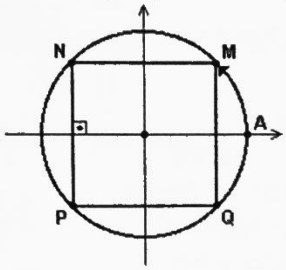
Nível I

1. (Uflavras 2000) A figura MNPQ é um retângulo inscrito em um círculo. Se a medida do arco AM é $\frac{\pi}{4}$ rad, as medidas dos arcos AN e AP, em radianos, respectivamente, são:



A. ( ) $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$ B. ( ) π e $\frac{3\pi}{2}$
C. ( ) $\frac{3\pi}{4}$ e 2π D. ( ) $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{5\pi}{4}$
E. ( ) $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{8}$

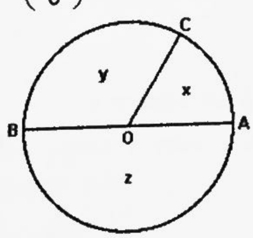
2. (Ufrn 2003) No protótipo antigo de uma bicicleta, conforme figura abaixo, a roda maior tem 55 cm de raio e a roda menor tem 35 cm de raio. O número mínimo de voltas completas da roda maior para que a roda menor gire um número inteiro de vezes é

A. ( ) 5 voltas. B. ( ) 7 voltas.
C. ( ) 9 voltas. D. ( ) 11 voltas.

3. (Mackenzie 2003) Um veículo percorre uma pista circular de raio 300 m, com velocidade constante de 10 m/s, durante um minuto. Dentre os valores abaixo, o mais próximo da medida, em graus, do arco percorrido é:

A. ( ) 90 B. ( ) 115
C. ( ) 145 D. ( ) 75
E. ( ) 170

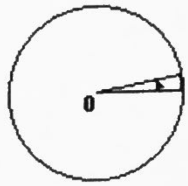
4. (Ufscar 2003) O gráfico em setores do círculo de centro O representa a distribuição das idades entre os eleitores de uma cidade. O diâmetro $\overline{AB}$ mede 10 cm e o comprimento do menor arco AC é $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$ cm.

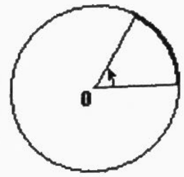


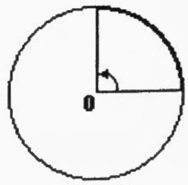
O setor x representa todos os 8000 eleitores com menos de 18 anos, e o setor y representa os eleitores com idade entre 18 e 30 anos, cujo número é

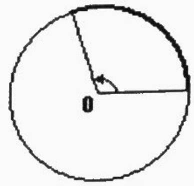
A. ( ) 12000 B. ( ) 14800
C. ( ) 16000 D. ( ) 18000
E. ( ) 20800

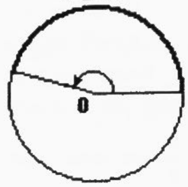
5. (Ufrs 2004) Dentre os desenhos abaixo, aquele que representa o ângulo que tem medida mais próxima de 1 radiano é

A. ( ) 

B. ( ) 

C. ( ) 

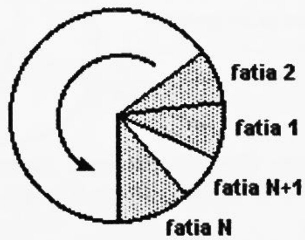
D. ( ) 

E. ( ) 

6. (Puccamp 2005) Ao descrever o tipo de salto de uma ginasta, um entendido a ele referiu: "Era como se seus dedos dos pés descrevessem no espaço um arco de circunferência de 124 cm de comprimento." Considerando que cada perna dessa ginasta, juntamente com seu pé esticado, estejam em linha reta e perfazem 60 cm, o cosseno do ângulo de abertura de suas pernas era: (Use: π = 3,1)

A. ( ) –
B. ( ) –1/2
C. ( ) 1/2

7. (Ufscar 2005) Uma pizza circular será fatiada, a partir do seu centro, em setores circulares. Se o arco de cada setor medir 0,8 radiano, obtém-se um número máximo N de fatias idênticas, sobrando, no final, uma fatia menor, que é indicada na figura por fatia N+1.



