MATEMÁTICA

1

O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0 e 2.
Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

Resolução

Sendo M_I a média de gols da primeira rodada, M_G a média de gols das duas primeiras rodadas e x o número de gols da segunda rodada, tem-se

$$M_G = (1 + 20\%)\ M_I \Rightarrow \frac{15 + x}{6 + 5} = 1,20 \cdot \frac{15}{6} \Leftrightarrow$$

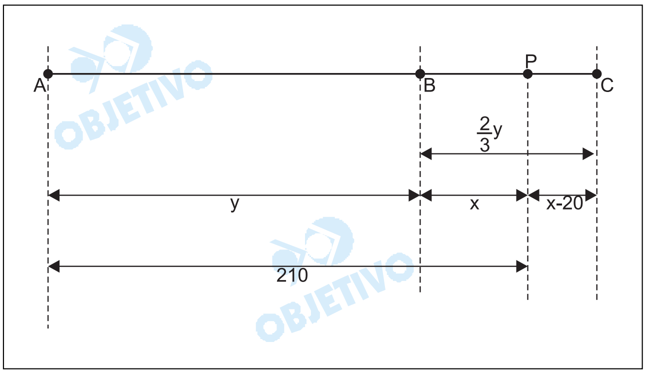
$$\Leftrightarrow 15 + x = 33 \Leftrightarrow x = 18$$

Resposta: *18 gols*

2

Três cidades A, B e C situam-se ao longo de uma estrada reta; B situa-se entre A e C e a distância de B a C é igual a dois terços da distância de A a B. Um encontro foi marcado por 3 moradores, um de cada cidade, em um ponto P da estrada, localizado entre as cidades B e C e à distância de 210 km de A. Sabendo-se que P está 20 km mais próximo de C do que de B, determinar a distância que o morador de B deverá percorrer até o ponto de encontro.

Resolução



Nas condições representadas na figura, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{2}{3}y = x + (x - 20) \Rightarrow 2y = 6x - 60 \\ x + y = 210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 \\ y = 150 \end{cases}$$

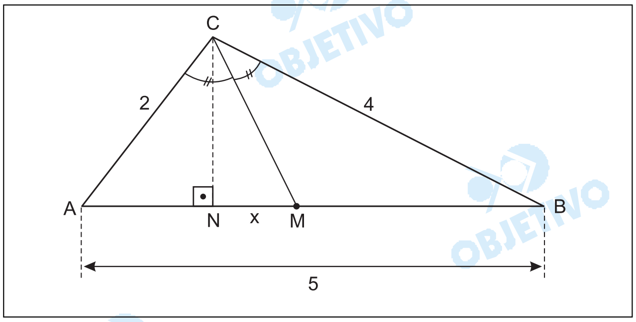
Resposta: *60 km*

3

Um triângulo ABC tem lados de comprimentos AB = 5, BC = 4 e AC = 2. Sejam M e N os pontos de $\overline{AB}$ tais que $\overline{CM}$ é a bissetriz relativa ao ângulo $A\hat{C}B$ e $\overline{CN}$ é a altura relativa ao lado $\overline{AB}$.

Determinar o comprimento de $\overline{MN}$.

Resolução



Sendo x o comprimento do segmento $\overline{MN}$, tem-se:

1) $\overrightarrow{CM}$ *é bissetriz* $\Rightarrow \dfrac{AC}{AM} = \dfrac{BC}{BM} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{AM} = \frac{4}{5 - AM} \Leftrightarrow AM = \frac{5}{3} \Rightarrow AN = \frac{5}{3} - x$$

$$e\ BN = 5 - \left(\frac{5}{3} - x\right) = \frac{10}{3} + x$$

2) *No triângulo retângulo ANC,* $CN^2 + AN^2 = 4$

3) *No triângulo retângulo BNC,* $CN^2 + BN^2 = 16$

4) *Dos itens (2) e (3), conclui-se que*

$$BN^2 - AN^2 = 12 \Rightarrow \left(\frac{10}{3} + x\right)^2 - \left(\frac{5}{3} - x\right)^2 = 12$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{100}{9} + \frac{20}{3}x + x^2 - \frac{25}{9} + \frac{10}{3}x - x^2 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x + \frac{25}{3} = 12 \Rightarrow x = \frac{11}{30}$$

Resposta: $\dfrac{11}{30}$

4

Considere a equação $z^2 = \alpha z + (\alpha - 1)\overline{z}$, onde α é um número real e $\overline{z}$ indica o conjugado do número complexo z.

a) Determinar os valores de α para os quais a equação tem quatro raízes distintas.

b) Representar, no plano complexo, as raízes dessa equação quando $\alpha = 0$.

