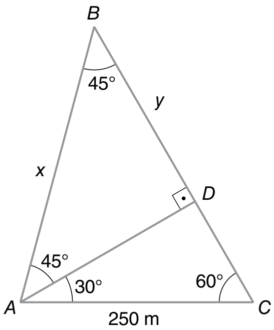
Capítulo 4

Outras razões trigonométricas, adição de arcos e resolução de triângulos

Para pensar

De acordo com os dados do enunciado, $AC = 250$ m e o ângulo oposto a $\overline{BC}$ mede 60°. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo mede 180°, temos que o ângulo oposto a $\overline{AC}$ mede 45°.

Com o que aprendemos até aqui, o problema pode ser resolvido a partir da seguinte construção, em que x é a distância AB e y é a medida da projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$:



O triângulo ABD é isósceles de base $\overline{AB}$, logo $AD = BD = y$. Assim, temos:

$$\begin{cases} \text{sen } 45° = \dfrac{y}{x} \\ \text{sen } 60° = \dfrac{y}{250} \end{cases} \Rightarrow x = 125\sqrt{6}$$

Logo, a distância AB é $125\sqrt{6}$ m.

Com o que aprenderemos neste capítulo, a resolução deste problema é significativamente facilitada. Observe a resolução a seguir.

Pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{250}{\text{sen } 45°} = \frac{AB}{\text{sen } 60°}$$

$$AB = \frac{250 \cdot \text{sen } 60°}{\text{sen } 45°}$$

$$AB = \frac{250 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$AB = \frac{250 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$AB = 125\sqrt{6}$$

Logo, a distância AB corresponde a $125\sqrt{6}$ m.

Exercícios propostos

1. Calculando as trigonométricas, temos:

$$\text{sec } 60° = \frac{1}{\cos 60°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{cossec } 30° = \frac{1}{\text{sen } 30°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{cotg}^2\, 30° = \text{cotg } 30° \cdot \text{cotg } 30° = \frac{1}{\text{tg } 30°} \cdot \frac{1}{\text{tg } 30°} =$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\text{sec } 0° = \frac{1}{\cos 0°} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{tg } 45° = 1$$

Assim:

$$E = \frac{\text{sec } 60° + \text{cossec } 30° - \text{cotg}^2\, 30°}{\text{sec } 0° + \text{tg } 45°} =$$

$$= \frac{2 + 2 - 3}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Portanto, o valor numérico de E é $\frac{1}{2}$.

2. $E = \text{cossec } x + \text{sec}^2\, 2x + \text{cotg } \dfrac{3x}{2}$

Para $x = \frac{\pi}{6}$, temos:

$$E = \text{cossec } \frac{\pi}{6} + \text{sec}^2\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) + \text{cotg}\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \text{cossec } \frac{\pi}{6} + \text{sec}^2\, \frac{\pi}{3} + \text{cotg } \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{6}} + \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}}\right)^2 + \frac{1}{\text{tg } \frac{\pi}{4}} = 2 + 4 + 1 = 7$$

Logo, $E = 7$.

3. $$\begin{cases} \dfrac{1}{\cos x} = 3 \\ \text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{3} & \text{(I)} \\ \text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$$\text{sen}^2\, x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos $\text{sen } x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e, portanto:

$$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} = 4 \\ \text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 4 \text{ sen } x & \text{(I)} \\ \text{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II):

$$\text{sen}^2\, x + (4 \text{ sen } x)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}$$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, temos $\text{sen } x = -\frac{\sqrt{17}}{17}$.

Substituindo sen x por $-\frac{\sqrt{17}}{17}$ em (I), obtemos:

$\cos x = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$ e, portanto:

$$\text{sec } x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{4\sqrt{17}}{17}} = -\frac{\sqrt{17}}{4}$$

5. a) $\text{cossec } x = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen } x} = 1$

$\therefore \text{ sen } x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

b) $\sec x = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = -1$

$\therefore \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$

Logo, $S = \{\pi\}$.

c) $\text{cossec } x = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen } x} = 2$

$\therefore \text{ sen } x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

d) $\sec x = -2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = -2$

$\cos x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $x = \dfrac{4\pi}{3}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right\}$.

e) $\sec x = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{2}$

$\therefore \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

f) $\text{cossec } x = -\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen } x} = -\sqrt{2}$

$\therefore \text{ sen } x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

6. Partindo da equação inicial dada, temos:

$3 \text{ tg } x + 2\cos x = 3\sec x$

$3 \cdot \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + 2 \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\cos x} = 3 \cdot \dfrac{1}{\cos x}$

$3 \cdot \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + 2 \cdot \dfrac{\cos^2 x}{\cos x} - 3 \cdot \dfrac{1}{\cos x} = 0$

$\cos x \neq 0$

$\dfrac{3 \text{ sen } x + 2\cos^2 x - 3}{\cos x} = 0$

$3 \text{ sen } x + 2\cos^2 x - 3 = 0$

Sabemos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, então:

$3 \text{ sen } x + 2(1 - \text{sen}^2 x) - 3 = 0$

Chamando $\text{sen } x = y$, temos:

$-2y^2 + 3y - 1 = 0$

$2y^2 - 3y + 1 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 9 - 8 = 1$

$y = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (2)} = \dfrac{3 \pm 1}{4}$

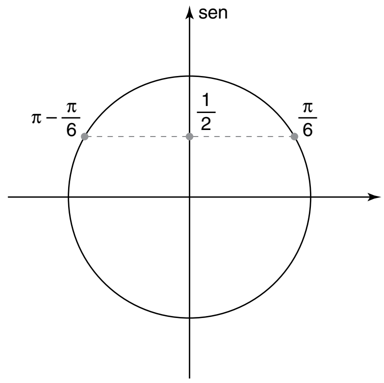
$y = 1$ ou $y = \dfrac{1}{2}$

Para $y = 1$:

$y = \text{sen } x = 1$ não convém, pois, para $\text{sen } x = 1$, tem-se $\cos x = 0$, que não satisfaz a condição de existência.

Para $y = \dfrac{1}{2}$:

$\text{sen } x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$



Portanto, os valores de x que satisfazem a equação são $\dfrac{\pi}{6}$ e $\dfrac{5\pi}{6}$.

7. Partindo da equação inicial dada, temos:

$$\frac{\text{cotg } x - 1}{\text{cossec } x} = \frac{\frac{1}{\text{tg } x} - 1}{\frac{1}{\text{sen } x}} =$$

$$= \left(\frac{1}{\frac{\text{sen } x}{\cos x}} - 1 \cdot \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x}\right) \cdot \frac{\text{sen } x}{1} =$$

$$= \left(\frac{\cos x}{\text{sen } x} - \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x}\right) \cdot \frac{\text{sen } x}{1} = \cos x - \text{sen } x$$

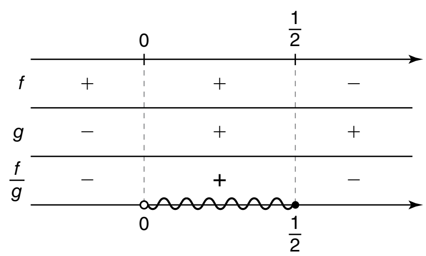
Alternativa **d**.

8. a) $\sec x \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} \geqslant 2$

Para $t = \cos x$, temos:

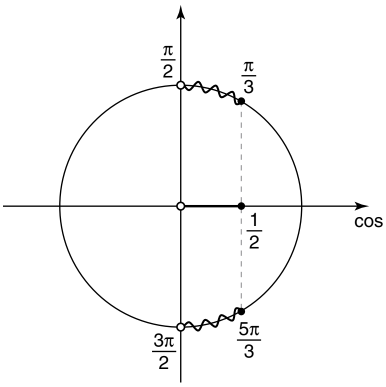
$\dfrac{1}{t} \geqslant 2 \Rightarrow \dfrac{-2t + 1}{t} \geqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = -2t + 1$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} \geqslant 0 \Rightarrow 0 < t \leqslant \dfrac{1}{2}$ e, portanto:

$0 < \cos x \leqslant \dfrac{1}{2}$

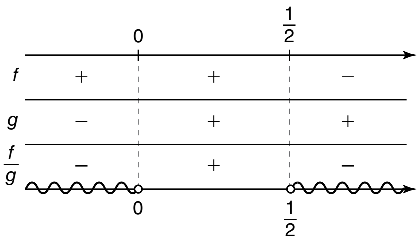


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant \frac{5\pi}{3}\right\}$.

b) $\text{cossec } x < 2 \Rightarrow \frac{1}{\text{sen } x} < 2$. Para $t = \text{sen } x$, temos:

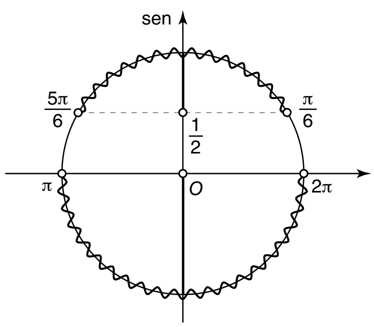
$\frac{1}{t} < 2 \Rightarrow \frac{-2t + 1}{t} < 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = -2t + 1$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} < 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t > \frac{1}{2}$ e, portanto:

$\text{sen } x < 0$ ou $\text{sen } x > \frac{1}{2}$

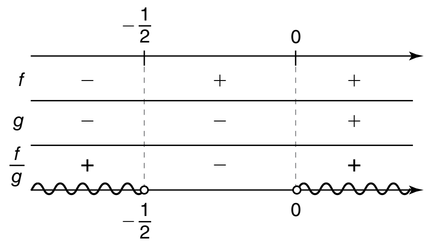


Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \pi < x < 2\pi\right\}$.

c) $\sec x > -2 \Rightarrow \frac{1}{\cos x} > -2$. Para $t = \cos x$, temos:

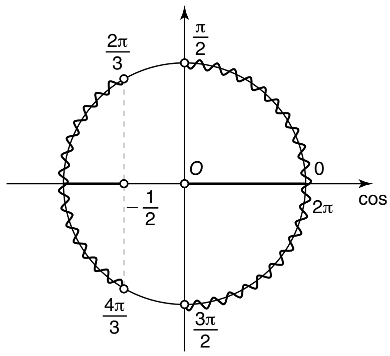
$\frac{1}{t} > -2 \Rightarrow \frac{2t + 1}{t} > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = 2t + 1$, $g(t)$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\frac{1}{2}$ ou $t > 0$ e, portanto:

$\cos x < -\frac{1}{2}$ ou $\cos x > 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \text{ ou } 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

9. $\text{cotg } \alpha = \frac{1}{6} \Rightarrow \text{tg } \alpha = 6$

$\sec \beta = \frac{13}{12} \Rightarrow \cos \beta = \frac{12}{13}$

$\begin{cases} \cos \beta = \frac{12}{13} \\ \text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{5}{13}$, para $0° < \beta < 90°$

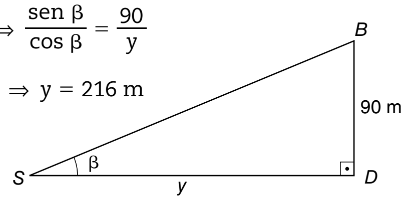
Assim, temos:

$\text{tg } \alpha = \frac{90}{x} \Rightarrow 6 = \frac{90}{x}$

$\therefore x = 15$ m

$\text{tg } \beta = \frac{90}{y} \Rightarrow \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \frac{90}{y}$

$\therefore \frac{5}{12} = \frac{90}{y} \Rightarrow y = 216$ m



Concluímos, então, que a distância d entre os navios é dada por:

$d = y - x \Rightarrow d = 201$ m

10. a) $5(x + 2) = 5x + 10$ é equivalente à sentença $5x + 10 = 5x + 10$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

b) $6x = 12$ é equivalente à sentença $x = 2$, que se verifica apenas para o número real 2. Logo, não é uma identidade em $\mathbb{R}$.

c) O produto $0 \cdot x$ se anula para todo x real. Logo, a sentença $0 \cdot x = 0$ é uma identidade em $\mathbb{R}$.

d) Para $x = 0$, a sentença $\frac{0}{x} = 0$ é falsa. Logo, essa sentença não é identidade em $\mathbb{R}$.

e) Para qualquer x real não nulo, o quociente $\frac{0}{x}$ é nulo. Logo, a sentença $\frac{0}{x} = 0$ é uma identidade em $\mathbb{R}^*$.

f) Como 1 é elemento neutro da multiplicação, $1 \cdot x = x$ é equivalente a $x = x$, o que é uma identidade em $\mathbb{R}$.

g) Existe pelo menos um valor real de x, por exemplo, $x = 1$, para o qual a sentença $(x + 3)^2 = x^2 + 9$ é falsa. Logo, essa sentença não é identidade em $\mathbb{R}$.

h) Desenvolvendo o quadrado perfeito do primeiro membro, obtemos a sentença:
$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 6x + 9$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

i) $\sqrt{x^2} = |x|$ é equivalente à sentença $x^2 = |x|^2$, que é equivalente a $x^2 = x^2$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

j) $\sqrt[3]{x^3} = x$ é equivalente à sentença $x^3 = x^3$, que se verifica para todo x real. Logo, é uma identidade em $\mathbb{R}$.

11. Partindo da equação inicial dada, temos:

$(\text{sen } x + \cos x)^2 + k \text{ sen } x \cos x - 1 = 0$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \text{ sen } x \cos x + k \text{ sen } x \cos x - 1 = 0$

$1 + 2 \text{ sen } x \cos x + k \text{ sen } x \cos x - 1 = 0$

$2 \text{ sen } x \cos x + k \text{ sen } x \cos x = 0$

$(k + 2) \text{ sen } x \cos x = 0$

Essa igualdade se verifica para qualquer x real se, e somente se, $k = -2$.