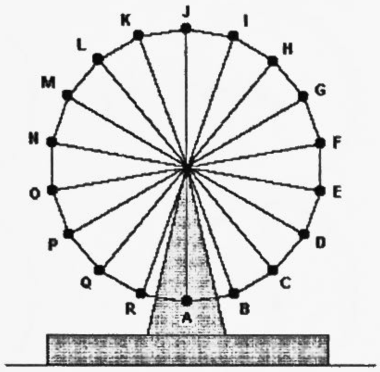
Considerando π = 3,14, o arco da fatia N + 1, em radiano, é

A. ( ) 0,74.
B. ( ) 0,72.
C. ( ) 0,68.
D. ( ) 0,56.
E. ( ) 0,34.

8. (Ufsm 2007) No último pleito, o horário de encerramento das votações, segundo determinação do TSE para todo o estado do Rio Grande do Sul, foi às 17 horas. Passados 5 minutos do encerramento, o menor ângulo entre os ponteiros do relógio era de

A. ( ) 123°
B. ( ) 122° 30'
C. ( ) 122°
D. ( ) 120° 30'
E. ( ) 120°

9. (G1 - cps 2008) A roda-gigante de um parque de diversões tem dezoito cadeiras, igualmente espaçadas ao longo do seu perímetro e move-se no sentido anti-horário, isto é, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.



Na figura, as letras A, B, C, ... e R indicam as posições em que as cadeiras ficam cada vez que a roda gigante para.

Com a roda gigante parada, Bruna senta-se na cadeira que está na posição A, posição mais baixa da roda gigante.

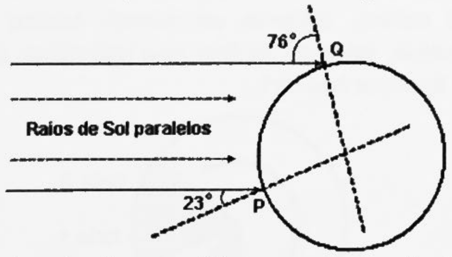
A roda gigante move-se $\frac{5}{6}$ de uma volta e para. Nesse momento, a letra relativa à posição da cadeira ocupada por Bruna é

A. ( ) D.
B. ( ) I.
C. ( ) K.
D. ( ) P.
E. ( ) R.

10. (Ufal 2007) Considere que:

- Os raios de Sol incidem paralelamente sobre a Terra.
- O planeta Terra é uma esfera cuja linha do Equador tem 40.000 km de perímetro.

Na figura a seguir são representados os raios solares incidindo nos pontos P e Q da linha do Equador do planeta Terra e são indicadas as medidas dos ângulos que esses raios formam com as normais à superfície terrestre nesses pontos.



O comprimento do arco PQ, que corresponde à menor distância de P a Q, em quilômetros, é igual a

A. ( ) 11.000
B. ( ) 10.880
C. ( ) 10.666
D. ( ) 10.444
E. ( ) 9.000

11. (Ueg 2008) Duas importantes cidades estão localizadas sobre a linha do Equador: uma é a capital do Amapá e a outra é a capital do Equador, ambas na América do Sul. Suas longitudes são, respectivamente, 78° Oeste e 52° Oeste. Considerando que a Terra é uma esfera de raio 6400 km, qual é a distância entre essas duas cidades?

12. (Ufal 2000) Analise as afirmativas a seguir, nas quais x número real.

( ) ( ) $\text{sen } 495° = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)$

( ) ( ) $\text{tg}\left(\frac{8\pi}{7}\right) < 0$

( ) ( ) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

( ) ( ) A equação $\text{tg}x = 1000$ não tem solução

( ) ( ) Para $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ tem-se $\cos x > \text{sen } x$

13. (Mackenzie 2001)

I. $\cos 225° < \cos 215°$
II. $\text{tg}(5\pi/12) > \text{sen}(5\pi/12)$
III. $\text{sen } 160° > \text{sen } 172°$

Das afirmações acima:

A. ( ) todas são verdadeiras.
B. ( ) todas são falsas.
C. ( ) somente II e III são verdadeiras.
D. ( ) somente II é verdadeira.
E. ( ) somente I e II são verdadeiras.

