

Eletrostática

Prof. Vinícius Fulconi

Aula 13

Sumário

Introdução	5
1. Eletrização	6
1.1. <i>Corpo eletrizado</i>	6
1.2. <i>Princípio da quantização da carga elétrica</i>	7
1.3. <i>Princípios da eletrostática</i>	8
1.3.1. Princípio da atração e repulsão	8
1.3.2. Princípio da conservação das cargas elétricas.....	8
1.4. <i>Isolantes e condutores</i>	9
1.5. <i>Métodos de eletrização</i>	10
1.5.1. Atrito.....	10
1.5.2. Contato	11
1.5.3. Indução	14
1.6. <i>Indução parcial X Indução total</i>	16
1.7. <i>Eletroscópios</i>	17
1.7.1. Pêndulo eletrostático	17
1.7.2. Eletroscópio de folhas	19
2. Lei de Coulomb	22
2.1. <i>Princípio da superposição</i>	23
2.2. <i>Análise gráfica da lei de Coulomb</i>	23
2.3. <i>Relações de proporção na lei de Coulomb</i>	24
3. Distribuições de cargas	28
3.1. <i>Distribuições lineares – densidade linear de cargas</i>	28
3.2. <i>Distribuição superficial – densidade superficial de carga</i>	29
3.3. <i>Distribuição Volumétrica – densidade volumétrica de carga</i>	30
4. O Campo elétrico	30
4.1. <i>Direção e sentido do campo elétrico</i>	32
4.2. <i>Linhas de força</i>	32
4.3. <i>Campo elétrico de uma carga puntiforme</i>	35
4.3.1. Campo elétrico de uma carga puntiforme Q positiva	35
4.3.2. Campo elétrico de uma carga puntiforme Q negativa	36
4.3.3. Intensidade do campo elétrico um ponto P devido a uma carga puntiforme.....	36
4.4. <i>Campo elétrico devido as diversas cargas puntiformes</i>	37
4.5. <i>Informações das linhas de forças</i>	39



5. Campo elétrico do condutor isolado em equilíbrio eletrostático	41
5.1. <i>Distribuição das cargas elétricas em um condutor carregado e isolado em equilíbrio eletrostático</i>	<i>42</i>
5.2. <i>Propriedades do condutor isolado e em equilíbrio eletrostático</i>	<i>43</i>
5.3. <i>Blindagem eletrostática</i>	<i>44</i>
5.4. <i>O poder das pontas</i>	<i>46</i>
6. Campo elétrico uniforme	46
7. Uma breve revisão da mecânica.....	50
7.1. <i>Trabalho de uma força</i>	<i>50</i>
7.2. <i>Trabalho da força peso</i>	<i>51</i>
8. Potencial elétrico	53
8.1. <i>O Trabalho no campo elétrico uniforme</i>	<i>53</i>
8.2. <i>A energia potencial no campo eletrostático</i>	<i>55</i>
8.3. <i>O Potencial elétrico</i>	<i>56</i>
8.4. <i>Determinação do trabalho em função da diferença de potencial (DDP).....</i>	<i>56</i>
8.5. <i>O Potencial elétrico de carga elétrica puntiforme</i>	<i>57</i>
8.6. <i>Potencial elétrico gerado por várias cargas puntiformes</i>	<i>59</i>
8.7. <i>As propriedades do potencial elétrico.....</i>	<i>64</i>
8.8. <i>Superfícies equipotenciais</i>	<i>65</i>
8.8.1. <i>As propriedades das superfícies equipotenciais.....</i>	<i>67</i>
8.9. <i>Espontaneidade e trabalho</i>	<i>73</i>
9. Energia potencial eletrostática.....	75
10. Potencial elétrico de condutor carregado e em equilíbrio eletrostático	80
10.1. <i>Potencial de um condutor esférico.....</i>	<i>81</i>
10.2. <i>O potencial da Terra.....</i>	<i>83</i>
10.3. <i>Aplicação do uso de Potenciais para Condutores em Equilíbrio Eletrostático.....</i>	<i>84</i>
11. Capacitância (C)	89
11.1. <i>Capacitância do condutor esférico.....</i>	<i>90</i>
11.2. <i>Eletrização por contato</i>	<i>92</i>
12. Capacitores	94
12.1. <i>Capacitores de placas paralelas.....</i>	<i>94</i>
12.2. <i>O Armazenamento da energia elétrica em um capacitor.....</i>	<i>95</i>
12.3. <i>Associação de capacitores</i>	<i>96</i>



12.3.1. Capacitores associados em série	96
12.3.2. Capacitores associados em paralelo.....	99
13. Dielétricos.....	106
13.1. <i>Estrutura molecular e polarização de um dielétrico</i>	106
13.2. <i>Rigidez dielétrica</i>	109
14. Lista de questões	110
15. Gabarito sem comentários	135
16. Lista de questões comentadas	136
17. Considerações finais da aula	187
18. Referências bibliográficas	188



Introdução

Querido aluno(a), seja bem-vindo(a) à nossa primeira aula!

Sou o professor **Vinícius Fulconi**, tenho vinte e quatro anos e estou cursando Engenharia Aeroespacial no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). Irei contar um pouco sobre minha trajetória pessoal, passando pelo mundo dos vestibulares com minhas principais aprovações, até fazer parte da equipe de física do Estratégia Militares.

No ensino médio, eu me comportava como um aluno mediano. No final do segundo ano do ensino médio, um professor me desafiou com a seguinte declaração: *Você **nunca vai passar no ITA!*** Essa fala do professor poderia ter sido internalizada como algo desestimulador e, assim como muitos, eu poderia ter me apegado apenas ao que negritei anteriormente. Muitos desistiram! Entretanto, eu preferi negritar e gravar “**Você vai passar no ITA!**”

Querido aluno(a), a primeira lição que desejo te mostrar não é nenhum conteúdo de física. Quero que transforme seu sonho em vontade de vencer. Transforme seus medos e incapacidades em desafios a serem vencidos. Haverá muitos que duvidarão de você. O mais importante é você acreditar! **Nós do Estratégia Militares acreditamos no seu potencial** e ajudaremos você a realizar seu sonho!



Após alguns anos estudando para o ITA, usando muitos livros estrangeiros, estudando sem planejamento e frequentando diversos cursinhos do segmento, realizei meu sonho e entrei em uma das melhores faculdades de engenharia do mundo. 😊 Além de passar no ITA, ao longo da minha preparação, fui aprovado no IME, UNICAMP, Medicina (pelo ENEM) e fui medalhista na Olimpíada Brasileira de Física.

Minha resiliência e grande experiência em física, que obtive estudando por diversas plataformas e livros, fez com que eu me tornasse professor de física do Estratégia Militares. Tenho muito orgulho em fazer parte da família Estratégia e hoje, se você está lendo esse texto, também já é parte dela. Como professor, irei te guiar por toda física, alertando sobre os erros que cometi na minha preparação, mostrando os pontos em que obtive êxito e, assim, conseguirei identificar quais são seus pontos fortes e fracos, maximizando seu rendimento e te guiando até à faculdade dos seus sonhos.

Você deve estar se perguntando: **O que é necessário para começar esse curso?**



ALERTA!

Esse curso exige do candidato apenas **dedicação, perseverança e vontade de vencer.**

1. Eletrização

Na Eletrostática estudaremos os fenômenos associados as cargas elétricas em repouso em relação a um referencial inercial.

Inicialmente, precisamos relembrar alguns princípios fundamentais relacionados à carga elétrica. Na química, você estudará a história e como foi o processo para conhecer a natureza elétrica da matéria. Na Física partiremos de alguns dados já conhecidos.

Dizemos que carga elétrica é uma propriedade física fundamental que determina interações eletromagnéticas. Essa propriedade está associada a partículas elementares como: elétrons, prótons, mésons, antiprótons, pósitrons etc. Todas elas possuem a mesma carga e , por isso, chamamos esse valor de carga elétrica elementar e .

Em 1897, Joseph John Thomson foi capaz de determinar a relação entre a carga e a massa do elétron:

$$\frac{e}{m} = -1,76 \times 10^{11} \text{ C/kg}$$

Em que e é a carga elétrica elementar. No SI, a unidade de medida de cargas elétricas é o Coulomb, representada pela letra C, em homenagem ao físico francês Charles Augustin de Coulomb.

Em 1910, estudando o comportamento de gotas de óleo em um campo elétrico, Robert Andrews Millikan determinou a carga do elétron ($-e$) e sua massa (m_e):

$$-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad \text{e} \quad m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

	Carga elétrica		Símbolo	Massas
Próton	$+1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$+e$	p^+	$m_p = 1,672 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Elétron	$-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$-e$	e^-	$m_e \approx \frac{m_p}{1836} = 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Antipróton	$-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$-e$	p^-	m_p
Pósitron	$+1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$	$+e$	e^+	m_e
Nêutron	0			$m_n = 1,674 \times 10^{-27} \text{ kg}$

A massa do próton (m_p) é cerca de 1836 vezes a massa do elétron (m_e).

1.1. Corpo eletrizado

Podemos dizer que existem três formas de classificar um corpo eletrizado:

- **Corpo eletricamente neutro ($Q = 0$):** é aquele que possui o mesmo número de prótons e de elétrons. Normalmente, um corpo qualquer (condutor ou isolante) apresenta número de elétrons igual ao número de prótons.



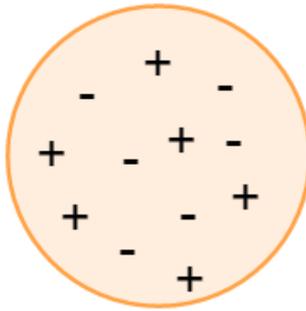


Figura 1: Corpo eletricamente neutro ($n_p = n_e$).

- **Corpo positivamente carregado ($Q > 0$):** é aquele que possui mais prótons do que elétrons. De outra forma, o corpo positivamente carregado apresenta falta de elétrons.

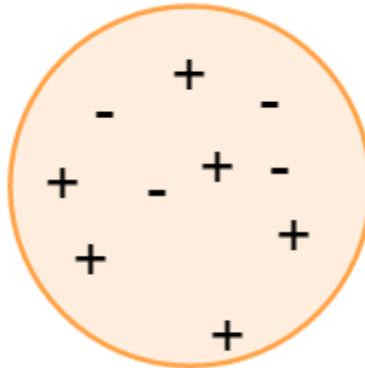


Figura 2: Corpo positivamente carregado ($n_p > n_e$).

- **Corpo negativamente carregado ($Q < 0$):** é aquele que possui mais elétrons do que prótons. De outra forma, o corpo negativamente carregado apresenta excesso de elétrons.

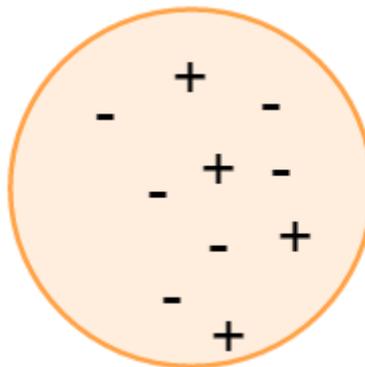


Figura 3: Corpo negativamente carregado ($n_p < n_e$).

1.2. Princípio da quantização da carga elétrica

No século XVIII, a carga elétrica era considerada como um **fluido contínuo**. No início do século XX, Millikan descobriu que o fluido elétrico não era contínuo, mas que a carga elétrica era sempre um múltiplo inteiro da carga elementar:

$$Q = \pm n \cdot e \quad n \in \mathbb{N}$$

Usamos o sinal (+) quando o corpo apresenta falta de elétrons e o sinal (-) quando o corpo apresenta excesso de elétrons.



Note que a carga elétrica não pode assumir qualquer valor, apenas valores múltiplos de e , isto é, em *pacotes discretos*. Em termos modernos, dizemos que ela é *quantizada*.

Observação: atualmente, existem teorias modernas que propõem a existências de partículas fracionárias, chamados *quarks*. Eles possuem cargas iguais a $\pm \frac{e}{3}$ e $\pm \frac{2e}{3}$. Existem indícios experimentais sobre a presença dessas partículas, mas elas nunca foram encontradas livremente. Não precisa estender seus estudos sobre essas partículas para sua jornada rumo a aprovação.

1.3. Princípios da eletrostática

Denomina-se sistema isolado em eletrostática todo sistema que não troca cargas elétricas com o meio exterior, ou seja, não cede nem recebe cargas elétricas com o meio exterior, ou ainda, a soma das cargas dentro desse sistema será sempre constante, não havendo perdas.

1.3.1. Princípio da atração e repulsão

Verifica-se experimentalmente que:

Cargas elétricas de mesmo sinal se repelem e de sinais contrários se atraem.



Figura 4: Representação do Princípio da Atração e Repulsão em cargas elétricas.



1.3.2. Princípio da conservação das cargas elétricas

Em um sistema eletrostaticamente fechado, a soma algébrica das cargas elétricas é sempre constante.



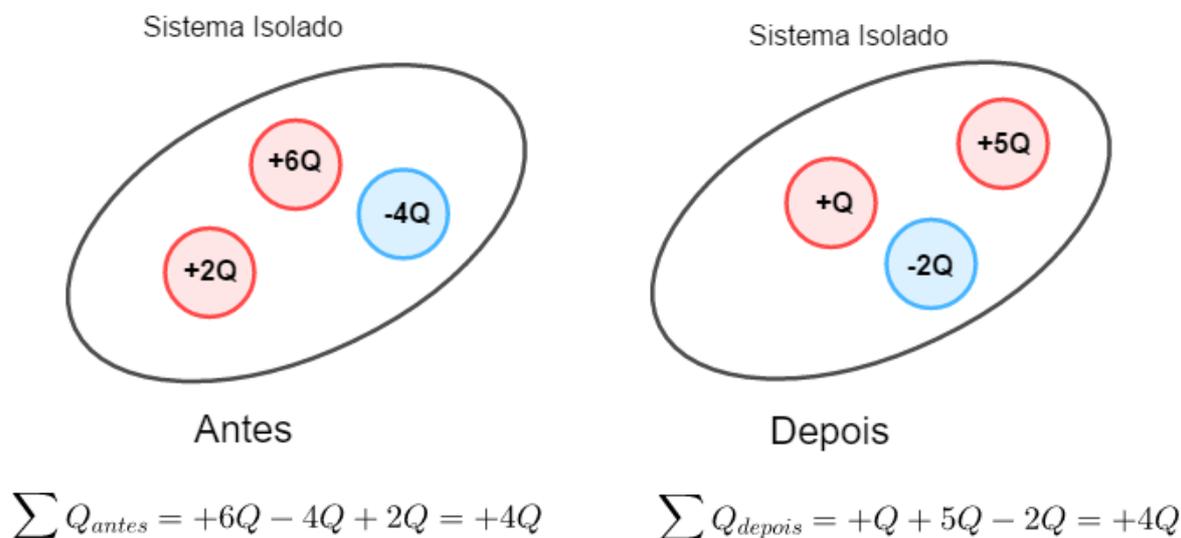


Figura 5: Aplicação da conservação de cargas para sistema isolados eletricamente.

Note que em um sistema isolado, temos sempre que:

$$\sum Q_{antes} = \sum Q_{depois}$$

ESCLARECENDO!



1.4. Isolantes e condutores

Dizemos que **isolantes** são materiais que **não apresentam portadores livres** de cargas elétricas. Exemplos: borrachas, vidros, água pura, $NaCl_{(s)}$, etc.

Por outro lado, condutores são materiais que apresentam portadores livres de cargas elétricas.

Podemos classificar os condutores em três categorias:

- **1ª espécie:** apresentam elétrons livres. Exemplo: metais. Os metais possuem elétrons “livres” na sua estrutura, ligados ao núcleo do átomo de forma muito fraca. Dessa maneira, os metais têm tendência a doar elétrons.
- **2ª espécie:** apresentam íons livres. Exemplo: $NaCl_{(aq)}$. Também conhecidos como condutores eletrolíticos são encontrados nas soluções de ácidos, bases ou sais contidos em água. Cátions e ânions são portadores de carga elétrica que percorrem sentidos opostos.
- **3ª espécie:** elétrons e íons livres. Exemplo: plasma. Possibilitam a condutividade pelo movimento de cátions e ânions, ao contrário dos condutores eletrolíticos tais moléculas não são energizadas sozinhas. Elas precisam se chocar para os elétrons e moléculas trocarem cargas e se tornarem energizadas. Como exemplo temos os raios e relâmpagos.



Dizemos que um condutor carregado está em **equilíbrio eletrostático** quando não há movimento ordenado de cargas elétricas.

Nos condutores eletrizados em equilíbrio eletrostático, as cargas elétricas em excesso se distribuem pela superfície. Esse fato justifica pelo Princípio da Repulsão entre Cargas Elétricas de mesmo sinal. Basicamente, ele garante que as cargas tendem a ficar o mais afastadas possível umas das outras.

De outra forma, as cargas se distribuem em sua superfície, concentrando nas pontas. Tal fenômeno é conhecido como **efeito das pontas**. Ele será mais bem compreendido quando apresentarmos o conceito de campo elétrico e suas propriedades.

Por outro lado, se um corpo não for condutor, ele poderá apresentar cargas elétricas em excesso localizadas em certas regiões, dependendo da forma como for eletrizada.

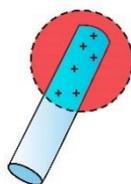


Figura 6: Bastão de material isolante eletrizado.

1.5. Métodos de eletrização

Para alterar o estado de eletrização de um corpo, podemos usar alguns processos comuns: atrito, contato e indução.

1.5.1. Atrito

Utiliza-se este processo preferencialmente em isolantes. Basicamente, quando se atrita dois corpos constituídos de materiais distintos, um cede elétrons para o outro, tornando os dois eletrizados. Quem recebeu elétrons fica eletrizado negativamente e quem cedeu elétrons fica eletrizado positivamente.

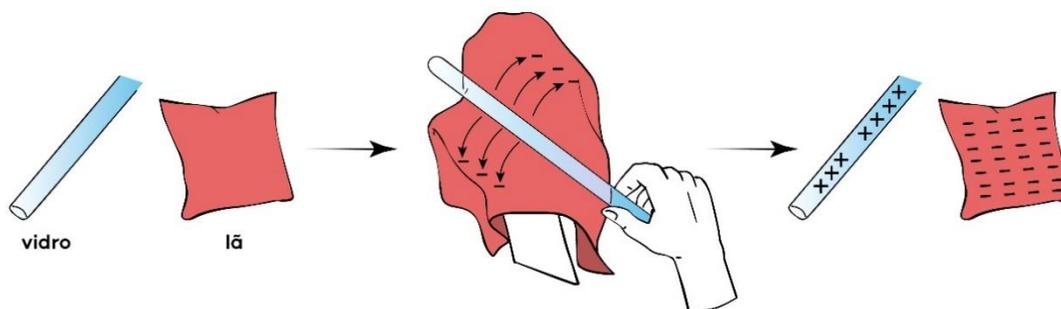


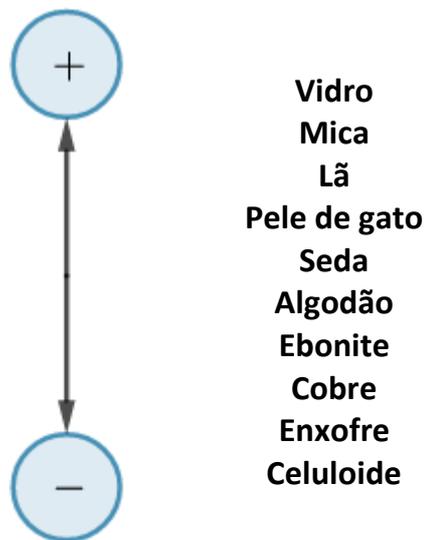
Figura 7: Processo de eletrização por atrito entre um bastão de vidro e um tecido de lã.

Na eletrização por atrito de isolantes, a carga fica confinada no local de atrito. O sinal da carga elétrica adquirida por um material depende de sua posição na série triboelétrica.

Regra

Substância





Por exemplo, se eletrizarmos por atrito um bastão de vidro e um pano de seda, o vidro eletriza-se positivamente e a seda eletriza-se negativamente. Se eletrizarmos algodão e celuloide, o algodão eletriza-se positivamente e a celuloide eletriza-se negativamente.

Note que pelo Princípio da Conservação das Cargas, quando um corpo é eletrizado negativamente com carga elétrica $-Q$, o outro deverá adquirir carga elétrica $+Q$.

1.5.2. Contato

Este método funciona muito bem entre materiais condutores, onde as cargas elétricas se distribuem na superfície.

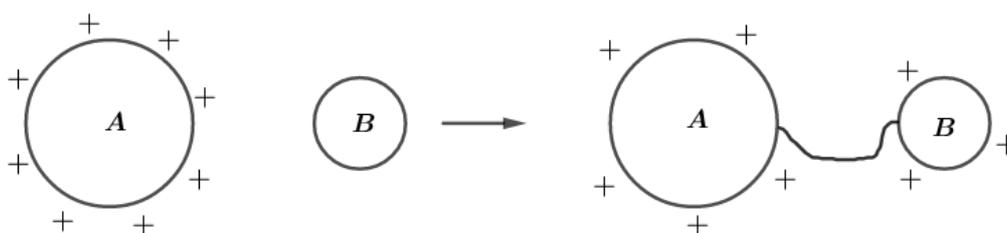


Figura 8: Eletrização por contato utilizando um fio.

Note que o Princípio da Conservação das Cargas foi respeitado. Se um dos corpos ou ambos forem constituídos de materiais não condutores, a troca de cargas se limitaria à região em torno do ponto de contato.

Observações:

- 1) Quando colocamos 2 condutores em contato, eles podem ser considerados como um único condutor.

- 2) Após a eletrização por contato, no equilíbrio eletrostático, todos os condutores têm cargas de mesmo sinal.
- 3) No caso de eletrização por contato de condutores esféricos, as cargas se distribuem proporcionalmente aos raios.
- 4) Para o caso de esferas metálicas de mesmos raios, temos que:

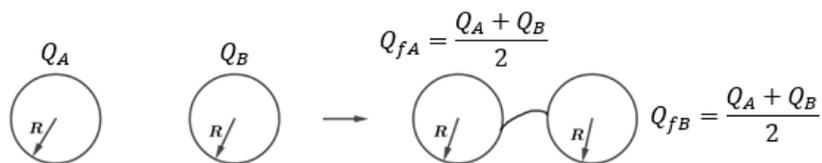


Figura 9: Eletrização por contato utilizando um fio, para duas esferas de mesmo raio.

Para o caso de n esferas, temos que:

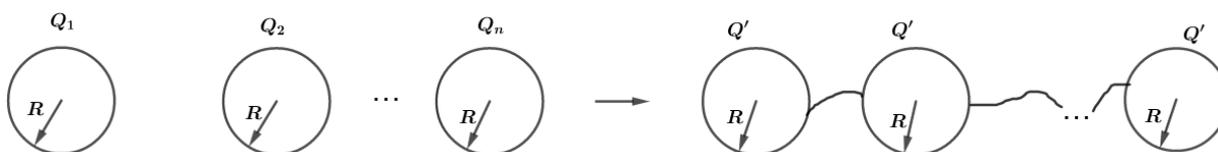


Figura 10: Eletrização por contato utilizando um fio, para n esferas de mesmo raio.

$$Q' = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{n}$$

- 5) **Terra do ponto de vista da eletricidade:** Terra pode ser vista como um condutor neutro e de raio infinito.

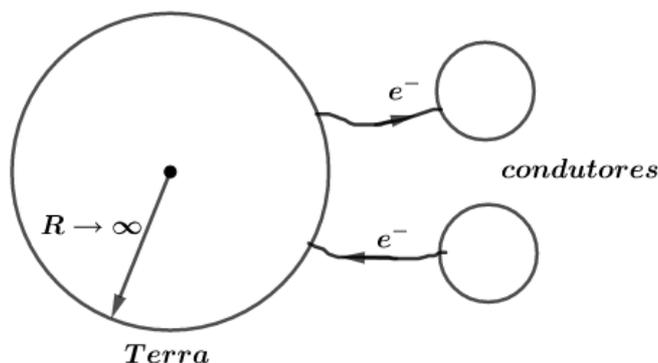


Figura 11: Corpo eletrizado ao entrar em contato com a Terra.

Todo condutor não induzido, ao ser aterrado (colocado em contato com a Terra), torna-se neutro. Símbolo do aterramento:



Figura 12: Símbolo para aterramento.

ESCLARECENDO!



1)



Quatro esferas condutoras iguais têm, respectivamente, cargas elétricas $\frac{Q}{2}$, Q , $2Q$ e X (desconhecida). Pondo-se todas em contato e depois separando-as, cada uma ficou com uma carga igual a $\frac{7Q}{8}$. Supondo que as esferas tenham trocado cargas elétricas somente entre si, a carga elétrica X , da quarta esfera, era igual a:

- a) zero
- b) $\frac{Q}{2}$
- c) Q
- d) $\frac{3Q}{2}$
- e) $2Q$

Comentários:

Pelo Princípio da Conservação das Cargas nesse sistema eletrostaticamente isolado, temos que:

$$\sum Q_{antes} = \sum Q_{depois}$$
$$\frac{Q}{2} + Q + 2Q + X = 4 \cdot \frac{7Q}{8}$$
$$\boxed{X = 0}$$

Gabarito: A

2)

Têm-se 3 esferas condutoras idênticas A, B e C. As esferas A (positiva) e B (negativa) estão eletrizadas com cargas de mesmo módulo Q , e a esfera C está inicialmente neutra. São realizadas as seguintes operações:

- 1) toca-se C em B, com A mantida a distância, e em seguida separa-se C de B;
- 2) toca-se C em A, com B mantida a distância, e em seguida separa-se C de A;
- 3) toca-se A em B, com C mantida a distância, e em seguida separa-se A de B,

Podemos afirmar que a carga final da esfera A vale:

- a) zero
- b) $+\frac{Q}{2}$
- c) $-\frac{Q}{4}$
- d) $+\frac{Q}{6}$
- e) $-\frac{Q}{8}$

Comentários:

Vamos aplicar o Princípio da Conservação das Cargas nesse sistema eletrostaticamente isolado para cada etapa do processo:

Etapa 1:

$$\sum Q_{antes} = \sum Q_{depois}$$
$$0 + (-Q) = Q_{B1} + Q_{C1}$$

Mas como as esferas são idênticas, temos que ao final da primeira eletrização por contato a relação $Q_{B1} = Q_{C1}$. Portanto:



$$Q_{B1} = Q_{C1} = -\frac{Q}{2}$$

Etapa 2:

$$\begin{aligned} \sum Q_{antes} &= \sum Q_{depois} \\ Q_A + Q_{C1} &= Q_{A2} + Q_{C2} \end{aligned}$$

Mas como as esferas são idênticas, temos que ao final da primeira eletrização por contato a relação $Q_{A2} = Q_{C2}$. Portanto:

$$\begin{aligned} +Q + \left(-\frac{Q}{2}\right) &= Q_{A2} + Q_{A2} \\ Q_{A2} = Q_{C2} &= +\frac{Q}{4} \end{aligned}$$

Etapa 3:

$$\begin{aligned} \sum Q_{antes} &= \sum Q_{depois} \\ Q_{A2} + Q_{B1} &= Q_{A3} + Q_{B3} \end{aligned}$$

Mas como as esferas são idênticas, temos que ao final da primeira eletrização por contato a relação $Q_{A3} = Q_{B3}$. Portanto:

$$\begin{aligned} +\frac{Q}{4} - \frac{Q}{2} &= 2Q_{A3} \\ Q_{A3} = Q_{B3} &= -\frac{Q}{8} \end{aligned}$$

Cargas finais:

$$\boxed{Q_{Af} = Q_{Bf} = -\frac{Q}{8}} \text{ e } \boxed{Q_{Cf} = +\frac{Q}{4}}$$

Gabarito: e

1.5.3. Indução

Este processo ocorre preferencialmente em condutores. Trata-se da “separação” de cargas elétricas de um condutor sem que haja contato com o outro corpo eletrizado.

Vamos tomar dois corpos A e B, onde A é eletrizado e pode ser constituído de material isolante ou condutor; o corpo B está neutro e tem que ser constituído de material condutor. Chamamos A, que está eletrizado, de indutor e B de induzido. Representação:

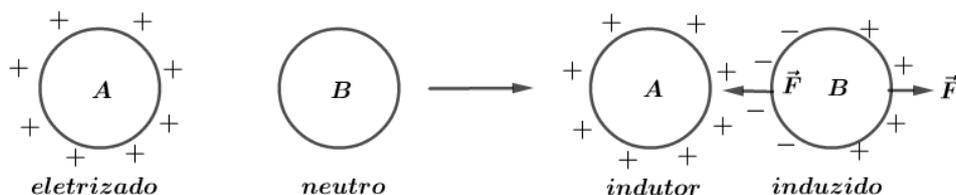


Figura 13: Representação da eletrização por indução.

Ao aproximar os dois corpos, os elétrons de B serão atraídos para a região mais próxima de A, criando uma carência de elétrons na região mais afastada de B, como mostra a figura 5. Assim, dizemos que o corpo B está induzido pelo indutor A.

Além disso, observamos que a força de atração entre as faces próximas é maior em módulo que a força de repulsão entre o corpo A e a parte mais afastada de B, isto é, $|\vec{F}| > |\vec{F}_1|$.

Note que o corpo B não recebeu ou perdeu elétrons. Ele está eletricamente neutro (a soma de suas cargas é zero). Então, se afastarmos o indutor, os elétrons do induzido se rearranjam para o estado inicial. Dizemos que houve apenas separação de cargas no induzido.

Se desejamos efetuar a eletrização de um induzido, devemos realizar os seguintes passos:

Passo 1)

Aproximamos do induzido um corpo carregado (o indutor), forçando uma separação de cargas no induzido:

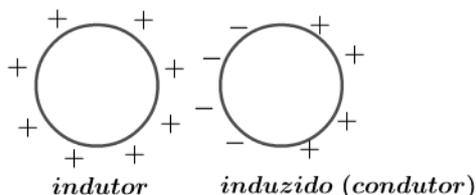


Figura 14: Separação das cargas no induzido.

Passo 2)

Na presença do indutor, aterra-se o induzido.

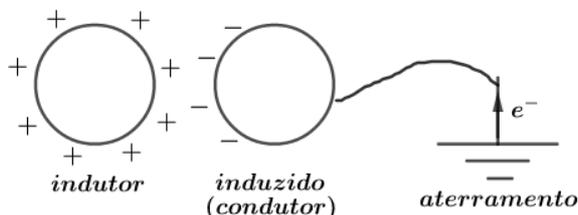


Figura 15: Aterramento do induzido para atrair elétrons da terra.

Observação: o aterramento pode ser feito em qualquer ponto do induzido.

Passo 3)

Ainda na presença do indutor, desliga-se o contato do induzido com a terra.

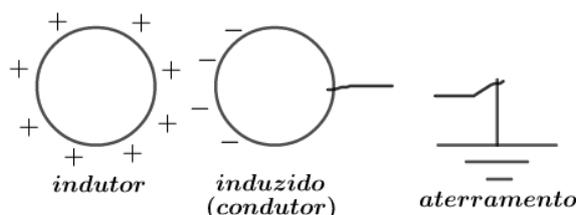


Figura 16: Retira-se a ligação do induzido à terra.

Observação: na eletrização por indução, quando se atingi o equilíbrio eletrostático, o indutor e o induzido têm sinais opostos.

Passo 4:

Afasta-se o indutor e teremos o induzido eletrizado.

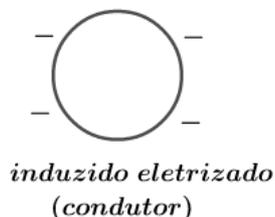


Figura 17: Induzido devidamente eletrizado.

Observações:

- 1) Independente de qual seja a carga indutora, concentram-se cargas de sinais opostos no induzido na região próxima ao indutor.
- 2) É necessário utilizar o fio terra no induzido para obter cargas elétricas de sinal oposto ao das do indutor.
- 3) Quando se desliga o fio terra, o indutor ainda deve estar presente. Do contrário, apenas estaríamos movimentando cargas no induzido, como visto anteriormente.
- 4) Logo acima dizemos que o corpo induzido deve ser feito de material condutor para que ocorra a separação de cargas. Entretanto, em alguns casos quando o induzido for constituído de material isolante poderá haver uma polarização das moléculas, como por exemplo no isopor. Dessa forma, existe uma polarização das moléculas do induzido (isopor), resultando no aparecimento de cargas superficiais excedentes negativas à esquerda e positivas à direita:

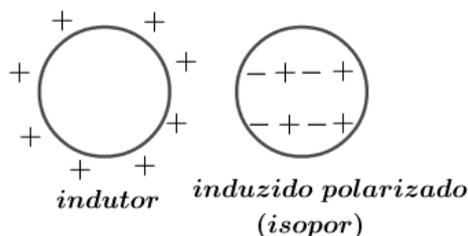


Figura 18: Polarização das moléculas no isopor na presença de um indutor eletrizado positivamente.

Trabalharemos a polarização de materiais isolantes (dielétricos) futuramente quando estudaremos os capacitores.



1.6. Indução parcial X Indução total

A **indução parcial** é aquela na qual o módulo da carga induzida é menor do que o módulo da carga do indutor. Ela ocorre quando o induzido não envolve completamente o indutor.

Exemplo:



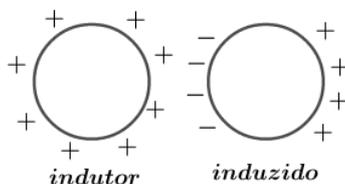


Figura 19: Indução parcial

A **indução total** é aquela na qual o módulo da carga induzida é igual ao módulo da carga do indutor. Ela ocorre quando o induzido envolve completamente o indutor.

Imagine uma casca esférica condutora e neutra, envolvendo completamente um corpo carregado (indutor carregado positivamente no centro da casca esférica). O indutor no interior da casca irá induzir uma carga negativa no interior da casca esférica condutora. Como ela está inicialmente neutra, com a migração dos elétrons para a parte interna da casca (superfície de raio menor), a superfície de raio maior terá densidade de carga positiva, como na figura abaixo.

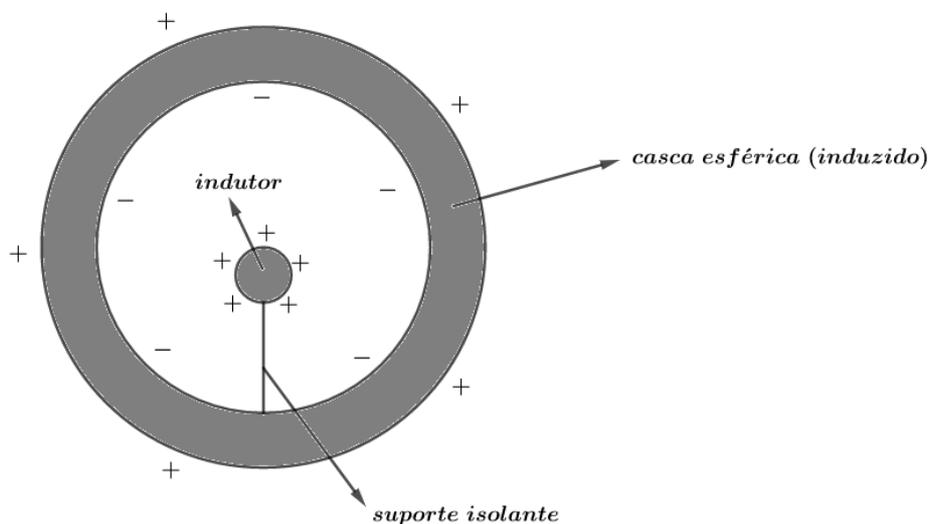


Figura 20: Indução total.

Futuramente, retornaremos a estudar a indução total após a aula de Potencial Elétrico, pois teremos mais uma ferramenta mais poderosa para abordar este método de eletrização.



1.7. Eletroscópios

Trata-se de um instrumento utilizado para se verificar o estado de eletrização de um determinado corpo (corpo de prova). A base de seu funcionamento é a indução eletrostática.

Existem dois tipos comuns de eletroscópios: de folhas e o pêndulo elétrico.

1.7.1. Pêndulo eletrostático

O pêndulo é constituído de uma esfera condutora extremamente leve (geralmente uma casca de alumínio) e por um fio isolante, também extremamente leve (geralmente fio de náilon).



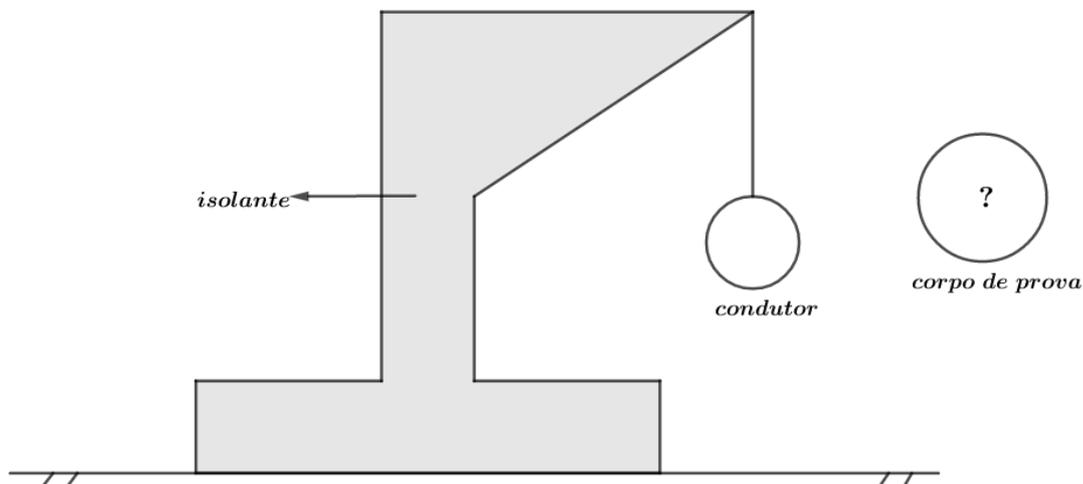


Figura 21: Construção de um pêndulo eletrostático.

Seu funcionamento é bem simples: quando se aproxima um corpo eletrizado, a esfera do pêndulo é atraída eletrostaticamente.

Isso acontece devido a indução eletrostática. Vamos aproximar um corpo positivamente carregado. Por indução, os elétrons da esfera são atraídos para a região mais próxima do corpo de prova, tornando a região mais distante positiva.

Assim, na esfera aparecem duas forças: uma força de atração na região mais próxima da esfera com o corpo de prova e outra força de repulsão entre a região positiva da esfera e o corpo de prova.

Como veremos no próximo capítulo, a força elétrica é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre as cargas puntiformes. Então, como a distância entre a região negativamente carregada na esfera e o corpo de provas é menor que a outra região da esfera carregada positivamente, o módulo da força de atração será maior que o módulo da força de repulsão na esfera.

Dessa forma, a esfera será atraída pelo corpo de prova (se estiver eletrizado), como na figura logo abaixo:

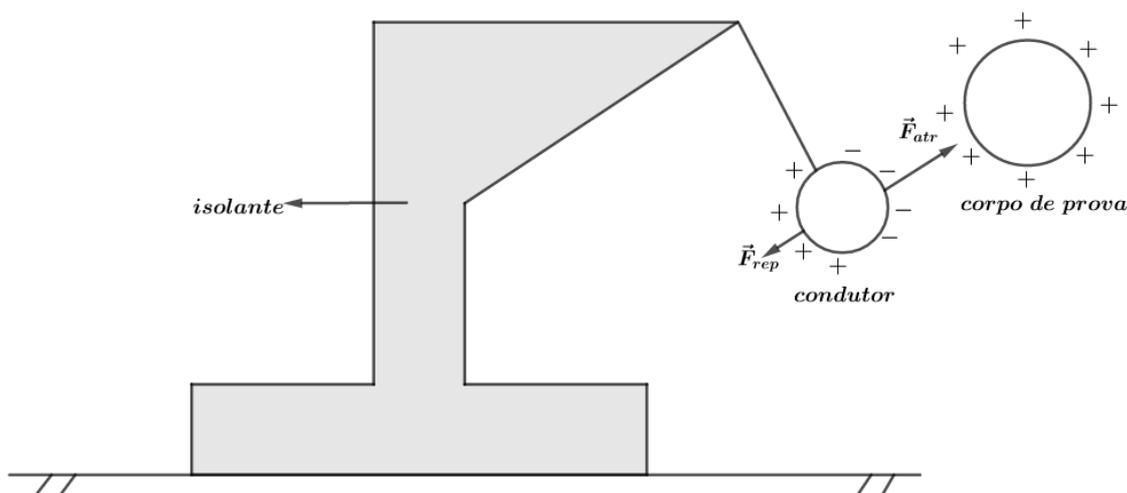


Figura 22: Funcionamento de um pêndulo eletrostático.

Note que $|\vec{F}_{atr}| > |\vec{F}_{rep}|$.

Quando o fio de suspensão for condutor de eletricidade, ao ligá-lo a terra, desaparecem as cargas positivas e a atração resultante entre os corpos se tornam mais forte.

Para a utilização do pêndulo eletrostático, devemos seguir os seguintes passos:

Passo 1)

Sem a presença de qualquer corpo carregado, aterr-se o eletroscópio para garantir a neutralidade da esfera.

Passo 2)

Aproxima-se o corpo de prova do eletroscópio e verifica-se o comportamento:

- Nada ocorre: corpo de prova eletricamente neutro.
- Esfera atraída: corpo de prova eletricamente carregado.

Passo 3)

Caso o corpo de prova esteja carregado, carrega-se o eletroscópio com uma carga conhecida e verifica:

- Atraem-se: sinais opostos.
- Repelem-se: mesmo sinal.

1.7.2. Eletroscópio de folhas

Eletroscópio de folhas, ou de lâminas, possui um corpo metálico preso a uma rolha de cortiça, acondicionado em um recipiente de vidro. Suas lâminas devem ser bastante finas, flexíveis e leves. Normalmente, utiliza-se folhas de vidro ou mesmo o papel-alumínio.

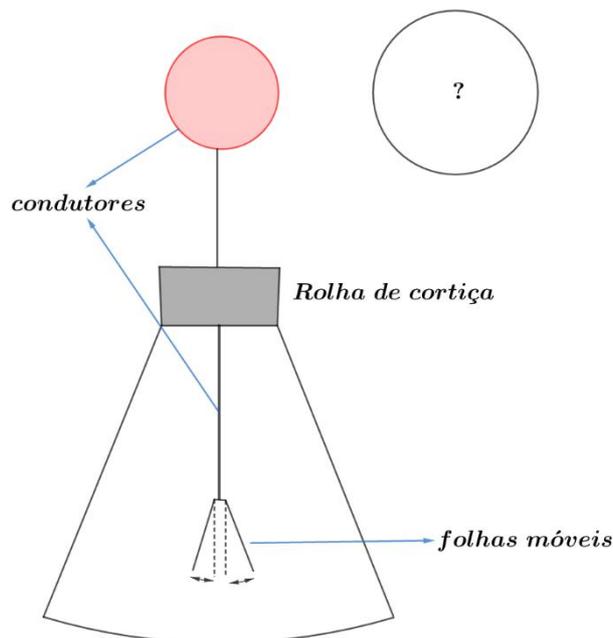


Figura 23: Eletroscópio de folhas.

Para a utilização do eletroscópio de folhas, devemos seguir os seguintes passos:

Passo 1)

Aterr-se, na ausência de qualquer corpo carregado, o eletroscópio para garantir sua **neutralidade** (folhas fechadas).

Passo 2)

Aproxima-se o corpo de prova do eletroscópio e observa-se o comportamento das folhas:

- a) Nada ocorre: corpo de prova neutro.
- b) Folhas se abrem: corpo de prova carregado.

Passo 3)

Caso o corpo de prova esteja carregado, carrega-se o eletroscópio com uma carga de sinal conhecido e repete-se o passo 2:

- a) Folhas **tendem inicialmente** a se fecharem: sinais opostos.
- b) Folhas **tendem a se abrirem**: mesmo sinal.

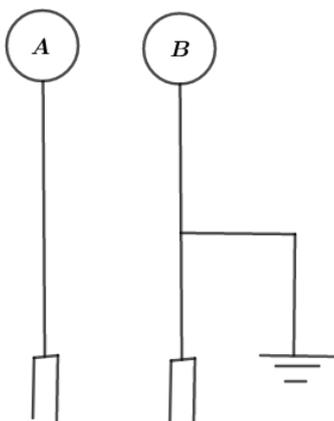
Note que inicialmente, o eletroscópio apenas diz o estado de eletrização do corpo de provas: carregado ou descarregado. Para conhecer a natureza da carga do corpo de provas é necessário realizar o processo novamente, com o eletroscópio carregado com uma carga conhecida.

ESCLARECENDO!



3)

Dois eletroscópios de folhas A e B estão inicialmente neutros, sendo que B está ligado à terra, como mostra a figura:



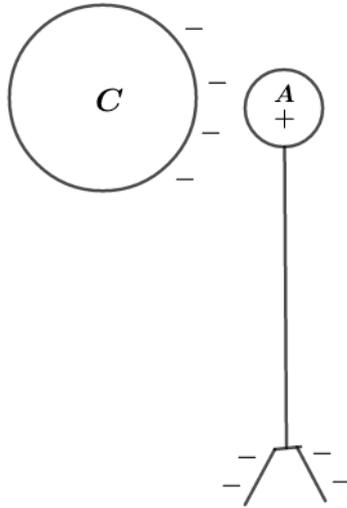
Um bastão de borracha C, carregado de cargas elétricas negativas, se aproxima de A. Um bastão de borracha D, carregado de cargas elétricas positivas, se aproxima de B. Nenhum dos bastões toca nos eletroscópios.

- a) O que acontece no eletroscópio A?
- b) O que acontece no eletroscópio B?

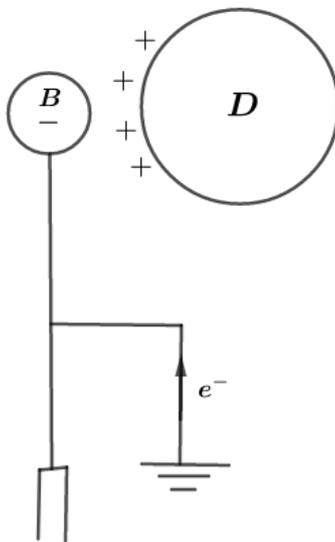
Comentários:

a) Quando o bastão C aproxima-se de A, ocorrerá indução e as lâminas se abrirão. A distribuição de cargas será:





b) Quando o bastão D aproxima-se de B, que está aterrado, ocorrerá indução, havendo subida de elétrons da terra para a esfera do eletroscópio. Assim, as lâminas de B permanecerão neutras e não se abrirão.



2. Lei de Coulomb

Um corpo eletrizado é dito carga elétrica puntiforme quando a sua dimensão é desprezível quando comparada com a distância a outro corpo.

Considere duas cargas puntiformes, colocadas em um certo meio, a uma distância d entre si, a força \vec{F} de interação entre elas é tal que:

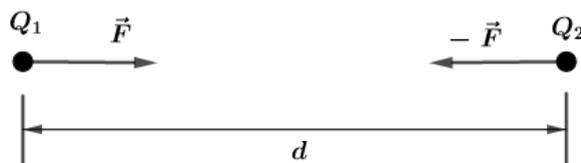


Figura 24: Força elétrica entre duas cargas puntiformes de sinais contrários.

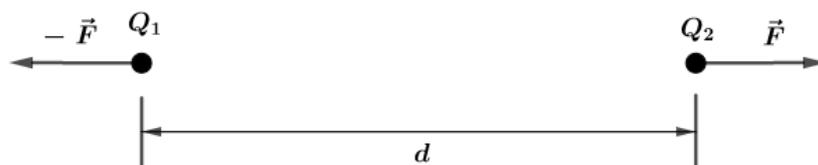


Figura 25: Força elétrica entre duas cargas puntiformes de mesmo sinal.

A direção de \vec{F} é a reta que une as duas cargas e o sentido é atrativo ou repulsivo dependendo dos sinais das cargas.

Note que \vec{F} e $-\vec{F}$ constituem um par Ação e Reação.

O módulo da força elétrica é dado pela Lei de Coulomb que diz:

$$|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

A unidade das cargas é o coulomb (C) como já mencionamos e a unidade de distância é o metro (m).

Em primeira abordagem, ϵ é a permissividade do meio, uma constante física que depende do meio e caracteriza a interação das cargas elétricas nesse meio.

Para o vácuo, a permissividade elétrica do meio é dada por:

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Define-se permissividade relativa ϵ_r a constante dielétrica k da seguinte forma:

$$k = \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \text{ com } \epsilon_r \geq 1$$

Chamamos de constante eletrostática de um meio representado pelo K (letra maiúscula) a seguinte grandeza:

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon}$$

Para o vácuo, temos que:



$$K_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cong 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Dessa forma, a Lei de Coulomb pode ser escrita da seguinte forma:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

$$F = K \frac{|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

2.1. Princípio da superposição

Considere um sistema constituído de n cargas puntiformes q_1, q_2, \dots, q_n . podemos calcular a força elétrica resultante sobre uma carga Q aplicando o Princípio da Superposição. Este princípio diz que podemos calcular a contribuição de força de cada carga q_i com Q e depois somarmos vetorialmente:

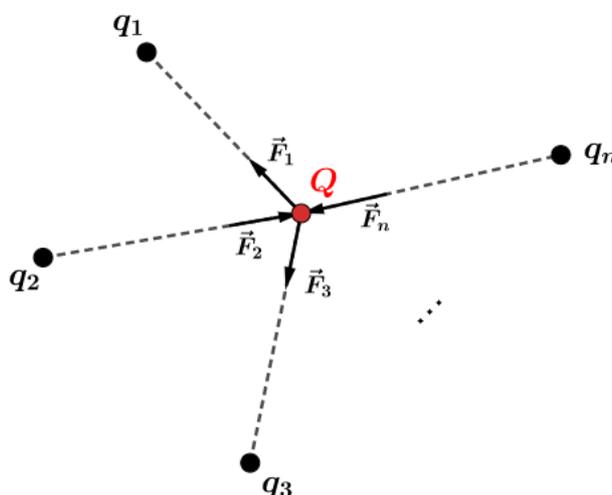


Figura 26: Princípio da Superposição aplicado à n cargas.

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Ou ainda:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Com este resultado vemos que a força elétrica resultante sobre o corpo é a soma vetorial da contribuição da força de cada carga individualmente na carga de interesse. Basta analisar a interação elétrica entre as cargas duas a duas e depois fazer a soma vetorial.