Resolução

a) Sendo $z = x + y\,i$, com x e y reais, tem-se

$z^2 = \alpha\, z + (\alpha - 1)\,\overline{z} \Rightarrow (x + y\,i)^2 = \alpha\,(x + y\,i) + $
$+ (\alpha - 1)\,(x - yi)$
$\Rightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = \alpha x + \alpha yi + \alpha x - \alpha yi - x + yi \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = (2\alpha - 1)\,x + yi \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = (2\alpha - 1)\,x \\ 2xy = y \;\Leftrightarrow\; y = 0 \;\text{ ou }\; x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Para $y = 0$ tem-se $x^2 = (2\alpha - 1)\,x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - (2\alpha - 1)x = 0$, que só admite duas raízes distintas se $(2\alpha - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \dfrac{1}{2}$

Para $x = \dfrac{1}{2}$, tem-se $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - y^2 = (2\alpha - 1)\,.\,\dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$\dfrac{1}{4} - y^2 = \alpha - \dfrac{1}{2} \Rightarrow y^2 = \dfrac{3}{4} - \alpha$, que só admite duas raízes distintas se $\dfrac{3}{4} - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < \dfrac{3}{4}$.

Assim sendo, se $\alpha < \dfrac{3}{4}$ e $\alpha \neq \dfrac{1}{2}$, as 4 raízes serão

$z_1 = 0,\ z_2 = 2\alpha - 1,\ z_3 = \dfrac{1}{2} + i\sqrt{\dfrac{3}{4} - \alpha}$ *e*

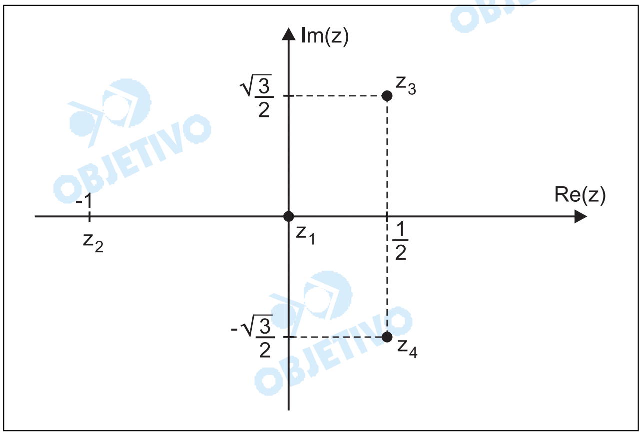
$z_4 = \dfrac{1}{2} - i\sqrt{\dfrac{3}{4} - \alpha}$

b) Para $\alpha = 0$, as raízes são $z_1 = 0 = (0;\,0)$,

$z_2 = -1 = (-1;\,0),\ z_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i = \left(\dfrac{1}{2};\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e $z_4 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i = \left(\dfrac{1}{2};\,\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

cuja representação no gráfico cartesiano é:



Respostas: *a)* $\alpha \in \mathbb{R} \,/\, \alpha < \frac{3}{4}$ e $\alpha \neq \frac{1}{2}$

b) gráfico

5

O produto de duas das raízes do polinômio
$p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3$ é igual a -1. Determinar
a) o valor de m.
b) as raízes de p.

Resolução

Sendo $V = \{a, b, c\}$ *o conjunto-verdade da equação* $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 4x + 3 = 0$ *e* $ab = -1$, *temos:*

a) $\left.\begin{array}{l} a \,.\, b \,.\, c = -\dfrac{3}{2} \\ ab = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow c = \dfrac{3}{2}$

$$ab + ac + bc = 2 \Leftrightarrow ab + c\,(a + b) = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 + \frac{3}{2}(a + b) = 2 \Leftrightarrow a + b = 2$$

$$a + b + c = \frac{m}{2} \Leftrightarrow 2 + \frac{3}{2} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow m = 7$$