14. (Ufjf 2002) Se θ for um ângulo tal que $0° < \theta < 90°$ e $\cos\theta < 1/5$, é CORRETO afirmar que:

A. ( ) $0° < \theta < 30°$
B. ( ) $30° < \theta < 45°$
C. ( ) $45° < \theta < 60°$
D. ( ) $60° < \theta < 75°$
E. ( ) $75° < \theta < 90°$

15. (Pucsp 2004) Na sequência de termo geral $a_n = 5n + \text{sem}(n.\pi/2)$, com $n \in N^*$, a soma dos 20 primeiros termos de ordem ímpar é igual a

A. ( ) 1800
B. ( ) 1874
C. ( ) 1896
D. ( ) 2000
E. ( ) 2024

16. (G1 - cftmg 2005) O valor de

$y = \cos 150° + \text{sen } 300° - \text{tg } 225° - \cos 90°$ é

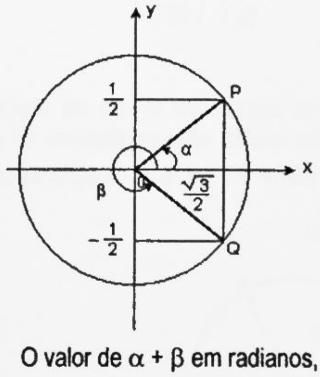
17. (G1 - cftmg 2005) O número

$N = (3 \cos 180° - 4 \text{ sem} 210° + 2 \text{ tg} 135°) / (6 \text{ sen} 245°)$

pertence ao intervalo

A. ( )]−4, −3 [
B. ( ) [−3, −2 [
C. ( ) [−2, −1]
D. ( )]−1, 0]

18. (G1 - cftmg 2008) Na figura, P e Q são pontos da circunferência trigonométrica de centro O e raio unitário.



sen α: ordenada do ponto P
cos α: abscissa do ponto P
sen β: ordenada do ponto Q
cos β: abscissa do ponto Q

O valor de α + β em radianos, é

A. ( ) 2π
B. ( ) $\frac{11\pi}{6}$
C. ( ) $\frac{13\pi}{6}$
D. ( ) $\frac{25\pi}{12}$

Nível II

1. Os valores de x que satisfazem a equação $3^{\cos x} = 1$ são:

a) $k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

b) $2k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$

c) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$

d) $\frac{k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$

2. A soma dos valores inteiros de a na igualdade $\cos\left(x - \frac{7\pi}{12}\right) = \frac{5-4a}{9}$ é igual a:

A. ( ) 11
B. ( ) 10
C. ( ) 9
D. ( ) 6
E. ( ) 5

3. Determine como $m \in R$ pode variar de modo que, $\forall x$, exista m com:

a) $\text{sen}(x) = \frac{2m-4}{3}$

b) $\cos(x) = \frac{3m-5}{7}$

c) $\text{sen}^2(x) = \frac{3m+2}{5}$

d) $\cos^2(x) = \frac{2m+1}{2m-1}$

4. Calcule as demais funções trigonométricas de x se:

a) $\text{sen}(x) = \frac{4}{5}; \frac{\pi}{2} < x < \pi$

b) $\text{tg}(x) = -\frac{3}{4}; \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

c) $\text{cotg}(x) = \frac{5}{12}; \pi < x < \frac{3\pi}{2}$

d) $\cos(x) = \frac{24}{25}; \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

5. Se $x \in R$, determine o intervalo em que podem variar as seguintes expressões:

a) $\frac{1}{3-\cos(x)}$

b) $\frac{4}{3+2\text{sen}(x)}$

c) $\frac{2}{3+3\cos(x)}; x \neq \pi + 2k\pi, k \in Z$

d) $\frac{1+2\text{sen}(x)}{3+\text{sen}(x)}$

6. Determine os possíveis valores das seguintes expressões, em que $k \in Z$:

a) $\text{sen}\left[(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\right]$

b) $\text{tg}\left[\frac{k\pi}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{6}\right]$