2.2. Análise gráfica da lei de Coulomb

Se adotarmos que K, Q_1 e Q_2 não se alteram, podemos escrever os seguintes esboços do gráfico $F \times d$:



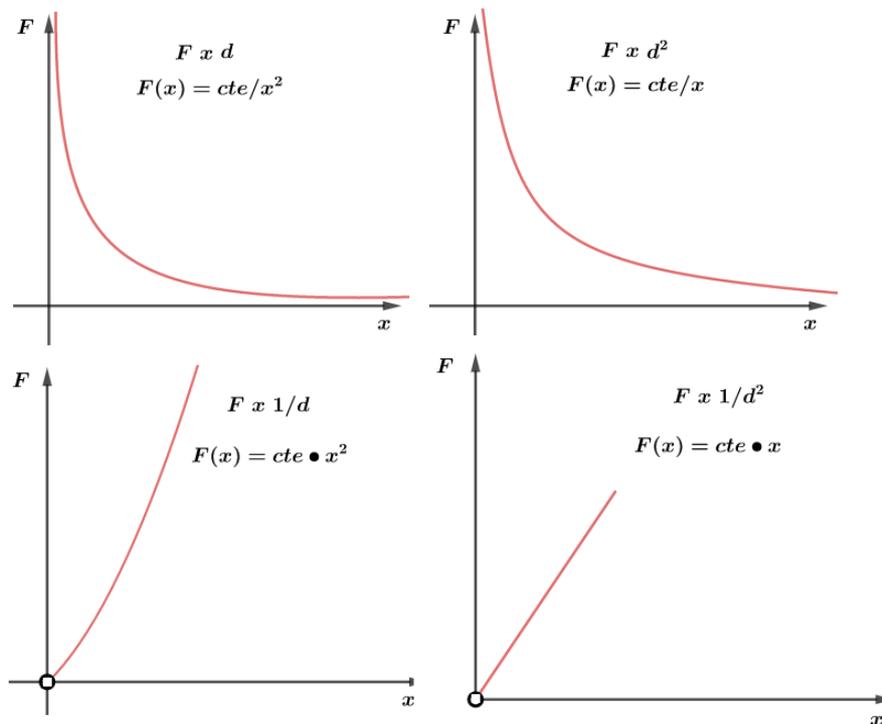


Figura 27: Possíveis gráfico da força pela distância.

2.3. Relações de proporção na lei de Coulomb

Dada duas cargas puntiformes, separadas por uma distância d , a Lei de Coulomb aplicada nelas é:

$$F = \frac{K|Q_1||Q_2|}{d^2}$$

Se houver as alterações nas cargas, no meio e na distância, teríamos que:

$$|Q_1|' = x \cdot |Q_1|$$

$$|Q_2|' = y \cdot |Q_2|$$

$$K' = z \cdot K$$

$$d' = t \cdot d$$

Então, a Lei de Coulomb diz que:

$$F' = \frac{K'|Q_1|'|Q_2|'}{d'^2}$$

Logo, a nova força pode ser relacionada com a força antiga da seguinte maneira:

$$F' = \frac{z \cdot x \cdot y}{t^2} \cdot F$$

Os submúltiplos do coulomb mais utilizados são:

- milicoulomb: $mC = 10^{-3}C$
- microcoulomb: $\mu C = 10^{-6}C$
- nanocoulomb: $nC = 10^{-9}C$



- picocoulomb: $pC = 10^{-12}C$

ESCLARECENDO!



4)

Considere duas cargas puntiformes q e Q , separadas por uma distância d , possuem força de atração de intensidade F . Calcule a nova força elétrica quando se duplica a primeira carga, divide a segunda por 3 e divide a distância por 3. Não se altera o meio das cargas.

Comentários:

De acordo com a mudança nas condições, temos que:

$$|Q_1|' = 2 \cdot |Q_1|$$

$$|Q_2|' = \frac{1}{3} \cdot |Q_2|$$

$$d' = \frac{1}{3} \cdot d$$

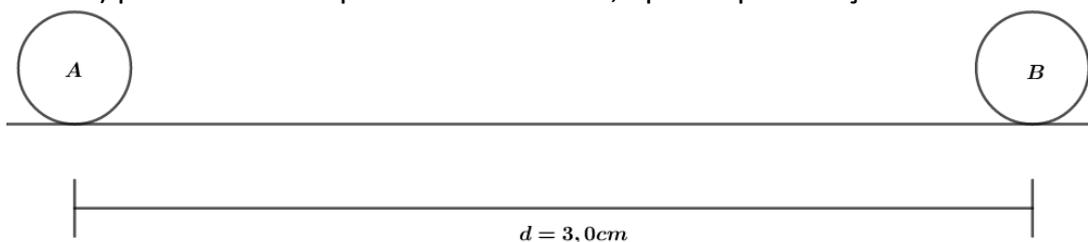
Logo, a nova força é dada por:

$$F' = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \cdot F$$

$$\boxed{F' = 6 \cdot F}$$

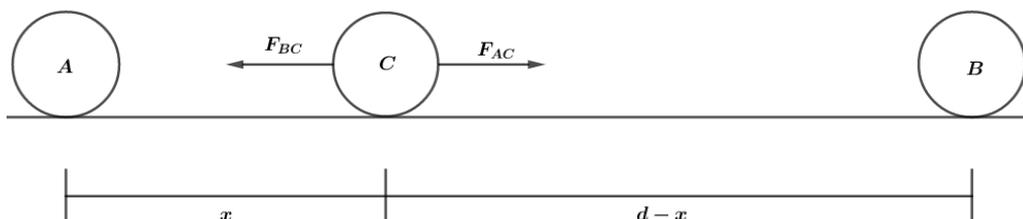
5)

Duas cargas fixas A e B distam 3,0 cm uma da outra. As cargas valem $q_A = 1,0 \times 10^{-7}C$ e $q_B = 4,0 \times 10^{-7}C$. A que distância de A deve ser colocada uma terceira carga C (de mesma natureza elétrica que A e B) para ficar em equilíbrio entre A e B, apenas pela força elétrica em C?



Comentários:

Vamos dizer que a distância da carga C até a carga A é x , então teremos o seguinte diagrama de força na carga C na horizontal:



Para o equilíbrio da carga livre em C, temos que:



$$\frac{F_{BC}}{Kq_Bq_C} = \frac{F_{AC}}{Kq_Aq_C}$$

$$\frac{4}{(d-x)^2} = \frac{1}{x^2}$$

Dado que $q_B = 4q_A$, temos que:

$$\frac{4}{(d-x)^2} = \frac{1}{x^2}$$

$$4x^2 = (d-x)^2$$

$$4x^2 - (d-x)^2 = 0$$

$$[2x - (d-x)][2x + d - x] = 0$$

$$(3x - d)(x - d) = 0$$

Dessa forma, temos que:

$$3x = d \text{ ou } x = d$$

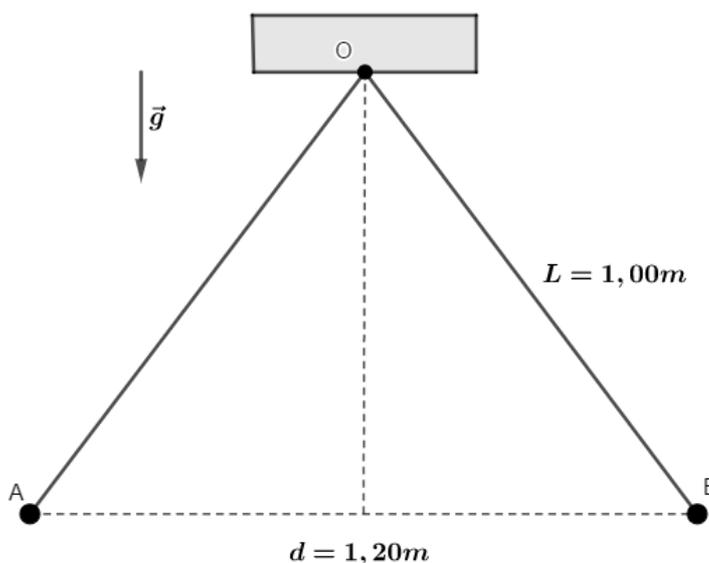
Mas, $x = d$ não convém. Logo, temos:

$$x = \frac{d}{3}$$

$$\boxed{x = 1,0 \text{ cm}}$$

6) (AFA)

Duas esferas condutoras idênticas muito pequenas, de mesma massa $m = 0,4 \text{ g}$, encontram-se no vácuo, suspensas por meio de dois fios leves, isolantes, de comprimentos iguais a $L = 1,00 \text{ m}$, presos a um mesmo ponto de suspensão O .



Estando as esferas separadas, eletriza-se uma delas com carga Q , mantendo-se a outra neutra. Em seguida, elas são colocadas em contato e, depois, abandonadas, verificando-se que na posição de equilíbrio a distância entre elas é $d = 1,20 \text{ m}$. Considere $Q > 0$.

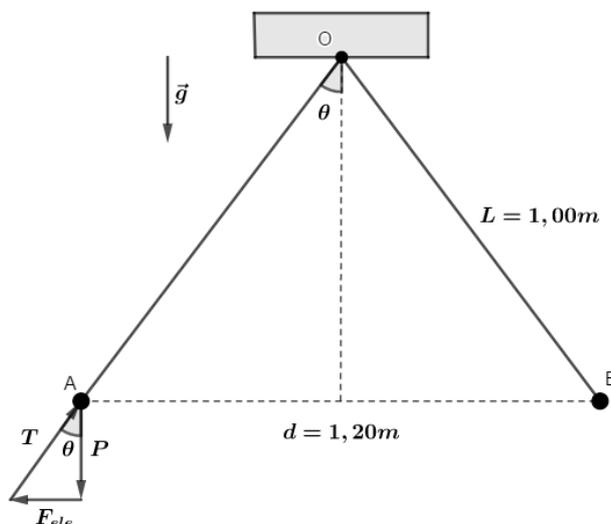
Nessa situação, o valor de Q é?

Dados: $g = 10 \text{ m/s}^2$ e $K = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

Comentários:

Para a determinação da carga Q , podemos analisar a posição de equilíbrio do corpo A . Para isso, vamos fazer o diagrama de forças de A :



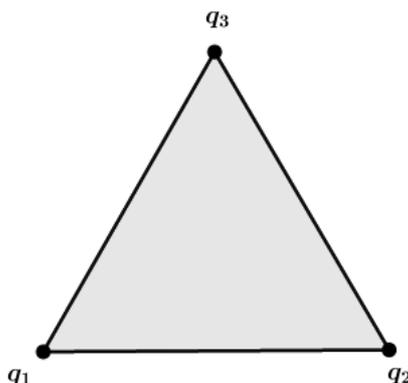


Após o contato das esferas, cada esfera tem carga $Q/2$. Pela geometria do problema, temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\theta &= \frac{F_{ele}}{P} \\ \frac{0,6}{0,8} &= \frac{9 \times 10^9 \left(\frac{Q}{2}\right) \left(\frac{Q}{2}\right)}{4 \times 10^{-4} \cdot 10} \\ Q &= 2 \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot 4 \times 10^{-4} \cdot 10 \cdot 1,2^2}{8 \cdot 9 \times 10^9}} = 2 \cdot \frac{2 \times 10^{-2} \cdot 1,2}{3 \times 10^4} \cdot \sqrt{\frac{6}{8}} = 1,38 \times 10^{-6} C \\ \boxed{Q = 1,38 \mu C} \end{aligned}$$

7)

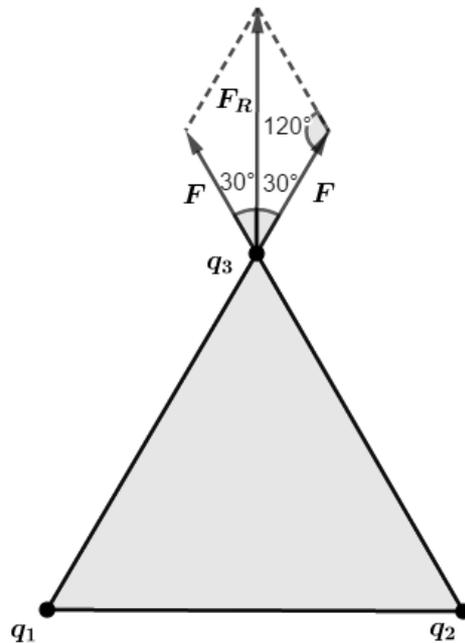
Considere 3 cargas formando um triângulo equilátero. As três cargas são positivas e possuem módulos q . Qual a intensidade da força elétrica resultante em q_3 ?



Comentários:

Vamos fazer o diagrama de forças na carga q_3 :





Como o módulo das cargas é o mesmo e as distância entre elas também, a força de q_1 e q_3 é igual a força de q_2 e q_3 , sendo todas elas repulsivas.

Para determinar a força resultante, devemos calcular o vetor resultante das forças. Pela Lei dos Senos, temos que:

$$\frac{F_R}{\text{sen}(120^\circ)} = \frac{F}{\text{sen}(60^\circ)}$$

$$F_R = \sqrt{3}F$$

$$F_R = \frac{\sqrt{3}Kq^2}{d^2}$$



3. Distribuições de cargas

3.1. Distribuições lineares – densidade linear de cargas

Considere um fio com distribuição linear de cargas, define-se **densidade linear de carga**, representado pela letra λ , como a carga por unidade de comprimento. Para um dado segmento de comprimento Δl , confinando uma carga Δq , podemos escrever que:

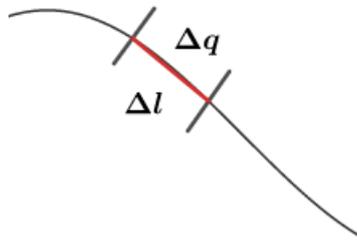


Figura 28: Distribuição de carga linear ao longo de um fio.

$$\lambda = \frac{\Delta q}{\Delta l}$$

Caso a densidade linear de cargas for constante (distribuição uniforme), podemos calcular da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{q}{l}$$

Podemos escrever a carga total contida nesse fio total como sendo:

$$q = \lambda \cdot l$$

3.2. Distribuição superficial – densidade superficial de carga

Considere uma superfície com densidade superficial de cargas, define-se **densidade superficial de carga**, representado pela letra σ , como a carga por unidade de área. Para uma dada superfície ΔA , confinando uma carga Δq , podemos escrever que:

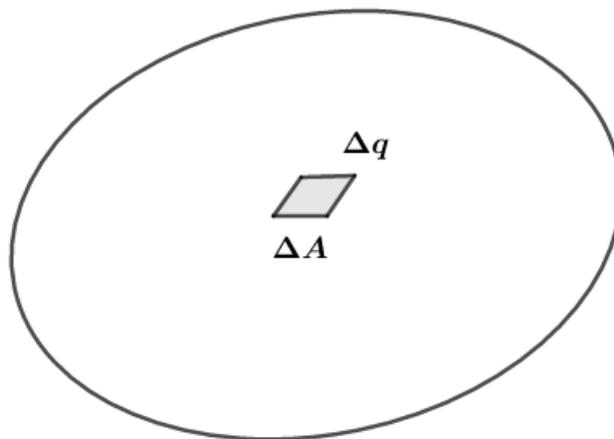


Figura 29: Distribuição de carga superficial ao longo de um plano.

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta A}$$

Para distribuições uniformes, podemos escrever que:

$$\sigma = \frac{q}{A} = cte$$

Então, podemos escrever a carga total contida na superfície de área total A como sendo:

$$q = \sigma \cdot A$$

3.3. Distribuição Volumétrica – densidade volumétrica de carga

Analogamente aos casos anteriores, considere um volume com densidade volumétrica de cargas, define-se **densidade volumétrica de carga**, representado pela letra ρ , como a carga por unidade de volume. Para um dado volume ΔV , confinando uma carga Δq , podemos escrever que:

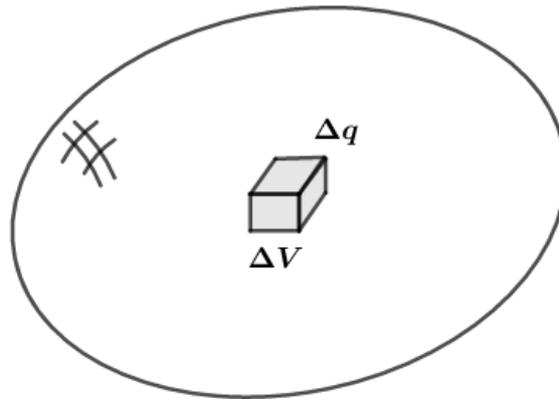


Figura 30: Distribuição de carga ao longo de um volume.

$$\rho = \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

Para distribuições uniformes, podemos escrever que:

$$\rho = \frac{q}{V} = cte$$

Então, podemos escrever a carga total contida em um volume total V como sendo:

$$q = \rho \cdot V$$

4. O Campo elétrico

Inicialmente, vamos introduzir a ideia por trás de uma força de campo. Na aula anterior, vimos que quando temos duas partículas carregadas separadas a uma distância d , a força eletrostática é dada por:

$$F_{ele} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2}$$

Ou seja, trata-se de uma força de ação a distância.

Nosso objetivo nesse capítulo é dar uma teoria que fundamenta a ação dessa força a distância, introduzindo o conceito de campo elétrico. Esse raciocínio é semelhante ao campo gravitacional de um planeta, que estudaremos futuramente na mecânica.

Para isso, vamos imaginar o seguinte experimento: uma esfera A carregada com uma carga $+Q_A$ é fixada em um dado ponto do espaço. Se colocarmos uma carga $+q_B$, que chamamos de **carga de prova**, próximo a A podemos examinar a região que envolve a carga $+Q_A$.



De acordo com a teoria estudada na aula passada, vimos que a força elétrica entre A e B é repulsiva. Supostamente, podemos imaginar que o espaço ao redor de A foi modificado de alguma forma. Podemos dizer que nessa região criou-se um campo elétrico.

De outra forma, quando colocamos uma carga de prova em uma região que existe um campo elétrico, surge na carga uma força elétrica.

Se em uma dada região do espaço existe um campo elétrico, podemos usar diversas cargas de provas e medir as forças elétricas em um dado ponto P . Para cada carga vamos fazer o quociente:

$$\frac{|\vec{F}_i|}{q_i}$$

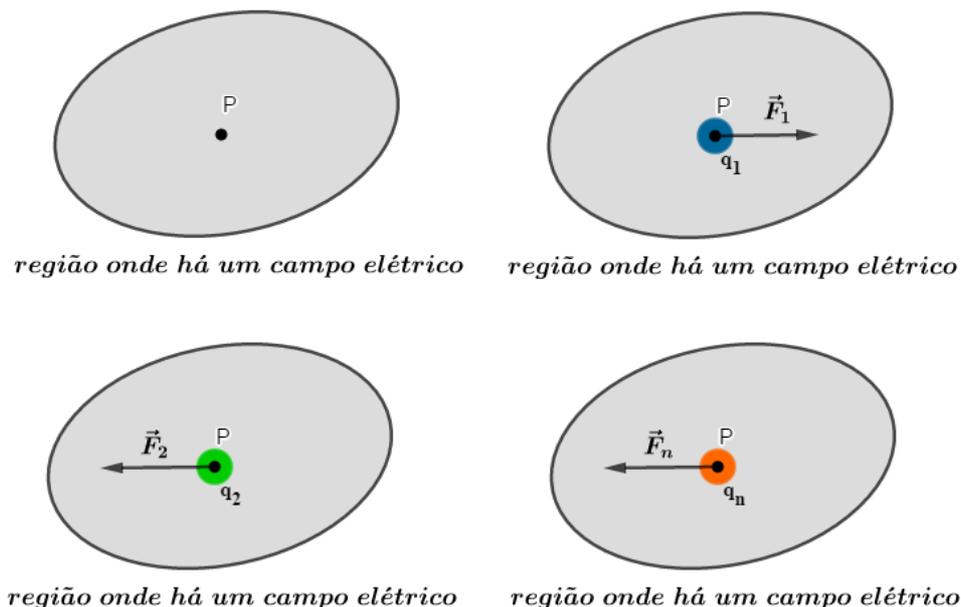


Figura 31: Experimento para determinação do campo elétrico em uma região.

Experimentalmente, verifica-se que todas as forças \vec{F}_i têm a mesma direção, alterando apenas o sentido da força quando se altera o sinal da carga q_i . Matematicamente, verifica-se que as forças são proporcionais as cargas de provas, isto é:

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{\vec{F}_3}{q_3} = \dots = \frac{\vec{F}_i}{q_i} = \dots = \frac{\vec{F}_n}{q_n} \text{ (constante)}$$

Essa razão é chamada de **vetor campo elétrico** ou somente **campo elétrico** no ponto P e denotamos por \vec{E} .

Assim, temos que:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} \text{ ou } \vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Note que é interessante a carga de prova ser positiva, pois dessa forma \vec{F} e \vec{E} possuem o mesmo sentido.

Observações:

- 1) Quando efetuamos $\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{\vec{F}_3}{q_3} = \dots = \frac{\vec{F}_i}{q_i} = \dots = \frac{\vec{F}_n}{q_n}$, mostramos que o campo elétrico em um dado ponto P não depende do valor da carga de prova.
- 2) Utilizamos sempre uma carga de prova bem pequena, de forma que sejam desprezíveis os efeitos sobre as cargas geradoras do campo elétrico.
- 3) Quando o campo elétrico de certa região não variar com o decorrer do tempo, este campo será chamado de campo eletrostático.

A partir da definição de campo elétrico, se tomarmos uma carga de 1 C e uma força de 1 N , temos que:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1\text{ N}}{1\text{ C}} = 1\text{ N/C}$$

Assim, dizemos que a unidade de campo elétrico é N/C . Posteriormente, definiremos campo elétrico a partir do potencial elétrico e a unidade de campo elétrico será dado por V/m (volt por metro) no SI.

4.1. Direção e sentido do campo elétrico

Diante da definição de campo elétrico, temos que:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

Sendo q um número escalar, quando efetuamos $q \cdot \vec{E}$ sabemos que \vec{E} e \vec{F} tem sempre a mesma direção, desde que não sejam nulos. Dessa forma, temos dois sentidos possíveis:

- 1) $q > 0$: \vec{E} tem o mesmo sentido de \vec{F} .
- 2) $q < 0$: \vec{E} e \vec{F} têm sentidos contrários.

Observe que primeiramente definimos o conceito de força elétrica entre duas cargas antes do conceito de campo elétrico. Contudo, vimos que o campo é a causa da existência da força. Dessa forma, quando colocamos a carga de prova no ponto P , já está associado a esse ponto um campo elétrico \vec{E} .



4.2. Linhas de força

Trata-se de linhas imaginárias desenhadas nas representações de um campo elétrico, com a intenção de mostrar sua direção e sentido. Por definição, a linha de força em cada ponto tem a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor campo elétrico.



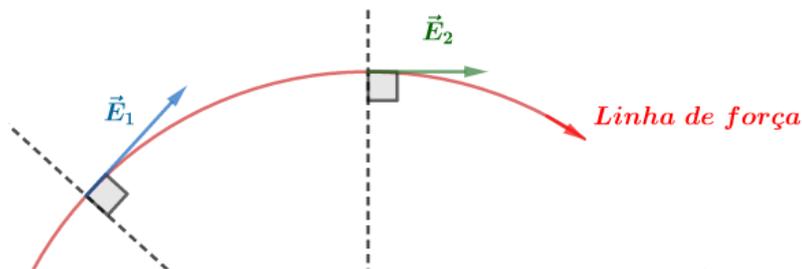


Figura 32: Representação da Linha de força.

As linhas de forças são desenhadas para visualizar um campo elétrico e, embora não forneçam o valor diretamente do campo elétrico, desenhamos de tal forma que o número de linhas por unidade de área (área medida em um plano perpendicular às linhas) é proporcional ao módulo do campo elétrico. Assim, quanto mais próximas as linhas, maior o módulo do campo.

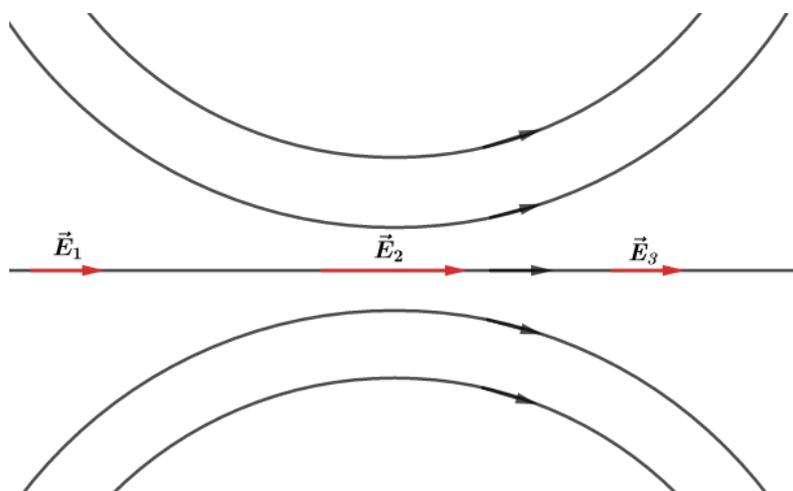


Figura 33: Linhas de força em uma dada região do espaço mostrando que $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_1|$ e $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_3|$, pois próximo a \vec{E}_2 as linhas são mais intensas.

Quando o campo elétrico é constante em todos os pontos de uma região do espaço, suas linhas de força são representadas retilíneas, paralelas, de mesmo sentido e uniformemente distribuídas. Nesse caso, dizemos que o campo elétrico é uniforme. Estudaremos as propriedades do campo elétrico uniforme mais à frente.

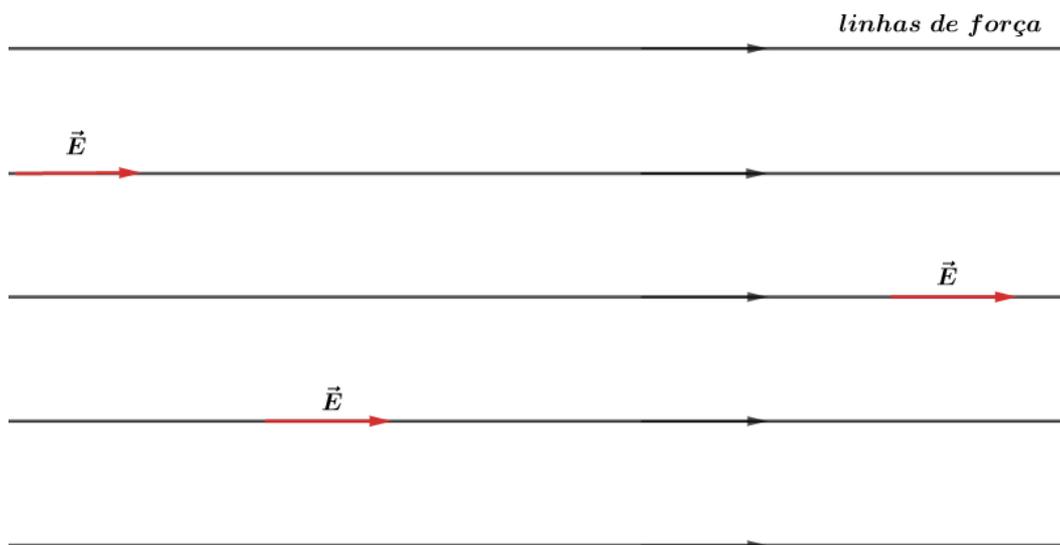


Figura 34: Região onde existe um campo elétrico uniforme.

Observações:

- 1) As linhas de força nunca se cruzam! Se isso acontecesse, teríamos no ponto de cruzamento dois vetores \vec{E} , apontando para direções distintas, o que é um **absurdo**.

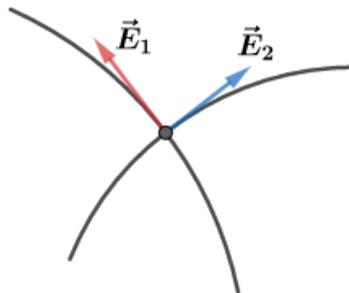


Figura 35: Linhas de forças se cruzando, gerando um absurdo.

- 2) Trajetória de uma carga sujeita a um campo elétrico: não necessariamente a trajetória de uma partícula coincide com as linhas de forças.

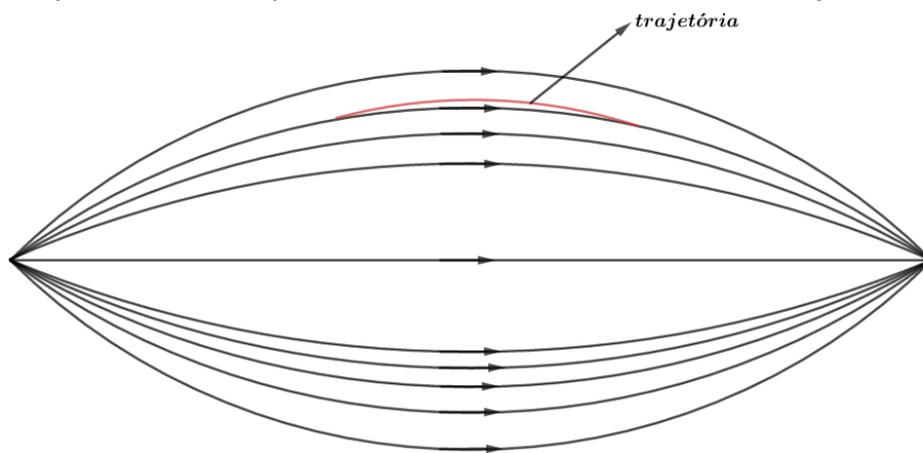


Figura 36: Linhas de força e trajetória.

ESCLARECENDO!



8)

Em um ponto P de uma região onde há um campo elétrico, coloca-se uma carga de prova de valor q e verifica-se que a força elétrica nessa carga é de F . Qual o valor de outra carga de prova que quando colocada no mesmo ponto P a força elétrica na carga seja de $5F$?

Comentários:

De acordo com a força elétrica em função do campo, temos:

$$F = |q| \cdot E$$

Para a primeira carga, temos que:



$$F = |q| \cdot E \text{ eq.1}$$

Para a segunda carga, temos que:

$$5F = |q_2| \cdot E \text{ eq.2}$$

Dividindo $\frac{\text{eq.2}}{\text{eq.1}}$, temos:

$$\frac{5F}{F} = \frac{|q_2| \cdot E}{|q| \cdot E}$$
$$\therefore |q_2| = 5|q|$$

Repare que com as informações podemos apenas encontrar o módulo da carga q_2 . Para determinação do sinal, seria necessária alguma informação a respeito das direções das forças.

4.3. Campo elétrico de uma carga puntiforme

Seja uma carga elétrica puntiforme Q gerando um campo elétrico em uma dada região do espaço. Se pegarmos um ponto P situado a uma distância d da carga Q , podemos determinar a direção, o sentido e a intensidade do vetor campo elétrico em P . Para isso, basta pegarmos uma carga de prova $q_p > 0$.

4.3.1. Campo elétrico de uma carga puntiforme Q positiva

Dado que $Q > 0$ e nossa carga de prova também é ($q_p > 0$), então a força elétrica \vec{F} entre elas será de repulsão e, como $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, temos que \vec{F} e \vec{E} terão o mesmo sentido. Dessa forma, podemos concluir que para uma carga elétrica puntiforme o campo elétrico está se afastando.

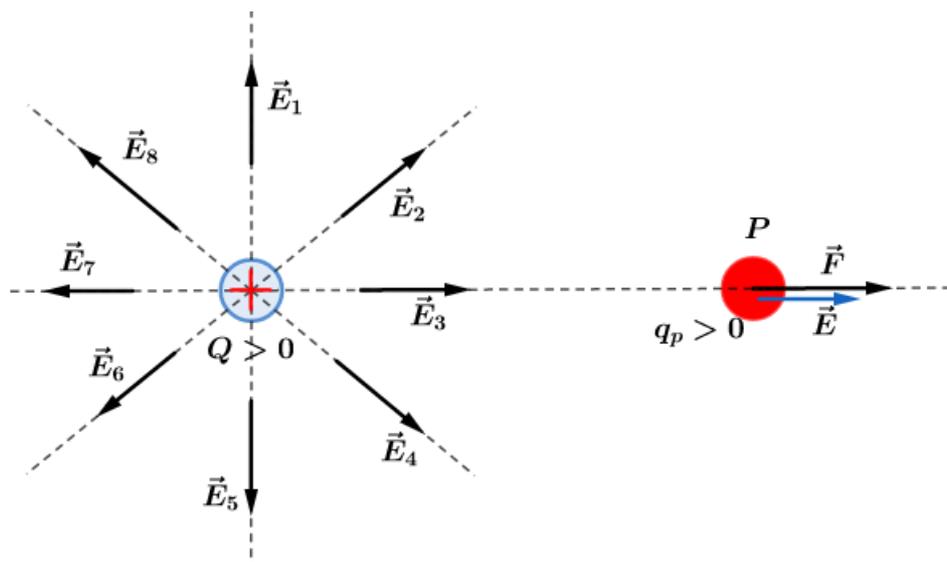


Figura 37: Campo elétrico gerado em torno de uma carga puntiforme positiva.

Observe que a direção do campo será radial, já que é a mesma direção da força, ou seja, reta que passa pelos pontos onde se encontram as cargas.

Assim, as linhas de força desse campo são semirretas, radiais, apontando para fora da carga $Q > 0$ (se afastando).

4.3.2. Campo elétrico de uma carga puntiforme Q negativa

Dado que $Q < 0$ e nossa carga de prova é ($q_p > 0$), então a força elétrica \vec{F} entre elas será de atração e, como $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, temos que \vec{F} e \vec{E} terão o mesmo sentido. Dessa forma, podemos concluir que para uma carga elétrica puntiforme o campo elétrico está se aproximando.

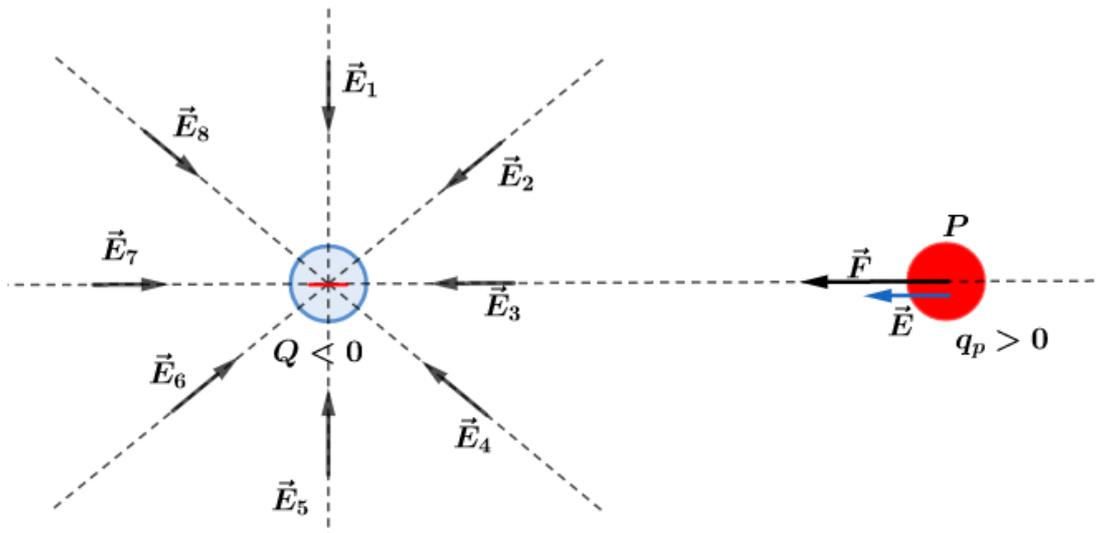


Figura 38: Campo elétrico gerado em torno de uma carga puntiforme negativa.

Dessa forma, em qualquer ponto da região que circunda a carga elétrica $Q < 0$, o campo elétrico será de aproximação, em outras palavras, \vec{E} deverá “apontar” para a carga Q .

Assim, as linhas de força desse campo são semirretas, radiais, apontando para dentro da carga $Q < 0$ (se aproximando).

Note que o sentido do campo elétrico não depende do sinal da carga de prova, apenas depende da “carga-fonte” (carga que gerou o campo).

Resumindo:

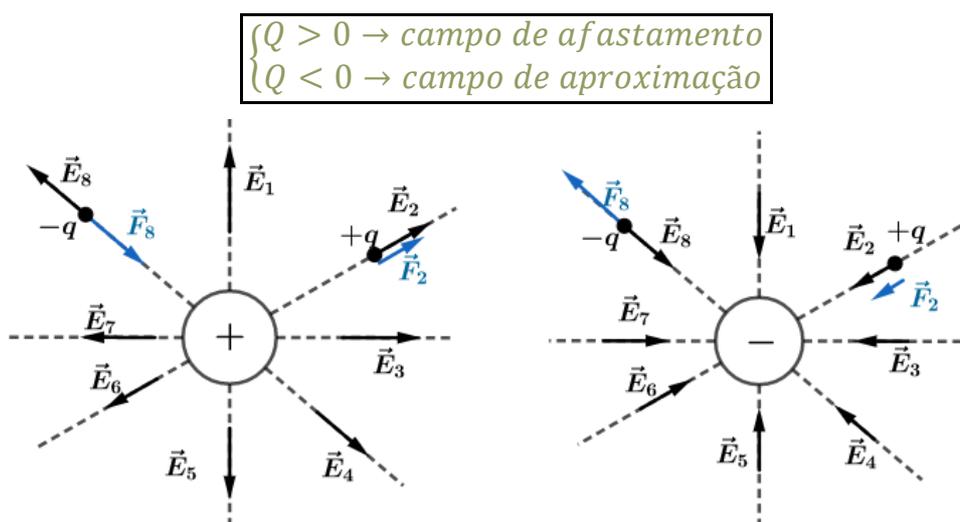


Figura 39: Linhas de força do campo elétrico de uma carga positiva e de uma negativa.

4.3.3. Intensidade do campo elétrico em um ponto P devido a uma carga puntiforme

Em um dado ponto P coloca-se uma carga de prova q_p , situada a uma distância d de uma carga puntiforme Q . Pela Lei de Coulomb, temos que:

$$F = \frac{K \cdot |Q| \cdot |q_p|}{d^2} \Rightarrow \frac{F}{|q_p|} = \frac{K \cdot |Q|}{d^2}$$
$$\therefore E = K \cdot \frac{|Q|}{d^2}$$

Observações:

- 1) Devido ao fato desse campo ser inversamente proporcional ao quadrado da distância $E \propto \frac{1}{d^2}$, ele é conhecido por “campo newtoniano” pois existe grande semelhança com a expressão do campo gravitacional de um planeta. Veremos este fato mais adiante.
- 2) Quando representamos o gráfico do campo elétrico de uma carga puntiforme em função da distância obtemos a curva:

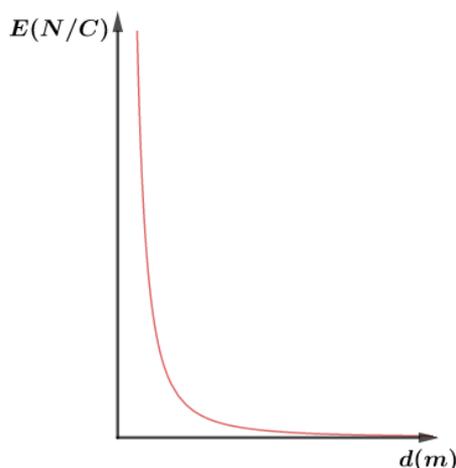


Figura 40: Gráfico da intensidade do campo elétrico de uma carga puntiforme em função da distância.

4.4. Campo elétrico devido as diversas cargas puntiformes

Quando existem várias cargas puntiformes geradoras de campo em um mesmo ponto P , podemos determinar o campo elétrico resultante dos campos pelo Princípio da Superposição.

Para isso, vamos considerar n cargas puntiformes gerando diversos campos elétricos em P . Se colocarmos uma carga de prova em P , podemos determinar a força elétrica resultante na carga de prova pelo Princípio da Superposição:

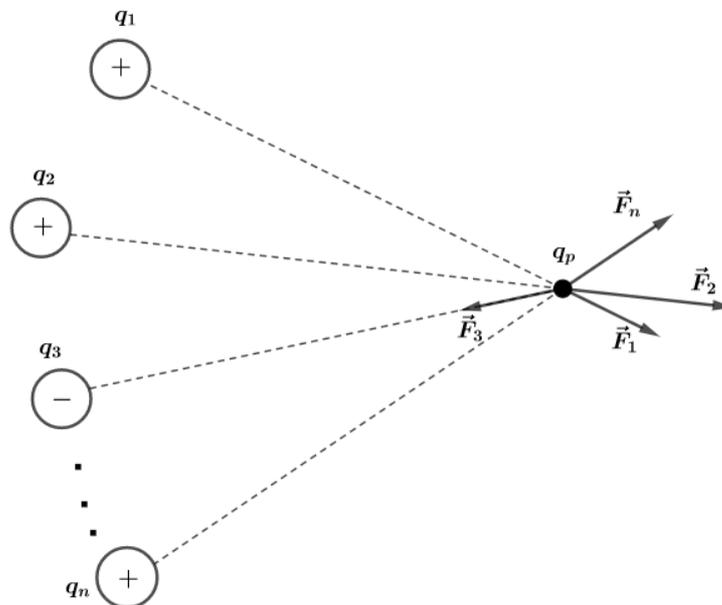


Figura 41: Campo elétrico resultante em P da superposição de n cargas.

Assim, a força resultante em P é dada por:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Mas, cada força elétrica pode ser escrita por $\vec{F}_i = q_p \cdot \vec{E}_i$, portanto:

$$q_p \cdot \vec{E}_{res} = q_p \cdot \vec{E}_1 + q_p \cdot \vec{E}_2 + \dots + q_p \cdot \vec{E}_n$$

$$q_p \cdot \vec{E}_{res} = q_p (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n)$$

$$\therefore \boxed{\vec{E}_{res} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n}$$

Para o caso particular de existirem apenas duas cargas puntiformes, temos que:

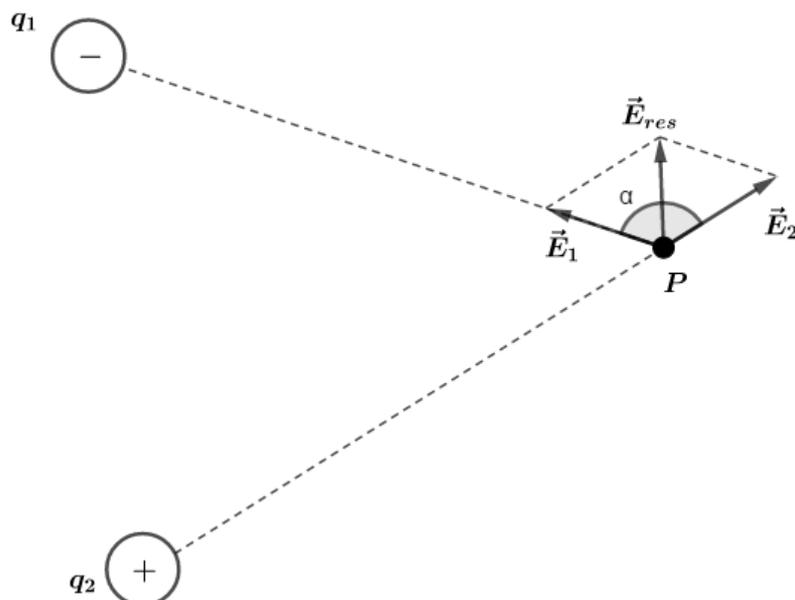


Figura 42: Campo elétrico resultante gerado por duas cargas puntiformes.

Podemos escrever que o módulo do campo elétrico resultante, de acordo com a Lei dos Cossenos, é:



$$E_{res} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \cos \alpha}$$

É evidente que o sentido do campo elétrico resultante depende dos valores das cargas q_1 e q_2 . Assim, depois de obtidos os vetores \vec{E}_1 e \vec{E}_2 utilizamos a soma de vetores para determinar o sentido e a direção de \vec{E}_{res} .

Podemos também determinar as linhas de forças devido às duas cargas. Como vimos, as linhas de força “nascem” nas cargas positivas e “morrem” nas cargas negativas. Dessa forma, para duas cargas puntiformes temos as seguintes configurações:

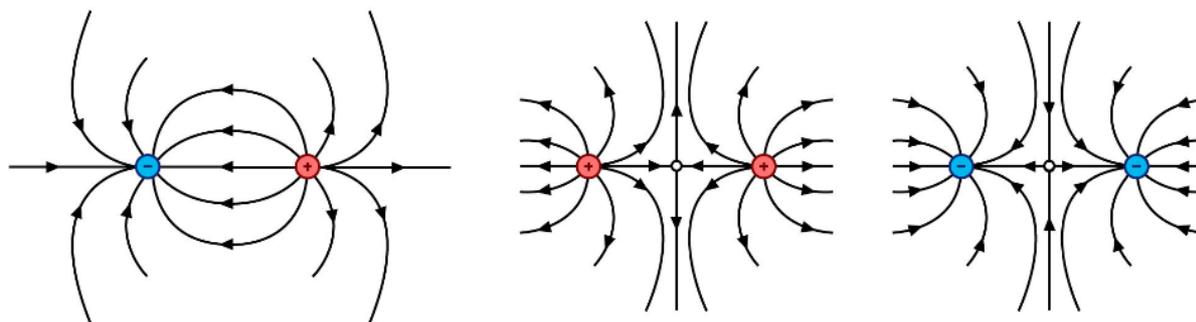


Figura 43: Possíveis linhas de forças para diferentes configurações de cargas.



4.5. Informações das linhas de forças

Vamos salientar algumas informações que podem ser extraídas de uma configuração de linhas de forças do \vec{E} :

- 1) **Direção e sentido:** tangente às linhas de força.

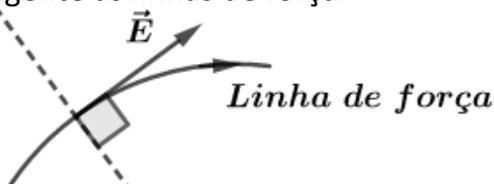


Figura 44: Linha de Força, direção e sentido do campo elétrico.

- 2) **Intensidade relativa do vetor \vec{E} :** obtemos através da densidade de linhas de força.

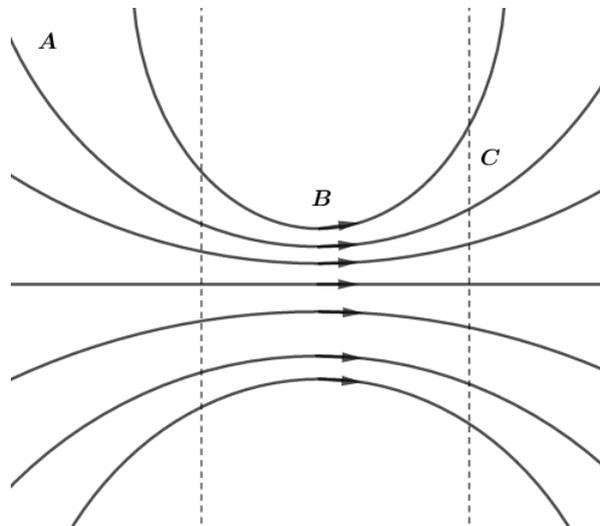


Figura 45: Intensidade relativo do campo elétrico, utilizando densidade de linhas de força.

Assim, podemos fazer a seguinte afirmação com relação aos módulos dos campos:

$$E_B > E_C > E_A$$

De outra forma, podemos representar o campo elétrico saindo ou entrando do plano do papel:

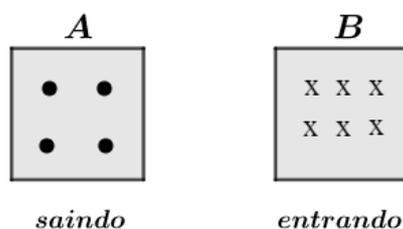


Figura 46: Representação de vetores entrando ou saindo do plano.

$$E_B > E_A$$

3) Sinal da carga fonte do \vec{E} : análise da “entrada” e “saída” de linhas de força.

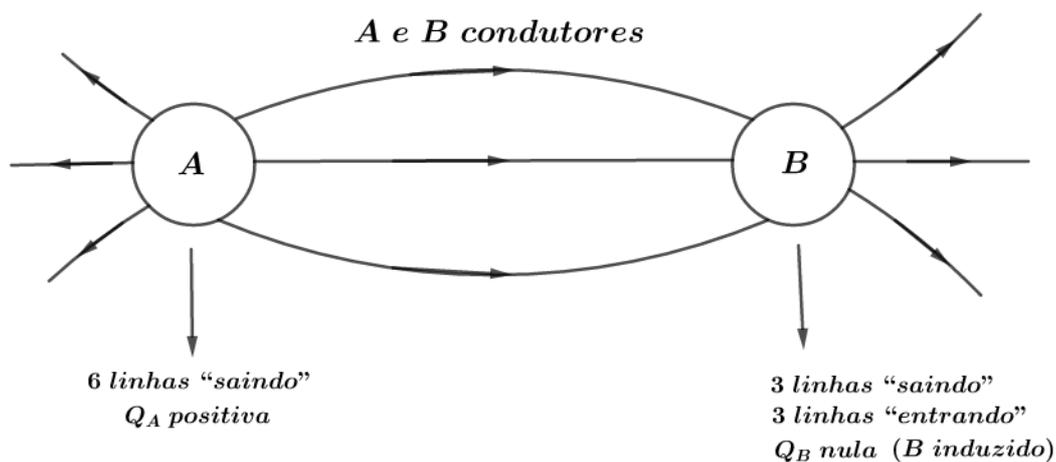


Figura 47: Representação de linhas de forças e o sinal da carga.

Se aterrarmos B , temos que:

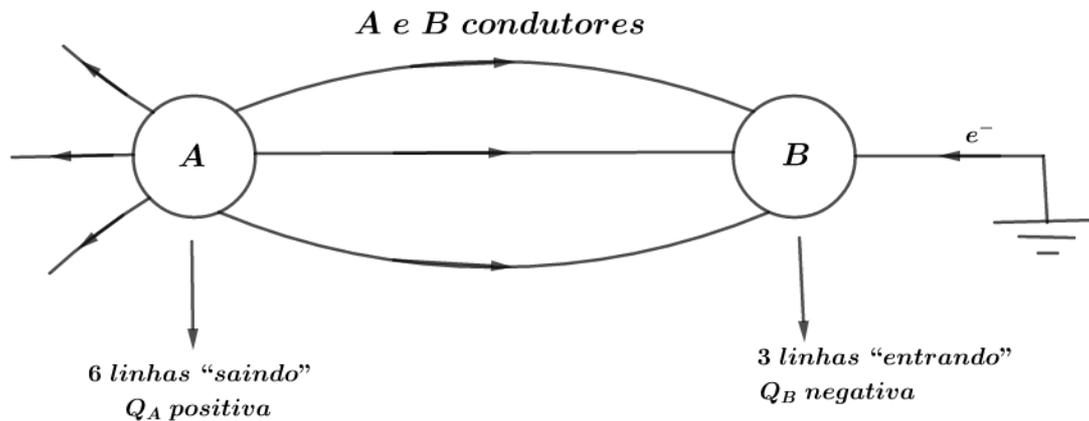


Figura 48: Representação de linhas de força e o sinal das cargas, quando uma é aterrada.

- 4) **Relação entre os módulos das cargas que geram o campo elétrico:** análise de quantidade de linhas.