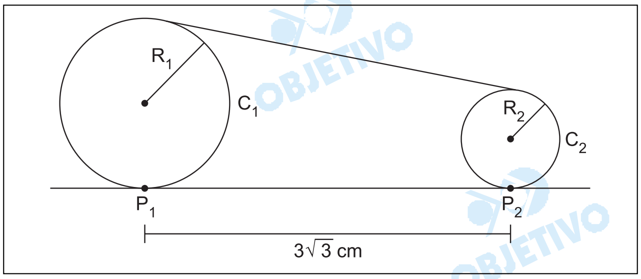
b) $\begin{cases} a + b = 2 \\ a \,.\, b = -1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

então: $V = \{(1 - \sqrt{2}), (1 + \sqrt{2}), 3/2\}$

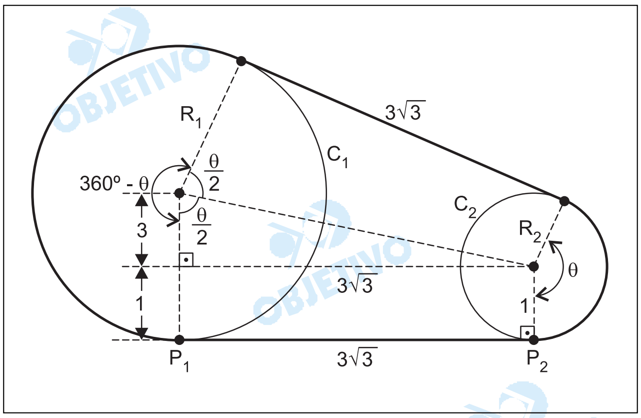
Respostas: *a)* $m = 7$ *b)* $V = \{(1 - \sqrt{2}), (1 + \sqrt{2}), 3/2\}$

6

A figura abaixo representa duas polias circulares C_1 e C_2 de raios $R_1 = 4$ cm e $R_2 = 1$ cm, apoiadas em uma superfície plana em P_1 e P_2, respectivamente. Uma correia envolve as polias, sem folga. Sabendo-se que a distância entre os pontos P_1 e P_2 é $3\sqrt{3}$ cm, determinar o comprimento da correia.



Resolução



O comprimento L, em centímetros, dessa polia é dado por:

$$L = \left(\frac{360° - \theta}{360°}\right) . 2 . \pi . 4 + \frac{\theta}{360°} . 2 . \pi . 1 + 2 . 3\sqrt{3}, \text{ em que:}$$

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \text{ e } 0° < \theta < 180°$$

Assim: $\frac{\theta}{2} = 60° \Leftrightarrow \theta = 120°$ *e*

$$L = \left(\frac{360° - 120°}{360°}\right) .2.\pi.4 + \frac{120°}{360°} .2.\pi.1 + 2.3\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{2}{3} . 2 . \pi . 4 + \frac{1}{3} . 2 . \pi . 1 + 2 . 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow L = 6\pi + 6\sqrt{3} \Leftrightarrow L = 6(\pi + \sqrt{3})$$

Resposta: *6 (π + $\sqrt{3}$) cm*

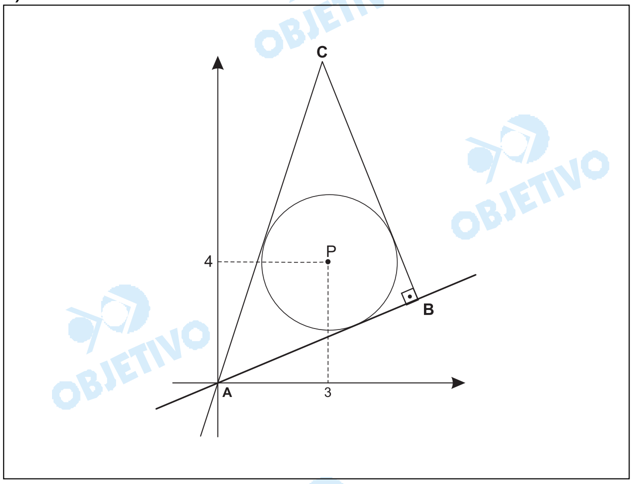
7

Na figura a seguir, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo retângulo, sendo $\hat{B}$ o ângulo reto.