12. a) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

1^{o} membro $= \text{cotg } x - \text{cotg } x \cdot \cos^2 x =$

$= \text{cotg } x(1 - \cos^2 x) = \text{cotg } x \cdot \text{sen}^2 x =$

$= \dfrac{\cos x}{\text{sen } x} \cdot \text{sen}^2 x = \cos x \cdot \text{sen } x = 2^{\text{o}}$ membro

b) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do segundo membro, temos:

2^{o} membro $= 1 + \text{cotg}^2 x = 1 + \dfrac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} =$

$= \dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \dfrac{1}{\text{sen}^2 x} =$

$= \text{cossec}^2 x = 1^{\text{o}}$ membro

c) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

1^{o} membro $= \text{tg } x \cdot \sec x - \text{sen } x =$

$= \dfrac{\text{sen } x}{\cos x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} - \text{sen } x = \dfrac{\text{sen } x}{\cos^2 x} - \text{sen } x =$

$= \dfrac{\text{sen } x - \text{sen } x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\text{sen } x(1 - \cos^2 x)}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{\text{sen } x \cdot \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \text{sen } x \cdot \text{tg}^2 x = 2^{\text{o}}$ membro

d) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

1^{o} membro $= \sec^4 x - \text{tg}^4 x - 1 =$

$= (\sec^2 x)^2 - \text{tg}^4 x - 1 = (1 + \text{tg}^2 x)^2 - \text{tg}^4 x - 1 =$

$= 1 + 2 \text{ tg}^2 x + \text{tg}^4 x - \text{tg}^4 x - 1 =$

$= 2 \text{ tg}^2 x = 2^{\text{o}}$ membro

13. a) $\cos 75° = \cos (45° + 30°) =$

$= \cos 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Logo, $\cos 75° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

b) $\text{sen } 15° = \text{sen } (45° - 30°) =$

$= \text{sen } 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \text{sen } 30° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Logo, $\text{sen } 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

c) $\text{tg } 75° = \text{tg } (45° + 30°) =$

$$= \frac{\text{tg } 45° + \text{tg } 30°}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{3}}{\frac{2}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

Logo, $\text{tg } 75° = 2 + \sqrt{3}$.

14. Aplicando as identidades

$\cos (a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen } a \cdot \text{sen } b$ e

$\cos (a - b) = \cos a \cdot \cos b + \text{sen } a \cdot \text{sen } b$, temos:

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) =$

$= \cos \dfrac{\pi}{2} \cdot \cos x + \text{sen } \dfrac{\pi}{2} \cdot \text{sen } x +$

$+ \cos \dfrac{3\pi}{2} \cdot \cos x - \text{sen } \dfrac{3\pi}{2} \cdot \text{sen } x =$

$= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \text{sen } x + 0 \cdot \cos x - (-1) \cdot \text{sen } x =$

$= \text{sen } x + \text{sen } x = 2 \text{ sen } x$

15. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} =$

$= \operatorname{sen} x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \cos x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 1$

$\therefore \cancel{\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} - \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2} =$

$= \operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{2} + \cancel{\cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} - 1 \Rightarrow \cancel{2}\operatorname{sen} x \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 1$

$\therefore \operatorname{sen} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

Portanto:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\right\}$

16. **a)** $\operatorname{sen} 10° \cdot \cos 20° + \operatorname{sen} 20° \cdot \cos 10° =$

$= \operatorname{sen}(10° + 20°) = \operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$

b) $\cos 5° \cdot \cos 55° - \operatorname{sen} 5° \cdot \operatorname{sen} 55° =$

$= \cos(5° + 55°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

c) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{12}\right) =$

$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

17. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$

Como $\cos x = \frac{5}{13}$, vamos obter sen x:

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{169 - 25}{169} = \frac{144}{169}$

$\therefore \operatorname{sen}^2 x = \frac{144}{169}$

Como $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, $\operatorname{sen} x = -\frac{12}{13}$. Assim:

$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{13} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{26} + \frac{12\sqrt{2}}{26}$

Logo, $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}$.

18. Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = \frac{1 + 3}{1 - 1 \cdot 3} = \frac{4}{1 - 3} =$

$= -\frac{4}{2} = -2$

Portanto, $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2$.

19. Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$\operatorname{tg}(45° + \alpha) = \dfrac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - 1 \cdot \operatorname{tg}\alpha}$

Assim:

$\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{12}{5}$

$5 + 5\operatorname{tg}\alpha = 12 - 12\operatorname{tg}\alpha$

$5\operatorname{tg}\alpha + 12\operatorname{tg}\alpha = 12 - 5$

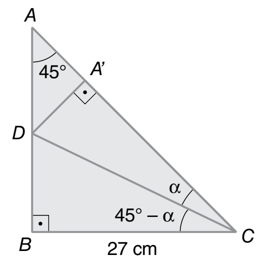
$17\operatorname{tg}\alpha = 7$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{17}$

Portanto, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{17}$.

20. Como $B\widehat{A}C$ mede 45° e $A\widehat{B}C$ mede 90°, então $A\widehat{C}B$ mede 45°. Logo, temos que o triângulo ABC é isósceles, com as medidas dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ iguais a 27 cm.

Com isso, temos:



Assim, sendo x a medida em centímetro do segmento $\overline{BD}$, concluímos:

$\operatorname{tg}(45° - \alpha) = \frac{x}{27} \Rightarrow \dfrac{\operatorname{tg} 45° - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{x}{27}$

$\therefore \dfrac{1 - 0{,}35}{1 + 1 \cdot 0{,}35} = \frac{x}{27} \Rightarrow x = 13$

Logo, $BD = 13$ cm.

Alternativa **e**.

21. O ângulo $A\widehat{D}B$ mede $\alpha + 30°$, pois é externo do triângulo BDC. Assim, indicando por x a medida do segmento $\overline{BD}$, temos:

$\operatorname{sen}(\alpha + 30°) = \frac{30}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos 30° + \operatorname{sen} 30° \cdot \cos\alpha = \frac{30}{x}$

$\therefore \operatorname{sen}\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos\alpha = \frac{30}{x}$ (I)

Sabendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{7}$, calculamos o cos x:

$\left(\frac{1}{7}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7}$

Como $0 < \alpha < 90°$, temos: $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ (II)

Substituindo (II) em (I), concluímos:

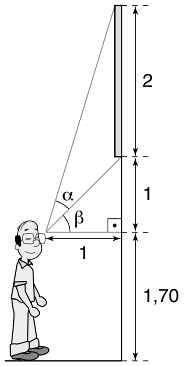
$\frac{1}{7} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{30}{x}$

$\left(\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\right) \cdot x = 30 \cdot 14$

$x = \frac{30 \cdot 14}{5\sqrt{3}} \Rightarrow x = 28\sqrt{3}$

Portanto, a medida do segmento $\overline{BD}$ é $28\sqrt{3}$ cm.

22.



$\begin{cases} \text{tg } \beta = 1 \\ \text{tg } (\beta + \alpha) = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \text{tg } \beta = 1 & \text{(I)} \\ \dfrac{\text{tg } \beta + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \alpha} = 3 & \text{(II)} \end{cases}$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$\dfrac{1 + \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg } \alpha} = 3 \Rightarrow \text{tg } \alpha = \dfrac{1}{2}$

23. Como $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, $-1 < \cos x < 0$.

Pela relação fundamental, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\therefore \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{9} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{8}{9}$

$\therefore \cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Temos, então:

$\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 =$

$= \dfrac{8}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{7}{9}$

24. $\text{sen } x = 2 \cos x \Rightarrow \text{sen}^2 x = (2 \cos x)^2$

$\therefore \text{sen}^2 x = 4 \cos^2 x \Rightarrow 1 - \cos^2 x = 4 \cos^2 x$

$\therefore 5 \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1}{5}$

$\therefore \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Como $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, $-1 < \cos x < 0$;

logo, $\cos x = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ e da equação dada:

$\text{sen } x = 2 \cos x \Rightarrow \text{sen } x = 2 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$\therefore \text{sen } x = -\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Logo:

$\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x = 2\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right) = \dfrac{4}{5}$

25. $\cos 10x = \cos (2 \cdot 5x) = \cos^2 5x - \text{sen}^2 5x =$

$= 2 \cos^2 5x - 1$

$\therefore \cos 10x = 2 \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^2 - 1 = \dfrac{7}{18}$

26. Lembrando que $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$ e

$\text{sen } (x - y) = \text{sen } x \cdot \cos y - \text{sen } y \cdot \cos x$, temos:

$\dfrac{\text{sen } 27°}{\text{sen } 9°} - \dfrac{\cos 27°}{\cos 9°} =$

$= \dfrac{\text{sen } 27° \cdot \cos 9° - \text{sen } 9° \cdot \cos 27°}{\text{sen } 9° \cdot \cos 9°} =$

$= \dfrac{\text{sen } (27° - 9°)}{\text{sen } 9° \cdot \cos 9°} = \dfrac{\text{sen } 18°}{\text{sen } 9° \cdot \cos 9°} =$

$= \dfrac{2 \text{ sen } 18°}{2 \cdot \text{sen } 9° \cdot \cos 9°} = \dfrac{2 \text{ sen } 18°}{\text{sen } (2 \cdot 9°)} =$

$= \dfrac{2 \text{ sen } 18°}{\text{sen } 18°} = 2$

Alternativa **e**.

27. Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$\cos 72° = \cos (36° + 36°) = \cos^2 36° - \text{sen}^2 36° =$

$= \cos^2 36° - (1 - \cos^2 36°) = 2 \cos^2 36° - 1$

Como $\cos 36° = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$, temos:

$2 \cos^2 36° - 1 = 2 \cdot \cos 36° \cdot \cos 36° - 1 =$

$= 2 \cdot \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4} \cdot \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4} - 1 = 2 \cdot \dfrac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{16} - 1 =$

$= \dfrac{6 + 2\sqrt{5}}{8} - 1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{4} - \dfrac{4}{4} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$

Alternativa **b**.

28. Pelo enunciado, temos:

$M^2 + N^2 = (\cos a + \cos b)^2 + (\text{sen } a - \text{sen } b)^2 =$

$= \cos^2 a + \cos^2 b + 2 \cos a \cos b + \text{sen}^2 a +$

$+ \text{sen}^2 b - 2 \text{ sen } a \text{ sen } b =$

$= \cos^2 a + \text{sen}^2 a + \cos^2 b + \text{sen}^2 b +$

$+ 2 \cdot (\cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b) =$

$= 1 + 1 + 2 \cdot \cos (a + b) = 2 + 2 \cdot \cos 120° =$

$= 2 + 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$

Alternativa **e**.

29. **a)** $\text{sen } 2x = \cos x$

$2 \text{ sen } x \cos x = \cos x \Rightarrow 2 \text{ sen } x \cos x - \cos x = 0$

$\therefore \cos x (2 \text{ sen } x - 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = 0$ ou $\text{sen } x = \dfrac{1}{2}$

Resolvendo cada uma dessas equações no intervalo $[0, 2\pi[$, obtemos:

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{2}$

$\text{sen } x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$

Logo, $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

b) $\cos 2x = \text{sen } x$

$1 - 2 \text{ sen}^2 x = \text{sen } x$

$-2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x + 1 = 0$

$2 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável $\text{sen } x = y$, temos:

$2y^2 + y - 1 = 0$

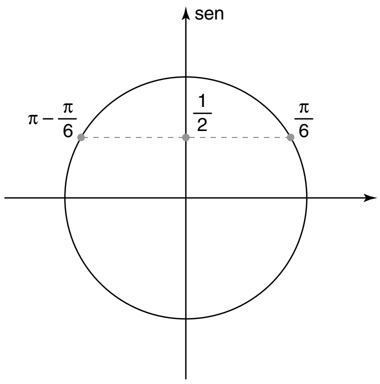
$y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4}$

$y = \dfrac{1}{2}$ ou $y = -1$

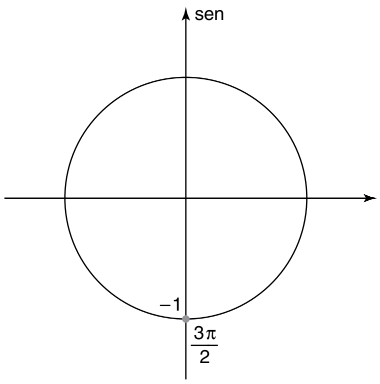
Assim:

$\text{sen } x = \frac{1}{2}$ ou $\text{sen } x = -1$

Para $\text{sen } x = \frac{1}{2}$:



Para $\text{sen } x = -1$:



Portanto, $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{3\pi}{2}$.

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

c) $\text{tg } 2x = -\text{tg } x$

Condição de existência: $|\text{tg } x| \neq 1$ e $\cos x \neq 0$.

$$\frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} = -\text{tg } x \Rightarrow \frac{2 \text{ tg } x}{1 - \text{tg}^2 x} + \text{tg } x = 0$$

$$\therefore \frac{2 \text{ tg } x + \text{tg } x - \text{tg}^3 x}{1 - \text{tg}^2 x} = 0 \Rightarrow 3 \text{ tg } x - \text{tg}^3 x = 0$$

$\therefore \text{tg } x\,(3 - \text{tg}^2 x) = 0 \Rightarrow \text{tg } x = 0$ ou $\text{tg } x = \sqrt{3}$ ou $\text{tg } x = -\sqrt{3}$

Resolvendo cada uma dessas equações no intervalo $[0, 2\pi[$, obtemos:

$\text{tg } x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$

$\text{tg } x = \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

$\text{tg } x = -\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

Logo: $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

30. $\begin{cases} \text{sen } \alpha = \frac{5}{13} \\ \text{sen } 2\alpha = \frac{5}{\ell} \end{cases}$

Sabemos que $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, então:

$\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\frac{25}{169} + \cos^2 \alpha = 1$

$\cos^2 \alpha = \frac{169}{169} - \frac{25}{169}$

$\cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$

Como o ângulo é agudo, ele está associado ao primeiro quadrante, logo:

$\cos \alpha = \frac{12}{13}$

Sabemos que: $\text{sen } 2\alpha = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$

Logo:

$\text{sen } 2\alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$

Assim:

$\frac{5}{\ell} = \frac{120}{169}$

$120\ell = 5 \cdot 169$

$\ell = \frac{169}{24}$

Portanto, o valor de ℓ é $\frac{169}{24}$.

