto afirmar:

A) Pertence ao segundo quadrante e tem como côngruo o ângulo de 55°.

B) Pertence ao primeiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 75°.

C) Pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 195°.

D) Pertence ao quarto quadrante e tem como côngruo o ângulo de 3115°.

E) Pertence ao terceiro quadrante e tem como côngruo o ângulo de 4195°.

02. D794 (UFSCar-SP) Se o ponteiro dos minutos de um relógio mede 12 centímetros, o número que melhor aproxima a distância em centímetros percorrida por sua extremidade em 20 minutos é (considere π = 3,14):

A) 37,7 cm. C) 20 cm. E) 3,14 cm.

B) 25,1 cm. D) 12 cm.

03. (UEL-PR) Um relógio marca 20 minutos para o meio-dia. Então, o menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos é:

A) 90°. C) 110°. E) 125°.

B) 100°. D) 115°.

04. K339 (UEG-GO–2016) Na competição de *skate* a rampa em forma de **U** tem o nome de *vert*, onde os atletas fazem diversas manobras radicais. Cada uma dessas manobras recebe um nome distinto de acordo com o total de giros realizados pelo skatista e pelo *skate*, uma delas é a "180 *allie frontside*", que consiste num giro de meia volta. Sabendo-se que 540° e 900° são côngruos a 180°, um atleta que faz as manobras 540 *Mc Tuist* e 900 realizou giros completos de

A) 1,5 e 2,5 voltas respectivamente.

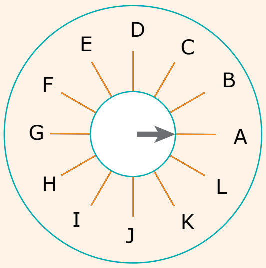
B) 0,5 e 2,5 voltas respectivamente.

C) 1,5 e 3,0 voltas respectivamente.

D) 3,0 e 5,0 voltas respectivamente.

E) 1,5 e 4,0 voltas respectivamente.

05. (Unifor-CE) O dispositivo de segurança de um cofre tem o formato da figura a seguir, em que as 12 letras, **A**, **B**, ..., **L**, estão igualmente espaçadas (o ângulo central entre duas letras vizinhas é o mesmo) e a posição inicial da seta, quando o cofre se encontra fechado, é a indicada.



Para abrir o cofre, são necessárias três operações (o segredo), girando o disco menor (onde a seta está gravada), de acordo com as seguintes instruções, a partir da posição indicada:

1) $\frac{2}{3}\pi$ no sentido anti-horário.

2) $\frac{3}{2}\pi$ no sentido horário.

3) $\frac{3}{4}\pi$ no sentido anti-horário.

Pode-se, então, afirmar corretamente que o cofre será aberto quando a seta estiver:

A) no ponto médio entre **L** e **A**.

B) na posição **B**.

C) na posição **K**.

D) em algum ponto entre **J** e **K**.

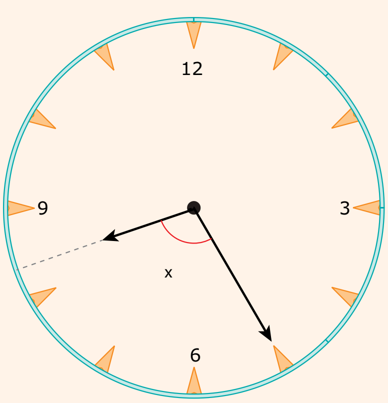
E) na posição **H**.

06. SZXF (UNEB-BA) Em um círculo, um ângulo central de 20 graus determina um arco de 5 cm. Qual o tamanho do arco, em cm, determinado por um ângulo central de 40 graus?

A) 5 C) 20 E) 60

B) 10 D) 40

07. GSXR (CEFET-MG) Se o relógio da figura marca 8h e 25min, então o ângulo **x** formado pelos ponteiros é:



A) 12° 30'.

B) 90°.

C) 102° 30'.

D) 120°.

MATEMÁTICA

08. J5GR (UDESC) O relógio *Tower Clock*, localizado em Londres, Inglaterra, é muito conhecido pela sua precisão e tamanho. O ângulo interno formado entre os ponteiros das horas e dos minutos deste relógio, desprezando suas larguras, às 15 horas e 20 minutos é:

A) $\frac{\neq}{12}$

B) $\frac{\neq}{36}$

C) $\frac{\neq}{6}$

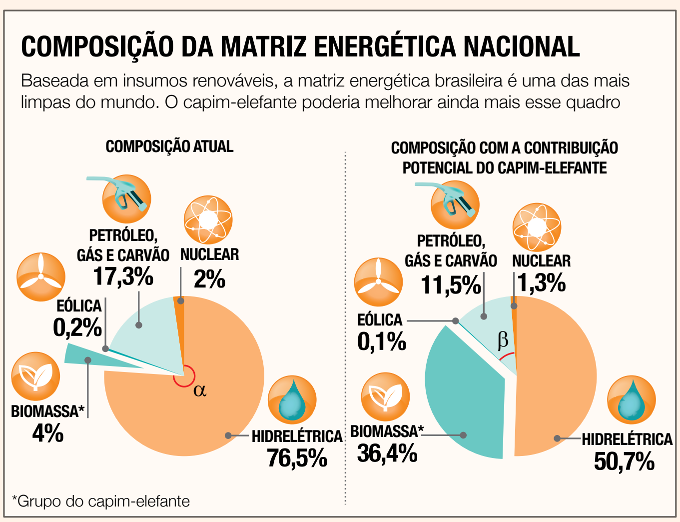
D) $\frac{\neq}{18}$

E) $\frac{\neq}{9}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UNEB-BA) A conversão de capim-elefante em energia não polui. Mesmo o gás carbônico, CO_2, emitido durante a queima da biomassa utilizada, é menor do que o consumido pela gramínea durante todo o seu crescimento.



GOVERNO FEDERAL.

Considere, no gráfico, que α é a medida do ângulo do setor circular, associado à energia hidrelétrica na composição da matriz energética nacional atual, e que β é a medida do ângulo do setor circular, associado a petróleo, gás e carvão na composição da matriz energética nacional com a contribuição potencial do capim-elefante.

VARGAS, 2010, p. 112-114.