7. Determine o valor de $m \in R$ de modo que as seguintes sejam válidas simultaneamente:

a) $\text{sen}(x) = 2m+1; \cos(x) = 4m+1$

b) $\text{sen}(x) = m - \frac{1}{2}; \cos(x) = m + \frac{1}{2}$

8. Sendo dado que sen(x) + cos(x) = a, calcule:

a) $\text{sen}(x)\cos(x)$

b) $\text{sen}^3(x) + \cos^3(x)$

c) $\text{sen}^4(x) + \cos^4(x)$

d) $\text{sen}^5(x) + \cos^5(x)$

e) $\text{sen}^6(x) + \cos^6(x)$

9. Sendo tg(x) + cotg(x) = m, calcule:

a) $\text{tg}(x) - \text{cotg}(x)$

b) $\text{tg}^2(x) + \text{cotg}^2(x)$

c) $\text{tg}^2(x) - \text{cotg}^2(x)$

d) $\text{tg}^3(x) + \text{cotg}^3(x)$

10. Se $y = 2 - 3\,\text{sen}x$, então o valor máximo que y assume quando variamos x em $\mathbb{R}$ é:

A. ( ) 5
B. ( ) 1
C. ( ) 3
D. ( ) −1
E. ( ) 6

11. Determine a condição que m deve satisfazer, de forma que $\text{sen}x = \sqrt{2-m}$ e $\cos x = \sqrt{m^2-1}$.

12. Determine os possíveis valores que

$\sqrt{1+\cos^2(x)-\text{sen}^2(x)} + \sqrt{1-\cos^2(x)+\text{sen}^2(x)} + \sqrt{2}(\text{sen}(x)+\cos(x))$

pode assumir.

13. Seja x um ângulo que possui tangente tal que $\text{sen}x + 2\cos x = 1$. O valor de $\text{tg}x$ é:

A. ( ) $\frac{3}{4}$.
B. ( ) $\frac{4}{3}$.
C. ( ) $-\frac{3}{4}$.
D. ( ) $-\frac{4}{3}$.
E. ( ) 0.

14. Analise os valores distintos assumidos abaixo, onde $k \in \mathbb{Z}$:

a) $\text{sen}\left[(4k+1)\frac{\pi}{2} \pm \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right].$

b) $\cos\left[(2k+1)\frac{\pi}{2} + (-1)^k\left(a - \frac{\pi}{2}\right)\right].$

c) $\text{sen}\left[k\pi + (-1)^k a\right].$

15. Simplifique $\dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2} - a\right)\cdot\csc(-a)}{\text{tg}(\pi+a)\cdot\sec\left(\frac{\pi}{2}+a\right)}.$

16. Se $f(x) = \frac{\text{tg}7x + \text{tg}11x + \text{tg}5x}{\text{tg}23x + \text{tg}17x + \text{tg}19x}$, qual o valor de $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$?

17. Se $A+B+C = 2\pi$ e

$P = \text{sen}A\cdot\text{sen}(A+B) - \text{sen}C\cdot\text{sen}(B+C),$

o valor de P é:

A. ( ) 0.
B. ( ) −1.
C. ( ) $\text{sen}A\cdot\text{sen}C$.
D. ( ) $\cos C$.
E. ( ) 1.

18. Verifique que as igualdades abaixo para todo valor de $x \neq 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$, onde n é um número inteiro qualquer. Tais igualdades são chamadas identidades trigonométricas.

a) $\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x} = \frac{1-\text{sen}\,x}{\cos x}.$

b) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \frac{1-\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}.$

19. Encontre as três menores soluções positivas da equação $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

20. Determine o conjunto dos números reais x tais que $\text{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

21. Quantos são os valores distintos de $\cos\frac{k\pi}{3}$, k inteiro?

22. Determine para que valores de x a função $y = 5 - \cos\left(x + \frac{\pi}{5}\right)$ assume seu valor máximo.

23. Determine o conjunto dos números reais x tais que $\text{tg}\, 2x = \sqrt{3}$.

24. Verdadeiro ou falso?

A. ( ) $\text{sen}\, 2 > 0$ B. ( ) $\cos 4 < 0$
C. ( ) $\text{sen}\, 3 > \text{sen}\, 2$ D. ( ) $\cos 3 > \cos 2$
E. ( ) $\text{tg}\, 5 > \text{tg}\, 6$ F. ( ) $\cos\frac{\pi}{4} > \cos 1$
G. ( ) $\cos\sqrt{3} < 0$

25. Se x está no segundo quadrante e tg x = $2\sqrt{2}$, calcule as demais funções de x.

26. Determine todas as soluções da equação $\sec\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 2$

27. Prove as identidades abaixo, para $x \neq n\pi/2$:

a) $\sec x \cdot \text{ctg}\, x = \text{cosec}\, x$.

b) $\dfrac{\sec x}{\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x} = \text{sen}\, x$.

c) $\dfrac{\text{tg}\, x - \text{ctg}\, x}{\text{tg}\, x + \text{ctg}\, x} = 2\text{sen}^2 x - 1$.