31. $(AC)^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow AC = 4$

Sendo x a distância procurada, temos:

$\text{sen } 2\alpha = \frac{x}{5} \Rightarrow 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{x}{5}$

$\therefore 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 4{,}8$ cm

32. Lembrando que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ e que $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$, temos:

$\cos 3x = \cos(x + 2x) = \cos x \cdot \cos 2x - \text{sen } x \cdot \text{sen } 2x =$
$= \cos x(2\cos^2 x - 1) - \text{sen } x(2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x) =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x =$
$= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x =$
$= 4\cos^3 x - 3\cos x$

Logo, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Assim, para $\cos x = k$, temos: $\cos 3x = 4k^3 - 3k$

33. Lembrando que $\text{sen } 2x = 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x$ e que $\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$, temos:

$\text{sen } 3x = \text{sen}(x + 2x) =$
$= \text{sen } x \cdot \cos 2x + \text{sen } 2x \cdot \cos x =$
$= \text{sen } x\,(1 - 2\,\text{sen}^2 x) + 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos^2 x =$
$= \text{sen } x - 2\,\text{sen}^3 x + 2\,\text{sen } x\,(1 - \text{sen}^2 x) =$
$= \text{sen } x - 2\,\text{sen}^3 x + 2\,\text{sen } x - 2\,\text{sen}^3 x =$
$= 3\,\text{sen } x - 4\,\text{sen}^3 x$

Logo, $\text{sen } 3x = 3\,\text{sen } x - 4\,\text{sen}^3 x$.

Assim, para $\text{sen } x = a$, temos: $\text{sen } 3x = 3a - 4a^3$

34. $10 \cos 2x + \text{sen } x = 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10(1 - 2 \text{ sen}^2 x) + \text{sen } x = 9$
$\therefore 10 - 20 \text{ sen}^2 x + \text{sen } x - 9 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 20 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$

Fazendo a mudança de variável sen $x = t$, obtemos a seguinte equação do 2º grau:

$20t^2 - t - 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 20 \cdot (-1) = 81$

$\therefore t = \dfrac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 20} \Rightarrow t = \dfrac{1}{4}$ ou $t = -\dfrac{1}{5}$

Retornando à variável original, temos:

sen $x = \dfrac{1}{4}$ ou sen $x = -\dfrac{1}{5}$

Como o arco tem extremidade no 3º quadrante, sen $x < 0$ e cos $x < 0$.

Assim, sen $x = -\dfrac{1}{5}$ e, pela relação fundamental:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

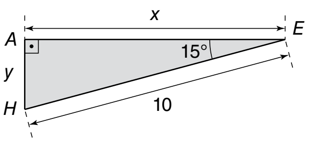
$\therefore \cos^2 x = 1 - \dfrac{1}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{24}{25}$

$\therefore \cos x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

Logo, sen $x = -\dfrac{1}{5}$ e cos $x = -\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

35. Os triângulos *AEH*, *BFE*, *CGF* e *DHG* são congruentes (caso LAA_o). Logo, a área S do quadrado maior é a soma da área do quadrado menor com o quádruplo da área de um desses triângulos.

Sendo $AE = x$, temos:



$\cos 15° = \dfrac{x}{10} \Rightarrow x = 10 \cdot \cos 15°$

$\text{sen } 15° = \dfrac{y}{10} \Rightarrow y = 10 \cdot \text{sen } 15°$

Logo, a área S_t do triângulo *AEH* é dada por:

$S_t = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 15° \cdot \text{sen } 15°$

ou, ainda:

$S_t = 50 \cdot \cos 15° \cdot \text{sen } 15° = 25 \cdot 2 \cdot \cos 15° \cdot \text{sen } 15° \Rightarrow$

$\Rightarrow S_t = 25 \text{ sen } 30° = \dfrac{25}{2}$

Concluímos, então, que a área S do quadrado maior é:

$S = \left(10^2 + 4 \cdot \dfrac{25}{2}\right) \text{cm}^2 = 150 \text{ cm}^2$

36. **a)** $\cos x = 2 \cos^2 \dfrac{x}{2} - 1 = 2 \cdot \left(\dfrac{1}{6}\right)^2 - 1 = -\dfrac{17}{8}$

b) $\cos x = 1 - 2 \text{ sen}^2 \dfrac{x}{2} = 1 - 2 \cdot \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{7}{25}$

Calculando sen x pela relação fundamental, temos:

$\text{sen}^2 x + \left(\dfrac{7}{25}\right)^2 = 1 \Rightarrow \text{sen } x = \pm\dfrac{24}{25}$

Como $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, concluímos que sen $x = \dfrac{24}{25}$.

Assim, cos $x = \dfrac{7}{25}$ e sen $x = \dfrac{24}{25}$.

c) Pela fórmula de arco duplo, temos:

$\text{tg } x = \dfrac{2 \text{ tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1 - \text{tg}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

$\text{tg } x = \dfrac{2 \cdot 5}{1 - 5^2}$

$\text{tg } x = -\dfrac{10}{24}$

$\text{tg } x = -\dfrac{5}{12}$

37. **a)** Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$\cos x = 2 \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1$

$\dfrac{7}{18} = 2 \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1$

$2 \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{7}{18} + \dfrac{18}{18}$

$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{25}{36}}$

$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{5}{6}$

Novamente pela fórmula de adição de arcos, temos:

$\cos x = 1 - 2 \text{ sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\dfrac{7}{18} = 1 - 2 \text{ sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$2 \text{ sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{18}{18} - \dfrac{7}{18}$

$\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{11}{36}}$

$\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$

Portanto, $\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{5}{6}$ e $\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{11}}{6}$.

b) Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{81}{81} - \dfrac{32}{81}$

$\cos x = \sqrt{\dfrac{49}{81}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\dfrac{49}{81}}$ (não convém)

$\cos x = \dfrac{7}{9}$

Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$\cos x = 2 \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1$

$\dfrac{7}{9} = 2 \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) - 1$

$2 \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{7}{9} + \dfrac{9}{9}$

$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{16}{18}}$

$\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Novamente pela fórmula de adição de arcos, temos:

$\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$\frac{7}{9} = 1 - 2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$2\,\text{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{9}{9} - \frac{7}{9}$

$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{18}}$ ou $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = -\sqrt{\frac{2}{18}}$ (não convém)

$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$

Portanto, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ e $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

c) Pela fórmula de arco duplo, temos:

$$\text{tg}\, x = \frac{2\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{2\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$4 - 4\,\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) = 6\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$

$2\,\text{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\,\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = 0$

Considerando $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = y$, temos

$2y^2 + 3y - 2 = 0$

$$y = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

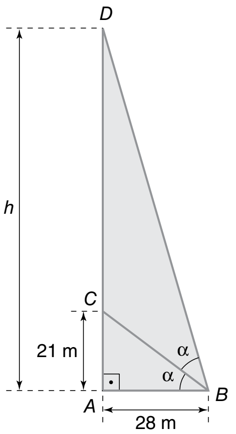
$y_1 = \frac{1}{2}$ ou $y_2 = -2$

Logo, $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$ ou $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = -2$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então a tangente é positiva.

Portanto, o único valor possível é $\text{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}$.

38. Sendo h a altura pedida, em metro, temos:



$$\begin{cases} \text{tg}\,\alpha = \frac{21}{28} \\ \text{tg}\,2\alpha = \frac{h}{28} \end{cases} \Rightarrow$$

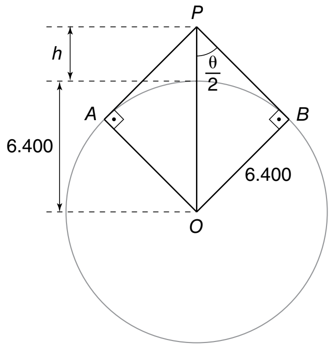
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4} & \text{(I)} \\ \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha} = \frac{h}{28} & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), concluímos:

$$\frac{2 \cdot \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{h}{28} \Rightarrow h = 96$$

Logo, ao atingir o ponto D, o helicóptero está a 96 m de altura em relação à pista.

39. Seja h a distância, em quilômetro, do ponto P à superfície da Terra. Como os triângulos PAO e PBO são congruentes, temos:



$$\begin{cases} \cos\theta = -0{,}62 & \text{(I)} \\ \text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \frac{6.400}{h + 6.400} & \text{(II)} \end{cases}$$

De (I), obtemos:

$\cos\left(2 \cdot \frac{\theta}{2}\right) = -0{,}62 \Rightarrow \cos^2\frac{\theta}{2} - \text{sen}^2\frac{\theta}{2} = -0{,}62$

$\therefore 1 - 2\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2} = -0{,}62 \Rightarrow \text{sen}\,\frac{\theta}{2} = \pm 0{,}9$

Como $\frac{\theta}{2}$ é medida de um ângulo interno de um triângulo, deduzimos que $\text{sen}\,\frac{\theta}{2} = 0{,}9$. Substituindo $\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$ por 0,9 em (II), concluímos:

$0{,}9 = \frac{6.400}{h + 6.400} \Rightarrow h = 711$

Alternativa **e**.

40. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

a) $x^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60°$

$\therefore x^2 = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{1}{2}$

$\therefore x^2 = 49$

Logo, $x = 7$ cm.

b) $y^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120°$

$\therefore y^2 = 25 + 100 - 100 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore y^2 = 175$

Logo, $y = 5\sqrt{7}$ m.

41. Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$2^2 = x^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot x \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0$

$\therefore x = 4$ ou $x = 2$

Como o ângulo $B\widehat{A}C$ é agudo, só nos interessa $x = 2$ dm.

(Note que, para $x = 4$, conclui-se, pelo teorema de Pitágoras, que o ângulo BAC é reto.)

42. **a)** Como o maior ângulo interno se opõe ao maior lado, pela lei dos cossenos a medida α desse ângulo é tal que:

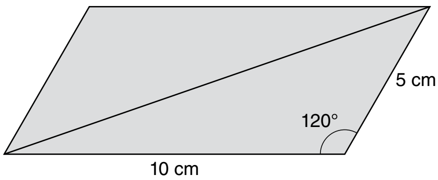
$7^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow 49 = 16 + 25 - 40 \cos \alpha$

$\therefore \cos \alpha = -\dfrac{1}{5}$

b) O ângulo é obtuso, pois α é medida de um ângulo interno de um triângulo, com $\cos \alpha < 0$.

43.



Cálculo da medida da diagonal maior (d_M):

$(d_M)^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 120° \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_M)^2 = 125 - 100 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore d_M = \sqrt{175} = 5\sqrt{7}$

Cálculo da medida da diagonal menor (d_m):

$(d_m)^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow (d_m)^2 = 125 - 100 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\therefore d_m = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Logo, as diagonais desse paralelogramo medem $5\sqrt{3}$ cm e $5\sqrt{7}$ cm.

44. $(BC)^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cos 60° \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$

Logo, a distância entre os pontos B e C é $4\sqrt{3}$ km.

45. **a)** Pela lei dos cossenos, temos:

$d^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos \theta$

$d^2 = 100 + 100 - 200 \cdot \cos \theta$

$d^2 = 200 \cdot (1 - \cos \theta)$

$\therefore d = 10\sqrt{2 - 2 \cos \theta}$

b) Usando a lei obtida no item **a**, temos:

$d = 10\sqrt{2 - 2 \cos \theta}$

$d = 10\sqrt{2 - 2 \cos 60°}$

$d = 10\sqrt{2 - 2 \cdot \dfrac{1}{2}}$

$d = 10 \cdot \sqrt{2 - 1}$

$d = 10$

Portanto, a distância é 10 cm.

c) A maior distância é dada quando a medida do ângulo do compasso é 120°.

Assim:

$d = 10\sqrt{2 - 2 \cos \theta}$

$d = 10\sqrt{2 - 2 \cos 120°}$

$d = 10\sqrt{2 - 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)}$

$d = 10\sqrt{3}$

Portanto, a distância máxima é $10\sqrt{3}$ cm.

d) Sabendo que o comprimento é dado pela fórmula $C = 2\pi r$, temos:

$2\pi r = 20\pi$

$r = 10$

Assim:

$10\sqrt{2 - 2 \cos \theta} = 10$

$\sqrt{2 - 2 \cos \theta} = 1$

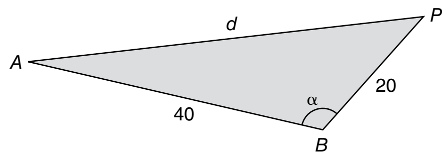
$2 - 2 \cos \theta = 1$

$2 \cos \theta = 2 - 1$

$\cos \theta = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta = 60°$

46. **a)**



Pela lei dos cossenos, temos:

$d^2 = 40^2 + 20^2 - 2 \cdot 40 \cdot 20 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow d = \pm 20\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$

Como a distância é um número não negativo, concluímos:

$d = 20\sqrt{5 - 4 \cos \alpha}$

b) Os valores máximo, d_M, e mínimo, d_m, são obtidos para $\cos \alpha = -1$ e $\cos \alpha = 1$, respectivamente. Assim:

$d_M = 20\sqrt{5 - 4 \cdot (-1)} \Rightarrow d_M = 60$

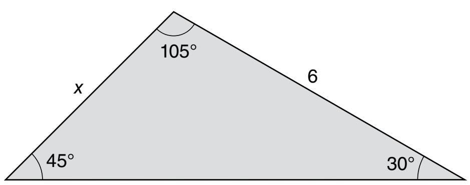
e

$d_m = 20\sqrt{5 - 4 \cdot 1} \Rightarrow d_m = 20$

Logo, o valor máximo da distância d é 60 cm e o mínimo é 20 cm.

c) Quando a função d assume seu valor máximo, os três pontos estão alinhados, com B entre A e P. Quando ela assume seu valor mínimo, os três pontos estão alinhados, com P entre A e B.

47.