Nessas condições, α − b é igual a:

A) $\frac{17\neq}{10}$rad.

B) $\frac{13\neq}{10}$rad.

C) $\frac{11\neq}{10}$rad.

D) $\frac{9\neq}{10}$rad.

E) $\frac{7\neq}{10}$rad.

02. (UFAM) O menor valor não negativo côngruo ao arco de $\frac{21\neq}{5}$ rad é igual:

A) $\frac{\neq}{5}$ rad .

B) $\frac{7\neq}{5}$ rad .

C) p rad.

D) $\frac{9\neq}{5}$ rad .

E) 2p rad.

03. R1AX (EN-RJ) Rola-se, sem deslizar, uma roda de 1 metro de diâmetro, por um percurso reto de 30 centímetros, em uma superfície plana. O ângulo central de giro da roda, em radianos, é

A) 0,1.

B) 0,2.

C) 0,3.

D) 0,6.

E) 0,8.

04. 8LVT (UEA) Caminhando 100 metros pelo contorno de uma praça circular, uma pessoa descreve um arco de 144°. Desse modo, é correto afirmar que a medida, em metros, do raio da circunferência na praça é:

A) 125 p

B) $\frac{175}{\neq}$

C) $\frac{125}{\neq}$

D) $\frac{250}{\neq}$

E) 250 p

05. ANJ4 (IFSP) Considere uma circunferência de centro **O** e raio 6 cm. Sendo **A** e **B** pontos distintos dessa circunferência, sabe-se que o comprimento de um arco AB é 5π cm. A medida do ângulo central AÔB, correspondente ao arco AB considerado, é:

A) 120°.

B) 150°.

C) 180°.

D) 210°.

E) 240°.

06. (Unesp) A figura mostra um relógio de parede, com 40 cm de diâmetro externo, marcando 1 hora e 54 minutos.

Disponível em: <www.euroferragens.com.br>.

Usando a aproximação $\pi = 3$, a medida, em cm, do arco externo do relógio determinado pelo ângulo central agudo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos, no horário mostrado, vale, aproximadamente,

A) 22.
B) 31.
C) 34.
D) 29.
E) 20.

07. P91Q (PUC Campinas-SP) A babá eletrônica, que cantava pontualmente às nove da noite, dava o sinal para que o filho de Ramiro fosse para a cama, mas ele nunca conseguia dormir antes das 21h30min. Certo dia, ele subiu para o quarto às 21h e só dormiu às 21h40min. Nesse instante, os ponteiros do relógio carrilhão da sala, que funcionava perfeitamente, formavam entre si um ângulo agudo de medida

A) 50°.
B) 50° 30′.
C) 52°.
D) 52° 40′.
E) 55°.

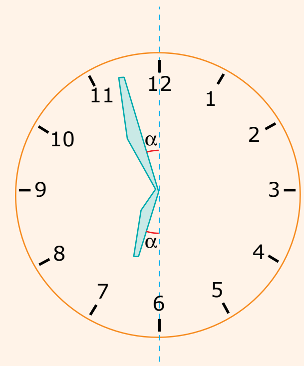
08. J2SJ (UFG-GO) As cidades de Goiânia e Curitiba têm, aproximadamente, a mesma longitude. Goiânia fica a uma latitude de 16° 40', enquanto a latitude de Curitiba é de 25° 25'. Considerando-se que a Terra seja aproximadamente esférica, com a linha do equador medindo, aproximadamente, 40 000 km, a distância entre as duas cidades, em quilômetros, ao longo de um meridiano,

A) é menor que 700.
B) fica entre 700 e 800.
C) fica entre 800 e 900.
D) fica entre 900 e 1 000.
E) é maior que 1 000.

09. (IFAL) Considerando-se o arco trigonométrico $\alpha = \dfrac{23\pi}{3}$ rad, assinale a alternativa falsa.

A) $\alpha = 1\,308°$
B) α dá três voltas e para no 4° quadrante.
C) sen α = −sen 60°
D) cos α = cos 60°
E) α dá três voltas e para no 1° quadrante.

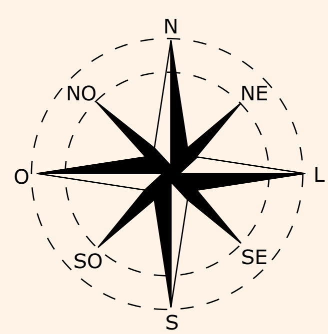
10. (FGV) O relógio indicado na figura marca 6 horas e



A) $55\dfrac{7}{13}$ minutos.
B) $55\dfrac{5}{11}$ minutos.
C) $55\dfrac{5}{13}$ minutos.
D) $54\dfrac{5}{11}$ minutos.
E) $54\dfrac{2}{11}$ minutos.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) A rosa dos ventos é uma figura que representa oito sentidos, que dividem o círculo em partes iguais.



Um câmara de vigilância está fixada no teto de um *shopping* e sua lente pode ser direcionada remotamente, através de um controlador, para qualquer sentido. A lente da câmara está apontada inicialmente no sentido Oeste e o seu controlador efetua três mudanças consecutivas, a saber:

- 1ª mudança: 135° no sentido anti-horário;
- 2ª mudança: 60° no sentido horário;
- 3ª mudança: 45° no sentido anti-horário.

Após a 3ª mudança, ele é orientado a reposicionar a câmara, com a menor amplitude possível, no sentido Noroeste (NO) devido a um movimento suspeito de um cliente.

Qual mudança de sentido o controlador deve efetuar para reposicionar a câmara?

A) 75° no sentido horário.

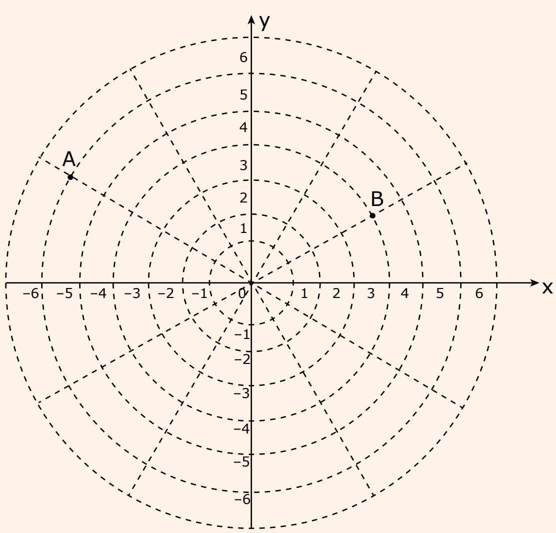
B) 105° no sentido anti-horário.