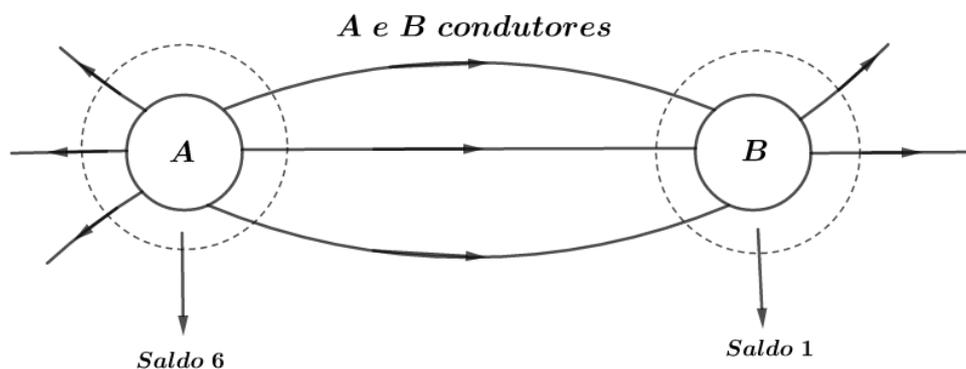


Figura 49: Representação das linhas de força e a relação entre as cargas.

$$\frac{|q_A|}{|q_B|} = \frac{6}{1} = 6$$

5. Campo elétrico do condutor isolado em equilíbrio eletrostático

Dizemos que um condutor isolado está em equilíbrio eletrostático quando não existe movimento ordenado de cargas elétricas no seu interior e na sua superfície. Dessa forma, os elétrons livres encontram-se em movimento aleatório.

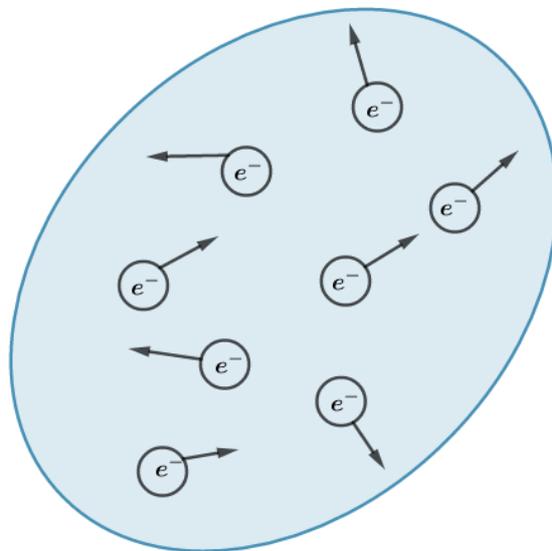


Figura 50: Condutor isolado em equilíbrio eletrostático, os elétrons livres em movimento aleatório.

Note que quando o corpo está em equilíbrio eletrostático ele pode ou não estar eletrizado.

5.1. Distribuição das cargas elétricas em um condutor carregado e isolado em equilíbrio eletrostático

Quando um condutor isolado está eletricamente carregado (positivamente ou negativamente), as cargas se repelem buscando a maior distância entre si, indo para a superfície do condutor.

Segundo alguns registros, esse fato foi observado primeiramente por Benjamin Franklin. Ele observou as cargas elétricas em excesso num cilindro metálico indo para a superfície externo quando realizou o seguinte experimento: fez descer uma esfera de cortiça pendurada num fio isolante dentro de um cilindro oco de prata positivamente carregado:

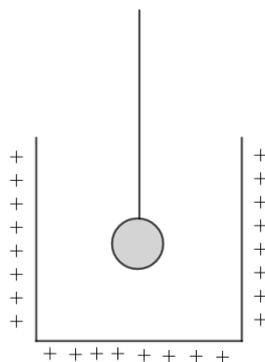


Figura 51: A esfera não é atraída pelas paredes internas do cilindro.

Em primeiro momento, o que Benjamin imaginaria era a esfera ser atraída pelas paredes ao descer no interior do cilindro. Em seguida, ele colocou a esfera próximo a parede externamente e observou uma aproximação:

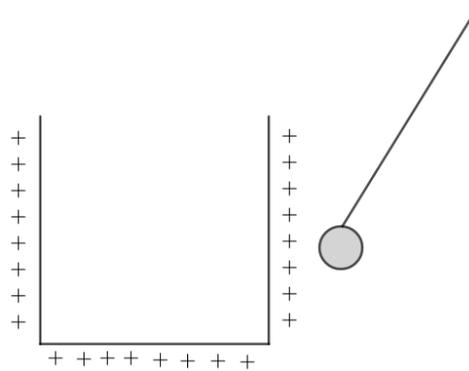


Figura 52: A esfera é atraída pela parede externa do cilindro.

Naquele momento, Franklin não conseguia explicar o que aconteceu no experimento.

Mais tarde, Michael Faraday criou uma série de experimentos para comprovar que as cargas elétricas se distribuíam na superfície externa do condutor isolado.

5.2. Propriedades do condutor isolado e em equilíbrio eletrostático

Propriedade 1:

No interior do condutor o campo elétrico resultante é nulo.

Observe que se houvesse um campo elétrico resultante, diferente de zero, no interior do condutor os elétrons livres teriam um movimento ordenado devido à presença deste campo. Assim, o condutor não estaria em equilíbrio eletrostático.

Cuidado! O campo elétrico resultante é nulo apenas no interior do condutor, mas na superfície o campo resultante é diferente de zero. Mais à frente mostraremos como calcular o campo na superfície.

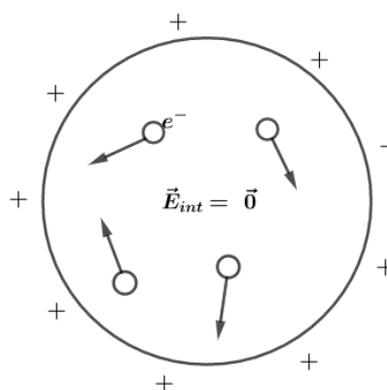


Figura 53: Condutor isolado e em equilíbrio eletrostático: campo elétrico resultante é nulo no interior e movimento aleatório dos elétrons livres.

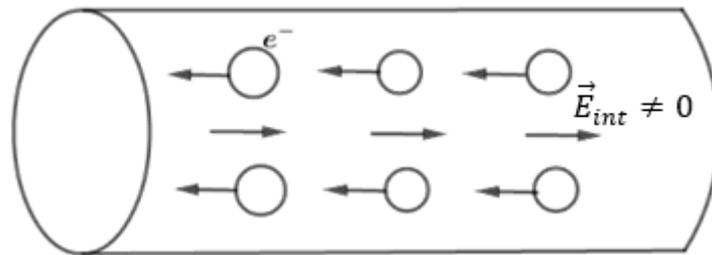


Figura 54: Quando o condutor não está em equilíbrio eletrostático, existe movimento ordenado dos elétrons.

Propriedade 2:

O campo elétrico nos pontos da superfície externa de um condutor isolado e em equilíbrio eletrostático tem direção normal à superfície.

Se houvesse um campo na superfície não perpendicular a ela, este poderia ser decomposto em duas componentes: normal \vec{E}_n e tangencial \vec{E}_t . Dessa forma, a componente tangencial ocasionaria um movimento das cargas, contrariando a hipótese de condutor em equilíbrio eletrostático.

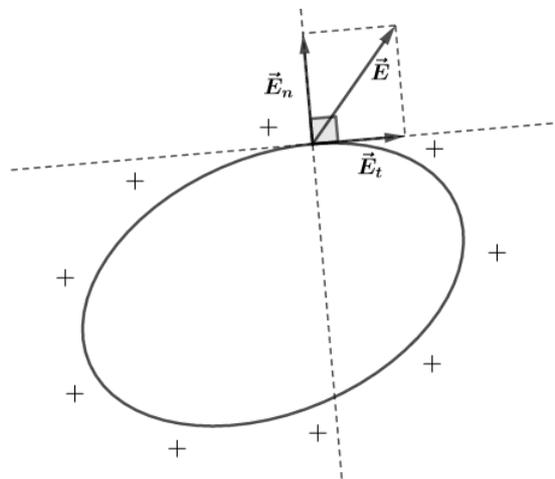


Figura 55: Caso o campo não fosse perpendicular à superfície externa.

5.3. Blindagem eletrostática

Seja um condutor oco (A) que pode estar eletrizado ou não. O corpo A possui todas as propriedades de um condutor maciço. Se um corpo B, **neutro**, for colocado no interior de A, o campo elétrico no interior de A será nulo. Ainda que A esteja eletrizado, B não será induzido, pois está no interior de A.



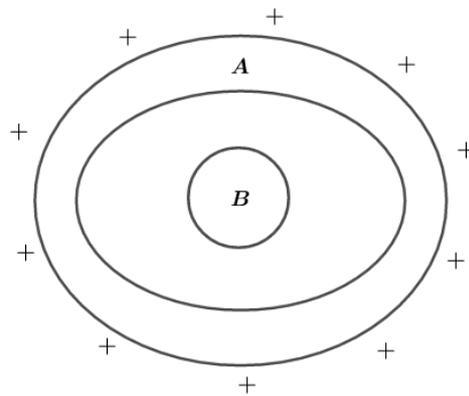


Figura 56: Blindagem eletrostática.

Ao aproximar de A um outro corpo eletrizado C, haverá indução eletrostática em A, mas B não sofrerá nenhum efeito.

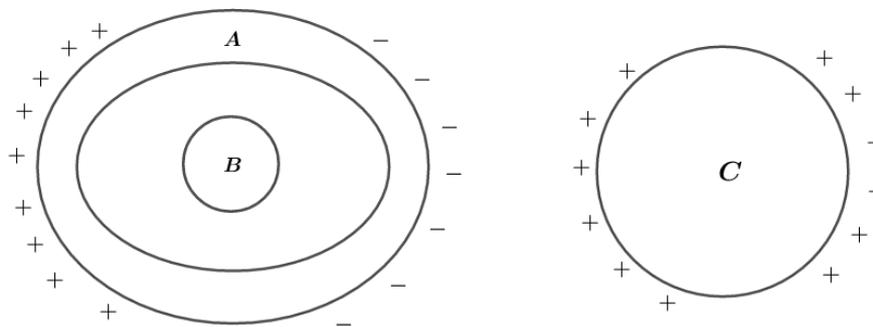


Figura 57: Aproximação de um corpo carregado e nenhum efeito observado em B.

Com este experimento, vemos que o condutor oco A blinda eletrostaticamente os corpos no seu interior. Este feito é chamado de blindagem eletrostática. Dizemos que a carcaça metálica de um automóvel é uma blindagem eletrostática. $\vec{E}_{int} \neq 0$

Em 1836, Faraday criou um experimento para provar esta blindagem eletrostática. Ele construiu uma grande “gaiola” metálica e colocou suportes isolantes. Ele entrou na gaiola portando diversos dispositivos de detecção da presença de campo elétricos, e mandou que seu assistente eletrizassem a caixa intensamente.



Figura 58: Representação de uma gaiola de Faraday, experimento realizado pelo próprio Michael Faraday para mostrar a blindagem eletrostática.

Como já era esperado por Faraday, nenhum dos aparelhos acusavam qualquer existência de campo no interior da caixa. Nem mesmo o próprio Faraday não sentiu qualquer efeito, mesmo com a caixa altamente eletrizada externamente, com grandes eflúvios elétricos saltando por vários pontos de sua superfície externa, palavras do próprio Michael Faraday.



5.4. O poder das pontas

Em um condutor, a densidade superficial σ é elevada nas pontas e a intensidade do campo elétrico é diretamente proporcional a σ . Assim, o campo elétrico nas pontas de um condutor é mais intenso.

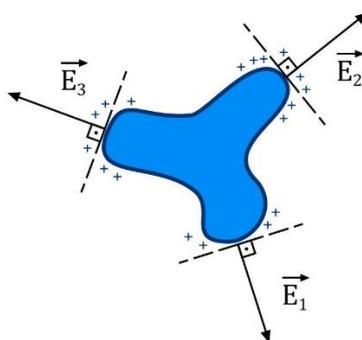


Figura 59: Efeito das pontas na superfície de um condutor, mostrando que $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_1|$, já que o raio de curvatura em 2 é menor que em 1, por exemplo.

Quando o campo elétrico na superfície de um condutor é muito intenso, pode ocorrer a ionização das moléculas do isolante que o envolve. Dessa forma, o isolante torna-se um condutor, isto é, as cargas de mesmo sinal são repelidas e as cargas de sinais contrários são atraídas, descarregando o condutor.

Chamamos de rigidez dielétrica de um meio o maior valor de campo elétrico que um meio isolante pode suportar sem ionizar-se (“dielétrico” é sinônimo de “isolante”). Para o ar, a rigidez dielétrica é de $3 \times 10^6 \text{ N/C}$.

6. Campo elétrico uniforme

Campo elétrico uniforme é aquele cujo vetor \vec{E} tem mesmo módulo, direção e sentido em todos os pontos.



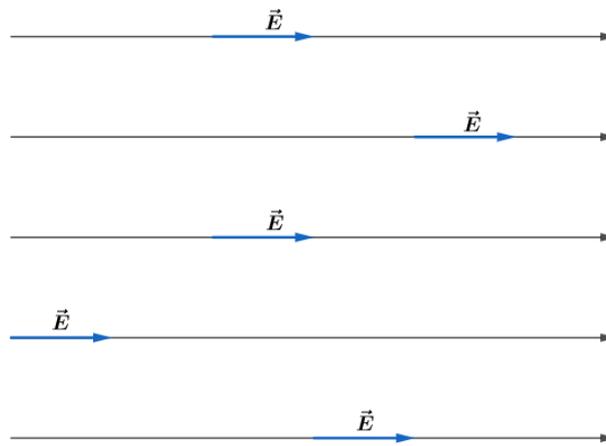


Figura 60: Região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme.

Em um campo elétrico uniforme, representamos as linhas de força por segmentos retos paralelos entre si, igualmente espaçados.

Embora não exista uma superfície ilimitada, o campo elétrico gerado por uma superfície plana, limitada e uniformemente eletrizada pode ser considerado uniforme nos pontos situados próximos a região central da placa, onde a intensidade é dada por:

$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon}$$

Esse é o módulo do campo elétrico produzido por uma placa infinita, com distribuição uniforme de cargas na superfície de um material isolante.

Podemos conseguir um campo elétrico uniforme utilizando duas placas planas e iguais, paralelas entre si e eletrizadas com cargas de mesmo módulo e sinais opostos. Quando colocamos as placas próximas, surgem três regiões do espaço:

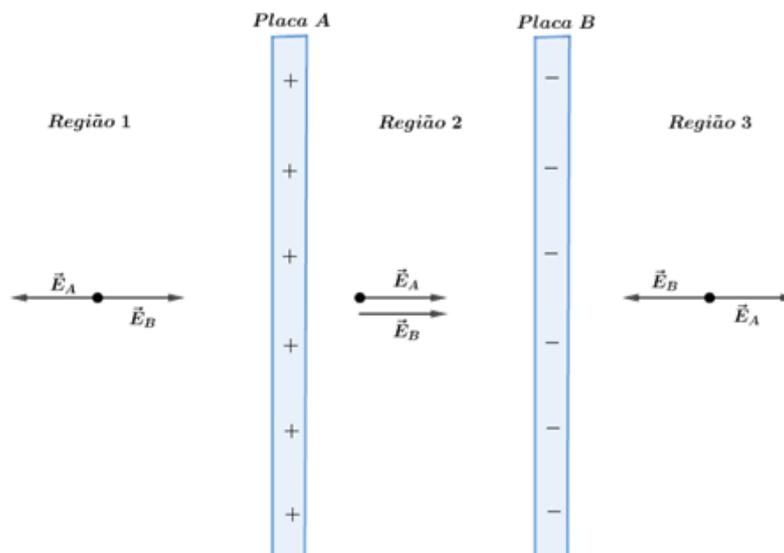


Figura 61: Campo elétrico entre duas placas infinitas e paralelas.

Dado que as placas possuem, em valor absoluto, a mesma densidade de cargas, o módulo do campo produzido por elas é o mesmo.

$$E_A = E_B = \frac{|\sigma|}{2\epsilon}$$

De acordo com a figura 22, temos o campo resultantes nas três regiões:

- Região 1:

$$\vec{E}_R = \vec{0}$$

- Região 2:

$$E_R = E_A + E_B = \frac{|\sigma|}{2\epsilon} + \frac{|\sigma|}{2\epsilon}$$

$$E_R = \frac{|\sigma|}{\epsilon}$$

- Região 3:

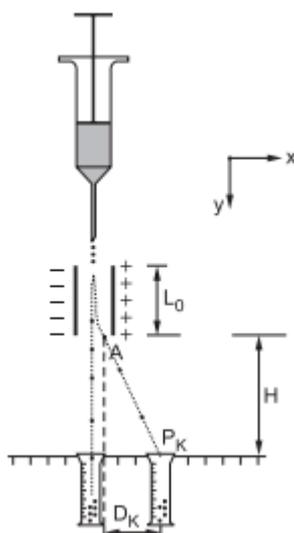
$$\vec{E}_R = \vec{0}$$

ESCLARECENDO!



9) (Fuvest – 2002)

Um selecionador eletrostático de células biológicas produz, a partir da extremidade de um funil, um jato de gotas com velocidade V_{0y} constante. As gotas, contendo as células que se quer separar, são eletrizadas. As células selecionadas, do tipo K , em gotas de massa M e eletrizadas com carga $-Q$, são desviadas por um campo elétrico uniforme E , criado por duas placas paralelas carregadas, de comprimento L_0 . Essas células são recolhidas no recipiente colocado em P_K , como na figura. Para as gotas contendo células do tipo K , utilizando em suas respostas apenas Q, M, E, L_0, H e V_{0y} determine:



- a) A aceleração horizontal A_x dessas gotas, quando elas estão entre as placas.



b) A componente horizontal V_x da velocidade com que essas gotas saem, no ponto A , da região entre as placas.

c) A distância D_K , indicada no esquema, que caracteriza a posição em que essas gotas devem ser recolhidas.

(Nas condições dadas, os efeitos gravitacionais podem ser desprezados).

Comentários:

a)

Quando a gota eletrizada com carga $-Q$ entra na região entre as placas, ela fica sujeita a ação da força elétrica e como o campo está orientado no sentido contrário ao eixo x adotado na questão, a força elétrica na carga negativa está orientada no sentido do eixo x .

A única força que atua na partícula em x é a força elétrica, portanto, ela será a resultante em x :

$$\vec{F}_{Rx} = (-Q) \cdot E \cdot (-\hat{x})$$

$$M \cdot \vec{A}_x = Q \cdot E \cdot \hat{x}$$

$$\vec{A}_x = \frac{Q \cdot E}{M} \hat{x}$$

Em módulo: $A_x = \frac{Q \cdot E}{M}$.

b)

Em x , temos um MUV, pois existe a aceleração de módulo constante A_x . Logo, a velocidade em x obedece a equação horária:

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

$$v_x = 0 + A_x \cdot t$$

$$v_x = \frac{Q \cdot E}{M} \cdot t$$

Em y , a gota está caindo com velocidade praticamente constante, já que os efeitos gravitacionais foram desprezados, então, a função horária do espaço é dada por:

$$y = y_0 + v_y \cdot t \Rightarrow y = 0 + V_{0y} \cdot t \Rightarrow y = V_{0y} \cdot t$$

O tempo que a gota percorre no interior das placas pode ser dado por:

$$\Delta y = L \Rightarrow L = V_{0y} \cdot t_{placas} \Rightarrow t_{placas} = \frac{L}{V_{0y}}$$

Então, a velocidade em x quando a gota sai da região das placas é dada por:

$$v_x = \frac{Q \cdot E}{M} \cdot \frac{L}{V_{0y}}$$

c)



Após a gota sair da região entre as placas, nenhuma força atuará tanto em x quanto em y . Dessa forma, nessa fase do movimento da gota temos apenas a composição de dois MU, um em cada eixo:

$$\Delta y = V_{0y} \cdot t$$

$$\Delta x = v_x \cdot t$$

Tempo para partícula percorrer H :

$$H = v_{0y} \cdot t_H$$

Logo:

$$D_K = \frac{Q \cdot E}{M} \cdot \frac{L}{V_{0y}} \cdot \frac{H}{V_{0y}}$$

$$D_K = \frac{Q \cdot E \cdot L \cdot H}{M \cdot V_{0y}^2}$$

7. Uma breve revisão da mecânica

Antes de iniciarmos nossa aula de Potencial Elétrico, vamos fazer uma breve revisão de alguns conceitos da Mecânica que ainda não foram vistos, mas serão detalhados futuramente. O entendimento dessas definições é fundamental para melhor compreender o significado de potencial elétrico.

7.1. Trabalho de uma força

Define-se trabalho de uma força ao longo de um deslocamento \vec{d} como sendo o produto escalar de \vec{F} com \vec{d} , ou matematicamente:

$$\tau = \vec{F} \cdot \vec{d} = F \cdot d \cdot \cos\alpha$$

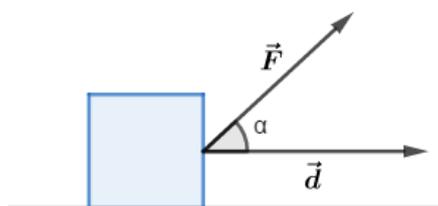


Figura 62: Definição de trabalho de uma força.

Note que o trabalho é definido a partir de um produto escalar, logo ele é uma grandeza escalar. Sua unidade no SI é o joule (J) e existem duas possibilidades quanto ao sinal do trabalho:

- $\tau > 0$: dizemos que é um trabalho motor.



- $\tau < 0$: dizemos que é um trabalho resistente.

7.2. Trabalho da força peso

Uma partícula indo de A para B, está sobre a influência de diversas forças inclusive da força peso, de tal forma que seu deslocamento é \vec{d} .

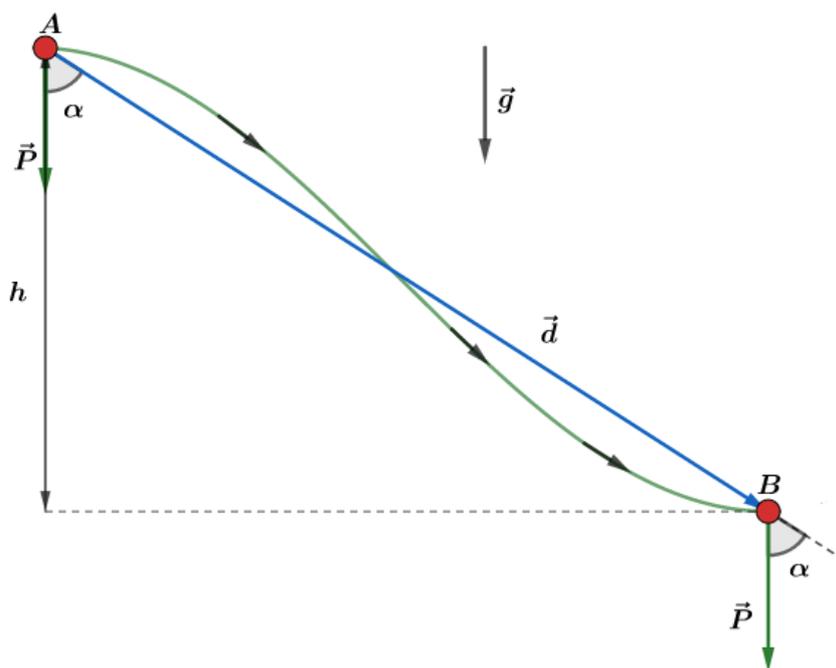


Figura 63: Corpo descendo sob ação de diversas forças, inclusive a força peso.

Considerando que a gravidade (\vec{g}) seja constante, ou seja, a força peso não varia no intervalo estudado. Podemos calcular o trabalho da força peso como sendo:

$$(\tau_{\vec{P}})_{A \rightarrow B} = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos \alpha$$

Entretanto, pela geometria da figura 1, temos que:

$$|\vec{d}| \cdot \cos \alpha = h$$

Em que h é a diferença de níveis dos pontos A e B, podendo ser expresso pela diferença de níveis, isto é:

$$h = h_A - h_B$$

Com isso, reescrevemos a expressão do trabalho da força peso do nível A para o nível B da seguinte forma:

$$\boxed{(\tau_{\vec{P}})_{A \rightarrow B} = P \cdot h = m \cdot g \cdot h}$$

Se quiséssemos levar a carga de B para A, o trabalho da força peso seria dado por:

$$(\tau'_{\vec{P}})_{A \rightarrow B} = P \cdot d \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = -P \cdot d \cdot \cos \alpha$$

Ou ainda:

$$(\tau'_{\vec{p}})_{A \rightarrow B} = -m \cdot g \cdot h$$

Notamos então que:

O trabalho da força peso é **positivo** na **descida** e **negativo** na **subida**.



Dizemos que uma força é conservativa quando o trabalho por ela realizado ao longo de um percurso fechado é nulo. Ou ainda, o trabalho de uma força conservativa não depende da trajetória.

Podemos ver o caráter conservativo da força peso analisando o seguinte caso:

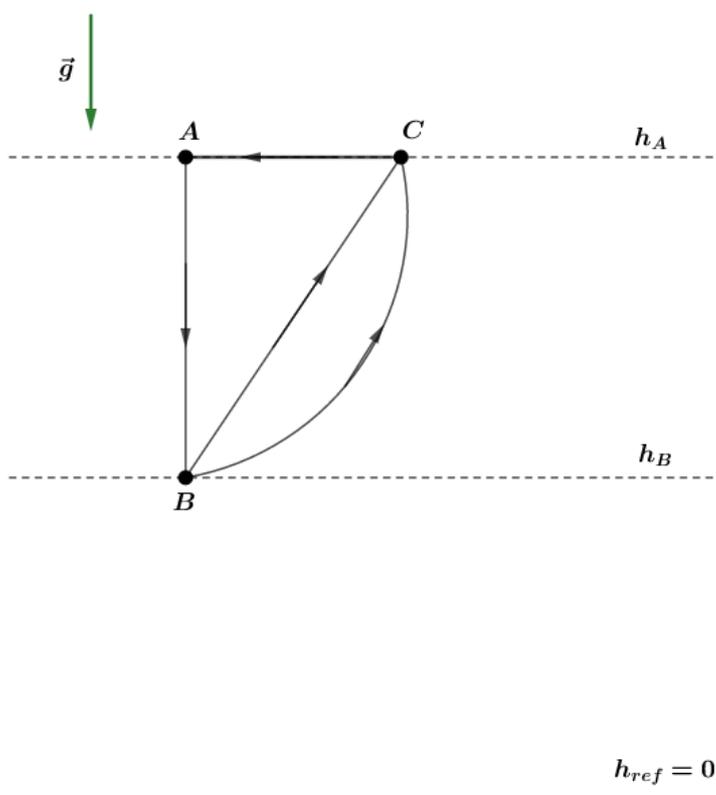


Figura 64: Trabalho da força peso.

Calculando o trabalho da força peso no percurso fechado ABCA, temos que:

$$\begin{aligned} \tau_{\vec{p}} &= (\tau_{\vec{p}})_{A \rightarrow B} + (\tau_{\vec{p}})_{B \rightarrow C} + (\tau_{\vec{p}})_{C \rightarrow A} \\ \tau_{\vec{p}} &= m \cdot g \cdot (h_A - h_B) + m \cdot g \cdot (h_B - h_A) + m \cdot g \cdot (h_A - h_A) = 0 \end{aligned}$$

Se tivéssemos tomado outro caminho o resultado seria o mesmo, evidenciando o caráter conservativo da força peso. Toda vez que estamos trabalhando com uma força conservativa podemos associar a ela uma energia potencial.



8. Potencial elétrico

Já vimos os conceitos de força elétrica e campo elétrico, definições de grandezas vetoriais. Neste momento, vamos introduzir o conceito de potencial elétrico, semelhante ao que foi feito na nossa revisão da mecânica. Tudo para que fique o mais claro possível o conceito de potencial elétrico.

Para isso, vamos estudar o trabalho da força elétrica no campo elétrico uniforme.

8.1. O Trabalho no campo elétrico uniforme

Seja E a intensidade de um campo elétrico uniforme. Inicialmente, vamos tomar dois pontos quaisquer A e B , numa mesma linha de força, separados pela distância d .

Devido ao fato de a força ser constante, já que o campo elétrico é uniforme ($E = cte$), o trabalho da força elétrica \vec{F}_{ele} nesse deslocamento é dado por:

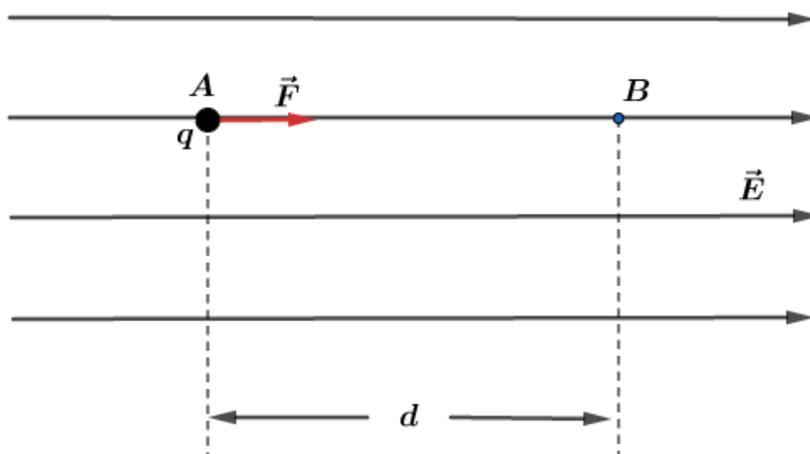


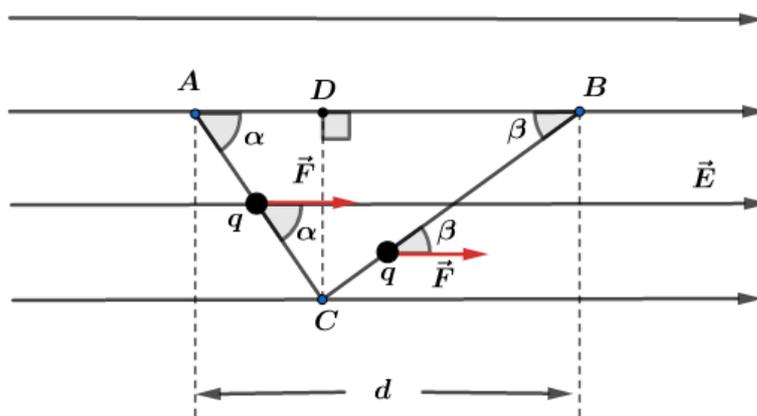
Figura 65: Carga se locomovendo ao longo de um campo elétrico uniforme.

$$(\tau_{\vec{F}_{ele}})_{A \rightarrow B} = F \cdot d$$

Mas, como $F = q \cdot E$, temos:

$$(\tau_{\vec{F}_{ele}})_{A \rightarrow B} = q \cdot E \cdot d$$

Agora, vamos tomar um terceiro ponto C , que pertence a outra linha de força, como mostra a figura abaixo:



Quando a carga q desloca-se de A para C e, depois, de C para B , temos os seguintes trabalhos em cada trecho:

$$(\tau_{\vec{F}_{ele}})_{A \rightarrow C} = F \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\alpha)$$

$$(\tau_{\vec{F}_{ele}})_{C \rightarrow B} = F \cdot \overline{CB} \cdot \cos(\beta)$$

O trabalho total no deslocamento ACB é a soma dos trabalhos:

$$(\tau_{\vec{F}_{ele}})_{A \rightarrow C \rightarrow B} = (\tau_{\vec{F}_{ele}})_{A \rightarrow C} + (\tau_{\vec{F}_{ele}})_{C \rightarrow B}$$

$$(\tau_{\vec{F}_{ele}})_{A \rightarrow C \rightarrow B} = F \cdot \overline{AC} \cdot \cos(\alpha) + F \cdot \overline{CB} \cdot \cos(\beta) = F(\overline{AC} \cdot \cos(\alpha) + \overline{CB} \cdot \cos(\beta))$$

Pela geometria do problema, vemos que:

$$\overline{AC} \cos(\alpha) = \overline{AD} \text{ e } \overline{CB} \cos(\beta) = \overline{DB}$$

$$\overline{AD} + \overline{DB} = \overline{AB}$$

Portanto:

$$\overline{AC} \cdot \cos(\alpha) + \overline{CB} \cdot \cos(\beta) = \overline{AB} = d$$

$$\boxed{(\tau_{\vec{F}_{ele}})_{A \rightarrow C \rightarrow B} = F \cdot d}$$

Dessa forma, o trabalho da força elétrica tomando o deslocamento ACB é o mesmo que o trabalho no deslocamento AB .

$$\boxed{(\tau_{\vec{F}_{ele}})_{A \rightarrow C \rightarrow B} = F \cdot d = (\tau_{\vec{F}_{ele}})_{A \rightarrow B}}$$

Este resultado pode ser generalizado, pois para qualquer trajetória que tomássemos entre A e B , o trabalho da força elétrica seria dado por:

$$(\tau_{\vec{F}_{ele}})_{A \rightarrow B} = F \cdot d = q \cdot E \cdot d$$

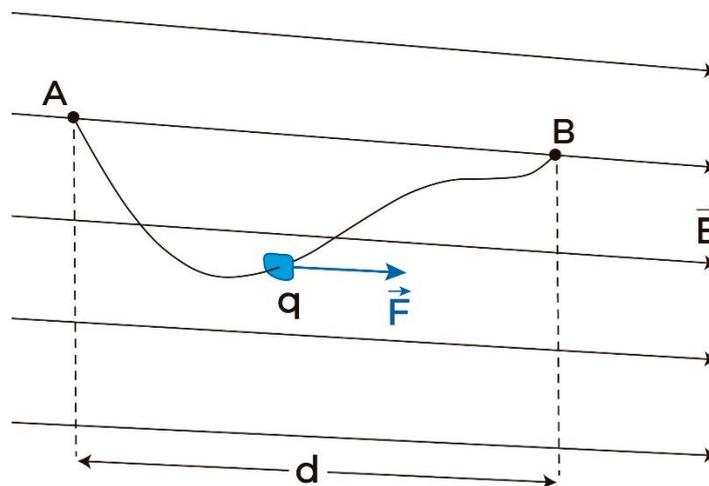


Figura 66: Carga elétrica se movendo em uma região onde o campo elétrico é uniforme.

Desse resultado, concluímos que o trabalho da força elétrica independe da trajetória, apenas da carga elétrica e da posição dos pontos A e B na região do campo elétrico. Ainda que mostremos esse fato para uma situação particular (trabalho realizado no campo elétrico uniforme), podemos generalizar esse resultado da seguinte forma:





O trabalho realizado por uma força elétrica para ir de A até B não depende da trajetória.

Como vimos, forças conservativas possuem como propriedade o fato do trabalho por ela realizado não depender da trajetória. Por isso, dizemos que a força elétrica é uma força conservativa.

Se o campo não for eletrostático, ele não será conservativo, mas isso é um assunto que foge do nosso escopo de curso. Sempre consideraremos campos eletrostáticos, gerados por cargas elétricas em repouso.

8.2. A energia potencial no campo eletrostático

Sempre que trabalhamos com campo de força conservativo, associamos os conceitos de energia potencial e de potencial. Aplicamos essa ideia na mecânica, quando estudamos a formulação da energia potencial associada ao campo gravitacional, já que se trata de um campo de forças conservativo.

Analogamente, faremos um tratamento semelhante, pois o campo eletrostático também é conservativo. Para isso, considere uma carga elétrica positiva puntiforme solta com velocidade nula num ponto A em uma região que existe um campo eletrostático qualquer.

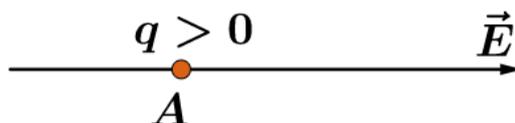


Figura 67: Carga elétrica positiva com velocidade nula em uma região do campo elétrico \vec{E} .

Nessas condições, a força elétrica tende a deslocar a carga na própria orientação do campo, promovendo um trabalho positivo. Dessa forma, a partícula ganha energia cinética. Diante disso, podemos dizer que a partícula possuía uma certa energia que se transformou em energia cinética. Essa outra forma de energia chamamos de energia potencial elétrica.

Assim como na mecânica, quando fomos definir a energia potencial, foi necessário atribuir um referencial para que pudéssemos determinar a energia potencial. Na elétrica não é diferente.

Define-se energia potencial de uma carga elétrica puntiforme q , em um dado ponto A , como o trabalho que a força elétrica realiza quando é levada do ponto A até o ponto de referência R . Em outras palavras:

$$(E_{pot})_A = \tau_{A \rightarrow R}$$



8.3. O Potencial elétrico

Definimos potencial elétrico associado ao ponto A , denotado por V_A , a razão entre a energia potencial elétrica da carga em A ($(E_{pot})_A$) e o valor da carga (q), ou seja:

$$V_A = \frac{(E_{pot})_A}{q}$$

Observações:

- 1) Essa razão já é bem determinada em cada ponto do campo elétrico e independe do valor de q , isto é, independe da carga que abandonamos no campo eletrostático apenas para estudarmos o problema. Nesse momento, parece um pouco contraditório, já que estamos vendo a carga q no denominador de V_A . Este fato ficará mais claro logo a frente.
- 2) Definimos o potencial elétrico em A como o quociente de duas grandezas escalares, notoriamente, o potencial também será um **escalar**.
- 3) Sua unidade no SI é o volt, indicado pela letra V .

Assim, temos que:

$$\frac{1J}{1C} = 1J/C = 1V$$

A unidade volt é dada em homenagem ao físico italiano Alessandro Volta (1745-1827).

8.4. Determinação do trabalho em função da diferença de potencial (DDP)

Dada uma carga elétrica q que se desloca de A para B , em uma região onde existe um campo elétrico qualquer. Como o campo é conservativo, vimos anteriormente que o trabalho não depende da trajetória. Dessa forma, podemos escrever que:

$$\tau_{A \rightarrow B} = \tau_{A \rightarrow R} + \tau_{R \rightarrow B}$$

Da mesma maneira que vimos na mecânica, quando o campo é conservativo, podemos escrever que:

$$\tau_{R \rightarrow B} = -\tau_{B \rightarrow R}$$

Assim, reescrevemos nossa equação do trabalho de A até B .

$$\tau_{A \rightarrow B} = \tau_{A \rightarrow R} - \tau_{B \rightarrow R}$$

Por outro lado, a definição de energia potencial nos permite escrever que:

$$\tau_{A \rightarrow R} = (E_{pot})_A$$

$$\tau_{B \rightarrow R} = (E_{pot})_B$$

Portanto, o trabalho da força elétrica para a carga ir de A até B é dado pela diferença das energias potenciais de cada ponto:

$$\tau_{A \rightarrow B} = (E_{pot})_A - (E_{pot})_B$$

Em outras palavras, o trabalho ($\tau_{A \rightarrow B}$) é a diferença da energia potencial inicial e a energia potencial final.



Agora, podemos usar a definição de potencial elétrico de um ponto e escrever o trabalho em função da diferença de potenciais:

$$V_A = \frac{(E_{pot})_A}{q} \Rightarrow (E_{pot})_A = q \cdot V_A$$

$$V_B = \frac{(E_{pot})_B}{q} \Rightarrow (E_{pot})_B = q \cdot V_B$$

Sendo assim, chegamos que:

$$\tau_{A \rightarrow B} = q \cdot V_A - q \cdot V_B$$

$$\tau_{A \rightarrow B} = q \cdot (V_A - V_B)$$

Diante desse resultado, concluímos que o trabalho é igual ao produto da carga elétrica deslocada pela diferença de potencial (d.d.p.) $V_A - V_B$ entre os pontos inicial e final. Note que novamente o trabalho independe da trajetória realizada pela carga e não depende da existência de outras forças que podem ou não agirem sobre a partícula.

Para o caso de um campo elétrico uniforme, vimos anteriormente no item 2.1 desse capítulo que o trabalho era calculado da seguinte forma:

$$\tau_{A \rightarrow B} = q \cdot E \cdot d$$

Em que d é a distância de A até B , em uma mesma linha de força. Portanto, chegamos a seguinte relação entre o campo elétrico e os potenciais:

$$q \cdot E \cdot d = q \cdot (V_A - V_B)$$

$$E \cdot d = V_A - V_B$$

Com base nessa última expressão, temos a unidade oficial de campo elétrico justificada no SI como sendo:

$$E = \frac{(V_A - V_B)}{d}$$

Se tomarmos $d = 1 \text{ m}$ e $V_A - V_B = 1 \text{ V}$, concluímos que:

$$E = 1 \text{ V/m}$$

A partir de agora usaremos V/m como unidade do campo elétrico.

ATENÇÃO
DECORE!



8.5. O Potencial elétrico de carga elétrica puntiforme

Considere uma carga Q , fixa em um certo ponto do espaço, gerando um campo elétrico à sua volta. Seja a carga q trazida do infinito até um ponto P . Vimos que o trabalho para trazer a carga q do infinito até o ponto P pode ser calculado por:



$$\tau_{\infty \rightarrow P} = q(V_{\infty} - V_P)$$

Como $V_{\infty} = 0$, temos:

$$V_P = -\frac{\tau_{\infty \rightarrow P}}{q}$$

Sabemos que o campo elétrico de uma carga puntiforme é radial e o módulo dado por:

$$E = \frac{KQ}{r^2}$$

Portanto, podemos determinar o potencial por:

$$V_P(r) = \frac{KQ}{r}$$

Observações:

- 1) $V_P(r)$ é uma grandeza escalar.
- 2) O potencial é função de ponto, já que se trata de uma grandeza associada a cada um dos pontos da região do campo elétrico.
- 3) $V_P(r)$ não depende de eventual carga elétrica que esteja em P .
- 4) $V_P(r)$ depende da carga fonte Q , geradora do campo elétrico no ponto P .
- 5) O valor de $V_P(r)$ gerado pela carga puntiforme Q possui o mesmo sinal que a carga:

$$\begin{cases} Q > 0 \Rightarrow V > 0 \\ Q < 0 \Rightarrow V < 0 \end{cases}$$

Se plotarmos o gráfico do potencial elétrico em função da distância, obteremos um arco de hipérbole equilátera:



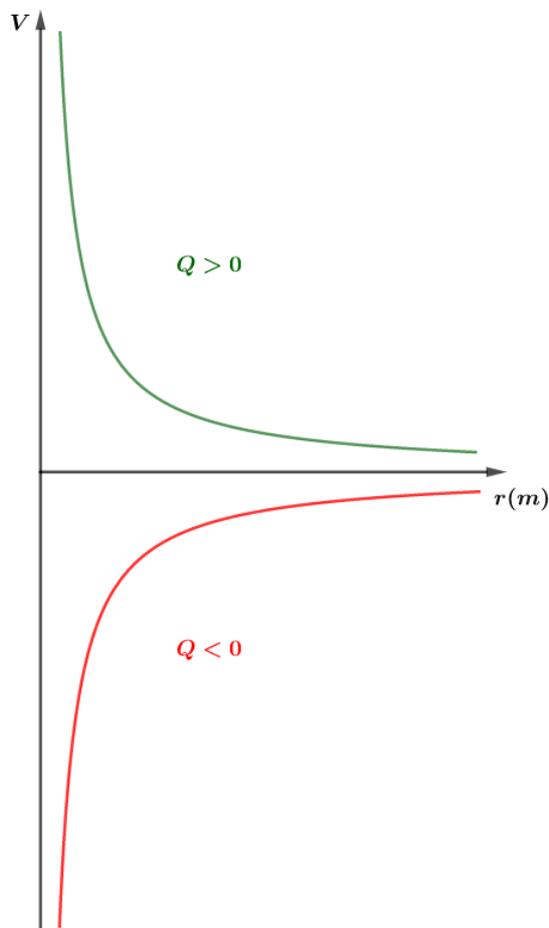


Figura 68: Gráfico do potencial elétrico gerado por uma carga puntiforme em função da distância, para os dois possíveis valores de Q .

8.6. Potencial elétrico gerado por várias cargas puntiformes

Sejam n cargas elétricas gerando um campo elétrico em um dado ponto P do espaço. Cada uma das cargas gera um potencial em P dado por:

$$V_1 = K \frac{Q_1}{r_1}, V_2 = K \frac{Q_2}{r_2}, \dots, V_i = K \frac{Q_i}{r_i}, \dots, V_n = K \frac{Q_n}{r_n}$$

Pelo Princípio da Superposição, temos que o potencial elétrico resultante é dado pela soma algébrica dos potenciais parciais:

$$V_{res} = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$
$$V_{res} = K \frac{Q_1}{r_1} + K \frac{Q_2}{r_2} + \dots + K \frac{Q_n}{r_n}$$

$$V_{res} = K \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} + \dots + \frac{Q_n}{r_n} \right)$$

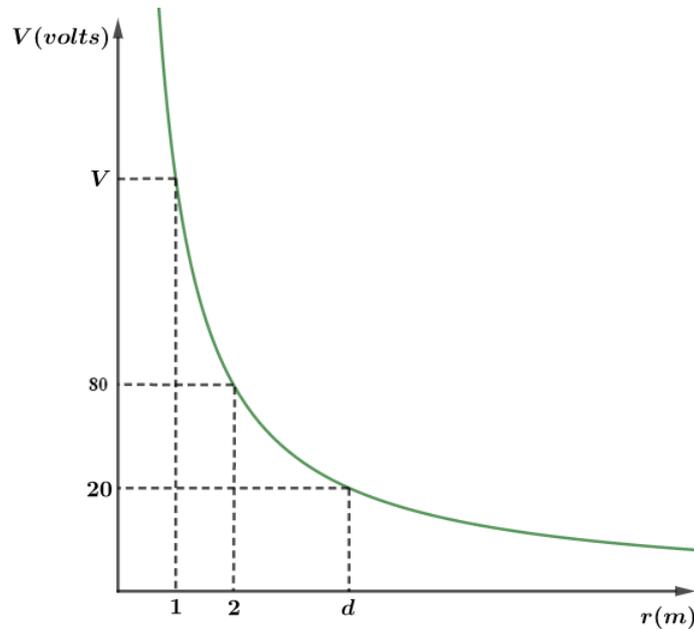
ESCLARECENDO!



10)



O gráfico abaixo mostra o potencial gerado por uma carga elétrica puntiforme, em função da distância.



Calcule:

- a) o potencial elétrico V .
- b) a distância d .

Comentários:

a) vamos pegar dois pontos do gráfico de forma estratégica:

$$V(2) = \frac{KQ}{2} = 80$$

$$V(1) = \frac{KQ}{1} = V$$

Portanto:

$$\frac{V}{80} = \frac{\frac{KQ}{1}}{\frac{KQ}{2}} \Rightarrow \boxed{V = 160V}$$

b) novamente, podemos repetir a ideia e pegar dois pontos estratégicos:

$$V(2) = \frac{KQ}{2} = 80$$

$$V(d) = \frac{KQ}{d} = 20$$

Logo:



$$\frac{\frac{KQ}{2}}{\frac{KQ}{d}} = \frac{80}{20} \Rightarrow d = 8 \text{ m}$$

11)

Determine a razão $\frac{a}{b}$ para que o potencial resultante seja nulo no ponto P .



Comentários:

$$V_P = V_A + V_B$$

Mas queremos $V_P = 0$, então:

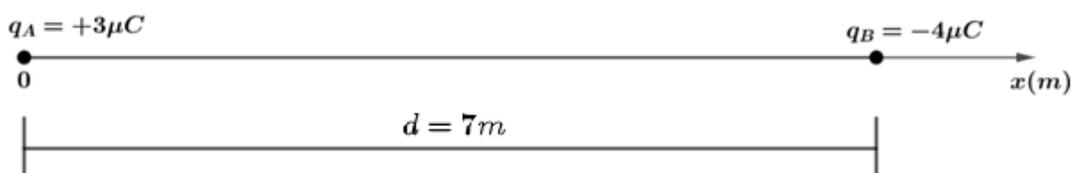
$$0 = K \frac{Q_A}{r_A} + K \frac{(-Q_B)}{r_B}$$

$$\frac{r_A}{r_B} = \frac{Q_A}{Q_B}$$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{3}{4}}$$

12)

Considere duas cargas elétricas puntiformes fixas em A e B sobre um segmento orientado x , como na figura:



Determine as abscissas onde o potencial é nulo.

Comentários:

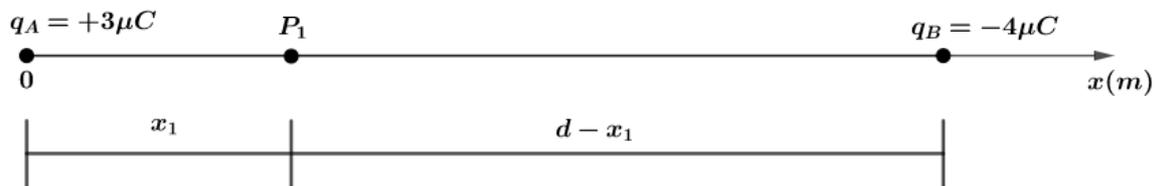
Podemos escrever os potenciais para cada carga da seguinte forma:

$$V_A = K \frac{Q_A}{r_A} \text{ e } V_B = K \frac{Q_B}{r_B}$$

$$V_A = K \cdot \frac{3\mu C}{r_A} \text{ e } V_B = K \cdot \frac{(-4\mu C)}{r_B}$$

Repare que em módulo, o numerador de $V_B > V_A$, portanto, devem existir pontos próximos de Q_A , onde a distância r_A é menor, para que $V_A + V_B = 0$. Vamos supor um ponto P_1 a direita de A onde o potencial é nulo, então:

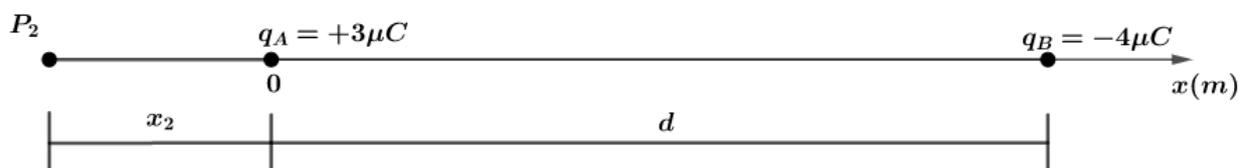




Para que o potencial elétrico no ponto P_1 seja nulo, temos:

$$\begin{aligned} V_{P_1} = 0 &\Rightarrow K \cdot \frac{3\mu C}{x_1} + K \frac{(-4\mu C)}{d - x_1} = 0 \\ \Rightarrow \frac{3}{x_1} &= \frac{4}{d - x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{3d}{7} = \frac{3}{7} \cdot 7 = 3m \end{aligned}$$

Agora, vamos procurar um ponto P_2 a esquerda de A , onde o potencial elétrico também é nulo:



Então, para que o potencial elétrico no ponto P_1 seja nulo, devemos ter:

$$\begin{aligned} V_{P_2} = 0 &\Rightarrow K \cdot \frac{3\mu C}{|x_2|} + K \frac{(-4\mu C)}{d + |x_2|} = 0 \\ \Rightarrow 3d + 3|x_2| &= 4|x_2| \Rightarrow |x_2| = 3d = 21m \end{aligned}$$

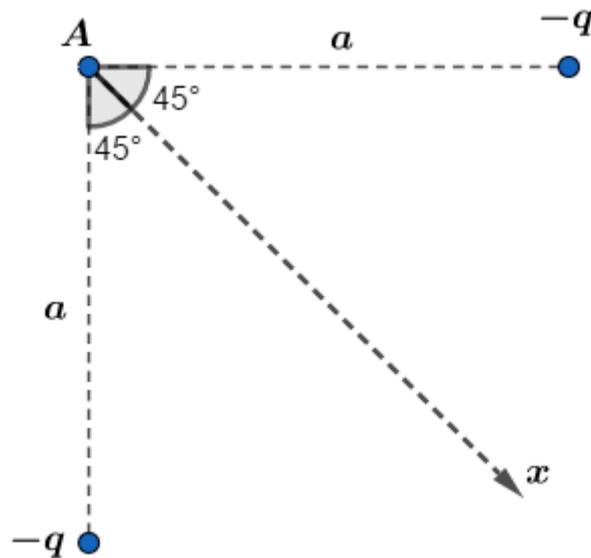
Como a abscissa x_2 está à esquerda da origem do segmento orientado, sabemos $x_2 < 0$. Portanto:

$$\boxed{x_2 = -21m}$$

13)

Duas cargas $-q$ distam a do ponto A , como indicado na figura.





