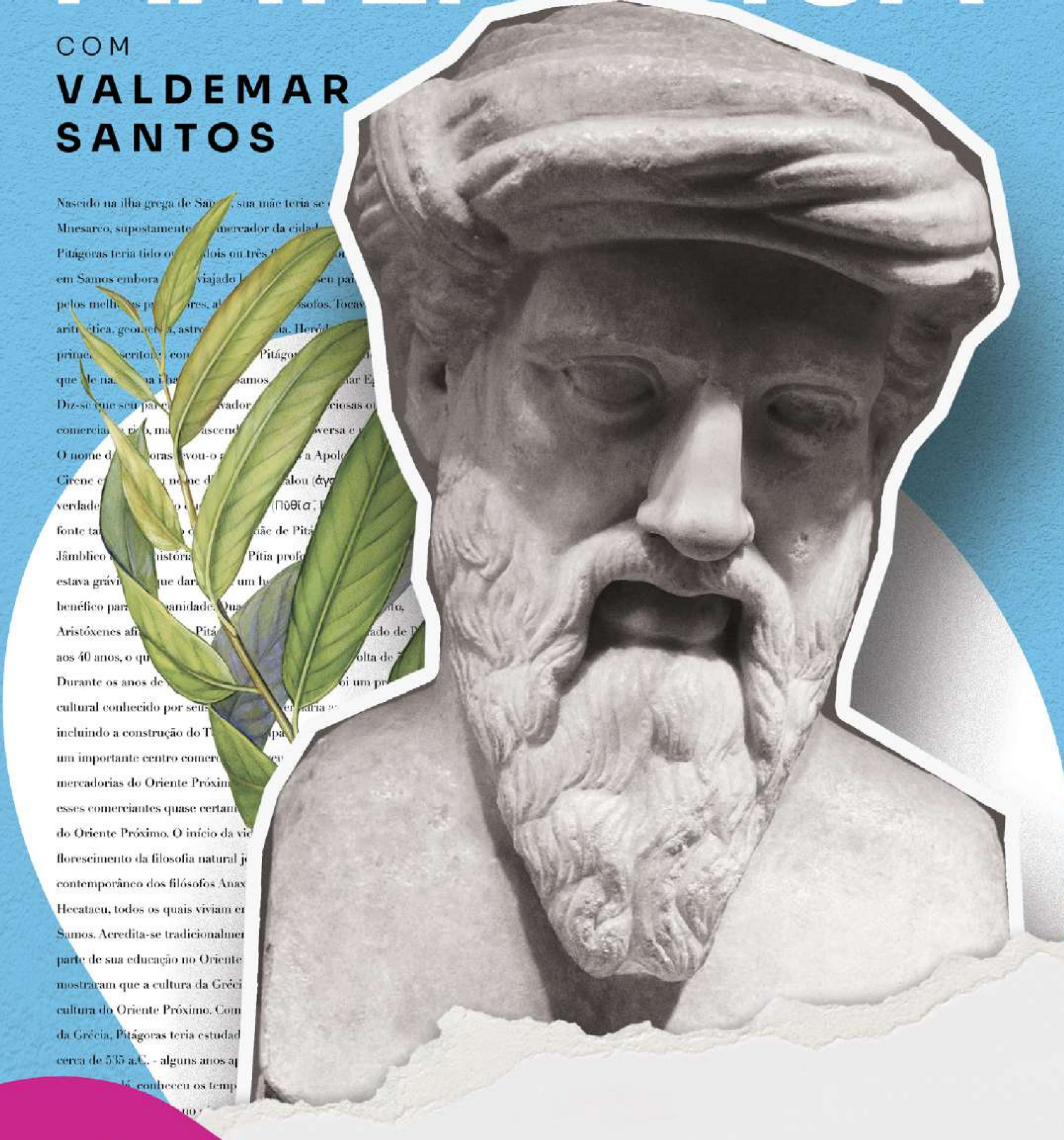
MATEMÁTICA

COM
VALDEMAR SANTOS



CURSO
FERNANDA PESSOA
ONLINE

COMBINATÓRIA 03

EXERCÍCIOS

Exercícios

PERMUTAÇÃO CIRCULAR

1. (UECE) Na mesa redonda utilizada para reuniões da Presidência da República, há um lugar fixo para ser ocupado pelo Presidente e outros 22 lugares para serem ocupados pelos ministros, todos igualmente espaçados. Estando presentes todos os 22 ministros e o Presidente, de quantas maneiras distintas podem ser ocupados os assentos?

a) 23!

b) 23! – 22!

c) 22!

d) 22! + 23!

