

VESTIBULARES  
2021



## Sumário

<b>Considerações iniciais .....</b>	<b>2</b>
<b>Comentários tópico a tópico .....</b>	<b>3</b>
<i>Princípio fundamental da contagem .....</i>	<i>3</i>
<i>Notação: Fatorial .....</i>	<i>3</i>
<i>Permutações .....</i>	<i>3</i>
<i>Arranjos e Combinações.....</i>	<i>4</i>
<i>Princípio da inclusão-exclusão.....</i>	<i>4</i>
<i>Permutações caóticas e Lemas de Kaplansky.....</i>	<i>4</i>
<i>Binômio de Newton.....</i>	<i>4</i>
<i>Polinômio de Leibniz.....</i>	<i>5</i>
<i>Fórmulas, Demonstrações e Comentários.....</i>	<i>5</i>
<b>Questões por ordem de dificuldade .....</b>	<b>6</b>
<i>Lista de Questões .....</i>	<i>6</i>

## Considerações iniciais

Chegamos a um assunto que causa muito medo nos vestibulandos, principalmente no seguimento IME/ITA, devido à complexidade que esses conteúdos costumam apresentar nesses concursos.



Por experiência, posso afirmar que a dificuldade é aumentada pela forma como os alunos normalmente tratam essa matéria. A ideia aqui é não ficar decorando fórmulas e sim tentar entender COMO PENSAR em problemas de contagem.

Não fique perdendo tempo pensando se o problema é sobre arranjo ou combinação: identifique rapidamente o PADRÃO de raciocínio que você deve adotar para resolver o problema.

Dito isso, vamos em frente.

## Comentários tópico a tópico

### Princípio fundamental da contagem

Mesmo que você seja um aluno um pouco mais experiente, sugiro que você revise este tópico. Se você é novo no mundo da combinatória, saiba que esse é um dos conceitos mais fundamentais para a resolução dos problemas de contagem.

O importante aqui é você perceber que o estudo das técnicas de contagem DIFERE dos estudos que você vem realizando até aqui e seu foco deve ser em entender COMO a contagem está sendo feita, para que depois você possa replicar ou adaptar para resolver novos problemas.

Essa matéria contém um pouco de empirismo: é importante que, no início, você faça os casos, desenhe e, se possível, represente todos os elementos do conjunto que você deseja contar. Isso vai te dar mais confiança com o tempo. Acredite em mim: no início o mais importante é acreditar que as técnicas de contagem realmente funcionam e criar confiança para utilizá-las.

Dessa forma, é fundamental que você faça os exercícios da sessão hora de praticar. Repetindo: não passe deste ponto sem fazer os exercícios. Não se engane, não se aprende combinatória sem resolver as questões, pois somente se aprende a contar contando.

### Notação: Fatorial

Os números do tipo  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  aparecem bastante em problemas de contagem. Dessa forma, é importante você aprender essa notação. Muita atenção ao  $0!$ , pois ele vale 1 e não 0.

### Permutações

Se tem uma palavra que você vai ler quando estiver resolvendo questões de contagem esta é “permutação”. Então sugiro que você estude muito bem essa parte, focando em entender como se calcula o número de permutações, principalmente os tipos menos óbvios: com repetição e circular.





Repetindo: Faça os exercícios.

## Arranjos e Combinações

Novamente: duas técnicas que são muito frequentes em problemas de contagem. É fundamental que você se familiarize com as combinações pois elas disparadamente vão estar presentes na sua prova.

Importante: acostume-se com a notação! Lembre-se que ele pode cobrar que você saiba isso em uma questão.

Foque nas combinações completas! Essa é uma técnica que costuma ser cobrada na segunda fase do IME, então aprenda bem e ENTENDA qual a ideia utilizada para resolver esse tipo de questão.

## Princípio da inclusão-exclusão

### Sinal de alerta!

É muito importante que você saiba utilizar o esse princípio para realizar contagens, pois alguns problemas do IME são uma mera aplicação desse conceito. Nesse sentido, pegue alguns casos pequenos e tente reproduzir. Resolva a questão que é dada como exemplo na teoria para aumentar sua familiaridade.

## Permutações caóticas e Lemas de Kaplansky

É muito importante saber resolver o problema das permutações caóticas e, um dia antes da prova, dar uma olhada na fórmula gerada, pois pode ser que caia uma questão objetiva que pode ser apenas aplicação deste problema.