- a) A que distância de A, sobre a reta Ax, devemos colocar uma carga +q para que o potencial eletrostático em A seja nulo?
- b) É este o único ponto do plano da figura em que a carga +q pode ser colocada para anular o potencial em A? Justifique a resposta.

Comentários:

a)

O potencial elétrico gerado pelas cargas $-q$ em A são dados por:

$$V_1 = K \frac{(-q)}{a} \text{ e } V_2 = K \frac{(-q)}{a}$$
$$V_1 + V_2 = -2K \frac{q}{a}$$

Assim, devemos colocar uma carga +q a uma distância d igual a:

$$V_A = 0$$
$$K \frac{q}{d} - 2K \frac{q}{a} = 0$$
$$\boxed{d = \frac{a}{2}}$$

b)

Quando fomos encontrar a distância d sobre a reta Ax onde o potencial é nulo, nós não restringimos apenas para pontos na reta Ax. Apenas colocamos a carga +q a uma distância d , pois dessa forma garantimos que o potencial em A será nulo.

Dessa forma, basta que a carga +q esteja a uma distância d do ponto A que o potencial em A será nulo. Em outras palavras, qualquer ponto da circunferência, com centro em A e raio $d = \frac{a}{2}$, fará com que a carga +q anule o potencial elétrico em A.



Portanto, o ponto encontrado no item a) não é único. O lugar geométrico dos pontos onde podemos colocar a carga $+q$ para zerar o potencial em A é uma circunferência centrada em A e raio $d = \frac{a}{2}$.



8.7. As propriedades do potencial elétrico

Propriedade 1)

As linhas de força do campo elétrico orientam-se do maior para o menor potencial.

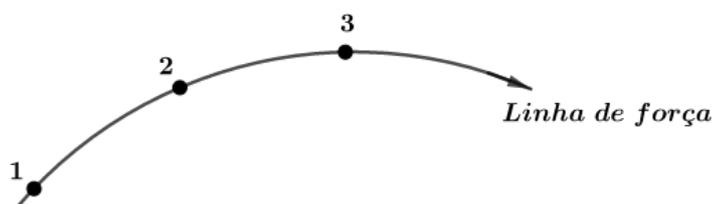


Figura 69: Linha de força de um campo elétrico qualquer.

Se desejarmos levar uma carga elétrica positiva $q > 0$ de 1 para 2, sabemos que o trabalho realizado pela força elétrica é positivo, pois a força elétrica tem a mesma direção do deslocamento:

$$\tau_{1 \rightarrow 2} = q \cdot (V_1 - V_2)$$

Como $\tau_{1 \rightarrow 2} > 0$ e $q > 0$, então $V_1 - V_2 > 0$, logo:

$$\boxed{V_1 > V_2}$$

Tal fato é evidenciado claramente quando analisamos o potencial elétrico de uma carga puntiforme $Q > 0$ que gera um campo elétrico:

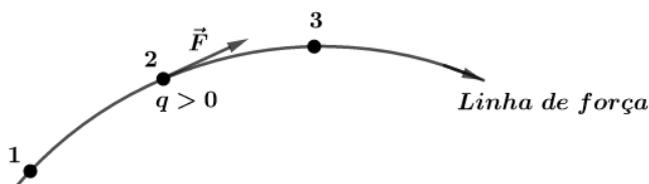


Figura 70: Direção da força elétrica em uma carga positiva em uma linha de força.

Em cada ponto, sabemos que o potencial elétrico é dado por:

$$V = K \frac{Q}{r}$$

Se pegarmos dois pontos (P_1 e P_2), onde as distâncias à carga Q são d_1 e d_2 , com $d_1 < d_2$, os potenciais serão:

$$V_1 = K \frac{Q}{d_1} \text{ e } V_2 = K \frac{Q}{d_2}$$

Dado que $d_1 < d_2$ e $Q > 0$, portanto $V_1 > V_2$.





Propriedade 2)

As linhas de força de um campo elétrico não podem sair e retornar ao mesmo ponto, isto é, as linhas de campo gerado por uma carga elétrica em repouso não podem ser linhas fechadas.

Podemos verificar essa propriedade utilizando a propriedade 1. Vamos provar por absurdo. Imagine que exista uma linha de força fechada num campo eletrostático, ou seja, gerado por cargas elétricas em repouso. Se tomarmos um ponto P e percorrer no sentido da linha de força, de acordo com a propriedade 1, os potenciais seriam cada vez menor que os anteriores.

Desse modo, quando retornamos ao ponto P (a linha de força é fechada), o potencial em P seria menor que o inicial. Claramente, chegamos a um absurdo. Como o campo é eletrostático, ele é invariável no tempo para aquele ponto, portanto, o potencial deveria ser o mesmo.



8.8. Superfícies equipotenciais

Chamamos de superfícies equipotenciais o lugar geométrico dos pontos que apresentam um mesmo potencial elétrico.

Exemplo: seja a carga puntiforme $q > 0$, em repouso, criando um campo elétrico, onde as linhas de força são representadas na figura abaixo:

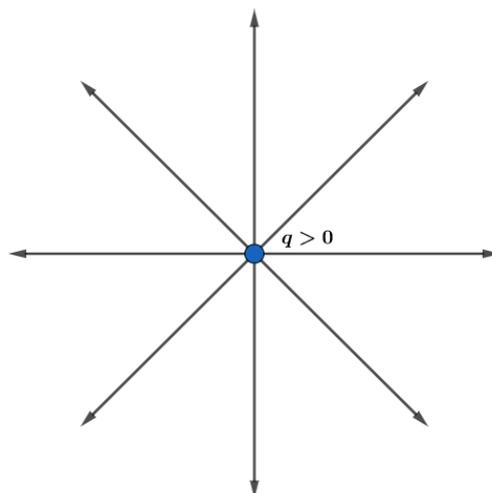


Figura 71: Campo elétrico de uma carga positiva tem direção radial, "saindo" da carga.



Dado que o potencial de uma carga puntiforme é dado por:

$$V = K \frac{q}{r}$$

Quando ponto do espaço a uma distância r_1 bem definida terá o mesmo potencial. Em outras palavras, criamos uma superfície esférica de centro em q e raio r_1 . Nessa superfície, teremos o mesmo potencial em todos os pontos.

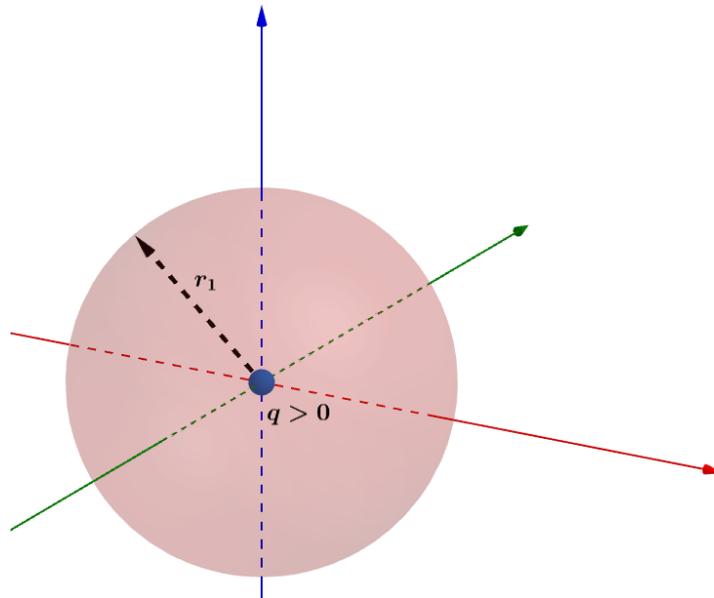


Figura 72: Superfície esférica equipotencial a uma distância r_1 .

Quando variamos a distância r em relação à carga q , estamos criando várias superfícies esféricas equipotenciais. Dizemos que geramos uma família de superfícies equipotenciais.

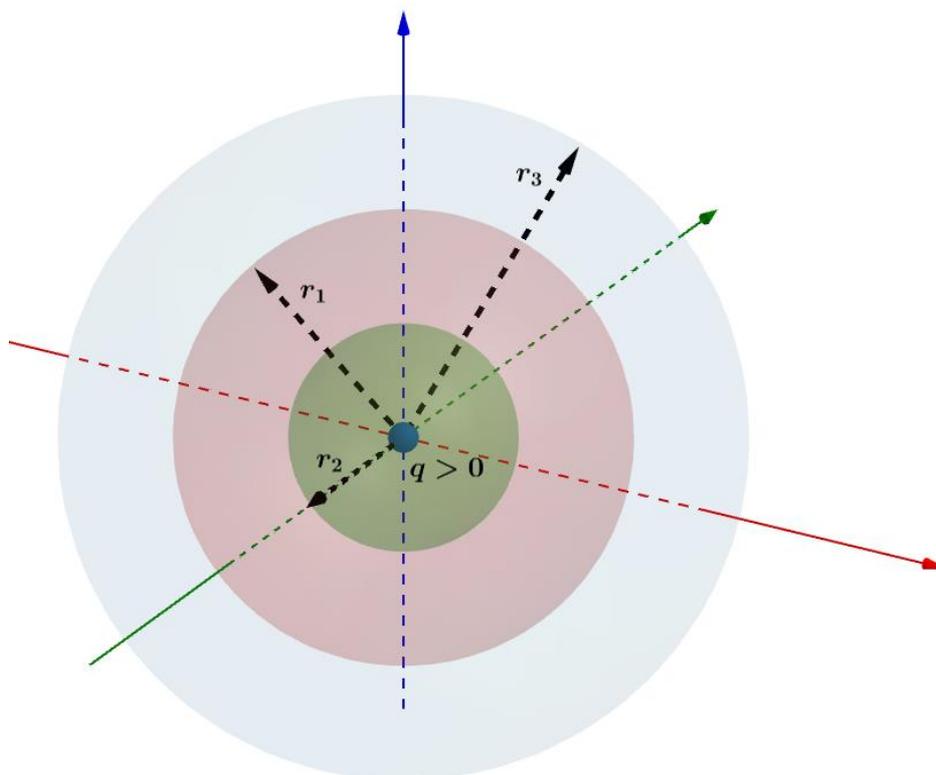


Figura 73: Família de superfícies equipotenciais.



8.8.1. As propriedades das superfícies equipotenciais

Propriedade 1)

Em uma superfície equipotencial, o trabalho da força elétrica ao longo de um deslocamento é nulo.

Podemos verificar essa propriedade através da equação do trabalho da força elétrica:

$$\tau_{A \rightarrow B} = q \cdot (V_A - V_B)$$

Como estamos em uma superfície equipotencial, temos que $V_A = V_B$, portanto:

$$\tau_{A \rightarrow B} = 0$$

Propriedade 2)

As superfícies equipotenciais são ortogonais ao vetor \vec{E} .

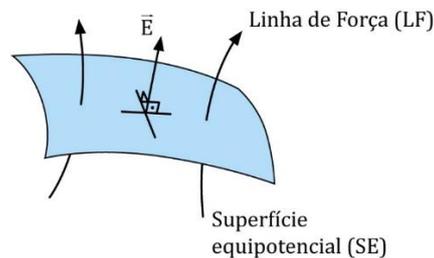


Figura 74: Superfície equipotencial ortogonal ao vetor \vec{E} .

Também podemos verificar essa propriedade por redução ao absurdo. Vamos supor que existe um \vec{E}_1 que não seja ortogonal à superfície equipotencial. Dessa forma, ele admitiria uma componente tangencial na superfície equipotencial.

Então, quando uma carga elétrica se deslocar nessa superfície, haverá trabalho elétrico realizado não-nulo. Tal fato é um absurdo, pois contraria a propriedade 1.

Exemplos de aplicações de superfícies equipotenciais perpendiculares as linhas de campo:

1) Campo elétrico uniforme:

Nesse caso, sabemos que as linhas de força constituem um feixe de retas paralelas e, portanto, as superfícies equipotenciais são planos perpendiculares as retas.



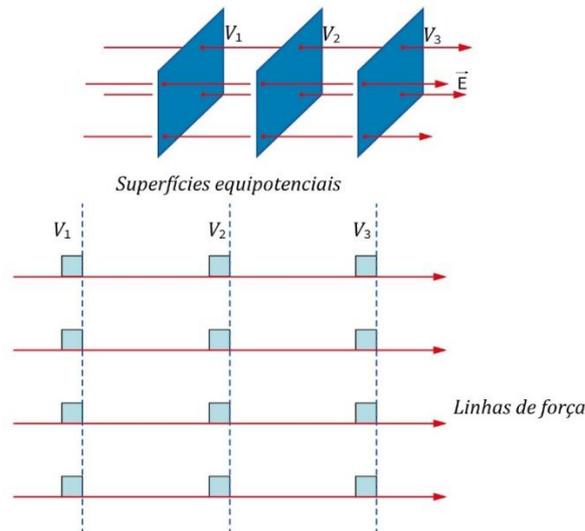


Figura 75: Linhas de campo perpendiculares às superfícies equipotenciais.

2) Campo gerado por carga puntiforme:

Como visto, as linhas de força nesse caso são radiais para fora ($q > 0$), portanto, as superfícies equipotenciais são superfícies esféricas centradas na carga geradora do campo.

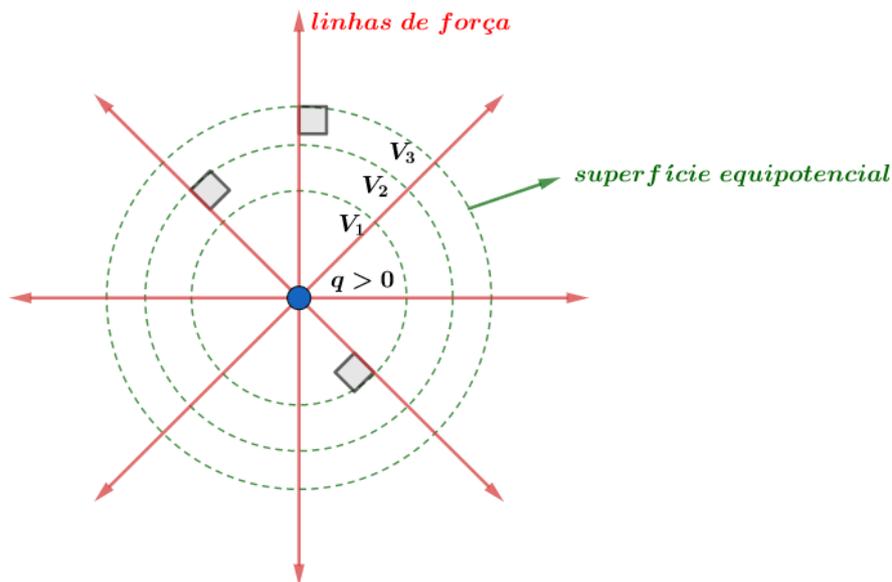


Figura 76: Superfícies equipotenciais geradas por uma carga puntiforme positiva.

3) Dipolo elétrico:

Considere um conjunto formado por duas cargas elétricas de valores simétricos ($+q$ e $-q$), formando um dipolo elétrico.

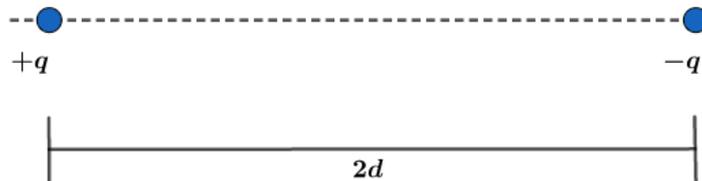


Figura 77: Dipolo elétrico a uma distância $2d$.

Se tomarmos qualquer ponto do espaço que equidista das cargas $+q$ e $-q$, ou seja, $d_{+q} = d_{-q} = r$, teremos um potencial nulo, pois:

$$V_{+q} = K \frac{q}{r} \text{ e } V_{-q} = -K \frac{q}{r} \Rightarrow \boxed{V_{+q} + V_{-q} = 0}$$

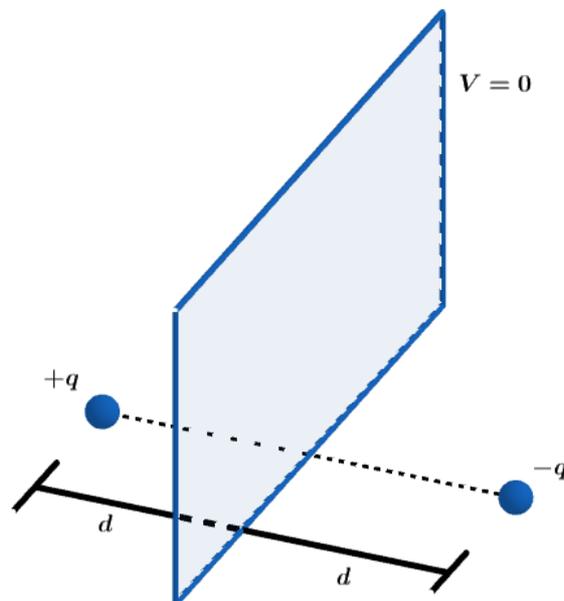


Figura 78: Plano onde o potencial elétrico das cargas é nulo.

Sabendo que as superfícies equipotenciais são ortogonais as linhas de campo, temos a seguinte representação das equipotenciais para o dipolo elétrico.

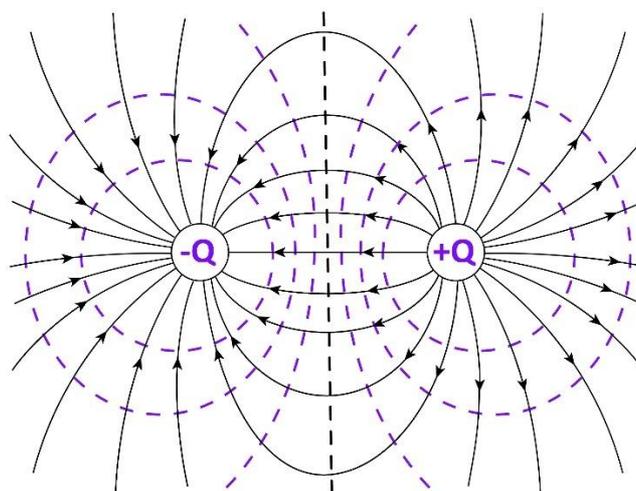


Figura 79: Representação das equipotenciais e linhas de campo para o dipolo elétrico.

O potencial gerado pelas cargas, quando deslocamos ao longo da reta que une as cargas, temos que:

$$V(x) = V_1 + V_2 = \frac{Kq}{x} - \frac{Kq}{2d - x}$$

Se plotarmos o gráfico do potencial elétrico entre as cargas em função da distância, teríamos o seguinte gráfico:

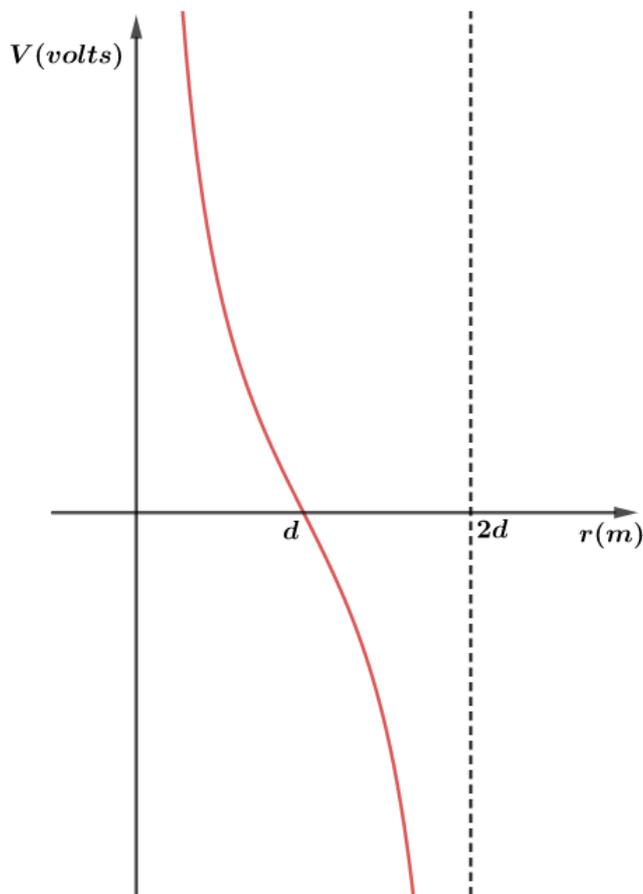


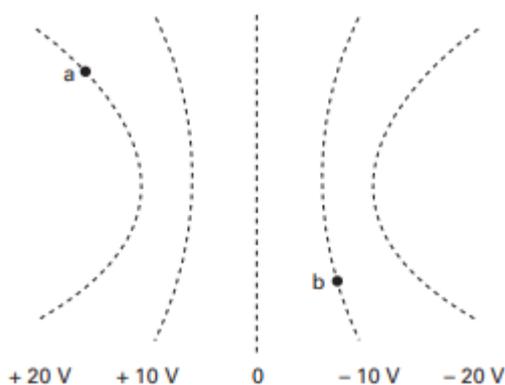
Figura 80: Potencial elétrico em função da distância para o dipolo elétrico.

ESCLARECENDO!



14)

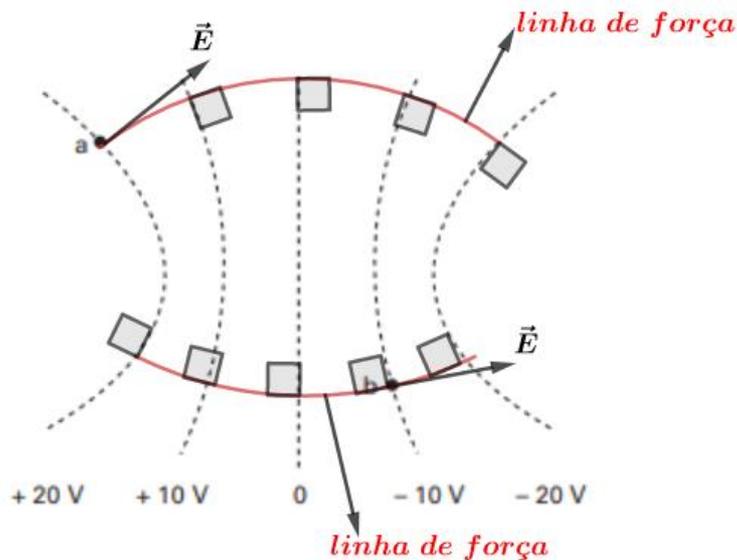
A figura representa algumas superfícies equipotenciais de um campo eletrostático e os valores dos potenciais correspondentes.



- a) Copie a figura, representando o vetor campo elétrico nos pontos a e b.
- b) Qual é o trabalho realizado pela força elétrica para levar uma carga q , de $2 \times 10^{-6} C$, do ponto a ao ponto b?

Comentários:

a) sabemos que em cada ponto da superfície equipotencial, o vetor campo elétrico é perpendicular ao plano tangente à superfície no ponto. Além disso, como visto em teoria orientamos o campo no sentido decrescentes dos potenciais. Logo, a representação é dada por:



b) o trabalho realizado pela carga elétrica $q = 2 \times 10^{-6} C$, conhecendo os potenciais nos pontos desejado é dado por:

$$\tau_{a \rightarrow b} = q \cdot (V_a - V_b) = 2 \times 10^{-6} C \cdot (20 - (-10)) = 6 \times 10^{-5} J$$

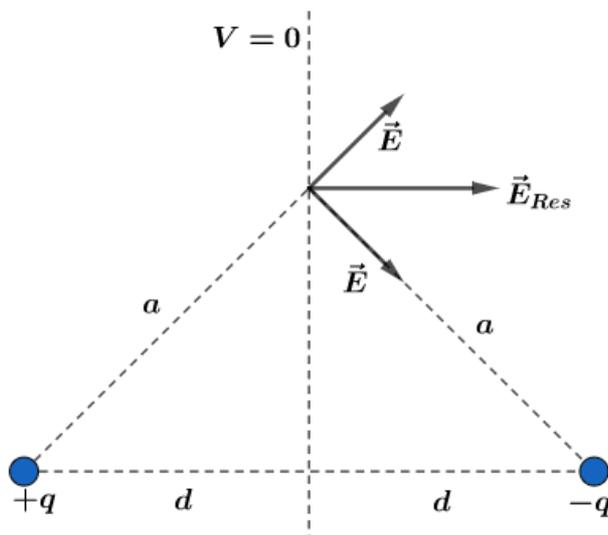
15)

Qualquer que seja a situação física envolvendo campo elétrico e potencial elétrico, podemos afirmar que:

- a) quando o campo elétrico for nulo num ponto, o potencial necessariamente também o será;
- b) quando o campo elétrico for diferente de zero num ponto, o potencial necessariamente também o será;
- c) quando o campo elétrico for constante numa região, o potencial necessariamente também o será;
- d) quando o campo elétrico for nulo numa região, o potencial será necessariamente constante nessa região.

Comentários:

- a) Incorreta. Se o campo elétrico é nulo, quer dizer que o potencial é constante, basta lembrarmos que $E = -\frac{dV}{dr}$. O potencial é constante, mas não necessariamente nulo.
- b) Incorreta. Basta pegarmos o exemplo do dipolo elétrico:

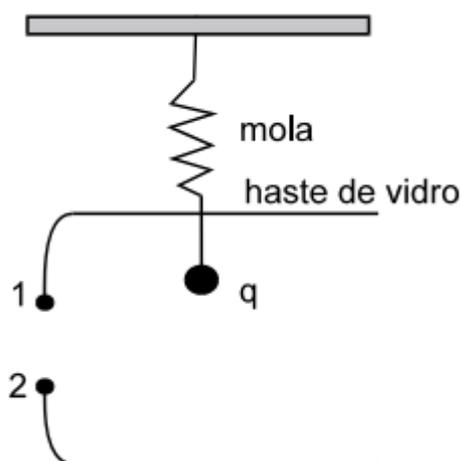


c) Incorreta. Basta lembrarmos do campo elétrico uniforme. O campo é invariante, mas os potenciais são cada vez menores a medida que caminhamos no sentido das linhas de campo.

d) Correta. Essa alternativa corrige o texto escrito na alternativa a. Quando o campo é nulo, o potencial é constante podendo ser nulo ou não.

16)

Na figura ao lado vemos uma pequena esfera metálica de carga q , presa à extremidade inferior de uma haste de vidro e situada entre duas placas condutoras. A extremidade superior da haste está presa a uma mola e todo o sistema pode oscilar verticalmente. A diferença de potencial entre as placas é V_{12} . A mola fica:



- a) comprimida quando $q < 0$ e $V_{12} < 0$;
- b) comprimida quando $q = 0$ e $V_{12} > 0$;
- c) distendida quando $q > 0$ e $V_{12} < 0$;
- d) nenhuma dessas.

Comentários:



- a) Incorreta. Se $V_{12} = V_1 - V_2 < 0$, então $V_1 < V_2$ ou $V_2 > V_1$. Portanto, o campo elétrico está orientado da placa 2 para a placa 1. Por isso, a força elétrica na carga $q < 0$, estará orientada para baixo, portanto, a mola está sendo alongada e não comprimida.
- b) Incorreta. Se $q = 0$, não existe força elétrica atuando na carga. Como é desconsiderado o efeito da força peso, a mola não sofrerá ação de mais nenhuma força.
- c) Incorreta. Semelhante ao item a, $V_2 > V_1$, campo orientado da placa 2 para a placa 1. Assim, quando colocamos uma carga positiva entre as placas, a força elétrica está orientada para cima. Portanto, a mola está sendo comprimida.
- d) Correta. Nenhuma das anteriores estão corretas.



8.9. Espontaneidade e trabalho

Vamos analisar o trabalho e a espontaneidade para os dois tipos de cargas:

1) $q > 0$:

Podemos calcular o trabalho realizado pela força elétrica para ir de A até B da seguinte forma:

$$\tau_{A \rightarrow B} = q \cdot (V_A - V_B)$$

Se $q > 0$, ao abandonarmos uma carga em A e as linhas de força se orientam de A para B , então nosso $\tau_{A \rightarrow B} > 0$. Portanto, $V_A - V_B > 0$, isto é, $V_A > V_B$.

Podemos dizer que:

Cargas positivas tendem espontaneamente potenciais menores

Se analisarmos em relação a energia potencial elétrica, lembramos que:

$$\tau_{A \rightarrow B} = (E_{pot})_A - (E_{pot})_B > 0$$

Portanto:

$$(E_{pot})_A > (E_{pot})_B$$

Podemos afirmar que:

Cargas positivas procuram minimizar a sua energia potencial.



Para onde vai essa energia, já que a energia apenas se transforma? Dado que o campo eletrostático é conservativo, essa energia foi transformada em energia cinética. Assim, a carga sempre terá módulo crescente e seu movimento espontâneo é acelerado.

2) $q < 0$:

Se $q < 0$ e $\tau_{A \rightarrow B} > 0$, então $V_A < V_B$. Em outras palavras:

.....
Cargas elétricas negativas espontaneamente procuram potenciais maiores.
.....



ATENÇÃO
DECORE!



9. Energia potencial eletrostática

Vimos que uma carga puntiforme q_A , em um ponto A, o potencial no ponto B a uma distância $r_{A,B}$ é dado por:

$$V_B = K \frac{q_A}{r_{A,B}}$$

Se desejamos trazer uma carga puntiforme q_B em repouso no infinito para o repouso no ponto B, é necessário realizar um trabalho calculado por:

$$\tau_{\infty \rightarrow B} = q_B(V_{\infty} - V_B) = -q_B \cdot V_B$$

O trabalho realizado pela força elétrica é menos o trabalho realizado pelo operador para trazer a carga do infinito e colocar no ponto B em repouso. Então:

$$\tau_B = q_B \cdot V_B = K \frac{q_A \cdot q_B}{r_{A,B}}$$

Se desejarmos trazer uma terceira carga q_C , semelhante ao processo feito pela carga q_B , temos que o trabalho para trazer a carga será:

$$\tau_C = q_C \cdot V_C$$

Mas o potencial em C é definido pelas cargas q_A e q_B :

$$V_C = K \frac{q_A}{r_{A,C}} + K \frac{q_B}{r_{B,C}}$$

Portanto:

$$\tau_C = K \frac{q_A \cdot q_C}{r_{A,C}} + K \frac{q_B \cdot q_C}{r_{B,C}}$$

Assim, o trabalho total para definir a configuração das três cargas conforme fizemos é dado pela soma dos trabalhos e isso corresponde a energia potencial eletrostática E_T do sistema de três cargas puntiformes:

$$E_T = K \frac{q_A \cdot q_B}{r_{A,B}} + K \frac{q_A \cdot q_C}{r_{A,C}} + K \frac{q_B \cdot q_C}{r_{B,C}}$$

Note que o trabalho não depende da ordem com que trazemos as cargas do infinito para suas respectivas posições finais. De um modo geral:

.....
A energia potencial eletrostática de um sistema de cargas elétricas puntiformes é igual ao trabalho para trazer as cargas do infinito para suas respectivas posições finais.
.....

Podemos manipular algebricamente a equação de E_T da seguinte forma:



$$E_T = K \frac{q_A \cdot q_B}{r_{A,B}} + K \frac{q_A \cdot q_C}{r_{A,C}} + K \frac{q_B \cdot q_C}{r_{B,C}}$$

$$E_T = \frac{1}{2} \left[K \frac{q_A \cdot q_B}{r_{A,B}} + K \frac{q_A \cdot q_C}{r_{A,C}} + K \frac{q_B \cdot q_C}{r_{B,C}} + K \frac{q_A \cdot q_B}{r_{A,B}} + K \frac{q_A \cdot q_C}{r_{A,C}} + K \frac{q_B \cdot q_C}{r_{B,C}} \right]$$

$$E_T = \frac{1}{2} \left[q_A \left(K \frac{q_B}{r_{A,B}} + K \frac{q_C}{r_{A,C}} \right) + q_B \left(K \frac{q_C}{r_{B,C}} + K \frac{q_A}{r_{A,B}} \right) + q_C \left(K \frac{q_A}{r_{A,C}} + K \frac{q_B}{r_{B,C}} \right) \right]$$

$$E_T = \frac{1}{2} [q_A \cdot V_A + q_B \cdot V_B + q_C \cdot V_C]$$

Este resultado mostra que para o caso de n cargas, a energia potencial eletrostática é dada por:

$$E_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \cdot V_i$$

ESCLARECENDO!



17)

Um sistema formado por três cargas puntiformes iguais, colocadas em repouso nos vértices de um triângulo equilátero, tem energia potencial eletrostática igual a U . Substitui-se uma das cargas por outra, na mesma posição, mas com o dobro do valor. A energia potencial eletrostática do novo sistema será igual a:

- a) $\frac{4}{3}U$
- b) $\frac{3}{2}U$
- c) $\frac{5}{3}U$
- d) $2U$
- e) $3U$

Comentários:

Podemos calcular a energia potencial eletrostática para o sistema, fazendo a soma de todas as energias tomando as cargas em combinações 2 a 2, da seguinte forma:

$$U = \frac{K \cdot q_1 \cdot q_2}{a} + \frac{K \cdot q_1 \cdot q_3}{a} + \frac{K \cdot q_2 \cdot q_3}{a}$$

Em que a é o lado do triângulo equilátero.

Como as cargas são iguais, a energia U pode ser escrita como:



$$U = \frac{3kq^2}{a}$$

Se uma das cargas dobra de valor, por exemplo a carga q_1 passa a ser $2q$, então temos a nova energia potencial eletrostática dada por:

$$U' = \frac{K \cdot q'_1 \cdot q_2}{a} + \frac{K \cdot q'_1 \cdot q_3}{a} + \frac{K \cdot q_2 \cdot q_3}{a}$$

$$U' = \frac{K \cdot 2q \cdot q}{a} + \frac{K \cdot 2q \cdot q}{a} + \frac{K \cdot q \cdot q}{a}$$

$$U' = \frac{5Kq^2}{a}$$

Fazendo $\frac{U'}{U}$, vem:

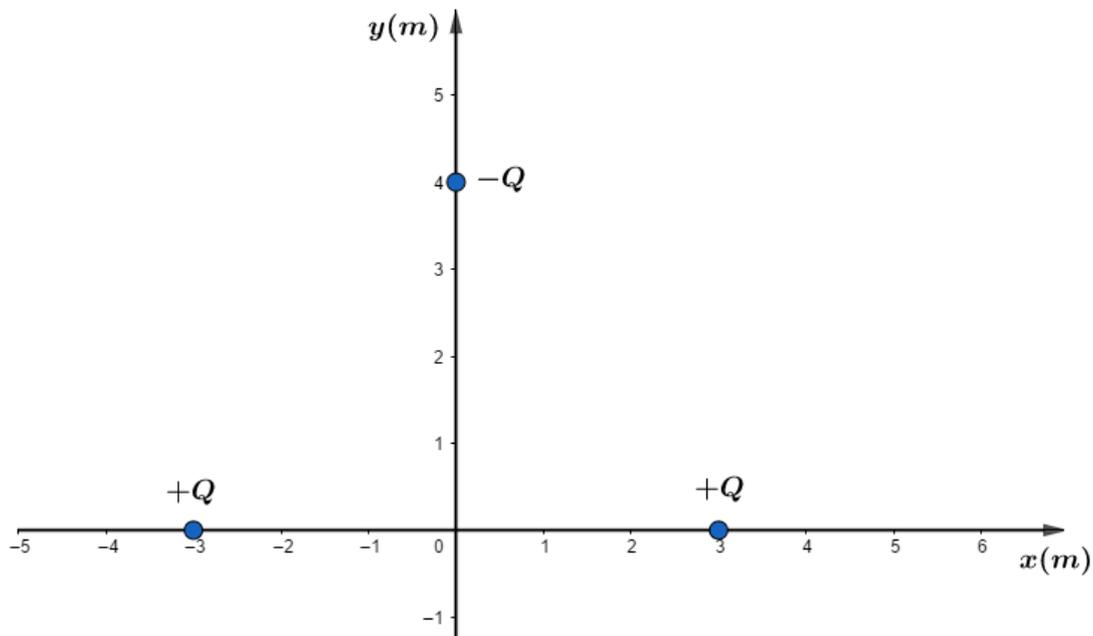
$$\frac{U'}{U} = \frac{\frac{5Kq^2}{a}}{\frac{3Kq^2}{a}}$$

$$\therefore U' = \frac{5}{3}U$$

Gabarito: C

18)

Considere três partículas de mesma massa M , eletricamente carregadas e dispostas no plano $X - Y$, como mostra a figura.



Duas delas, ambas com carga positiva $+Q$, estão fixadas, uma na posição $(-3,0)$ e a outra na posição $(3,0)$. A terceira, de carga negativa $-Q$ e originalmente na posição $(0,4)$, quando abandonada desloca-se ao longo do eixo Y devido à ação das partículas fixas, positivamente carregadas. Sabendo



que $|+Q| = |-Q| = 5 \times 10^{-6} C$, $M = 1,2 \times 10^{-3} kg$ e $K_0 = 9 \times 10^9 Nm^2/C^2$, determine o módulo da velocidade, em m/s , com a qual a partícula de carga $-Q$ passa pela origem $(0,0)$. Despreze atritos e efeitos de forças gravitacionais.

Comentários:

Devido ao fato de somente agir no corpo a força elétrica e sabendo que essa força é conservativa, podemos utilizar o teorema da energética cinética.

$$\tau_{F_{Res}} = \Delta E_c$$

Como a resultante é a força elétrica, temos que:

$$\tau_{F_{ele}} = (-Q) \cdot (V_{(0,4)} - V_{(0,0)})$$

Os potenciais nos pontos $(0,4)$ e $(0,0)$ são dados por:

$$V_{(0,4)} = K_0 \frac{Q}{\sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2}} + K_0 \frac{Q}{\sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2}}$$

$$V_{(0,4)} = 2,9 \times 10^9 \cdot \frac{5 \times 10^{-6}}{5} = 18 \times 10^3 V$$

$$V_{(0,0)} = 2,9 \times 10^9 \cdot \frac{5 \times 10^{-6}}{3} = 30 \times 10^3 V$$

Portanto, utilizando o teorema, lembrando que a carga é abandonada no ponto $(0,4)$, temos:

$$(-5 \times 10^{-6}) \cdot (18 \times 10^3 - 30 \times 10^3) = \frac{1}{2} \cdot 1,2 \times 10^{-3} \cdot v^2$$

$$v^2 = 100$$

$$\therefore \boxed{v = 10 \text{ m/s}}$$

19) (E. Naval)

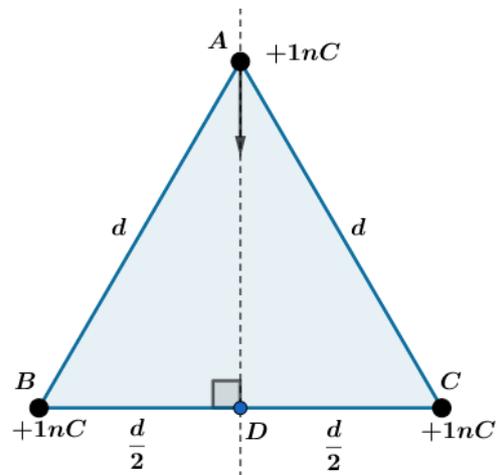
A , B e C são os vértices de um triângulo equilátero de 3 metros de lado e D é o ponto médio do lado BC . Em cada um dos vértices B e C há uma carga elétrica puntiforme, positiva, fixa, de 1,0 nanocoulomb ($1 \text{ nano} = 10^{-9}$). Uma terceira carga, puntiforme, positiva, de 1,0 nanocoulomb é lançada, com energia cinética de 10 nanojoules, do vértice A em direção ao ponto D . Considerando que a constante eletrostática do meio (vácuo) seja $9 \times 10^9 \text{ uSI}$ e que as únicas forças atuantes na carga móvel sejam as decorrentes da interação elétrica com as duas cargas fixas mencionadas, a energia cinética da carga móvel, em nanojoules, ao passar pelo ponto D é:

- a) 0
- b) 4
- c) 6
- d) 8
- e) 16



Comentários:

Vamos construir uma figura que representa a disposição física das cargas:



Novamente, devido ao fato de as forças atuantes serem apenas da interação elétrica, podemos utilizar o teorema da energia cinética:

$$\tau_{F_{res}} = \Delta E_c$$

$$\tau_{F_{ele}} = (E_c)_D - (E_c)_A$$

$$q \cdot (V_A - V_D) = (E_c)_D - (E_c)_A$$

Calculamos os potenciais em A e em D pela expressão:

$$V_A = K_0 \frac{q_B}{d} + K_0 \frac{q_C}{d} = \frac{9 \times 10^9 \cdot 2 \times 10^{-9}}{3} = 6 \text{ V}$$

$$V_D = K_0 \frac{q_B}{\frac{d}{2}} + K_0 \frac{q_C}{\frac{d}{2}} = 2 \left(K_0 \frac{q_B}{d} + K_0 \frac{q_C}{d} \right) = 2V_A = 12 \text{ V}$$

Logo, a energia cinética no ponto D , em nanojoules (nJ), é de:

$$(E_c)_D = q \cdot (V_A - V_D) + (E_c)_A$$

$$(E_c)_D = 1 \times 10^{-9}(6 - 12) + 10 \times 10^{-9} = 4 \times 10^{-9} = 4 \text{ nJ}$$

Gabarito: b.



10. Potencial elétrico de condutor carregado e em equilíbrio eletrostático

Devido ao fato de não haver movimento de cargas no condutor em equilíbrio eletrostático, podemos afirmar que não existe diferença de potencial em quaisquer dois pontos. De outra forma, dizemos que o potencial elétrico é o mesmo em todos os seus pontos internos ou da superfície.

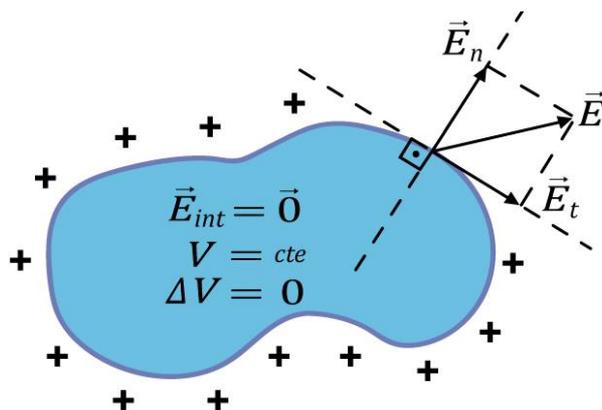
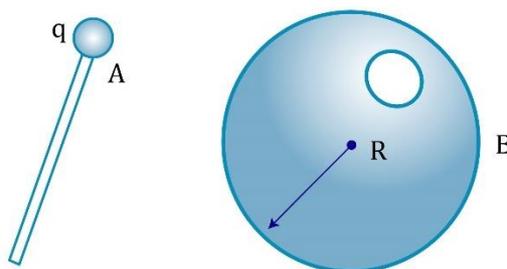


Figura 81: Propriedades de um condutor em equilíbrio eletrostático.

Além disso, quando todos os pontos da superfície do condutor possuem o mesmo potencial, dizemos que ela é uma superfície equipotencial e, conforme vimos, o campo elétrico é ortogonal a equipotencial.

20)

Considere uma pequena esfera metálica de raio r carregado com carga $+q$. Uma outra esfera metálica de raio R , tal que $R > r$, inicialmente neutra. Coloca-se a esfera menor no interior da esfera maior por um orifício, sem que ache contato entre as esferas. Em seguida, faz-se o contato da esfera menor com o interior da casca da esfera maior. Em seguida, retira-se a esfera menor de dentro da outra, sem haver qualquer outro contato. Determine as cargas finais de cada esfera.



Comentários:

Quando colocamos a esfera menor em contato com o interior da esfera maior, os dois corpos passam a ser apenas um. Dessa forma, a carga tende a se distribuir na superfície da esfera maior, que envolve todo o conjunto. Após a retirada da esfera menor, temos que a esfera menor se tornará neutra, já que seu excesso de cargas foi transferido para a superfície externa da esfera maior.

Portanto:



$$q_{menor} = 0 \text{ e } q_{maior} = +q$$

Notamos aqui um processo para neutralização de cargas.

ATENÇÃO
DECORE!



10.1. Potencial de um condutor esférico

Vimos anteriormente que o campo elétrico de um condutor esférico para regiões externas, isto é, pontos fora da esfera, tudo se passa como se o campo fosse gerado por uma carga puntiforme colocada no centro da esfera. Dessa forma, para pontos exteriores da esfera ocorrerá o mesmo para o potencial, ou seja:

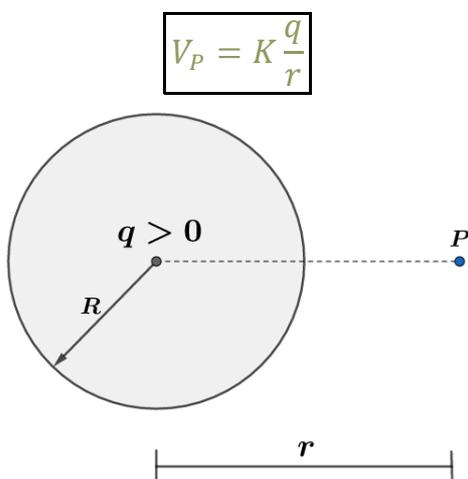


Figura 82: Potencial elétrico de um condutor esférico em função da distância ao centro dela.

Pode-se demonstrar que para pontos na superfície do condutor, o potencial é dado por:

$$V_{superfície} = K \frac{q}{R}$$

Como vimos agora a pouco, o potencial é o mesmo em qualquer ponto da esfera, portanto:

$$V_{esf} = V_{superfície} = K \frac{q}{R}$$

Assim, temos os seguintes gráficos para os potenciais das esferas condutoras em função da distância:



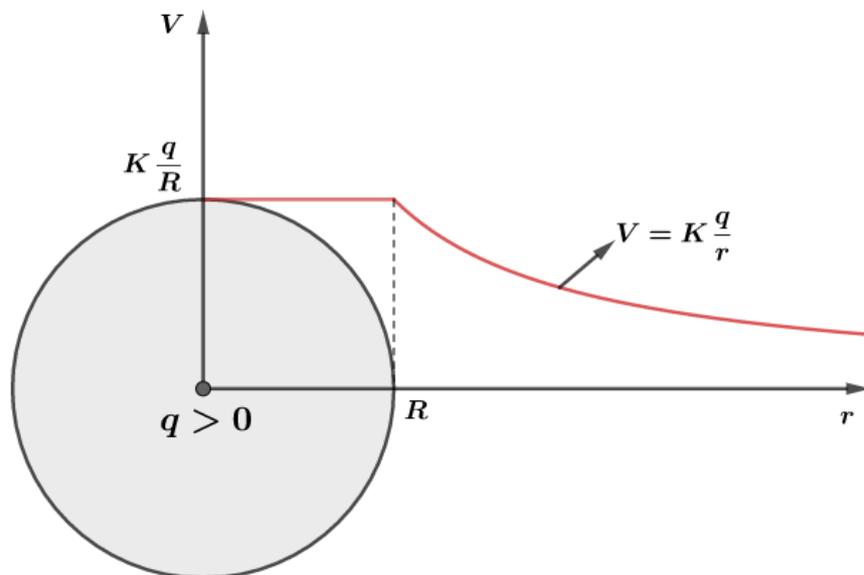


Figura 83: Potencial elétrico de um condutor esférico carregado com carga elétrica positiva em função da distância.

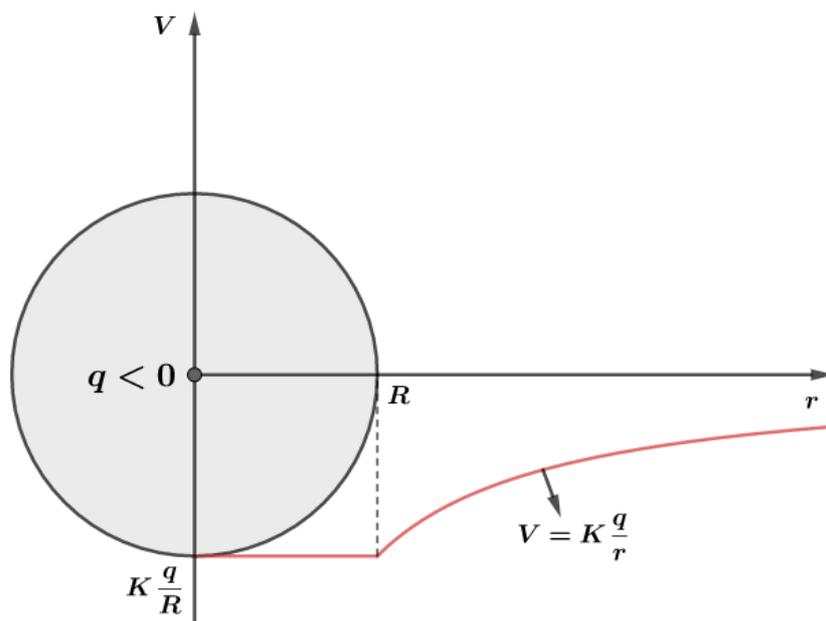


Figura 84: Potencial elétrico de um condutor esférico carregado com carga elétrica negativa em função da distância.

Embora tenhamos tirados conclusões para um condutor carregado, isolado e em equilíbrio eletrostático, podemos tomar como válidas para cargas uniformemente distribuídas em uma superfície esférica qualquer, ainda que a superfície externa seja de um material isolante.

CURIOSIDADE



10.2. O potencial da Terra

A Terra pode ser considerada um grande condutor esférico negativamente eletrizada com carga próxima de $-580\,000\text{ C}$. Como seu raio é em torno de 6400 km , se considerada isolada no universo, o potencial elétrico da Terra é próximo de:

$$V_{Terra} = 9 \times \frac{10^9(-580 \times 10^3)}{6400 \times 10^3} \cong -8 \times 10^8\text{ V}$$

Valor este calculado tomando como referencial o infinito.

Contudo, outros corpos celestes vizinhos influenciam no potencial elétrico resultante na Terra. Com isso, os efeitos nas cargas elétricas devido a fatores humanos são praticamente desprezíveis sobre o potencial da Terra.

Dessa forma, podemos considerar a Terra com um potencial invariável e, assim, comporta-se como um referencial de potencial para o homem. Por exemplo, em um laboratório, se dissermos que um corpo tem potencial de $+5000\text{ V}$ em relação à Terra, estamos falando que ele tem 5000 V a mais que a Terra.