C) 120° no sentido anti-horário.

D) 135° no sentido anti-horário.

E) 165° no sentido horário.

02. (Enem–2018) Sobre o sistema cartesiano considera-se uma malha formada por circunferências de raios com medidas dadas por números naturais e por 12 semirretas com extremidades na origem, separadas por ângulos de $\frac{\pi}{6}$ rad, conforme a figura.



Suponha que os objetos se desloquem apenas pelas semirretas e pelas circunferências dessa malha, não podendo passar pela origem (0, 0).

Considere o valor de π com aproximação de, pelo menos, uma casa decimal.

Para realizar o percurso mais curto possível ao longo da malha, do ponto B até o ponto A, um objeto deve percorrer uma distância igual a:

A) $\frac{2.\pi 1}{3}+8$

B) $\frac{2.\pi 2}{3}+6$

C) $\frac{2.\pi 3}{3}+4$

D) $\frac{2.\pi 4}{3}+2$

E) $\frac{2.\pi 5}{3}+2$

03. (Enem) Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o esqueitista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade esqueite vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

A) uma volta completa.

B) uma volta e meia.

C) duas voltas completas.

D) duas voltas e meia.

E) cinco voltas completas.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. B
- 03. C
- 04. A
- 05. A
- 06. B
- 07. C
- 08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. B
- 02. A
- 03. D
- 04. C
- 05. B
- 06. B
- 07. A
- 08. D
- 09. E
- 10. C

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. A
- 03. D

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

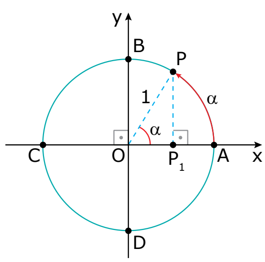
Funções Seno e Cosseno

FUNÇÃO PERIÓDICA

Uma função y = f(x) é periódica, de período **p**, se existe $p \in \mathbb{R}$, p > 0, tal que f(x + p) = f(x), para todo **x** pertencente ao domínio da função.

FUNÇÃO SENO

No ciclo trigonométrico a seguir, α é a medida do ângulo $A\hat{O}P$, e o triângulo OP_1P é retângulo.



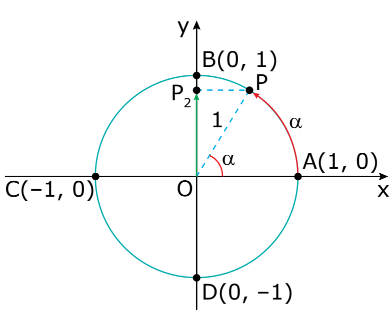
Utilizando a definição de seno para ângulos agudos em um triângulo retângulo, podemos escrever:

$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{P_1P}{OP}$, em que OP = 1, e P_1P é a ordenada de **P**, ou seja:

$$\boxed{\text{sen}\ \alpha = \text{ordenada de } \mathbf{P}}$$

A função seno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, que associa a ordenada do ponto **P** (imagem de α no ciclo trigonométrico) a todo número α.

sen: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $\alpha \to \text{sen}\ \alpha = OP_2$

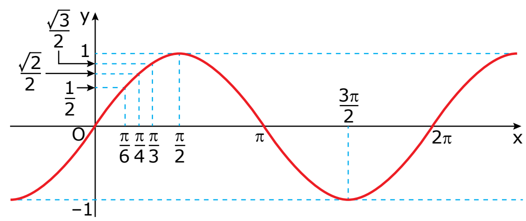


Dizemos também que OP_2 é o seno de $A\hat{O}P$ ou de $\overset{\frown}{AP}$.

$$\boxed{\text{sen}\ A\hat{O}P = \text{sen}\ \overset{\frown}{AP} = OP_2}$$

O eixo Oy passa a ser denominado, então, eixo dos senos.

Gráfico da função seno (senoide)



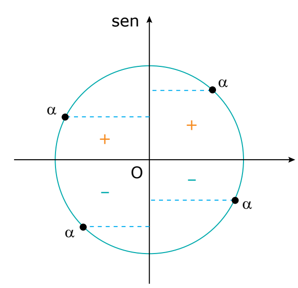
A imagem da função seno é o intervalo [−1, 1], isto é, −1 ≤ sen x ≤ 1, para todo **x** real.

A função seno é periódica, e seu período é 2π.

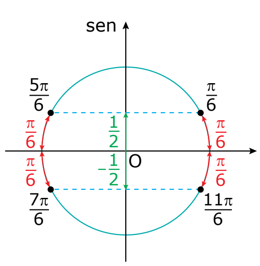
Sinal

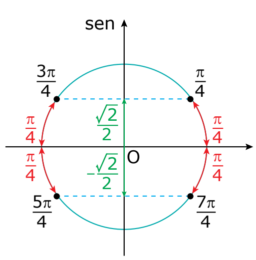
Vamos analisar o sinal de sen α quando **P** (imagem de α no ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.

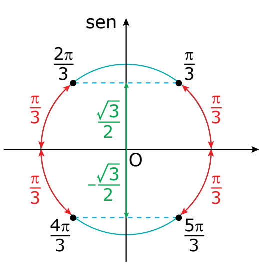
Eixo dos senos:



Valores notáveis







Senos de arcos côngruos

Qualquer que seja o número real α, os arcos de medida α e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem **A** e a mesma extremidade **P**. Logo:

$$\boxed{\text{sen}\ (\alpha + 2k\pi) = \text{sen}\ \alpha,\ k \in \mathbb{Z}}$$

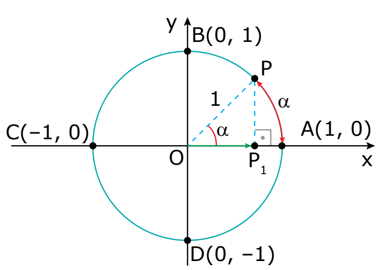
Exemplos:

1º) $\text{sen}\ \frac{25\neq}{6} = \text{sen}\ \frac{13\neq}{6} = \text{sen}\ \frac{\neq}{6} = \frac{1}{2}$

2º) A determinação principal do arco de medida $\frac{29\neq}{3}$ rad mede $\frac{5\neq}{3}$ rad. Então, $\text{sen}\ \frac{29\neq}{3} = \text{sen}\ \frac{5\neq}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

FUNÇÃO COSSENO

No ciclo trigonométrico a seguir, α é a medida do ângulo agudo $A\hat{O}P$, e o triângulo OP_1P é retângulo.