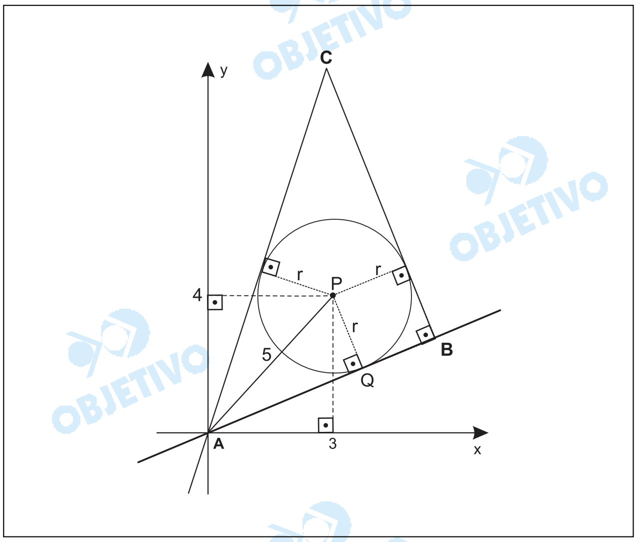
Sabendo-se que A(0,0), B pertence à reta x – 2y = 0 e P = (3,4) é o centro da circunferência inscrita no triângulo ABC, determinar as coordenadas

a) do vértice B.

b) do vértice C.



Resolução



a) 1º) O raio da circunferência de centro P (3; 4), e tangente à reta de equação x – 2y = 0, é a distância:

$$r = \frac{|\,3 - 2\,.\,4\,|}{\sqrt{1+4}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

2º) O ponto B pertence à reta x – 2y = 0, então B(2b; b).

3º) O triângulo APQ é retângulo no ponto Q, com AP = 5 e PQ = $\sqrt{5}$, então:

$$AQ^2 = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 20 \Leftrightarrow AQ = 2\sqrt{5}$$

4º) $AB = AQ + r = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2b)^2 + b^2 = (3\sqrt{5})^2 \Leftrightarrow 5b^2 = 45 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3, \text{ pois } b > 0$$

Portanto, B(6; 3).

b) 1º) A reta $\overleftrightarrow{AC}$, de equação $y = m \,.\, x \Leftrightarrow mx - y = 0$, é tal que:

$$\frac{|\,m \,.\, 3 - 4\,|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow 4m^2 - 24m + 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{11}{2} \text{ ou } m = \frac{1}{2}$$

Como a reta $\overleftrightarrow{AC}$ tem coeficiente angular $m = \dfrac{11}{2}$, pois $\dfrac{1}{2}$ é o coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{AB}$, sua equação é $y = \dfrac{11}{2} \,.\, x$

2º) A reta $\overleftrightarrow{BC}$, que passa pelo ponto B (6; 3) e tem coeficiente angular $m = -2$ (a reta $\overleftrightarrow{BC}$ é perpendicular à reta $\overleftrightarrow{AB}$) tem equação:

$$y - 3 = -2 \,.\, (x - 6) \Leftrightarrow y = -2x + 15$$

3º) O ponto C é a intersecção das retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, então:

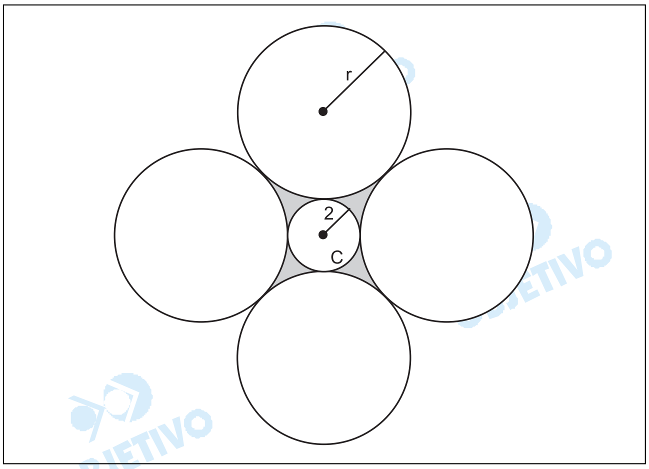
$$\begin{cases} y = \dfrac{11}{2} \,.\, x \\ y = -2x + 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 11 \end{cases}$$

Portanto: C (2; 11).