Quando ligamos à Terra um condutor carregado negativamente, notamos que haverá fluxo de elétrons do condutor para a Terra, até o momento em que se anule a carga elétrica do corpo. Como visto anteriormente, os elétrons procuram, espontaneamente, potenciais maiores.

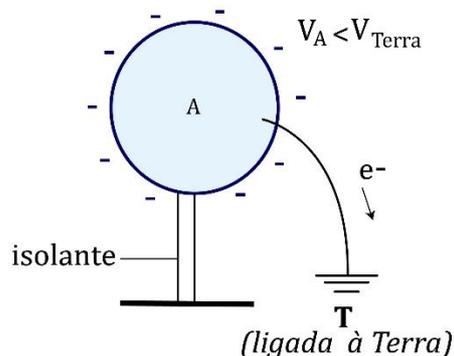


Figura 85: Carga negativa ligada à Terra.

No momento em que o condutor se neutralizar, seu potencial será o mesmo que o da Terra.

Em contrapartida, quando ligamos à Terra um condutor carregado positivamente, notamos que haverá fluxo de elétrons da Terra para o condutor, até o momento em que se anule a carga elétrica do corpo. Novamente, os elétrons (cargas negativas) procuram, espontaneamente, potenciais maiores.

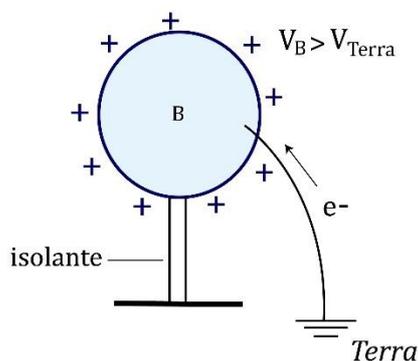


Figura 86: Carga positiva ligada à Terra.

Da mesma forma, quando o condutor se neutralizar, seu potencial será o mesmo que o da Terra.

Sendo assim, é muito importante para o homem usar ligações à Terra para descarregar os corpos. Utilizamos esse artifício para descarregar corpos que foram atingidos por raios, por exemplo. Em vias de regra, sempre que ligamos um corpo metálico à Terra, asseguramos que o seu potencial elétrico se anule.

ESCLARECENDO!



10.3. Aplicação do uso de Potenciais para Condutores em Equilíbrio Eletrostático

Vamos considerar dois corpos A e B isolados, eletrizados com cargas Q_A e Q_B , com os potenciais V_A e V_B , bem distantes uma da outra.



Figura 87: Corpos com formatos quaisquer com suas respectivas cargas e potenciais elétricos.

Se considerarmos $V_A > V_B$, e conectarmos os dois corpos, por causa da diferença de potencial, haverá um fluxo de elétrons de B para A (elétrons, que são cargas negativas, procuram potenciais maiores).

Dessa forma, o corpo B vai perdendo seus elétrons e sua carga está aumentando, logo seu potencial está aumentando. Em contrapartida, ao receber elétrons, o corpo A tem sua carga diminuída e, portanto, seu potencial está diminuindo.

Essa movimentação de cargas ocorre até que ambos tenham o mesmo potencial V_{eq} .

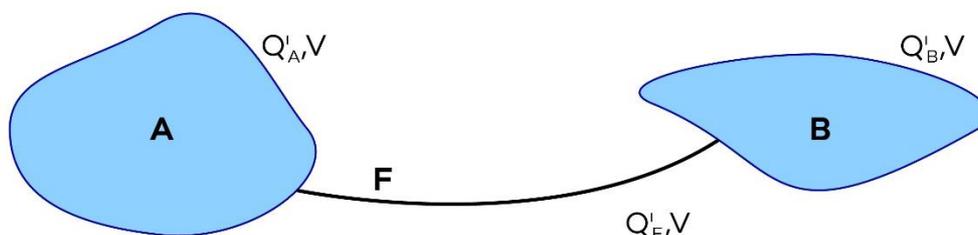


Figura 88: Contato elétrico entre as duas cargas.

De acordo com o Princípio da Conservação das Cargas, podemos escrever que:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B + Q_{fio}$$

Quando utilizamos um fio muito fino, a quantidade de cargas armazenadas nele é praticamente nula (estudaremos o conceito de capacitância mais para frente), isto é, $Q_{fio} \cong 0$ e chegamos que:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B$$

Vamos particularizar nosso estudo para o caso de condutores esféricos. Sejam A e B dois condutores esféricos de raios r_A e r_B . Se ambos estão inicialmente carregados com cargas Q_A e Q_B , respectivamente, quando colocados em contato por um fio muito fino, podemos determinar o potencial equivalente e as cargas finais de cada corpo da seguinte forma:

$$V_A = K \frac{Q_A}{r_A} \quad e \quad V_B = K \frac{Q_B}{r_B}$$

Pelo Princípio da Conservação das Cargas, temos que:

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \Rightarrow Q_A + Q_B = \frac{V_{eq} \cdot r_A}{K} + \frac{V_{eq} \cdot r_B}{K}$$

$$V_{eq} = K \left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B} \right)$$

Ou ainda em função dos potenciais V_A e V_B :

$$Q_A + Q_B = Q'_A + Q'_B \Rightarrow \frac{V_A \cdot r_A}{K} + \frac{V_B \cdot r_B}{K} = \frac{V_{eq} \cdot r_A}{K} + \frac{V_{eq} \cdot r_B}{K}$$

$$V_{eq} = \frac{V_A \cdot r_A + V_B \cdot r_B}{r_A + r_B}$$

Notamos que o potencial no equilíbrio eletrostático é a média ponderada dos potenciais, tendo como peso os raios dos condutores esféricos.

As novas cargas são dadas em função das iniciais da seguinte forma:

$$Q'_A = \frac{V_{eq} \cdot r_A}{K} = \frac{K \left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B} \right) r_A}{K}$$

$$Q'_A = r_A \left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B} \right)$$

Analogamente, a carga final de B será:

$$Q'_B = r_B \left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B} \right)$$

Observe que se considerarmos $\left(\frac{Q_A + Q_B}{r_A + r_B} \right) = c$, podemos dizer que as cargas são proporcionais aos seus raios.

Caso tenhamos n esferas, teremos que:

$$V_{eq} = \frac{V_1 r_1 + V_2 r_2 + \dots + V_n r_n}{r_1 + r_2 + \dots + r_n}$$



$$Q'_i = r_i \left(\frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{r_1 + r_2 + \dots + r_n} \right)$$

21)

Duas esferas condutoras A e B distantes possuem o mesmo raio R e estão carregadas com cargas $Q_A = -q$ e $Q_B = +2q$, respectivamente. Uma terceira esfera condutora C, de mesmo raio R porém descarregada, é trazida desde longe e é levada a tocar primeiramente a esfera A, depois a esfera B e em seguida é levada novamente para longe.

- a) qual é a diferença de potencial entre as esferas A e B antes de a esfera C tocá-las?
b) qual é a carga final da esfera C?

Comentários:

a)

Antes do contato, os potenciais são:

$$V_A = K \frac{q_A}{r_A} = -K \frac{q}{R} \text{ e } V_B = K \frac{q_B}{r_B} = +2K \frac{q}{R}$$

Portanto, a diferença de potencial $V_A - V_B$ é de:

$$V_A - V_B = -K \frac{q}{R} - 2K \frac{q}{R} = -3K \frac{q}{R}$$

b)

Carga da esfera C quando entra em contato com a esfera A:

$$Q'_C = R_C \left(\frac{Q_A + Q_C}{R_A + R_C} \right) = R \left(\frac{-q + 0}{R + R} \right) = -\frac{q}{2}$$

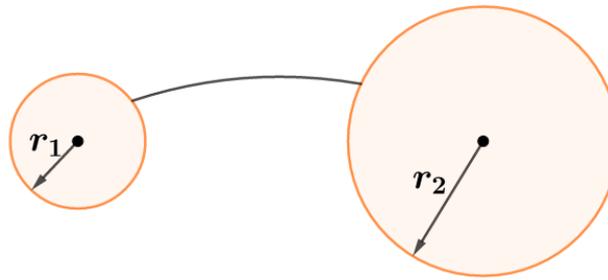
Esfera C carregada com carga $-\frac{q}{2}$, colocada em contato com B:

$$(Q_C)_{final} = R_C \left(\frac{Q'_C + Q_B}{R_C + R_B} \right) = R \left(\frac{-\frac{q}{2} + 2q}{R + R} \right) = \frac{3}{4}q$$

22)

O sistema de condutores perfeitos da figura consta de duas esferas de raios $r_1 = a$ e $r_2 = 2a$, interligados por um fio condutor de capacidade nula. Quando o sistema é eletrizado com carga positiva Q , após o equilíbrio eletrostático ser alcançado, o condutor de raio r_1 apresenta densidade superficial de carga σ_1 e o de raio r_2 apresenta densidade superficial de carga σ_2 . Nessa situação, a relação σ_1/σ_2 vale:





- a) zero
- b) 0,5
- c) 1,0
- d) 1,5
- e) 2,0

Comentários:

Os dois condutores possuem o mesmo potencial após o equilíbrio eletrostático:

$$V_1 = V_2 \Rightarrow K \frac{Q_1}{r_1} = K \frac{Q_2}{r_2} \Rightarrow \boxed{\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}}$$

As densidades superficiais de carga são dadas por:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi r_1^2} \text{ e } \sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi r_2^2}$$

Portanto:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\frac{Q_1}{4\pi r_1^2}}{\frac{Q_2}{4\pi r_2^2}} = \frac{Q_1 \cdot r_2^2}{Q_2 \cdot r_1^2}$$

Mas como $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{r_1}{r_2}$, então:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_1 \cdot r_2^2}{r_2 \cdot r_1^2}$$
$$\therefore \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1}}$$

Com isso, vemos que se $r_2 > r_1$, a esfera de raio menor possui maior densidade de cargas.

Este fato evidencia nosso resultado acerca do poder das pontas:

Se tomarmos um condutor não esférico, as cargas em excesso concentram-se mais nas regiões de menores raios de curvatura.

Para o nosso caso, $r_1 = a$ e $r_2 = 2a$, logo:



$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{2a}{a} \Rightarrow \boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = 2}$$

Gabarito: E

23) (IME – RJ)

Uma esfera de plástico, maciça, é eletrizada, ficando com uma densidade de carga superficial igual a $+0,05 \text{ C/m}^2$. Em consequência, se uma carga puntiforme $q = +1\mu\text{C}$ fosse colocada exteriormente a 3 metros do centro da esfera, sofreria repulsão de intensidade $F = 0,02\pi \text{ newtons}$. A esfera é descarregada e cai livremente de uma altura de 750 m, adquirindo, ao fim da queda, uma energia cinética de $0,009\pi \text{ joules}$. Sabendo que $g = 10 \text{ m/s}^2$, calcule a massa específica do plástico da esfera.

Comentários:

Dado que a densidade superficial da esfera é dada por:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

A carga é expressa por:

$$Q = 4\pi R^2 \cdot \sigma$$

A força entre a carga e a esfera é dada por:

$$F = K \frac{Qq}{d^2}$$

Com isso, podemos calcular o raio da esfera:

$$0,02\pi = 9 \times 10^9 \frac{(4\pi R^2 \cdot 0,05)(1 \times 10^{-6})}{3^2}$$
$$\Rightarrow \boxed{R = 10^{-2}\text{m}}$$

Na segunda parte do problema, quando a esfera é descarregada e cai livremente, temos um novo problema de energia. Quando a esfera está caindo, ela está transformando energia potencial gravitacional em energia cinética. Considerando a conservação da energia mecânica, já que não foi mencionado nenhuma força dissipativa, temos que:

$$E_p = E_c$$
$$mgh = 0,009\pi \Rightarrow m = \frac{0,009\pi}{10 \cdot 750} \text{ kg}$$

Vamos deixar as contas para o final. Portanto, a massa específica da esfera de plástico é de:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0,009\pi}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$
$$\boxed{\rho = 0,9\text{kg/m}^3}$$



11. Capacitância (C)

Conforme vimos na aula passada, tomando como referencial no infinito, o potencial de um condutor **isolado** e esférico, com raio R , carregado com carga Q , é expresso por:

$$V = K \frac{Q}{R}$$

Se manipularmos algebricamente fazendo a relação de carga por potencial do corpo, temos que:

$$\frac{Q}{V} = \frac{R}{K}$$

Observamos que essa relação mostra que a quantidade de cargas que um condutor pode reter é proporcional ao seu potencial elétrico e essa razão depende das dimensões e da forma do corpo, como mostra $\frac{R}{K}$.

Essa relação $\frac{Q}{V}$ chamamos de capacitância (C):

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{R}{K}$$

Assim, dizemos que capacitância é uma grandeza física que mede a capacidade de armazenar cargas para uma dada diferença de potencial. Ela depende exclusivamente da geometria do condutor e do meio onde ele se encontra.

Sua unidade no SI é o farad (F), em homenagem ao físico experimentalista Michael Faraday:

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{C}{V} = F$$

Observações:

- 1) A capacitância não depende do material que é feito o condutor, apenas de sua forma, de suas dimensões e do meio que o envolve.
- 2) Quando dois condutores têm o mesmo formato, aquele que possui as maiores dimensões tem maior capacitância.
- 3) Em um mesmo meio, se dois condutores possuem o mesmo volume, aquele que mais se aproxima de uma esfera terá maior capacitância. Por isso, dizemos que condutores com forma de fio têm capacitância menor quando comparado com as de condutores de outros formatos, desde que tenham o mesmo volume.
- 4) Cuidadosamente, quando mostramos a definição de capacitância, mencionamos que o condutor estava isolado. Essa restrição se deve ao fato de o potencial de dois ou mais condutores não dependerem apenas de suas cargas, mas da soma dos outros potenciais devidos às outras cargas. Dessa forma, não haveria proporcionalidade entre carga e potencial.
- 5) Quando dizemos que um corpo possui capacitância de 3 farads, esse valor representa a proporcionalidade entre a carga elétrica e o potencial. Em outras palavras, não representa



o valor máximo de nada. Geralmente, associamos capacitância com a ideia de limite máximo suportado por algo. Por exemplo, a capacidade de uma garrafa de refrigerante de 2 litros. A capacidade volumétrica dela é 2 litros, mas quando falamos de capacidade de armazenar cargas não podemos usar essa analogia.

ESCLARECENDO!



24)

Considere um condutor isolado e carregado positivamente carregado de capacitância igual a 1pF . Qual deve ser a carga fornecida a esse condutor para que seu potencial sofra um acréscimo de 200V ?

Comentários:

Notamos que o condutor não teve a sua geometria alterada e não mudou de meio, logo, sua capacitância não alterou. Logo, podemos dizer que:

$$Q_{\text{inicial}} = C \cdot V_{\text{inicial}}$$

$$Q_{\text{final}} = C \cdot V_{\text{final}}$$

Assim, a variação de carga será de:

$$\Delta Q = Q_{\text{final}} - Q_{\text{inicial}} = C \cdot V_{\text{final}} - C \cdot V_{\text{inicial}} = C(V_{\text{final}} - V_{\text{inicial}}) = C \cdot \Delta V$$

Ou seja:

$$\boxed{\Delta Q = C \cdot \Delta V}$$

Substituindo valores, temos:

$$\Delta Q = (1 \times 10^{-12}) \cdot 200$$

$$\boxed{\Delta Q = 2 \times 10^{-10}\text{C}}$$

11.1. Capacitância do condutor esférico

Dado um condutor esférico e isolado de raio R . Na aula passada, vimos que o potencial elétrico desse condutor quando carregado com uma carga Q é:

$$V = K \frac{Q}{R}$$

Assim, sua capacitância será:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{R}{K}$$

$$\boxed{C = \frac{R}{K}}$$



Caso seja fornecida a permissividade do meio que envolve o condutor, podemos reescrever a capacitância do condutor esférico:

$$C = \frac{R}{K} = \frac{R}{\frac{1}{4\pi\epsilon}}$$

$$\therefore \boxed{C = 4\pi\epsilon R}$$

Anteriormente, mencionamos que a permissividade ϵ tinha como unidade:

$$C^2/N \cdot m^2$$

Entretanto, pela equação da capacitância do condutor esférico, podemos definir uma nova unidade para ϵ :

$$C = 4\pi\epsilon R \Rightarrow \epsilon = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{C}{R}$$

Dessa forma, temos:

$$[\epsilon] = \left[\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{C}{R} \right] = \left[\frac{1}{4\pi} \right] \cdot \left[\frac{C}{R} \right] = 1 \cdot \frac{F}{m}$$

$$[\epsilon] = F/m$$

Portanto, definimos a nova unidade de ϵ como sendo F/m . Mais adiante, entenderemos melhor o que é de fato essa tal permissividade do meio.

Exemplo: vamos mostrar como é grande $1F$. Para isso, vamos calcular o raio de um condutor esférico que possui capacitância de 1 farad, onde $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} F/m$. Pela fórmula, temos que:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

$$1 = 4\pi \cdot 8,85 \times 10^{-12} R$$

$$R = 8,99 \times 10^9 m$$

Esse raio é cerca de 1400 vezes o raio da Terra. Podemos notar como é grande a unidade farad. Por isso, é muito comum aparecer os seus submúltiplos:

1 Millifarad	1 mF	$1 \times 10^{-3} F$
1 Microfarad	$1 \mu F$	$1 \times 10^{-6} F$
1 Nanofarad	$1 \eta F$	$1 \times 10^{-9} F$
1 Picofarad	$1 pF$	$1 \times 10^{-12} F$

Exemplo: qual a nova capacitância de uma esfera com carga Q , se a carga for aumentada para $5Q$?

Como a geometria do condutor não mudou, a capacitância deve ser a mesma. Note que quando multiplicamos por 5 a carga, seu potencial também será multiplicado por 5, de forma que a razão $\frac{Q}{V}$ não se altera:



$$\frac{5Q}{5V} = \frac{Q}{V}$$



11.2. Eletrização por contato

Como bem sabemos, quando interligamos dois condutores com potenciais diferentes, existe uma movimentação dos elétrons, procurando os potenciais maiores até que os condutores fiquem com o mesmo potencial. A partir desse momento, interrompe a movimentação das cargas.

Na aula passada, estudamos esse problema para o caso de condutores esféricos. Agora, com o conceito de capacitância expandiremos nossa resolução do problema das cargas após o contato para condutores quaisquer, desde que conheçamos as capacitâncias.

Vamos considerar dois corpos n corpos, carregados com cargas q_i com $i = 1, 2, \dots, n$. Considerando desprezível a capacitância dos fios e que conhecemos as capacitâncias de todos os corpos, podemos dizer que:

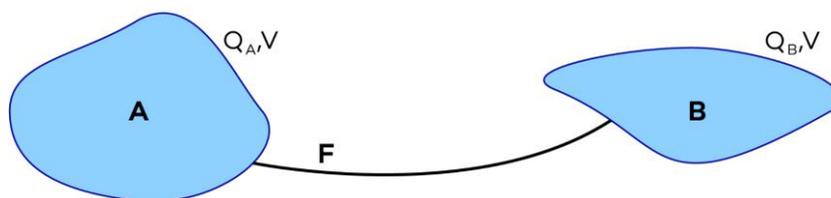


Figura 89: Aplicação do conceito de capacitância para determinação de potencial equivalente e cargas após o contato.

$$Q_{eq} = Q'_1 + Q'_2 + \dots + Q'_n$$

Como sabemos $Q = CV$, então:

$$Q'_i = C_i \cdot V_{eq}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$C_{eq} \cdot V_{eq} = C_1 \cdot V_{eq} + C_2 \cdot V_{eq} + \dots + C_n \cdot V_{eq}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

Pelo Princípio da Conservação das Cargas, podemos escrever que:

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n = Q'_1 + Q'_2 + \dots + Q'_n$$

Usando novamente $Q_i = C_i \cdot V_i$ com $i = 1, 2, \dots, n$; temos:

$$C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots + C_n V_n = C_1 \cdot V_{eq} + C_2 \cdot V_{eq} + \dots + C_n \cdot V_{eq}$$

Portanto, o potencial equivalente após o contato das n esferas é:



$$V_{eq} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots + C_n V_n}{C_1 + C_2 + \dots + C_n}$$

Notamos que o potencial equivalente é a média ponderada dos potenciais tendo como peso as capacitâncias. Se desejamos a carga final de 1, por exemplo, utilizamos que:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q'_1}{V_{eq}}$$

$$Q'_1 = \frac{Q_1}{V_1} \cdot V_{eq} \text{ ou } Q'_1 = C_1 \cdot V_{eq}$$

ESCLARECENDO!



25)

Considere três condutores isolados 1, 2 e 3, com capacitâncias $C_1 = 1 \text{ nF}$, $C_2 = 3 \text{ nF}$ e $C_3 = 6 \text{ nF}$. Os condutores são colocados em contato utilizando um fio de capacitância desprezível. Os condutores estão eletrizados com cargas $Q_1 = 10 \text{ }\mu\text{C}$, $Q_2 = 15 \text{ }\mu\text{C}$ e $Q_3 = 20 \text{ }\mu\text{C}$. Após o equilíbrio eletrostático, determine:

- o potencial dos condutores.
- a carga elétrica de cada condutor.

Comentários:

a)

Calculando o potencial elétrico equivalente após o contato, temos que:

$$V_{eq} = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2 + \dots + C_n V_n}{C_1 + C_2 + \dots + C_n} = \frac{Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n}{C_1 + C_2 + \dots + C_n}$$

$$V_{eq} = \frac{10\mu\text{C} + 15\mu\text{C} + 20\mu\text{C}}{1\text{nF} + 3\text{nF} + 6\text{nF}} = \frac{45}{10} \cdot \frac{10^{-6}}{10^{-9}} = 4,5 \cdot 10^{-6-(-9)} = 4,5 \cdot 10^3 = 4,5 \text{ kV}$$

Assim, esse será o potencial elétrico de cada um dos condutores após o equilíbrio eletrostático.

b)

Para calcular a carga elétrica de cada condutor, podemos usar que:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_{eq} = 1\text{nF} \cdot 4,5\text{kV} = 4,5 \text{ }\mu\text{C}$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_{eq} = 3\text{nF} \cdot 4,5\text{kV} = 13,5 \text{ }\mu\text{C}$$

$$Q_3 = C_3 \cdot V_{eq} = 6\text{nF} \cdot 4,5\text{kV} = 27 \text{ }\mu\text{C}$$





12. Capacitores

Nesse momento não vamos trabalhar os capacitores em regime transitório e não vamos trabalhar com capacitores em circuitos elétricos. Esse estudo será feito mais adiante.

Capacitores são dispositivos elétricos constituídos de dois condutores com cargas iguais e opostas, capaz de armazenar energia potencial elétrica, devido ao acúmulo de cargas elétricas. A capacitância do dispositivo é definida pela razão:

$$\frac{Q}{V}$$

Em que Q é o módulo da carga em dos condutores e V é a intensidade da diferença de potencial entre as duas superfícies condutoras.

Vamos demonstrar que a capacitância de um capacitor depende de dois fatores apenas:

- 1) Do isolante entre as armaduras (superfícies condutoras);
- 2) Da geometria de cada armadura, bem como da posição relativa entre elas.

Para calcular a capacitância, sempre colocaremos cargas iguais e opostas nas armaduras e determinaremos a diferença de potencial entre elas. Vale lembrar que obtemos o potencial a partir do campo elétrico devido às cargas.

12.1. Capacitores de placas paralelas

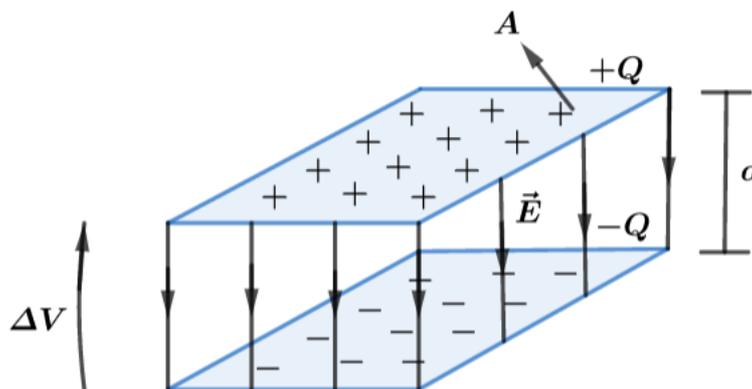


Figura 90: Capacitor de placas paralelas.

Trata-se de um dos capacitores mais utilizados. Constitui-se de duas placas paralelas, formadas por folhas metálicas delgadas, separadas e isoladas uma da outra por um filme plástico bem fino.



Seja A a área da superfície (área lateral de cada placa condutora) e a d a distância de separação entre as placas. Para minimizar os efeitos de bordas e garantir a uniformidade do campo, constrói-se o capacitor de tal forma que d seja muito menor que a largura das placas.

Com isso, carrega-se uma das placas com uma carga $+Q$ e a outra com uma carga $-Q$. As cargas se distribuem uniformemente pelas armaduras e como as superfícies estão muito próximas, podemos dizer que o campo elétrico entre elas se aproxima muito do campo entre dois planos infinitos.

Lembrando que o campo devido à um plano infinito é dado por:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

Em que $\sigma = \frac{Q}{A}$. Assim, o campo elétrico entre as placas terá módulo:

$$E = E_+ + E_-$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Em um campo elétrico uniforme, vimos a relação do potencial elétrico e do campo, expresso por:

$$\Delta V = E \cdot d \Rightarrow \Delta V = \frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot d = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon \cdot A}$$

Como capacitância é a razão da carga pela diferença de potencial, temos que:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon \cdot A}{d}$$

Notamos que a capacitância é proporcional a área das placas e inversamente proporcional a distância que separa as armaduras. Como podemos ver pela expressão logo acima, a capacitância depende das dimensões, da forma e da disposição geométrica das placas condutoras, e das propriedades do meio isolante entre os condutores (ε).



12.2. O Armazenamento da energia elétrica em um capacitor

Quando estamos carregando um capacitor, os elétrons são transferidos do condutor carregado positivamente para o condutor carregado negativamente, por aplicação de uma diferença de potencial.

Com isso, aumentamos a deficiência de elétrons no condutor positivo e deixamos o condutor negativo com excesso de elétrons. Nesse processo, parte do trabalho realizado pelas cargas serve



para carregar o capacitor e outra parte desse trabalho é armazenada em energia potencial eletrostática.

Se em um dado instante do carregamento a carga transferida for q , então a diferença de potencial será dada por $V = q/C$.

Como vimos anteriormente, a energia potencial elétrica pode ser dada por $E_p = q \cdot V$, portanto, nesse gráfico a área corresponde numericamente a energia potencial elétrica.

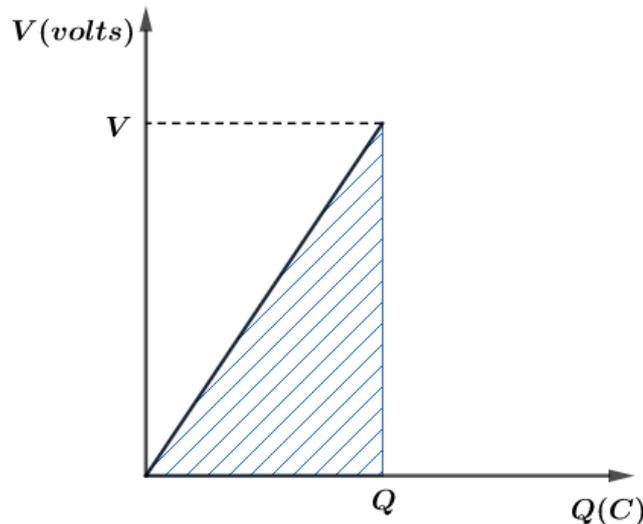


Figura 91: Gráfico do potencial em função da carga do capacitor.

$$E_p = q \cdot V \text{ e } C = \frac{q}{V}$$

Como $E_p \stackrel{N}{=} \text{área}$ e pelo gráfico temos a área de um triângulo retângulo, então:

$$E_p \stackrel{N}{=} \text{área} = \frac{1}{2} QV$$

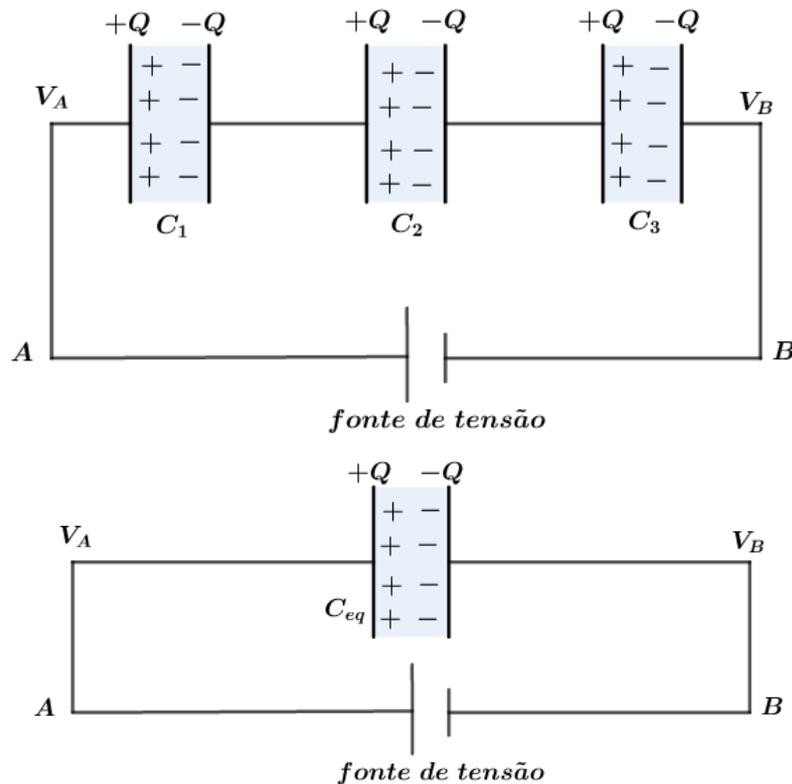
12.3. Associação de capacitores

É comum combinar dois ou mais capacitores para obter valores desejados de capacitâncias, conforme as especificações de projeto.

12.3.1. Capacitores associados em série

Dizemos que dois ou mais capacitores estão em série quando a soma das tensões é igual à diferença de potencial a que o sistema é submetido. Se estão descarregados, possuíram a mesma carga, que é igual à carga total da associação.

Este fato decorre da indução total nas placas. Quando a placa positiva de C_1 adquire carga $+Q$, será induzida uma carga $-Q$ na outra placa de C_1 . Com isso, a placa de C_2 mais próxima de C_1 será induzida com carga $+Q$ e assim por diante. Dessa forma. Todos os capacitores terão a mesma carga Q .



A diferença de potencial entre os pontos A e B é dada pela soma das diferenças de potenciais em cada capacitor:

$$V_A - V_B = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3$$

Como:

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}, \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}, \Delta V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

Por definição, a capacitância equivalente entre os pontos A e B é dada por:

$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{V_A - V_B}$$

Como a carga é a mesma para cada capacitor, assim como para a capacitância equivalente, então:

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

Para o caso de n capacitores associados em série, a soma das tensões é igual a tensão equivalente:

$$U_{eq} = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots + \frac{Q}{C_n}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

Caso os n capacitores iguais, a capacitância equivalente será:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} + \dots + \frac{1}{C}$$

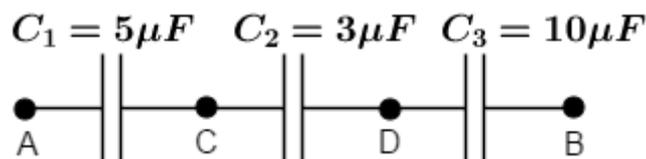
$$C_{eq} = \frac{C}{n}$$

ESCLARECENDO!



26)

Considere três capacitores combinados em série, inicialmente descarregados. O ponto A é ligado ao polo positivo de uma bateria de corrente contínua e o terminal B ao polo negativo. Nesse processo, C_1 fica com carga de $15 \mu C$.



Calcule:

- as cargas elétricas dos outros capacitores da associação.
- a diferença de potencial em cada capacitor.
- a diferença de potencial da bateria.
- a capacitância equivalente entre A e B .
- a energia armazenada na associação.

Comentários:

a)

Na associação em série temos como propriedade fundamental que a carga adquirida deve ser a mesma em cada capacitor. Assim, as cargas nos outros capacitores também serão de $15 \mu C$.

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = 15 \mu C$$

b)

Vamos utilizar a definição de capacitância para determinar a diferença de potencial em cada capacitor:



$$\Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{15 \mu\text{C}}{5 \mu\text{F}} = 3 \text{ V}$$

$$\Delta V_2 = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{15 \mu\text{C}}{3 \mu\text{F}} = 5 \text{ V}$$

$$\Delta V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{15 \mu\text{C}}{10 \mu\text{F}} = 1,5 \text{ V}$$

c)

A diferença de potencial da bateria é a soma das diferenças de potenciais em cada capacitor em série:

$$\begin{aligned}\Delta V_{AB} &= \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 \\ \Delta V_{AB} &= 3 + 5 + 1,5 = 9,5 \text{ V}\end{aligned}$$

d)

Utilizando a definição de capacitância equivalente, temos que:

$$C_{eq} = \frac{Q}{\Delta V_{AB}} = \frac{15 \mu\text{C}}{9,5} \cong 1,58 \mu\text{F}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}\frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \\ \frac{1}{C_{eq}} &= \frac{1}{5 \mu\text{F}} + \frac{1}{3 \mu\text{F}} + \frac{1}{10 \mu\text{F}} \\ C_{eq} &= \frac{30}{19} \mu\text{F} \cong 1,58 \mu\text{F}\end{aligned}$$

e)

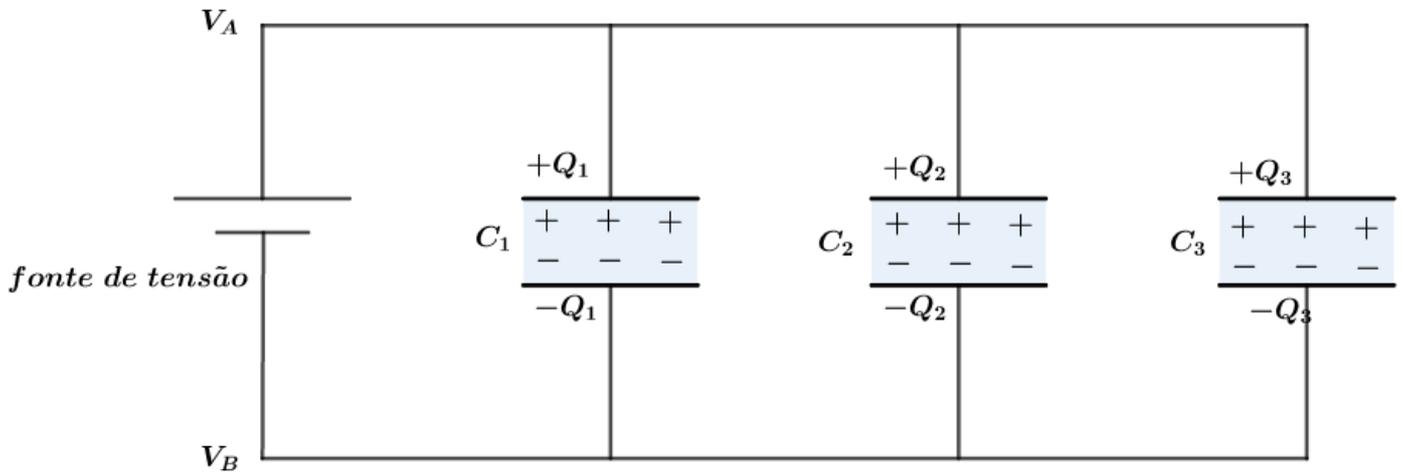
Podemos calcular a energia da combinação somando as energias armazenadas em cada dispositivo ou calcular a energia armazenada no capacitor equivalente:

$$E_p = \frac{C_{eq} \cdot \Delta V_{AB}^2}{2} = \frac{\left(\frac{30}{19} \times 10^{-6}\right) \cdot (9,5)^2}{2} = 71,25 \times 10^{-6} \text{ J}$$

12.3.2. Capacitores associados em paralelo

Dizemos que dois ou mais capacitores estão em paralelo quando a diferença de potencial a que eles estão submetidos é a mesma.





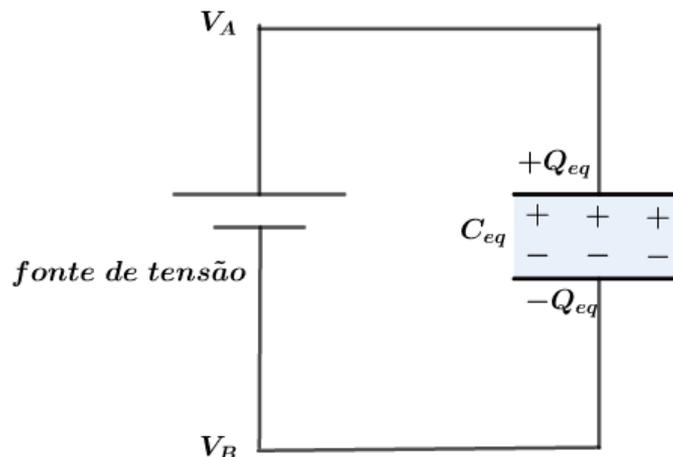
Nessa configuração, cada capacitor terá sua respectiva carga Q_1 , Q_2 e Q_3 . Pela definição de capacitância, temos:

$$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V, Q_2 = C_2 \cdot \Delta V, Q_3 = C_3 \Delta V$$

Assim, a carga total é dada pela soma das cargas:

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

O capacitor equivalente nessa combinação possuirá a carga total, sob a diferença de potencial ΔV , onde a capacitância equivalente é dada pela definição:



$$C_{eq} = \frac{Q_{eq}}{\Delta V}$$

$$C_{eq} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\Delta V} = \frac{Q_1}{\Delta V} + \frac{Q_2}{\Delta V} + \frac{Q_3}{\Delta V}$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3}$$

Para o caso de n capacitores associados em paralelo, a soma das cargas é igual a carga equivalente:

$$Q_{eq} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n$$

$$C_{eq} \cdot (V_A - V_B) = C_1 \cdot (V_A - V_B) + C_2 \cdot (V_A - V_B) + C_3 \cdot (V_A - V_B) + \dots + C_n \cdot (V_A - V_B)$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n}$$

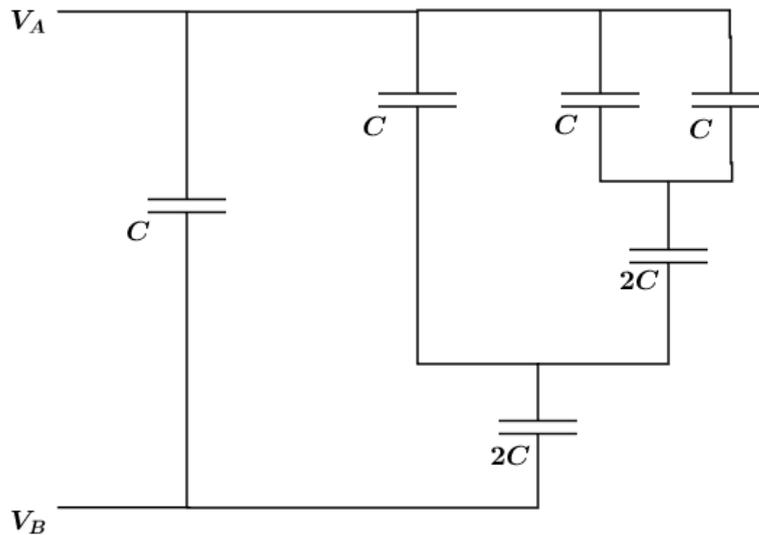


ESCLARECENDO!



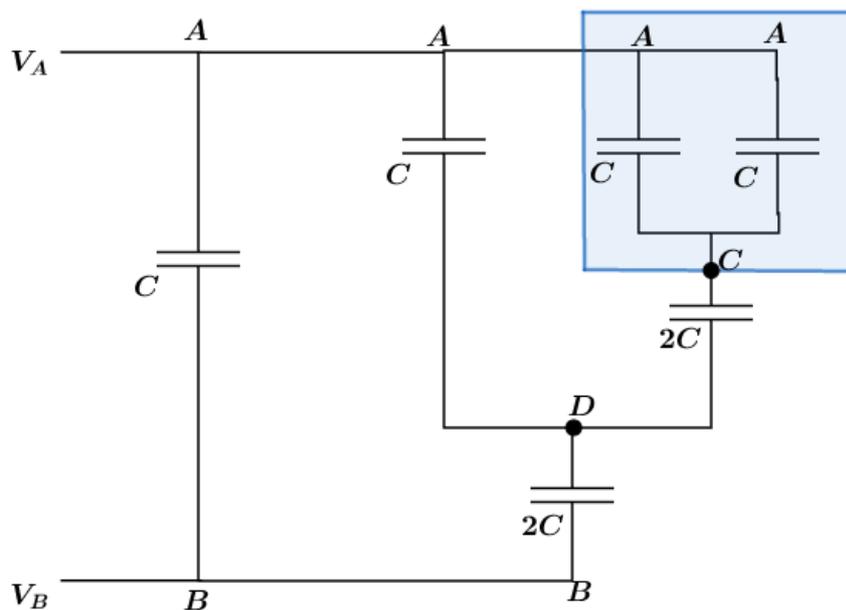
27)

Calcule a capacitância equivalente entre X e Y .



Comentários:

Vamos simplificar nossa combinação de capacitores de forma a facilitar nosso problema. Para isso, vamos dar o nome para todos os pontos que estão em potenciais diferentes:

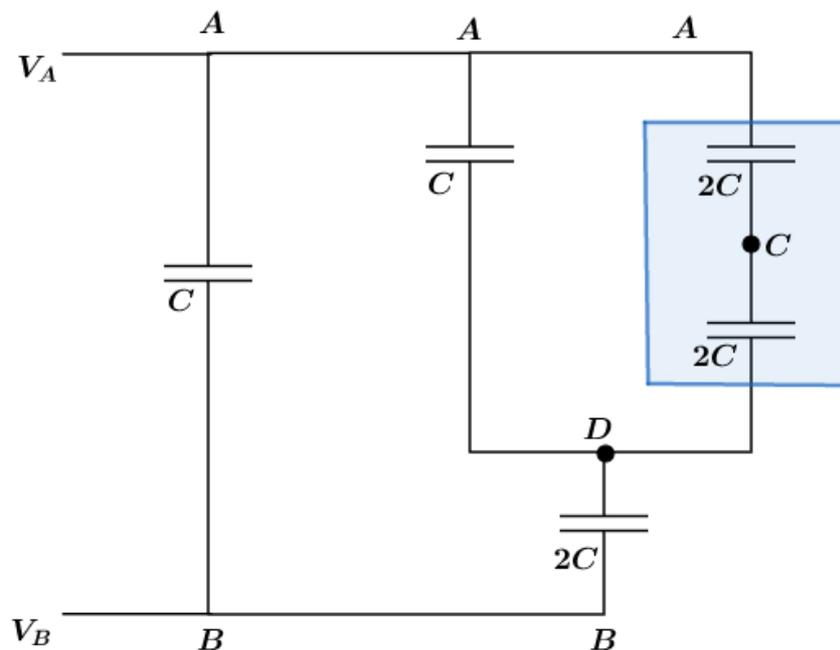


Entre os pontos A e C temos dois capacitores em paralelo, logo a capacitância será dada por:

$$C_{AC} = C + C = 2C$$

A partir daí teremos uma nova configuração de capacitores:

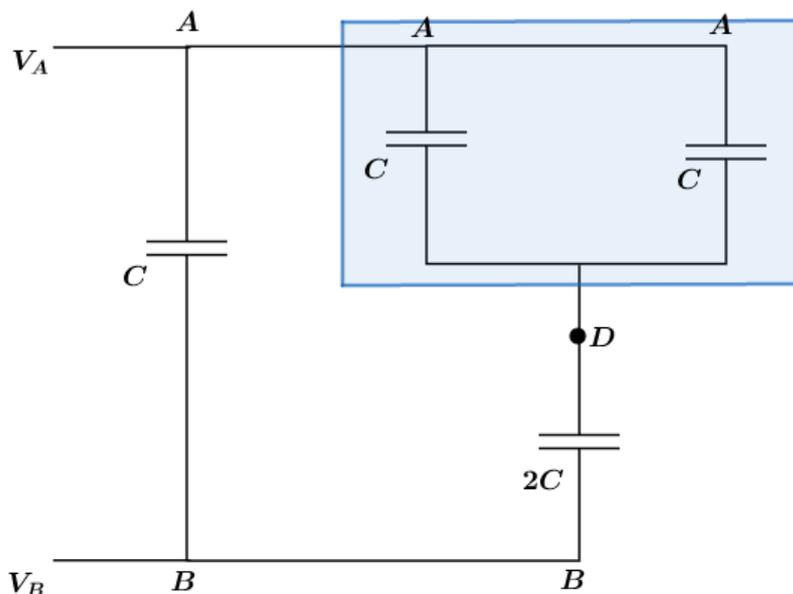




Entre os pontos A e D temos dois capacitores em série no ramo da direita, logo:

$$(C_{AD})_{direita} = \frac{2C}{2} = C$$

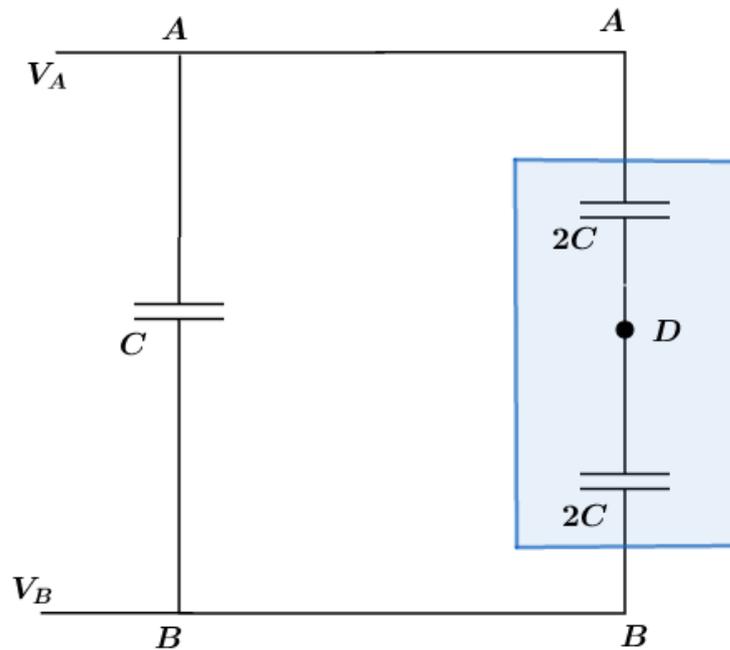
Agora, temos a nova configuração:



Com isso, podemos determinar a capacitância equivalente entre A e D , pois os dois capacitores estão em paralelo:

$$C_{eqAD} = C + C = 2C$$

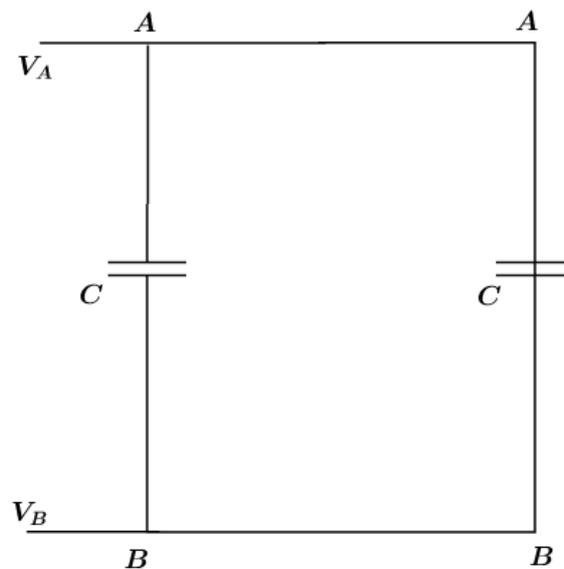
Então, chegamos a nova configuração de capacitores:



Nesse momento, somos capazes de determinar a capacitância equivalente entre A e B no ramo mais à direita, já que temos dois capacitores em série:

$$(C_{AB})_{direita} = \frac{2C}{2} = C$$

Então, nossa combinação de capacitores se resumiu a:



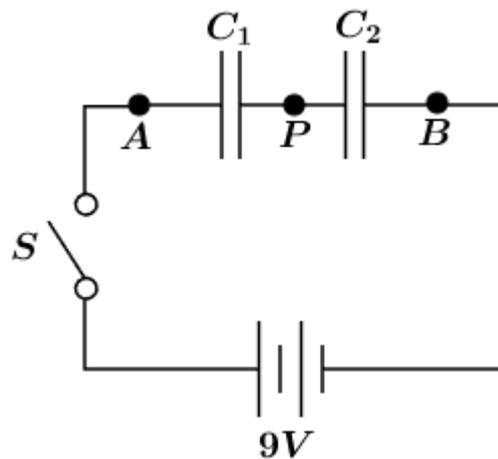
Assim, a capacitância equivalente entre os pontos A e B é expressa por:

$$C_{eqAB} = C + C = 2C$$

28)

Considere dois capacitores em série, com capacitâncias iguais a $C_1 = 4 \mu F$ e $C_2 = 1 \mu F$. Inicialmente, C_2 já possui uma carga de $4\mu C$, antes de fecharmos o circuito da figura.

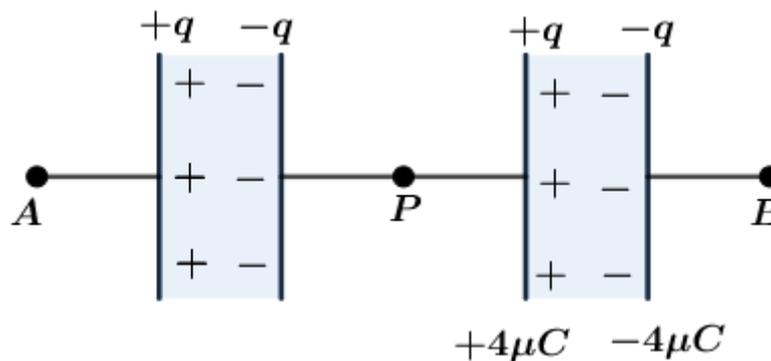




Fechando a chave S , após o equilíbrio do sistema, qual deve ser as cargas adquiridas pelos capacitores.

Comentários:

Quando fechamos S , haverá uma indução de carga q nas armaduras do capacitor, já que ambos estão em série:



A carga $+q$ se soma a $+4\mu C$ no capacitor C_2 , assim como $-q$ superpõe-se a $-4\mu C$. Dessa forma, a carga no capacitor C_2 é de:

$$Q_2 = q + 4\mu C$$

Em C_1 , temos que:

$$Q_1 = q$$

Dado que os capacitores estão em série, temos que a tensão entre A e B é a soma das tensões:

$$V_A - V_B = (V_A - V_P) + (V_P - V_B) = 9 V \text{ (eq. 1)}$$

Utilizando a definição de capacitância, temos:

$$V_A - V_P = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{q}{4\mu F} \text{ e } V_P - V_B = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{q+4\mu C}{1\mu F}$$

Substituindo as diferenças de potenciais na equação 1, vem:

$$\frac{q}{4\mu F} + \frac{q + 4\mu C}{1\mu F} = 9 V$$



$$\frac{q + 4q + 16\mu C}{4\mu F} = 9V$$

$$5q = 36(\mu F \cdot V) - 16\mu C = 36\mu C - 16\mu C$$

$$\boxed{q = 4\mu C}$$

Com isso, as cargas finais dos capacitores ficam:

$$Q_1 = q = 4\mu C, Q_2 = q + 4\mu C = 8\mu C$$

Note que devido ao fato do capacitor C_2 já estar previamente carregado, cada capacitor não ficou com a mesma carga, mesmo estando em série.