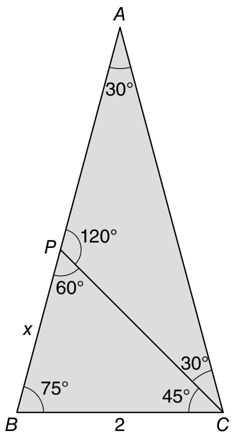


Pela lei dos senos, temos:

$\dfrac{x}{\text{sen } 30°} = \dfrac{6}{\text{sen } 45°} \Rightarrow \dfrac{x\sqrt{2}}{2} = 6 \cdot \dfrac{1}{2}$

$\therefore x = 6 \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

48.



Como o triângulo ABC é isósceles, os ângulos da base são congruentes. Sendo θ a medida de cada um desses ângulos, temos:

$30° + 2\theta = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = 75°$

Assim: $m(C\hat{P}B) = 60°$

Aplicando a lei dos senos no triângulo PCB, temos:

$$\frac{2}{\text{sen } 60°} = \frac{x}{\text{sen } 45°} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Logo, o segmento $\overline{BP}$ mede $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm.

49. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{3}{\text{sen } 30°} = \frac{4}{\text{sen } \alpha}$$

$$3 \text{ sen } \alpha = 4 \text{ sen } 30°$$

$$3 \text{ sen } \alpha = 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$$

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{9}{9} - \frac{4}{9}$$

$$\cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{9}}$$

Como o ângulo é obtuso, ele está no 2º quadrante, logo:

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Alternativa **d**.

50. Pela lei dos senos, a medida R do raio é dada por:

$$\frac{10}{\text{sen } 60°} = 2R \Rightarrow R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Logo, o raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

51. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{AB}{\text{sen } 45°} = 2 \cdot 1$$

$$AB = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$AB = \sqrt{2}$$

Alternativa **a**.

52. Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{4\sqrt{3}}{\text{sen } 120°} = \frac{4}{\text{sen } \alpha}$$

$$4\sqrt{3} \text{ sen } \alpha = 4 \text{ sen } 120°$$

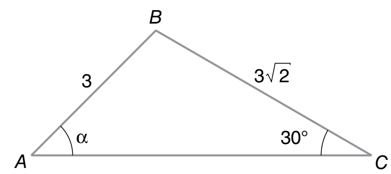
$$4\sqrt{3} \text{ sen } \alpha = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$$

Portanto, o valor de α é 30°.

53. Pelo enunciado, temos o seguinte desenho:



Pela lei dos senos, temos:

$$\frac{3}{\text{sen } 30°} = \frac{3\sqrt{2}}{\text{sen } \alpha}$$

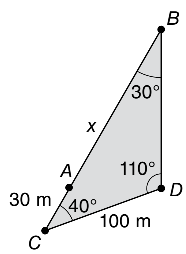
$$3 \cdot \text{sen } \alpha = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \text{sen } 30°$$

$$\text{sen } \alpha = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, o valor de α é 45°.

54.



Aplicando a lei dos senos, a distância x é dada por:

$$\frac{100}{\text{sen } 30°} = \frac{30 + x}{\text{sen } 110°} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (30 + x) = 100 \cdot 0{,}94$$

$$\therefore \frac{x}{2} = 79 \Rightarrow x = 158$$

Logo, a distância entre A e B é 158 m.

55. **a)** Analisando o triângulo ABC, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 \cdot \text{sen } 60°$$

$$A = 35 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área é $\frac{35\sqrt{3}}{2}$ m².

b) Analisando o triângulo DEF, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7 \cdot \text{sen } 135°$$

$$A = 21 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Portanto, a área é $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ dm².

56. **a)** Analisando o triângulo ABC, temos:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \text{sen } 120°$$

$$A = 28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, a área é $14\sqrt{3}$ cm².

b) Pela lei dos cossenos, temos:

$(AC)^2 = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 120°$

$(AC)^2 = 49 + 64 - 112 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

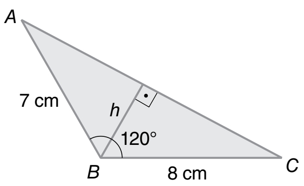
$(AC)^2 = 113 + 56$

$AC = \sqrt{169}$

$AC = 13$

Portanto, a medida do lado AC é 13 cm.

c) Pelo enunciado, vamos achar a seguinte altura h:



Com a área adquirida no item **a**, temos:

$\frac{28\sqrt{3}}{2} = \frac{(AC) \cdot h}{2}$

$28\sqrt{3} = 13 \cdot h$

$h = \frac{28\sqrt{3}}{13}$

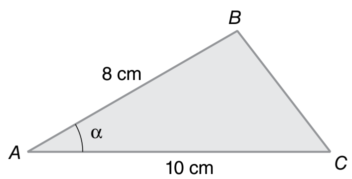
Portanto, a altura mede $\frac{28\sqrt{3}}{13}$ cm.

57. A área do paralelogramo é o dobro da área do triângulo ADC. Assim:

$A = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \text{sen } 30° = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$

Logo, a área do paralelogramo é 30 cm^2.

58. Pelo enunciado, temos:



Considerando med $(B\widehat{A}C) = \alpha$, temos:

$20 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10 \cdot \text{sen } \alpha$

$20 = 40 \cdot \text{sen } \alpha$

$\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 30°$ ou $\alpha = 150°$

Portanto, a medida do ângulo $B\widehat{A}C$ é 30° ou 150°.

59. Calculando a área A_S do setor circular AOB:

Medida do ângulo central (em grau)		Área (em cm^2)
360	———	$\pi \cdot 6^2$
150	———	A_S

$\Rightarrow A_S = 15\pi$

Calculando a área A_t do triângulo AOB:

$A_t = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \text{sen } 150° \Rightarrow A_t = 9$

Portanto, a área A pedida é dada por:

$A = A_S - A_t = (15\pi - 9) = 3(5\pi - 3)$

Logo, a área pedida é $3(5\pi - 3)$ cm^2.

Exercícios complementares

Exercícios técnicos

1. $E = \text{cotg}^2\, 60° + \sec 300° - \text{cossec } 330° =$

$= \left(\frac{1}{\text{tg } 60°}\right)^2 + \frac{1}{\cos 300°} - \frac{1}{\text{sen } 330°} =$

$= \frac{1}{3} + 2 - (-2) = \frac{13}{3}$

Logo, $E = \frac{13}{3}$.

2. $\text{cossec } x = 1{,}25 \Rightarrow \frac{1}{\text{sen } x} = 1{,}25$

$\therefore \text{sen } x = 0{,}8$

$\begin{cases} \text{sen } x = 0{,}8 \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = -0{,}6$ para $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Assim:

$\text{cotg } x = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = -\frac{0{,}6}{0{,}8} = -0{,}75$

Logo, $\text{cotg } x = -0{,}75$.

3. $\text{cotg } x = -2{,}4 \Rightarrow \frac{\cos x}{\text{sen } x} = -\frac{12}{5}$

$\therefore \cos x = -\frac{12 \text{ sen } x}{5}$

$\begin{cases} \cos x = -\frac{12 \text{ sen } x}{5} \\ \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{sen } x = -\frac{5}{13}$ para $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

Assim:

$\cos x = -\frac{12}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$

Logo, $\text{sen } x + \cos x = \frac{7}{13}$.

4. Pelo enunciado, temos: $\sec x = \frac{5}{4}$

Então: $\frac{1}{\cos x} = \frac{5}{4}$ e $\cos x = \frac{4}{5}$

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\text{sen}^2 x + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$

$\text{sen}^2 x = \frac{25}{25} - \frac{16}{25}$

$\text{sen } x = \pm\sqrt{\frac{9}{25}}$

Como x pertence ao 4º quadrante, então:

$\text{sen } x = -\frac{3}{5}$

Como $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$, então:

$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$

Portanto, $\cos x = \frac{4}{5}$, $\text{sen } x = -\frac{3}{5}$ e $\text{tg } x = -\frac{3}{4}$.

Alternativa **a**.

5. Partindo do enunciado, temos:

$$\frac{\text{cossec } x - \sec x}{\text{cotg } x - 1} = \frac{\frac{1}{\text{sen } x} - \frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{\text{tg } x} - 1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\text{sen } x} - \frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\text{sen } x} - \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x}} = \frac{\frac{\cos x}{\text{sen } x \cdot \cos x} - \frac{\text{sen } x}{\cos x \cdot \text{sen } x}}{\frac{\cos x - \text{sen } x}{\text{sen } x}} =$$

$$= \left(\frac{\cos x - \text{sen } x}{\text{sen } x \cdot \cos x}\right) \cdot \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x - \text{sen } x}\right) =$$

$$= \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x \cdot \cos x} = \frac{1}{\cos x}$$

Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \frac{9}{9} - \frac{1}{9} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$

Como x pertence ao 2º quadrante, então:

$\cos x = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Assim:

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Alternativa **c**.

6. Partindo do enunciado, temos:

$\text{tg } x + \sec x = \cos x$

Condição de existência: $\cos x \neq 0$

$\frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \cos x$

$\text{sen } x + 1 = \cos^2 x$

$1 - \cos^2 x = -\text{sen } x$

$\text{sen}^2 x + \text{sen } x = 0$

$\therefore\ \text{sen } x \cdot (\text{sen } x + 1) = 0 \Rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $\text{sen } x = -1$

Note que nos interessam apenas os valores de x em que $\text{sen } x = 0$, pois, se $\text{sen } x = -1$, teríamos $\cos x = 0$, que não satisfaz a condição de existência.

Assim:

$\text{sen } x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$

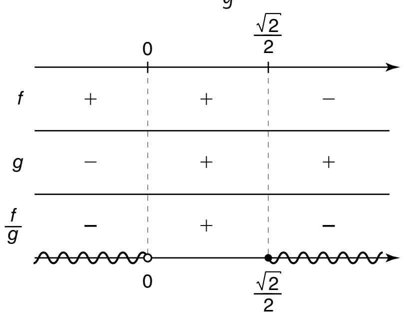
Concluímos, então, que o conjunto solução S é dado por:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$

7. a) $\sec x \leqslant \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} \leqslant \sqrt{2}$

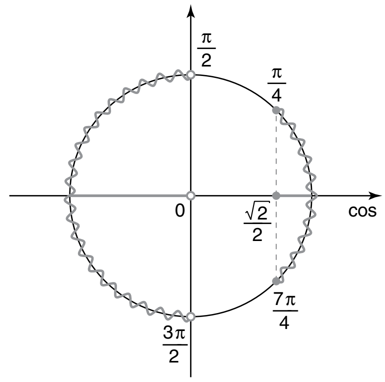
Para $t = \cos x$, temos: $\frac{1}{t} \leqslant \sqrt{2} \Rightarrow \frac{-\sqrt{2}t + 1}{t} \leqslant 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = -\sqrt{2}t + 1$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} \leqslant 0 \Rightarrow t < 0$ ou $t \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ e, portanto:

$\cos x < 0$ ou $\cos x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$



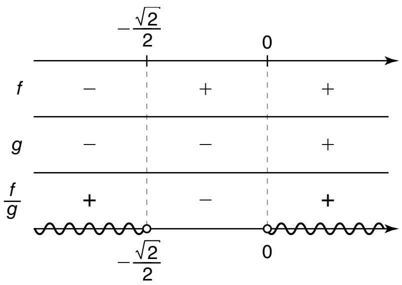
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ ou } \frac{7\pi}{4} \leqslant x < 2\pi\right\}$.

b) $\text{cossec } x > -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{\text{sen } x} > -\sqrt{2}$

Para $t = \text{sen } x$, temos:

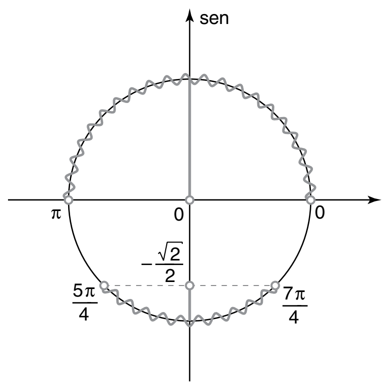
$\frac{1}{t} > -\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} \cdot t + 1}{t} > 0$

Estudando a variação de sinal das funções $f(t) = \sqrt{2} \cdot t + 1$, $g(t) = t$ e $\frac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\frac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $t > 0$ e, portanto:

$\text{sen } x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\text{sen } x > 0$



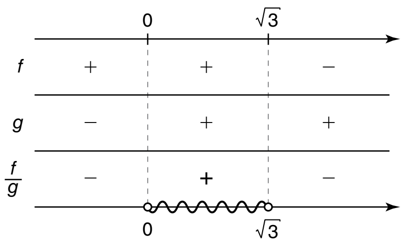
Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{4}\right\}$.

c) $\sqrt{3}\sec x > 1 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{\cos x} > 1$

Para $t = \cos x$, temos:

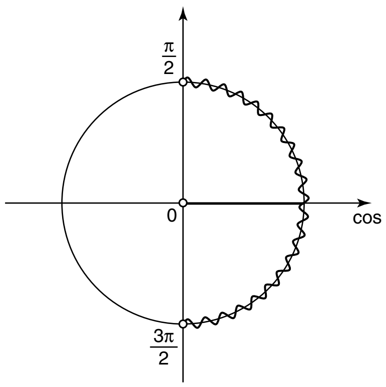
$\sqrt{3} \cdot \dfrac{1}{t} > 1 \Rightarrow \dfrac{-t + \sqrt{3}}{t} > 0$

Estudando a variação de sinal da funções $f(t) = -t + \sqrt{3}$, $g(t) = t$ e $\dfrac{f}{g}$, obtemos:



Assim, $\dfrac{f(t)}{g(t)} > 0 \Rightarrow 0 < t < \sqrt{3}$ e, portanto:

$0 < \cos x < \sqrt{3}$, ou ainda $\cos x > 0$



Logo, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right\}$.

8. a) Partindo do enunciado, temos:

$\sec^2 x < \sec x$

$\dfrac{1}{\cos^2 x} < \dfrac{1}{\cos x}$

Como a condição de existência é $\cos x \neq 0$, então $\cos^2 x > 0$, logo:

$\dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x < \dfrac{1}{\cos x} \cdot \cos^2 x \Rightarrow 1 < \cos x$

Como $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, então não existe valor de x que satisfaça tal inequação.