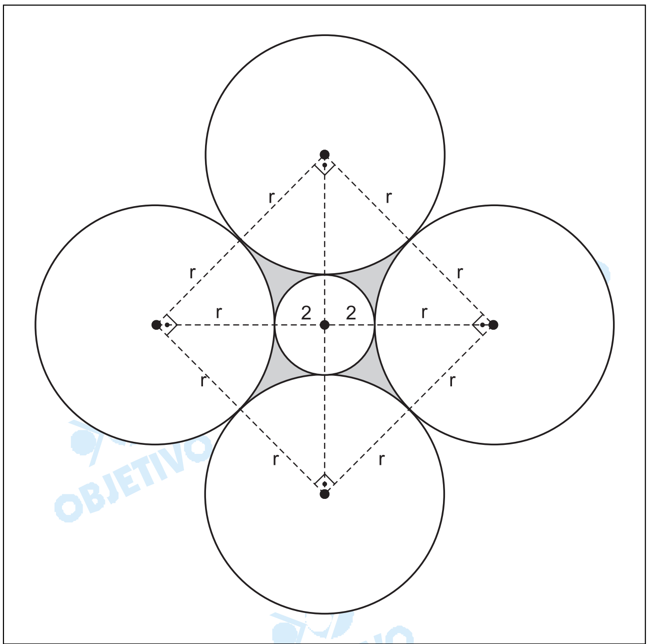
Respostas: a) B(6; 3) b) C(2; 11)

8

Na figura ao lado, cada uma das quatro circunferências externas tem mesmo raio r e cada uma delas é tangente a outras duas e à circunferência interna C.
Se o raio de C é igual a 2, determinar
a) o valor de r.
b) a área da região hachurada.



Resolução



a) 2(r + 2) é a medida da diagonal de um quadrado de lado 2r

Assim:

$2(r + 2) = 2r\sqrt{2} \Leftrightarrow r + 2 = r\sqrt{2} \Leftrightarrow r(\sqrt{2} - 1) = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow r = \dfrac{2}{\sqrt{2} - 1} \Leftrightarrow r = 2(\sqrt{2} + 1)$

b) A área S da região hachurada é igual à área de um quadrado de lado 2r menos a soma das áreas de um círculo de raio r e um círculo de raio 2, ou seja:

$S = (2r)^2 - \pi r^2 - \pi 2^2 \Leftrightarrow S = (4 - \pi).r^2 - 4\pi$

Assim:

$S = (4 - \pi).(2\sqrt{2} + 2)^2 - 4\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S = (4 - \pi).(12 + 8\sqrt{2}) - 4\pi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S = 4[(4 - \pi)(3 + 2\sqrt{2}) - \pi]$

Respostas: *a)* $2(\sqrt{2} + 1)$

b) $4[(4 - \pi)(3 + 2\sqrt{2}) - \pi]$

9

Seja m ≥ 0 um número real e sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 2|x| + 1$ e $g(x) = mx + 2m$.

a) Esboçar, no plano cartesiano representado ao lado, os gráficos de f e de g quando $m = \frac{1}{4}$ e m = 1.

b) Determinar as raízes de f(x)=g(x) quando $m = \frac{1}{2}$.

c) Determinar, em função de m, o número de raízes da equação f(x) = g(x).

Resolução

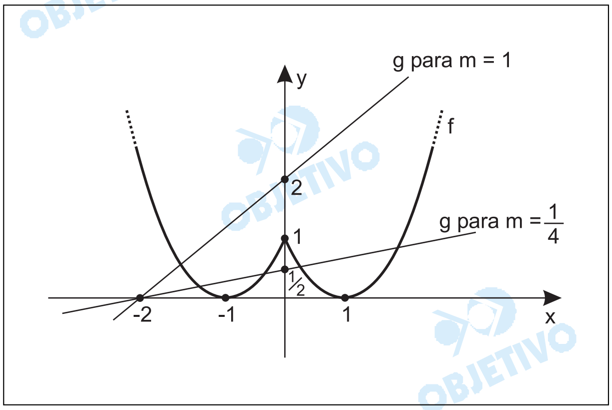
a) *Sendo:*

$f(x) = x^2 - 2|x| + 1,$

$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$ *(quando* $m = \frac{1}{4}$*) e*