Por isso, devemos lembrar que quando estabelecemos a regra da associação em série, admitimos que eles estão inicialmente descarregados ou possuem a mesma carga inicial. Contudo, sempre valerá que a soma das tensões nos capacitores em série é igual a tensão total:

$$V_A - V_P = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{4\mu C}{4\mu F} = 1V$$

$$V_P - V_B = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{8\mu C}{1\mu F} = 8V$$

$$(V_A - V_P) + (V_P - V_B) = 1V + 8V = 9V = V_A - V_B$$





13. Dielétricos

Chamamos de dielétrico todo material não-condutor. Quando ocupamos o espaço entre as armaduras de um capacitor, sua capacitância varia. Vamos entender um pouco mais sobre esse fenômeno estudado experimentalmente por Faraday, estudando como se comporta a estrutura molécula de um dielétrico quando existe um campo elétrico atuando na região.

13.1. Estrutura molecular e polarização de um dielétrico

As moléculas que constituem um dielétrico podem existir em dois grupos: polares e apolares. Dizemos que moléculas polares são aquelas que possuem densidades de cargas não simétricas com relação ao centroide da molécula.

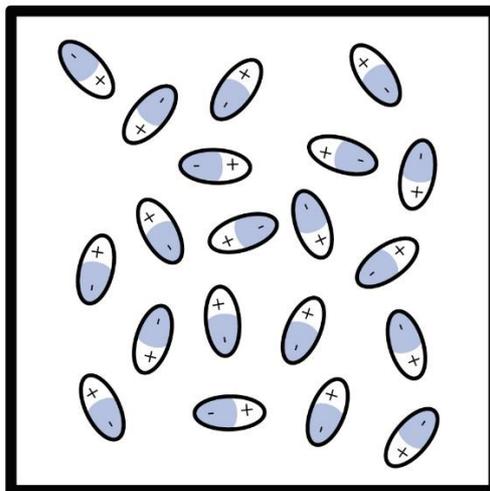


Figura 92: Moléculas em um dielétrico.

Em moléculas onde a nuvem de elétrons tem simetria esférica e, com isso, o centro de cargas negativas é localizado no centro da molécula, coincidindo com o centro das cargas positivas, dizemos que essa molécula é não-polar (apolar).

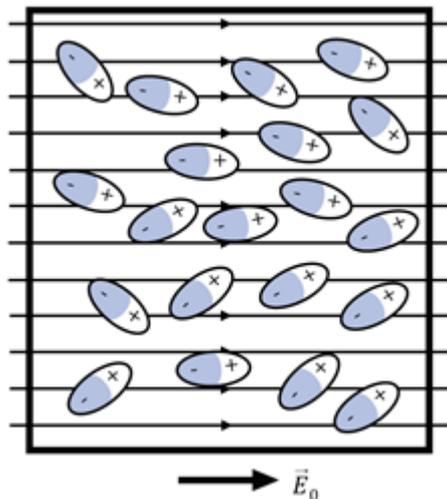


Figura 93: Moléculas polares sendo alinhadas com o campo elétrico.

Quando o dielétrico é constituído de moléculas polares, ao ser colocado em um campo elétrico, existe um alinhamento das moléculas com o campo. Por causa da agitação térmica, tal alinhamento não é perfeito. Entretanto, se diminuirmos a temperatura melhora-se o alinhamento. Outra forma de melhorar o grau de alinhamento é aumentar o módulo do campo elétrico.

Por outro lado, as moléculas apolares não formam dipolos elétricos. Contudo, quando tais moléculas são imersas em regiões onde existe um campo elétrico, ocorre uma deformação da molécula, tornando-a um dipolo elétrico. Assim, dizemos que o campo elétrico polarizou o dielétrico.

Vamos tomar um exemplo de um capacitor plano com vácuo no espaço entre as armaduras do capacitor com carga Q_0 , como na figura abaixo. Como sabemos, existe um campo elétrico \vec{E}_0 orientado da placa positiva para a placa negativa.

Se preenchermos a região entre as placas com um material dielétrico (polar ou apolar), a ação do campo elétrico \vec{E}_0 torna as moléculas dipolos que se alinham com \vec{E}_0 .

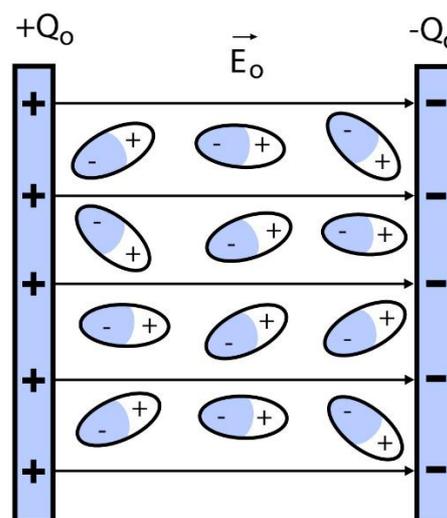


Figura 94: Moléculas de um material dielétrico sob ação de um campo elétrico.

Como efeito resultante, poderíamos imaginar que próximo da placa positiva se formasse uma película plana de carga negativa $-q'$ e, do outro lado, uma película plana de carga positiva se formasse na placa negativa, como na figura abaixo:

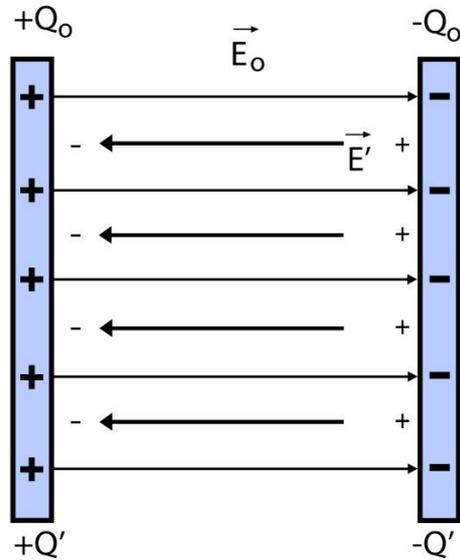


Figura 95: Efeito resultante do campo elétrico no dielétrico.

Devido a esse efeito, podemos dizer que surge um campo elétrico interno no sentido contrário, de intensidade menor que \vec{E}_0 . Assim, o campo elétrico resultante no dielétrico é dado por:

$$\vec{E}_{Res} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{int}$$

Trabalhando em módulos, temos que:

$$E_{Res} = E_0 - E_{int}$$

Notamos que ao adicionar o material dielétrico, o campo elétrico na região diminui de intensidade.

CURIOSIDADE



Um exemplo prático da utilidade de polarização de dielétrico é o efeito piezelétrico. Alguns cristais de moléculas polares quando aplicada uma tensão mecânica polarizam suas moléculas. A polarização do cristal produz uma diferença de potencial entre as suas faces, que pode ser transformada em corrente elétrica.

Esses cristais são utilizados em transdutores para converter as deformações mecânicas em sinais elétricos. Utilizamos esses cristais em microfones, captadores fotográficos, medidores de vibrações etc.).

Por outro lado, podemos aplicar uma tensão elétrica em um cristal e ele produzir uma deformação mecânica, trata-se do efeito piezelétrico invertido. Esse efeito é muito utilizado em fones de ouvido, autofalantes etc. Os cristais mais utilizados são quartzo, turmalina e topázio.



13.2. Rigidez dielétrica

Quando aumentamos a diferença de potencial entre as armaduras de um capacitor, aumenta-se a intensidade do campo elétrico. Como vimos, esse campo polariza o campo elétrico no dielétrico. Se esse campo for muito intenso, ele pode ionizar as moléculas do dielétrico.

Se alcançar determinado valor de diferença de potencial (ΔV), uma faísca salta entre as placas e descarrega o capacitor, danificando o dielétrico. Tal valor de ΔV é denominado de tensão disruptiva ou tensão explosiva.

Essa tensão depende da forma do capacitor, da espessura e do dielétrico. Por isso, quando compramos um capacitor devemos olhar sua capacitância e sua tensão admissível.

Define-se rigidez elétrica como a máxima intensidade de campo elétrico que um capacitor pode suportar, sem romper o dielétrico. Note que o dielétrico possibilita aplicar uma diferença de potencial maior que aquela aplicada ao capacitor se ele tivesse sido preenchido com ar.

Na tabela abaixo apresentamos alguns valores de rigidez dielétrica para materiais bem conhecidos.

Material	Constante Dielétrica (k)	Rigidez Dielétrica (kV/mm)
Vácuo	1	10^{12}
Ar	1,00059	3
Vidro (Pirex)	5,6	14
Mica	5,4	10-100
Papel	3,7	16
Poliestireno	2,55	24





14. Lista de questões

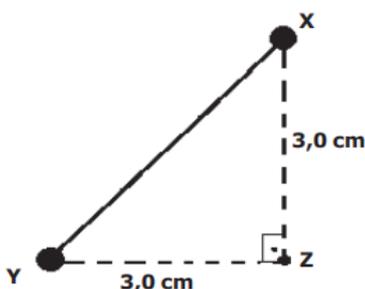
1. (EsPCEx – 2019)

No triângulo retângulo isósceles XYZ , conforme desenho abaixo, em que $XZ = YZ = 3,0 \text{ cm}$, foram colocadas uma carga elétrica puntiforme $Q_X = +6 \text{ nC}$ no vértice X e uma carga elétrica puntiforme $Q_Y = +8 \text{ nC}$ no vértice Y .

A intensidade do campo elétrico resultante em Z , devido às cargas já citadas é

Dados: o meio é o vácuo e a constante eletrostática do vácuo é $K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

- a) $2 \cdot 10^5 \text{ N/C}$
- b) $6 \cdot 10^3 \text{ N/C}$
- c) $8 \cdot 10^4 \text{ N/C}$
- d) 10^4 N/C
- e) 10^5 N/C



2. (EsPCEx – 2018)

Considere uma esfera metálica de massa igual a 10^{-6} kg e carga positiva de 10^{-3} C . Ela é lançada verticalmente para cima com velocidade inicial $v_0 = 50 \text{ m/s}$, em uma região onde há um campo elétrico uniforme apontado verticalmente para baixo, de módulo $E = 10^{-2} \text{ N/C}$. A máxima altura que a esfera alcança, em relação ao ponto de onde foi lançada, é de

Dado: considere a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 .

- a) 30,5 m.
- b) 40,5 m.
- c) 62,5 m.
- d) 70,0 m.
- e) 82,7 m.

3. (EsPCEx – 2017)

Uma partícula com carga elétrica negativa igual a -10^{-8} C encontra-se fixa num ponto do espaço. Uma segunda partícula de massa igual a $0,1 \text{ g}$ e carga elétrica positiva igual a $+10^{-8} \text{ C}$ descreve um movimento circular uniforme de raio 10 cm em torno da primeira partícula.



Considerando que elas estejam isoladas no vácuo e desprezando todas as interações gravitacionais, o módulo da velocidade linear da partícula positiva em torno da partícula negativa é igual a Dado: considere a constante eletrostática do vácuo igual a $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

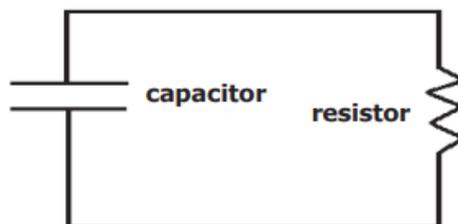
- a) 0,3 m/s
- b) 0,6 m/s
- c) 0,8 m/s
- d) 1,0 m/s
- e) 1,5 m/s

4. (ExpCEEx – 2017)

Um capacitor de capacitância igual a $2 \mu\text{F}$ está completamente carregado e possui uma diferença de potencial entre suas armaduras de 3 V . Em seguida, este capacitor é ligado a um resistor ôhmico por meio de fios condutores ideais, conforme representado no circuito abaixo, sendo completamente descarregado através do resistor.

Nesta situação, a energia elétrica total transformada em calor pelo resistor é de:

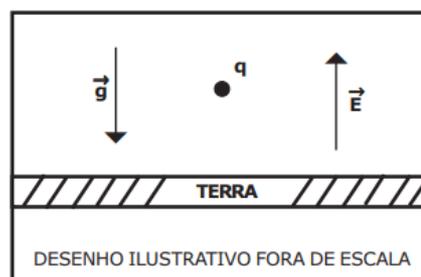
- a) $1,5 \cdot 10^{-6} \text{ J}$
- b) $6,0 \cdot 10^{-6} \text{ J}$
- c) $9,0 \cdot 10^{-6} \text{ J}$
- d) $12,0 \cdot 10^{-6} \text{ J}$
- e) $18,0 \cdot 10^{-6} \text{ J}$



5. (EsPCEEx – 2016)

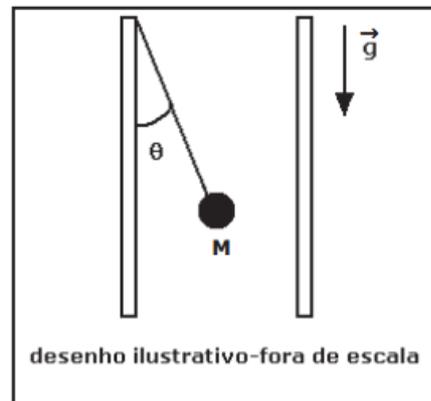
Uma partícula de carga q e massa 10^{-6} kg foi colocada num ponto próximo à superfície da Terra onde existe um campo elétrico uniforme, vertical e ascendente de intensidade $E = 10^5 \text{ N/C}$. Sabendo que a partícula está em equilíbrio, considerando a intensidade da aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$, o valor da carga q e o seu sinal são respectivamente:

- a) $10^{-3} \mu\text{C}$, negativa
- b) $10^{-5} \mu\text{C}$, positiva
- c) $10^{-5} \mu\text{C}$, negativa
- d) $10^{-4} \mu\text{C}$, positiva
- e) $10^{-4} \mu\text{C}$, negativa



6. (EsPCEEx – 2015)

Uma pequena esfera de massa M igual a $0,1 \text{ kg}$ e carga elétrica $q = 1,5 \mu\text{C}$ está, em equilíbrio estático, no interior de um campo elétrico uniforme gerado por duas placas paralelas verticais carregadas com cargas elétricas de sinais opostos. A esfera está suspensa por um fio isolante preso a uma das placas conforme o desenho abaixo. A intensidade, a direção e o sentido do campo elétrico são, respectivamente,



Dados: $\cos \theta = 0,8$ e $\sin \theta = 0,6$. Intensidade da aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- $5 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, horizontal, da direita para a esquerda.
- $5 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, horizontal, da esquerda para a direita.
- $9 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, horizontal, da esquerda para a direita.
- $9 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, horizontal, da direita para a esquerda.
- $5 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, vertical, de baixo para cima.

7. (EsPCEx – 2013)

O desenho abaixo mostra uma barra homogênea e rígida AB de peso desprezível, apoiada no ponto O do suporte. A distância da extremidade B ao ponto de apoio O é o triplo da distância de A a O .

No lado esquerdo, um fio ideal isolante e inextensível, de massa desprezível, prende a extremidade A da barra a uma carga elétrica puntiforme positiva de módulo Q . A carga Q está situada a uma distância d de uma outra carga elétrica fixa puntiforme negativa de módulo q .

No lado direito, um fio ideal inextensível e de massa desprezível prende a extremidade B da barra ao ponto C .

A intensidade da força de tração no fio BC , para que seja mantido o equilíbrio estático da barra na posição horizontal, é de:

Dados: $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = 1/2$, $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$ e K_0 é a constante eletrostática do meio.

- $K_0 Qq/2d^2$
- $K_0 Qq/4d^2$
- $\sqrt{3}K_0 Qq/3d^2$
- $\sqrt{3}K_0 Qq/9d^2$
- $K_0 Qq/d^2$



8. (EsPCEx - 2012)

Dois esferas metálicas de raios R_A e R_B com $R_A < R_B$ estão no vácuo e isoladas eletricamente uma da outra. Cada uma é eletrizada com uma mesma quantidade de carga positiva.



Posteriormente, as esferas são interligadas por meio de um fio condutor de capacitância desprezível e, após atingir o equilíbrio eletrostático, a esfera A possuirá uma carga Q_A e um potencial V_A , e a esfera B uma carga Q_B e um potencial V_B . Baseado nas informações anteriores, podemos, então, afirmar que

- a) $V_A < V_B$ e $Q_A = Q_B$
- b) $V_A = V_B$ e $Q_A = Q_B$
- c) $V_A < V_B$ e $Q_A < Q_B$
- d) $V_A = V_B$ e $Q_A < Q_B$
- e) $V_A > V_B$ e $Q_A = Q_B$

9. (EEAR – 2018)

Pedrinho visitou o laboratório de Física de sua escola e se encantou com um experimento denominado pêndulo eletrostático, que é constituído por uma esfera pequena e leve, suspensa por um fio fino e isolante, é utilizado para detectar se um corpo está ou não eletrizado. Resolvendo brincar com o experimento, Pedrinho aproxima do pêndulo um bastão e observa que a esfera é atraída por ele. Considere as afirmações a seguir sobre a observação de Pedrinho:



- 1 – A esfera e o bastão estão carregados com cargas de mesmo sinal.
- 2 – A esfera possui carga de sinal contrário ao do bastão.
- 3 – A esfera pode estar descarregada.
- 4 – O bastão pode estar carregado positivamente.

A alternativa que apresenta a(s) afirmação(ões) correta(s) é:

- a) 1, somente
- b) 2,3 e 4, somente
- c) 3 e 4, somente
- d) todas

10. (EEAR – 2017)

Duas cargas idênticas são colocadas no vácuo a uma certa distância uma da outra. No ponto médio entre as cargas, o campo elétrico resultante será _____ e o potencial elétrico resultante será _____ do potencial de umas das cargas. A sequência de palavras que completa corretamente as lacunas será:



- a) nulo – o dobro
- b) nulo – a metade
- c) o dobro – o dobro
- d) a metade – o dobro

11. (EEAR – 2017)

Duas esferas idênticas A e B , de cargas iguais a $Q_A = -3 \mu C$ e $Q_B = -8 \mu C$, estão inicialmente isoladas uma da outra. Em seguida, ambas são colocadas em contato e depois separadas por uma distância de 30 cm no vácuo. Determine o valor aproximado da força elétrica que passa a atuar entre as cargas.

Dados: constante eletrostática no vácuo $K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

- a) 2
- b) 3
- c) 6
- d) 9

12. (EEAR – 2017)

Duas cargas são colocadas em uma região onde há interação elétrica entre elas. Quando separadas por uma distância d , a força de interação elétrica entre elas tem módulo igual a F . Triplicando-se a distância entre as cargas, a nova força de interação elétrica em relação à força inicial, será

- a) diminuída 3 vezes
- b) diminuída 9 vezes
- c) aumentada 3 vezes
- d) aumentada 9 vezes

13. (EEAR – 2017)

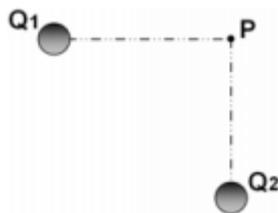
Duas esferas idênticas e eletrizadas com cargas elétricas q_1 e q_2 se atraem com uma força de 9 N . Se a carga da primeira esfera aumentar cinco vezes e a carga da segunda esfera for aumentada oito vezes, qual será o valor da força, em newtons, entre elas?

- a) 40
- b) 49
- c) 117
- d) 360



14. (EEAR – 2016)

São dadas duas cargas, conforme a figura:



Considerando E_1 o módulo do campo elétrico devido à carga Q_1 , E_2 o módulo do campo elétrico devido a carga Q_2 , V_1 o potencial elétrico devido a carga Q_1 e V_2 o potencial elétrico devido a carga Q_2 . Considere E_P o campo elétrico e V_P o potencial resultante no ponto P . Julgue as expressões abaixo como verdadeiras (V) ou falsas (F).

() $E_P = E_1 + E_2$

() $V_P = V_1 + V_2$

() $\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

() $\vec{V}_P = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.

- a) V – V – F – F
- b) V – F – F – V
- c) F – F – V – V
- d) F – V – V – F

15. (EEAR – 2015)

Dois cargas elétricas pontiformes de mesmo valor e de sinais contrários são colocadas a uma distância fixa. No ponto médio entre elas, mede-se a intensidade do vetor campo elétrico e o potencial elétrico. Assinale a alternativa que contém os resultados corretos para essas medidas.

- a) Intensidade do vetor campo elétrico e potencial elétrico nulos.
- b) Intensidade do vetor campo elétrico e potencial elétrico não nulos.
- c) Intensidade do vetor campo elétrico nulo e potencial elétrico não nulo.
- d) Intensidade do vetor campo elétrico não nulo e potencial elétrico nulo.

16. (EEAR – 2013)

Quatro esferas idênticas (A, B, C e D) têm cargas elétricas respectivamente iguais a $8Q$, $4Q$, $2Q$ e Q . Determine a carga final de D após contatos sucessivos com A, em seguida com B, e finalmente com C, uma esfera de cada vez.

- a) 3,125



- b) 3,750
- c) 5,000
- d) 7,500

17. (EEAR – 2013)

Considere quatro capacitores ligados em paralelo, $C_1 = 2,2 \mu F$, $C_2 = 2,7 \mu F$, $C_3 = 3,9 \mu F$ e $C_4 = 4,7 \mu F$. Nesse caso, a capacitância equivalente dessa associação é _____ μF .

- a) 0
- b) 0,77
- c) 1,29
- d) 13,5

18. (EEAR – 2013)

Ao duplicarmos a diferença de potencial a que está sujeito um capacitor, sem romper o dielétrico, a capacitância elétrica desse componente

- a) duplicará.
- b) quadruplicará.
- c) não se alterará.
- d) reduzirá a metade.

19. (EEAR – 2013)

Considere três esferas idênticas A, B e C, separadas umas das outras, formando um sistema eletricamente isolado, e que A está eletricamente carregada com carga Q, enquanto B e C estão eletricamente neutras. Coloca-se a esfera A em contato somente com B, em seguida somente com C, depois simultaneamente com B e C e, por fim elas são separadas novamente. Com base nos Princípios da Eletrostática, qual a carga total do sistema depois de todo o processo?

- a) Q
- b) Q/3
- c) Q/4
- d) Q/8

20. (EEAR – 2010)

Considere uma esfera metálica oca com 0,1 m de raio, carregada com 0,01 C de carga elétrica, em **equilíbrio eletrostático** e com vácuo no seu interior. O valor do campo elétrico em um ponto situado no centro dessa esfera tem intensidade de ____ N/C.



- a) 0,0
- b) 1,0
- c) 10,0
- d) 100,0

21. (EEAR – 2010)

Uma carga puntiforme com $4 \cdot 10^{-9} C$, situada no vácuo, gera campo elétrico ao seu redor. Entre dois pontos, A e B, distantes respectivamente 0,6 m e 0,8 m da carga, obtém-se a diferença de potencial V_{ab} de ____ volts.

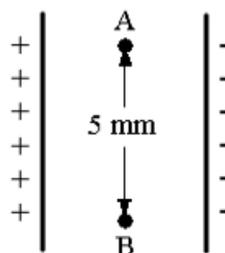
Obs: $K_0 = 9 \cdot 10^9 Nm^2/C^2$

- a) 15
- b) 20
- c) 40
- d) 60

22. (EEAR – 2009)

Entre duas placas carregadas de um capacitor de placas paralelas tem-se um campo elétrico uniforme de $1,6 \cdot 10^{-3} N/C$. Calcule o valor da diferença de potencial entre os pontos A e B, em volts, de acordo com a figura.

- a) 0
- b) 4
- c) 8
- d) 16



23. (EEAR – 2009)

A unidade de diferença de potencial (ddp) denomina-se Volt, uma homenagem ao físico italiano Alessandro Volta (1745 – 1827) que construí a primeira pilha elétrica. No Sistema Internacional de Unidades (SI), uma ddp de 110 volts significa que para uma carga elétrica de 1 coulomb é (são) necessário(s) _____ de energia para deslocá-la entre dois pontos num campo elétrico.

Assinale a alternativa que completa corretamente a lacuna acima.

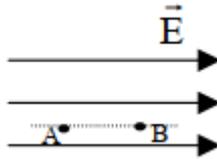
- a) 1 joule
- b) 110 joules
- c) 110 amperes
- d) 110 elétron-volts



24. (EEAR – 2008)

Calcule a diferença de potencial, em volts, entre dois pontos distantes 10 cm , imersos em um campo elétrico uniforme de intensidade de 150 V/m , conforme figura abaixo.

- a) 1,5
- b) 15
- c) 150
- d) 1500



25. (EEAR – 2008)

Calcule o trabalho, em joules, realizado sobre uma carga de 5 coulombs , ao ser deslocada sobre uma superfície equipotencial em um campo elétrico uniforme de intensidade 5 kV/m em uma distância de 25 mm .

- a) 0
- b) 5
- c) 125
- d) 125000

26. (EEAR – 2008)

Em um campo elétrico uniforme, de intensidade 200 V/m , temos dois pontos distantes $0,2\text{ m}$ um do outro. Calcule a diferença de potencial, em volts, entre eles.

- a) 10
- b) 20
- c) 40
- d) 80

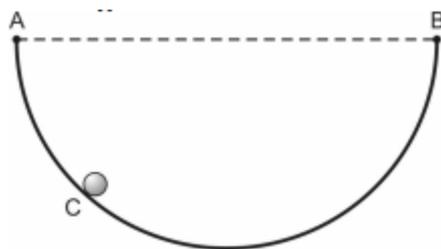
27. (EEAR – 2007)

Ao aproximar um bastão de um eletroscópio de folhas, vê-se que as folhas se abrem. Diante desse fato, o que se pode deduzir, sem sombra de dúvidas, é que o bastão

- a) está carregado.
- b) não está carregado.
- c) está carregado negativamente.
- d) está carregado positivamente.

28. (AFA – 2017)

Uma pequena esfera C , com carga elétrica de $+5 \cdot 10^{-4} C$, é guiada por um aro isolante e semicircular de raio R igual a $2,5 m$, situado num plano horizontal, com extremidades A e B , como indica a figura abaixo.

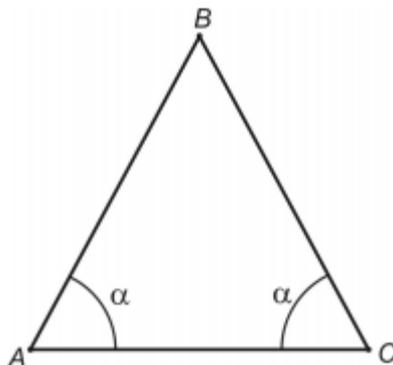


A esfera pode se deslocar sem atrito tendo o aro como guia. Nas extremidades A e B deste aro são fixadas duas cargas elétricas puntiformes de $+8 \cdot 10^{-6} C$ e $+1 \cdot 10^{-6} C$, respectivamente. Sendo a constante eletrostática do meio igual a $4\sqrt{5} \cdot 10^9 Nm^2/C^2$, na posição de equilíbrio da esfera C , a reação normal do aro sobre a esfera, em N , tem módulo igual a

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 5

29. (AFA – 2014)

Três cargas elétricas puntiformes q_A , q_B e q_C estão fixas, respectivamente, nos vértices A , B e C de um triângulo isósceles, conforme indica a figura abaixo.



Considerando F_A o módulo da força elétrica de interação entre as cargas q_A e q_C ; F_B o módulo da força elétrica de interação entre as cargas q_B e q_C e sabendo-se que a força resultante sobre a carga q_C é perpendicular ao lado AB e aponta para dentro do triângulo, pode-se afirmar, certamente, que a relação entre os valores das cargas elétricas é

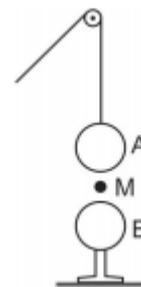
- a) $\frac{q_A+q_C}{q_B} < 0$
- b) $\frac{q_A+q_C}{q_B} > 0$
- c) $0 < \frac{q_A}{q_B} < 4 \frac{F_A}{F_B}$



d) $0 < \frac{|q_A|}{|q_B|} < \frac{F_B}{F_A}$

30. (FUVEST – 1990)

Uma esfera condutora A , de peso P , eletrizada positivamente é presa a um fio isolante que passa por uma roldana. A esfera se aproxima de B , com velocidade constante, de uma esfera B , idêntica a interior, mas neutra isolada. A esfera A toca em B e, em seguida é puxada para cima, com velocidade também constante.

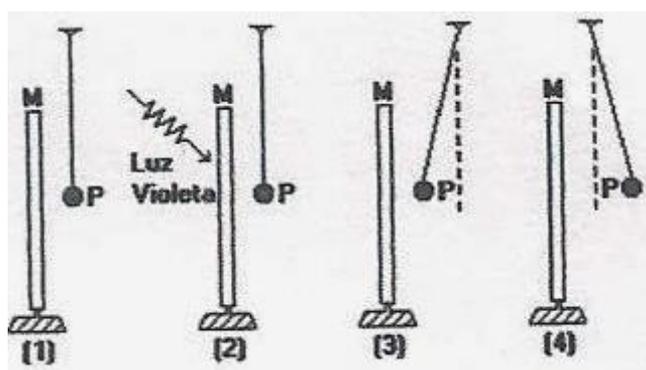


Quando A passa pelo ponto M , a tração no fio é T_1 na descida e T_2 na subida. Podemos afirmar que:

- a) $T_1 < T_2 < P$
- b) $T_1 < P < T_2$
- c) $T_2 < T_1 < P$
- d) $T_2 < P < T_1$
- e) $P < T_1 < T_2$

31. (FUVEST – 1993)

Dispõe-se de uma placa metálica M e de uma esferinha metálica P , suspensa por um fio isolante, inicialmente neutras e isoladas. Um feixe de luz violeta é lançado sobre a placa retirando partículas elementares da mesma. As figuras (1) a (4) adiante, ilustram o desenrolar dos fenômenos ocorridos.



Podemos afirmar que na situação (4):

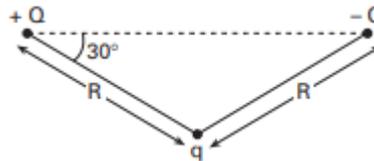
- a) M e P estão eletrizadas positivamente.
- b) M está negativa e P Neutra.
- c) M está neutra e P positivamente eletrizada
- d) M e P estão eletrizadas negativamente
- e) M e P foram eletrizadas por indução.



32. (FUVEST – 1996)

O Módulo F da força eletrostática entre duas cargas elétricas pontuais q_1 e q_2 , separadas por uma distância d , é $F = k \frac{|q_1||q_2|}{d^2}$ onde k é uma constante. Considere as três cargas pontuais representadas adiante por $+Q$, $-Q$ e q . o Módulo da força eletrostática total que age sobre a carga q será?

- a) $\frac{2kQq}{R^2}$
- b) $\frac{\sqrt{3}kQq}{R^2}$
- c) $\frac{kQ^2q}{R^2}$
- d) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQq}{R^2}$
- e) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQ^2q}{R^2}$



33. (FUVEST - 1996)

Aproximando-se uma barra eletrizada de duas esferas condutoras, inicialmente descarregadas e encostadas uma na outra, observa-se a distribuição de cargas esquematizada na figura abaixo.



Em seguida, sem tirar do lugar a barra eletrizada, afasta-se um pouco uma esfera da outra. Finalmente, sem mexer mais nas esferas, remove-se a barra, levando-a para muito longe das esferas. Nessa situação final, a figura que melhor representa a distribuição de cargas nas duas esferas é:

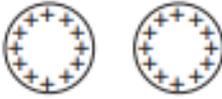
- a)
- b)
- c)



d)

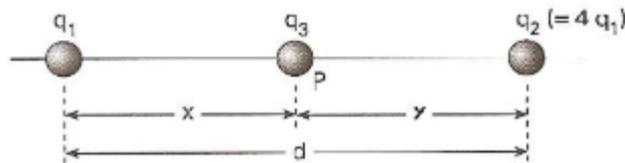


e)



34. (FUVEST – 1997)

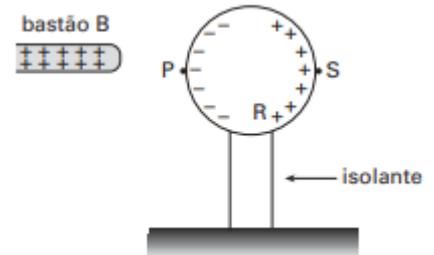
Duas cargas pontuais positivas q_1 e $q_2 = 4q_1$ são fixadas a uma distância d uma da outra. uma terceira carga negativa q_3 é colocada no ponto P q_1 e q_2 , a uma distância x da carga q_1 , conforme mostra a figura.



- Calcule o valor de x para que a força eletrostática resultante sobre a carga q_3 seja nula.
- Verifique se existe um valor de q_3 para o qual tanto a carga q_1 como a q_2 , permanecem em equilíbrio, nas posições do item a, sem a necessidade de nenhuma outra força além das eletrostáticas entre as cargas. Caso exista, calcule este valor q_3 .

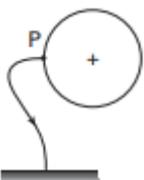
35. (FUVEST – 1997)

Quando se aproxima um bastão B, eletrizado positivamente, de uma esfera metálica, isolada e inicialmente descarregada, observa-se a distribuição de cargas representada na Figura 1.

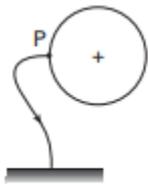


Mantendo o bastão na mesma posição, a esfera é conectada à terra por um fio condutor que pode ser ligado a um dos pontos P, R ou S da superfície da esfera. Indicando por (\rightarrow) o sentido do fluxo transitório (\emptyset) de elétrons (se houver) e por (+), (-) ou (0) o sinal da carga final (Q) da esfera, o esquema que representa \emptyset e Q é

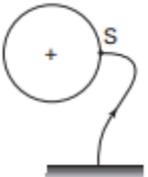
a)



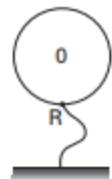
b)



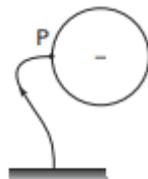
c)



d)

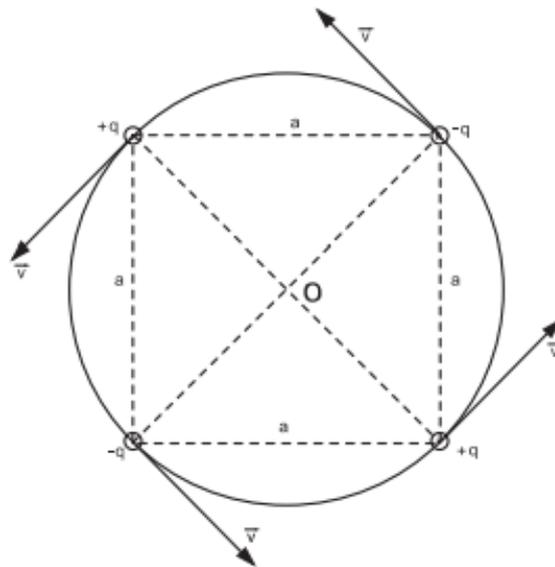


e)



36. (FUVEST – 1998)

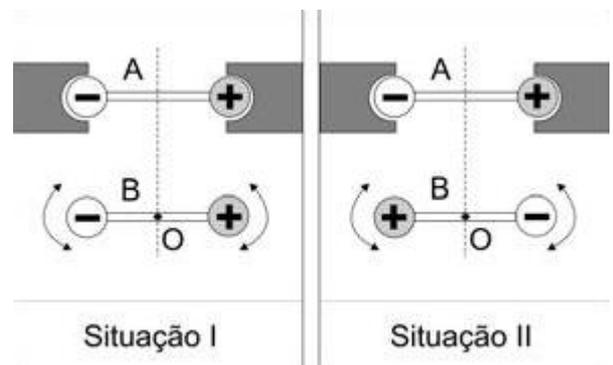
Quatro pequenas esferas de massa m , estão carregadas com cargas de mesmo valor absoluto q , sendo duas negativas e duas positivas, como mostra a figura. As esferas estão dispostas formando um quadrado de lado a e giram numa trajetória circular de centro O , no plano do quadrado, com velocidade de módulo constante v . Suponha que as únicas forças atuantes sobre as esferas são devidas à interação eletrostática. A constante de permissividade elétrica é ϵ_0 . Todas as grandezas (dadas e solicitadas) estão em unidades SI.



- a) Determine a expressão do módulo da força eletrostática resultante \vec{F} que atua em cada esfera e indique sua direção.
- b) Determine a expressão do módulo da velocidade tangencial \vec{v} das esferas.

37. (FUVEST – 2007)

Duas barras isolantes, A e B, iguais, colocadas sobre uma mesa, têm em suas extremidades, esferas com cargas elétricas de módulos iguais e sinais opostos. A barra A é fixa, mas a barra B pode girar livremente em torno de seu centro O, que permanece fixo. Nas situações I e II, a barra B foi colocada em equilíbrio, em posições opostas. Para cada uma dessas duas situações, o equilíbrio da barra B pode ser considerado como sendo, respectivamente,



SITUAÇÕES DE EQUILÍBRIO - após o sistema ser levemente deslocado de sua posição inicial.

Estável = tende a retornar ao equilíbrio inicial.

Instável = tende a afastar-se do equilíbrio inicial.

Indiferente = permanece em equilíbrio na nova posição.

- a) indiferente e instável.
b) instável e instável.
c) estável e indiferente.
d) estável e estável.
e) estável e instável.

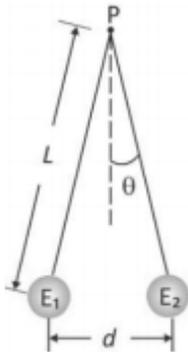
38. (FUVEST – 2018)



Um grupo de alunos, em uma aula de laboratório, eletriza um canudo de refrigerante por atrito, com um lenço de papel. Em seguida, com o canudo, eles eletrizam uma pequena esfera condutora, de massa 9 g , inicialmente neutra, pendurada em um fio de seda isolante, de comprimento L , preso em um ponto fixo P . No final do processo, a esfera e o canudo estão com cargas de sinais opostos.

a) Descreva as etapas do processo de eletrização da esfera.

Em seguida, os alunos colocam a esfera eletrizada (E_1) em contato com outra esfera (E_2), idêntica à primeira, eletricamente neutra e presa na extremidade de outro fio de seda isolante, também de comprimento L , fixo no ponto P . O sistema adquire a configuração ilustrada na figura, sendo $d = 8\text{ cm}$.



Para o sistema em equilíbrio nessa configuração final, determine:

- b) o módulo da tensão \vec{T} em um dos fios isolantes;
- c) o módulo da carga q_2 da esfera E_2 ;
- d) a diferença N entre o número de elétrons e de prótons na esfera E_2 após a eletrização.

Note e adote:

Para a situação descrita, utilize: $\cos\theta \cong 1$ e $\sin\theta \cong 0,1$.

Aceleração da gravidade: 10 m/s^2

Força elétrica entre duas cargas puntiformes Q_1 e Q_2 distantes r uma da outra: $\frac{kQ_1Q_2}{r^2}$, onde $k = 9 \times 10^9\text{ Nm}^2/\text{C}^2$

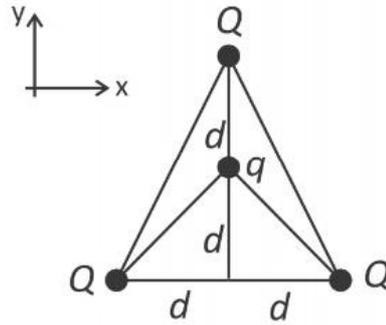
Carga do elétron: $1,6 \times 10^{-19}\text{ C}$.

Ignore a massa dos fios.

39. (FUVEST – 2019)

Três pequenas esferas carregadas com carga positiva Q ocupam os vértices de um triângulo, como mostra a figura. Na parte interna do triângulo, está afixada outra pequena esfera, com carga negativa q . As distâncias dessa carga às outras três podem ser obtidas a partir da figura.





Sendo $Q = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$, $q = -2 \times 10^{-5} \text{ C}$ e $d = 6 \text{ m}$, a força elétrica resultante sobre a carga q

Note e adote:

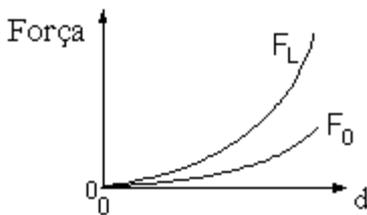
A constante k_0 da Lei de Coulomb vale $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

- é nula.
- tem direção do eixo y , sentido para baixo e módulo 1,8 N.
- tem direção do eixo y , sentido para cima e módulo 1,0 N.
- tem direção do eixo y , sentido para baixo e módulo 1,0 N.
- tem direção do eixo y , sentido para cima e módulo 0,3 N.

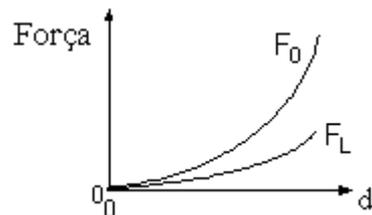
40. (UNESP – 1999)

A força elétrica entre duas pequenas partículas carregadas foi medida, em função da distância d entre elas, em dois meios diferentes, no vácuo e no interior de um líquido isolante. Assinale a alternativa que melhor representa o módulo da força medida no vácuo (F_0), comparada com o módulo da força medida no líquido (F_L), em função da distância d

a)

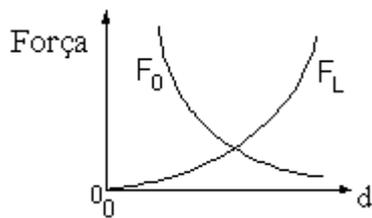


b)

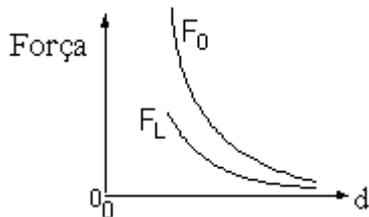


c)

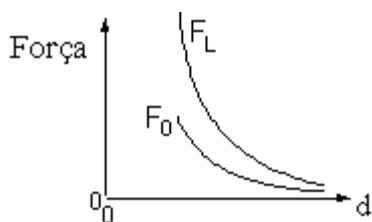




d)



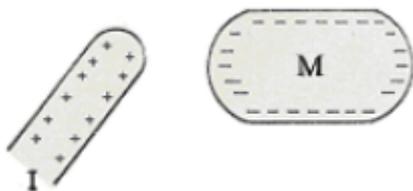
e)



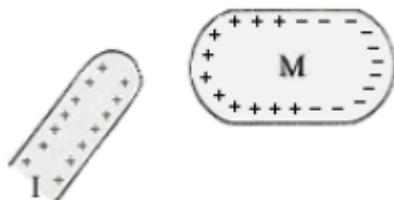
41. (ITA-1971)

Um corpo condutor (I) carregado é aproximado de um corpo metálico (M) descarregado. Qual das figuras abaixo dá uma distribuição de cargas induzidas no metal que é consistente com a posição relativa dos corpos (I) e (M)?

a)

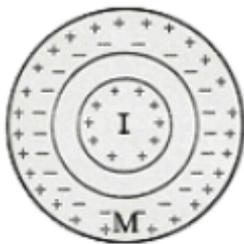


b)



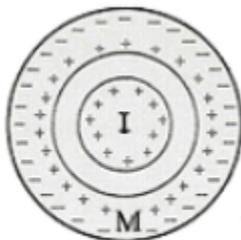
c)





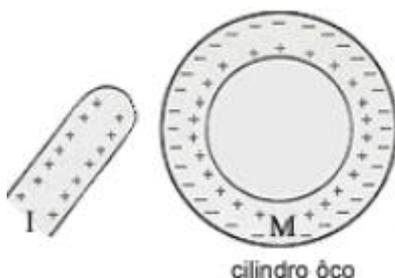
cilindro ôco

d)



cilindro ôco

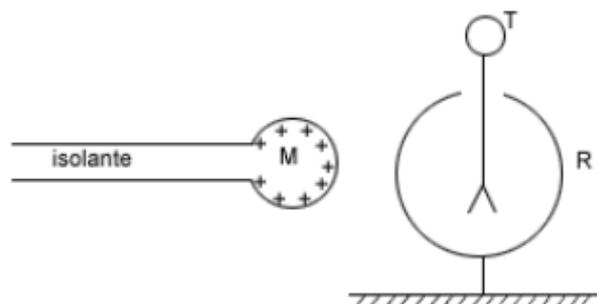
e)



cilindro ôco

42. (ITA-1973)

Uma esfera metálica (M) é aproximada de um eletroscópio de folhas de alumínio, conforme o esquema abaixo. A carcaça metálica (R) do eletroscópio está em contato elétrico permanente com o solo.



Enquanto a esfera (M) está muito afastada do eletroscópio estabeleceu-se um contato elétrico transitório entre (T) e (R). Qual é a única afirmação correta em relação à experiência em apreço?

- a) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar o terminal (T).
- b) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar a carcaça (R).
- c) As folhas só abrirão se o contato elétrico entre (T) e (R) for mantido permanentemente.
- d) As folhas só abrirão se a carcaça (R) receber uma carga de mesmo valor, mas de sinal oposto ao da esfera (M).
- e) As folhas se abrirão à medida que (M) se aproxima de (T)

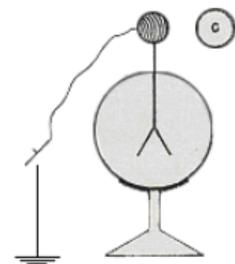
43. (ITA-1977)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices A e B de um triângulo retângulo isósceles. Sabe-se que a força elétrica resultante que atua sobre a carga localizada no vértice C do ângulo reto tem a mesma direção da reta AB. Aplicando-se a Lei de Coulomb a esta situação, conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em A e B são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
- b) As cargas localizadas nos pontos A e B têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
- c) As três cargas são de valores absolutos iguais.
- d) As cargas localizadas nos pontos A e B têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
- e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

44. (ITA-1983)

O eletroscópio da figura foi carregado positivamente. Aproxima-se então um corpo C carregado negativamente e liga-se o eletroscópio à Terra, por alguns instantes, mantendo-se o corpo C nas proximidades. Desfaz-se a ligação à Terra e a seguir afasta-se C.



No final, a carga do eletroscópio:

- a) Permanece positiva.
- b) Fica nula devido à ligação com a Terra.
- c) Torna-se negativa.
- d) Terá sinal que vai depender da maior ou menor aproximação de C.
- e) Terá sinal que vai depender do valor da carga em C.

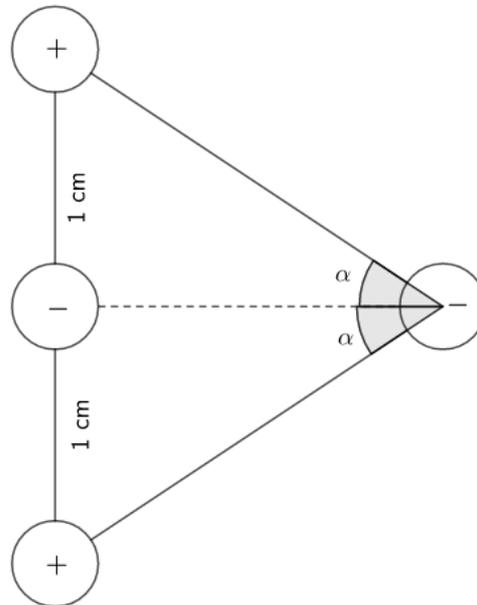
45. (IME – 84)

Um sistema de cargas elétricas puntiformes é constituído de quatro pequenas esferas de peso desprezível, dispostas na forma mostra na figura, dotadas das seguintes cargas elétricas:

$$Q_1 = Q_3 = 4 \times 10^{-11} C$$

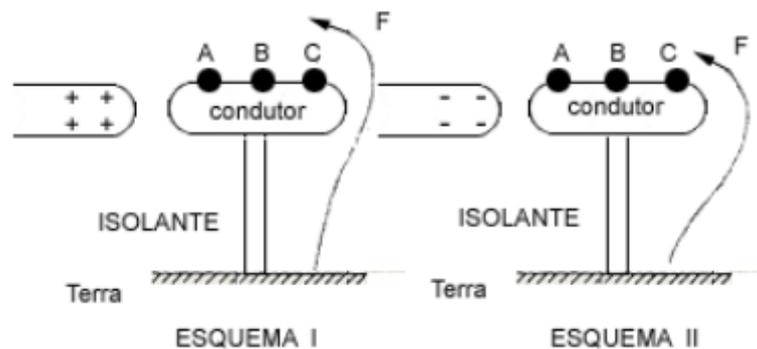
$$Q_2 = Q_4 = -10^{-11} C$$

Determine o valor do ângulo α , diferente de zero, de posicionamento da esfera de carga Q_4 , de modo que a força atuante nessa carga seja nula.



46. (ITA-1988)

Deseja-se carregar negativamente um condutor metálico pelo processo de indução eletrostática. Nos esquemas I e II, o condutor foi fixado na haste isolante. F é um fio condutor que nos permite fazer o contato com a Terra nos pontos A, B e C do condutor.



Devemos utilizar:

- O esquema I e ligar necessariamente F em C, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em A os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região C.
- O esquema II e ligar necessariamente F em A, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em C os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região A.
- Qualquer dos esquemas I ou II, desde que liguemos respectivamente em C e em A.
- O esquema I, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.

e) O esquema II, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.

47. (ITA-1992)

Uma carga puntiforme $-Q_1$ de massa m percorre uma órbita circular de raio R em torno de outra carga puntiforme Q_2 , fixa no centro do círculo. A velocidade angular de $-Q_1$ é:

a) $\omega = \frac{4\pi\epsilon_0 Q_1 Q_2}{mR}$

b) $\omega = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$

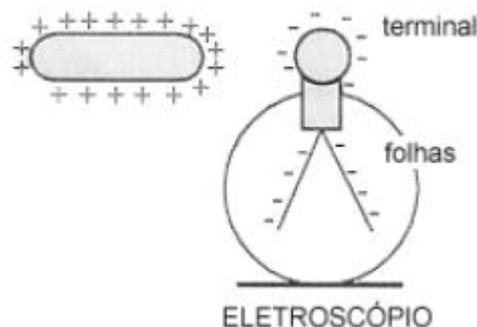
c) $\omega = \left[\frac{Q_1 Q_2 R^3}{4\epsilon_0} \right]^2$

d) $\omega = \frac{mRQ_1}{4\pi\epsilon_0 Q_2}$

e) $\omega = \frac{mRQ_2}{4\pi\epsilon_0 Q_1}$

48. (ITA-1996)

Um objeto metálico carregado positivamente, com carga $+Q$, é aproximado de um eletroscópio de folhas, que foi previamente carregado negativamente com carga igual a $-Q$.