28. Calcular m para que exista um ângulo x com $\cos x = \dfrac{2}{m-1}$ e $\text{tg}\, x = \sqrt{m-2}$.

29. Prove as identidades abaixo, válidas para todo x onde as expressões estão definidas:

a) $\dfrac{1-\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x} = 1 - 2\text{sen}^2 x$. b) $\dfrac{\cos x - \text{sen}\, x}{\cos x + \text{sen}\, x} = \dfrac{1-\text{tg}\, x}{1+\text{tg}\, x}$.

c) $\dfrac{1-\text{sen}\, x}{1+\text{sen}\, x} = (\sec x = \text{tg}\, x)^2$. d) $\dfrac{\text{sen}\, x}{\text{cosec}\, x - \text{ctg}\, x} = 1 + \cos x$.

30. Sabendo que $\text{tg}\, x + \sec x = \frac{3}{2}$, calcular sen x e cos x.

31. Sabendo que $\text{sen}^2 x - 3\text{sen}\, x \cdot \cos = 2$, calcular tg x.

32. Sabendo que $\text{sen}\, x + \cos x = m$, calcular $\text{sen}^3 x + \cos^3 x$.

33. Sabendo que $\text{sen}^2 x + \text{sen}\, x = 1$, provar que $\cos^4 x + \cos^2 x = 1$.

34. Eliminar em cada item as funções circulares existentes, obtendo uma relação entre os demais parâmetros.

a) $\begin{cases} \text{tg}\, x + \text{sen}\, x = a \\ \text{tg}\, x - \text{sen}\, x = b \end{cases}$ b) $\begin{cases} \text{sen}\, x + \cos x = a \\ \text{sen}^3 x + \cos^3 x = b \end{cases}$

c) $a \cdot \text{sen}\, x = b \cdot \cos x = \dfrac{2c \cdot \text{tg}\, x}{1 - \text{tg}^2 x}$ d) $\begin{cases} a \cdot \cos^2 x \cdot \text{sen}\, x = M \\ a \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x = n \end{cases}$

Nível III

1. Se $\dfrac{\text{sen}\, x - \text{sen}\, y}{\cos x - \cos y} = 2$ e $\text{tg}\, x = \frac{1}{3}$, então tg y é igual a:

A. ( ) 3. B. ( ) $\frac{1}{6}$. C. ( ) 0.
D. ( ) $-\frac{1}{6}$. E. ( ) −3.

2. Provar que para quaisquer números reais a e b, $2(1 - \text{sen}\, a \cdot \text{sen}\, b) \geq \cos^2 a + \cos^2 b$.

3. Sabendo que $\begin{cases} 1 + \cos x = a\,\text{sen}\, x \\ 1 - \cos x = b\,\text{sen}\, x \end{cases}$ encontre uma relação entre a e b.

4. Sabendo que $\begin{cases} a \sec x = 1 + \text{tg}\, x \\ b \sec x = 1 - \text{tg}\, x \end{cases}$ encontre uma relação entre a e b.

5. Prove a identidade abaixo, válida para todo x onde a expressão do lado esquerdo está bem definida.

$$\frac{\text{sen}\, x - 2\text{sen}^3 x}{2\cos^3 x - \cos x} = \text{tg}\, x$$

6. Prove que para $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\cos^2 x + x\,\text{sen}\, x < 2$.

7. Se sen θ + cos θ = $\sqrt{2}/3$, onde $\pi/2 < \theta < \pi$, determine o valor de sen θ − cos θ.

8. Encontre a relação entre m e n, eliminando os ângulos θ e φ nas expressões: $m^2\,\text{tg}^2\,\theta + n^2\,\text{tg}^2\,\varphi = 1$, $m^2 \cos^2\theta + n^2\,\text{sen}^2\,\varphi = 1$ e $m\,\text{sen}\,\theta = n \cos\varphi$.