$g(x) = x + 2$ *(quando m = 1),*

temos os gráficos abaixo:



b) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2|x| + 1 = \frac{1}{2}x + 1$, *para* $m = \frac{1}{2}$

1º) $x \le 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = -\frac{3}{2}$

2º) $x \ge 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{5}{2}x = 0 \Leftrightarrow x\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x = \frac{5}{2}$

O conjunto-verdade da equação é

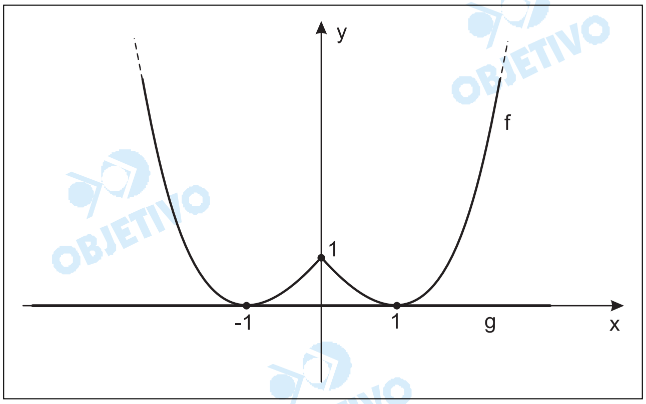
$V\left\{0; -\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right\}$, para $m = \frac{1}{2}$

c) O gráfico de f não depende dos valores assumidos pelo número real $m \geq 0$.

A sentença $g(x) = mx + 2m$ representa uma família de retas que passam pelo ponto $(-2; 0)$.

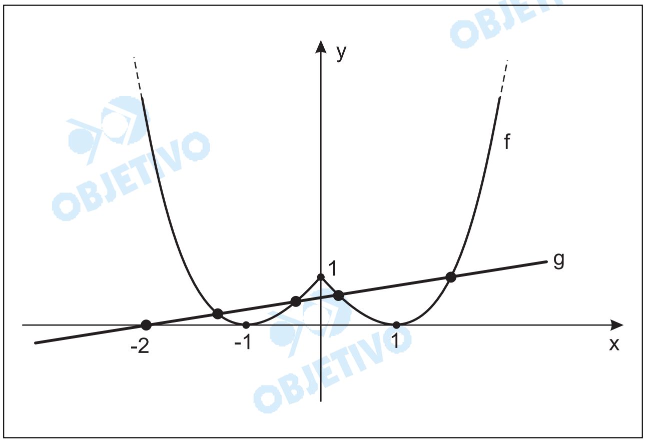
Analisando as posições dos dois gráficos, para $m \geq 0$, temos:

1) $m = 0 \Rightarrow g(x) = 0$



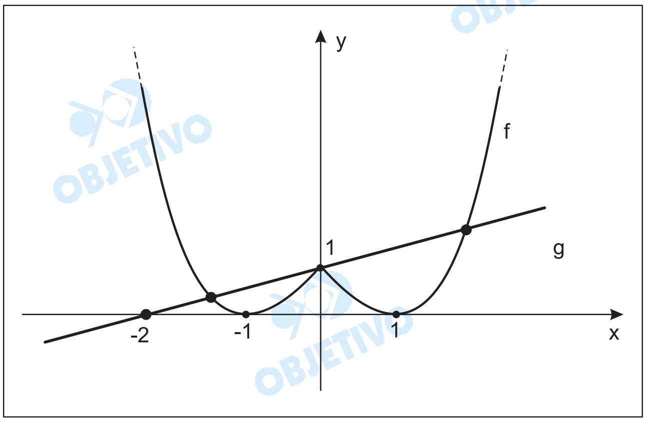
A equação tem duas raízes reais distintas, que são –1 e 1.

2) $0 < m < \frac{1}{2}$



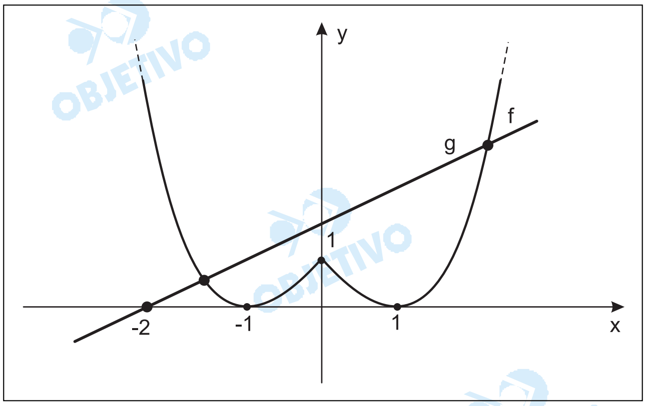
A equação admite quatro raízes reais distintas, sendo duas negativas e duas positivas.