2. (PUCPR MEDICINA) Uma joalheria pretende oferecer aos seus clientes pulseiras que serão confeccionadas sempre com o mesmo tipo de fio rígido redondo – de prata – e pequenas pérolas esféricas de mesmo tamanho (em pedaços retilíneos desse fio, secções transversais são círculos congruentes).
Sabe-se que somente pérolas nas cores azul (A), branca (B), creme (C), dourada (D), verde (V) e rosa (R) estão disponíveis e essas seis cores deverão ser usadas; numa mesma pulseira, não poderão figurar duas ou mais pérolas de mesma cor; em qualquer dessas pulseiras, sempre haverá, necessariamente, seis pérolas; todas as pulseiras terão o mesmo tamanho e formato circular e o fio usado que será sempre igual, deverá passar pelos centros das pérolas e ser fixado nelas de tal forma que todos os arcos determinados por pérolas vizinhas venham a ser congruentes.

Observe, na figura a seguir, duas pulseiras diferentes que poderão ser confeccionadas (cada letra indica a cor da pérola representada ao lado).

Se não serão confeccionadas duas ou mais pulseiras idênticas, então, no máximo quantas dessas pulseiras poderão vir a ser confeccionadas?

a) 720

b) 120

c) 60

d) 240

e) 24

3. (UEMA) Uma professora de educação infantil de uma escola, durante a recreação de seus 6 alunos, organiza-os em círculos para brincar. Considere a seguinte forma de organização dos alunos pela professora: são três meninas e três meninos e cada menina ficará ao lado de um menino, de modo alternado. As possibilidades de organização dos seus alunos são

a) 4

b) 6

c) 9

d) 12

e) 16

4. (UEMA - ADAPTADA) Uma professora de educação infantil de uma escola, durante a recreação de seus 8 alunos, organiza-os em círculos para brincar. Considere a seguinte forma de organização dos alunos pela professora: são quatro meninas e quatro meninos e cada menina ficará ao lado de um menino, de modo alternado.

As possibilidades de organização dos seus alunos são

a) 4

b) 6

c) 8

d) 12

e) 144

5. (UFPA) O número de possibilidades de colocar seis pessoas em círculo igualmente espaçadas, de modo que duas delas não possam ficar em posições opostas, é:

a) 96

b) 120

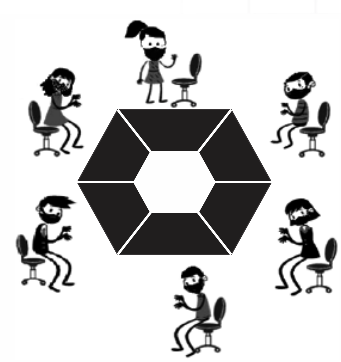
c) 24

d) 72

e) 60

6. (FCMMG) Diferentes protocolos de segurança foram elaborados para o enfrentamento da pandemia de Covid-19. No ambiente escolar, uma das orientações comuns para o retorno às salas de aula relaciona-se com a organização em "bolhas". O modelo consiste em determinar horários e ocupações de locais específicos para cada turma, evitando ao máximo o contato entre alunos de turmas diferentes.

Pensando em também reduzir o contato entre estudantes de uma mesma turma, certa escola optou por criar equipes fixas de seis estudantes. Para isso, mudou a disposição das carteiras das salas, reorganizando-as em formato hexagonal, como o esquema representado na figura abaixo.



(Disponível em https://www.powtoon.com/.Acesso em 26/10/2021. Adaptado.)

Considerando o modelo adotado pela escola, seis estudantes de determinada equipe podem ser dispostos ao redor do formato hexagonal de:
a) 20 formas
b) 30 formas
c) 120 formas
d) 720 formas

Gabarito:

1: [C]

O número de maneiras dos lugares serem ocupados é dado por:

$$\underbrace{1}_{\text{presidente}} \cdot \underbrace{22 \cdot 21 \cdot \ldots \cdot 1}_{\text{ministros}} = 22!$$

2: [C]

Sabendo que duas pulseiras são idênticas por meio de uma rotação no sentido horário ou de uma rotação de cento e oitenta graus em torno de um dos seus diâmetros, podemos concluir que a resposta é

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot PC_{(6)} &= \frac{1}{2} \cdot (6-1)! \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5! \\ &= 60.\end{aligned}$$

3: [D]

Há $PC_{(3)} = 2! = 2$ modos de organizar as meninas em círculo. Definidas as posições das meninas, teremos três espaços para colocar os meninos. Portanto, como os meninos podem ser dispostos de $P_3 = 3! = 6$ maneiras, segue, pelo Princípio Multiplicativo, que o resultado é $2 \cdot 6 = 12$.

4: [E]

Há $PC_{(4)} = 3! = 6$ modos de organizar as meninas em círculo. Definidas as posições das meninas, teremos quatro espaços para colocar os meninos. Portanto, como os meninos podem ser dispostos de $P4 = 4! = 24$ maneiras, segue, pelo Princípio Multiplicativo, que o resultado é $6 \cdot 24 = 144$.