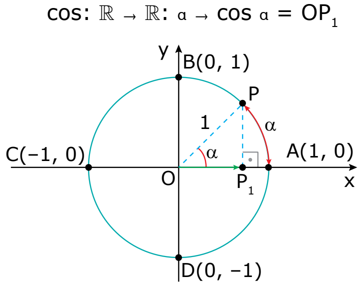
Utilizando a definição de cosseno para ângulos agudos num triângulo retângulo, podemos escrever:

$\cos \alpha = \frac{OP_1}{OP}$, em que OP = 1, e OP_1 é a abscissa de **P**, ou seja:

$$\boxed{\cos \alpha = \text{abscissa de } \mathbf{P}}$$

A função cosseno é a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a abscissa do ponto **P** (imagem de α no ciclo trigonométrico) a todo número α.

$$\cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}: \alpha \to \cos \alpha = OP_1$$

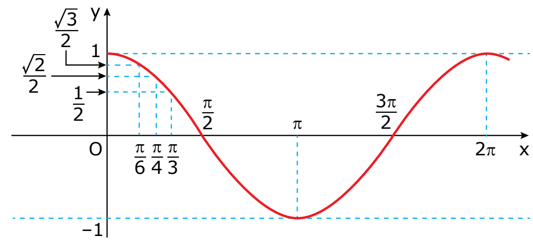


Dizemos, também, que OP_1 é o cosseno de $A\hat{O}P$ ou de $\widehat{AP}$, e indicamos da seguinte forma:

$$\boxed{\cos A\hat{O}P = \cos \widehat{AP} = OP_1}$$

O eixo Ox passa a ser denominado, então, eixo dos cossenos.

Gráfico da função cosseno (cossenoide)

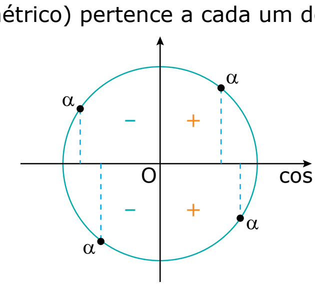


A imagem da função cosseno é o intervalo [−1, 1], isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1$, para todo **x** real.

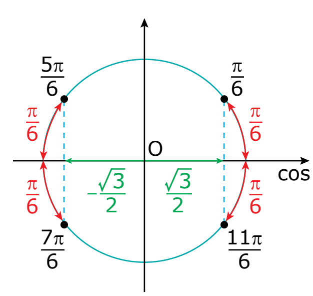
A função cosseno é periódica, e seu período é 2π.

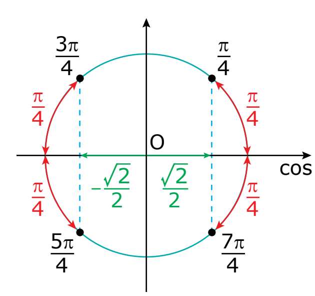
Sinal

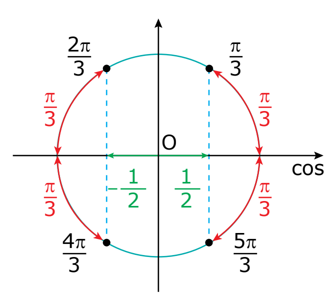
Vamos analisar o sinal de $\cos \alpha$ quando **P** (imagem de α no ciclo trigonométrico) pertence a cada um dos quadrantes.



Valores notáveis







Cossenos de arcos côngruos

Qualquer que seja o número real α, os arcos de medidas α e $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, têm a mesma origem **A** e a mesma extremidade **P**. Logo:

$$\boxed{\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos \alpha,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Exemplos:

1º) $\cos 8\pi = \cos 6\pi = \cos 4\pi = \cos 2\pi = \cos 0 = 1$

2º) A determinação principal do arco de medida $\frac{20\neq}{3}$ rad vale $\frac{2\neq}{3}$ rad. Então, $\cos \frac{20\neq}{3} = \cos \frac{2\neq}{3} = -\frac{1}{2}$.

PERÍODO DE FUNÇÕES ENVOLVENDO SENO E COSSENO

Sabendo que as funções seno e cosseno são periódicas e que seu período é 2π, podemos calcular o período **p** das seguintes funções:

i) $f(x) = \text{sen}(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|m|},\ m \neq 0$

ii) $f(x) = \cos(mx + n) \Rightarrow p = \frac{2\pi}{|m|},\ m \neq 0$

Demonstração:

i) Seja $f(x) = \text{sen}(mx + n),\ m \neq 0$.

Como o período da função sen x é igual a 2π, obtemos um período de f(x) quando o arco (mx + n) variar, por exemplo, de 0 a 2π.

Assim:

$mx + n = 0 \Rightarrow x = -\frac{n}{m}$

$mx + n = 2\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{m} - \frac{n}{m}$

Como o período **p** é positivo, temos:

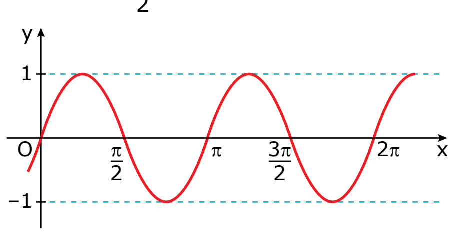
$$p = |\Delta x| = \left|\frac{2\pi}{m} - \frac{n}{m} - \left(-\frac{n}{m}\right)\right| = \frac{2\pi}{|m|}$$

ii) A demonstração é análoga.