Logo, $S = \varnothing$.

b) Partindo do enunciado, temos:

$\sec^2 x \leqslant \sec x$

$\dfrac{1}{\cos^2 x} \leqslant \dfrac{1}{\cos x}$

Como a condição de existência é $\cos x \neq 0$, então $\cos^2 x > 0$, logo:

$\dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x \leqslant \dfrac{1}{\cos x} \cdot \cos^2 x \Rightarrow 1 \leqslant \cos x$

Portanto, o x que satisfaz a inequação é: $x = 2k\pi$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Partindo do enunciado, temos:

$\operatorname{cossec}^2 x \geqslant \operatorname{cossec} x$

$\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \geqslant \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

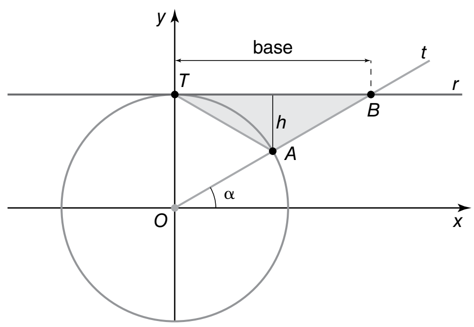
Como a condição de existência é $\operatorname{sen} x \neq 0$, então $\operatorname{sen}^2 x > 0$, logo:

$\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{sen}^2 x \geqslant \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 1 \geqslant \operatorname{sen} x$

Portanto, a inequação é válida para qualquer valor de x que satisfaça a condição de existência.

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$.

9. A área do triângulo é dada por $\dfrac{\text{base} \cdot h}{2}$. Assim, temos a seguinte figura:



Temos que $\operatorname{sen} \alpha$ é a distância do ponto A ao eixo Ox. Logo:

$h = 1 - \operatorname{sen} \alpha$

A medida TB é igual a $\operatorname{cotg} \alpha$.

Assim:

$\text{Área} = \dfrac{\text{base} \cdot h}{2} = \dfrac{\operatorname{cotg} \alpha \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)}{2} =$

$= \dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \cdot (1 - \operatorname{sen} \alpha)}{2} = \dfrac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$

Alternativa **d**.

10. a) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

1º membro $= \operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x \cdot \cos x =$

$= \operatorname{sen} x + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x} =$

$= \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{cossec} x =$ 2º membro

b) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

1º membro $= \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x =$

$= \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} =$

$= \dfrac{1}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} = \sec x \cdot \operatorname{cossec} x =$ 2º membro

c) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

$$1^{\underline{o}} \text{ membro} = tg^2 x - sen^2 x = \frac{sen^2 x}{cos^2 x} - sen^2 x = \frac{sen^2 x - cos^2 x \cdot sen^2 x}{cos^2 x} =$$

$$= \frac{sen^2 x \cdot (1 - cos^2 x)}{cos^2 x} = tg^2 x \cdot sen^2 x = 2^{\underline{o}} \text{ membro}$$

d) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

$$1^{\underline{o}} \text{ membro} = \frac{sec\ x}{cossec\ x} + \frac{cossec\ x}{sec\ x} = \frac{\frac{1}{cos\ x}}{\frac{1}{sen\ x}} + \frac{\frac{1}{sen\ x}}{\frac{1}{cos\ x}} = tg\ x + cotg\ x = 2^{\underline{o}} \text{ membro}$$

e) O primeiro e o segundo membro da igualdade estão definidos em U. Partindo do primeiro membro, temos:

$$1^{\underline{o}} \text{ membro} = \frac{1 + cos\ x}{sen\ x} + \frac{sen\ x}{1 + cos\ x} = \frac{(1 + cos\ x)^2 + sen^2 x}{sen\ x \cdot (1 + cos\ x)} =$$

$$= \frac{1 + 2\ cos\ x + cos^2 x + sen^2 x}{sen\ x \cdot (1 + cos\ x)} = \frac{1 + 2\ cos\ x + 1}{sen\ x \cdot (1 + cos\ x)} = \frac{2 + 2\ cos\ x}{sen\ x \cdot (1 + cos\ x)} =$$

$$= \frac{2 \cdot (1 + cos\ x)}{sen\ x \cdot (1 + cos\ x)} = \frac{2}{sen\ x} = 2 \cdot cossec\ x = 2^{\underline{o}} \text{ membro}$$

11. **a)** $\begin{cases} tg\ x = 3 \\ sec^2 x = 1 + tg^2 x \end{cases} \Rightarrow sec^2 x = 1 + 3^2 = 10$

$\therefore\ sec\ x = \pm\sqrt{10}$

Como $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, concluímos: $sec\ x = -\sqrt{10}$ e, portanto, $cos\ x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $\begin{cases} cotg\ x = \sqrt{15} \\ cossec^2 x = 1 + cotg^2 x \end{cases} \Rightarrow cossec^2 x = 1 + \left(\sqrt{15}\right)^2 = 16$

$\therefore\ cossec\ x = \pm 4$

Como $0 < x < \frac{\pi}{2}$, concluímos: $cossec\ x = 4$ e, portanto, $sen\ x = \frac{1}{4}$

c) $\begin{cases} sec\ x = a + 1 \\ tg\ x = \sqrt{a^2 + 2} \\ sec^2 x = 1 + tg^2 x \end{cases} \Rightarrow (a + 1)^2 = 1 + \left(\sqrt{a^2 + 2}\right)^2$

$\therefore\ a^2 + 2a + 1 = 1 + a^2 + 2 \Rightarrow a = 1$

d) Aplicando a técnica 1:

Passo 1
Para existir o primeiro membro da igualdade, devemos ter $sen\ x \neq 0$ e $cos\ x \neq 0$.
O segundo membro é a constante 1 e, portanto, existe para qualquer x real.
Assim, o primeiro e o segundo membros estão definidos em U.

Passo 2

$$1^{\underline{o}} \text{ membro} = \frac{1}{1 + tg^2 x} + \frac{1}{1 + cotg^2 x} = \frac{1}{sec^2 x} + \frac{1}{cossec^2 x} =$$

$$= cos^2 x + sen^2 x = 1 = 2^{\underline{o}} \text{ membro}$$

e) Aplicando a técnica 1:

Passo 1

Para existir cada um dos membros da igualdade, devemos ter $cos\ x \neq 0$. Logo, os dois membros estão definidos em U.

Passo 2

$$1^{\underline{o}} \text{ membro} = sen^2 x + sen^2 x \cdot tg^2 x = sen^2 x \cdot (1 + tg^2 x) = sen^2 x \cdot sec^2 x =$$

$$= sen^2 x \cdot \frac{1}{cos^2 x} = \frac{sen^2 x}{cos^2 x} = tg^2 x = 2^{\underline{o}} \text{ membro}$$

12. Temos: $E = (\sec x - \cos x) \cdot (\text{cossec } x - \text{sen } x) \cdot (\text{tg } x + \text{cotg } x)$

$$E = \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) \cdot \left(\frac{1}{\text{sen } x} - \text{sen } x\right) \cdot \left(\text{tg } x + \frac{1}{\text{tg } x}\right)$$

$$E = \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\cos^2 x}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{1}{\text{sen } x} - \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen } x}\right) \cdot \left(\frac{\text{sen } x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen } x}\right)$$

$$E = \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{1 - \text{sen}^2 x}{\text{sen } x}\right) \cdot \left(\frac{\text{sen } x \cdot \text{sen } x}{\cos x \cdot \text{sen } x} + \frac{\cos x \cdot \cos x}{\text{sen } x \cdot \cos x}\right)$$

$$E = \left(\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\text{sen } x}\right) \cdot \left(\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x \cdot \text{sen } x}\right)$$

$$E = \left(\frac{\text{sen}^2 x}{\cos x}\right) \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\text{sen } x}\right) \cdot \left(\frac{1}{\cos x \cdot \text{sen } x}\right)$$

$$E = \left(\frac{\text{sen}^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x \cdot \text{sen}^2 x}\right)$$

$$E = 1$$

Alternativa **e**.

13. A identidade é equivalente a $\text{tg } x + \dfrac{1}{\text{tg } x} = \dfrac{p \cdot [2 - 1 + \text{tg}^2 x]}{2 \text{ tg } x}$, que é equivalente a

$\dfrac{\text{tg}^2 x - 1}{\text{tg } x} = \dfrac{p(1 - \text{tg}^2 x)}{2 \text{ tg } x}$, do que concluímos que $p = -2$.

Alternativa **e**.

14. a) $\text{sen } 165° = \text{sen } (120° + 45°) = \text{sen } 120° \cdot \cos 45° + \cos 120° \cdot \text{sen } 45°$

Como $\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos 120° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$, temos:

$$\text{sen } 120° \cdot \cos 45° + \cos 120° \cdot \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Logo, $\text{sen } 165° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

b) $\cos 105° = \cos (60° + 45°) = \cos 60° \cdot \cos 45° - \text{sen } 60° \cdot \text{sen } 45° =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

Logo, $\cos 105° = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

c) $\text{tg } 195° = \text{tg } (180° + 15°) = \dfrac{\text{tg } 180° + \text{tg } 15°}{1 - \text{tg } 180° \cdot \text{tg } 15°} = \dfrac{0 + \text{tg } 15°}{1 - 0 \cdot \text{tg } 15°} = \text{tg } 15° =$

$$= \text{tg } (45° - 30°) = \frac{\text{tg } 45° - \text{tg } 30°}{1 + \text{tg } 45° \cdot \text{tg } 30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{3}{3 + \sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \cdot \frac{3 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{9 - 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}$$

d) $\text{cotg } 15° = \dfrac{1}{\text{tg } 15°} = \dfrac{1}{\text{tg } (60° - 45°)} = \dfrac{1 + \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 45°}{\text{tg } 60° - \text{tg } 45°} = \dfrac{1 + \sqrt{3} \cdot 1}{\sqrt{3} - 1} =$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{3 - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

Logo, $\text{cotg } 15° = 2 + \sqrt{3}$.

e) $\text{cossec } 255° = \dfrac{1}{\text{sen } 255°} = \dfrac{1}{-\text{sen } 75°} = -\dfrac{1}{\text{sen } (30° + 45°)} =$

$= -\dfrac{1}{\text{sen } 30° \cdot \cos 45° + \text{sen } 45° \cdot \cos 30°} =$

$= -\dfrac{1}{\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = -\dfrac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} = \sqrt{2} - \sqrt{6}$

f) $\sec (-15°) = \dfrac{1}{\cos (-15°)} = \dfrac{1}{\cos 15°} = \dfrac{1}{\cos (45° - 30°)} =$

$= \dfrac{1}{\cos 45° \cdot \cos 30° + \text{sen } 45° \cdot \text{sen } 30°} = \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{1}{2}} =$

$= \dfrac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

15. Partindo do enunciado, temos:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \text{sen } \frac{\pi}{2} \cdot \text{sen } x}{\text{sen } \frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot \text{sen } x}{1 \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot 0} = -\frac{\text{sen } x}{\cos x} = -\text{tg } x$$

Alternativa **c**.

16. $E = \text{sen } 6x \cdot \cos x - \text{sen } x \cdot \cos 6x \Rightarrow E = \text{sen } (6x - x) = \text{sen } 5x$

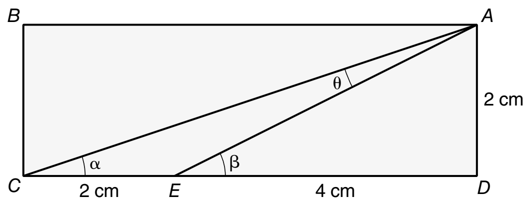
Para $x = \dfrac{\pi}{10}$, temos:

$E = \text{sen}\left(5 \cdot \dfrac{\pi}{10}\right) = \text{sen } \dfrac{\pi}{2} = 1$

17. $f(x) = \cos x \cdot \cos 3x - \text{sen } x \cdot \text{sen } 3x = \cos (x + 3x) \Rightarrow f(x) = \cos 4x$

Para $x = \dfrac{\pi}{8}$, temos:

$f\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \cos\left(4 \cdot \dfrac{\pi}{8}\right) = \cos \dfrac{\pi}{2} = 0$



18. $A\hat{E}D$ é ângulo externo do $\triangle AEC$; logo:

$\beta = \theta + \alpha \Rightarrow \theta = \beta - \alpha$

Assim, temos:

$\text{tg } \theta = \text{tg } (\beta - \alpha) = \dfrac{\text{tg } \beta - \text{tg } \alpha}{1 + \text{tg } \beta \cdot \text{tg } \alpha} = \dfrac{\dfrac{2}{4} - \dfrac{2}{6}}{1 + \dfrac{2}{4} \cdot \dfrac{2}{6}} = \dfrac{1}{7}$

19. a) Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$\left(\dfrac{12}{13}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{169}{169} - \dfrac{144}{169}$

$\cos x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{169}}$

$\cos x = -\dfrac{5}{13}$ ou $\cos x = \dfrac{5}{13}$ (não convém)

Como $x + y = \frac{\pi}{4}$, então $y = \frac{\pi}{4} - x$, logo:

$\cos y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$\cos y = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos x + \text{sen}\,\frac{\pi}{4} \cdot \text{sen}\,x$

$\cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{13}$

$\cos y = -\frac{5\sqrt{2}}{26} + \frac{12\sqrt{2}}{26}$

$\cos y = \frac{7\sqrt{2}}{26}$

b) Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\text{sen}^2\,\alpha + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1$

$\text{sen}^2\,\alpha = \frac{9}{9} - \frac{3}{9}$

$\text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{6}{9}}$

$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ou $\text{sen}\,\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ (não convém)

Como $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$, então $\beta = \alpha - \frac{\pi}{3}$, logo:

$\text{sen}\,\beta = \text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\,\alpha\cos\frac{\pi}{3} - \text{sen}\,\frac{\pi}{3}\cos\alpha =$

$= \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}$

c) Como $a + b = \frac{\pi}{6}$, então $b = \frac{\pi}{6} - a$, logo:

$\text{tg}\,b = \text{tg}\left(\frac{\pi}{6} - a\right)$

$\text{tg}\,b = \dfrac{\text{tg}\,\frac{\pi}{6} - \text{tg}\,a}{1 + \text{tg}\,\frac{\pi}{6} \cdot \text{tg}\,a}$

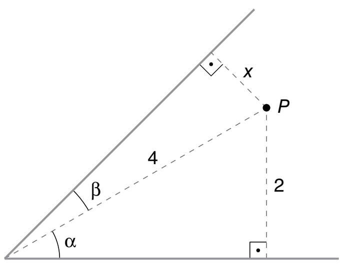
$\text{tg}\,b = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\sqrt{3}}$

$\text{tg}\,b = \dfrac{\frac{\sqrt{3} - 9\sqrt{3}}{3}}{1 + 3}$

$\text{tg}\,b = \dfrac{\frac{-8\sqrt{3}}{3}}{4}$

$\text{tg}\,b = -\frac{8\sqrt{3}}{12} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

20. Pelo enunciado, montamos a seguinte figura:



Pela figura, temos:

$\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = 30°$

Como $\alpha + \beta = 45°$, então $\beta = 15°$.