I) À medida que o objeto for se aproximando do eletroscópio, as folhas vão se abrindo além do que já estavam.

II) À medida que o objeto for se aproximando, as folhas permanecem como estavam.

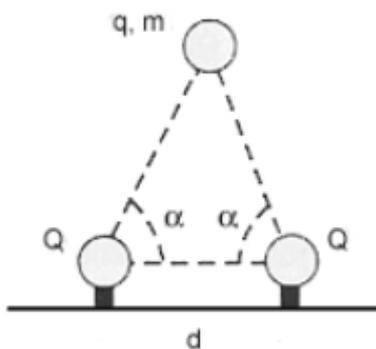
III) Se o objeto tocar no terminal externo do eletroscópio, as folhas devem necessariamente fechar-se.

- a) Somente a afirmativa I é correta.
- b) As afirmativas II e III são corretas.
- c) As afirmativas I e III são corretas.
- d) Somente a afirmativa III é correta.
- e) Nenhuma das afirmativas é correta.

49. (ITA-1997)

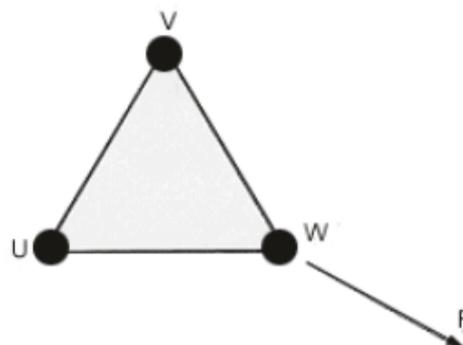
Uma pequena esfera de massa m e carga q , sob influência da gravidade e da interação eletrostática, encontra-se suspensa por duas cargas Q fixas, colocadas a uma distância d no plano horizontal, como mostrado na figura. Considere que a esfera e as cargas fixas estejam no mesmo plano vertical e que sejam iguais a os respectivos ângulos entre a horizontal e cada reta passando pelos centros das cargas fixas e da esfera. A massa da esfera é então:

- a) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$
 b) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\text{sen } \alpha}{g}$
 c) $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$
 d) $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \text{sen } \alpha}{g}$
 e) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha}{g}$



50. (ITA-1998)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices U, V e W de um triângulo equilátero. Suponha-se que a soma das cargas é nula e que a força sobre a carga localizada no vértice W é perpendicular à reta UV e aponta para fora do triângulo, como mostra a figura.



Conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em U e V são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
 b) As cargas localizadas nos pontos U e V têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
 c) As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto, com uma delas de sinal diferente das demais.
 d) As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
 e) A configuração descrita é fisicamente impossível.

51. (ITA-1998)

Suponha que o elétron em um átomo de hidrogênio se movimenta em torno de um próton em uma órbita circular de raio R . Sendo m a massa do elétron e q o módulo da carga de ambos, elétron e próton, conclui-se que o módulo da velocidade do elétron é proporcional a:

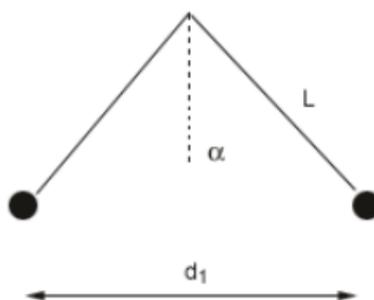


- a) $q \cdot \sqrt{\frac{R}{m}}$
 b) $\frac{q}{\sqrt{mR}}$
 c) $\frac{q}{m} \cdot \sqrt{R}$
 d) $\frac{qR}{\sqrt{m}}$
 e) $\frac{q^2 R}{\sqrt{m}}$

52. (ITA-2001)

Duas partículas têm massas iguais a m e cargas iguais a Q . Devido a sua interação eletrostática, elas sofrem uma força F quando separadas de uma distância d . Em seguida, estas partículas são penduradas de um mesmo ponto, por fios de comprimento L e ficam equilibradas quando a distância entre elas é d_1 . A cotangente do ângulo que cada fio forma com a vertical, em função de m, g, d, d_1, F e L , é:

- a) $\frac{mgd_1}{Fd}$
 b) $\frac{mgLd_1}{Fd^2}$
 c) $\frac{mgd_1^2}{Fd^2}$
 d) $\frac{mgd^2}{Fd_1^2}$
 e) $\frac{Fd^2}{mgd_1^2}$



53. (ITA – 2015)

Considere um tubo horizontal cilíndrico de comprimento ℓ , no interior do qual encontram-se respectivamente fixadas em cada extremidade de sua geratriz inferior as cargas q_1 e q_2 , positivamente carregadas. Nessa mesma geratriz, numa posição entre as cargas, encontra-se uma pequena esfera em condição de equilíbrio, também positivamente carregada. Assinale a opção com as respostas corretas na ordem das seguintes perguntas:

- I. Essa posição de equilíbrio é estável?
 II. Essa posição de equilíbrio seria estável se não houvesse o tubo?
 III. Se a esfera fosse negativamente carregada e não houvesse o tubo, ela estaria em equilíbrio estável?
- A) Não. Sim. Não.
 B) Não. Sim. Sim.
 C) Sim. Não. Não.



D) Sim. Não. Sim.

E) Sim. Sim. Não.



54. (ITA – 2020)

Três esferas idênticas de massa m , carga elétrica Q e dimensões desprezíveis, são presas pelas extremidades de fios isolantes e inextensíveis de comprimento l . As demais pontas dos fios são fixadas a um ponto P , que sustenta as massas. Na condição de equilíbrio do sistema, verifica-se que o ângulo entre um dos fios e a direção vertical é θ , conforme mostra a figura. Sendo ϵ_0 a permissividade elétrica do meio, o valor da carga elétrica Q é dada por

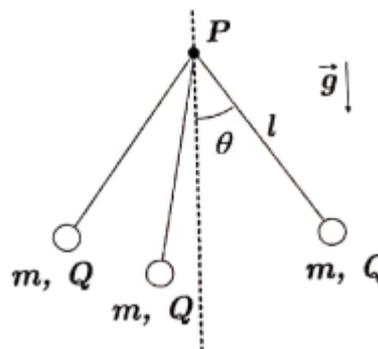
a) $l \sqrt{12\pi\epsilon_0 mg \operatorname{sen}\theta \cos\theta}$

b) $l \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta \sqrt{3}}$

c) $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta \sqrt{3}}$

d) $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{3}}}$

e) $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta}$



GABARITO



15. Gabarito sem comentários

- 1) E
- 2) C
- 3) A
- 4) C
- 5) D
- 6) B
- 7) C
- 8) D
- 9) C
- 10) A
- 11) A
- 12) B
- 13) D
- 14) D
- 15) D
- 16) A
- 17) D
- 18) C
- 19) A
- 20) A
- 21) A
- 22) A
- 23) B
- 24) B
- 25) A
- 26) C
- 27) A
- 28) B
- 29) C
- 30) D

31) A

32) B

33) A

34) a) $x = \frac{d}{3}$ b) $q_3 = -\frac{4}{9}q_1$

35) E

36) a) $F_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$ b) $v =$

$$q \sqrt{\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m \cdot a} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]}$$

37) E

38) a) descrição b) $T = 9 \times 10^{-2}N$ c) $|q_2| = 8 \times 10^{-8}C$ d) $N = 5 \times 10^{11}$

39) E

40) D

41) C

42) E

43) A

44) A

45) $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

46) D

47) B

48) D

49) D

50) E

51) B

52) C

53) C

54) C



ESCLARECENDO!



16. Lista de questões comentadas

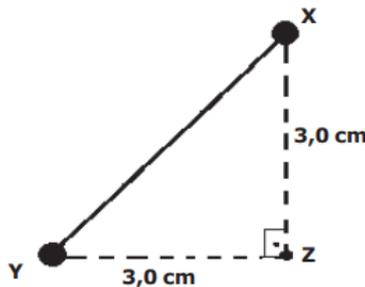
1. (EsPCEEx – 2019)

No triângulo retângulo isósceles XYZ , conforme desenho abaixo, em que $XZ = YZ = 3,0 \text{ cm}$, foram colocadas uma carga elétrica puntiforme $Q_X = +6 \text{ nC}$ no vértice X e uma carga elétrica puntiforme $Q_Y = +8 \text{ nC}$ no vértice Y .

A intensidade do campo elétrico resultante em Z , devido às cargas já citadas é

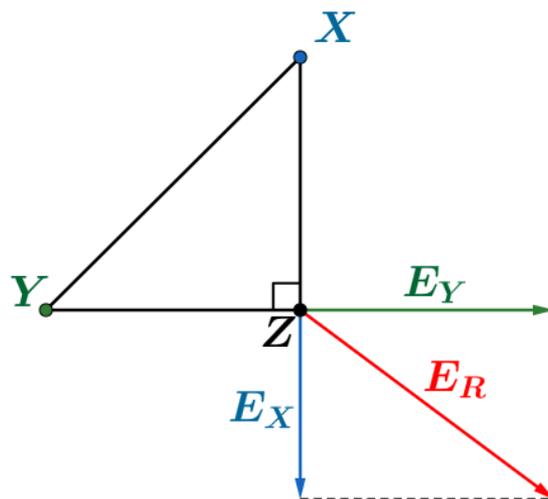
Dados: o meio é o vácuo e a constante eletrostática do vácuo é $K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

- a) $2 \cdot 10^5 \text{ N/C}$
- b) $6 \cdot 10^3 \text{ N/C}$
- c) $8 \cdot 10^4 \text{ N/C}$
- d) 10^4 N/C
- e) 10^5 N/C



Comentários:

No ponto Z , temos as seguintes configurações do campo de X e de Y :



Por definição, E_X e E_Y são dados por:

$$E_X = \frac{KQ_X}{XZ^2} \text{ e } E_Y = \frac{KQ_Y}{YZ^2}$$

Substituindo valores, temos:



$$\begin{cases} E_X = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{(3 \cdot 10^{-2})^2} \\ E_Y = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 8 \cdot 10^{-9}}{(3 \cdot 10^{-2})^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_X = \frac{9 \cdot 6}{9 \cdot 10^{-4}} = 6 \cdot 10^4 \text{ N/C} \\ E_Y = \frac{9 \cdot 8}{9 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^4 \text{ N/C} \end{cases}$$

Portanto, o campo resultante em Z é dado por:

$$\begin{aligned} E_R &= \sqrt{E_X^2 + E_Y^2} \\ E_R &= \sqrt{(6 \cdot 10^4)^2 + (8 \cdot 10^4)^2} \\ E_R &= \sqrt{6^2 \cdot 10^8 + 8^2 \cdot 10^8} \\ E_R &= \sqrt{10^8(6^2 + 8^2)} \\ E_R &= 10^4 \sqrt{6^2 + 8^2} \\ E_R &= 10 \cdot 10^4 = 10^5 \text{ N/C} \end{aligned}$$

Gabarito: E

2. (EsPCEX – 2018)

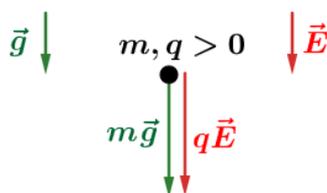
Considere uma esfera metálica de massa igual a 10^{-6} kg e carga positiva de 10^{-3} C . Ela é lançada verticalmente para cima com velocidade inicial $v_0 = 50 \text{ m/s}$, em uma região onde há um campo elétrico uniforme apontado verticalmente para baixo, de módulo $E = 10^{-2} \text{ N/C}$. A máxima altura que a esfera alcança, em relação ao ponto de onde foi lançada, é de

Dado: considere a aceleração da gravidade igual a 10 m/s^2 .

- a) 30,5 m.
- b) 40,5 m.
- c) 62,5 m.
- d) 70,0 m.
- e) 82,7 m.

Comentários:

De acordo com o enunciado, as forças na esfera estão representadas por:



Dessa forma, vamos calcular os módulos das forças peso e elétrica:

$$P = m \cdot g = 10^{-6} \cdot 10 = 10^{-5} \text{ N}$$



$$F = 10^{-3} \cdot 10^{-2} N$$

Logo, a força resultante sobre a partícula é dada por:

$$F_R = P + F_{ele}$$

$$F_R = 10^{-5} + 10^{-5}$$

$$F_R = 2 \cdot 10^{-5} N$$

Note que essa força é para baixo. Pela segunda lei de Newton, podemos saber a aceleração que o corpo fica submetido:

$$F_R = m \cdot a$$

$$2 \cdot 10^{-5} = 10^{-6} \cdot a$$

$$\boxed{a = 20 \text{ m/s}^2}$$

Por Torricelli, podemos encontrar a altura máxima alcançada pelo corpo:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_y \cdot \Delta y$$

$$0^2 = 50^2 - 2 \cdot 20 \cdot h_{m\acute{a}x}$$

$$h_{m\acute{a}x} = \frac{50^2}{40}$$

$$\boxed{h_{m\acute{a}x} = 62,5 \text{ m}}$$

Gabarito: C

3. (EsPCEX – 2017)

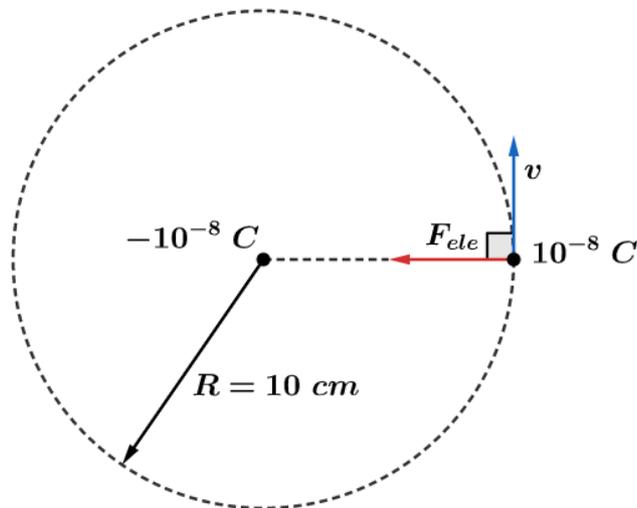
Uma partícula com carga elétrica negativa igual a -10^{-8} C encontra-se fixa num ponto do espaço. Uma segunda partícula de massa igual a $0,1 \text{ g}$ e carga elétrica positiva igual a $+10^{-8} \text{ C}$ descreve um movimento circular uniforme de raio 10 cm em torno da primeira partícula. Considerando que elas estejam isoladas no vácuo e desprezando todas as interações gravitacionais, o módulo da velocidade linear da partícula positiva em torno da partícula negativa é igual a Dado: considere a constante eletrostática do vácuo igual a $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

- a) $0,3 \text{ m/s}$
- b) $0,6 \text{ m/s}$
- c) $0,8 \text{ m/s}$
- d) $1,0 \text{ m/s}$
- e) $1,5 \text{ m/s}$

Comentários:

Esquemáticamente, temos a seguinte representação da força sobre a partícula realizando um MCU.





Nessa questão foram desprezados os efeitos gravitacionais, devido ao fato de a massa ser bem pequena. Assim, a força elétrica desempenha o papel de resultante centrípeta. Portanto:

$$R_{cp} = F_{ele}$$
$$\frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{Kq_1q_2}{R^2}$$
$$v^2 = \frac{Kq_1q_2}{mR}$$
$$v = \sqrt{\frac{Kq_1q_2}{mR}}$$

Substituindo valores, vem:

$$v = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^9 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-8}}{0,1 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 10^{-2}}}$$
$$v = \sqrt{9 \cdot 10^{-2}}$$
$$v = 3 \cdot 10^{-1} \text{ m/s}$$
$$\boxed{v = 0,3 \text{ m/s}}$$

Gabarito: A

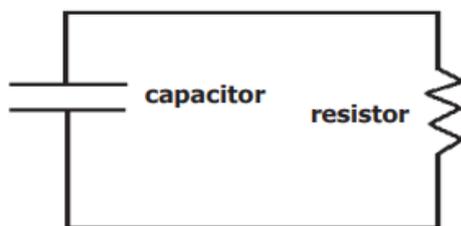
4. (ExPCEEx – 2017)

Um capacitor de capacitância igual a $2 \mu F$ está completamente carregado e possui uma diferença de potencial entre suas armaduras de $3 V$. Em seguida, este capacitor é ligado a um resistor ôhmico por meio de fios condutores ideais, conforme representado no circuito abaixo, sendo completamente descarregado através do resistor.

Nesta situação, a energia elétrica total transformada em calor pelo resistor é de:



- a) $1,5 \cdot 10^{-6} J$
- b) $6,0 \cdot 10^{-6} J$
- c) $9,0 \cdot 10^{-6} J$
- d) $12,0 \cdot 10^{-6} J$
- e) $18,0 \cdot 10^{-6} J$



Comentários:

A energia armazenada no capacitor é dissipada no resistor. Essa energia é dada por:

$$E = \frac{C \cdot V^2}{2}$$

Substituindo valores, vem:

$$E = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 3^2}{2}$$

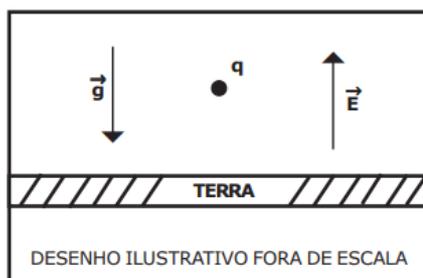
$$E = 9 \cdot 10^{-6} J$$

Gabarito: C

5. (EsPCEEx – 2016)

Uma partícula de carga q e massa $10^{-6} kg$ foi colocada num ponto próximo à superfície da Terra onde existe um campo elétrico uniforme, vertical e ascendente de intensidade $E = 10^5 N/C$. Sabendo que a partícula está em equilíbrio, considerando a intensidade da aceleração da gravidade $g = 10 m/s^2$, o valor da carga q e o seu sinal são respectivamente:

- a) $10^{-3} \mu C$, negativa
- b) $10^{-5} \mu C$, positiva
- c) $10^{-5} \mu C$, negativa
- d) $10^{-4} \mu C$, positiva
- e) $10^{-4} \mu C$, negativa



Comentários:

Se a partícula está em equilíbrio, então a força peso deve ser igual a força elétrica, mas com sentidos contrários. Sabemos que a força peso está orientada para baixo, então a força elétrica deve ser orientada para cima. Como o campo elétrico está orientada para cima, a carga da partícula deve ser positiva para que a força elétrica esteja para cima.

Pela condição de equilíbrio, temos:

$$q \cdot E = m \cdot g$$

$$q \cdot 10^5 = 10^{-6} \cdot 10$$



$$q = 10^{-10} = 10^{-4} \cdot 10^{-6}$$

$$q = 10^{-4} \mu\text{C}$$

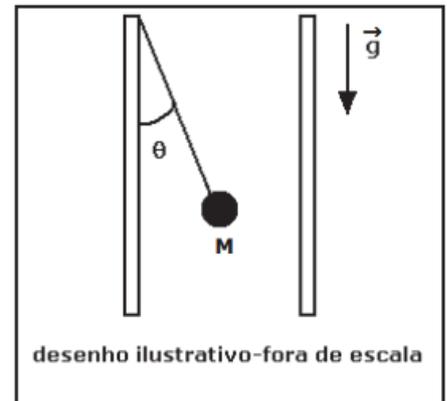
Gabarito: D

6. (EsPCEX – 2015)

Uma pequena esfera de massa M igual a $0,1 \text{ kg}$ e carga elétrica $q = 1,5 \mu\text{C}$ está, em equilíbrio estático, no interior de um campo elétrico uniforme gerado por duas placas paralelas verticais carregadas com cargas elétricas de sinais opostos. A esfera está suspensa por um fio isolante preso a uma das placas conforme o desenho abaixo. A intensidade, a direção e o sentido do campo elétrico são, respectivamente,

Dados: $\cos \theta = 0,8$ e $\sin \theta = 0,6$. Intensidade da aceleração da gravidade $g = 10 \text{ m/s}^2$.

- a) $5 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, horizontal, da direita para a esquerda.
- b) $5 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, horizontal, da esquerda para a direita.
- c) $9 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, horizontal, da esquerda para a direita.
- d) $9 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, horizontal, da direita para a esquerda.
- e) $5 \cdot 10^5 \text{ N/C}$, vertical, de baixo para cima.

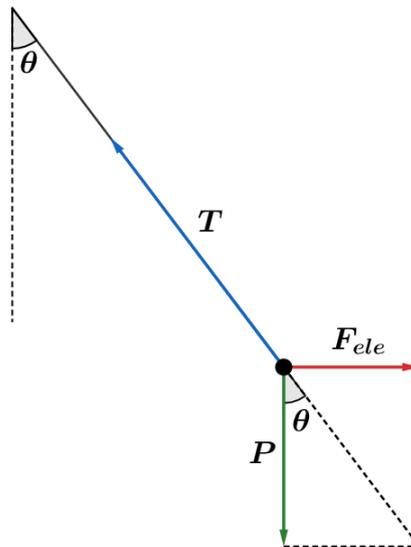


Comentários:

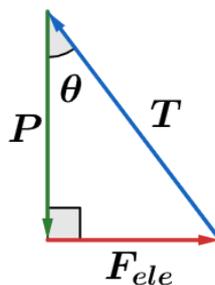
Se a partícula está formada um ângulo θ , como mostrado na figura, então quer dizer que existe uma força na direção horizontal na esfera, orientada da esquerda para a direita. Sabemos que em uma região onde existe duas placas paralelas, carregadas com cargas de sinais contrários, há um campo elétrico orientado perpendicularmente às áreas das placas.

Como a esfera tem carga positiva, e a força elétrica está na direção horizontal, direção do campo elétrico entre as placas, a força elétrica deve ser orientada para a direita, assim como o campo, já que a esfera tem carga positiva. A figura abaixo ilustra as forças na esfera:





Pelo diagrama de forças, para a condição de equilíbrio, temos:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{F_{ele}}{P} \\ \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} &= \frac{q \cdot E}{m \cdot g} \end{aligned}$$

Substituindo valores, vem:

$$\begin{aligned} \frac{0,6}{0,8} &= \frac{1,5 \cdot 10^{-6} \cdot E}{0,1 \cdot 10} \\ \boxed{E = 5 \cdot 10^5 \text{ N/C}} \end{aligned}$$

Gabarito: B

7. (EsPCEX – 2013)

O desenho abaixo mostra uma barra homogênea e rígida AB de peso desprezível, apoiada no ponto O do suporte. A distância da extremidade B ao ponto de apoio O é o triplo da distância de A a O .

No lado esquerdo, um fio ideal isolante e inextensível, de massa desprezível, prende a extremidade A da barra a uma carga elétrica puntiforme positiva de módulo Q . A carga Q está situada a uma distância d de uma outra carga elétrica fixa puntiforme negativa de módulo q .

No lado direito, um fio ideal inextensível e de massa desprezível prende a extremidade B da barra ao ponto C .



A intensidade da força de tração no fio BC , para que seja mantido o equilíbrio estático da barra na posição horizontal, é de:

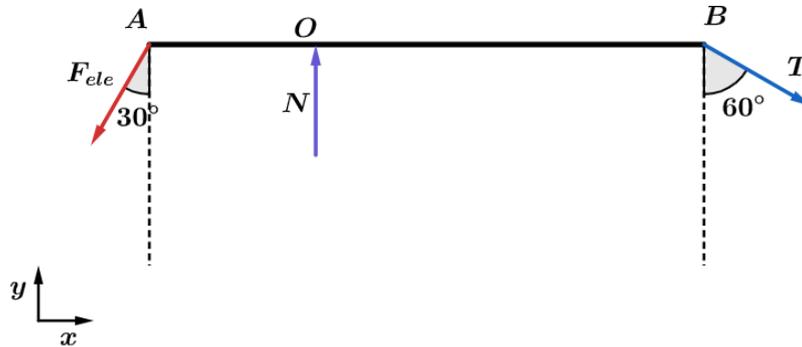
Dados: $\text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ = 1/2$, $\text{cos } 30^\circ = \text{sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2$ e K_0 é a constante eletrostática do meio.

- a) $K_0 Qq/2d^2$
- b) $K_0 Qq/4d^2$
- c) $\sqrt{3}K_0 Qq/3d^2$
- d) $\sqrt{3}K_0 Qq/9d^2$
- e) $K_0 Qq/d^2$



Comentários:

A força entre as cargas elétricas é de atração, já que as cargas têm sinais opostos. Na barra AB , temos as forças:



Decompondo as forças na horizontal, respeitando a condição da barra ficar na horizontal como diz o enunciado, temos:

$$T \cdot \text{sen } 60^\circ = F_{ele} \cdot \text{sen } 30^\circ$$

$$T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = F_{ele} \cdot \frac{1}{2}$$

$$T = \frac{F_{ele}}{\sqrt{3}}$$

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot F_{ele}$$

$$T = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{KQq}{d^2}$$

Note que nem precisamos olhar para a condição dos momentos das forças.

Gabarito: C

8. (EsPCEx - 2012)



Duas esferas metálicas de raios R_A e R_B com $R_A < R_B$ estão no vácuo e isoladas eletricamente uma da outra. Cada uma é eletrizada com uma mesma quantidade de carga positiva. Posteriormente, as esferas são interligadas por meio de um fio condutor de capacitância desprezível e, após atingir o equilíbrio eletrostático, a esfera A possuirá uma carga Q_A e um potencial V_A , e a esfera B uma carga Q_B e um potencial V_B . Baseado nas informações anteriores, podemos, então, afirmar que

- a) $V_A < V_B$ e $Q_A = Q_B$
- b) $V_A = V_B$ e $Q_A = Q_B$
- c) $V_A < V_B$ e $Q_A < Q_B$
- d) $V_A = V_B$ e $Q_A < Q_B$
- e) $V_A > V_B$ e $Q_A = Q_B$

Comentários:

Antes de colocar as esferas em contato, a esfera A tinha carga Q e a esfera B tinha carga Q . Após colocar em contato por um fio as esferas e atingido o equilíbrio eletrostático, as esferas terão o mesmo potencial (o que caracteriza o equilíbrio eletrostático entre as esferas). Então:

$$V_{eq} = V_A = V_B$$

Mas, o potencial de cada esfera é dado por:

$$V_A = \frac{KQ_A}{R_A} \text{ e } V_B = \frac{KQ_B}{R_B}$$

Como eles são iguais, então:

$$\begin{aligned} V_A &= V_B \\ \frac{KQ_A}{R_A} &= \frac{KQ_B}{R_B} \\ \frac{Q_A}{Q_B} &= \frac{R_A}{R_B} \end{aligned}$$

Mas, $R_A < R_B$, isto é, $\frac{R_A}{R_B} < 1$. Então:

$$\frac{Q_A}{Q_B} < 1$$

$$\boxed{Q_A < Q_B}$$

Em outras palavras, como o raio de A é menor que o raio de B , após o equilíbrio eletrostático (mesmo potencial), a esfera menor deve conter menos cargas que a esfera maior.

Gabarito: D

9. (EEAR – 2018)



Pedrinho visitou o laboratório de Física de sua escola e se encantou com um experimento denominado pêndulo eletrostático, que é constituído por uma esfera pequena e leve, suspensa por um fio fino e isolante, é utilizado para detectar se um corpo está ou não eletrizado. Resolvendo brincar com o experimento, Pedrinho aproxima do pêndulo um bastão e observa que a esfera é atraída por ele. Considere as afirmações a seguir sobre a observação de Pedrinho:



- 1 – A esfera e o bastão estão carregados com cargas de mesmo sinal.
- 2 – A esfera possui carga de sinal contrário ao do bastão.
- 3 – A esfera pode estar descarregada.
- 4 – O bastão pode estar carregado positivamente.

A alternativa que apresenta a(s) afirmação(ões) correta(s) é:

- a) 1, somente
- b) 2,3 e 4, somente
- c) 3 e 4, somente
- d) todas

Comentários:

1. Incorreta. De acordo com o princípio da atração e da repulsão, se há atração entre os corpos (inclinação do pêndulo para próximo do bastão), necessariamente um dos corpos pode estar carregado e o outro pode estar neutro, mas sendo condutor há movimentação de cargas e os corpos sofrerão atração. Pode ocorrer ainda dos dois corpos estarem com cargas contrárias, mas isso não é uma obrigação.
2. Incorreta. Pode ser que um deles esteja carregado e o outro não. Mas, se o segundo corpo que está neutro for condutor, poderá haver indução e os corpos podem sofrer atração.
3. Correta. Pode ser que a esfera esteja descarregada, mas se ela for condutora, haverá movimentação das cargas, de tal forma que no lado mais próximo do bastão fique com carga contrária a carga do bastão e, assim, tenhamos uma atração entre os corpos.
4. Correta. O bastão pode estar positivamente ou negativamente carregado, não temos informações suficientes para definir a carga do bastão, mas a palavra “pode” deixa essa afirmativa correta.

Gabarito: C

10. (EEAR – 2017)

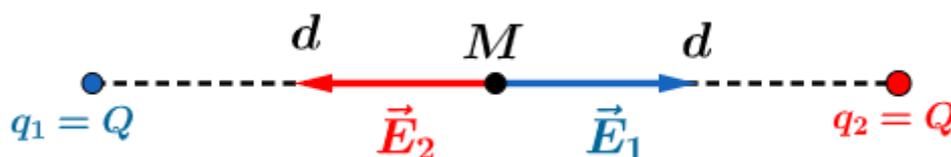


Duas cargas idênticas são colocadas no vácuo a uma certa distância uma da outra. No ponto médio entre as cargas, o campo elétrico resultante será _____ e o potencial elétrico resultante será _____ do potencial de umas das cargas. A sequência de palavras que completa corretamente as lacunas será:

- a) nulo – o dobro
- b) nulo – a metade
- c) o dobro – o dobro
- d) a metade – o dobro

Comentários:

Como as cargas são idênticas, ou seja, tem o mesmo sinal, o campo gerado por cada uma será igual em módulo, mas terão sentidos contrários.



Como o campo elétrico é uma grandeza vetorial, o campo elétrico resultante no ponto médio M é nulo, pois \vec{E}_1 tem o mesmo módulo de \vec{E}_2 , mas sentido contrário:

$$E_1 = \frac{KQ}{d^2} = E_2$$

Por outro lado, o potencial elétrico é uma grandeza escalar e para cada carga é dado por:

$$V_1 = \frac{KQ}{d} \text{ e } V_2 = \frac{KQ}{d}$$

Portanto, o potencial resultante em M é dado por:

$$V_M = V_1 + V_2$$
$$V_M = \frac{KQ}{d} + \frac{KQ}{d}$$
$$\boxed{V_M = \frac{2KQ}{d}}$$
$$V_M = 2 \cdot \frac{KQ}{\underbrace{d}_{=V_1=V_2}}$$

Logo, o campo elétrico em M (ponto médio) é nulo e o potencial elétrico vale o dobro do potencial de uma das esferas.

Gabarito: A

11. (EEAR – 2017)



Duas esferas idênticas A e B , de cargas iguais a $Q_A = -3 \mu C$ e $Q_B = -8 \mu C$, estão inicialmente isoladas uma da outra. Em seguida, ambas são colocadas em contato e depois separadas por uma distância de 30 cm no vácuo. Determine o valor aproximado da força elétrica que passa a atuar entre as cargas.

Dados: constante eletrostática no vácuo $K = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$.

- a) 2
- b) 3
- c) 6
- d) 9

Comentários:

Para duas cargas puntiformes separadas por uma distância d , a lei de Coulomb estabelece que o módulo da força entre as cargas é dado por:

$$F = \frac{K|Q_A||Q_B|}{d^2}$$

Substituindo valores, tomando cuidado com as unidades no SI, passando a distância de centímetros para metros, vem:

$$F = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 3 \cdot 10^{-6} \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{(30 \cdot 10^{-2})^2}$$

$$F = \frac{(9 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 10^{9-6-6})}{(3 \cdot 10^{-1})^2}$$

$$F = \frac{9 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{3^2 \cdot (10^{-1})^2}$$

$$F = \frac{9 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^{-2}}$$

$$F = 24 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-(-2)}$$

$$F = 24 \cdot 10^{-3+2}$$

$$F = 24 \cdot 10^{-1}$$

$$\boxed{F = 2,4 \text{ N}}$$

Note que a força de interação é de repulsão, já que as cargas possuem o mesmo sinal (negativas).

A banca divulgou como gabarito a letra B, aproximando 2,4 para 3. O arredondamento de 2,4 é para baixo, para o valor de 2.

Gabarito: A

12. (EEAR – 2017)



Duas cargas são colocadas em uma região onde há interação elétrica entre elas. Quando separadas por uma distância d , a força de interação elétrica entre elas tem módulo igual a F . Triplicando-se a distância entre as cargas, a nova força de interação elétrica em relação à força inicial, será

- a) diminuída 3 vezes
- b) diminuída 9 vezes
- c) aumentada 3 vezes
- d) aumentada 9 vezes

Comentários:

Quando as cargas estão separadas por uma distância d , a força de interação entre elas tem módulo:

$$F = \frac{K|Q_A||Q_B|}{d^2}$$

Para uma nova distância 3 vezes a anterior, isto é, $d' = 3d$, temos:

$$F' = \frac{K|Q_A||Q_B|}{(3d)^2}$$

$$F' = \frac{K|Q_A||Q_B|}{9d^2}$$

$$F' = \frac{1}{9} \frac{K|Q_A||Q_B|}{\underbrace{d^2}_F}$$

$$\boxed{F' = \frac{1}{9}F}$$

Diante desse resultado, vemos que a força é diminuída 9 vezes.

Gabarito: B

13. (EEAR – 2017)

Duas esferas idênticas e eletrizadas com cargas elétricas q_1 e q_2 se atraem com uma força de 9 N . Se a carga da primeira esfera aumentar cinco vezes e a carga da segunda esfera for aumentada oito vezes, qual será o valor da força, em newtons, entre elas?

- a) 40
- b) 49
- c) 117
- d) 360



Comentários:

Quando as cargas estão separadas por uma distância d , a força de interação entre elas tem módulo:

$$F = \frac{K|Q_A||Q_B|}{d^2}$$

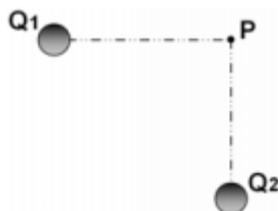
Se mantida a distância constante, podemos dizer que a nova carga de A será $Q'_A = 5Q_A$ e $Q'_B = 8Q_B$, então:

$$\begin{aligned} F' &= \frac{K|Q'_A||Q'_B|}{d^2} \\ F' &= \frac{K \cdot 5|Q_A| \cdot 8|Q_B|}{d^2} \\ F' &= 40 \cdot \underbrace{\frac{K|Q_A||Q_B|}{d^2}}_{=9\text{ N}} \\ F' &= 40 \cdot 9 \\ \boxed{F' = 360\text{ N}} \end{aligned}$$

Gabarito: D

14. (EEAR – 2016)

São dadas duas cargas, conforme a figura:



Considerando E_1 o módulo do campo elétrico devido à carga Q_1 , E_2 o módulo do campo elétrico devido a carga Q_2 , V_1 o potencial elétrico devido a carga Q_1 e V_2 o potencial elétrico devido a carga Q_2 . Considere E_P o campo elétrico e V_P o potencial resultante no ponto P . Julgue as expressões abaixo como verdadeiras (V) ou falsas (F).

- () $E_P = E_1 + E_2$
- () $V_P = V_1 + V_2$
- () $\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$
- () $\vec{V}_P = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta.

- a) V – V – F – F
- b) V – F – F – V
- c) F – F – V – V



d) F – V – V – F

Comentários:

Você deve lembrar que campo elétrico é uma grandeza vetorial e potencial elétrico é uma grandeza escalar. Portanto, o campo elétrico resultante no ponto P deve ser escrito por:

$$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Como uma soma vetorial. Por outro lado, o potencial elétrico é dado por uma simples soma escalar:

$$V_P = V_1 + V_2$$

Portanto, a sequência correta é F – V – V – F.

Gabarito: D

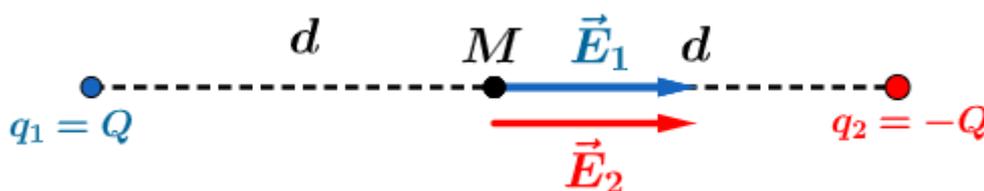
15. (EEAR – 2015)

Duas cargas elétricas puntiformes de mesmo valor e de sinais contrários são colocadas a uma distância fixa. No ponto médio entre elas, mede-se a intensidade do vetor campo elétrico e o potencial elétrico. Assinale a alternativa que contém os resultados corretos para essas medidas.

- a) Intensidade do vetor campo elétrico e potencial elétrico nulos.
- b) Intensidade do vetor campo elétrico e potencial elétrico não nulos.
- c) Intensidade do vetor campo elétrico nulo e potencial elétrico não nulo.
- d) Intensidade do vetor campo elétrico não nulo e potencial elétrico nulo.

Comentários:

Note que a questão 2 (EEAR – 2017) é idêntica a essa questão, buscando relacionar os módulos do campo elétrico e do potencial no ponto médio entre as cargas. Entretanto, as cargas têm sinais contrários. Então, o campo elétrico tem configuração levemente alterado, assim como o potencial elétrico. Sem perda de generalidade, podemos ter a seguinte configuração:



Nesse caso, temos que:

$$\vec{E}_M = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Como os campos estão orientados na mesma direção e no mesmo sentido, o módulo do campo resultante é dado por:



$$E_R = E_1 + E_2$$
$$E_R = \frac{KQ}{d^2} + \frac{KQ}{d^2}$$
$$\boxed{E_R = 2 \frac{KQ}{d^2}}$$

Note que o campo é não nulo. Por outro lado, o potencial elétrico é uma grandeza escalar e no ponto médio é dado por:

$$V_M = V_1 + V_2$$
$$V_M = \frac{KQ_1}{d} + \frac{KQ_2}{d}$$
$$V_M = \frac{KQ}{d} + \frac{K(-Q)}{d}$$
$$V_M = \frac{KQ}{d} - \frac{KQ}{d}$$
$$\boxed{V_M = 0}$$

Gabarito: D

16. (EEAR – 2013)

Quatro esferas idênticas (A, B, C e D) têm cargas elétricas respectivamente iguais a $8Q$, $4Q$, $2Q$ e Q . Determine a carga final de D após contatos sucessivos com A, em seguida com B, e finalmente com C, uma esfera de cada vez.

- a) 3,125
- b) 3,750
- c) 5,000
- d) 7,500

Comentários:

Inicialmente, vamos fazer o contato entre D e A. Considerando que o contato é feito em um sistema eletrostaticamente isolado, sabemos que há conservação da carga elétrica, isto é, a soma das cargas antes do contato e depois do contato permanece inalterada. Como as esferas são idênticas, após o contato, as cargas nas esferas devem ser iguais. Portanto:

$$Q_A + Q_D = Q' + Q'$$
$$8Q + Q = 2Q'$$
$$Q' = \frac{9}{2}Q$$

Em seguida, D é colocada em contato com B, então:



$$Q_B + Q' = Q'' + Q''$$

$$4Q + \frac{9}{2}Q = 2Q''$$

$$Q'' = \frac{17}{4}Q$$

Em seguida, D é colocada em contato com C:

$$Q_C + Q'' = Q''' + Q'''$$

$$2Q + \frac{17}{4}Q = 2Q'''$$

$$Q''' = \frac{25}{8}Q$$

$$\boxed{Q''' = 3,125Q}$$

Gabarito: A

17. (EEAR – 2013)

Considere quatro capacitores ligados em paralelo, $C_1 = 2,2 \mu F$, $C_2 = 2,7 \mu F$, $C_3 = 3,9 \mu F$ e $C_4 = 4,7 \mu F$. Nesse caso, a capacitância equivalente dessa associação é _____ μF .

- a) 0
- b) 0,77
- c) 1,29
- d) 13,5

Comentários:

Para quatro capacitores associados em paralelo, a capacitância equivalente é dada por:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$$

$$C_{eq} = 2,2 \mu F + 2,7 \mu F + 3,9 \mu F + 4,7 \mu F$$

$$\boxed{C_{eq} = 13,5 \mu F}$$

Gabarito: D

18. (EEAR – 2013)

Ao duplicarmos a diferença de potencial a que está sujeito um capacitor, sem romper o dielétrico, a capacitância elétrica desse componente

- a) duplicará.
- b) quadruplicará.



- c) não se alterará.
- d) reduzirá a metade.

Comentários:

A capacitância de um corpo depende apenas de sua geometria e do meio em que está inserido. Portanto, ao duplicar a diferença de potencial, não alteramos a capacitância do corpo, pois não alteramos a geometria dele e não modificamos o meio, desde que não rompemos o dielétrico.

Gabarito: C

19. (EEAR – 2013)

Considere três esferas idênticas A, B e C, separadas umas das outras, formando um sistema eletricamente isolado, e que A está eletricamente carregada com carga Q , enquanto B e C estão eletricamente neutras. Coloca-se a esfera A em contato somente com B, em seguida somente com C, depois simultaneamente com B e C e, por fim elas são separadas novamente. Com base nos Princípios da Eletrostática, qual a carga total do sistema depois de todo o processo?

- a) Q
- b) $Q/3$
- c) $Q/4$
- d) $Q/8$

Comentários:

Se o sistema é eletricamente isolado, então há conservação das cargas elétricas. Inicialmente, existia apenas a carga Q no sistema. Então, a carga total do sistema é sempre Q . Portanto, após qualquer processo de troca de cargas, dentro desse sistema isolado, a quantidade de carga deve ser sempre Q .

Gabarito: A

20. (EEAR – 2010)

Considere uma esfera metálica oca com 0,1 m de raio, carregada com 0,01 C de carga elétrica, em **equilíbrio eletrostático** e com vácuo no seu interior. O valor do campo elétrico em um ponto situado no centro dessa esfera tem intensidade de ___ N/C.

- a) 0,0
- b) 1,0
- c) 10,0
- d) 100,0



Comentários:

O campo elétrico no interior de uma esfera metálica oca ou maciça e carregada é nulo, pois as cargas estão distribuídas na superfície externa da esfera. Trata-se de uma questão puramente conceitual.

Gabarito: A

21. (EEAR – 2010)

Uma carga puntiforme com $4 \cdot 10^{-9} \text{ C}$, situada no vácuo, gera campo elétrico ao seu redor. Entre dois pontos, A e B, distantes respectivamente 0,6 m e 0,8 m da carga, obtém-se a diferença de potencial V_{ab} de ____ volts.

Obs: $K_0 = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

- a) 15
- b) 20
- c) 40
- d) 60

Comentários:

Vamos calcular o potencial em cada ponto desejado:

$$V_a = \frac{KQ}{d}$$
$$V_a = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-9}}{0,6}$$
$$V_a = 60 \text{ V}$$
$$V_b = \frac{KQ}{d}$$
$$V_b = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-9}}{0,8}$$
$$V_b = 45 \text{ V}$$

Logo:

$$V_{ab} = V_a - V_b$$
$$V_{ab} = 60 - 45$$
$$\boxed{V_{ab} = 15 \text{ V}}$$

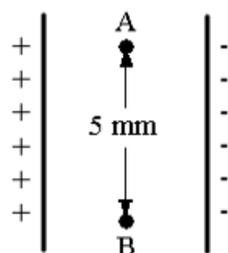
Gabarito: A

22. (EEAR – 2009)



Entre duas placas carregadas de um capacitor de placas paralelas tem-se um campo elétrico uniforme de $1,6 \cdot 10^{-3} \text{ N/C}$. Calcule o valor da diferença de potencial entre os pontos A e B, em volts, de acordo com a figura.

- a) 0
- b) 4
- c) 8
- d) 16

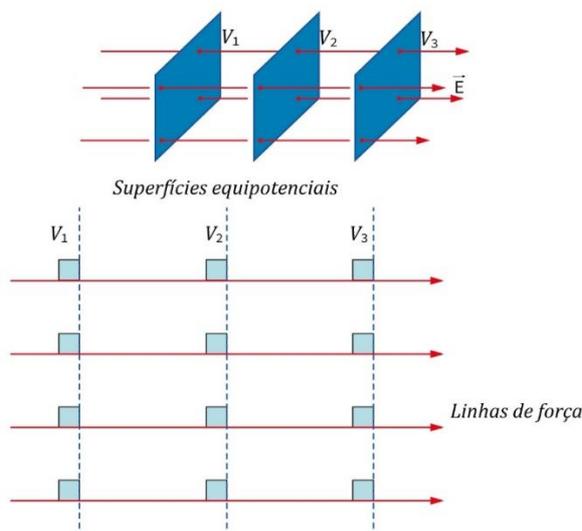


Comentários:

Na região entre as placas, sabemos que o campo elétrico é uniforme e orientado da esquerda para a direita. Além disso, sabemos que o campo elétrico está relacionado com a diferença de potencial pela equação:

$$U = E \cdot d$$

Em que d é a distância entre duas superfícies equipotenciais, que no caso são superfícies paralelas às placas (perpendiculares ao campo).



Como os pontos A e B estão em uma mesma vertical, por isso devem estar em uma mesma superfície equipotencial, a diferença de potencial entre os pontos A e B é nula.

Novamente, temos uma excelente questão teoria da EEAR.

Gabarito: A

23. (EEAR – 2009)

A unidade de diferença de potencial (ddp) denomina-se Volt, uma homenagem ao físico italiano Alessandro Volta (1745 – 1827) que construiu a primeira pilha elétrica. No Sistema Internacional de Unidades (SI), uma ddp de 110 volts significa que para uma carga elétrica de

1 coulomb é (são) necessário(s) _____ de energia para deslocá-la entre dois pontos num campo elétrico.

Assinale a alternativa que completa corretamente a lacuna acima.

- a) 1 joule
- b) 110 joules
- c) 110 amperes
- d) 110 elétron-volts

Comentários:

Sabemos que o trabalho para uma partícula ir de um potencial para outro é dado por:

$$\tau = q \cdot (V_A - V_B)$$

Para uma ddp de 110 V, o trabalho para levar uma carga de 1 C é de:

$$\tau = 1 \cdot 110$$

$$\tau = 110 J$$

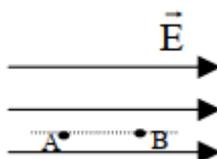
Assim, a energia desprendida para levar a carga de um potencial para outro é de 110 J.

Gabarito: B

24. (EEAR – 2008)

Calcule a diferença de potencial, em volts, entre dois pontos distantes 10 cm, imersos em um campo elétrico uniforme de intensidade de 150 V/m, conforme figura abaixo.

- a) 1,5
- b) 15
- c) 150
- d) 1500



Comentários:

A diferença de potencial entre os pontos A e B na região onde existe um campo elétrico uniforme é dada por:

$$U_{AB} = E \cdot d_{AB}$$

$$U_{AB} = 150 \cdot 0,1$$

$$U_{AB} = 15 V$$

Gabarito: B



25. (EEAR – 2008)

Calcule o trabalho, em joules, realizado sobre uma carga de 5 coulombs, ao ser deslocada sobre uma superfície equipotencial em um campo elétrico uniforme de intensidade 5 kV/m em uma distância de 25 mm.

- a) 0
- b) 5
- c) 125
- d) 125000

Comentários:

O trabalho para deslocar uma carga é dado por:

$$\tau = q \cdot (V_1 - V_2)$$

Se o deslocamento será ao longo de uma superfície equipotencial, não haverá mudança de potencial. Logo, a diferença de potencial é nula, então o trabalho será nulo.

Gabarito: A

26. (EEAR – 2008)

Em um campo elétrico uniforme, de intensidade 200 V/m , temos dois pontos distantes $0,2 \text{ m}$ um do outro. Calcule a diferença de potencial, em volts, entre eles.

- a) 10
- b) 20
- c) 40
- d) 80

Comentários:

A questão não deixou claro que os pontos estão ao longo da linha de força ou como estão situados no espaço. Assumindo que os pontos estão ao longo de uma linha de força, então a diferença de potencial está relacionada com o campo elétrico pela equação:

$$U = E \cdot d$$

$$U = 200 \cdot 0,2$$

$$\boxed{U = 40 \text{ V}}$$

A rigor essa questão deveria ser anulada, pois a diferença de potencial pode ser qualquer valor até 40 V , incluindo as letras A e B, pois existem regiões no espaço que distam $0,2 \text{ m}$ e que podem ter esse potencial.

Gabarito: C



27. (EEAR – 2007)

Ao aproximar um bastão de um eletroscópio de folhas, vê-se que as folhas se abrem. Diante desse fato, o que se pode deduzir, sem sombra de dúvidas, é que o bastão

- a) está carregado.
- b) não está carregado.
- c) está carregado negativamente.
- d) está carregado positivamente.

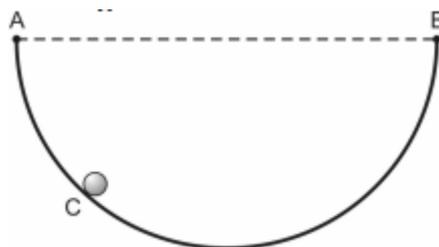
Comentários:

Se as folhas do eletroscópio se abrem, quando aproximamos um corpo, podemos dizer que o corpo está carregado, mas ainda não sabemos qual a natureza elétrica do corpo que aproximamos. Não dá para dizer se ele está positivamente ou negativamente carregado. Para isso, é necessário carregar o eletroscópio com uma carga bem conhecida e repetir o experimento, observe qual é a tendência inicial das folhas do eletroscópio.

Gabarito: A

28. (AFA – 2017)

Uma pequena esfera C , com carga elétrica de $+5 \cdot 10^{-4} C$, é guiada por um aro isolante e semicircular de raio R igual a $2,5 m$, situado num plano horizontal, com extremidades A e B , como indica a figura abaixo.