Atente também para uma nova técnica de resolução de questões de combinatória que o autor utiliza: recorrência. Note que ele consegue encontrar o número de permutações caóticas para um conjunto com  $n$  elementos, baseado nas relações entre os números de formas de se fazer isso com um conjunto de  $n - 1$  elementos. Portanto, atente para quando você possa se beneficiar disso ao resolver um problema.

Os lemas de Kaplansky também vêm resolver um problema que pode facilmente estar na sua prova, ainda que colocado de outra maneira. Nesse contexto, sugiro que você entenda o procedimento utilizado para se chegar na resposta, pois você pode adaptá-lo para resolver outros tipos de questões.

Por fim: anote essas fórmulas no seu caderno de bizu, é muito útil ir para a prova com elas em mente.

## Binômio de Newton

Esse tópico é extenso e igualmente importante para sua prova. Por exemplo, na primeira fase do IME, já caiu uma questão que saia facilmente caso você soubesse uma propriedade simples dos números binomiais.



Nesse contexto, é importante que o estudo do binômio de Newton seja feito com cuidado e de maneira estruturada. Siga os seguintes passos para um melhor aproveitamento:

1. Identifique sobre o que o assunto trata fazendo uma leitura geral;
2. Anote no seu caderno todas as definições que encontrar, com uma breve explicação ao lado, para saber do que se trata;
3. Entenda a definição do número binomial e faça o exercício de fixação 14;
4. Entenda como o termo geral é formado;
5. Ainda na sessão “Termo Geral”, aprenda a resolver os 3 tipos de problemas mais comuns no contexto do binômio de Newton;
6. Entenda bem o triângulo de Pascal: é conveniente decorá-lo até certo número, para facilitar desenvolvimentos de binômios no futuro;
7. Veja que você consegue montar o triângulo de pascal usando a relação de Stifel;
8. Veja a demonstração do Binômio, pois isso pode ser útil para fazer uma questão semelhante;
9. NÃO deixe de aprender a propriedade do binomial complementar! Ela é uma das simetrias dos números binomiais;
10. Minha sugestão: aprenda as outras propriedades dos números binomiais SEMPRE associando ao triângulo de Pascal, pois fica mais fácil de lembrar!
11. A sessão “Indo mais fundo” é para você que já dominou o básico e tem mais a ver com a segunda fase do IME. A Relação de Euler, por exemplo, caiu em uma questão de polinômios e combinatória recente do IME.
12. Por fim: não passe desse tópico sem resolver e ler a solução de TODOS os exercícios da sessão “Hora de Praticar”.

## Polinômio de Leibniz

Como você já deve ter notado até aqui, os tópicos que você está aprendendo quase sempre estão associados a um problema que foi resolvido, o qual gera uma gama de problemas correlatos que podem ser resolvidos da mesma maneira.

Ainda no contexto do binômio de Newton, é natural que surja a pergunta: e se não fosse um binômio, mas sim um polinômio?

Para resolver esse problema, você vai estudar o polinômio de Leibniz. Aprenda a demonstração e veja que ela é bastante simples.

Para conferir se sabe utilizar a técnica aprendida, resolva o exercício 22 da sessão “Hora de Praticar”.

## Fórmulas, Demonstrações e Comentários

Se você já possui alguma experiência no estudo desse assunto, essa sessão é para você.

Estude os problemas e as resoluções desse tópico e aprenda como pensar em problemas de probabilidade. Entenda que muitas vezes aquilo que é intuitivo pode estar errado, o que enfatiza ainda mais seu estudo sistemático da probabilidade.



Não caia no erro do “na hora sai”, pois você pode colocar em jogo sua aprovação por um simples descuido na preparação. Estudo de maneira estruturada e ENTENDA bem os problemas.

Observação: Não interprete literalmente a definição de difícil, médio ou fácil na sessão a seguir. Não encare a questão com preconceito, pois para você alguma forma de pensar pode ser natural, o que faria você classificar uma questão “difícil” como “fácil”.

Entenda bem a relatividade desse tipo de classificação, principalmente aqui, e use a próxima sessão como um guia apenas.

## Questões por ordem de dificuldade

### Lista de Questões

**Fácil:** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 23 até 36, 38, 39, 40, 42, 43, 44, 45, 46, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 104, 105, 106, 107, 108, 109

**Média:** 12, 18, 19, 20, 21, 22, 37, 41, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 69, 71, 73, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 100, 103

**Difícil:** 54, 55, 67, 68, 70, 72, 74, 75, 76, 77, 79, 85