Assim:

$\text{sen}\,15° = \frac{x}{4}$

$\text{sen}\,(45° - 30°) = \frac{x}{4}$

$\text{sen}\,45° \cdot \cos 30° - \text{sen}\,30° \cdot \cos 45° = \frac{x}{4}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{4}$

$\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{x}{4}$

$x = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

Portanto, a distância do ponto P ao outro lado do ângulo é $\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ cm.

21. Pelo enunciado, temos:

$\text{tg}\,(60° + x) = 2\sqrt{3}$

$\dfrac{\text{tg}\,60° + \text{tg}\,x}{1 - \text{tg}\,60° \cdot \text{tg}\,x} = 2\sqrt{3}$

$\dfrac{\sqrt{3} + \text{tg}\,x}{1 - \sqrt{3} \cdot \text{tg}\,x} = 2\sqrt{3}$

$\sqrt{3} + \text{tg}\,x = 2\sqrt{3} - 6\,\text{tg}\,x$

$7\,\text{tg}\,x = \sqrt{3}$

$\text{tg}\,x = \frac{\sqrt{3}}{7}$

22. Pelo enunciado, temos:

$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}\cos x$

$\text{sen}\,x \cdot \cos\frac{\pi}{4} + \text{sen}\,\frac{\pi}{4} \cdot \cos x \cdot \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} +$

$+ \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,\frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}\cos x$

$\text{sen}\,x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \text{sen}\,x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$= 1 + \sqrt{2}\cos x$

$\text{sen}\,x + \cos x + \cos x + \text{sen}\,x = \frac{2}{\sqrt{2}} + 2\cos x$

$\text{sen}\,x + \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x$

$\text{sen}\,x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

Logo, $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$.

23. Sabemos que $\text{sen}\,x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ e $\cos x =$

$= \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, logo $\text{sen}\,x = \cos y$ e $\cos x = \text{sen}\,y$.

Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$\text{sen}\,(y - x) = \dfrac{1}{3}$

$\text{sen}\,y \cdot \cos x - \text{sen}\,x \cdot \cos y = \dfrac{1}{3}$ (I)

Para a variável y, temos:

$\text{sen}\,y \cdot \text{sen}\,y - \cos y \cdot \cos y = \dfrac{1}{3}$

Logo:

$$\begin{cases} 1 - \cos^2 y - \cos^2 y = \dfrac{1}{3} \\ \text{sen}^2\,y - (1 - \text{sen}^2\,y) = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 y = \dfrac{1}{3} \\ \text{sen}^2\,y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Para a variável x, temos:

$\cos x \cdot \cos x - \text{sen}\,x \cdot \text{sen}\,x = \dfrac{1}{3}$

Logo:

$$\begin{cases} \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = \dfrac{1}{3} \\ 1 - \text{sen}^2\,x - \text{sen}^2\,x = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \dfrac{2}{3} \\ \text{sen}^2\,x = \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \text{(III)}$$

Aplicando (II) e (III) na diferença das tangentes, temos:

$$\text{tg}^2\,y - \text{tg}^2\,x = \frac{\text{sen}^2\,y}{\cos^2 y} - \frac{\text{sen}^2\,x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Alternativa **a**.

24. **a)** Pelas fórmulas de adição de arcos, temos:

$$\cos 4x = 2 \cdot \cos^2 2x - 1 = 2 \cdot (1 - 2\,\text{sen}^2\,x)^2 - 1 =$$

$$= 2 \cdot \left[1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^2 - 1 = 2 \cdot \left(\frac{8}{8} - \frac{9}{8}\right)^2 - 1 =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{64} - \frac{32}{32} = -\frac{31}{32}$$

b) Pelas fórmulas de adição de arcos, temos:

$$\text{tg}\,4x = \frac{2 \cdot \text{tg}\,2x}{1 - \text{tg}^2\,2x} = \frac{2 \cdot \left(\dfrac{2 \cdot \text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2\,x}\right)}{1 - \left(\dfrac{2 \cdot \text{tg}\,x}{1 - \text{tg}^2\,x}\right)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot \left(\dfrac{2 \cdot 2}{1 - 2^2}\right)}{1 - \left(\dfrac{2 \cdot 2}{1 - 2^2}\right)^2} = \frac{2 \cdot \left(-\dfrac{4}{3}\right)}{\dfrac{9}{9} - \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2} = \frac{-\dfrac{8}{3}}{\dfrac{9}{9} - \dfrac{16}{9}} =$$

$$= \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{7} = \frac{24}{7}$$

25. $\cos^2 2x = \dfrac{1}{2} - \text{sen}^2\,x \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2\cos^2 x - 1)(1 - 2\,\text{sen}^2\,x) = \frac{1 - 2\,\text{sen}^2\,x}{2}$$

$$\therefore\ 2(2\cos^2 x - 1)(1 - 2\,\text{sen}^2\,x) - (1 - 2\,\text{sen}^2\,x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - 2\,\text{sen}^2\,x)(4\cos^2 x - 3) = 0$$

$$\therefore\ 1 - 2\,\text{sen}^2\,x = 0 \text{ ou } 4\cos^2 x - 3 = 0$$

$$\therefore\ \text{sen}\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolvendo essas equações no intervalo $[0, 2\pi]$, concluímos:

$\text{sen}\,x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{3\pi}{4}$ ou

$x = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

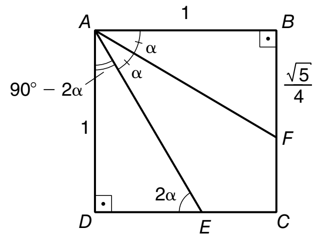
$\cos x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou

$x = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{6}$

Logo, temos como conjunto solução:

$$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

26. Pelo enunciado, temos a seguinte figura:



O segmento $\overline{AF}$ é a bissetriz de $B\widehat{A}E$, então os ângulos $B\widehat{A}F$ e $F\widehat{A}E$ têm a mesma medida (chamamos de α). Consequentemente, o ângulo $E\widehat{A}D$ mede $90° - 2\alpha$, logo o ângulo $A\widehat{E}D$ mede 2α.

Observando o triângulo ABF, temos:

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{BF}{AB}$

$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$ (I)

Observando o triângulo ABF, temos:

$\text{tg}\,2\alpha = \dfrac{AD}{DE}$

$\dfrac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha} = \dfrac{1}{DE}$ (II)

Aplicando (I) em (II), temos:

$$\frac{2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{4}}{1 - \left(\dfrac{\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{1}{DE}$$

$$\frac{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}{\dfrac{16}{16} - \dfrac{5}{16}} = \frac{1}{DE}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{16}{11} = \frac{1}{DE}$$

$$DE = \frac{11}{8\sqrt{5}} \Rightarrow DE = \frac{11\sqrt{5}}{40}$$

Alternativa **d**.

27. Pela fórmula de adição de arcos, temos:

$$\text{tg } x = \frac{2 \text{ tg } \frac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

Sabemos que tg 45° = 1. Assim:

$$\text{tg } 45° = \frac{2 \text{ tg } \frac{45°}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{45°}{2}}$$

$$1 = \frac{2 \text{ tg } (22°30')}{1 - \text{tg}^2 (22°30')}$$

$1 - \text{tg}^2 (22°30') = 2 \text{ tg } (22°30')$

$\text{tg}^2 (22°30') + 2 \text{ tg } (22°30') - 1 = 0$

Chamando tg (22°30′) = y, temos:

$y^2 + 2y - 1 = 0$

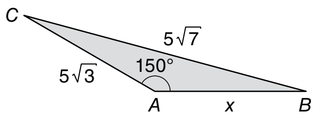
$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Logo:

$\text{tg } (22°30') = -1 + \sqrt{2}$ ou $\text{tg } (22°30') = -1 - \sqrt{2}$ (não convém)

$\therefore \text{ tg } (22°30') = -1 + \sqrt{2}$

28. Sendo *x* a medida, em centímetro, do lado $\overline{AB}$, temos:



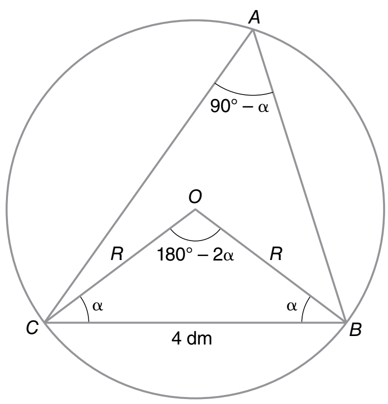
$(5\sqrt{7})^2 = (5\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot x \cdot \cos 150° \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 15x - 100 = 0$

$\therefore x = -20$ (não convém) ou $x = 5$

Logo, o lado $\overline{AB}$ mede 5 cm.

29. O triângulo *BCO* é isósceles de base $\overline{BC}$, com $m(B\widehat{O}C) = 180° - 2\alpha$. Como $B\widehat{O}C$ e $B\widehat{A}C$ são ângulos central e inscrito na circunferência, respectivamente, que determinam o mesmo arco, temos que $m(B\widehat{A}C) = 90° - \alpha$. Assim, indicando por *R* a medida do raio da circunferência, esquematizamos:



Logo:

$$\frac{4}{\text{sen } (90° - \alpha)} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\cos \alpha} = 2R \quad \text{(I)}$$

Pela relação fundamental da Trigonometria:

$$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$$

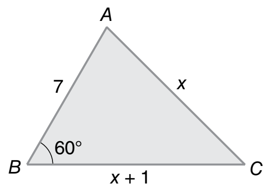
Como $0° < \alpha < 90°$, temos: $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ (II)

Substituindo (II) em (I), concluímos:

$$\frac{4}{\frac{4}{5}} = 2R \Rightarrow R = 2{,}5$$

Logo, o raio da circunferência mede 2,5 cm.

30. Sendo x a medida, em centímetro, do lado $\overline{AC}$, temos:



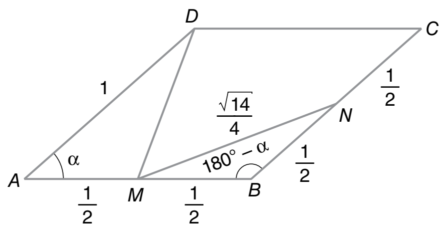
$x^2 = (x + 1)^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot (x + 1) \cdot \cos 60° \Rightarrow 5x = 43$

$\therefore x = \frac{43}{5}$

Logo, a medida do lado $\overline{BC}$ é $\left(\frac{43}{5} + 1\right)$ cm, ou seja, $\frac{48}{5}$ cm = 9,6 cm.

Alternativa **b**.

31. Pelo enunciado, temos a seguinte figura:



Pela lei dos cossenos, temos:

$$\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos (180° - \alpha)$$

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \cos (180° - \alpha)$$

$$\cos (180° - \alpha) = -\frac{3}{4}$$

Pela figura, sabemos que $0° < \alpha < 180°$, então $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.

Pela lei dos cossenos, temos:

$$(DM)^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \alpha$$

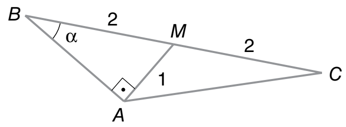
$$(DM)^2 = 1 + \frac{1}{4} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$$

$$(DM)^2 = \frac{4}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$DM = \sqrt{\frac{2}{4}}$$

Portanto, o segmento $\overline{DM}$ tem medida $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Alternativa **b**.

32. a) 

Do triângulo retângulo ABM, temos:

$\text{sen}\ \alpha = \frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$

b) Do item **a**, deduzimos que $\alpha = 30°$. Assim, do triângulo ABM, obtemos:

$\cos 30° = \frac{BA}{BM} = \frac{BA}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BA}{2}$

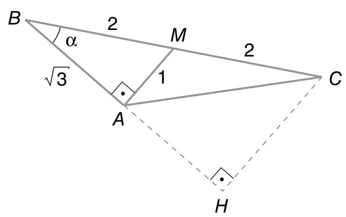
$\therefore BA = \sqrt{3}$

Pela lei dos cossenos, aplicada ao triângulo ABC, concluímos:

$(AC)^2 = 4^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30° \Rightarrow$

$\Rightarrow (AC)^2 = 16 + 3 - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore AC = \sqrt{7}$

c) 

Do triângulo BCH, temos:

$\text{sen}\ 30° = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{4}$

$\therefore CH = 2$

d) A área do triângulo ABC é dada por:

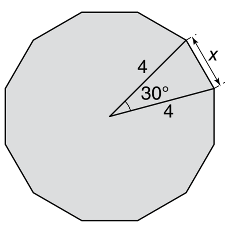
$A_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot 2}{2} = \sqrt{3}$

Como M é ponto médio, então a área do triângulo AMC é metade da área do triângulo ABC, logo:

$A_{\triangle AMC} = \frac{A_{\triangle ABC}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

33. A medida α do ângulo central do dodecágono regular é dada por $\alpha = \frac{360°}{12} = 30°$.

Assim, sendo x a medida, em centímetro, do lado desse dodecágono, temos:



$x^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 30° \Rightarrow x^2 = 16\left(2 - \sqrt{3}\right)$

$\therefore x = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

Alternativa **d**.