Gabaritos

Nível I

1. [A] 2. [B] 3. [B] 4. [C] 5. [B]
6. [D] 7. [C] 8. [B] 9. [D] 10. [A]

11. Aproximadamente 2.902,76 km (supondo $\pi = 3,14$).

12: V; F; F; F; V **13.** [C] **14.** [E] **15.** [D]

16. [C] **17.** [C] **18.** [A]

Nível II

1. [A] **2.** [E]

3. a) $\left[\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right]$ b) $\left[-\frac{2}{3},4\right]$ c) $\left[-\frac{2}{3},1\right]$ d) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$

4.

a) $\cos(x)=-\frac{3}{5}, \text{tg}(x)=-\frac{4}{3}, \cot g(x)=-\frac{3}{4}, \sec(x)=-\frac{5}{3}, \text{cossec}(x)=\frac{5}{4}$

b) $\text{sen}(x)=-\frac{3}{5}, \cos(x)=\frac{4}{5}, \cot g(x)=-\frac{4}{3}, \sec(x)=\frac{5}{4}, \text{cossec}(x)=-\frac{5}{3}$

c) $\text{sen}(x)=-\frac{12}{13}, \cos(x)=-\frac{5}{13}, \text{tg}(x)=\frac{12}{5}, \sec(x)=-\frac{13}{5}, \text{cossec}(x)=-\frac{13}{12}$

d) $\text{sen}(x)=-\frac{7}{25}, \text{tg}(x)=-\frac{7}{24}, \cot g(x)=-\frac{24}{7}, \sec(x)=\frac{25}{24}, \text{cossec}(x)=-\frac{25}{7}$

5. a) $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ b) $\left[\frac{4}{5},4\right]$ c) $\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$ d) $\left[-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$

6. a) $\frac{1}{2}$ b) $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. a) $-1, -\frac{1}{5}$ b) $\pm\frac{1}{2}$

8. a) $\frac{a^2-1}{2}$ b) $\frac{3a-a^3}{2}$ c) $\frac{1+2a^2-a^4}{2}$

d) $\frac{5a-a^5}{4}$ e) $\frac{1+6a^2-3a4}{4}$

9. a) $\pm\sqrt{m^2-4}$ b) m^2-2 c) $\mp m\sqrt{m^2-4}$ d) m^3-3m

10. A

11. $m=1$.

12. $2\sqrt{2}(\text{sen}x+\cos x), 2\sqrt{2}\text{sen}x, 0, 2\sqrt{2}\cos x$

13. C

14. a) sen a. b) cos a. c) sen a.

15. –cos a

16. 1.

17. 0.

18. Demonstração.

19. $\pi/4, 7\pi/12$ e $11\pi/12$.

20. $\{k\pi/2+\pi/6 \mid k\in Z\}$.

21. 4.

22. $2k\pi+4\pi/5$.

23. $\{k\pi/2+\pi/6 \mid k\in Z\}$.

24. a) V; b) V; c) F; d) F;
e) F; f) V; g) V.

25.
$\text{sen}\, x = 2\sqrt{2}/3$, $\cos x = -1/3$, $\text{cosec}\, x = -3\sqrt{2}/4$, $\text{ctg}\, x = -\sqrt{2}/4$, $\sec x = -3$.

26. $x=k\pi, x=k\pi-\pi/3$.

27. Demonstração.

28. 5.

29. Demonstração.

30. 5/13 e 12/13.

31. – 1 ou – 2.

32. $(3m-m^3)/2$.

33. Demonstração.

34. a) $(a^2-b^2)^2=16ab$ b) $a^3+2b=3a$

c) $(a^2-b^2)^2=4c^2(a^2+b^2)$ d) $(M^2+n^2)^3=a^2\cdot M^2\cdot n^2$

Nível III

1. E

2. Demonstração.

3. ab = 1.

4. $a^2+b^2=2$.

5. Demonstração.

6. Demonstração

7. 4/3

8. $m\neq 0$, $n\neq 0$, $0<\frac{m^2+n^2-1}{2n^2}\leq 1$,

$$0<\frac{m^2-n^2+1}{2m^2}\leq 1 \text{ e } \frac{2m^4}{m^2-n^2+1}+\frac{2n^4}{m^2+n^2-1}=m^2+n^2+1$$