Exemplos:

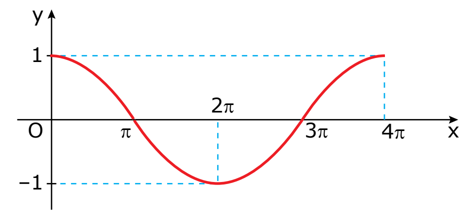
1º) $f(x) = \text{sen } 2x$

$m = 2 \Rightarrow p = \frac{2\neq}{2} \Rightarrow p = \pi$



2º) $f(x) = \cos \frac{x}{2}$

$m = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \frac{2\neq}{\frac{1}{2}} \Rightarrow p = 4\pi$



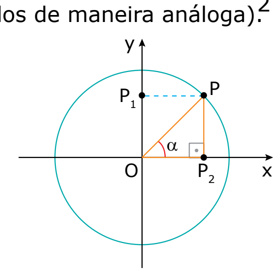
RELAÇÃO FUNDAMENTAL ENTRE SENO E COSSENO

Utilizando as razões trigonométricas em um triângulo retângulo, já havíamos deduzido que:

$$\boxed{\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1}$$

Tal relação é conhecida como Relação Fundamental da Trigonometria e pode ser demonstrada facilmente no ciclo trigonométrico.

Tomemos um ângulo α tal que $0 < \alpha < \frac{\neq}{2}$ (os demais casos são demonstrados de maneira análoga).



Assim, temos $P_2P = OP_1 = \text{sen } \alpha$, $OP_2 = \cos \alpha$ e $OP = 1$.

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$(P_2P)^2 + (OP_2)^2 = (OP)^2 \Rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Dar o domínio, o conjunto imagem e esboçar o gráfico de $y = 1 + \text{sen } x$.

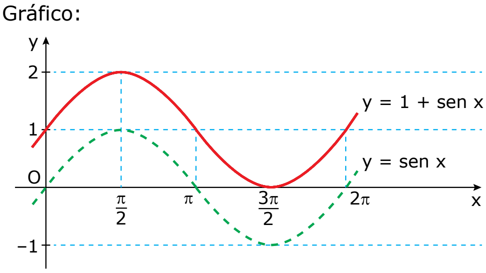
Resolução:

Domínio: $D = \mathbb{R}$

Conjunto imagem:

$-1 \leq \text{sen } x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 + \text{sen } x \leq 2 \Rightarrow \text{Im} = [0, 2]$

Gráfico:



02. Determinar **m** de modo que se tenha $\cos x = \frac{m+3}{2}$.

Resolução:

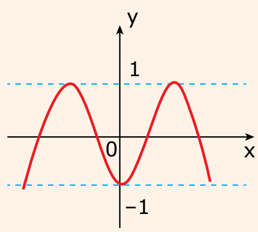
Como $-1 \leq \cos x \leq 1$, temos:

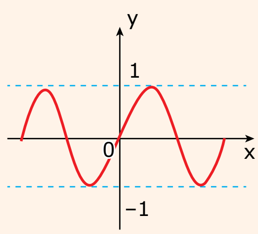
$-1 \leq \frac{m+3}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m + 3 \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$

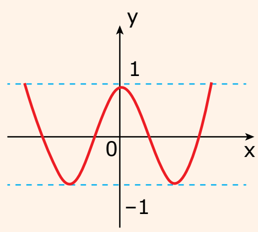
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

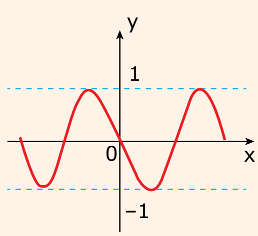
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unimontes-MG–2015) Considere $f: \mathbb{R} \to [-1, 1]$ uma função definida por $f(x) = -\text{sen } x$. O esboço que melhor representa o gráfico de **f** é:

A)


B)


C)


D)


02. (PUC Minas) Se $\cos \alpha = -\frac{1}{4}$ e α é um ângulo do terceiro quadrante, então $\text{sen } \alpha$ é igual a:

A) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ C) $\frac{\sqrt{11}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

B) $-\frac{\sqrt{13}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{13}}{4}$

03. CEGZ (IFPE–2016) A quantidade de algas **A**, em toneladas, em certa baía, varia periodicamente em função do tempo **t**, em anos e é representada pela função:

$$A(t) = 850 + 200.\cos \frac{\pi t}{30}$$

Se **t** for medido a partir de 2015, ou seja, atribua a 2015 o valor t = 0. Determine em toneladas, qual será a quantidade de algas na baía no início de 2045.

A) 1 050 C) 750 E) 650

B) 850 D) 950

04. 3LZC (FGV-SP) A previsão mensal da venda de sorvetes para 2012 em uma sorveteria é dada por $P = 6\,000 + 50x + 2\,000 \cos \frac{\neq x}{6}$, em que **P** é o número de unidades vendidas no mês **x**; x = 0 representa janeiro de 2012, x = 1 representa fevereiro de 2012, x = 2 representa março de 2012 e assim por diante.

Se essas previsões se verificarem, em julho haverá uma queda na quantidade vendida, em relação a março, de aproximadamente:

A) 39,5%. C) 37,5%. E) 35,5%.

B) 38,5%. D) 36,5%.

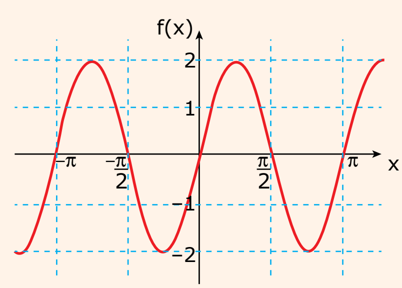
05. AHTH (UFES) O período e a imagem da função $f(x) = 5 - 3\cos\left(\frac{x-2}{\pi}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, são, respectivamente:

A) 2π e $[-1, 1]$ D) 2π e $[-3, 3]$

B) 2π e $[2, 8]$ E) $2\pi^2$ e $[-3, 3]$

C) $2\pi^2$ e $[2, 8]$

06. OY5F (UCS-RS–2016) O gráfico a seguir representa uma função real de variável real.



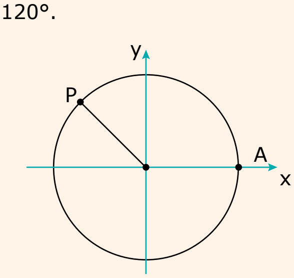
Assinale a alternativa em que consta a função representada pelo gráfico.