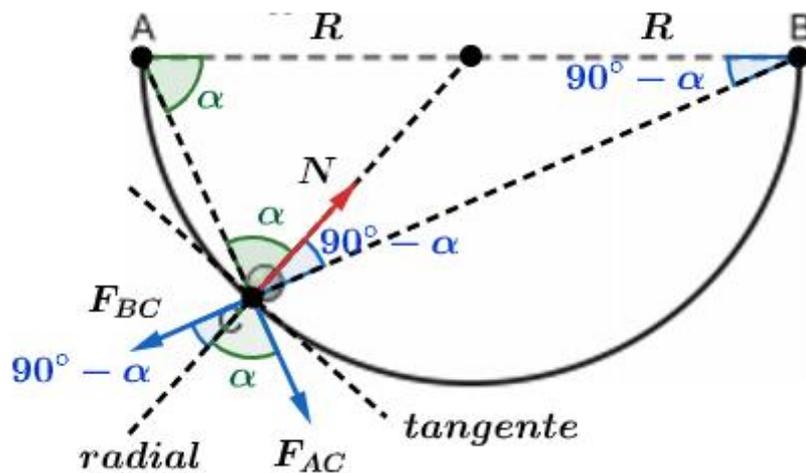
A esfera pode se deslocar sem atrito tendo o aro como guia. Nas extremidades A e B deste aro são fixadas duas cargas elétricas puntiformes de $+8 \cdot 10^{-6} C$ e $+1 \cdot 10^{-6} C$, respectivamente. Sendo a constante eletrostática do meio igual a $4\sqrt{5} \cdot 10^9 Nm^2/C^2$, na posição de equilíbrio da esfera C , a reação normal do aro sobre a esfera, em N , tem módulo igual a

- a) 1
- b) 2
- c) 4
- d) 5

Comentários:



Fazendo o diagrama de forças, temos:



Na direção tangente, temos:

$$F_{AC} \cdot \text{sen } \alpha = F_{BC} \cdot \text{sen}(90^\circ - \alpha)$$

$$\frac{K \cdot q_A \cdot q_C}{AC^2} \cdot \text{sen } \alpha = \frac{K \cdot q_B \cdot q_C}{BC^2} \cdot \text{cos } \alpha$$

$$\frac{q_A}{(2R \cdot \text{cos } \alpha)^2} \cdot \text{sen } \alpha = \frac{q_B}{(2R \cdot \text{sen } \alpha)^2} \cdot \text{cos } \alpha$$

$$\frac{\text{sen}^3 \alpha}{\text{cos}^3 \alpha} = \frac{q_B}{q_A}$$

$$\text{tg } \alpha = \sqrt[3]{\frac{q_B}{q_A}}$$

Substituindo valores, temos:

$$\text{tg } \alpha = \sqrt[3]{\frac{1 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 10^{-6}}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{2}$$

Logo:

$$\text{sec}^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Lembrando que pela geometria do problema, o ângulo é menor que 90° , por isso a secante deve ser um valor positivo. Portanto:

$$\text{cos } \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Pela relação fundamental da trigonometria, vem:



$$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Novamente, o ângulo está entre 0° e 90° , por isso o seno é positivo. Agora, basta decompor as forças na direção radial para encontrar a força normal. Lembrando que foi desconsiderado o atrito e, por isso, a força normal é radial. Logo:

$$\begin{aligned} N &= F_{BC} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + F_{AC} \cdot \cos \alpha \\ N &= \frac{K \cdot q_C \cdot q_B}{(2R \cdot \operatorname{sen} \alpha)^2} \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + \frac{K \cdot q_C \cdot q_A}{(2R \cdot \cos \alpha)^2} \cdot \cos \alpha \\ N &= \frac{K \cdot q_C}{4R^2} \cdot \left(q_B \cdot \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} + q_A \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha} \right) \\ N &= \frac{K \cdot q_C}{4R^2} \left(\frac{q_B}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{q_A}{\cos \alpha} \right) \end{aligned}$$

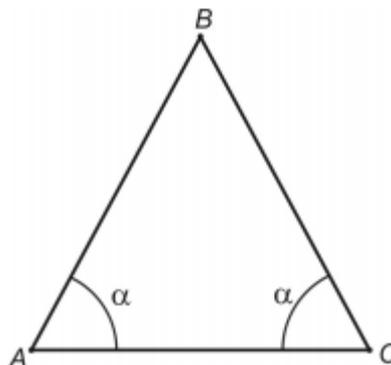
Substituindo valores, vem:

$$\begin{aligned} N &= \frac{4\sqrt{5} \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 2,5^2} \left(\frac{1 \cdot 10^{-6}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} + \frac{8 \cdot 10^{-6}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \right) \\ N &= \frac{4\sqrt{5} \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 2,5^2} \left(1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} + 8 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\sqrt{5}}{1} \right) \\ N &= \frac{4\sqrt{5} \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot \frac{25}{10} \cdot \frac{25}{10}} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{5} \\ \boxed{N = 2 N} \end{aligned}$$

Gabarito: B

29. (AFA – 2014)

Três cargas elétricas puntiformes q_A , q_B e q_C estão fixas, respectivamente, nos vértices A , B e C de um triângulo isósceles, conforme indica a figura abaixo.

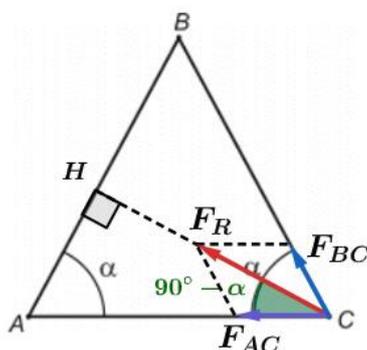


Considerando F_A o módulo da força elétrica de interação entre as cargas q_A e q_C ; F_B o módulo da força elétrica de interação entre as cargas q_B e q_C e sabendo-se que a força resultante sobre a carga q_C é perpendicular ao lado AB e aponta para dentro do triângulo, pode-se afirmar, certamente, que a relação entre os valores das cargas elétricas é

- a) $\frac{q_A + q_C}{q_B} < 0$
 b) $\frac{q_A + q_C}{q_B} > 0$
 c) $0 < \frac{q_A}{q_B} < 4 \frac{F_A}{F_B}$
 d) $0 < \frac{|q_A|}{|q_B|} < \frac{F_B}{F_A}$

Comentários:

Fazendo o diagrama de forças na figura, temos:



No triângulo AHC , temos:

$$d_{AC} = \frac{d_{HC}}{\text{sen } \alpha}$$

No triângulo BHC , temos:

$$d_{BC} = \frac{d_{HC}}{\cos(\alpha - (90^\circ - \alpha))}$$

$$d_{BC} = \frac{d_{HC}}{\text{sen } 2\alpha}$$

Portanto:

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{\frac{K \cdot q_A \cdot q_C}{AC^2}}{\frac{K \cdot q_B \cdot q_C}{BC^2}}$$

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{q_A}{q_B} \cdot \left(\frac{BC}{AC}\right)^2$$



$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{q_A}{q_B} \cdot \left(\frac{\frac{d_{HC}}{\text{sen } 2\alpha}}{\frac{d_{HC}}{\text{sen } \alpha}} \right)^2$$

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{q_A}{q_B} \cdot \left(\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } 2\alpha} \right)^2$$

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{q_A}{q_B} \cdot \left(\frac{\text{sen } \alpha}{2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha} \right)^2$$

$$\frac{F_A}{F_B} = \frac{q_A}{q_B} \cdot \frac{1}{4 \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{q_A}{q_B} = \frac{F_A}{F_B} \cdot 4 \cos^2 \alpha$$

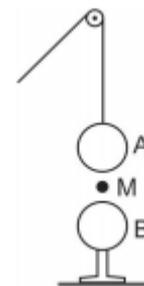
Como $0 < \cos^2 \alpha < 1$, temos:

$$\boxed{\frac{q_A}{q_B} < 4 \cdot \frac{F_A}{F_B}}$$

Gabarito: C

30. (FUVEST – 1990)

Uma esfera condutora A , de peso P , eletrizada positivamente é presa a um fio isolante que passa por uma roldana. A esfera se aproxima de B , com velocidade constante, de uma esfera B , idêntica a interior, mas neutra isolada. A esfera A toca em B e, em seguida é puxada para cima, com velocidade também constante.



Quando A passa pelo ponto M , a tração no fio é T_1 na descida e T_2 na subida. Podemos afirmar que:

- $T_1 < T_2 < P$
- $T_1 < P < T_2$
- $T_2 < T_1 < P$
- $T_2 < P < T_1$
- $P < T_1 < T_2$

Comentários:

A esfera A induz carga de sentido oposto em B . Aplicando $F = m \cdot a$ ao corpo A na descida:

$$T_1 = P - \frac{kq_A(-q_A)}{d^2} = P + \frac{kq_A^2}{d^2} > P$$

Os corpos trocam carga no contato e, como são idênticos, adquirem a mesma carga final:



$$q = \frac{q_A + 0}{2} = \frac{q_A}{2}$$

Aplicando $F = ma$ ao corpo A na subida:

$$T_2 = P - \frac{kq_A^2}{4d^2} < P$$

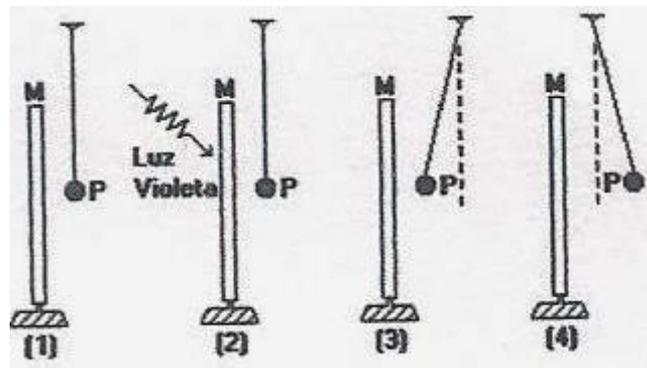
Logo:

$$T_2 < P < T_1$$

Gabarito: D

31. (FUVEST – 1993)

Dispõe-se de uma placa metálica M e de uma esferinha metálica P , suspensa por um fio isolante, inicialmente neutras e isoladas. Um feixe de luz violeta é lançado sobre a placa retirando partículas elementares da mesma. As figuras (1) a (4) adiante, ilustram o desenrolar dos fenômenos ocorridos.



Podemos afirmar que na situação (4):

- a) M e P estão eletrizadas positivamente.
- b) M está negativa e P Neutra.
- c) M está neutra e P positivamente eletrizada
- d) M e P estão eletrizadas negativamente
- e) M e P foram eletrizadas por indução.

Comentários:

Em (1) ambos os corpos estão neutros.

Em (2) as partículas retiradas são elétrons, assim M está negativamente carregado no seu lado esquerdo.

Em (3) P sofre indução de cargas negativas e é atraído até o contato com M , onde recebe parte de sua carga **positiva**.



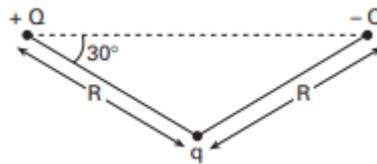
Em (4) os corpos são repelidos por apresentarem cargas de mesmo sinal.

Gabarito: A

32. (FUVEST – 1996)

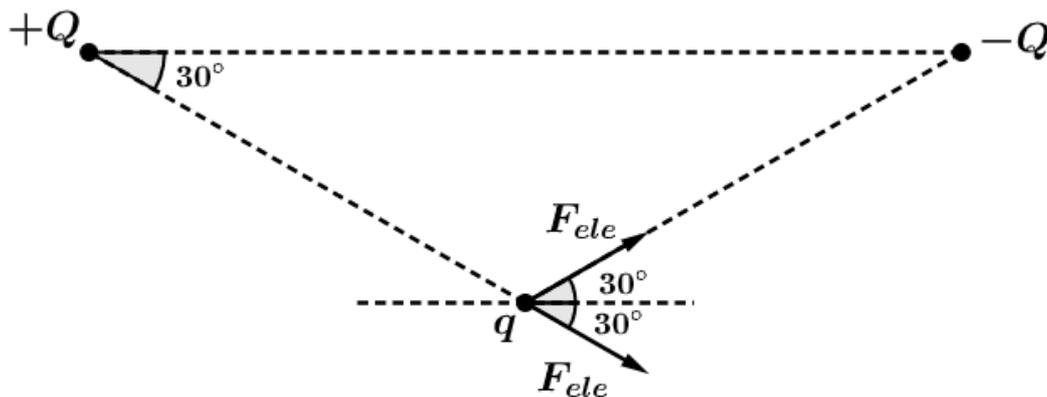
O Módulo F da força eletrostática entre duas cargas elétricas pontuais q_1 e q_2 , separadas por uma distância d , é $F = k \frac{|q_1||q_2|}{d^2}$ onde k é uma constante. Considere as três cargas pontuais representadas adiante por $+Q$, $-Q$ e q . o Módulo da força eletrostática total que age sobre a carga q será?

- a) $\frac{2kQq}{R^2}$
- b) $\frac{\sqrt{3}kQq}{R^2}$
- c) $\frac{kQ^2q}{R^2}$
- d) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQq}{R^2}$
- e) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \frac{kQ^2q}{R^2}$



Comentários:

Fazendo o diagrama de forças em q , temos que:



$$F_e = 2F \cos 30^\circ$$

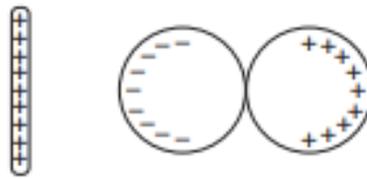
$$F_e = \frac{\sqrt{3}kQq}{R^2}$$

Gabarito: B

33. (FUVEST - 1996)

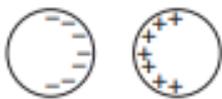


Aproximando-se uma barra eletrizada de duas esferas condutoras, inicialmente descarregadas e encostadas uma na outra, observa-se a distribuição de cargas esquematizada na figura abaixo.

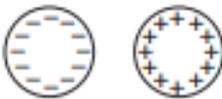


Em seguida, sem tirar do lugar a barra eletrizada, afasta-se um pouco uma esfera da outra. Finalmente, sem mexer mais nas esferas, remove-se a barra, levando-a para muito longe das esferas. Nessa situação final, a figura que melhor representa a distribuição de cargas nas duas esferas é:

a)



b)



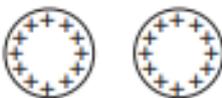
c)



d)



e)



Comentários:

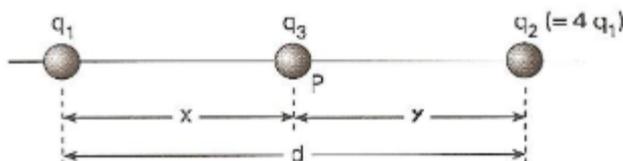
Enquanto as esferas estão em contato, logo, podemos considerá-las como um só condutor neutro, com distribuição não uniforme de cargas. Quando as esferas são separadas na presença desse desequilíbrio de cargas, resulta nessas mantendo as cargas que tinham logo antes da perda de contato. Assim, a esfera da esquerda possuirá carga negativa e a da direita positiva.

Essas cargas se atrairão, como mostrado em a).

Gabarito: A

34. (FUVEST – 1997)

Duas cargas pontuais positivas q_1 e $q_2 = 4q_1$ são fixadas a uma distância d uma da outra. uma terceira carga negativa q_3 é colocada no ponto P q_1 e q_2 , a uma distância x da carga q_1 , conforme mostra a figura.



- a) Calcule o valor de x para que a força eletrostática resultante sobre a carga q_3 seja nula.
- b) Verifique se existe um valor de q_3 para o qual tanto a carga q_1 como a q_2 , permanecem em equilíbrio, nas posições do item a, sem a necessidade de nenhuma outra força além das eletrostáticas entre as cargas. Caso exista, calcule este valor q_3 .

Comentários:

a) Aplicando $F_R = ma$ em q_3 ;

$$\frac{kq_1q_3}{x^2} = \frac{kq_3q_2}{y^2}$$

$$\frac{q_1}{x^2} = \frac{4q_1}{(d-x)^2}$$

$$\frac{d}{x} - 1 = 2$$

$$x = \frac{d}{3}$$

b) Pela terceira Lei de Newton sabemos que as forças que q_3 exerce em q_1 e q_2 são iguais em módulo, assim basta analisarmos uma dessas cargas. Aplicando $F_R = ma$ a q_1 :

$$\frac{kq_1q_3}{x^2} = \frac{kq_1q_2}{d^2}$$

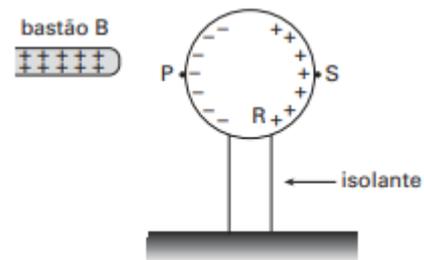
$$q_3 = \frac{4}{9}q_1$$

Gabarito: a) $x = \frac{d}{3}$ b) $q_3 = -\frac{4}{9}q_1$

35. (FUVEST – 1997)

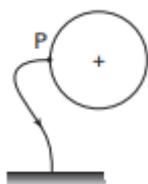


Quando se aproxima um bastão B, eletrizado positivamente, de uma esfera metálica, isolada e inicialmente descarregada, observa-se a distribuição de cargas representada na Figura 1.

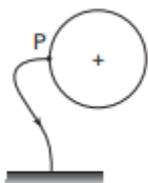


Mantendo o bastão na mesma posição, a esfera é conectada à terra por um fio condutor que pode ser ligado a um dos pontos P, R ou S da superfície da esfera. Indicando por (\rightarrow) o sentido do fluxo transitório (\emptyset) de elétrons (se houver) e por (+), (-) ou (0) o sinal da carga final (Q) da esfera, o esquema que representa \emptyset e Q é

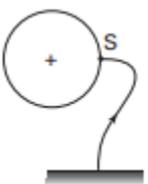
a)



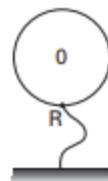
b)



c)



d)



e)



Comentários:

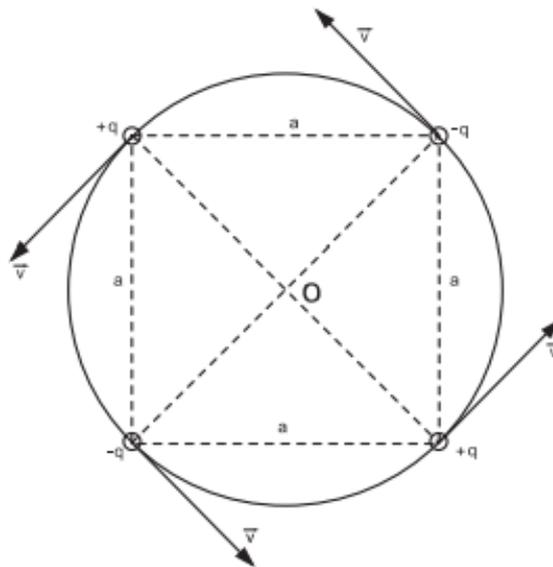
Antes de ser ligada à terra a esfera metálica não acumulava mais carga negativa no seu lado esquerdo devido à repulsão entre as cargas de mesmo sinal, em ambos os seus lados. Ao ser ligada

à terra, mais carga negativa pôde ser trazida que não fosse de uma região saturada de cargas positivas (lado direito da esfera).

Gabarito: E

36. (FUVEST – 1998)

Quatro pequenas esferas de massa m , estão carregadas com cargas de mesmo valor absoluto q , sendo duas negativas e duas positivas, como mostra a figura. As esferas estão dispostas formando um quadrado de lado a e giram numa trajetória circular de centro O , no plano do quadrado, com velocidade de módulo constante v . Suponha que as únicas forças atuantes sobre as esferas são devidas à interação eletrostática. A constante de permissividade elétrica é ϵ_0 . Todas as grandezas (dadas e solicitadas) estão em unidades SI.

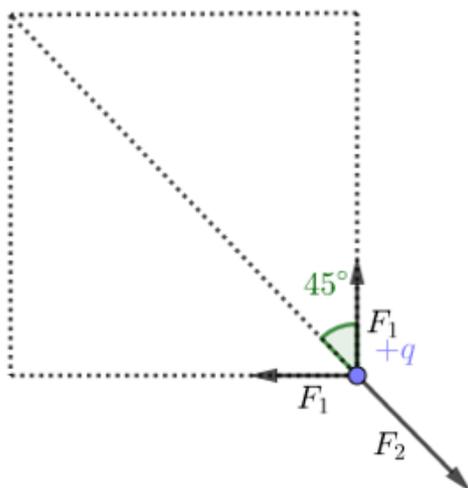


- a) Determine a expressão do módulo da força eletrostática resultante \vec{F} que atua em cada esfera e indique sua direção.
- b) Determine a expressão do módulo da velocidade tangencial \vec{v} das esferas.

Comentários:

a) Diante da simetria da questão, a resultante em cada carga terá o mesmo módulo. Assim, escolhendo qualquer uma das cargas, temos o seguinte diagrama de forças:





Considerando a figura acima, podemos concluir que a força resultante está na direção radial:

$$F_{ele} = 2F_1 \cos 45^\circ - F_2$$

$$F_{ele} = \frac{\sqrt{2}kq^2}{a^2} - \frac{kq^2}{(a\sqrt{2})^2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{kq^2}{a^2}$$

b) Aplicando $F = ma$ a uma carga q :

$$F_{ele} = ma_{cent}$$

$$\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{kq^2}{a^2} = \frac{mv^2}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

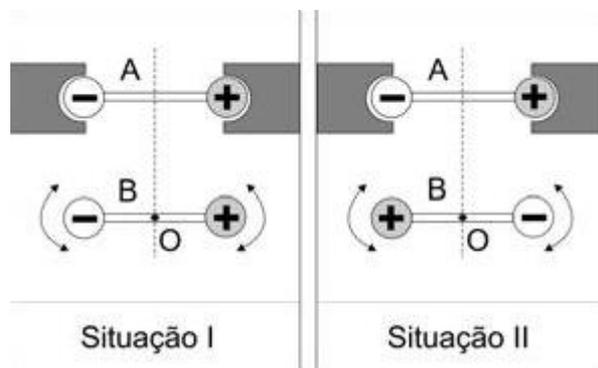
$$v = \sqrt{\frac{kq^2}{ma} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}$$

Em que $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

Gabarito: a) $F_R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q^2}{a^2} \cdot \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$ **b)** $v = q\sqrt{\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{m \cdot a} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]}$

37. (FUVEST – 2007)

Duas barras isolantes, A e B, iguais, colocadas sobre uma mesa, têm em suas extremidades, esferas com cargas elétricas de módulos iguais e sinais opostos. A barra A é fixa, mas a barra B pode girar livremente em torno de seu centro O, que permanece fixo. Nas situações I e II, a barra B foi colocada em equilíbrio, em posições opostas. Para cada uma dessas duas situações, o equilíbrio da barra B pode ser considerado como sendo, respectivamente,



SITUAÇÕES DE EQUILÍBRIO - após o sistema ser levemente deslocado de sua posição inicial.

Estável = tende a retornar ao equilíbrio inicial.

Instável = tende a afastar-se do equilíbrio inicial.

Indiferente = permanece em equilíbrio na nova posição.

- a) indiferente e instável.
- b) instável e instável.
- c) estável e indiferente.
- d) estável e estável.
- e) estável e instável.

Comentários:

Situação I: Estável

Considere um pequeno deslocamento de B no sentido horário. As cargas negativas ficarão mais próximas e as positivas mais distantes, assim a força agindo do lado esquerdo ficará maior que a força do lado direito (ambas direcionadas para baixo) gerando torque de sentido anti-horário, favorecendo o retorno à posição de equilíbrio horizontal.

Situação II: Instável

Considere um pequeno deslocamento de B no sentido horário. As cargas do lado esquerdo ficarão mais próximas e as do lado direito mais distantes, assim a força agindo do lado esquerdo ficará maior que a força do lado direito (ambas direcionadas para cima) gerando torque de sentido horário, favorecendo o afastamento em relação à posição de equilíbrio horizontal.

Gabarito: E

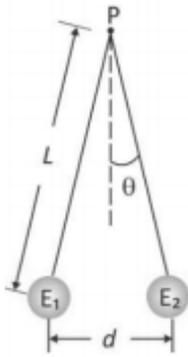
38. (FUVEST – 2018)

Um grupo de alunos, em uma aula de laboratório, eletriza um canudo de refrigerante por atrito, com um lenço de papel. Em seguida, com o canudo, eles eletrizam uma pequena esfera condutora, de massa 9 g , inicialmente neutra, pendurada em um fio de seda isolante, de comprimento L , preso em um ponto fixo P . No final do processo, a esfera e o canudo estão com cargas de sinais opostos.

a) Descreva as etapas do processo de eletrização da esfera.

Em seguida, os alunos colocam a esfera eletrizada (E_1) em contato com outra esfera (E_2), idêntica à primeira, eletricamente neutra e presa na extremidade de outro fio de seda isolante, também de comprimento L , fixo no ponto P . O sistema adquire a configuração ilustrada na figura, sendo $d = 8\text{ cm}$.





Para o sistema em equilíbrio nessa configuração final, determine:

- b) o módulo da tensão \vec{T} em um dos fios isolantes;
- c) o módulo da carga q_2 da esfera E_2 ;
- d) a diferença N entre o número de elétrons e de prótons na esfera E_2 após a eletrização.

Note e adote:

Para a situação descrita, utilize: $\cos\theta \cong 1$ e $\text{sen}\theta \cong 0,1$.

Aceleração da gravidade: 10 m/s^2

Força elétrica entre duas cargas puntiformes Q_1 e Q_2 distantes r uma da outra: $\frac{kQ_1Q_2}{r^2}$, onde $k = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

Carga do elétron: $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Ignore a massa dos fios.

Comentários:

a) Primeiramente o canudo foi trazido próximo à esfera, induzindo uma carga de sinal oposto à sua na superfície mais próxima da esfera. Após isso, ligou-se a esfera à terra, de modo que a esfera recebesse cargas de sinal oposto às do canudo. Por fim, quebrou-se a conexão da esfera com a terra e afastou-se o canudo.

b) Aplicando $F = ma$ a uma das cargas:

$$T = F_{ele} \text{sen } \theta + mg \quad (\text{eq. 1})$$

$$F_{ele} = mg \text{sen } \theta \quad (\text{eq. 2})$$

De (1) e (2), temos:

$$T = mg(1 + \text{sen}^2 \theta) \approx mg$$

c) Quando as esferas estão em contato a carga é distribuída entre elas de forma igual. ($q_1 = q_2 = q$)

Por (2), temos:

$$\frac{kq^2}{d^2} = mg \text{sen } \theta$$



$$q = d \sqrt{\frac{mg \operatorname{sen} \theta}{k}}$$

d) Temos:

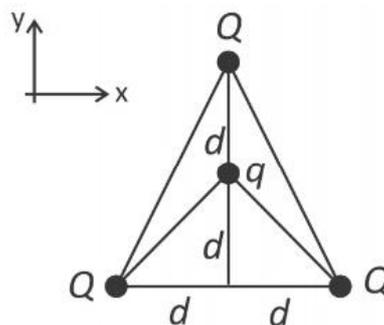
$$q = eN \Rightarrow N = \frac{q}{e}$$

Basta substituir os valores em questão.

Gabarito: a) descrição b) $T = 9 \times 10^{-2} \text{ N}$ c) $|q_2| = 8 \times 10^{-8} \text{ C}$ d) $N = 5 \times 10^{11}$

39. (FUVEST – 2019)

Três pequenas esferas carregadas com carga positiva Q ocupam os vértices de um triângulo, como mostra a figura. Na parte interna do triângulo, está afixada outra pequena esfera, com carga negativa q . As distâncias dessa carga às outras três podem ser obtidas a partir da figura.



Sendo $Q = 2 \times 10^{-4} \text{ C}$, $q = -2 \times 10^{-5} \text{ C}$ e $d = 6 \text{ m}$, a força elétrica resultante sobre a carga q

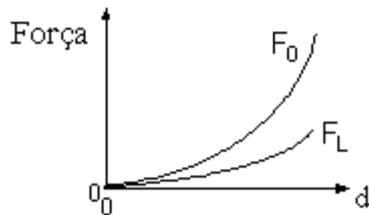
Note e adote:

A constante k_0 da Lei de Coulomb vale $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$

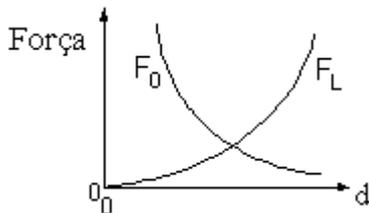
- a) é nula.
- b) tem direção do eixo y , sentido para baixo e módulo 1,8 N.
- c) tem direção do eixo y , sentido para cima e módulo 1,0 N.
- d) tem direção do eixo y , sentido para baixo e módulo 1,0 N.
- e) tem direção do eixo y , sentido para cima e módulo 0,3 N.

Comentários:

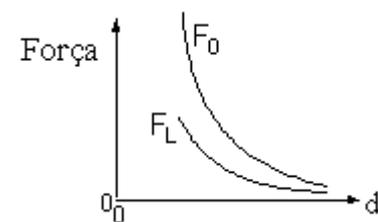




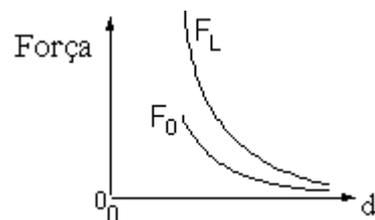
c)



d)



e)



Comentários:

Quando analisamos a Lei de Coulomb a mudança de meio afeta diretamente na constante eletrostática do meio $K = \frac{1}{4\pi\epsilon}$. Para o vácuo temos que ϵ_0 é o menor possível. No líquido, podemos dizer que $\epsilon = k \cdot \epsilon_0, k \geq 1$. Então, $K_0 \geq K_{Liq}$. Portanto, $F_0 \geq F_{Liq}$.

O entendimento da constante eletrostática do meio ficará mais clara quando estudarmos o dielétrico de um meio, cenas dos próximos capítulos.

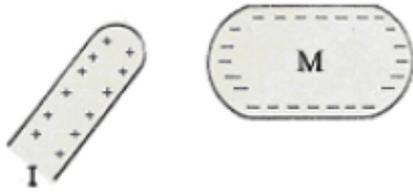
Gabarito: D

41. (ITA-1971)

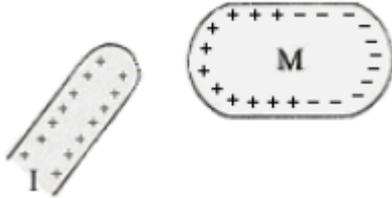
Um corpo condutor (I) carregado é aproximado de um corpo metálico (M) descarregado. Qual das figuras abaixo dá uma distribuição de cargas induzidas no metal que é consistente com a posição relativa dos corpos (I) e (M)?

a)

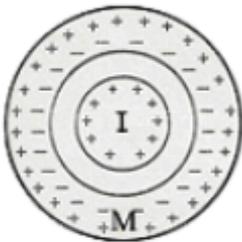




b)

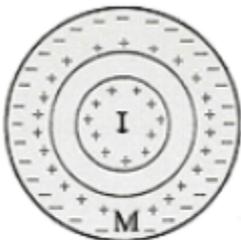


c)



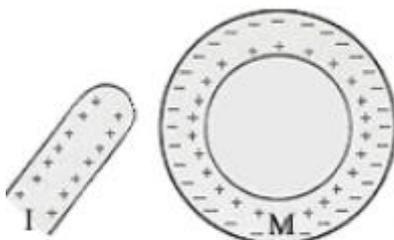
cilindro oco

d)



cilindro oco

e)



cilindro oco

Comentários:

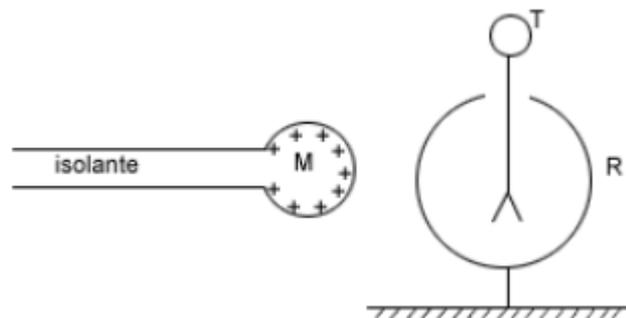
- a) M se mantém neutro.
- b) A carga induzida próxima a (I) deve ser negativa.
- c) Correto.
- d) Semelhante ao item b).

e) A distribuição de cargas não é uniforme como representada.

Gabarito: C

42. (ITA-1973)

Uma esfera metálica (M) é aproximada de um eletroscópio de folhas de alumínio, conforme o esquema abaixo. A carcaça metálica (R) do eletroscópio está em contato elétrico permanente com o solo.



Enquanto a esfera (M) está muito afastada do eletroscópio estabeleceu-se um contato elétrico transitório entre (T) e (R). Qual é a única afirmação correta em relação à experiência em apreço?

- a) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar o terminal (T).
- b) As folhas só abrirão quando a esfera (M) tocar a carcaça (R).
- c) As folhas só abrirão se o contato elétrico entre (T) e (R) for mantido permanentemente.
- d) As folhas só abrirão se a carcaça (R) receber uma carga de mesmo valor, mas de sinal oposto ao da esfera (M).
- e) As folhas se abrirão à medida que (M) se aproxima de (T)

Comentários:

- a) Incorreto. Antes de tocar o terminal a esfera induz carga negativa em (T), gerando um excesso de cargas positivas nas folhas do eletroscópio.
- b) Incorreto. Como (R) está ligado à terra, a carga da esfera iria apenas escoar.
- c) Veja a).
- d) Incorreto. Para que se abram, basta as folhas estarem carregadas com carga de mesmo sinal.
- e) Correto.

Gabarito: E

43. (ITA-1977)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices A e B de um triângulo retângulo isósceles. Sabe-se que a força elétrica resultante que atua sobre a carga localizada no vértice C do ângulo reto tem a mesma direção da reta AB. Aplicando-se a Lei de Coulomb a esta situação, conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em A e B são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
- b) As cargas localizadas nos pontos A e B têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
- c) As três cargas são de valores absolutos iguais.



- d) As cargas localizadas nos pontos A e B têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
- e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

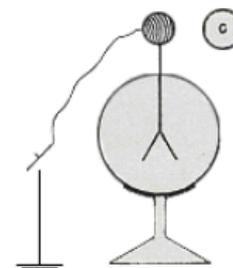
Comentários:

Como as forças possuem direção de seus respectivos catetos, o único modo de se cancelarem na direção da altura (saindo de C) é se possuírem módulos iguais e sentidos opostos (na direção dos catetos). Como as distâncias são iguais, devemos ter cargas iguais e de sinais opostos.

Gabarito: A

44. (ITA-1983)

O eletroscópio da figura foi carregado positivamente. Aproxima-se então um corpo C carregado negativamente e liga-se o eletroscópio à Terra, por alguns instantes, mantendo-se o corpo C nas proximidades. Desfaz-se a ligação à Terra e a seguir afasta-se C.



No final, a carga do eletroscópio:

- a) Permanece positiva.
- b) Fica nula devido à ligação com a Terra.
- c) Torna-se negativa.
- d) Terá sinal que vai depender da maior ou menor aproximação de C.
- e) Terá sinal que vai depender do valor da carga em C.

Comentários:

A repulsão entre as cargas negativas do eletroscópio e objeto cause um escoamento parcial dessa carga para a Terra, onde terá um amplo espaço para se espalhar.

Gabarito: A

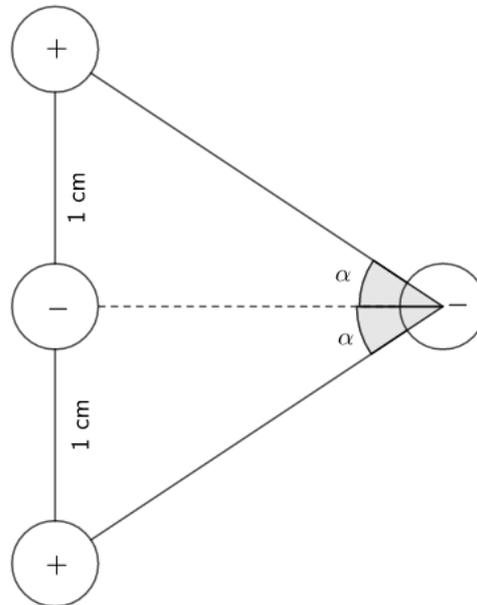
45. (IME – 84)

Um sistema de cargas elétricas puntiformes é constituído de quatro pequenas esferas de peso desprezível, dispostas na forma mostra na figura, dotadas das seguintes cargas elétricas:

$$Q_1 = Q_3 = 4 \times 10^{-11} C$$

$$Q_2 = Q_4 = -10^{-11} C$$

Determine o valor do ângulo α , diferente de zero, de posicionamento da esfera de carga Q_4 , de modo que a força atuante nessa carga seja nula.



Comentários:

Zerando a resultante na direção da linha tracejada: ($Q_1 = Q_3 = Q, Q_2 = Q_4 = Q'$)

$$-2K \frac{QQ'}{\left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)^2} + K \frac{(Q')^2}{\left(\frac{1}{\tan \alpha}\right)^2} = 0$$

$$\frac{Q'}{\cos^2 \alpha} - 2Q = 0$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{Q'}{2Q}}$$

Lembre-se que $0 < \alpha < 90^\circ$, pois não há possibilidade de equilíbrio com as cargas ao lado direito. Assim:

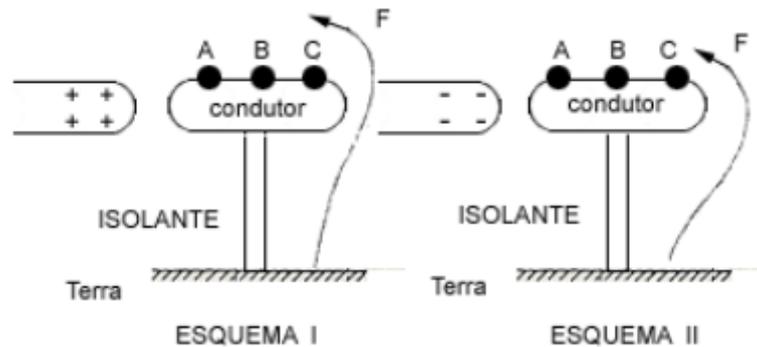
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

Gabarito: $\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

46. (ITA-1988)

Deseja-se carregar negativamente um condutor metálico pelo processo de indução eletrostática. Nos esquemas I e II, o condutor foi fixado na haste isolante. F é um fio condutor que nos permite fazer o contato com a Terra nos pontos A, B e C do condutor.





Devemos utilizar:

- a) O esquema I e ligar necessariamente F em C, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em A os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região C.
- b) O esquema II e ligar necessariamente F em A, pois as cargas positivas aí induzidas atrairão elétrons da Terra, enquanto que se ligarmos em C os elétrons aí induzidos, pela repulsão eletrostática, irão impedir a passagem de elétrons para a região A.
- c) Qualquer dos esquemas I ou II, desde que liguemos respectivamente em C e em A.
- d) O esquema I, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.
- e) O esquema II, onde a ligação de F com o condutor poderá ser efetuada em qualquer ponto do condutor, pois os elétrons fluirão da Terra ao condutor até que o mesmo atinja o potencial da Terra.

Comentários:

A carga positiva do bastão gera um potencial positivo no condutor, se ligarmos este à terra seu potencial deve se tornar nulo. Desse modo, cargas negativas fluem da Terra para o condutor para que o equilíbrio seja alcançado. Note que os argumentos acima são independentes do ponto de contato do condutor com a terra.

Gabarito: D

47. (ITA-1992)

Uma carga puntiforme $-Q_1$ de massa m percorre uma órbita circular de raio R em torno de outra carga puntiforme Q_2 , fixa no centro do círculo. A velocidade angular de $-Q_1$ é:

a) $\omega = \frac{4\pi\epsilon_0 Q_1 Q_2}{mR}$

b) $\omega = \sqrt{\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 mR^3}}$

c) $\omega = \left[\frac{Q_1 Q_2 R^3}{4\epsilon_0} \right]^2$

d) $\omega = \frac{mRQ_1}{4\pi\epsilon_0 Q_2}$



$$e) \omega = \frac{mRQ_2}{4\pi\epsilon_0Q_1}$$

Comentários:

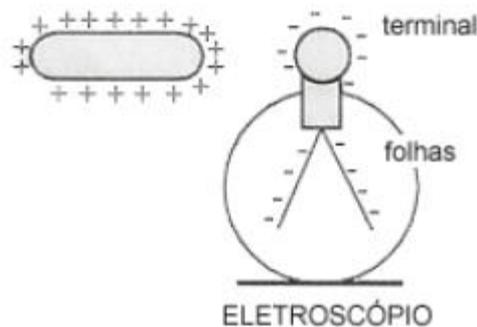
Aplicando $F = ma$ à carga Q_1 , temos:

$$R_{cent} = ma_{cent}$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1Q_2}{R^2} = m\omega^2R$$
$$\omega = \sqrt{\frac{Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0mR^3}}$$

Gabarito: B

48. (ITA-1996)

Um objeto metálico carregado positivamente, com carga $+Q$, é aproximado de um eletroscópio de folhas, que foi previamente carregado negativamente com carga igual a $-Q$.



- I) À medida que o objeto for se aproximando do eletroscópio, as folhas vão se abrindo além do que já estavam.
- II) À medida que o objeto for se aproximando, as folhas permanecem como estavam.
- III) Se o objeto tocar no terminal externo do eletroscópio, as folhas devem necessariamente fechar-se.
- a) Somente a afirmativa I é correta.
- b) As afirmativas II e III são corretas.
- c) As afirmativas I e III são corretas.
- d) Somente a afirmativa III é correta.
- e) Nenhuma das afirmativas é correta.

Comentários:



I) Incorreto. O objeto atrai mais carga negativa para o terminal, diminuindo a carga nas folhas e, conseqüentemente, fazendo-as se aproximarem.

II) Incorreto. Veja (I).

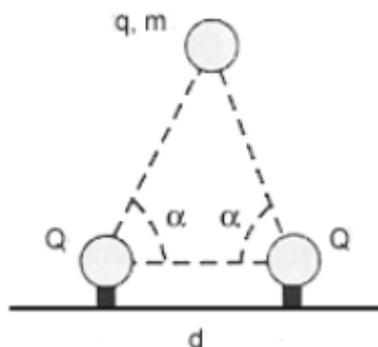
III) Correto. A carga total dos dois condutores é $(-Q) + Q = 0$, logo o contato entre os dois produz a neutralização de ambos.

Gabarito: D

49. (ITA-1997)

Uma pequena esfera de massa m e carga q , sob influência da gravidade e da interação eletrostática, encontra-se suspensa por duas cargas Q fixas, colocadas a uma distância d no plano horizontal, como mostrado na figura. Considere que a esfera e as cargas fixas estejam no mesmo plano vertical e que sejam iguais a os respectivos ângulos entre a horizontal e cada reta passando pelos centros das cargas fixas e da esfera. A massa da esfera é então:

- a) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$
b) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{g}$
c) $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha}{g}$
d) $\frac{8}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha}{g}$
e) $\frac{4}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{d^2} \cdot \frac{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{g}$



Comentários:

Equilibrando as forças na direção vertical:

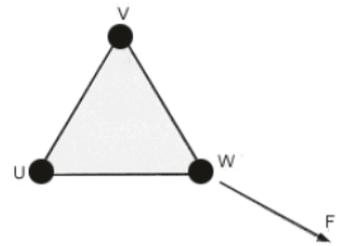
$$2F_{ele} \sin \alpha = mg$$
$$2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq \sin \alpha}{\left(\frac{d}{2 \cos \alpha}\right)^2} = mg$$
$$m = \frac{8}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq \cos^2 \alpha \sin \alpha}{d^2 g}$$

Gabarito: D



50. (ITA-1998)

Três cargas elétricas puntiformes estão nos vértices U, V e W de um triângulo equilátero. Suponha-se que a soma das cargas é nula e que a força sobre a carga localizada no vértice W é perpendicular à reta UV e aponta para fora do triângulo, como mostra a figura.



Conclui-se que:

- a) As cargas localizadas em U e V são de sinais contrários e de valores absolutos iguais.
- b) As cargas localizadas nos pontos U e V têm valores absolutos diferentes e sinais contrários.
- c) As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto, com uma delas de sinal diferente das demais.
- d) As cargas localizadas nos pontos U, V e W têm o mesmo valor absoluto e o mesmo sinal.
- e) A configuração descrita é fisicamente impossível.

Comentários:

Para termos uma resultante na direção desejada, as cargas de U e V devem ter o mesmo módulo e sinal, digamos q . Assim a carga em W deve ser $-2q$ (somatório das cargas é nulo), logo a força entre as cargas seria de atração, direcionada para dentro do triângulo.

Gabarito: E

51. (ITA-1998)

Suponha que o elétron em um átomo de hidrogênio se movimenta em torno de um próton em uma órbita circular de raio R . Sendo m a massa do elétron e q o módulo da carga de ambos, elétron e próton, conclui-se que o módulo da velocidade do elétron é proporcional a:

- a) $q \cdot \sqrt{\frac{R}{m}}$
- b) $\frac{q}{\sqrt{mR}}$
- c) $\frac{q}{m} \cdot \sqrt{R}$
- d) $\frac{qR}{\sqrt{m}}$
- e) $\frac{q^2 R}{\sqrt{m}}$

Comentários:

Aplicando $F = ma$ ao elétron, temos;

$$R_{cent} = ma_{cent} \Rightarrow k \frac{q^2}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

$$v = \sqrt{k} \frac{q}{\sqrt{mR}}$$

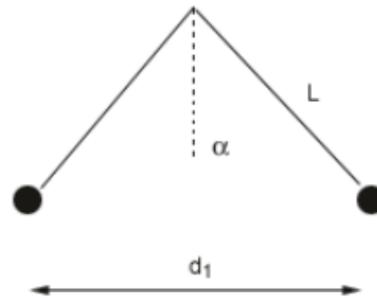


Gabarito: B

52. (ITA-2001)

Duas partículas têm massas iguais a m e cargas iguais a Q . Devido a sua interação eletrostática, elas sofrem uma força F quando separadas de uma distância d . Em seguida, estas partículas são penduradas de um mesmo ponto, por fios de comprimento L e ficam equilibradas quando a distância entre elas é d_1 . A cotangente do ângulo que cada fio forma com a vertical, em função de m, g, d, d_1, F e L , é:

- a) $\frac{mgd_1}{Fd}$
- b) $\frac{mgLd_1}{Fd^2}$
- c) $\frac{mgd_1^2}{Fd^2}$
- d) $\frac{mgd^2}{Fd_1^2}$
- e) $\frac{Fd^2}{mgd_1^2}$



Comentários:

Equilibrando as forças agindo sobre uma carga:

Vertical –

$$T \cos \alpha = mg \quad (\text{eq. 1})$$

Horizontal –

$$T \sin \alpha = k \frac{Q^2}{d_1^2} \quad (\text{eq. 2})$$

Dividindo (1) por (2), temos:

$$\cot g \alpha = \frac{mgd_1^2}{kQ^2} \quad (\text{eq.*})$$

A questão fornece a força entre as cargas para uma distância d :

$$F = \frac{kQ^2}{d^2}$$

$$kQ^2 = d^2 F \quad (\text{eq. 3})$$

Substituindo (3) em (*), temos:

$$\cot g \alpha = \frac{mgd_1^2}{d^2 F}$$

Gabarito: C



53. (ITA – 2015)

Considere um tubo horizontal cilíndrico de comprimento ℓ , no interior do qual encontram-se respectivamente fixadas em cada extremidade de sua geratriz inferior as cargas q_1 e q_2 , positivamente carregadas. Nessa mesma geratriz, numa posição entre as cargas, encontra-se uma pequena esfera em condição de equilíbrio, também positivamente carregada. Assinale a opção com as respostas corretas na ordem das seguintes perguntas:

I. Essa posição de equilíbrio é estável?

II. Essa posição de equilíbrio seria estável se não houvesse o tubo?

III. Se a esfera fosse negativamente carregada e não houvesse o tubo, ela estaria em equilíbrio estável?

A) Não. Sim. Não.

B) Não. Sim. Sim.

C) Sim. Não. Não.

D) Sim. Não. Sim.

E) Sim. Sim. Não.

Comentários:

I) Correto. Se a esfera for deslocada, irá aproximar-se da carga no lado do deslocamento, sofrendo maior repulsão, de modo que a resultante de forças sobre ela aponta no sentido do equilíbrio anterior.

II) Incorreto. Se deslocarmos a esfera na direção perpendicular, as duas forças exercidas sobre ela tendem a acelerá-la para longe.

III) Incorreto. Se a esfera for deslocada, na direção da linha que liga as duas, irá aproximar-se da carga no lado do deslocamento, sofrendo maior atração, de modo que a resultante de forças sobre ela aponta no sentido de afastamento ao equilíbrio anterior.

Gabarito: oficial C.

54. (ITA – 2020)

Três esferas idênticas de massa m , carga elétrica Q e dimensões desprezíveis, são presas pelas extremidades de fios isolantes e inextensíveis de comprimento l . As demais pontas dos fios são fixadas a um ponto P , que sustenta as massas. Na condição de equilíbrio do sistema, verifica-se que o ângulo entre um dos fios e a direção vertical é θ , conforme mostra a figura. Sendo ϵ_0 a permissividade elétrica do meio, o valor da carga elétrica Q é dada por



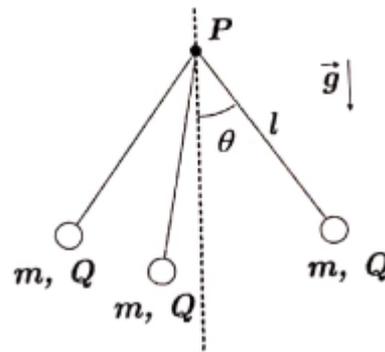
a) $l \sqrt{12\pi\epsilon_0 mg \operatorname{sen}\theta \cos\theta}$

b) $l \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta \sqrt{3}}$

c) $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta \sqrt{3}}$

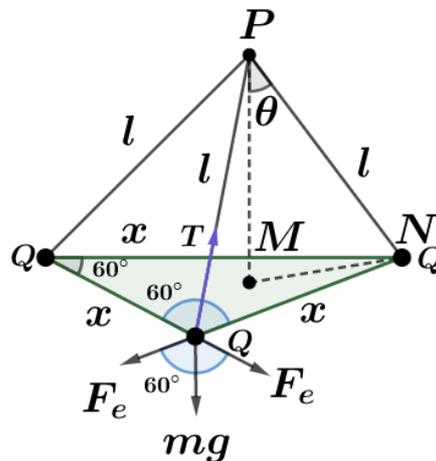
d) $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta}{\sqrt{3}}}$

e) $l \operatorname{sen}\theta \sqrt{4\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg}\theta}$



Comentários:

De acordo com o enunciado, na condição de equilíbrio, temos a seguinte configuração espacial das cargas:



Pelo equilíbrio das forças, temos:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{2 \cdot F_e \cdot \cos 60^\circ}{m \cdot g}$$

Pela geometria no triângulo da base formado pelas cargas, temos:

$$l \cdot \operatorname{sen}(\theta) = MN = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$x = l \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

Portanto:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{2 \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot Q}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{m \cdot g}$$

$$Q = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot \operatorname{tg}(\theta)}{\sqrt{3}}} \cdot l \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$



$$q = l \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \sqrt{4\pi\epsilon_0 \cdot m \cdot g \cdot \text{tg}(\theta)\sqrt{3}}$$

Gabarito: C



17. Considerações finais da aula

Querido aluno(a),

Essa aula foi extremamente importante para o pleno entendimento da terminologia. Se você está com certo receio em algum tópico, reveja toda a teoria e depois refaça os exercícios propostos. Uma valiosa dica é fazer a lista inteira e só depois olhar o gabarito com a resolução. Com isso, você se forçará a ter uma maior atenção na feitura de questões e, portanto, aumentará sua concentração no momento de prova.

Se as dúvidas persistirem, não se esqueça de acessar o Fórum de Dúvidas! Responderei suas dúvidas o mais rápido possível!



Você também pode me encontrar nas redes sociais! 😊

Conte comigo,

Vinícius Fulconi



@viniciusfulconi



vinicius.fulconi



18. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 5. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 3. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.