34. a) Pela fórmula de soma dos ângulos internos, temos:

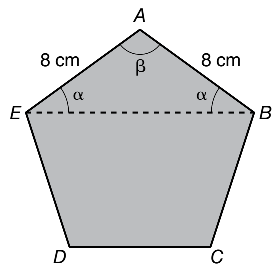
$S_i = (5 - 2) \cdot 180° = 540°$

Portanto, a soma dos ângulos internos desse pentágono regular é 540°.

b) Como o pentágono é regular, todos os ângulos internos têm a mesma medida. Assim:

$\beta = \frac{540°}{5} = 108°$

c) O triângulo ABE é isósceles de base EB. Assim, esquematizamos:



Como a soma dos ângulos internos de um triângulo tem 180°, temos:

$180° = \beta + \alpha + \alpha$

$180° = 108° + 2\alpha$

$\alpha = \frac{72°}{2}$

$\alpha = 36°$

d) A circunferência de raio R circunscrita ao hexágono circunscreve também o triângulo ABE. Assim, pela lei dos senos, temos:

$\frac{8}{\text{sen}\ 36°} = 2R \Rightarrow R = \frac{4}{\text{sen}\ 36°}$

$\therefore R \approx 6{,}8$

e) Indicando por d a medida da diagonal EB do pentágono, pela lei dos cossenos, temos:

$d^2 = 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos 108°$

$d^2 \approx 128 - 128 \cdot (-0{,}3)$

$d^2 \approx 128 + 38{,}4$

$d \approx \sqrt{166{,}4}$

$d \approx 12{,}9$

Portanto, a diagonal é 12,9 cm, considerando a aproximação do enunciado.

35. Indicando por A_T e A_S as áreas, em centímetro quadrado, do triângulo AOC e do setor BOC, respectivamente, temos:

$A_T = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \text{sen}\ 120° \Rightarrow A_T = 4\sqrt{3}$

Calculando a área A_S, obtemos:

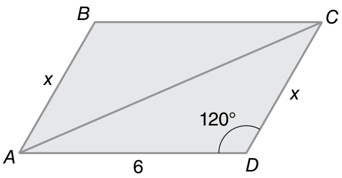
Ângulo (grau)		Área (centímetro quadrado)
360	———	$\pi \cdot 4^2$
60	———	A_S

$\therefore A_S = \frac{8\pi}{3}$

Como a área A pedida é igual à soma das áreas A_T e A_S, temos:

$A = \left(4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}\right) \text{cm}^2$

36. Traçando a diagonal do paralelogramo, temos:



Como o paralelogramo tem o dobro da área de um dos triângulos, temos:

$20{,}785 = 2 \cdot \dfrac{6 \cdot x \cdot \text{sen } 120°}{2}$

$20{,}785 = 6 \cdot x \cdot 0{,}866$

$x = \dfrac{20{,}785}{5{,}196}$

$x \approx 4$

Alternativa **b**.

Exercícios contextualizados

37. $\text{cossec } \theta < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\text{sen } \theta} < 2$

Como $\text{sen } \theta > 0$, pois θ é medida de um ângulo agudo, multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por $\text{sen } \theta$, obtemos:

$1 < 2 \text{ sen } \theta \Rightarrow \text{sen } \theta > \dfrac{1}{2}$

Logo, $30° < \theta < 90°$.

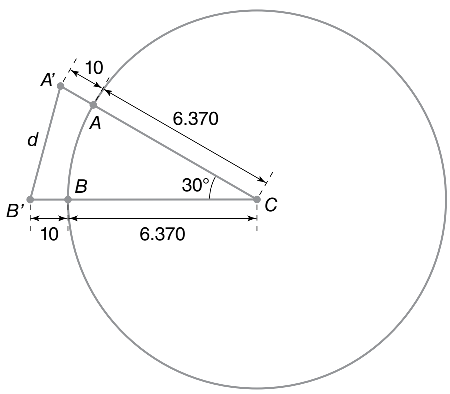
38. Sabendo que $\sec \alpha = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$ e chamando o cateto adjacente de LT, temos:

$390{,}625 = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^8}{LT}$

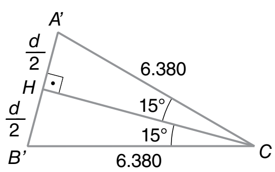
$LT = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^8}{390{,}625} \Rightarrow LT = 384.000$

Portanto, a distância da Terra à Lua é 384.000 km.

39. Indicando por d a distância entre os foguetes, esquematizamos:



Traçando a altura $\overline{CH}$ do triângulo isósceles $A'B'C$, temos que $\overline{CH}$ também é mediana e bissetriz:



Do triângulo CHA', obtemos:

$\text{sen } 15° = \dfrac{\frac{d}{2}}{6.380} \Rightarrow \text{sen } 15° = \dfrac{d}{12.760}$ (I)

Calculando sen 15°:

$\text{sen } 15° = \text{sen } (45° - 30°) =$

$= \text{sen } 45° \cdot \cos 30° - \text{sen } 30° \cdot \cos 45° =$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ (II)

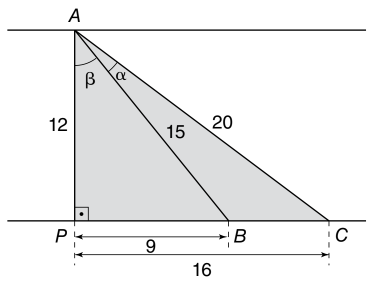
De (I) e (II), concluímos:

$\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \dfrac{d}{12.760} \Rightarrow d = 3.190 \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

Portanto, a distância entre os foguetes é de $3.190 \cdot \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$ km.

40. Sendo P a projeção ortogonal do ponto A sobre a margem oposta da estrada, obtemos, pelo teorema de Pitágoras, $PC = 16$ m e $PB = 9$ m.

Sendo β a medida do ângulo $B\widehat{A}P$, esquematizamos:



$\text{sen } (\alpha + \beta) = \text{sen } \alpha \cdot \cos \beta + \text{sen } \beta \cdot \cos \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{16}{20} = \text{sen } \alpha \cdot \dfrac{12}{15} + \dfrac{9}{15} \cdot \cos \alpha$

$\therefore \dfrac{4}{5} = \dfrac{4 \text{ sen } \alpha}{5} + \dfrac{3 \cos \alpha}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \dfrac{4 - 4 \text{ sen } \alpha}{3}$

Aplicando a relação fundamental ($\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$), temos:

$\text{sen}^2 \alpha + \left(\dfrac{4 - 4 \text{ sen } \alpha}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow$

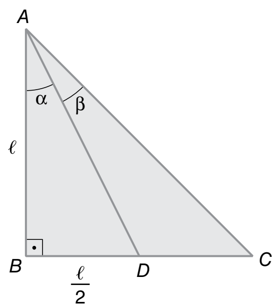
$\Rightarrow 25 \text{ sen}^2 \alpha - 32 \text{ sen } \alpha + 7 = 0$

Assim, obtemos $\text{sen } \alpha = 1$ ou $\text{sen } \alpha = \dfrac{7}{25}$.

Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos que $\text{sen } \alpha = \dfrac{7}{25}$.

(**Nota:** outra resolução é possível por meio da lei dos cossenos.)

41. Pelo enunciado, temos:



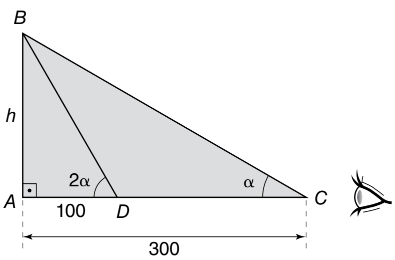
Pela figura, sabemos que $\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \dfrac{1}{2}$. Assim:

$$\text{tg}\,\beta = \text{tg}\,(45° - \alpha) = \frac{\text{tg}\,45° - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,45° \cdot \text{tg}\,\alpha} =$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$$

Portanto, a tangente do menor ângulo interno do triângulo é $\dfrac{1}{3}$.

42. Sendo h a distância entre o topo da torre e o plano que contém o ponto C onde se localiza o olho da pessoa, temos:



a) $\begin{cases} \text{tg}\,\alpha = \dfrac{h}{300} \\ \text{tg}\,2\alpha = \dfrac{h}{100} \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\,2\alpha = 3\,\text{tg}\,\alpha$

$\therefore \dfrac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\,\alpha} = 3\,\text{tg}\,\alpha$

Como $\text{tg}\,\alpha \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por $\text{tg}\,\alpha$, obtendo:

$\dfrac{2}{1 - \text{tg}^2\,\alpha} = 3 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Como α é medida de um ângulo agudo, concluímos que:

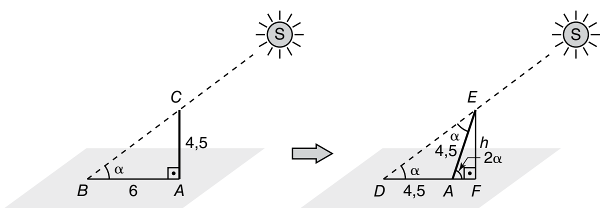
$\text{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$

b) $\text{tg}\,30° = \dfrac{h}{300} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{300}$

$\therefore h = 100\sqrt{3}$

Logo, a altura da torre é $\left(100\sqrt{3} + 1{,}6\right)$ m ou, aproximadamente, 174,8 m.

43. Como os raios solares são paralelos, temos que o raio que passa pelo topo do poste, em suas duas posições, forma com o solo ângulos de medidas iguais. Sendo α essa medida, esquematizamos:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ABC, calculamos a medida BC:

$(BC)^2 = 4{,}5^2 + 6^2 \Rightarrow BC = 7{,}5$

Assim, temos:

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{4{,}5}{7{,}5} = 0{,}6 \quad \text{(I)}$

e

$\cos\alpha = \dfrac{6}{7{,}5} = 0{,}8 \quad \text{(II)}$

O triângulo ADE é isósceles, pois $DA = EA = 4{,}5$; logo, os ângulos $A\widehat{D}E$ e $A\widehat{E}D$ têm medidas iguais a α. O ângulo $E\widehat{A}F$ mede 2α, pois é externo do triângulo ADE. Assim, no triângulo EAF, calculamos a medida h do lado $\overline{EF}$, que é a distância do topo do poste inclinado ao solo:

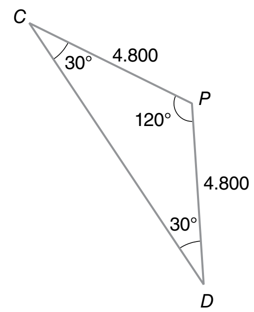
$\text{sen}\,2\alpha = \dfrac{h}{4{,}5} \Rightarrow 2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha = \dfrac{h}{4{,}5} \quad \text{(III)}$

Substituindo (I) e (II) em (III), concluímos:

$2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 = \dfrac{h}{4{,}5} \Rightarrow h = 4{,}32$

Logo, a distância do topo do poste inclinado ao solo é 4,32 m.

44. Sendo C o ponto inicial em que o carro A se encontra e D o ponto inicial em que o carro B se encontra, temos:



a) Pela lei dos cossenos, temos:

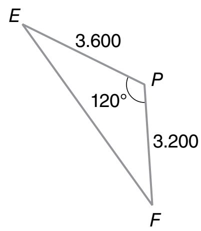
$(CD)^2 = 4.800^2 + 4.800^2 - 2 \cdot 4.800 \cdot$
$\cdot\, 4.800 \cdot \cos 120°$

$(CD)^2 = 23.040.000 + 23.040.000 -$
$- 46.080.000 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$CD = 4.800\sqrt{3}$

Portanto, a distância entre os carros no instante zero é $4.800\sqrt{3}$ m ou aproximadamente 8.314 m.

b) Sendo E o ponto em que o carro A se encontra e F o ponto em que o carro B se encontra, após 1 minuto, temos:



Pela lei dos cossenos, temos:

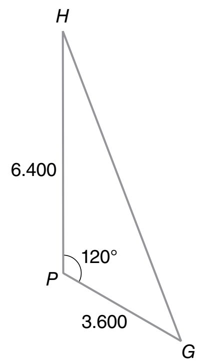
$(EF)^2 = 3.600^2 + 3.200^2 - 2 \cdot 3.600 \cdot$
$\cdot\, 3.200 \cdot \cos 120°$

$(EF)^2 = 12.960.000 + 10.240.000 - 2 \cdot$
$\cdot\, 11.520.000 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$EF = 400\sqrt{217}$

Portanto, a nova distância entre os carros é $400\sqrt{217}$ m ou aproximadamente 5.892 m.

c) Sendo G o ponto em que o carro A se encontra e H o ponto em que o carro B se encontra, após 7 minutos, temos:



Pela lei dos cossenos, temos:

$(GH)^2 = 3.600^2 + 6.400^2 - 2 \cdot 3.600 \cdot$
$\cdot\ 6.400 \cdot \cos 120°$

$(GH)^2 = 12.960.000 + 40.960.000 - 2 \cdot$
$\cdot\ 23.040.000 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$GH = 400\sqrt{481}$

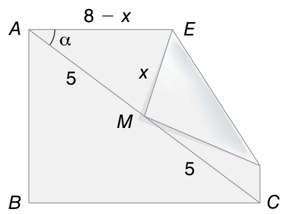
Portanto, a nova distância entre os carros é $400\sqrt{481}$ m ou aproximadamente 8.773 m.

45. Pelo teorema de Pitágoras, obtemos $AC = 10$ cm.
Sendo α a medida do ângulo $C\widehat{A}D$, temos:

$\cos \alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

Sendo x a medida, em centímetro, do segmento $\overline{EM}$, obtemos $AE = 8 - x$.