A) $f(x) = -2\cos x$ D) $f(x) = 2\text{sen } 2x$

B) $f(x) = 2\cos \frac{x}{2}$ E) $f(x) = \text{sen } \frac{x}{2}$

C) $f(x) = 2\text{sen } x$

07. WUZK (UERJ–2019) O círculo a seguir tem o centro na origem do plano cartesiano xy e raio igual a 1. Nele, AP determina um arco de 120°.



As coordenadas de **P** são:

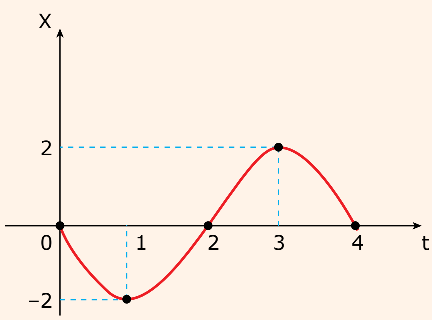
A) $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$

B) $-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}$

08. UMH3 (Unifor-CE–2015) O gráfico a seguir mostra a posição em função do tempo de uma partícula em movimento harmônico simples (MHS) no intervalo de tempo entre 0 e 4s. A equação da posição em função do tempo é dada por X = A.cos(wt + ɑ). A partir do gráfico, a soma das constantes **A**, **w**, ɑ é de:



A) $2+\frac{\pi}{2}$

D) $4+\pi$

B) $2+\pi$

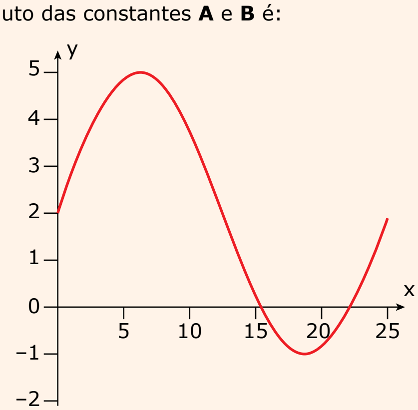
E) $4+\frac{\pi}{2}$

C) $2+\frac{3\pi}{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC RS) A figura a seguir representa um esboço do gráfico de uma função $y = A + B\text{sen}\frac{x}{4}$, que é muito útil quando se estudam fenômenos periódicos, como, por exemplo, o movimento de uma mola vibrante. Então, o produto das constantes **A** e **B** é:



A) 6.

C) 12.

E) 50.

B) 10.

D) 18.

02. (FGV-SP) Uma empresa utiliza a fórmula $P = 200 + 40\text{sen}\left(\frac{\neq t}{6} + \frac{\neq}{2}\right)$ para estimar a quantidade vendida mensalmente **P** de um produto, em que t = 1 representa o mês de janeiro de 2010, t = 2 representa o mês de fevereiro de 2010, t = 3 o mês de março de 2010 e assim por diante. Em quais meses de 2010 estão estimadas as vendas mínima e máxima respectivamente?

A) Outubro e abril.

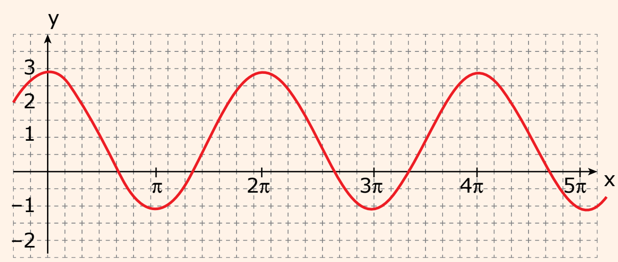
D) Julho e janeiro.

B) Setembro e março.

E) Junho e dezembro.

C) Agosto e fevereiro.

03. 9CBI (Insper-SP–2015) A figura a seguir representa o gráfico da função f(x) = a.cos(x) + b.



O soma a + b e a diferença b – a são, respectivamente, iguais a

A) 3 e 1.

C) p e 1.

E) 3 e –1.

B) 1 e –3.

D) –1 e p.

04. S12C (FGV-SP) A previsão de vendas mensais de uma empresa para 2011, em toneladas de um produto, é dada por $f(x) = 100 + 0{,}5x + 3\text{sen}\frac{\neq x}{6}$, em que x = 1 corresponde a janeiro de 2011, x = 2 corresponde a fevereiro de 2011 e assim por diante.

A previsão de vendas (em toneladas) para o primeiro trimestre de 2011 é:

(Use a aproximação decimal $\sqrt{3}$ = 1,7.)

A) 308,55.

C) 309,55.

E) 310,55.

B) 309,05.

D) 310,05.

05. KOGD (UFPR–2015) Num laboratório, sensores são colocados no topo de dois pistões para analisar o desempenho de um motor. A profundidade do primeiro pistão no bloco do motor pode ser descrita, de maneira aproximada, pela expressão $H_1 = 12.\cos\left(\frac{2\pi t}{60}\right)$, e a profundidade do segundo, pela expressão $H_2 = 12.\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{60}\right)$, sendo **t** o tempo medido em milissegundos a partir do acionamento do motor. Quanto tempo levará para que os pistões estejam na mesma profundidade, pela primeira vez, após o acionamento do motor?

A) 5 milissegundos.

D) 22,5 milissegundos.

B) 7,5 milissegundos.

E) 45 milissegundos.

C) 10 milissegundos.

MATEMÁTICA

06. (IFPE–2016) Na cidade de Recife, mesmo que muito discretamente, devido à pequena latitude em que nos encontramos, percebemos que, no verão, o dia se estende um pouco mais em relação à noite e, no inverno, esse fenômeno se inverte.

Já em outros lugares do nosso planeta, devido a grandes latitudes, essa variação se dá de forma muito mais acentuada. É o caso de Ancara, na Turquia, onde a duração de luz solar **L**, em horas, no dia **d** do ano, após 21 de março, é dada pela função:

$$L(d) = 12 + 2{,}8.\text{sen}\ \frac{2\pi}{365}(d - 80)$$

Determine, em horas, respectivamente, a máxima e a mínima duração de luz solar durante um dia em Ancara.