5: [A]

6: [C]

O resultado pedido corresponde ao número de permutações circulares dos seis estudantes, ou seja,

$$\begin{aligned}PC_{(6)} &= (6-1)! \\ &= 5! \\ &= 120.\end{aligned}$$

LEMA DE KANPLASKY

1. (FGV) Sete pessoas formam uma fila e duas delas serão escolhidas para receber um brinde. O número de maneiras diferentes de escolher duas pessoas da fila que não sejam vizinhas é:

a) 15
b) 18
c) 20
d) 24
e) 30

2. Guilherme Neves dará aulas em três dias diferentes na primeira semana de maio de 2023. De quantos modos Guilherme pode escolher os dias das aulas se ele não quer dar aulas em dias consecutivos?

a) 10
b) 20
c) 35
d) 42
e) 210

3. O professor Paulo Bilynskyj decidiu praticar Crossfit 3 vezes por semana. De quantas maneiras Paulo pode escolher os dias de treino, se ele não quer praticar Crossfit em dias consecutivos?

a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

4. Débora deseja correr 3 vezes por semana durante esse bimestre. De quantas formas ela poderá escolher os dias da corrida, se Débora não deseja correr em dias consecutivos?

5. Dado um decágono, quantos são os triângulos cujos vértices são vértices não consecutivos do decágono?

6. Um estacionamento tem 10 vagas, uma ao lado da outra, inicialmente todas livres. Um carro preto, um carro rosa e um carro branco chegam a esse estacionamento. De quantas maneiras diferentes esses carros podem ocupar três vagas de forma que haja pelo menos uma vaga livre entre eles?

7. De quantos modos podemos formar uma sequência de 9 elementos iguais a 1 e 6 elementos iguais a 0 se dois elementos iguais a 0 não podem ser adjacentes?

8. (ITA) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de 5 cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

9. 8 pessoas devem se sentar em 25 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?

10. (OBM 2010 - 2ª fase do nível 3) Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

11. Irving gosta de jogar futebol, mas precisa ficar dois dias consecutivos sem jogar para evitar dores musculares. De quantas maneiras Irving pode escolher em quais de 20 dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

12. Um determinado atleta quer fazer treinos HIIT para se preparar fisicamente para um campeonato. Sabendo que faltam 28 dias para o campeonato, que ele quer pelo menos 3 dias de intervalo entre dois treinos HIIT e que ele pode escolher 3 tipos desses treinos. De quantas maneiras esse atleta pode escolher fazer os treinos HIIT, se ele quer treinar pelo menos 5 vezes?

13. Seis pessoas devem se sentar em vinte cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se para cada cadeira ocupada devemos ter duas cadeiras livres de cada lado?

Gabarito:

1: [A]
2: [A]
3: [C]
4: 7 maneiras
5: 50 maneiras
6: 336 maneiras
7: 210 modos
8: 36 maneiras
9: 1441440000 modos
10: 144 maneiras
11: 2737 maneiras
12: 2574828 maneiras
13: 50400 modos

COMBINAÇÃO COMPLETA

1. (UFPR) Após pagar o valor da conta da pizzaria, Ana, Beatriz e Carlos voltaram para casa. No caminho, ninguém se recordava de quanto foi exatamente o valor da conta. Ana lembrava que a conta deu um valor inteiro e menor que 200 reais. Beatriz lembrava que deu um valor maior que 50 reais. Carlos lembrou que a soma dos algarismos do valor da conta dava 6. Admitindo que todos estavam certos, quantos são os valores possíveis para a conta?

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

2. (ESA) A expressão que fornece o número de anagramas da palavra SARGENTO, onde as vogais aparecem em ordem alfabética, é:

a) $\frac{8! - 3!}{5!}$

b) $\frac{8!}{3!}$

c) 8!

d) $\frac{8! - 5!}{3!}$

e) 8! - 3!

3. (UNIOESTE) O número de soluções distintas para a equação em que as variáveis são números inteiros e não negativos é:

a) 35
b) 120
c) 210
d) 840
e) 7!