3) $m = \frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x + 1$



A equação admite três raízes reais distintas, que são $-\frac{3}{2}$, *0 e* $\frac{5}{2}$.

4) $m > \frac{1}{2}$



A equação admite duas raízes reais distintas, sendo uma negativa e outra positiva.

Respostas: *a) gráfico*

b) $\left\{-\frac{3}{2}; 0; \frac{5}{2}\right\}$

c) $m = 0 \Rightarrow$ *2 raízes reais*

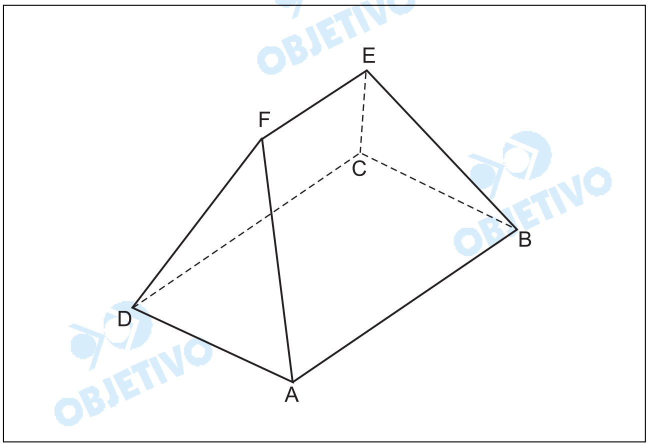
$0 < m < \frac{1}{2} \Rightarrow$ *4 raízes reais*

$m = \frac{1}{2} \Rightarrow$ *3 raízes reais*

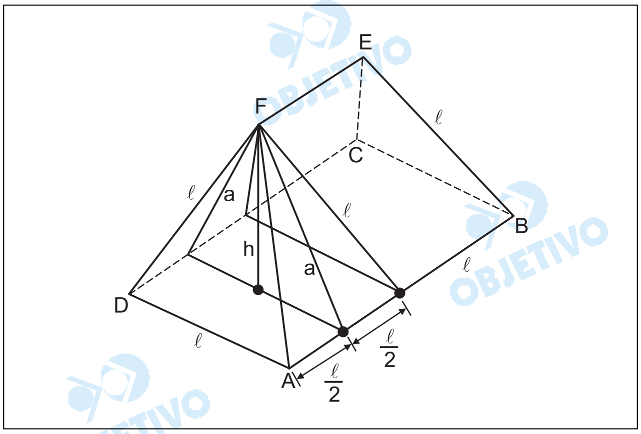
$m > \frac{1}{2} \Rightarrow$ *2 raízes reais*

10

No sólido S representado na figura a seguir, a base ABCD é um retângulo de lados AB = 2ℓ e AD = ℓ as faces ABEF e DCEF são trapézios; as faces ADF e BCE são triângulos equiláteros e o segmento $\overline{EF}$ tem comprimento ℓ. Determinar, em função de ℓ, o volume de S.



Resolução



O sólido S pode ser decomposto em dois novos sólidos: uma pirâmide, cuja base é um quadrado de lado ℓ e cuja altura h é a distância entre a aresta $\overline{EF}$ e o plano do retângulo ABCD, e um prisma oblíquo de aresta lateral ℓ, cuja secção reta é um triângulo isósceles de lados congruentes com medida $a = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e altura h,

onde $h^2 = \left(\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 \Leftrightarrow h = \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}$

Assim o seu volume V será dado por:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \ell^2 \cdot \frac{\ell\sqrt{2}}{2} + \frac{\ell \cdot \dfrac{\ell\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \ell \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = \frac{\ell^3\sqrt{2}}{6} + \frac{\ell^3\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow V = \frac{5\sqrt{2}\,\ell^3}{12}$$

Resposta: $\frac{5\sqrt{2}\,\ell^3}{12}$