A) 12,8 e 12.

B) 14,8 e 9,2.

C) 12,8 e 9,2.

D) 12 e 12.

E) 14,8 e 12.

07. 91DZ (PUC-SP–2016) Suponha que uma revista publicou um artigo no qual era estimado que, no ano de 2015 + x, com $x \in \{0, 1, 2, ..., 9, 10\}$, o valor arrecadado dos impostos incidentes sobre as exportações de certo país, em milhões de dólares, poderia ser obtido pela função $f(x) = 250 + 12.\cos\ \frac{\pi}{3}x$. Caso essa previsão se confirme, então, relativamente ao total arrecadado a cada ano considerado, é correto afirmar que:

A) o valor máximo ocorrerá apenas em 2021.

B) atingirá o valor mínimo somente em duas ocasiões.

C) poderá superar 300 milhões de dólares.

D) nunca será inferior a 250 milhões de dólares.

08. 6KI3 (Unifor-CE–2015) As marés são fenômenos periódicos que podem ser descritos, simplesmente, pela função seno. Suponhamos que, para determinado porto, a variação de altura (**h**) da lâmina-d'água em função das horas (**t**) do dia seja dada por: $h(t) = 10 + 4.\text{sen}\ \frac{t\pi}{12}$. Um navio, cujo casco mede 12 m (parte do navio que fica submersa), chega às 8 horas da manhã no porto. O tempo que pode permanecer, sem encalhar, é de

A) 2 horas.

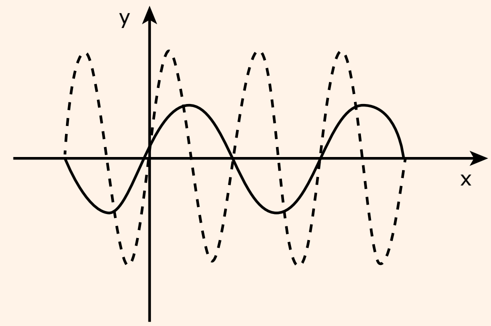
B) 3 horas.

C) 4 horas.

D) 5 horas.

E) 6 horas.

09. H85N (FUVEST-SP–2018)



Admitindo que a linha pontilhada represente o gráfico da função f(x) = sen (x) e que a linha contínua represente o gráfico da função g(x) = α . sen(βx), segue que:

A) $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$

B) $\alpha > 1$ e $0 < \beta < 1$

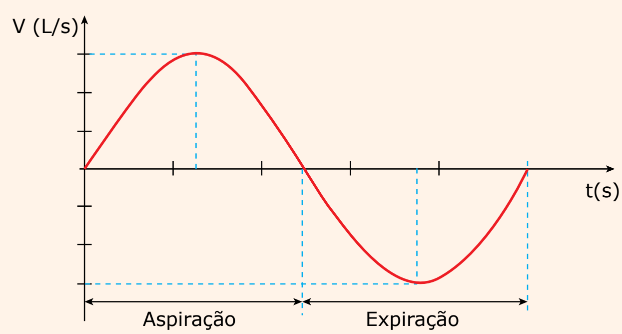
C) $\alpha = 1$ e $\beta > 1$

D) $0 < \alpha < 1$ e $\beta > 1$

E) $0 < \alpha < 1$ e $\beta = 1$

10. SGIL (Unesp) Em situação normal, observa-se que os sucessivos períodos de aspiração e expiração de ar dos pulmões em um indivíduo são iguais em tempo, bem como na quantidade de ar inalada e expelida.

A velocidade de aspiração e expiração de ar dos pulmões de um indivíduo está representada pela curva do gráfico, considerando-se apenas um ciclo do processo.



Sabendo-se que, em uma pessoa em estado de repouso, um ciclo de aspiração e expiração completo ocorre a cada 5 segundos e que a taxa máxima de inalação e exalação, em módulo, é 0,6 L/s, a expressão da função cujo gráfico mais se aproxima da curva representada na figura é:

A) $V(t) = \frac{2\pi}{5}.\text{sen}\ \frac{3}{5}t$

B) $V(t) = \frac{3}{5}.\text{sen}\ \frac{5}{2\pi}t$

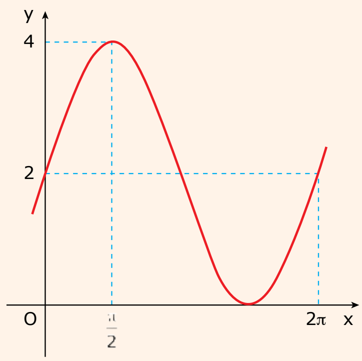
C) $V(t) = 0{,}6.\cos\ \frac{2\pi}{5}t$

D) $V(t) = 0{,}6.\text{sen}\ \frac{2\pi}{5}t$

E) $V(t) = \frac{5}{2\pi}.\cos\ (0{,}6t)$

11. OKXØ

(Fatec-SP) Um determinado objeto de estudo é modelado segundo uma função trigonométrica **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, sendo parte do seu gráfico representado na figura:



Usando as informações dadas nesse gráfico, pode-se afirmar que:

A) a função **f** é definida por f(x) = 2 + 3.sen x.

B) **f** é crescente para todo **x** tal que $x \in [\pi; 2\pi]$.

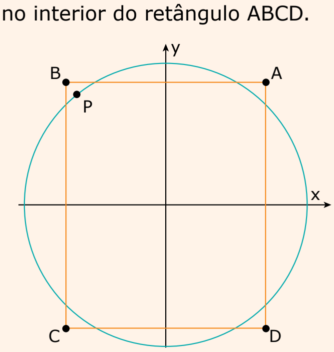
C) o conjunto imagem da função **f** é [2; 4].

D) para $y = f\ \frac{19\neq}{4}$, tem-se $2 < y < 4$.

E) o período de **f** é p.

12. VPIL

(Insper-SP–2016) Na figura, em que está representada a circunferência trigonométrica, **P** é a extremidade de um arco trigonométrico da 1ª volta cuja medida, em radianos, é igual a a. Observe que **P** é um ponto do 2° quadrante localizado no interior do retângulo ABCD.