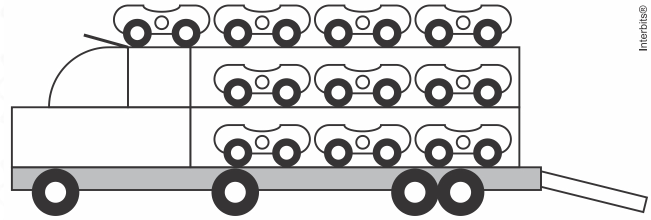
4. (ESC. NAVAL) Sandro é o dono de uma empresa de segurança que tem como empregados Alberto, Thiago, Robson e Rodrigo. Sandro deve realizar pagamento aos seus empregados totalizando um valor de vinte mil reais. Alberto, Thiago, Robson e Rodrigo recebem pagamentos com valor mínimo de dois mil, dois mil, três mil e quatro mil reais, respectivamente. Considerando que cada pagamento realizado aos empregados é múltiplo de um mil reais, assinale a opção que apresenta a quantidade de maneiras distintas que a distribuição do pagamento de vinte mil reais aos funcionários pode ser realizada.

a) 110
b) 120
c) 220
d) 330
e) 560

5. (UECE) O número de ternos de números inteiros positivos, maiores do que cinco, que cumprem a condição é

a) 71
b) 91
c) 61
d) 81

6. (ENEM) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



No setor de produção da empresa que fábrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,4}$
b) $C_{9,3}$
c) $C_{10,4}$
d) 6^4
e) 4^6

7. (CEFET MG - ADAPTADA) Como prêmio pela vitória em uma competição, serão distribuídas moedas de ouro idênticas entre as três pessoas da equipe vencedora, e cada uma deverá receber, pelo menos, duas moedas. O número de maneiras distintas de efetuarmos essa distribuição é

a) 13
b) 28
c) 35
d) 36
e) 42

Gabarito:

1: [C]

Os valores possíveis com dois algarismos são 51 e 60.

Os valores possíveis com três algarismos são da forma Assim, devemos ter Ora, mas o número de soluções inteiras e não negativas dessa equação é dado por

$$CR_{2,5} = \binom{6}{5} = 6.$$

A resposta é $2 + 6 = 8$.

2: [B]

Considere o diagrama $\underbrace{}_{x_1} A \underbrace{}_{x_2} E \underbrace{}_{x_3} O \underbrace{}_{x_4}$

Se x_1, x_2, x_3 e x_4 e denotam a quantidade de letras que podem ser colocadas em cada um dos espaços em branco, então o número de maneiras de ocupar esses espaços corresponde ao número de soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$. Tal número é dado por

$$\begin{aligned} CR_{4,5} &= \binom{4+5-1}{5} \\ &= \binom{8}{5} \\ &= \frac{8!}{5!\cdot 3!}. \end{aligned}$$

Ademais, podemos permutar as letras que serão colocadas nos espaços em branco de $p_5 = 5!$ maneiras.

Em consequência, pelo Princípio Multiplicativo, segue que

a resposta é $\frac{8!}{5!\ \cdot 3!} \cdot 5! = \frac{8!}{3!}$.

3: [B]

A resposta corresponde ao número de combinações completas de objetos tomados a ou seja,

$$\begin{aligned} CR_{4,7} &= \binom{4+7-1}{7} \\ &= \binom{10}{7} \\ &= \frac{10!}{7!\cdot 3!} \\ &= 120. \end{aligned}$$

4: [C]

Supondo que todos receberão o valor mínimo predefinido, resta calcular de quantas maneiras é possível distribuir mil reais entre os quatro empregados.

Esse resultado corresponde ao número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 9$.

A resposta é $CR_{4,9} = \binom{12}{9}$

$$\begin{aligned} &= \frac{12!}{9!\cdot 3!} \\ &= 220. \end{aligned}$$

5: [B]

Tomando $x = a + 6$, $y = b + 6$ e $z = c + 6$, com $a, b, c \in \mathbb{N}$, vem $x + y + z = 30 \Leftrightarrow a + b + c = 12$.

Logo, queremos calcular o número de soluções inteiras e não negativas da equação acima. Tal resultado é dado pelo número de combinações completas de objetos tomados a ou seja,

$$\begin{aligned} CR_3^{12} &= \binom{14}{12} \\ &= \frac{14!}{12!\cdot 2!} \\ &= 91. \end{aligned}$$

6: [B]

Sabendo-se que cada caminhão cegonha possui carros e que é preciso ao menos um carrinho de cada cor, então restam carrinhos nos quais as cores podem ser permutadas.

Sendo a, b, c e d a quantidade de carrinhos brancos, laranjas, amarelos e verdes, além dos já pintados (um de cada cor), tem-se: $a + b + c + d = 6$.

A quantidade de soluções inteiras não negativas dessa equação de quatro variáveis será:

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = C_{9,3}$$

7: [D]

Como cada pessoa receberá no mínimo duas moedas, devemos calcular o número de maneiras de distribuir moedas para pessoas. Assim, o resultado pedido corresponde ao número de soluções inteiras e não negativas

da equação $x + y + z = 7$, isto é, $P_{7,2}^{9} = \frac{9!}{2!\ \cdot 7!} = 36$.

Anotações