Assim, esquematizamos:



Concluímos, aplicando a lei dos cossenos no triângulo AEM:

$x^2 = 5^2 + (8 - x)^2 - 2 \cdot 5 \cdot (8 - x) \cos \alpha$

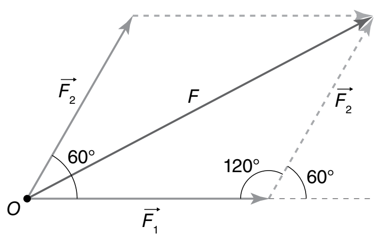
$\therefore\ x^2 = 25 + 64 - 16x + x^2 - 10 \cdot (8 - x) \cdot \frac{4}{5}$

$\therefore\ x^2 = 25 + 64 - 16x + x^2 - 64 + 8x$

$\therefore\ 8x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{8}$

Logo, $EM = \frac{25}{8}$ cm ou 3,125 cm.

46. **a)** Como os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares, temos a seguinte figura:



Chamando a intensidade do vetor resultante de F, temos, pela lei dos cossenos:

$F^2 = 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 \cdot \cos 120°$

$F^2 = 256 + 196 - 2 \cdot 224 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

$F = 26$

Portanto, a força resultante $\vec{F}$ tem intensidade de 26 N.

b) Pela lei dos cossenos, temos:

$14^2 = 16^2 + 26^2 - 2 \cdot 16 \cdot 26 \cdot \cos x$

$196 = 256 + 676 - 832 \cdot \cos x$

$\cos x = \frac{736}{832}$

$\therefore\ x \approx 27{,}8°$

Portanto, o valor do ângulo é aproximadamente 27,8°.

47. Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, temos $m(B\widehat{C}A) = 45°$.
Assim, sendo x a medida BC, em metro, temos:

$$\frac{800}{\text{sen } 45°} = \frac{x}{\text{sen } 120°} \Rightarrow \frac{800}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$\therefore\ x = 400\sqrt{6}$

Logo, o comprimento do canal será $400\sqrt{6}$ m ou aproximadamente 980 m.

48. Pela lei dos cossenos, temos:

$70^2 = \left(50\sqrt{3}\right)^2 + (FB)^2 - 2 \cdot 50\sqrt{3} \cdot (FB) \cdot \cos 30°$

$4.900 = 7.500 + (FB)^2 - 2 \cdot 50\sqrt{3} \cdot (FB) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(FB)^2 - 150(FB) + 2.600 = 0$

$(FB) = \frac{150 \pm \sqrt{22.500 - 4 \cdot 1 \cdot 2.600}}{2 \cdot 1}$

$(FB) = \frac{150 \pm 110}{2}$

$(FB) = 130$ ou $(FB) = 20$ (não convém)

Portanto, sua distância é de 130 metros.

49. Pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, deduzimos que $m(B\widehat{A}D) = 90°$ e $m(B\widehat{C}D) = 65°$. Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\begin{cases} \frac{200}{\text{sen } 90°} = \frac{AB}{\text{sen } 30°} \\ \frac{200}{\text{sen } 65°} = \frac{BC}{\text{sen } 62°} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{200}{1} = \frac{AB}{0{,}5} \\ \frac{200}{0{,}91} \approx \frac{BC}{0{,}88} \end{cases}$$

$\therefore\ AB = 100$ m e $BC \approx 193{,}41$

Assim, concluímos que a área S do quadrilátero $ABCD$ é dada por:

$S \approx \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot \text{sen } 60° + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 193{,}41 \cdot \text{sen } 53°$

$\therefore\ S \approx \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 100 \cdot 0{,}87 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 193{,}41 \cdot 0{,}80$

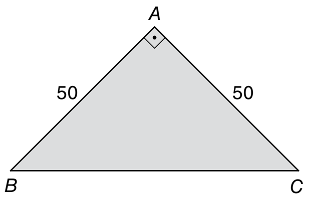
$\therefore\ S \approx 24.172{,}8\ \text{m}^2$

Logo, a área do terreno é, aproximadamente, $24.172{,}8\ \text{m}^2$.

50. Sendo α a medida do ângulo $B\widehat{A}C$, a área S do triângulo ABC é dada por:

$S = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 50 \cdot \text{sen}\ \alpha\ \text{cm}^2 = 1.250\ \text{sen}\ \alpha\ \text{cm}^2$

Para que essa área seja máxima, devemos ter $\text{sen}\ \alpha = 1$; portanto, $\alpha = 90°$.



Assim, aplicando o teorema de Pitágoras, concluímos:

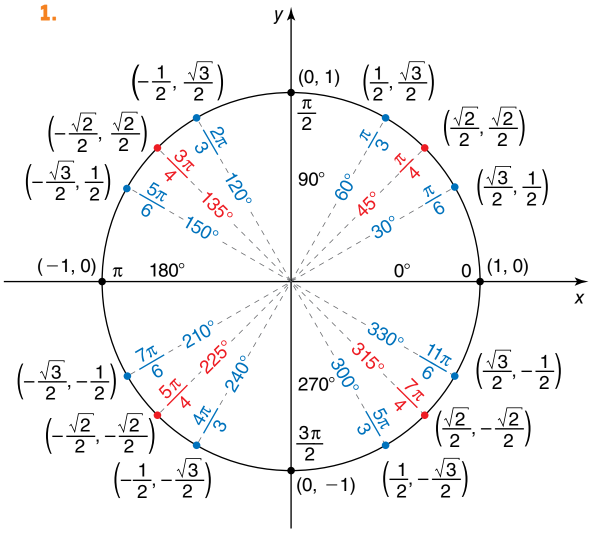
$(BC)^2 = 50^2 + 50^2 \Rightarrow (BC)^2 = 2 \cdot 50^2$

$\therefore\ BC = 50\sqrt{2}$ cm

Alternativa **e**.

Pré-requisitos para o capítulo 5

1.



2. a) $E = \dfrac{\text{sen}^2\ 60° + \cos 120° - \text{sen}\ 210°}{\cos^2 240° + \text{sen}\ 330° + \cos 180°} =$

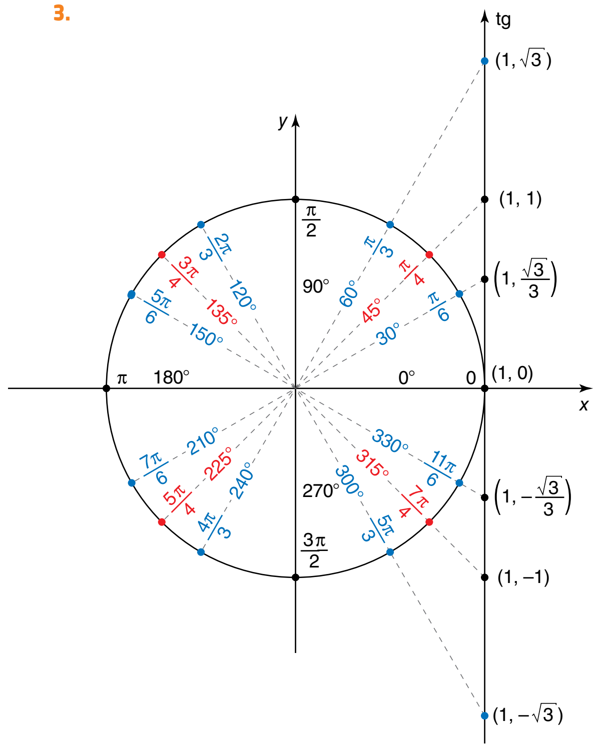
$= \dfrac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 1} =$

$= \dfrac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1} = \dfrac{\frac{3}{4}}{-\frac{5}{4}} = -\frac{3}{5}$

b) $F = \dfrac{\text{sen}\ \frac{\pi}{4} - \cos \frac{2\pi}{3} - \text{sen}\ \pi}{\cos \frac{3\pi}{4} + \text{sen}\ \frac{11\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{2}} =$

$= \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} - 0}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + 0} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}{-\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = -1$

3.



4. a) $E = \dfrac{\text{tg}\ 60° + \text{tg}\ 150° - \text{tg}\ 180°}{\text{tg}\ 210° - \text{tg}\ 300°} =$

$= \dfrac{\sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - 0}{\frac{\sqrt{3}}{3} - \left(-\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

b) $F = \dfrac{\text{tg}\ \frac{\pi}{6} + \text{tg}\ \frac{2\pi}{3} + \text{tg}\ 0}{\text{tg}\ \frac{3\pi}{4} - \text{tg}\ \frac{4\pi}{3} - \text{tg}\ \frac{11\pi}{6}} =$

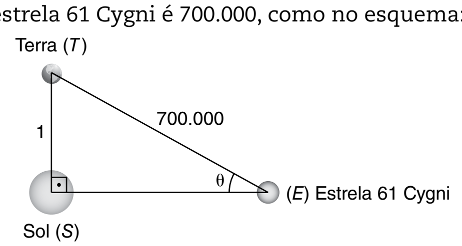
$= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \left(-\sqrt{3}\right) + 0}{-1 - \sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \dfrac{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3}} =$

$= \dfrac{2\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = 4 - 2\sqrt{3}$

Trabalhando em equipe

Matemática sem fronteiras

1. Indicando por uma unidade (1) a distância entre a Terra e o Sol, temos que a distância entre a Terra e a estrela 61 Cygni é 700.000, como no esquema:

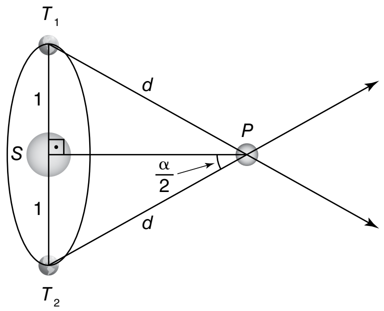


Assim, o seno do ângulo de paralaxe dessa estrela é dado por:

$\text{sen}\ \theta = \dfrac{1}{700.000}$

Com uma calculadora científica, obtemos $\theta \approx 0{,}00008°$ ou $\theta \approx 0{,}288''$.

2. O triângulo SPT_1 é isósceles; logo, o ângulo de paralaxe da estrela mede $\frac{\alpha}{2}$, como no esquema abaixo:



Assim, temos: $\text{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{d}$

Como $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, vamos determinar, em função de d, o valor de $\cos\frac{\alpha}{2}$. Pela relação fundamental da Trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2\,\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{d}\right)^2 + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

$$\therefore\ \cos^2\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{\sqrt{d^2-1}}{d}$$

Como $\frac{\alpha}{2}$ é medida de um ângulo agudo, seu cosseno é positivo, portanto:

$$\therefore\ \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{d^2-1}}{d}$$

Assim, concluímos:

$$\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\left(2 \cdot \frac{\alpha}{2}\right) = 2\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\alpha = 2 \cdot \frac{1}{d} \cdot \frac{\sqrt{d^2-1}}{d}$$

$$\therefore\ \text{sen}\,\alpha = \frac{2\sqrt{d^2-1}}{d^2}$$

Análise da resolução

COMENTÁRIO: Embora a argumentação do aluno esteja correta, a conclusão está incompleta, pois ele não considerou outra medida possível para o ângulo $A\widehat{C}B$, que ocorre para outra posição do triângulo ABC (posição em que o centro da circunferência fica exterior ao triângulo).

Resolução correta:

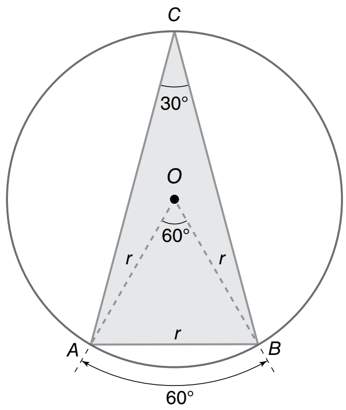
1º modo:

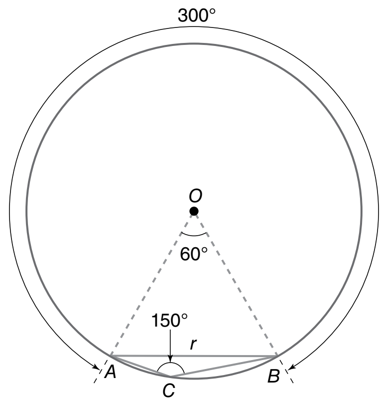
Pela lei dos senos, aplicada ao triângulo ABC, temos:

$$\frac{r}{\text{sen}\,\alpha} = 2r \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$$

Como $0° < \alpha < 180°$, pois α é medida de um ângulo interno de um triângulo, temos dois valores possíveis: $\alpha = 30°$ ou $\alpha = 150°$.

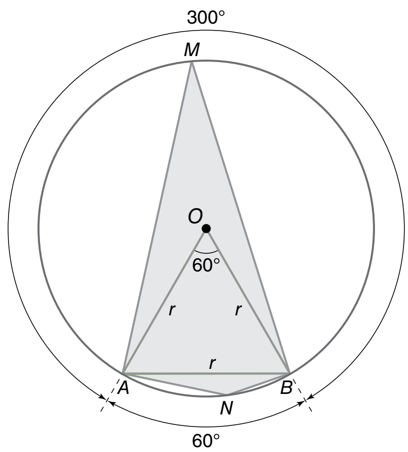
Duas figuras possíveis para esses valores de α são:





2º modo:

Em uma circunferência de raio r, consideremos uma corda $\overline{AB}$ de comprimento r. Os pontos A e B determinam nessa circunferência dois arcos distintos de extremos A e B. Considerando um ponto M em um desses arcos e um ponto N no outro, com M e N distintos de A e B, obtemos os triângulos ABM e ABN que satisfazem as condições enunciadas. Observe:



Assim, temos:

$$m(A\widehat{M}B) = \frac{m(\widehat{ANB})}{2} = \frac{60°}{2} = 30°$$

$$m(A\widehat{N}B) = \frac{m(\widehat{AMB})}{2} = \frac{300°}{2} = 150°$$

Logo, há duas respostas possíveis: 30° ou 150°.