As coordenadas dos vértices do retângulo são dadas por:

$A = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$, $B = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$, $C = -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$D = \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Assim, é necessariamente verdadeira a desigualdade:

A) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$

B) $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$

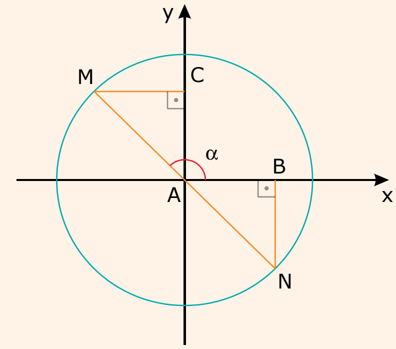
C) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$

D) $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi$

E) $\pi < \alpha < \frac{7\pi}{6}$

13. PEZI

(CEFET-MG) A figura a seguir representa uma circunferência trigonométrica em que MN é diâmetro e o ângulo a mede $\frac{5\neq}{6}$ radianos.

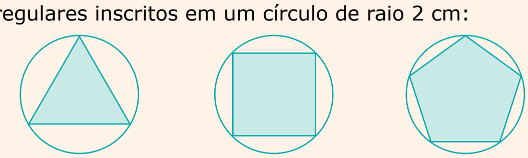


A razão entre as medidas dos segmentos AB e AC é:

A) $26\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

14. ØAJA

(UFPR–2016) Considere a seguinte sequência de polígonos regulares inscritos em um círculo de raio 2 cm:



3 lados 4 lados 5 lados

Sabendo que a área **A** de um polígono regular de **n** lados dessa sequência pode ser calculada pela fórmula $A = 2n.\text{sen}\ \frac{2\pi}{n}$, considere as seguintes afirmativas:

1. As áreas do triângulo equilátero e do quadrado nessa sequência são, respectivamente, $3\sqrt{3}$ cm² e 8 cm².
2. O polígono regular de 12 lados, obtido nessa sequência, terá área de 12 cm².
3. À medida que **n** aumenta, o valor **A** se aproxima de 4p cm².

Assinale a alternativa correta.

A) Somente a afirmativa 1 é verdadeira.

B) Somente as afirmativas 1 e 2 são verdadeiras.

C) Somente as afirmativas 1 e 3 são verdadeiras.

D) Somente as afirmativas 2 e 3 são verdadeiras.

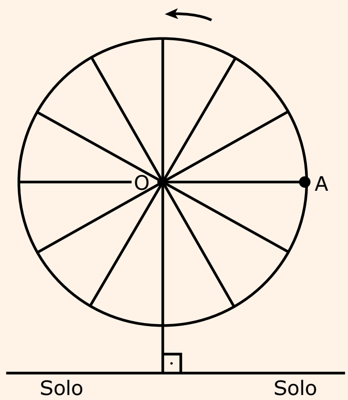
E) As afirmativas 1, 2 e 3 são verdadeiras.

SEÇÃO ENEM

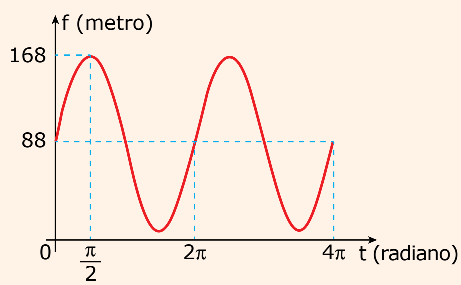
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2018) Em 2014 foi inaugurada a maior roda-gigante do mundo, a High Roller, situada em Las Vegas. A figura representa um esboço dessa roda-gigante, no qual o ponto **A** representa uma de suas cadeiras:

MATEMÁTICA



A partir da posição indicada, em que o segmento OA se encontra paralelo ao plano do solo, rotaciona-se a High Roller no sentido anti-horário, em torno do ponto **O**. Sejam **t** o ângulo determinado pelo segmento OA em relação à sua posição inicial, e **f** a função que descreve a altura do ponto **A**, em relação ao solo, em função de **t**. Após duas voltas completas, **f** tem o seguinte gráfico:



A expressão da função altura é dada por:

A) $f(t) = 80sen(t) + 88$

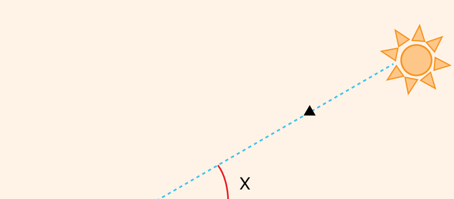
B) $f(t) = 80cos(t) + 88$

C) $f(t) = 88cos(t) + 168$

D) $f(t) = 168sen(t) + 88cos(t)$

E) $f(t) = 88sen(t) + 168cos(t)$

02. UAMZ (Enem–2017) Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo **x** com a superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x) = k.sen(x)$, sendo **k** uma constante, e supondo-se que **x** está entre 0° e 90°.



Quando x = 30°, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

A) 33%. B) 50%. C) 57%. D) 70%. E) 86%.

03. (Enem–2015) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço **P**, em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função $P(x) = 8 + 5.\cos\left(\frac{\pi x - \pi}{6}\right)$, onde **x** representa o mês do ano, sendo x = 1 associado ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x = 12 associado ao mês de dezembro.

Disponível em: <www.ibge.gov.br>. Acesso em: 02 ago. 2012 (Adaptação).

Na safra, o mês de produção máxima desse produto é:

A) janeiro. B) abril. C) junho. D) julho. E) outubro.

04. (Enem) Um satélite de telecomunicações, **t** minutos após ter atingido sua órbita, está a **r** quilômetros de distância do centro da Terra. Quando **r** assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de **r** em função de **t** seja dado por:

$$r(t) = \frac{5\,865}{1 + 0{,}15.\cos(0{,}06.t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de **r**, no apogeu e no perigeu, representada por **S**. O cientista deveria concluir que, periodicamente, **S** atinge o valor de

A) 12 765 km.

B) 12 000 km.

C) 11 730 km.

D) 10 965 km.

E) 5 865 km.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. D	03. E	05. C	07. A
02. A	04. A	06. D	08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A	05. B	09. A	13. B
02. E	06. B	10. D	14. E
03. E	07. B	11. D	
04. D	08. A	12. B	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. A	03. D
02. B	04. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %