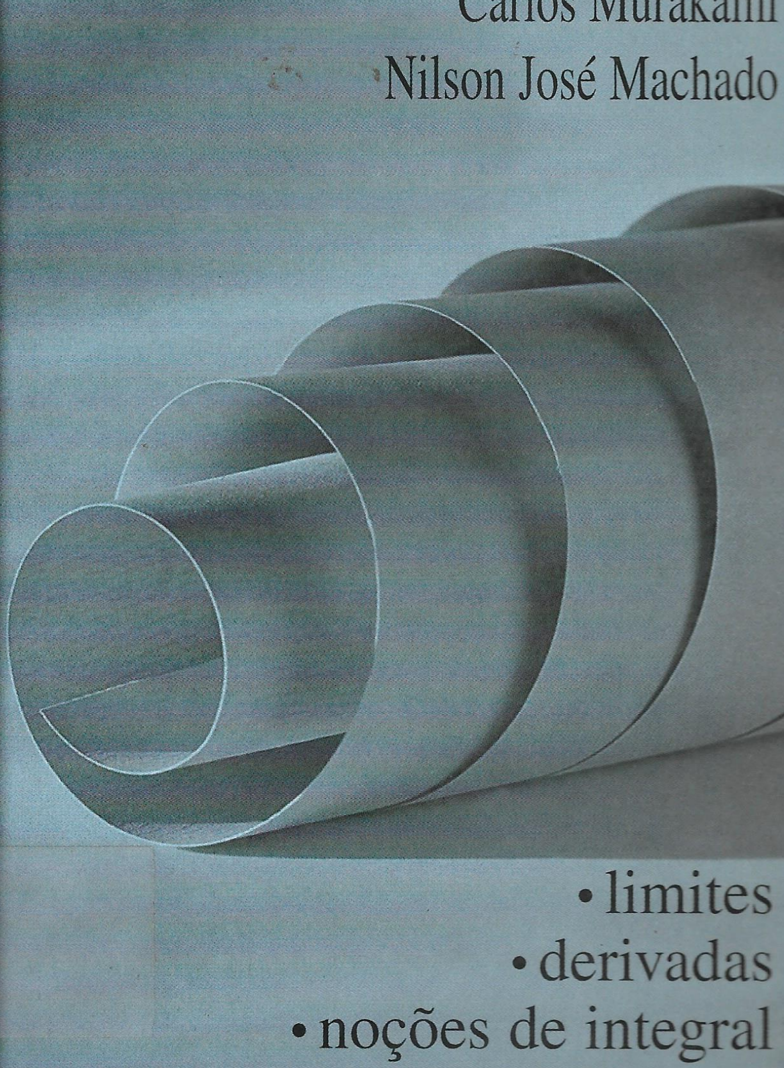
8

NOVOS TESTES DE VESTIBULARES

Fundamentos de Matemática Elementar

Gelson Iezzi
Carlos Murakami
Nilson José Machado



- limites
- derivadas
- noções de integral

GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI
NILSON JOSÉ MACHADO

FUNDAMENTOS DE

MATEMÁTICA ELEMENTAR 8

LIMITES DERIVADAS
NOÇÕES DE INTEGRAL

ATUAL
EDITORA

GELSON IEZZI
CARLOS MURAKAMI
NILSON JOSÉ MACHADO

FUNDAMENTOS DE

MATEMÁTICA ELEMENTAR 8

LIMITES DERIVADAS NOÇÕES DE INTEGRAL

62 exercícios resolvidos
264 exercícios propostos com resposta
71 testes de vestibulares com resposta

6ª edição
7ª reimpressão

ATUAL EDITORA

Copyright desta edição:
SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2011.
Rua Henrique Schaumann, 270 — Pinheiros
05413-010 — São Paulo — SP
Fone: (0xx11) 3613-3000
Fax: (0xx11) 3611-3308 — Fax Vendas: (0xx11) 3611-3268
www.editorasaraiva.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Iezzi, Gelson, 1939-
Fundamentos de matemática elementar, 8 : limites, derivadas, noções de integral : 62 exercícios resolvidos, 264 exercícios propostos com resposta, 71 testes de vestibular com resposta / Gelson Iezzi, Carlos Murakami, Nilson José Machado. — 6. ed. — São Paulo : Atual, 2005.
Suplemenntado pelo manual do professor.
ISBN 978-85-357-0547-8
1. Matemática (Ensino médio) 2. Matemática (Ensino médio) — Problemas e exercícios etc. 3.Matemática (Vestibular) — Testes I. Murakami, Carlos II. Machado, Nilson José III. Título. IV. Título: Limites, derivadas, noções de integral.
04-7290 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:
1. Matemática : Ensino médio 510.7

Fundamentos de Matemática Elementar — vol. 8

Gerente editorial: Wilson Roberto Gambeta
Editoras: Bárbara Ferreira Arena
Teresa Christina W. P. de Mello Dias
Editor de campo: Valdir Montanari
Coordenadora editorial: Sandra Lucia Abrano
Assistentes editoriais: Mônica Rodrigues de Lima
Teresa Cristina Duarte
Chefe de preparação de texto e revisão: Noé G. Ribeiro
Coordenação de revisão: Pedro Cunha Jr.
Revisores: Alice Kobayashi
Magna Reimberg Teobaldo
Vera Lúcia Pereira Della Rosa
Camila Rodrigues Santana
Edilene Martins dos Santos
Gerente de arte: Nair de Medeiros Barbosa
Supervisor de arte: José Maria de Oliveira
Chefe de arte: Zildo Braz
Coordenadora de arte: Thaís de B. F. Motta
Assistentes de arte: Lu Bevilacqua Ghion
Ricardo Yorio
Rosi Meire Martins Ortega
Gerente de produção: Antonio Cabello Q. Filho
Assistente de produção: Grace Alves
Diagramação: Setup Bureau Editoração Eletrônica
Coordenação eletrônica: Silvia Regina E. Almeida
Produção gráfica: José Rogerio L. de Simone
Maurício T. de Moraes

Colaboradores

Revisão técnica: Irene Torrano Filisetti
Projeto gráfico (miolo): Thaís de B. F. Motta
(capa): Ettore Bottini
Imagem de capa: Hilton Ribeiro
Preparação dos testes de vestibulares: Margarida Aparecida de Souza Gouvêa
Composição e arte-final: Diarte Ed. e Coml. de Livros Ltda.
Fotolito: Binhos/STAP

Visite nosso *site*: www.atualeditora.com.br
Central de atendimento ao professor: (0xx11) 3613-3030

Apresentação

Fundamentos de Matemática Elementar é uma coleção elaborada com o objetivo de oferecer ao estudante uma visão global da Matemática, no ensino médio. Desenvolvendo os programas em geral adotados nas escolas, a coleção dirige-se aos vestibulandos, aos universitários que necessitam rever a Matemática elementar e também, como é óbvio, àqueles alunos de ensino médio cujo interesse focaliza-se em adquirir uma formação mais consistente na área de Matemática.

No desenvolvimento dos capítulos dos livros de *Fundamentos* procuramos seguir uma ordem lógica na apresentação de conceitos e propriedades. Salvo algumas exceções bem conhecidas da Matemática elementar, as proposições e os teoremas estão sempre acompanhados das respectivas demonstrações.

Na estruturação das séries de exercícios, buscamos sempre uma ordenação crescente de dificuldade. Partimos de problemas simples e tentamos chegar a questões que envolvem outros assuntos já vistos, levando o estudante a uma revisão. A seqüência do texto sugere uma dosagem para teoria e exercícios. Os exercícios resolvidos, apresentados em meio aos propostos, pretendem sempre dar explicação sobre alguma novidade que aparece. No final de cada volume, o aluno pode encontrar as respostas para os problemas propostos e assim ter seu reforço positivo ou partir à procura do erro cometido.

A última parte de cada volume é constituída por testes de vestibulares, selecionados dos melhores vestibulares do país e com respostas. Esses testes podem ser usados para uma revisão da matéria estudada.

Aproveitamos a oportunidade para agradecer ao professor dr. Hygino H. Domingues, autor dos textos de história da Matemática que contribuem muito para o enriquecimento da obra.

Neste volume fazemos uma revisão do estudo das funções elementares, estudamos conceitos de limite e continuidade e noção de derivada, associando derivada à variação da função. Finalizamos com noções introdutórias de integral definida. Esse último capítulo ultrapassa um pouco as fronteiras do ensino médio.

Finalmente, como há sempre uma certa distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os autores

O texto deste volume (8) não sofreu muitas alterações. A teoria foi totalmente revista e, onde foi necessário, fizeram-se pequenas modificações. Reduzimos ao número mínimo os exercícios de cálculos de limites pela definição. As respostas dos exercícios foram cuidadosamente conferidas. No manual do professor estão resolvidos os exercícios mais complicados.

Finalmente, como há sempre uma enorme distância entre o anseio dos autores e o valor de sua obra, gostaríamos de receber dos colegas professores uma apreciação sobre este trabalho, notadamente os comentários críticos, os quais agradecemos.

Os Autores.

Sumário

CAPÍTULO I

Funções

Neste capítulo resumiremos aspectos essenciais do estudo das funções, feito ao longo dos volumes 1, 2 e 3 desta coleção. Introduziremos mais algumas noções que serão necessárias ao desenvolvimento deste livro.

I. A noção de função

1. *Definição*

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, chama-se *relação de A em B* um conjunto formado por pares ordenados (x, y) em que $x \in A$ e $y \in B$.

Exemplo

Se $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{0, 1, 2\}$, então:
$R_1 = \{(a, 0)\}$
$R_2 = \{(a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 2), (d, 2)\}$
$R_3 = \{(a, 0), (b, 1), (c, 1), (d, 2)\}$

são três exemplos de relações de A em B.

Definição

2. Uma relação f de A em B recebe o nome de *função definida em A com imagens em B* ou *aplicação de A em B* se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$.

No exemplo anterior, só a relação R_3 é uma função, pois em R_1 os elementos b, c, d não participam de nenhum par e em R_2 o elemento b participa de dois pares.

Lei de correspondência

3. Geralmente, existe uma sentença aberta $y = f(x)$ que expressa a lei mediante a qual, dado um $x \in A$, determina-se o $y \in B$ de modo que $(x, y) \in f$.

Assim, por exemplo, dados os conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e a sentença aberta $y = x^2$, é possível considerar a função:

$$f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$$

de A em B, cujos pares (x, y) verificam a lei $y = x^2$.

Para indicarmos uma função f de A em B que obedece à lei de correspondência $y = f(x)$, vamos usar a seguinte notação:

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

Freqüentemente encontramos funções em que a lei de correspondência para obter y a partir de x muda, dependendo do valor de x. Dizemos que essas funções são *definidas por várias sentenças*.

Exemplos

1º) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leqslant 0 \\ -1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

é uma função definida por duas sentenças:

$y = 1$ (quando $x \leqslant 0$)
ou
$y = -1$ (quando $x > 0$)

2º) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 0 \\ 0, & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ x, & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

é uma função definida por três sentenças:

$y = -x$ quando $x \in\ ]-\infty, 0[$
ou
$y = 0$ quando $x \in [0, 1[$
ou
$y = x$ quando $x \in [1, +\infty[$

As funções definidas por várias sentenças têm uma importância especial neste livro.

4. *Domínio e imagem*

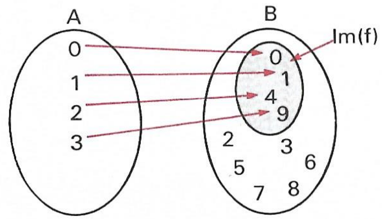
Chama-se *domínio* da função $f: A \longrightarrow B$ o conjunto A. Notação: $D(f)$.

Chama-se *imagem* da função $f: A \longrightarrow B$ o conjunto constituído pelos elementos $y \in B$ para os quais existe algum $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Notação: $Im(f)$.

Chama-se *contradomínio* da função $f: A \longrightarrow B$ o conjunto B. Notação: $CD(f)$.

Por exemplo, se $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $f: A \longrightarrow B$ é definida pela sentença $y = x^2$, temos:

$f = \{(0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$
$D(f) = \{0, 1, 2, 3\}$
$Im(f) = \{0, 1, 4, 9\}$
$CD(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$



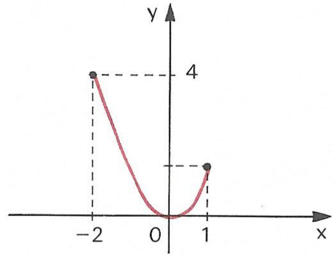
É evidente que, para todo f, $Im(f) \subset B$.

Lembremos ainda que, feita a representação cartesiana (gráfico) da função f, temos:

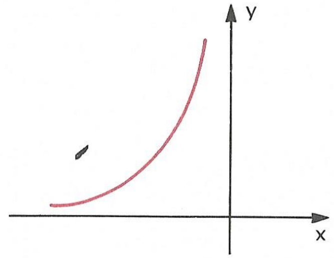
I) *Domínio* $D(f)$ é o conjunto das abscissas dos pontos do gráfico, isto é, o conjunto das abscissas dos pontos tais que as retas verticais por eles conduzidas interceptam o gráfico.

II) *Imagem* $Im(f)$ é o conjunto das ordenadas dos pontos do gráfico, isto é, o conjunto das ordenadas dos pontos tais que as retas horizontais por eles conduzidas interceptam o gráfico.

Exemplos



$D(f) = [-2, 1]$
$Im(f) = [0, 4]$



$D(f) = \mathbb{R}^*_-$
$Im(f) = \mathbb{R}^*_+$

Uma função está bem definida quando são conhecidos $D(f)$, $CD(f)$ e a lei de correspondência $y = f(x)$. É comum, entretanto, darmos apenas a sentença aberta $y = f(x)$ para nos referirmos a uma função f. Neste caso, fica subentendido que $D(f)$ é o conjunto formado pelos números reais cujas imagens são reais, isto é:

$$x \in D(f) \implies y = f(x) \in \mathbb{R}$$

5. Funções iguais

Duas funções $f\colon A \longrightarrow B$ e $g\colon C \longrightarrow D$ são iguais se, e somente se, $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Exemplos

1º) Se $A = \{-1, 0, 1\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4\}$, as funções $f\colon A \longrightarrow B$ e $g\colon A \longrightarrow B$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^4$ são iguais, pois:

$$f(-1) = (-1)^2 = (-1)^4 = g(-1)$$
$$f(0) = 0^2 = 0^4 = g(0)$$
$$f(1) = 1^2 = 1^4 = g(1)$$

2º) Se $A = \mathbb{R}^*$ e $B = \mathbb{R}$, as funções $f\colon A \longrightarrow B$ e $g\colon A \longrightarrow B$ dadas por $f(x) = x - 2$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x}$ são iguais pois, para todo $x \in \mathbb{R}^*$, temos:

$$f(x) = x - 2 = \frac{x}{x} \cdot (x - 2) = \frac{x^2 - 2x}{x} = g(x)$$

II. Principais funções elementares

6. Funções polinomiais

Dada a seqüência finita de números reais $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$, chama-se função polinomial associada a esta seqüência a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

Os reais $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ são chamados *coeficientes* e as parcelas a_0, a_1x, a_2x^2, $\ldots$, a_nx^n são denominadas *termos* da função polinomial.

Uma função polinomial que tem todos os coeficientes nulos é chamada *função nula*.

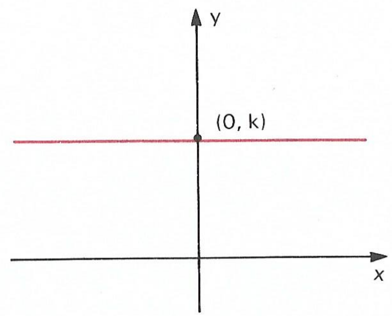
Chama-se *grau* de uma função polinomial f, não nula, o número natural p tal que $a_p \neq 0$ e $a_i = 0$ para todo $i > p$.

Exemplos

1º) $f(x) = 1 + 2x + 5x^2 + 7x^3$ tem grau 3
2º) $g(x) = 2 + 3x^2$ tem grau 2
3º) $h(x) = 1 + 4x$ tem grau 1
4º) $i(x) = 3$ tem grau 0

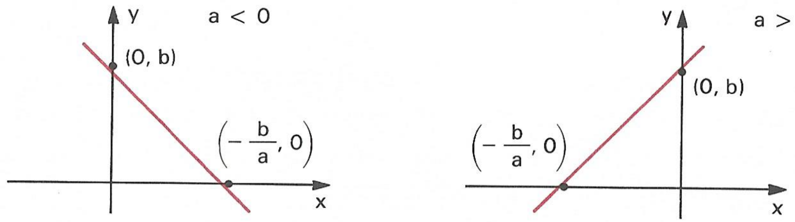
Uma função polinomial do tipo $f(x) = k$, isto é, uma função em que $a_0 = k$ e $a_i = a_2 = \ldots = 0$ é chamada *função constante*.

O gráfico de uma função constante é uma reta paralela ao eixo dos x, pelo ponto $(0, k)$. A imagem é o conjunto $Im = \{k\}$.



Uma função polinomial que apresenta $a_0 = b$, $a_1 = a \neq 0$ e $a_2 = a_3 = \ldots = 0$ é chamada *função afim*; portanto, afim é uma função polinomial do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$.

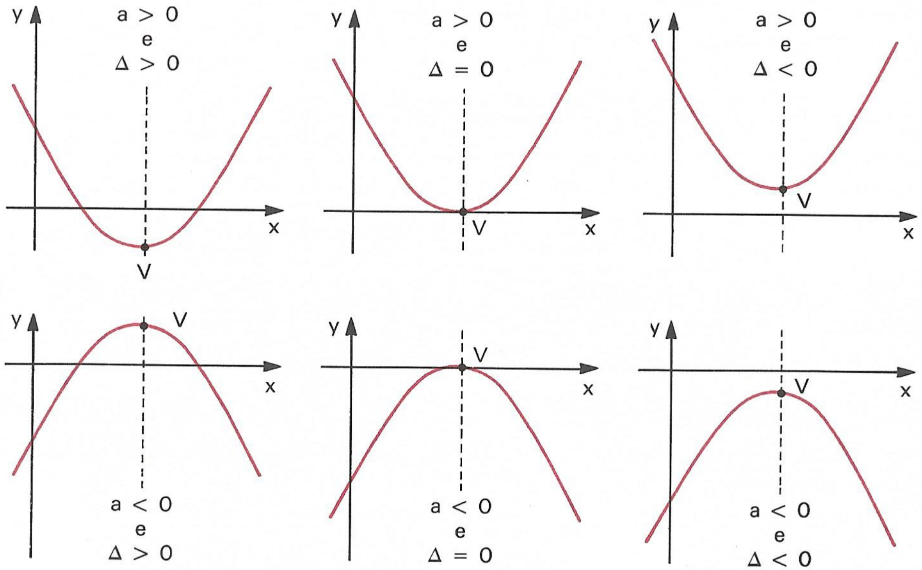
O gráfico de uma função afim é uma reta passando pelos pontos $(0, b)$ e $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. Quando $a > 0$, a função afim é crescente e, se $a < 0$, ela é decrescente. Sua imagem é $\mathbb{R}$.



Uma função polinomial que tem $a_0 = c$, $a_1 = b$, $a_2 = a \neq 0$ e $a_3 = a_4 = \dots = 0$ é chamada *função quadrática*; portanto, quadrática é uma função polinomial do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.

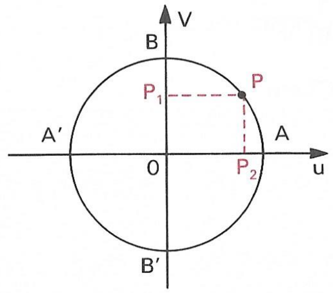
O gráfico de uma função quadrática é uma parábola que tem eixo de simetria na reta $x = -\frac{b}{2a}$ e vértice no ponto $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Se $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e, se $a < 0$, para baixo. Conforme $\Delta = b^2 - 4ac$ seja positivo, nulo ou negativo, a interseção da parábola com o eixo dos x é formada por 2, 1 ou nenhum ponto, respectivamente.

Assim, são os seguintes seis tipos de gráficos que podem ser obtidos para funções quadráticas.



7. Funções circulares

Dado um número real x, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. As coordenadas de P em relação ao sistema uOv, $\overline{OP_2}$ e $\overline{OP_1}$, são chamadas $\cos x$ (cosseno de x) e $\operatorname{sen} x$ (seno de x), respectivamente.



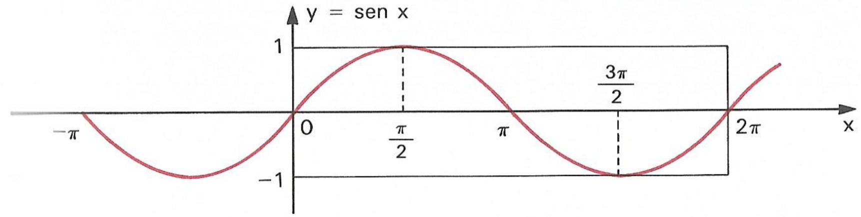
Chama-se *função seno* a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_1} = \operatorname{sen} x$, isto é, $f(x) = \operatorname{sen} x$.

São notáveis as seguintes propriedades da função seno:

1ª) sua imagem é $Im = [-1, 1]$, isto é, $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2ª) é periódica e seu período é 2π;

3ª) seu gráfico é a senóide.



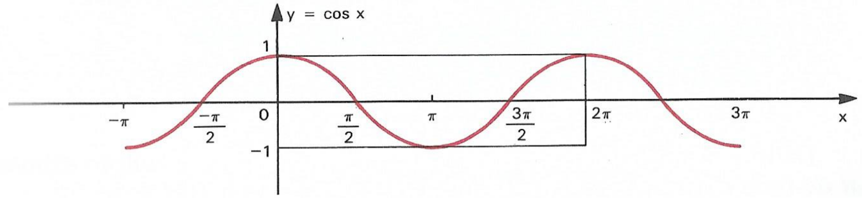
Chama-se *função cosseno* a função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real x o real $\overline{OP_2} = \cos x$, isto é, $f(x) = \cos x$.

São notáveis as seguintes propriedades da função cosseno:

1ª) sua imagem é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2ª) é periódica e seu período é 2π;

3ª) seu gráfico é a cossenóide.



Para $x \in \mathbb{R}$ e $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$, sabemos que $cos\ x \neq 0$ e, então, existe o quociente $\frac{sen\ x}{cos\ x}$, denominado $tg\ x$.

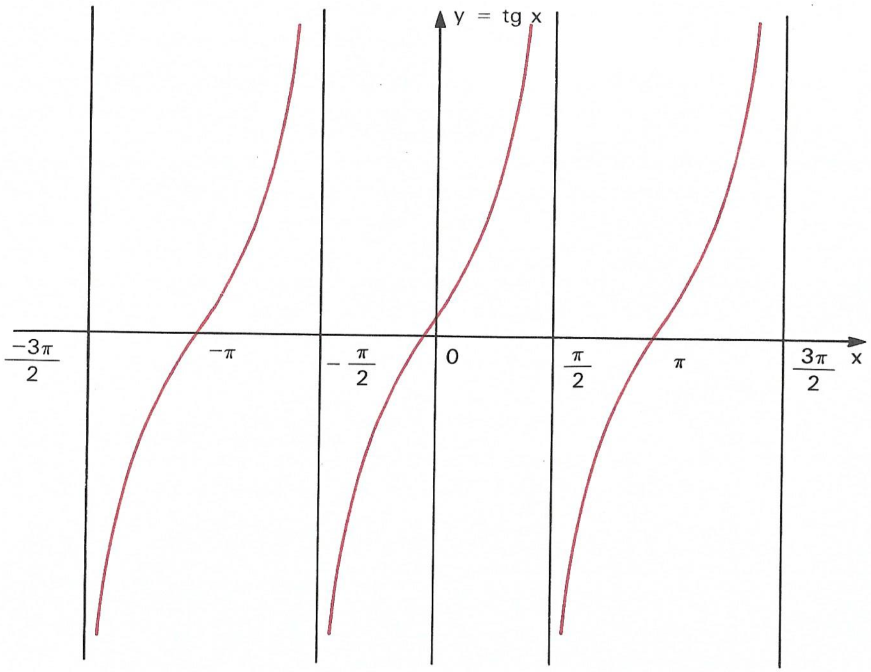
Chama-se *função tangente* a função $f\colon \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada x o real $tg\ x = \frac{sen\ x}{cos\ x}$, isto é, $f(x) = tg\ x$.

Destacam-se as seguintes propriedades da função tangente:

1ª) sua imagem é $\mathbb{R}$, isto é, para todo $y \in \mathbb{R}$ existe um $x \in \mathbb{R}$ tal que $tg\ x = y$;

2ª) é periódica e seu período é π;

3ª) seu gráfico é a tangentóide.



8. Funções exponenciais

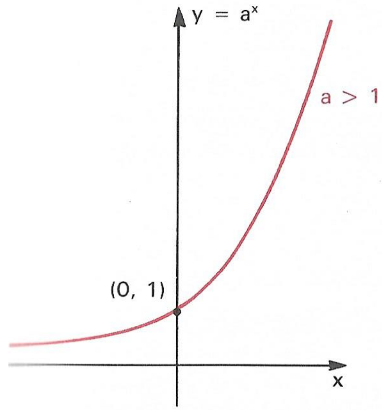
Dado um número real a, com $0 < a \neq 1$, chama-se *função exponencial de base a* a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = a^x$.

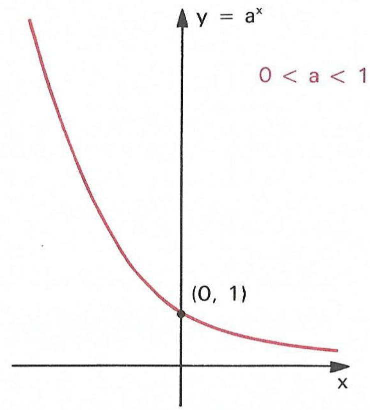
Destacamos as seguintes propriedades das funções exponenciais:

1ª) sua imagem é $\mathbb{R}_+^*$, isto é, $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

2ª) se $0 < a < 1$, a função é decrescente e, se $a > 1$, a função é crescente;

3ª) seu gráfico tem um dos seguintes aspectos:





EXERCÍCIOS

1. Construa os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

b) $f_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \leqslant 1 \\ x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

c) $f_3(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

d) $f_4(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < -1 \\ 0, & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

e) $f_5(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x < 0 \\ (x - 1)^2, & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

f) $f_6(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, & \text{se } x \leqslant 0 \\ x^2 + 1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$

2. Construa os gráficos das seguintes funções elementares:

a) $f(x) = |x|$, isto é, $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \dfrac{x}{|x|}$ se $x \neq 0$ e $g(0) = 0$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

d) $i(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$

e) $j(x) = x^3$.

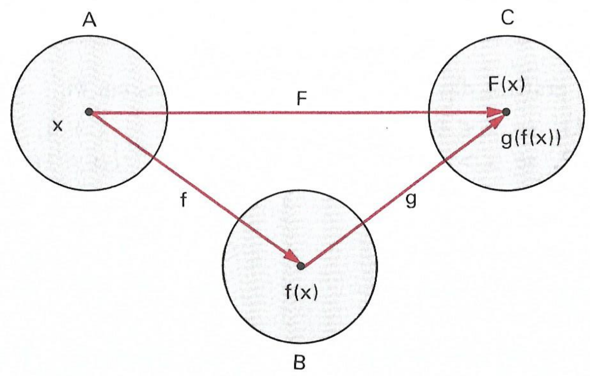
3. Construa o gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{para } x \leqslant 0 \\ 2^x, & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

III. Composição de funções

9. *Definição*

Dadas as funções $f\colon A \longrightarrow B$ e $g\colon B \longrightarrow C$, chama-se *função composta de g com f* a função $F\colon A \longrightarrow C$ definida pela lei $F(x) = g(f(x))$.



Isso quer dizer que a função F leva cada $x \in A$ no elemento $F(x)$ obtido da seguinte forma: sobre $x \in A$ aplica-se f, obtendo o elemento $f(x) \in B$, e sobre $f(x)$ aplica-se g, obtendo-se o elemento $g(f(x)) \in C$, também chamado $F(x)$.

A função F, composta de g e f, também pode ser indicada com o símbolo $g \circ f$ (lê-se: "g círculo f").

10. *Exemplos*

1º) Consideremos os conjuntos $A = \{-1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Consideremos também as funções $f\colon A \longrightarrow B$ tal que $f(x) = x^2$ e $g\colon B \longrightarrow C$ tal que $g(x) = 2x + 1$.

É imediato que:

$$f(-1) = 1,\quad f(0) = 0,\quad f(1) = 1 \text{ e } f(2) = 4.$$

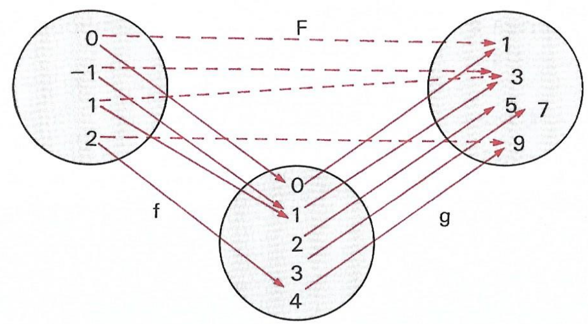
Também é evidente que:

$$g(0) = 1,\quad g(1) = 3,\quad g(2) = 5,\quad g(3) = 7 \text{ e } g(4) = 9$$

Neste caso, a função composta F é a função de A em C que tem o seguinte comportamento:

$$\begin{aligned} F(-1) &= g(f(-1)) = g(1) = 3 \\ F(0) &= g(f(0)) = g(0) = 1 \\ F(1) &= g(f(1)) = g(1) = 3 \\ F(2) &= g(f(2)) = g(4) = 9 \end{aligned}$$

O esquema ilustra o que ocorreu:



A função F tem também uma lei de correspondência que pode ser encontrada se procurarmos o valor de $F(x)$:

$$F(x) = g(f(x)) = 2 \cdot f(x) + 1 = 2x^2 + 1$$

De forma geral, para obtermos a lei de correspondência da função composta $F = g \circ f$ devemos trocar x por $f(x)$ na lei de g.

2º) Sejam as funções de IR em IR: $f(x) = sen\,x$ e $g(x) = x^2$. A composta de g com f é a função F: IR ⟶ IR tal que:

$$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = sen^2 x$$

3º) Sejam as funções de IR em IR: $f(x) = 2x$ e $g(x) = e^x$. A composta de g com f é a função: F: IR ⟶ IR tal que:

$$F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{2x}$$

11. *Observações*

1ª) A composta $g \circ f$ só é definida quando o contradomínio de f é igual ao domínio de g.

2ª) Quando $A = C$, isto é, $f: A \longrightarrow B$ e $g: B \longrightarrow A$ é possível definir duas compostas $g \circ f = F_1$ e $f \circ g = F_2$.

Assim, por exemplo, se f: $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = \sqrt{x}$ e g: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por $g(x) = x^2 + 1$, temos:

$$F_1(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 + 1 = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1$$

$$F_2(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^2 + 1}$$

sendo F_1: $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e F_2: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

De maneira geral, quando ambas existem, $g \circ f$ e $f \circ g$ são funções distintas e isto nos obriga a dobrar a atenção quando compomos.

12. Para a compreensão de alguns assuntos deste livro é fundamental que saibamos decompor (sempre que isso for possível) uma função em duas ou mais funções elementares.

Exemplos

1º) A função $F(x) = sen^2 x$ deve ser vista como $F(x) = (sen\,x)^2$; portanto, F é a composta $g \circ f$, sendo $g(x) = x^2$ e $f(x) = sen\,x$, uma vez que o esquema para calcular $F(x)$ a partir de x é o seguinte:

$$x \xrightarrow[f]{} sen\,x \xrightarrow[g]{} (sen\,x)^2$$

2º) A função $F(x) = cos\,e^{3x^2+1}$ como seria decomposta? Olhando o esquema para calcular $F(x)$, temos:

$$x \xrightarrow[f]{} 3x^2 + 1 \xrightarrow[g]{} e^{3x^2+1} \xrightarrow[h]{} cos\,e^{3x^2+1}$$

então F é a composta $h \circ (g \circ f)$, sendo $f(x) = 3x^2 + 1$, $g(x) = e^x$ e $h(x) = cos\,x$.

EXERCÍCIOS

4. Se $f: A \longrightarrow B$ é dada pela lei $f(x) = x - 1$, $g: B \longrightarrow C$ é dada por $g(x) = 2x + 1$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, determine os pares ordenados que constituem $g \circ f$.

5. Se f e g são funções de IR em IR dadas pelas leis $f(x) = x^3$ e $g(x) = x + 1$, obtenha as leis que definem as compostas: $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ e $g \circ g$.

6. Sejam as funções reais $f(x) = x + 2$, $g(x) = x^2$ e $h(x) = 2^x$. Determine $h \circ g \circ f$ e $f \circ g \circ h$.

7. Determine funções elementares f e g de modo que $g \circ f = F$, quando F é uma função real dada por uma das leis abaixo:

a) $F(x) = |x^2 + 1|$
b) $F(x) = sen\,(x^2 + 4)$
c) $F(x) = tg\,x^3$
d) $F(x) = tg^2 x$
e) $F(x) = 2^{cos\,x}$
f) $F(x) = sen\,3^x$

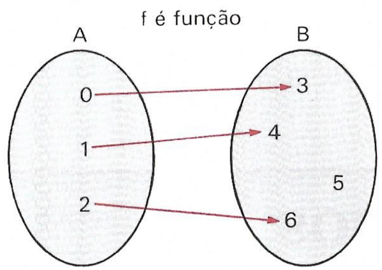
8. Determine as funções elementares f, g e h de modo que $h \circ g \circ f = F$, sendo F uma função real dada por $F(x) = cos\,2^{x+3}$.

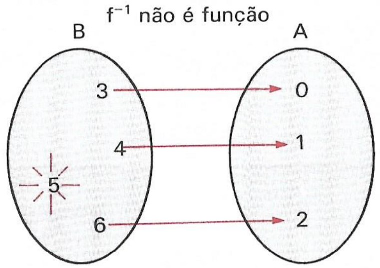
IV. Funções inversíveis

13. Dada uma função $f: A \longrightarrow B$, consideremos a relação inversa de f:

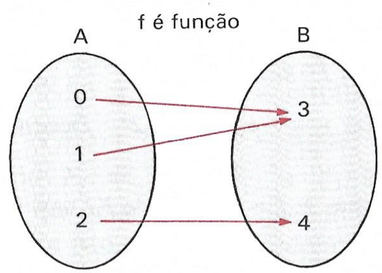
$$f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in f\}$$

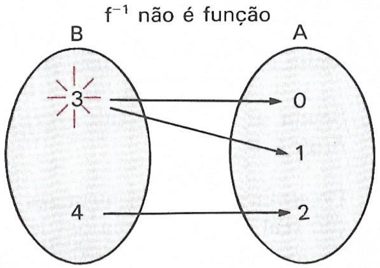
Quase sempre f^{-1} *não* é uma função, ou porque existe $y \in B$ para o qual não há $x \in A$ com $(y, x) \in f^{-1}$ ou porque para o mesmo $y \in B$ existem $x_1, x_2 \in A$ com $x_1 \neq x_2$, $(y, x_1) \in f^{-1}$ e $(y, x_2) \in f^{-1}$. Vejamos dois exemplos:





(5 não tem correspondente)





(3 tem dois correspondentes)

É imediato que f^{-1} é uma função quando *todo* $y \in B$ é o correspondente de um *único* $x \in A$.

14. Definição

Uma função $f: A \longrightarrow B$ é *inversível* se, e somente se, a relação inversa de f também é uma função, isto é, para cada $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

Indica-se a função inversa de f com a notação f^{-1}.

15. Observações

1ª) Sendo f^{-1} a função inversa de f, temos as seguintes propriedades:

a) $D(f^{-1}) = B = Im(f)$

b) $Im(f^{-1}) = A = D(f)$

c) $(y, x) \in f^{-1} \iff (x, y) \in f$

d) o gráfico de f^{-1} é simétrico do gráfico de f em relação à reta $y = x$.

2ª) Dada a função inversível $f: A \longrightarrow B$, definida pela lei $y = f(x)$, para obtermos a lei que define f^{-1} procedemos assim:

a) transformamos algebricamente a expressão $y = f(x)$ até expressarmos x em função de y: $x = f^{-1}(y)$.

b) na lei $x = f^{-1}(y)$ trocamos os nomes das variáveis (x por y e vice-versa), obtendo a lei $y = f^{-1}(x)$.

Assim, por exemplo, se $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = 3x + 2$ e queremos obter a inversa de f, temos:

$$f(x) = y = 3x + 2 \implies x = \frac{y-2}{3}$$

Permutando as variáveis, temos:

$$y = \frac{x-2}{3}$$

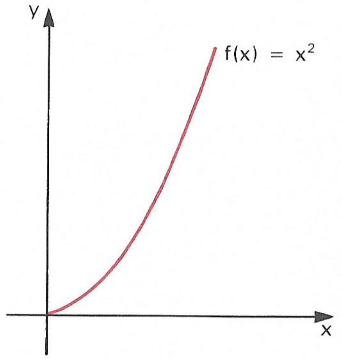
portanto, f^{-1} é uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$.

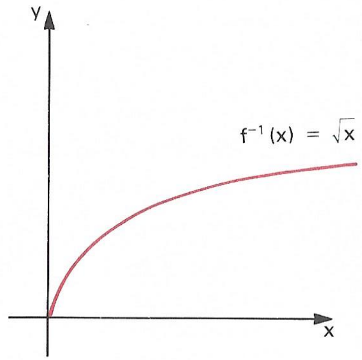
16. Inversas notáveis

Há algumas funções, inversas de funções elementares, cuja importância é grande para o estudo que faremos neste volume:

a) Função $y = \sqrt{x}$

A função $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada pela lei de correspondência $y = x^2$ é inversível. Sua inversa é $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $y = \sqrt{x}$. Seus gráficos, simétricos em relação à bissetriz do 1º quadrante, são os seguintes:

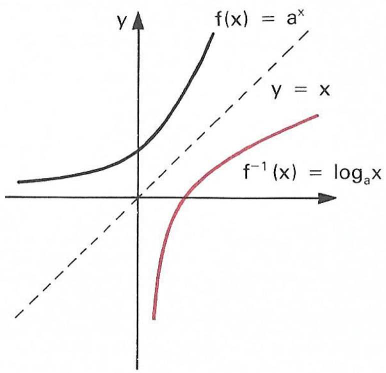




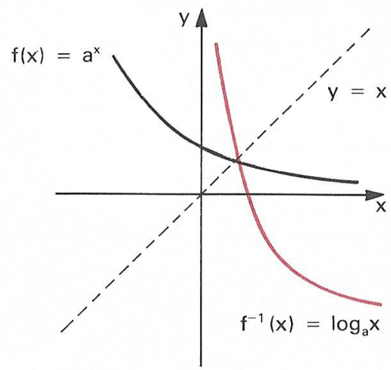
b) Função logarítmica: $y = log_a x$ $(0 < a \neq 1)$

A função f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ dada pela lei $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, chamada exponencial, é inversível. Sua inversa é f^{-1}: $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = log_a x$, chamada *logarítmica*. Dependendo do valor de a, os gráficos da logarítmica e da exponencial tomam um dos aspectos seguintes:

$a > 1$



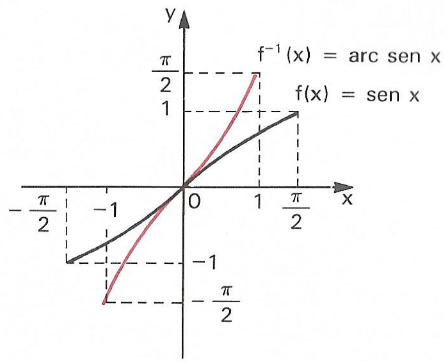
$0 < a < 1$



c) Função arco-seno: $y = arc\ sen\ x$

A função seno ($y = sen\, x$), quando restrita ao domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e ao contradomínio $[-1, 1]$, é inversível e sua inversa é a função de $[-1, 1]$ em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dada pela lei $y = arc\ sen\ x$.

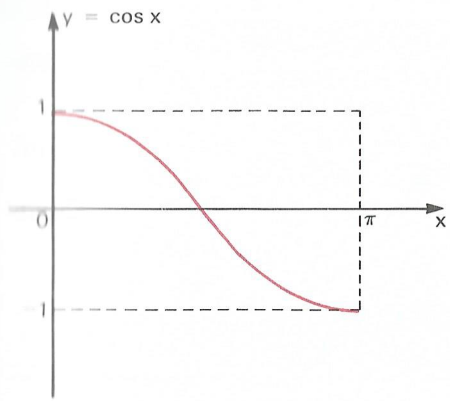
A partir da senóide, usando a simetria em relação à bissetriz $y = x$, construímos o gráfico ao lado.

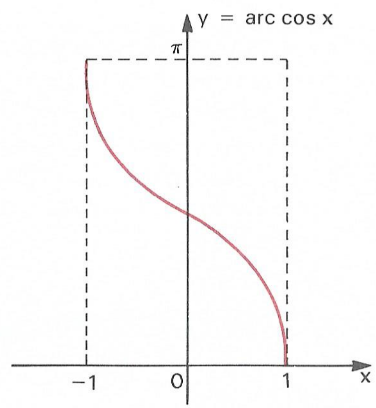


d) Função arco-cosseno: $y = arc\ cos\ x$

A função cosseno ($y = cos\ x$), quando restrita ao domínio $[0, \pi]$ e ao contradomínio $[-1, 1]$, é inversível e sua inversa é a função de $[-1, 1]$ em $[0, \pi]$ dada pela lei $y = arc\ cos\ x$.

Analogamente à função anterior, temos o gráfico abaixo.

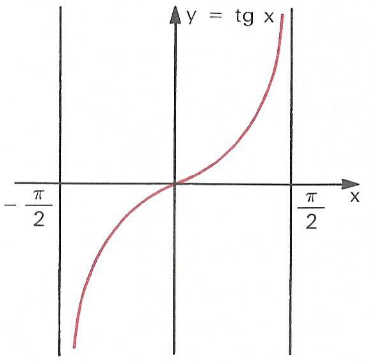


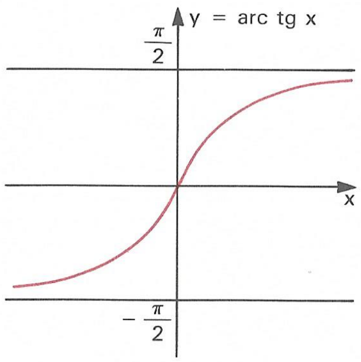


e) Função arco-tangente: $y = arc\ tg\ x$

A função tangente ($y = tg\, x$), quando restrita ao domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e ao contradomínio $\mathbb{R}$, é inversível e sua inversa é a função de $\mathbb{R}$ em

$\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ dada pela lei $y = arc\ tg\ x$. Eis o gráfico:





EXERCÍCIOS

9. Examine cada uma das funções abaixo e estabeleça quais são inversíveis. Para estas, defina a inversa.

a) $f: \{a, b, c\} \longrightarrow \{a', b', c'\}$ tal que $f = \{(a, a'), (b, b'), (c, c')\}$.
b) $g: \{1, 2, 3\} \longrightarrow \{4, 5, 6, 7\}$ tal que $g(1) = 4$, $g(2) = 6$ e $g(3) = 4$.
c) $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) = 1 - 5x$.
d) $i: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $i(x) = x^3 - 2$.
e) $j: \mathbb{R}_- \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $j(x) = x^2$.
f) $p: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ tal que $p(x) = \dfrac{1}{x}$.

10. Determine a inversa da função $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{quando } x \leqslant 1 \\ \dfrac{x+1}{2}, & \text{quando } 1 < x \leqslant 3 \\ x^2 - 7, & \text{quando } x > 3 \end{cases}$$

11. Sejam as funções $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 3$ e $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \sqrt[3]{x - 1}$. Determine a função $g^{-1} \circ f^{-1}$.

12. Determine a inversa da função $f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = log\sqrt{x}$.

13. Determine a inversa da função $f: \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$ dada pela lei $f(x) = sen\ \dfrac{x}{2}$.

V. Operações com funções

17. Adição

Dadas duas funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$, chama-se *soma* $f + g$ a função $h: A \longrightarrow B$ definida pela lei $h(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

Por exemplo, sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $f(x) = e^x$ e $g(x) = e^{-x}$. Sua soma é a função $h(x) = e^x + e^{-x}$.

18. Subtração

Dadas duas funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$, chama-se *diferença* $f - g$ a função $h: A \longrightarrow B$ definida pela lei $h(x) = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$.

Como exemplo, sejam as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $f(x) = sen\ x$ e $g(x) = log\ x$. Sua diferença é a função $h(x) = sen\ x - log\ x$.

19. Multiplicação

Dadas as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$, chama-se *produto* fg a função $h: A \longrightarrow B$ definida pela lei $h(x) = (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Assim, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = cos\ x$ são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, seu produto é a função $h(x) = x^2 \cdot cos\ x$.

20. Quociente

Dadas as funções $f: A \longrightarrow B$ e $g: A \longrightarrow B$, chama-se *quociente* $\dfrac{f}{g}$ a função $h: \overline{A} \longrightarrow B$ definida pela lei $h(x) = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ para $x \in \overline{A} = \{x \in A \mid g(x) \neq 0\}$.

Assim, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 1$ são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, seu quociente é a função $h(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$.

CAPÍTULO II

Limite

I. Noção intuitiva de limite

21. Seja a função $f(x) = \dfrac{(2x + 1)(x - 1)}{(x - 1)}$ definida para todo x real e $x \neq 1$. Se $x \neq 1$, podemos dividir o numerador e o denominador por $x - 1$, obtendo $f(x) = 2x + 1$.

Estudemos os valores da função f quando x assume valores próximos de 1, mas diferentes de 1.

Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	1	2	2,5	2,8	2,98	2,998

Se atribuirmos a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	5	4	3,5	3,2	3,02	3,002

Observemos em ambas as tabelas que, quando x se aproxima cada vez mais de 1, $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de 3, isto é, quanto mais próximo de 1 estiver x, tanto mais próximo de 3 estará $f(x)$.

Notemos na primeira tabela que:

$$x = 0{,}9 \implies f(x) = 2{,}8 \text{ isto é, } x - 1 = -0{,}1 \implies f(x) - 3 = -0{,}2$$
$$x = 0{,}99 \implies f(x) = 2{,}98 \text{ isto é, } x - 1 = -0{,}01 \implies f(x) - 3 = -0{,}02$$
$$x = 0{,}999 \implies f(x) = 2{,}998 \text{ isto é, } x - 1 = -0{,}001 \implies f(x) - 3 = -0{,}002$$

e a segunda tabela nos mostra que:

$$x = 1{,}1 \implies f(x) = 3{,}2 \text{ isto é, } x - 1 = 0{,}1 \implies f(x) - 3 = 0{,}2$$
$$x = 1{,}01 \implies f(x) = 3{,}02 \text{ isto é, } x - 1 = 0{,}01 \implies f(x) - 3 = 0{,}02$$
$$x = 1{,}001 \implies f(x) = 3{,}002 \text{ isto é, } x - 1 = 0{,}001 \implies f(x) - 3 = 0{,}002$$

portanto, pelas duas tabelas vemos que:

$$|x - 1| = 0{,}1 \implies |f(x) - 3| = 0{,}2$$
$$|x - 1| = 0{,}01 \implies |f(x) - 3| = 0{,}02$$
$$|x - 1| = 0{,}001 \implies |f(x) - 3| = 0{,}002$$

Observemos que podemos tornar $f(x)$ tão próximo de 3 quanto desejarmos, bastando para isso tomarmos x suficientemente próximo de 1.

Um outro modo de dizermos isto é: *podemos tornar o módulo da diferença entre $f(x)$ e 3 tão pequeno quanto desejarmos desde que tomemos o módulo da diferença entre x e 1 suficientemente pequeno.*

22. A linguagem utilizada até aqui não é uma linguagem matemática, pois ao dizermos "$|f(x) - 3|$ tão pequeno quanto desejarmos" e "$|x - 1|$ suficientemente pequeno", não sabemos quantificar o quão pequenas devem ser essas diferenças.

A Matemática usa símbolos para indicar essas diferenças pequenas. Os símbolos usualmente são ϵ (épsilon) e δ (delta).

Assim, dado um número positivo ϵ, se desejamos $|f(x) - 3|$ menor que ϵ, devemos tomar $|x - 1|$ suficientemente pequeno, isto é, devemos encontrar um número positivo δ, suficientemente pequeno, de tal modo que

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

A condição $0 < |x - 1|$ é neste caso equivalente a $0 \neq |x - 1|$, isto é, $x \neq 1$, porque estamos interessados nos valores de $f(x)$, quando x está próximo de 1, mas não quando $x = 1$.

É importante perceber que δ depende do ϵ considerado. Nas duas tabelas vemos que:

1º) $|x - 1| = 0{,}1 \implies |f(x) - 3| = 0{,}2$
então, se for dado $\epsilon = 0{,}2$, tomamos $\delta = 0{,}1$ e afirmamos que:

$$0 < |x - 1| < 0{,}1 \implies |f(x) - 3| < 0{,}2$$

2º) $|x - 1| = 0{,}01 \implies |f(x) - 3| = 0{,}02$
então, se for dado $\epsilon = 0{,}02$, tomamos $\delta = 0{,}01$ e temos:

$$0 < |x - 1| < 0{,}01 \implies |f(x) - 3| < 0{,}02$$

3º) $|x - 1| = 0{,}001 \implies |f(x) - 3| = 0{,}002$
então, se for dado $\epsilon = 0{,}002$, tomamos $\delta = 0{,}001$ e temos:

$$0 < |x - 1| < 0{,}001 \implies |f(x) - 3| < 0{,}002$$

Notemos que, dado ϵ, tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Generalizando, afirmamos que, qualquer que seja o valor positivo ϵ, podemos tomar $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ tal que

$$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{2} \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

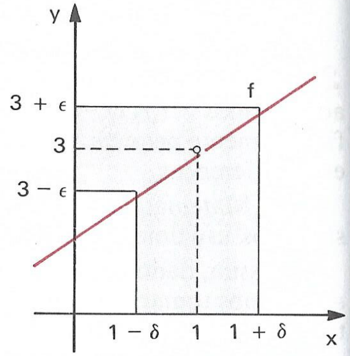
De fato:

$$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{2} \implies |x - 1| < \frac{\epsilon}{2} \implies 2|x - 1| < \epsilon \implies$$

$$\implies |2x - 2| < \epsilon \implies |\underbrace{2x + 1}_{f(x)} - 3| < \epsilon \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

Notando que
$0 < |x - 1| < \delta \iff 1 - \delta < x < 1 + \delta$ e $x \neq 1$
e
$|f(x) - 3| < \epsilon \iff 3 - \epsilon < f(x) < 3 + \epsilon$
vejamos qual é o significado de ϵ e δ no gráfico ao lado.

Para todo x entre $1 - \delta$ e $1 + \delta$ e $x \neq 1$, temos os valores de $f(x)$ entre $3 - \epsilon$ e $3 + \epsilon$.



23. O valor considerado $\frac{\epsilon}{2}$ para δ não é único, é simplesmente o maior valor que δ pode assumir.

Assim, se considerarmos $\delta_1 = \frac{\epsilon}{3}$, teremos também

$$0 < |x - 1| < \delta_1 = \frac{\epsilon}{3} \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

De fato:

$$0 < |x - 1| < \delta_1 = \frac{\epsilon}{3} \implies |x - 1| < \frac{\epsilon}{3} \implies 2|x - 1| < \frac{2\epsilon}{3} \implies$$

$$\implies |2x - 2| < \frac{2\epsilon}{3} \implies |\underbrace{2x + 1}_{f(x)} - 3| < \frac{2\epsilon}{3} \implies$$

$$\implies |f(x) - 3| < \frac{2\epsilon}{3} \implies |f(x) - 3| < \epsilon \left(\text{pois } \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon\right)$$

Considerando $\delta_1 < \delta$, percebemos que o intervalo de extremos $1 - \delta_1$ e $1 + \delta_1$ está contido no intervalo de extremos $1 - \delta$ e $1 + \delta$ e, portanto, todo x que satisfaz

$$1 - \delta_1 < x < 1 + \delta_1 \text{ e } x \neq 1$$

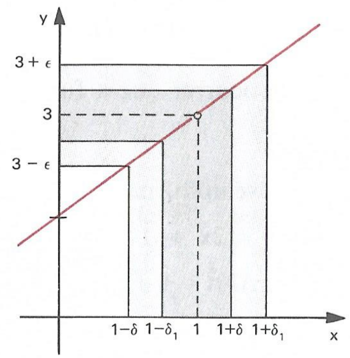
satisfará

$$1 - \delta < x < 1 + \delta \text{ e } x \neq 1$$

e, conseqüentemente, teremos

$$3 - \epsilon < f(x) < 3 + \epsilon$$

o que pode ser confirmado no gráfico ao lado.



Quando, para qualquer valor positivo ϵ, podemos encontrar um valor apropriado para δ tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x) - 3| < \epsilon$$

dizemos que o limite de $f(x)$, para x tendendo a 1, é 3. Em símbolos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

II. Definição de limite

24. Seja I um intervalo aberto ao qual pertence o número real a. Seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Dizemos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é L e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

É importante observarmos nesta definição que nada é mencionado sobre o valor da função quando $x = a$, isto é, não é necessário que a função esteja definida em a. Assim, no exemplo anterior, vimos que

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3$$

mas $f(x) = \dfrac{(2x + 1)(x - 1)}{(x - 1)}$ não está definida para $x = 1$.

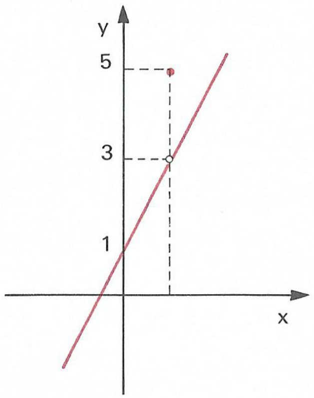
Pode ocorrer que a função esteja definida em a e $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Por exemplo, na função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 5 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

temos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (2x + 1) = 3 \neq f(1)$$



É importante ter sempre em mente no cálculo de $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ que interessa o comportamento de $f(x)$ quando x se aproxima de a e não o que ocorre com f quando $x = a$.

O próximo teorema afirma que uma função não pode se aproximar de dois números diferentes quando x se aproxima de a. É o teorema da unicidade do limite de uma função; ele nos garante que, se o limite de uma função existe, então ele é único.

III. Unicidade do limite

25. *Teorema*

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Demonstração

Demonstraremos este teorema por redução ao absurdo.
Supondo $L_1 \neq L_2$, temos:

Sendo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, vem:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L_1| < \epsilon$ (1)

Sendo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_2$, vem:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |f(x) - L_2| < \epsilon$ (2)

Escrevendo $L_1 - L_2$ como $L_1 - f(x) + f(x) - L_2$ e aplicando a desigualdade triangular $(|a + b| \leqslant |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R})$, temos:

$|L_1 - L_2| = |(L_1 - f(x)) + (f(x) - L_2)| \leqslant |L_1 - f(x)| + |f(x) - L_2| =$
$= |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$

Chamando de δ o menor dos números δ_1 e δ_2, temos $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$ e considerando (1) e (2), temos:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que:
$0 < |x - a| < \epsilon \implies |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon$

mas $|L_1 - L_2| < |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2|$, então:
$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que:
$0 < |x - a| < \epsilon \implies |L_1 - L_2| < 2\epsilon$

Se tomarmos $\epsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$, vem:

para $\epsilon = \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$, $\exists \delta = \min \{\delta_1, \delta_2\}$
tal que $0 < |x - a| < \epsilon \implies |L_1 - L_2| < |L_1 - L_2|$
que é uma contradição e, portanto, a nossa suposição é falsa. Logo $L_1 = L_2$.

EXERCÍCIOS

14. Seja a função f definida por $f(x) = 5x - 2$ para todo x real. Se $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 8$, encontre um δ para $\epsilon = 0{,}01$ tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |f(x) - 8| < 0{,}01$$

Solução

$|f(x) - 8| < 0{,}01 \iff |(5x - 2) - 8| < 0{,}01 \iff |5x - 10| < 0{,}01 \iff$
$\iff 5 \cdot |x - 2| < 0{,}01 \iff |x - 2| < 0{,}002$

Se tomarmos $\delta = 0{,}002$, teremos:

$$0 < |x - 2| < 0{,}002 \implies |f(x) - 8| < 0{,}01$$

Notemos que qualquer número positivo menor que $0{,}002$ pode ser usado no lugar de $0{,}002$ como sendo o δ pedido, isto é, se $0 < \delta_1 < 0{,}002$, a afirmação

$$0 < |x - 2| < \delta_1 \implies |f(x) - 8| < 0{,}01$$

é verdadeira, porque todo número x que satisfaça a desigualdade $0 < |x - 2| < \delta_1$ satisfará também a desigualdade $0 < |x - 2| < \delta$.

15. Seja f uma função tal que $f(x) = 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.
Se $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 5$, encontre um δ para $\epsilon = 0{,}01$ tal que $0 < |x - 1| < \delta \implies |f(x) - 5| < 0{,}01$

16. Dada a função f tal que $f(x) = 5 - 2x$, $x \in \mathbb{R}$, determine um número δ para $\epsilon = 0{,}001$ de modo que $0 < |x + 2| < \delta \implies |f(x) - 9| < \epsilon$, sabendo que $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = 9$.

17. Seja a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ definida para todo x real e $x \neq -1$. Sabendo que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -2$, calcule δ de modo que $0 < |x + 1| < \delta \implies |f(x) + 2| < 0{,}01$.

18. Supondo conhecido que $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} \dfrac{9x^2 - 4}{3x - 2} = 4$, quão próximo de $\dfrac{2}{3}$ deve estar x para que a fração $\dfrac{9x^2 - 4}{3x - 2}$ esteja próxima de 4, com aproximação inferior a $0{,}0001$?

19. Usando a definição, demonstre que $\lim\limits_{x \to 1} (3x + 2) = 5$.

Solução

Devemos mostrar que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |(3x + 2) - 5| < \epsilon$$

Notemos que:

$$|(3x + 2) - 5| < \epsilon \iff |3x - 3| < \epsilon \iff 3|x - 1| < \epsilon \iff |x - 1| < \frac{\epsilon}{3}$$

Assim, se escolhermos $\delta = \dfrac{\epsilon}{3}$, teremos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta = \frac{\epsilon}{3} > 0 \mid 0 < |x - 1| < \delta \implies |(3x + 2) - 5| < \epsilon$$

De fato, se

$$0 < |x - 1| < \delta = \frac{\epsilon}{3} \implies |x - 1| < \frac{\epsilon}{3} \implies 3|x - 1| < \epsilon \implies$$
$$\implies |3x - 3| < \epsilon \implies |(3x + 2) - 5| < \epsilon$$

20. Demonstre, usando a definição, que:

a) $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 1) = 7$ b) $\lim\limits_{x \to 3} (4 - 2x) = -2$ c) $\lim\limits_{x \to -1} (3x - 2) = -5$

21. Demonstre, usando a definição, que $\lim\limits_{x \to 1} x^2 = 1$.

Solução

Devemos provar:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 1| < \delta \implies |x^2 - 1| < \epsilon$$

Notemos que:

$$|x^2 - 1| < \epsilon \implies -\epsilon < x^2 - 1 < \epsilon \implies 1 - \epsilon < x^2 < 1 + \epsilon$$

Suponhamos que o valor de δ que queremos encontrar seja menor ou igual a 1, isto é,

$0 < |x - 1| < \delta \leqslant 1 \implies |x - 1| < 1 \implies -1 < x - 1 < 1 \implies 0 < x < 2$

e, sendo $\epsilon' > 0$ tal que se $0 < \epsilon < 1$ então $\epsilon' = \epsilon$ ou se $\epsilon \geqslant 1$ então $0 < \epsilon' < 1$, temos:

$$1 - \epsilon \leqslant 1 - \epsilon' < x^2 < 1 + \epsilon' \leqslant 1 + \epsilon \implies 0 < 1 - \epsilon' < x^2 < 1 + \epsilon' \implies$$
$$\implies \sqrt{1 - \epsilon'} < |x| < \sqrt{1 + \epsilon'} \implies \sqrt{1 - \epsilon'} < x < \sqrt{1 + \epsilon'} \implies$$
$$\implies \sqrt{1 - \epsilon'} - 1 < x - 1 < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 \implies \begin{cases} |x - 1| < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 \\ \text{e} \\ |x - 1| < 1 - \sqrt{1 - \epsilon'} \end{cases}$$

Notando que

$0 < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 < 1 - \sqrt{1 - \epsilon'} < 1$ temos:

para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \sqrt{1 + \epsilon'} - 1$ em que $\epsilon' = \epsilon$ se $0 < \epsilon < 1$ ou $0 < \epsilon' < 1$ se $\epsilon \geqslant 1$, tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \implies |x^2 - 1| < \epsilon$$

De fato,

$0 < |x - 1| < \delta \implies |x - 1| < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 \implies$

$\implies \sqrt{1 - \epsilon'} - 1 < 1 - \sqrt{1 + \epsilon'} < x - 1 < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 \implies$

$\implies \sqrt{1 - \epsilon'} - 1 < x - 1 < \sqrt{1 + \epsilon'} - 1 \implies \sqrt{1 - \epsilon'} < x < \sqrt{1 + \epsilon'} \implies$

$\implies 1 - \epsilon' < x^2 < 1 + \epsilon' \implies -\epsilon' < x^2 - 1 < \epsilon' \implies |x^2 - 1| < \epsilon' \leqslant \epsilon$

22. Prove pela definição de limite que:

a) $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$ b) $\lim\limits_{x \to -3} (x^2 + 1) = 10$ c) $\lim\limits_{x \to 2} (1 - x^2) = -3$

23. Prove pela definição de limite que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{9}{x + 1} = 3.$

Solução

Devemos provar:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 2| < \delta \implies \left|\frac{9}{x + 1} - 3\right| < \epsilon$$

Notemos que:

$$\left|\frac{9}{x + 1} - 3\right| < \epsilon \implies -\epsilon < \frac{9}{x + 1} - 3 < \epsilon \implies 3 - \epsilon < \frac{9}{x + 1} < 3 + \epsilon$$

Considerando $\epsilon' > 0$, tal que $\epsilon' = \epsilon$ se $0 < \epsilon < 3$ ou $0 < \epsilon' < 3$ se $\epsilon \geqslant 3$, temos:

$$3 - \epsilon \leqslant 3 - \epsilon' < \frac{9}{x + 1} < 3 + \epsilon' \leqslant 3 + \epsilon \implies$$

$$\implies 0 < 3 - \epsilon' < \frac{9}{x + 1} < 3 + \epsilon' \implies$$

$$\implies \frac{1}{3 - \epsilon'} > \frac{x + 1}{9} > \frac{1}{3 + \epsilon'} \implies \frac{9}{3 - \epsilon'} > x + 1 > \frac{9}{3 + \epsilon'} \implies$$

$$\implies \frac{9}{3 - \epsilon'} - 3 > x - 2 > \frac{9}{3 + \epsilon'} - 3 \implies$$

$$\implies \frac{3\epsilon'}{3 - \epsilon'} > x - 2 > \frac{-3\epsilon'}{3 + \epsilon'} \implies$$

$$\implies \begin{cases} |x - 2| < \dfrac{3\epsilon'}{3 - \epsilon'} \\ \quad \text{e} \\ |x - 2| < \dfrac{3\epsilon'}{3 + \epsilon'} \end{cases}$$

Notando que $0 < \dfrac{3\epsilon'}{3 + \epsilon'} < \dfrac{3\epsilon'}{3 - \epsilon'}$, temos para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \dfrac{3\epsilon'}{3 + \epsilon'} > 0$ em que $\epsilon' = \epsilon$ se $0 < \epsilon < 3$ ou $0 < \epsilon' < 3$ se $\epsilon \geqslant 3$, tal que

$$0 < |x - 2| < \delta \implies \left|\frac{9}{x + 1} - 3\right| < \epsilon$$

De fato:

$$0 < |x - 2| < \delta \implies |x - 2| < \frac{3\epsilon'}{3 + \epsilon'} \implies$$

$$\implies \frac{-3\epsilon'}{3 + \epsilon'} < x - 2 < \frac{3\epsilon'}{3 + \epsilon'} < \frac{3\epsilon'}{3 - \epsilon'} \implies$$

$$\implies \frac{-3\epsilon'}{3 + \epsilon'} < x - 2 < \frac{3\epsilon'}{3 - \epsilon'} \implies$$

$$\implies \frac{9}{3 + \epsilon'} - 3 < x - 2 < \frac{9}{3 - \epsilon'} - 3 \implies$$

$$\implies \frac{9}{3 + \epsilon'} < x + 1 < \frac{9}{3 - \epsilon'} \implies \frac{1}{3 + \epsilon'} < \frac{x + 1}{9} < \frac{1}{3 - \epsilon'} \implies$$

$$\implies 3 - \epsilon' < \frac{9}{x + 1} < 3 + \epsilon' \implies -\epsilon' < \frac{9}{x + 1} - 3 < \epsilon' \implies$$

$$\implies \left|\frac{9}{x + 1} - 3\right| < \epsilon' \leqslant \epsilon.$$

Ufa! Quanto trabalho! Será que vai ser sempre assim? Não, com as propriedades dos limites (item seguinte) evitaremos tantos artifícios.

24. Prove pela definição de limite que $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{6}{x + 2} = 2.$

25. Prove pela definição de limite que $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 2}{x - 1} = 4.$

26. Prove pela definição de limite que $\lim\limits_{x \to 1} x^3 = 1.$

IV. Propriedades do limite de uma função

26. No parágrafo anterior vimos que, para provarmos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, devemos exibir um $\delta > 0$ para um dado $\epsilon > 0$.

Considerando que freqüentemente uma função é construída a partir de funções mais simples; por exemplo uma função polinomial f é uma soma finita de funções do tipo $f_i(x) = a_i x^i$ em que $a_i \in \mathbb{R}$ e $i \in \mathbb{N}$, isto é:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$$

Se as funções f_i têm limites para x tendendo a a, então uma combinação conveniente nos fornece o limite de f quando x tende a a.

A fim de que não tenhamos que voltar repetidamente à definição de limite para provarmos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, vamos apresentar as propriedades algébricas do limite de uma função.

No que segue estamos supondo que a é elemento de um intervalo aberto I, e que em $I - \{a\}$ estão definidas as funções $f, g, \dots$ "envolvidas" na propriedade.

27. *1ª propriedade*

"Se $c \in \mathbb{R}$ e f é a função definida por $f(x) = c$, para todo x real, então $\lim\limits_{x \to a} c = c$."

Demonstração

Devemos provar:

$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - c| < \epsilon$

É sempre verdadeiro, pois

$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$

28. *2ª propriedade*

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x \to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x) = c \cdot L$.

Demonstração

Devemos considerar dois casos:

1º caso: $c = 0$

Se $c = 0$, então $c \cdot f(x) = 0 \cdot f(x) = 0$ e $c \cdot L = 0 \cdot L = 0$.

Pela 1ª propriedade, temos:

$\lim\limits_{x \to a} [c \cdot f(x)] = \lim\limits_{x \to a} 0 = 0 = c \cdot L$

2º caso: $c \neq 0$

Devemos provar:

$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |c \cdot f(x) - c \cdot L| < \epsilon$

Temos, por hipótese:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

isto é,

$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \epsilon$

Então $\forall \epsilon > 0$, considerando $\dfrac{\epsilon}{|c|}$, temos:

$\exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \dfrac{\epsilon}{|c|}$

isto é,

$\exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |c| \cdot |f(x) - L| < \dfrac{\epsilon}{|c|} \cdot |c| = \epsilon$

ou seja:

$\exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |c \cdot f(x) - c \cdot L| < \epsilon$

29. *3ª propriedade*

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = L + M$.

Demonstração

Devemos provar:

$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |(f + g)(x) - (L + M)| < \epsilon$

Para todo $\epsilon > 0$, consideremos $\frac{\epsilon}{2}$. Temos:

$$\exists\, \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\exists\, \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$$

Considerando $\delta = min\ \{\delta_1, \delta_2\}$ e, portanto, $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$, vem

$$\delta = \min\ \{\delta_1, \delta_2\} \mid 0 < |x - a| < \delta \implies$$

$$\implies |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Mas, pela desigualdade triangular, temos:
$|f(x) - L| + |g(x) - M| \leqslant |f(x) + g(x) - (L + M)| = |(f + g)(x) - (L + M)|$
então:
$\exists\, \delta = \min\ \{\delta_1, \delta_2\} \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |(f + g)(x) - (L + M)| < \epsilon$

30. Esta propriedade pode ser estendida para uma soma de um número finito de funções, isto é:

Se $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L_2$, ..., $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = L_n$, então $\lim\limits_{x \to a} (f_1 + f_2 + \ldots + f_n)(x) = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$.

Demonstração

Deixamos como exercício para o leitor.

31. 4ª propriedade

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, então $\lim\limits_{x \to a} (f - g)(x) = L - M$.

Demonstração

$$\lim_{x \to a} (f - g)(x) = \lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} [f(x) + (-1) \cdot g(x)] =$$

$$= \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} [(-1) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L - M$$

32. Antes de passarmos para a próxima propriedade, vamos considerar dois lemas.

Lema 1

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - L) = 0$

Prova

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \iff$
$\iff (\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L - 0| < \epsilon) \iff$
$\iff \lim\limits_{x \to a} (f(x) - L) = 0$

Lema 2

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = 0$.

Prova

Devemos provar que:
$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) \cdot g(x)| < \epsilon$
Considerando que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, isto é,

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$

e fazendo $\epsilon = 1$, vem:
$\exists\, \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - L| < 1$
mas $|f(x)| - |L| \leqslant |f(x) - L|$ e portanto:
$\exists\, \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x)| < 1 + |L|$ (1)

Considerando que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, isto é,

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |g(x)| < \epsilon$

e tomando $\frac{\epsilon}{1 + |L|}$ temos:

$$\exists\, \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x)| < \frac{\epsilon}{1 + |L|}$$

isto é,
$\exists\, \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies (1 + |L|)\ |g(x)| < \epsilon$ (2)

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, e portanto $\delta \leqslant \delta_1$ e $\delta \leqslant \delta_2$, temos:
$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies$
$\implies |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < (1 + |L|) \cdot |g(x)| < \epsilon$
① ②

33. *5ª propriedade*

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = LM$.

Demonstração

Notemos que:
$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - L \cdot g(x) + L \cdot g(x) - LM + LM$
isto é,
$(f \cdot g)(x) = [f(x) - L] \cdot g(x) + L \cdot [g(x) - M] + LM$
Considerando que:
1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff \lim\limits_{x\to a} (f(x) - L) = 0$,
2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \iff \lim\limits_{x\to a} (g(x) - M) = 0$,
3) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) - L) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \implies \lim\limits_{x\to a} [(f(x) - L) \cdot g(x)] = 0$
temos:
$\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = \lim\limits_{x\to a} \{[f(x) - L] \cdot g(x) + L \cdot [g(x) - M] + LM\} =$
$= \lim\limits_{x\to a} \{[f(x) - L] \cdot g(x)\} + \lim\limits_{x\to a} \{L \cdot [g(x) - M]\} + \lim\limits_{x\to a} LM =$
$= 0 + L \cdot \lim\limits_{x\to a} [g(x) - M] + LM = L \cdot 0 + LM = LM$

34. Esta propriedade pode ser estendida para um produto de um número finito de funções, isto é:

Se $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = L_2$, ..., $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = L_n$, então $\lim\limits_{x\to a} (f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n)(x) = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n$.

Demonstração

Deixamos como exercício para o leitor.

35. *6ª propriedade*

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x\to a} (f)^n(x) = L^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(Trata-se do caso particular da propriedade vista no parágrafo 34, fazendo $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$.)

36. Antes da próxima propriedade, vejamos mais dois lemas:

Lema 3

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \neq 0$, então existem δ e N positivos tais que
$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > N$.

Prova

De $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, vem:
$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$
Tomando $\epsilon = \dfrac{|L|}{2}$, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \frac{|L|}{2} \implies$$

$$\implies -\frac{|L|}{2} < f(x) - L < \frac{|L|}{2} \implies L - \frac{|L|}{2} < f(x) < L + \frac{|L|}{2}$$

Então são possíveis dois casos:

1º) se $L > 0$, então $0 < \dfrac{L}{2} < f(x) < \dfrac{3L}{2}$

2º) se $L < 0$, então $\dfrac{3L}{2} < f(x) < \dfrac{L}{2} < 0$

então, para $L \neq 0$, temos $0 < \left|\dfrac{L}{2}\right| < |f(x)| < \left|\dfrac{3L}{2}\right|$.

Considerando $N = \left|\dfrac{L}{2}\right| > 0$, temos:
$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| > N$

Lema 4

Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{M}$.

Prova

Considerando que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, pelo lema 3, temos:

$$\exists\, \delta_1,\ N > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies |g(x)| > N \implies \frac{1}{|g(x)|} < \frac{1}{N}$$

De $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, vem:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |g(x) - M| < \epsilon$$

Considerando $\epsilon \cdot |M| \cdot N$, temos:

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - M| < \epsilon \cdot |M| \cdot N$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, vem: $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| = \left|\frac{g(x) - M}{g(x) \cdot M}\right| =$$

$$= |g(x) - M| \cdot \frac{1}{|g(x)|} \cdot \frac{1}{|M|} < \frac{\epsilon \cdot |M| \cdot N}{N \cdot |M|} = \epsilon.$$

37. 7ª propriedade

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M \neq 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{L}{M}$.

Demonstração

Pelo lema 4, temos:

$$\lim_{x\to a} g(x) = M \neq 0 \implies \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

e então

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to a} \left[f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right] = L \cdot \frac{1}{M} = \frac{L}{M}$$

38. 8ª propriedade

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$ com $L \geqslant 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$ ou $L < 0$ e n é ímpar.

A demonstração deste teorema será feita oportunamente, mas iremos aplicá-lo quando for necessário.

Por uma questão de simplicidade indicaremos as propriedades de limites como sendo as propriedades L e vamos fazer rápido sumário dessas propriedades.

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$, então:

L_1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$

L_2. $\lim\limits_{x\to a} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x) = c \cdot L$

L_3. $\lim\limits_{x\to a} [(f + g)(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$

L_4. $\lim\limits_{x\to a} [(f - g)(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$

L_5. $\lim\limits_{x\to a} [(f \cdot g)(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \cdot M$

L_6. $\lim\limits_{x\to a} [(f)^n (x)] = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$

L_7. $\lim\limits_{x\to a} \left[\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ $(M \neq 0)$

L_8. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ (se $n \in \mathbb{N}^*$ e $L \geqslant 0$ ou se n é ímpar e $L \leqslant 0$)

V. Limite de uma função polinomial

Uma das conseqüências das propriedades L é a regra para obter o limite de uma função polinomial.

39. Teorema

O limite de uma função polinomial

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,\quad a_i \in \mathbb{R},$$ para x tendendo para a, é igual ao valor numérico de $f(x)$ para $x = a$.

Antes de provarmos esta proposição, provemos que $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

É trivialmente verdadeira pois, dado $\epsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \epsilon$ e temos $0 < |x - a| < \epsilon \implies |x - a| < \epsilon$.

Provemos agora que, se f é uma função polinomial, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n) =$$

$$\overset{(1)}{=} \lim_{x \to a} a_0 + \lim_{x \to a} a_1 x + \lim_{x \to a} a_2 x^2 + \ldots + \lim_{x \to a} a_n x^n =$$

$$\overset{(2)}{=} a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + a_2 \lim_{x \to a} x^2 + \ldots + a_n \lim_{x \to a} x^n =$$

$$\overset{(3)}{=} a_0 + a_1 a + a_2 a^2 + \ldots + a_n a^n = f(a)$$

Justificações:

(1) 3ª propriedade
(2) 2ª propriedade
(3) 6ª propriedade

EXERCÍCIOS

27. Calcule os seguintes limites, especificando em cada passagem a propriedade ou o teorema utilizado.

a) $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}}$

Solução

a) Pelo teorema da função polinomial (T), vem:

$$\lim_{x \to 2} (3x^2 - 5x + 2) = 3 \cdot 2^2 - 5 \cdot 2 + 2 = 4$$

b) $$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x - 3}{4x - 3} \overset{(L_7)}{=\!=} \frac{\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + 2x - 3)}{\lim\limits_{x \to -1} (4x - 3)} \overset{(T)}{=\!=} \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

c) $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2 \overset{(L_6)}{=\!=} \left(\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x + 1}{3x - 2}\right)^2 \overset{(L_7)}{=\!=}$$

$$= \left(\frac{\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - x + 1)}{\lim\limits_{x \to 1} (3x - 2)}\right)^2 \overset{(T)}{=\!=} 2^2 = 4$$

d) $$\lim_{x \to -2} \sqrt[3]{\frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} \overset{(L_8)}{=\!=} \sqrt[3]{\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}} \overset{(L_7)}{=\!=}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 2x^2 - 3x + 2)}{\lim\limits_{x \to -2} (x^2 + 4x + 3)}} \overset{(T)}{=\!=} \sqrt[3]{-8} = -2$$

28. Calcule os seguintes limites, especificando em cada passagem a propriedade ou o teorema utilizado.

a) $\lim\limits_{x \to 1} (4x^2 - 7x + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to -1} (x^3 - 2x^2 - 4x + 3)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

d) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 5x + 4}{2x + 1}$

e) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{5 - 3x}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{3x^2 - 2x - 5}{-x^2 + 3x + 4}\right)^3$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x^3 - 3x^2 - 2x - 5}{2x^2 - 9x + 2}\right)^2$

h) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 3x - 4}{5x - 4}}$

i) $\lim\limits_{x \to -2} \sqrt[3]{\dfrac{3x^3 - 5x^2 - x + 2}{4x + 3}}$

j) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{2x^2 + 3x + 2}}{6 - 4x}$

29. Calcule $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$.

Solução

Temos $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 2x) = 0$ e nada podemos concluir ainda sobre o limite procurado.

Os polinômios $(x^2 - 4)$ e $(x^2 - 2x)$ anulam-se para $x = 2$; portanto, pelo teorema de D'Alembert, são divisíveis por $x - 2$, isto é:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x(x - 2)} = \frac{x + 2}{x}.$$

Considerando que no cálculo do limite de uma função, quando x tende a a, interessa o comportamento da função quando x se aproxima de a e não o que ocorre com a função quando $x = a$, concluímos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{x} = 2.$$

30. Calcule os limites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{4 - x^2}{2 + x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x - 3}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 6}$

e) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + 5x - 3}{2x^2 - 5x + 2}$

f) $\displaystyle\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \frac{6x^2 + 11x + 3}{2x^2 - 5x - 12}$

g) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

h) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{8 + x^3}{4 - x^2}$

i) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{8 - x^3}$

31. Seja a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Calcule $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Solução

Como no cálculo do limite de uma função, quando x tende a a, interessa o comportamento da função quando x se aproxima de a e não o que ocorre com a função quando $x = a$, temos:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1} (x - 2) = -1$$

32. Seja a função f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 3 & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

Calcule $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

33. Seja a função:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 9x + 9}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \\ 3 & \text{se } x = -3 \end{cases}$$

Mostre que $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -3$.

34. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 5x - 3}$.

Solução

Temos $\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 + x^2 - 4x + 1) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 3x^2 + 5x - 3) = 0$.

Os polinômios $(2x^3 + x^2 - 4x + 1)$ e $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3)$ anulam-se para $x = 1$; portanto, pelo teorema de D'Alembert, são divisíveis por $(x - 1)$, isto é, $x - 1$ é um fator comum em $(2x^3 + x^2 - 4x + 1)$ e $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3)$.

Efetuando as divisões de $(2x^3 + x^2 - 4x + 1)$ e $(x^3 - 3x^2 + 5x - 3)$ por $(x - 1)$, obtemos:

$$\frac{2x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 5x - 3} = \frac{(x - 1) \cdot (2x^2 + 3x - 1)}{(x - 1) \cdot (x^2 - 2x + 3)} = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 3}$$

Então:

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 + x^2 - 4x + 1}{x^3 - 3x^2 + 5x - 3} = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x + 3} = 2$$

35. Calcule os limites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^3 - x^2 + 2}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 6x - 9}{x^3 - 8x - 3}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 6x - 4}{x^3 - 4x^2 + 8x - 5}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 10x + 4}{x^3 - 2x^2}$

36. Calcule $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1}$

Solução

Temos $\lim\limits_{x \to 1} (3x^3 - 4x^2 - x + 2) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 1} (2x^3 - 3x^2 + 1) = 0$.

Efetuando as divisões de $3x^3 - 4x^2 - x + 2$ e $2x^3 - 3x^2 + 1$ por $x - 1$, temos:

$$\frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \frac{(x - 1)(3x^2 - x - 2)}{(x - 1)(2x^2 - x - 1)} = \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1}$$

então:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^3 - 4x^2 - x + 2}{2x^3 - 3x^2 + 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1}$$

mas:

$$\lim_{x\to 1} (3x^2 - x - 2) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 1} (2x^2 - x - 1) = 0$$

e então:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - x - 2}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(3x+2)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x+2}{2x+1} = \frac{5}{3}$$

37. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4 + 4x^3 + x^2 - 12x - 12}{2x^3 + 7x^2 + 4x - 4}$

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4 - x^3 - x^2 + 5x + 4}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2}$

d) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 12x - 4}{2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 12x - 8}$

38. Calcular os limites:

a) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$

b) $\lim\limits_{x\to -a} \dfrac{a^2 - x^2}{a^3 + x^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$

f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$

39. Calcule $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 2}{x - 3}$.

Solução

Como $\lim\limits_{x\to 3} (\sqrt{1 + x} - 2) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 3} (x - 3) = 0$, não podemos aplicar a propriedade L_7 (limite do quociente). Multiplicando o numerador e o denominador da fração pelo "conjugado" do numerador, temos:

$$\frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \frac{(\sqrt{1+x} - 2)(\sqrt{1+x} + 2)}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{(x-3)}{(x-3)(\sqrt{1+x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2}$$

e então:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{1+x} - 2}{x - 3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 2} = \frac{1}{4}$$

40. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \sqrt{1 - x}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - 2x - x^2} - 1}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x} - \sqrt{x + 1}}{x - 1}$

41. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3 - \sqrt{10 - x}}{x^2 - 1}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2 - \sqrt{x + 1}}{x^2 - 9}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{x^2 - 3x + 2}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{3x - 2}}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x - 3}}{x^2 - 3x + 2}$

42. Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x - 2} - 2}{\sqrt{4x + 1} - 3}$.

Solução

Como $\lim\limits_{x\to 2} (\sqrt{3x - 2} - 2) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 2} (\sqrt{4x + 1} - 3) = 0$, multiplicamos o numerador e o denominador pelo "conjugado" do numerador e também pelo "conjugado" do denominador.

$$\frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{4x+1}-3} = \frac{(\sqrt{3x-2}-2)\cdot(\sqrt{3x-2}+2)\cdot(\sqrt{4x+1}+3)}{(\sqrt{4x+1}-3)\cdot(\sqrt{4x+1}+3)\cdot(\sqrt{3x-2}+2)} =$$

$$= \frac{3(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}{4(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)} = \frac{3(\sqrt{4x+1}+3)}{4(\sqrt{3x-2}+2)}$$

e então:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{4x+1}-3} = \lim_{x\to 2} \frac{3(\sqrt{4x+1}+3)}{4(\sqrt{3x-2}+2)} = \frac{9}{8}$$

43. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 6} \dfrac{4-\sqrt{10+x}}{2-\sqrt{10-x}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+1}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x^2-x+2}}{\sqrt{x+2}-2}$

44. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{2x^2-3x+2}-2}{\sqrt{3x^2-5x-1}-1}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sqrt{3x^2+4x+2}-1}{\sqrt{x^2+3x+6}-2}$

45. Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1}$.

Solução

Notemos $\lim\limits_{x\to 2} (x-2) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 2} (\sqrt[3]{3x-5}-1) = 0$.

Lembrando da identidade $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, vamos multiplicar o numerador e o denominador por $[(\sqrt[3]{3x-5})^2 + \sqrt[3]{3x-5} + 1]$.

$$\frac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1} = \frac{(x-2)[(\sqrt[3]{3x-5})^2+\sqrt[3]{3x-5}+1]}{(\sqrt[3]{3x-5}-1)[(\sqrt[3]{3x-5})^2+\sqrt[3]{3x-5}+1]} =$$

$$= \frac{(x-2)[(\sqrt[3]{3x-5})^2+\sqrt[3]{3x-5}+1]}{3(x-2)} = \frac{(\sqrt[3]{3x-5})^2+\sqrt[3]{3x-5}+1}{3}$$

e então:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{3x-5}-1} = \lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt[3]{3x-5})^2+\sqrt[3]{3x-5}+1}{3} = 1$$

46. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{2x+3}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8-2x+x^2}-2}{x-x^2}$

47. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{1+\sqrt[3]{3x-1}}$

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{2-3x}-2}{1+\sqrt[3]{2x+3}}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{3x^2-7x+1}+1}{\sqrt[3]{2x^2-5x+3}-1}$

48. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt[3]{x-2}+1}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{5x-2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x^2-5x+6}-2}{\sqrt[3]{x^2-3x+1}+1}$

49. Calcule $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

Solução

Notemos que $\lim\limits_{x\to 64} (\sqrt{x}-8) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 64} (\sqrt[3]{x}-4) = 0$

Poderíamos empregar no cálculo deste limite os processos mencionados nos exercícios 39 e 45. Vamos, entretanto, apresentar um novo processo. Fazendo

$\sqrt[6]{x} = y$, temos $\sqrt{x} = (\sqrt[6]{x})^3 = y^3$ e $\sqrt[3]{x} = (\sqrt[6]{x})^2 = y^2$

e notando que $\lim\limits_{x\to 64} \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{\lim\limits_{x\to 64} x} = \sqrt[6]{64} = 2 = \lim\limits_{y\to 2} y$

temos:

$$\lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4} = \lim_{y\to 2} \frac{y^3-8}{y^2-4} = \lim_{y\to 2} \frac{y^2+2y+4}{y+2} = 3$$

50. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x} + 1}{x + 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$

51. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}{x - a}$

e) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$

VI. Limites laterais

40. Lembremos que, ao considerarmos $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, estávamos interessados no comportamento da função nos valores próximos de a, isto é, nos valores de x pertencentes a um intervalo aberto contendo a mas diferentes de a e, portanto, nos valores desse intervalo que são maiores ou menores que a.

Entretanto, o comportamento em algumas funções, quando x está próximo de a, mas assume valores menores que a, é diferente do comportamento da mesma função, quando x está próximo de a, mas assume valores maiores que a.

Assim, por exemplo, na função

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x & \text{se } x < 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ x - 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1 (à esquerda de 1), temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	4	3,5	3,25	3,1	3,01	3,001

e atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1 (à direita de 1), temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	0	−0,5	−0,75	−0,9	−0,99	−0,999

Observamos que, se x está próximo de 1, à esquerda de 1, então os valores da função estão próximos de 3, e se x está próximo de 1, à direita, então os valores da função estão próximos de -1.

Em casos como este, em que supomos x assumindo valores próximos de 1, mas somente à esquerda ou somente à direita de 1, consideramos os limites laterais pela esquerda ou pela direita de 1, que definiremos a seguir.

41. *Definição*

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]a, b[$. O limite de $f(x)$, quando x se aproxima de a pela direita, será L e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que se $0 < x - a < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

42. *Definição*

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]b, a[$. O limite de $f(x)$, quando x se aproxima de a pela esquerda, será L e escrevemos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

se, para todo $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que se $-\delta < x - a < 0$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

43. As propriedades de limites (propriedades L) e o teorema do limite da função polinomial são válidos se substituirmos "$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou por "$x \to a^-$".

Exemplos

Na função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{se } x < 1 \\ -1 & \text{se } x = 1 \\ 3 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

temos:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (3 - x) = 2$$

e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 4) = -3$$

Como os limites laterais são diferentes, dizemos que $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ não existe.

A justificação da não-existência de um limite devido ao fato de os limites laterais serem diferentes é dada no teorema que segue.

44. *Teorema*

Seja I um intervalo aberto contendo a e seja f uma função definida para $x \in I - \{a\}$. Temos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existirem $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ e forem ambos iguais a L.

Demonstração

Notando que

$$0 < |x - a| < \delta \iff -\delta < x - a < 0 \text{ ou } 0 < x - a < \delta$$

temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

Isto equivale a:

$$(\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \text{ ou } 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

ou ainda:

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon \\ \qquad\qquad \text{e} \\ \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \end{cases}$$

e finalmente:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 52 a 57, é dada uma função f. Calcule os limites indicados, se existirem; se o(s) limite(s) não existir(em), especifique a razão.

52. $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 4x + 1 & \text{se } x < 1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

53. $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{se } x \geqslant -1 \\ 4 - x & \text{se } x < -1 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

54. $f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{se } x \geqslant 3 \\ 4 - 5x & \text{se } x < 3 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

55. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } x < 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \\ x - 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

56. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 8 - 2x & \text{se } x > 3 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

57. $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x - 1 & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x = 2 \\ -x^2 + 6x - 7 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

58. Dada a função f definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, calcule $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. Existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

Solução

Lembrando que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geqslant 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

temos:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Considerando que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, concluímos que não existe $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Nos exercícios 59 a 64 é dada uma função f. Calcule os limites indicados se existirem.

59. $f(x) = \dfrac{|x + 1|}{x + 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{-1\}$.

a) $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

60. $f(x) = \dfrac{|3x - 2|}{2 - 3x}$ definida em $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{2}{3}\right\}$.

a) $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} f(x)$

61. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{|x - 1|}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$.

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

62. $f(x) = \dfrac{|3x^2 - 5x - 2|}{x - 2}$ definida em $\mathbb{R} - \{2\}$.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

63. $f(x) = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{|x - 2|}$ definida em $\mathbb{R} - \{2\}$.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

64. $f(x) = \dfrac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{|2x^2 - 9x + 10|}$ definida em $\mathbb{R} - \left\{2, \dfrac{5}{2}\right\}$.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

65. Dada a função máximo inteiro(*), denotada por $f(x) = [x]$ para todo $x \in \mathbb{R}$, calcule se existir:

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} [x]$ d) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x - [x])$ g) $\lim\limits_{x \to 1^+} (x + [x])$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} [x]$ e) $\lim\limits_{x \to 1^-} (x - [x])$ h) $\lim\limits_{x \to 1^-} (x + [x])$

c) $\lim\limits_{x \to 1} [x]$ f) $\lim\limits_{x \to 1} (x - [x])$ i) $\lim\limits_{x \to 1} (x + [x])$

66. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{se } x > -1 \\ 3 & \text{se } x = -1 \\ 5 - ax & \text{se } x < -1 \end{cases}$$

determine $a \in \mathbb{R}$ para que exista $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

67. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4x + 3 & \text{se } x \leqslant -2 \\ 3x + a & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

determine $a \in \mathbb{R}$ para que exista $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$.

68. Dada a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ 3 - ax - x^2 & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

determine $a \in \mathbb{R}$ para que exista $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

(*) A função máximo inteiro é a função $f\colon \mathbb{R} \to Z$ tal que $f(x) = [x] = n$ tal que $n \leqslant x < n + 1$.

LEITURA

Arquimedes, o Grande Precursor do Cálculo Integral

Hygino H. Domingues

Uma das primeiras manifestações do cálculo integral é devida a Antifon, um contemporâneo de Sócrates. Antifon argumentava que, por sucessivas duplicações do número de lados de um polígono regular inscrito num círculo, a diferença entre a área do círculo e a dos polígonos seria "ao fim" exaurida. E como sempre é possível construir um quadrado equivalente a qualquer polígono, a quadratura do círculo seria possível.

Apesar de sua inconsistência, a argumentação de Antifon contém o gérmen do *método de exaustão*, creditado a Eudóxio, cuja base é a proposição: "Se de uma grandeza subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante outra parte não menor que sua metade, e assim por diante, numa determinada etapa do processo chega-se a uma grandeza menor que qualquer outra da mesma espécie fixada a priori". Este método representa o expediente grego para evitar processos infinitos — dos quais desconfiavam. E ninguém o manejou com tanta elegância e mestria como Arquimedes (287-212 a.C.).

Natural de Siracusa, na época a maior cidade do mundo grego, situada na costa sudoeste da Sicília, Arquimedes era filho do astrônomo Fídias, talvez seu mestre. Mas é possível que tenha estudado em Alexandria, em virtude da correspondência regular que mantinha com alguns sábios do museu local, como, por exemplo, Eratóstenes.

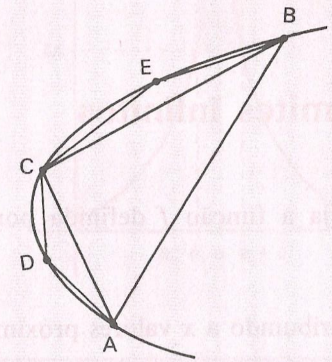
Arquimedes (287-212 a.C.).

Seu excepcional talento para invenções mecânicas ganhou notoriedade, especialmente durante a segunda Guerra Púnica, quando Siracusa foi sitiada pelos romanos. Graças aos engenhos bélicos que ideou, a cidade resistiu ao assédio romano por cerca de dois anos e só caiu devido a atos de traição de cidadãos locais.

Depois da invasão inimiga, Arquimedes foi morto por um soldado romano, com o qual teria se irritado por ser interrompido em meio suas pesquisas matemáticas. Desgostoso com esse desfecho, o comandante romano Marcelo mandou que se cumprisse um desejo expresso em vida por Arquimedes: que se gravasse em seu túmulo a figura de uma esfera inscrita num cilindro reto, para ser lembrado pelo teorema de sua autoria que lhe era mais caro, ou seja, "o volume da esfera inscrita é 2/3 do volume do cilindro".

Mas o que Arquimedes realmente valorizava eram suas conquistas teóricas no campo da matemática, da astronomia e da mecânica. Estas foram muitas, todas de grande originalidade, expressas no mais autêntico rigor da tradição grega, mas com um toque oriental, na medida em que não subestimavam os números e as aproximações numéricas.

As mais importantes contribuições de Arquimedes são sobre questões em cuja abordagem se usa hoje o Cálculo Diferencial e Integral. Assim é que no livro *A quadratura da parábola* ele fornece dois métodos para determinar a área de um segmento de parábola. No primeiro, em que considera certas figuras planas envolvidas como "somas" infinitas de segmentos de reta, usa argumentos mecânicos. Se A e B são os extremos do segmento de parábola considerado e C é o ponto onde a tangente à parábola é paralela a AB, Arquimedes chegou à conclusão de que a área do segmento de parábola mostrado na figura deveria ser 4/3 da área do triângulo ACB. No segundo, o método de exaustão, que utiliza ao fim o resultado já obtido mecanicamente, busca a certeza que só a geometria fornece. Se Δ é a área do triângulo ABC, D e E são os pontos da parábola em que as tangentes são paralelas a AC e CB, prosseguindo nesse raciocínio Arquimedes provou que ACB, $(ADC) \cup (CEB)$, ..., satisfazem a proposição que embasa o método de exaustão, relativamente ao segmento de parábola, e também que a seqüência das áreas respectivas é Δ, $\Delta/4$, $\Delta/16$, ... Modernamente bastaria achar a soma da progressão geométrica infinita $\Delta + \Delta/4 + \Delta/16 + \ldots$ para ter a área pretendida. Como desconhecia esse procedimento hoje corriqueiro, Arquimedes provou por dupla redução ao absurdo que essa área não poderia ser nem maior nem menor que $4/3\Delta$, resultado de que já dispunha.



Esse fato ilustra por que, ao que parece, Arquimedes teria dito em algum momento de sua vida: "Só a ciência pura é digna de um espírito superior."

CAPÍTULO III

O Infinito

I. Limites infinitos

45. Seja a função f definida por $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ para todo x real e $x \neq 1$.

Atribuindo a x valores próximos de 1, à esquerda de 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
f(x)	1	4	16	100	10 000	1 000 000

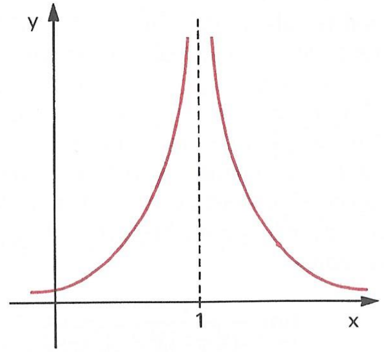
e atribuindo a x valores próximos de 1, à direita de 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
f(x)	1	4	16	100	10 000	1 000 000

Observamos nas duas tabelas que os valores da função são cada vez maiores, à medida que x se aproxima de 1. Em outras palavras, podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando valores para x bastante próximos de 1, e escrevemos:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

em que o símbolo "$+\infty$" lê-se "mais infinito" ou "infinito positivo".

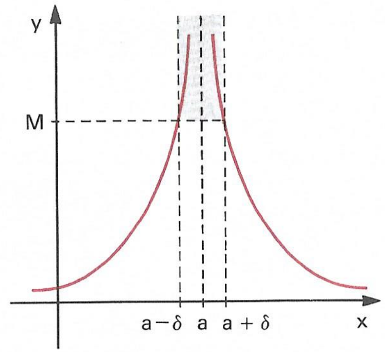


46. *Definição*

Seja I um intervalo aberto que contém o real a. Seja f uma função definida em $I - \{a\}$. Dizemos que, quando x se aproxima de a, $f(x)$ cresce ilimitadamente e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

se, para qualquer número $M > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) > M$.



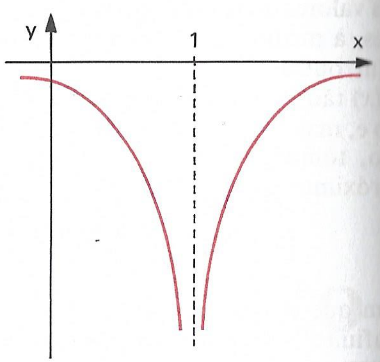
Em símbolos, temos:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) > M)}$$

O símbolo "$+\infty$" não representa nenhum número real mas indica o que ocorre com a função quando x se aproxima de a.

47. Tomemos agora a função g como sendo o oposto da função f, isto é, $g(x) = -f(x) = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ definida para todo x real e $x \neq 1$.

Os valores da função g são opostos dos valores da função f. Assim, para a função g, quando x se aproxima de 1, os valores de $g(x)$ decrescem ilimitadamente. Em outras palavras, podemos tornar os valores de $g(x)$ tanto menores quanto desejarmos, isto é, menores que qualquer número negativo, tomando valores de x bastante próximos de 1, e escrevemos:



$$\lim_{x \to 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$$

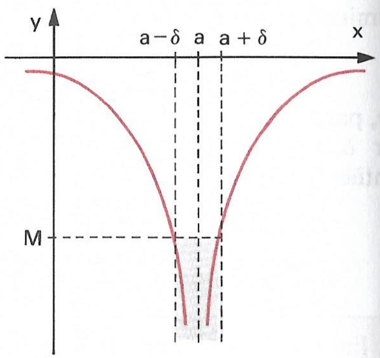
o símbolo "$-\infty$" lê-se "menos infinito" ou "infinito negativo".

48. *Definição*

Seja I um intervalo aberto que contém a. Seja f uma função definida em $I - \{a\}$. Dizemos que, quando x se aproxima de a, $f(x)$ decresce ilimitadamente e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

se, para qualquer número $M < 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) < M$.



Em símbolos, temos:

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x-a| < \delta \implies f(x) < M)}$$

Insistimos novamente em observar que o símbolo "$-\infty$" não representa nenhum número real, mas indica o que ocorre com a função quando x se aproxima de a.

49. Consideremos agora a função h definida por $h(x) = \dfrac{1}{x-1}$ para todo x real e $x \neq 1$.

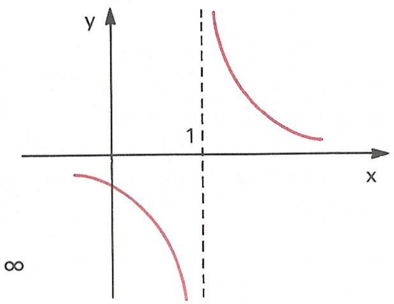
Atribuindo a x valores próximos de 1, porém menores que 1, temos:

x	0	0,5	0,75	0,9	0,99	0,999
h(x)	−1	−2	−4	−10	−100	−1 000

e atribuindo a x valores próximos de 1, porém maiores que 1, temos:

x	2	1,5	1,25	1,1	1,01	1,001
h(x)	1	2	4	10	100	1 000

Observemos que se x assume valores próximos de 1, à esquerda de 1, os valores da função decrescem ilimitadamente e se x assume valores próximos de 1, à direita de 1, então os valores da função crescem ilimitadamente. Estamos considerando os limites laterais que são "infinitos" e escrevemos:



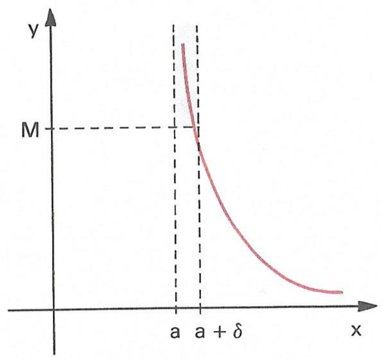
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

50. *Definição*

Seja I um intervalo aberto que contém a e seja f uma função definida em $I - \{a\}$. Dizemos que, quando x se aproxima de a por valores maiores que a, $f(x)$ cresce ilimitadamente, e escrevemos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

se, qualquer que seja o número $M > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $0 < x - a < \delta$ então $f(x) > M$.



Em símbolos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < x - a < \delta \implies f(x) > M)$$

Coloquemos com símbolos as definições de $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < x - a < \delta \implies f(x) < M)$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \implies f(x) > M)$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \exists \delta > 0 \mid -\delta < x - a < 0 \implies f(x) < M)$$

Para concluirmos que os valores de uma função cresciam infinitamente ou decresciam infinitamente, quando x se aproximava de a, pela esquerda ou pela direita de a, construímos uma tabela de valores da função quando x estava próximo de a. Vejamos como chegar à mesma conclusão sem construirmos essa tabela.

51. *Teorema*

Sejam f e g funções tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c \neq 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$. Então:

I) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ se $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando x está próximo de a;

II) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ se $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$ quando x está próximo de a.

Demonstração

Faremos a demonstração de I e deixaremos a prova de II, que é feita de modo análogo, a cargo do leitor. Para demonstrar que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ devemos mostrar:

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) > M$$

Vamos considerar dois casos:

1º caso: Supondo $c > 0$

Por hipótese temos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c > 0$, isto é:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - c| < \epsilon$$

Tomemos $\epsilon = \dfrac{c}{2}$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - c| < \frac{c}{2}$$

ou seja:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies -\frac{c}{2} < f(x) - c < \frac{c}{2}$$

ou ainda:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies \frac{c}{2} < f(x) < \frac{3c}{2}$$

Assim, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies f(x) > \frac{c}{2} > 0 \quad (1)$$

isto é, $f(x) > 0$ quando x está próximo de a.

Mas, por hipótese, $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando x está próximo de a, então $g(x) > 0$ quando x está próximo de a.

Pela definição de $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, temos:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x)| < \epsilon$$

mas $|g(x)| = g(x)$ já que $g(x) > 0$ quando x está próximo de a. Então:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies g(x) < \epsilon \quad (2)$$

Com base nas afirmações (1) e (2), podemos concluir que para qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{c}{2\epsilon}$$

Assim, dado $M > 0$, seja $\epsilon = \dfrac{c}{2M}$ e $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ em que δ_1 e δ_2 são números positivos que satisfazem (1) e (2) respectivamente. Então: dado $M > 0$, $\exists\,\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{c}{2\epsilon} = \frac{c}{\frac{2c}{2M}} = M$$

o que prova que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

2º caso: Supondo $c < 0$

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c < 0$, então $\lim\limits_{x \to a} [-f(x)] = -c > 0$ e, se $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$ quando x está próximo de a, então $\dfrac{-f(x)}{-g(x)} > 0$ quando x está próximo de a.

Considerando as funções h e j tais que $h(x) = -f(x)$ para todo x do domínio de f e $j(x) = -g(x)$ para todo x do domínio de g, temos pelo primeiro caso já demonstrado

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{j(x)} = +\infty$$

mas $\dfrac{h(x)}{j(x)} = \dfrac{-f(x)}{-g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

Observação: Este teorema continua válido se "$x \longrightarrow a$" for substituído por "$x \longrightarrow a^+$" ou "$x \longrightarrow a^-$".

EXERCÍCIOS

69. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x + 2}{(x - 1)^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2}$

Solução

a) Como $\lim\limits_{x \to 1} (3x + 2) = 5$ e $\lim\limits_{x \to 2} (x - 1)^2 = 0$, estudemos o sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x + 2}{(x - 1)^2}$ quando x está próximo de 1.

		$-2/3$		1	x
sinal de $f(x) = 3x + 2$	$-$	0	$+$		$+$
sinal de $g(x) = (x - 1)^2$	$+$		$+$	0	$+$
sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x + 2}{(x - 1)^2}$	$-$	0	$+$		$+$

Notemos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x + 2}{(x - 1)^2} > 0$ quando x está próximo de 1. Então:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x + 2}{(x - 1)^2} = +\infty$$

b) Como $\lim\limits_{x \to 2} (1 - x) = -1$ e $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2)^2 = 0$, estudemos o sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2}$ quando x está próximo de 2.

		1		2	x
sinal de $f(x) = 1 - x$	$+$	0	$-$		$-$
sinal de $g(x) = (x - 2)^2$	$+$		$+$	0	$+$
sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2}$	$+$	0	$-$		$-$

Notemos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1 - x}{(x - 2)^2} < 0$ quando x está próximo de 2. Então:

$$\lim_{x \to 2} \frac{1 - x}{(x - 2)^2} = -\infty$$

70. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 4}{(x - 2)^2}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 3}{(x - 1)^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - 3x}{(x - 1)^2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{x^2}$

e) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{5x + 2}{|x + 1|}$

f) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{|x + 2|}$

71. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

b) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

Solução

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 1) = \lim\limits_{x \to 1^+} (2x + 1) = 3$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} (x - 1) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 1) = 0$,

estudemos o sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$ quando x está próximo de 1.

		$-1/2$		1	x
sinal de $f(x) = 2x + 1$	$-$	0	$+$		$+$
sinal de $g(x) = x - 1$	$-$		$-$	0	$+$
sinal de $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$	$+$	0	$-$		$+$

Notemos que $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x + 1}{x - 1} < 0$ quando x está próximo de 1, à esquerda. Então:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{2x + 1}{x - 1} = -\infty$$

e $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{2x + 1}{x - 1} > 0$ quando x está próximo de 1, à direita. Então:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{2x + 1}{x - 1} = +\infty$$

Observemos que não tem significado falarmos em $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x + 1}{x - 1}$, pois

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x + 1}{x - 1} = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x + 1}{x - 1} = +\infty$.

72. Determine:

a) $\lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x + 4}{x + 2}$

b) $\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x + 4}{x + 2}$

c) $\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1 - 2x}{x - 3}$

d) $\lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1 - 2x}{x - 3}$

e) $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^-} \dfrac{3x + 2}{5 - 2x}$

f) $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^+} \dfrac{3x + 2}{5 - 2x}$

g) $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x + 3}{(x - 1)^3}$

h) $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x + 3}{(x - 1)^3}$

i) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{(2 - x)^3}$

j) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{(2 - x)^3}$

73. Mostre pela definição que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$.

74. Mostre pela definição que:

a) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$

II. Propriedades dos limites infinitos

Veremos a seguir dez teoremas cujos enunciados serão apresentados com o símbolo "$x \to a$", mas que serão válidos se trocarmos esse símbolo por "$x \to a^-$" ou "$x \to a^+$".

52. *Teorema*

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$.

Demonstração

Para provarmos que $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$, devemos provar

$$\forall M > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies (f + g)(x) > M$$

mas $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, isto é, se tomamos $\frac{M}{2} > 0$, temos:

$$\forall \frac{M}{2} > 0, \ \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_1 \implies f(x) > \frac{M}{2}$$

e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, isto é, se tomamos $\frac{M}{2} > 0$, temos:

$$\forall \frac{M}{2} > 0, \ \exists \delta_2 > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta_2 \implies g(x) > \frac{M}{2}$$

Então, considerando $\delta = min \{\delta_1, \delta_2\}$, temos:

$$\forall M > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) + g(x) > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$

53. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = -\infty$.
A demonstração deste teorema é feita de modo análogo ao teorema anterior; deixaremos a cargo do leitor.

54. Observação

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} i(x) = -\infty$, não podemos estabelecer uma lei geral para os seguintes limites:

$\lim\limits_{x \to a}(f - g)(x)$, $\lim\limits_{x \to a} (h - i)(x)$ e $\lim\limits_{x \to a} (f + h)(x)$.

Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = \frac{1}{x^4}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2}$ definidas para todo x real e $x \neq 0$. Observemos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

e calculemos:

$$\lim_{x \to 0} (f - g)(x) = \lim_{x \to 0}(f(x) - g(x)) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - x^2}{x^4}\right) = +\infty$$

Se considerarmos as funções

$f(x) = \frac{1}{x - 1}$ e $g(x) = \frac{3}{x^3 - 1}$ definidas em $\mathbb{R} - \{1\}$, teremos

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x - 1} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{3}{x^3 - 1} = +\infty.$$

Mas:

$$\lim_{x \to 1^+} (f - g)(x) = \lim_{x \to 1^+} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{3}{x^3 - 1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} = 1$$

55. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \neq 0$, então:

I) se $b > 0$, $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$

II) se $b < 0$, $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$

Demonstração

Faremos apenas a demonstração de I.
Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b > 0$, então existem $\alpha > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que se $0 < |x - a| < \delta_1$ então $g(x) > \alpha$.

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, então existem $\frac{M}{\alpha} > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que se $0 < |x - a| < \delta_2$ então $f(x) > \frac{M}{\alpha}$.

Considerando $\delta = min \{\delta_1, \delta_2\}$, decorre que, para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) > \frac{M}{\alpha} \cdot \alpha = M$.

56. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \neq 0$, então:

I) se $b > 0$, então $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$

II) se $b < 0$, então $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$

A demonstração deste teorema ficará como exercício.

57. Observação

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, em que g não é função nula, não podemos formular uma lei geral para $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x)$.

Por exemplo, consideremos as funções $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e $f_2(x) = \dfrac{1}{x^4}$ definidas em $\mathbb{R}^*$ e as funções $g_1(x) = x^4$ e $g_2(x) = x^2$ definidas em $\mathbb{R}$.

Observemos que:

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} g_1(x) = \lim_{x\to 0} x^4 = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0} g_2(x) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Mas:

$$\lim_{x\to 0} (f_1 \cdot g_1)(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} \cdot x^4\right) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{x\to 0} (f_2 \cdot g_2)(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^4} \cdot x^2\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

58. Teorema

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Demonstração

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, então existem $\sqrt{M} > 0$ e $\delta_1 > 0$ tais que, se $0 < |x - a| < \delta_1$, então $f(x) > \sqrt{M}$; e se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$, então existem $\sqrt{M} > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que, se $0 < |x - a| < \delta_2$, então $g(x) > \sqrt{M}$.

Considerando $\delta = min\ \{\delta_1, \delta_2\}$, temos para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ então $f(x) \cdot g(x) > \sqrt{M} \cdot \sqrt{M} = M$.

59. Teorema

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$.

A demonstração deste teorema é feita de modo análogo à do teorema anterior; portanto, ficará como exercício.

60. Teorema

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Demonstrar este teorema a título de exercício.

61. Observação

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), então não podemos estabelecer uma lei geral para $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $g(x) = \dfrac{1}{x^4}$ e $h(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ definidas em $\mathbb{R}^*$.

Observemos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty \text{ e}$$

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

Mas:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^4}}\right) = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{1}{x^4}}{\frac{-1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{h}{f}\right)(x) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0} (-1) = -1$$

62. *Teorema*

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Demonstração

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, então existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $f(x) > M$.

Mas:

$$f(x) > M > 0 \iff |f(x)| > M \iff \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{M}$$

Tomando $\epsilon = \dfrac{1}{M}$, temos para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $\left|\dfrac{1}{f(x)} - 0\right| < \epsilon$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

63. *Teorema*

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

A demonstração ficará a cargo do leitor.

64. *Teorema*

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, então $\lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = +\infty$.

Demonstração

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, então existem $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tais que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x)| < \epsilon$.

Mas:

$$|f(x)| < \epsilon \iff \left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\epsilon}$$

Tomando $M = \dfrac{1}{\epsilon}$, temos para todo $M > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| > M$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = +\infty$.

65. *Observação*

Se existir δ tal que para todo x que satisfaça $0 < |x - a| < \delta$ tenhamos $f(x) > 0$, então $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = +\infty$.

Se existir δ tal que para todo x que satisfaça $0 < |x - a| < \delta$ tenhamos $f(x) < 0$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to a} -\left|\frac{1}{f(x)}\right| = -\infty$$

66. Antes de prosseguirmos, façamos um resumo dos teoremas apresentados, lembrando que as proposições permanecerão válidas se substituirmos o símbolo "$x \to a$" por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Dados		**Conclusão**
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ -\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = b \neq 0$	$\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 0 \\ +\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$		$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$		$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$		$\lim\limits_{x \to a} \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = +\infty$

Não poderemos estabelecer uma lei para os seguintes casos:

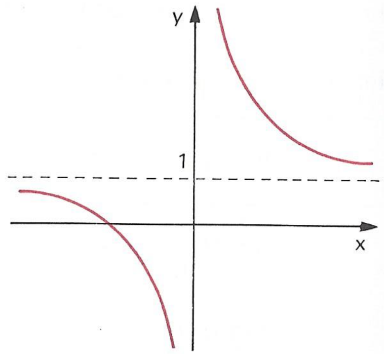
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f-g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to a} (f\cdot g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ (ou $+\infty$)	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = ?$

III. Limites no infinito

67. Seja a função f definida por $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$ para todo x real e $x \neq 0$. Atribuindo a x os valores *1, 5, 10, 100, 1 000, 10 000* e assim por diante, de tal forma que x cresça ilimitadamente, temos:

x	1	5	10	100	1 000	10 000
f(x)	3	1,4	1,2	1,02	1,002	1,0002

Observamos que, à medida que x cresce através de valores positivos, os valores da função f se aproximam cada vez mais de *1*, isto é, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de *1* quanto desejarmos, se atribuirmos a x valores cada vez maiores.



Escrevemos, então:

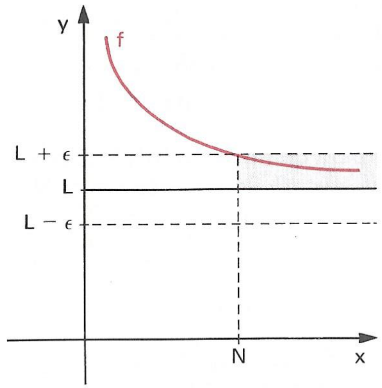
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x} = 1$$

68. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]a, +\infty[$. Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ se aproxima de L e escrevemos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $N > 0$ tal que se $x > N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.



Em símbolos, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff (\forall\epsilon > 0,\ \exists N > 0 \mid x > N \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

69. Consideremos novamente a função $f(x) = \dfrac{x+2}{x}$. Atribuindo a x os valores *−1, −5, −10, −100, −1 000, −10 000* e assim por diante, de tal forma que x decresça ilimitadamente, temos:

x	−1	−5	−10	−100	−1 000	−10 000
f(x)	−1	0,6	0,8	0,98	0,998	0,9998

Observamos que, à medida que x decresce com valores negativos, os valores da função se aproximam cada vez mais de *1*, isto é, podemos tornar $f(x)$ tão próximo de *1* quanto desejarmos, se atribuirmos a x valores cada vez menores. Escrevemos, então:

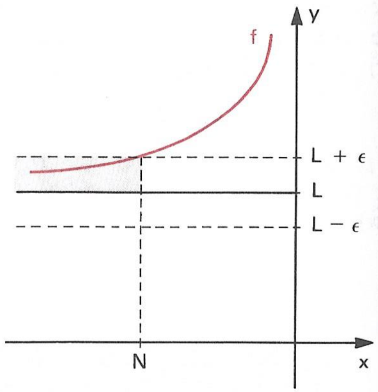
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x} = 1$$

70. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]-\infty, a[$. Dizemos que, quando x decresce ilimitadamente, $f(x)$ aproxima-se de L, e escrevemos

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

se, para qualquer número $\epsilon > 0$, existir $N < 0$ tal que se $x < N$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.



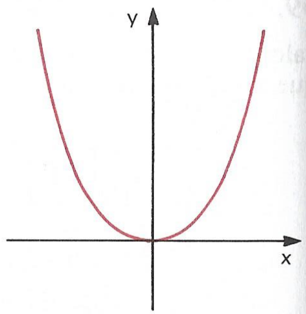
Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff (\forall \epsilon > 0,\ \exists N < 0 \mid x < N \implies |f(x) - L| < \epsilon)$$

71. Seja a função $f(x) = x^2$, definida para todo x real.

Atribuindo a x os valores *1, 5, 10, 100, 1 000* e assim sucessivamente, de tal forma que x cresça ilimitadamente, temos:

x	1	5	10	100	1 000
f(x)	1	25	100	10 000	1 000 000



Observamos que, à medida que x cresce através de valores positivos, os valores da função também crescem e ilimitadamente. Em outras palavras, dizemos que podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando para x valores suficientemente grandes, e escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

72. Se agora atribuirmos a x os valores *−1, −5, −10, −100, −1 000* e assim sucessivamente, de tal forma que x decresça ilimitadamente, temos:

x	−1	−5	−10	−100	−1 000
f(x)	1	25	100	10 000	1 000 000

Observamos que, à medida que x decresce através de valores negativos, os valores da função crescem e ilimitadamente. Em outras palavras, dizemos que podemos tornar $f(x)$ tão grande quanto desejarmos, isto é, maior que qualquer número positivo, tomando para x valores negativos cujos módulos sejam suficientemente grandes, e escrevemos:

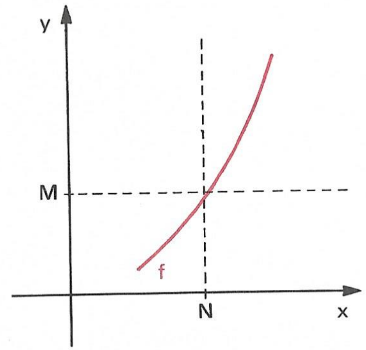
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

73. Definições

Seja f uma função definida em um intervalo aberto $]a, +\infty[$. Dizemos que, quando x cresce ilimitadamente, $f(x)$ cresce também ilimitadamente, e escrevemos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se, para qualquer número $M > 0$, existir $N > 0$ tal que se $x > N$ então $f(x) > M$.



Em símbolos, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0,\ \exists N > 0 \mid x > N \implies f(x) > M)$$

Coloquemos com símbolos as definições de:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0,\ \exists N > 0 \mid x > N \implies f(x) < M)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall M > 0, \ \exists N < 0 \mid x < N \implies f(x) > M)$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M < 0, \ \exists N < 0 \mid x < N \implies f(x) < M)$$

Para concluirmos algo com relação ao comportamento dos valores da função quando x crescia ou decrescia ilimitadamente, construímos uma tabela de valores de x e $f(x)$. Vejamos como chegar à mesma conclusão, sem construirmos essa tabela.

74. *Teorema*

Se $c \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} c = \lim\limits_{x \to -\infty} c = c$.

Demonstração

A demonstração é bastante simples, já que

$\forall \epsilon > 0, \ \exists N > 0 \mid x > N \implies 0 = |c - c| < \epsilon$

é trivialmente verdadeira e portanto:

$$\lim_{x \to +\infty} c = c$$

75. *Teorema*

Se n é um número inteiro e positivo, então:

I) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$

II) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$

Demonstração

Faremos a demonstração de II por indução sobre n.

1º caso: n é ímpar

A proposição é verdadeira para $n = 1$, pois

$(\forall M < 0, \ \exists M < 0 \mid x < M \implies x < M) \implies \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty.$

Supondo que a proposição seja verdadeira para $n = p$, mostremos que é verdadeira para $n = p + 2$, isto é, se $\lim\limits_{x \to -\infty} x^p = -\infty$ então $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{p+2} = -\infty$.

De fato, por aplicações sucessivas dos teoremas já vistos, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} x^{p+2} = \lim_{x \to -\infty} (x^p \cdot x^2) = \lim_{x \to -\infty} x^p \cdot \lim_{x \to -\infty} x^2$$

Mas $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x \cdot \lim\limits_{x \to -\infty} x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} x^p = -\infty$. Portanto, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^{p+2} = -\infty$.

As demonstrações para o caso em que n é par e da parte I ficam como exercícios.

76. *Teorema*

Se n é um número inteiro positivo, então:

I) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

II) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$

Demonstração

Fica como exercício.

77. *Teorema*

Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, é uma função polinomial, então:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (a_nx^n) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (a_nx^n)$$

Demonstração

Por aplicações sucessivas das propriedades e teoremas, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[a_nx^n \left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \ldots + 1\right)\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (a_nx^n) \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \ldots + 1\right) = \lim_{x \to +\infty} (a_nx^n)$$

pois:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_0}{a_nx^n}+\frac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\frac{a_2}{a_nx^{n-2}}+\ldots+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0}{a_n}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}+\lim_{x\to+\infty}\frac{a_1}{a_n}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-1}}+$$

$$+\lim_{x\to+\infty}\frac{a_2}{a_n}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{n-2}}+\ldots+\lim_{x\to+\infty}1=1$$

78. *Teorema*

Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, e $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$, $b_m \neq 0$, são funções polinomiais, então:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)$$

Demonstração

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n\left(\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+\ldots+1\right)}{b_mx^m\left(\dfrac{b_0}{b_mx^m}+\dfrac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\dfrac{b_2}{b_mx^{m-2}}+\ldots+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_nx^n}{b_mx^m}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{a_0}{a_nx^n}+\dfrac{a_1}{a_nx^{n-1}}+\dfrac{a_2}{a_nx^{n-2}}+\ldots+1}{\dfrac{b_0}{b_mx^m}+\dfrac{b_1}{b_mx^{m-1}}+\dfrac{b_2}{b_mx^{m-2}}+\ldots+1}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}\cdot x^{n-m}\right)\cdot 1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}\right)$$

EXERCÍCIOS

75. Encontre:

a) $\lim_{x\to+\infty}(4x^2-7x+3)$

b) $\lim_{x\to+\infty}(-3x^3+2x^2-5x+3)$

c) $\lim_{x\to-\infty}(5x^3-4x^2-3x+2)$

d) $\lim_{x\to-\infty}(3x^4-7x^3+2x^2-5x-4)$

Solução

a) $\lim_{x\to+\infty}(4x^2-7x+3)=\lim_{x\to+\infty}(4x^2)=+\infty$

b) $\lim_{x\to+\infty}(-3x^3+2x^2-5x+3)=\lim_{x\to+\infty}(-3x^3)=-\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty}(5x^3-4x^2-3x+2)=\lim_{x\to-\infty}(5x^3)=-\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty}(3x^4-7x^3+2x^2-5x-4)=\lim_{x\to-\infty}(3x^4)=+\infty$

76. Encontre:

a) $\lim_{x\to+\infty}(2x+3)$

b) $\lim_{x\to-\infty}(4-5x)$

c) $\lim_{x\to+\infty}(5x^2-4x+3)$

d) $\lim_{x\to+\infty}(4-x^2)$

e) $\lim_{x\to-\infty}(3x^3-4)$

f) $\lim_{x\to-\infty}(8-x^3)$

77. Encontre:

a) $\lim_{x\to+\infty}(x^n-1)$, $n \in \mathbb{N}^*$

b) $\lim_{x\to-\infty}(1-x^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

c) $\lim_{x\to+\infty}(c\cdot x)$, $c \in \mathbb{R}^*$

d) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{c}\right)$, $c \in \mathbb{R}^*$

78. Encontre:

a) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-2x+2}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x+5}$

79. Encontre:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+2}{5x-1}$

b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5-4x}{2x-3}$

c) $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-4x+3}{3x+2}$

d) $\lim_{x\to-\infty}\frac{4x-1}{3x^2+5x-2}$

Solução

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+2}{5x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{5x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{5}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5-4x}{2x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-4x}{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-2) = -2$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2-4x+3}{3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x}{3} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-1}{3x^2+5x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4}{3x} = 0$

80. Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3-2x}{5x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x-3}{3x+2}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-4}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3-1}{x^2+1}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+4}{3x^3+5x^2-6x+2}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4}{8x^3-1}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^3-x^3}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-3)^3}{x(x+1)(x+2)}$

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x+2)^3}{2x(3x+1)(4x-1)}$

j) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-3)^3(3x-2)^2}{x^5}$

k) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(x+2)^4-(x-1)^4}{(2x+3)^3}$

81. Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1}$

Solução

Observemos que:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x+2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty$ e não têm significado os símbolos $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ e $\dfrac{+\infty}{-\infty}$.

Notemos que:

$$\frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}}{x+1} = \frac{|x|\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

e portanto:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\cdot\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

e $$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x+2}}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = -1$$

82. Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-3x-5}{\sqrt{x^4+1}}$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2-3x-5}{\sqrt{x^4+1}}$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{1+x\sqrt{x}}$

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3-1000}}$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$

83. Encontre $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+3x+2}-x)$.

Solução

Observemos que

$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+3x+2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} (x) = +\infty$, mas carece de significado o símbolo $(+\infty)-(+\infty)$.

Para obtermos o limite procurado, multiplicamos e dividimos $(\sqrt{x^2+3x+2}-x)$ por $(\sqrt{x^2+3x+2}+x)$. Assim, temos:

$$\sqrt{x^2+3x+2}-x = \frac{(\sqrt{x^2+3x+2}-x)(\sqrt{x^2+3x+2}+x)}{\sqrt{x^2+3x+2}+x} =$$

$$= \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x}$$

Notemos que $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x+2) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}+x) = +\infty$

e o símbolo $\frac{+\infty}{+\infty}$ não tem significado. Fazemos então:

$$\frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2}+x} = \frac{x\left(3+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} = \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$$

e portanto:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+1} = \frac{3}{2}$$

84. Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}-x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+3x+4}-x)$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-2})$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x)$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-4x+5}-\sqrt{x^2-3x+4})$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+4})$

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax+b}-x)$

85. Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sqrt[3]{x^3-5x^2-2}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x+4}-x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$

86. Encontre:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{4x+1}}$

87. Mostre pela definição que:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2 = +\infty$

88. Mostre pela definição que:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3 = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3 = -\infty$

IV. Propriedades dos limites no infinito

Veremos em seguida dez teoremas cujos enunciados serão apresentados com o símbolo "$x \longrightarrow +\infty$" e não perdem a validade se esse símbolo for trocado por "$x \longrightarrow -\infty$". Estes teoremas são basicamente os apresentados nas *propriedades dos limites infinitos*, com adaptações para aplicações de limites no infinito.

79. *Teorema*

Se $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}(f+g)(x) = +\infty$.

Demonstração

Para provarmos que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f+g)(x) = +\infty$, devemos provar:

$\forall M > 0,\ \exists N > 0 \mid x > N \implies (f+g)(x) > M$

Temos, por hipótese

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = +\infty$, isto é, se tomamos $\frac{M}{2} > 0$, vem:

$$\forall \frac{M}{2} > 0, \ \exists N_1 > 0 \mid x > N_1 \implies f(x) > \frac{M}{2}$$

e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, isto é, se tomamos $\frac{M}{2} > 0$, temos:

$$\forall \frac{M}{2} > 0, \ \exists N_2 > 0 \mid x > N_2 \implies g(x) > \frac{M}{2}$$

então, considerando $N = max\ \{N_1, N_2\}$, decorre:

$$\forall M > 0, \ \exists N > 0 \mid x > N \implies f(x) + g(x) > \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$$

Faremos a apresentação dos enunciados dos demais teoremas e deixaremos a cargo do aluno as demonstrações.

80. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f + g) = -\infty$.

Observação

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = -\infty$, não podemos estabelecer uma lei geral para os seguintes limites

$$\lim_{x \to +\infty} (f - g), \quad \lim_{x \to +\infty} (h - i)(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (f + h)(x)$$

Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 3x + 5$ definidas para todo x real. Observemos que

$$\lim_{x \to +\infty} (3x - 2) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (3x + 5) = +\infty$$

e calculemos:

$$\lim_{x \to +\infty} (f - g)(x) = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} [(3x - 2) - (3x + 5)] = \lim_{x \to +\infty} (-7) = -7$$

Se considerarmos as funções $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$ e $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$ definidas para todo x real, teremos:

$$\lim_{x \to +\infty} (3x^2 - 7x + 1) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} (2x^2 + 2x - 3) = +\infty$$

mas $\lim\limits_{x \to +\infty} (f - g)(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] =$

$$= \lim_{x \to +\infty} [(3x^2 - 7x + 1) - (2x^2 + 2x - 3)] = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 9x + 4) = +\infty$$

81. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = b \neq 0$, então:

I) se $b > 0$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$

II) se $b < 0$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = -\infty$.

82. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = b \neq 0$, então:

I) se $b > 0$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = -\infty$

II) se $b < 0$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Observação

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, em que g não é a função nula, então não podemos formular uma lei geral para $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x)$.

Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = 2x + 1$ e $h(x) = x^2 - 4$ definidas em $\mathbb{R}$ e a função $g(x) = \frac{1}{x - 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$.

Observemos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x - 1} = 0$$

mas

$$\lim_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to +\infty} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} (h \cdot g)(x) = \lim_{x \to +\infty} [h(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = +\infty$$

83. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

84. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = -\infty$.

85. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$.

Observação

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$) e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), não podemos estabelecer uma lei geral para $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

Por exemplo, consideremos as funções $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = 3x - 4$ e $h(x) = x^2 - 4x + 3$ definidas em $\mathbb{R}$.

Notemos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2x - 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (3x - 4) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 4x + 3) = +\infty$$

mas

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 3}{3x - 4} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{h}{g}\right)(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{h(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{3x - 4} = +\infty$$

86. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

87. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

88. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = +\infty$.

Observação

Se existir $N > 0$ tal que para todo $x > N$ tenhamos $f(x) > 0$, então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ou se existir $N > 0$ tal que para todo $x > N$ tenhamos $f(x) < 0$, então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{f(x)} = -\infty$$

89. Resumo

Faremos agora um resumo dos teoremas apresentados, lembrando que as proposições continuam verdadeiras se trocarmos o símbolo "$x \to +\infty$" por "$x \to -\infty$".

Dados		Conclusão
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f + g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to -\infty} (f + g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = b \neq 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ -\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = b \neq 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 0 \\ +\infty & \text{se } b < 0 \end{cases}$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = -\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$		$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$		$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$		$\lim\limits_{x \to +\infty} \left|\dfrac{1}{f(x)}\right| = +\infty$

Não podemos estabelecer uma lei para os seguintes casos:

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f - g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f - g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f + g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$	$\lim\limits_{x \to +\infty} (f \cdot g)(x) = ?$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (ou $-\infty$)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = ?$

CAPÍTULO IV

Complementos sobre Limites

I. Teoremas adicionais sobre limites

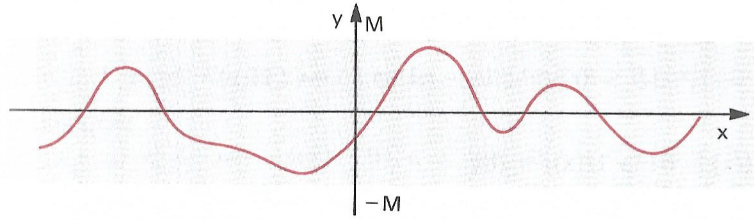
90. *Função limitada*

Definição

Dizemos que uma função f, definida em A, é limitada em $B \subset A$ se existir um número $M > 0$ tal que, para todo x pertencente a B, temos $|f(x)| < M$, isto é, $-M < f(x) < M$.

Em símbolos:

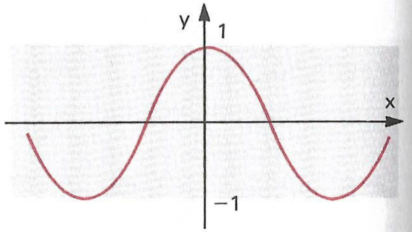
$$\boxed{f \text{ é limitada em } B \iff (\exists\, M > 0 \mid x \in B \implies |f(x)| < M)}$$



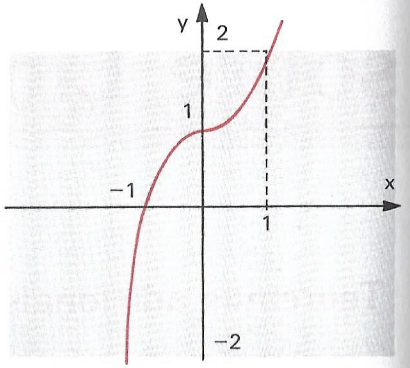
Decorre da definição que, se f é limitada em B, então existem a e b reais tais que, para todo $x \in B$, vale $a < f(x) < b$.

Exemplos

1º) A função $f(x) = \cos x$ é limitada em $\mathbb{R}$, pois $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$.



2º) A função $f(x) = x^3 + 1$ não é limitada em $\mathbb{R}$ mas é limitada no intervalo $[-1, 1]$, pois $-2 \leqslant x^3 + 1 \leqslant 2$ para todo $x \in [-1, 1]$.



91. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, então existe um intervalo aberto I contendo a, tal que f é limitada em $I - \{a\}$.

Demonstração

Devemos provar que se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ então existem $M > 0$ e $\delta > 0$ tais que se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x)| < M$.

De fato, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, tomando $\epsilon = 1$ na definição de limite, temos:

$$\epsilon = 1, \quad \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < 1$$

mas

$$|f(x) - b| \geqslant |f(x)| - |b|$$

e portanto:

$$|f(x) - b| < 1 \implies |f(x)| - |b| \leqslant 1 \implies |f(x)| \leqslant |b| + 1$$

pondo $M = |b| + 1$, temos:

$$\exists M > 0, \quad \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x)| \leqslant M$$

92. Teorema da conservação do sinal

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \neq 0$, então existe um intervalo aberto I contendo a, tal que f conserva o mesmo sinal de b em $I - \{a\}$.

Demonstração

Sendo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, tomando $\epsilon = \dfrac{|b|}{2}$ na definição de limite, temos:

$$\epsilon = \frac{|b|}{2}, \quad \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - b| < \frac{|b|}{2} \implies$$

$$\implies b - \frac{|b|}{2} < f(x) < b + \frac{|b|}{3}$$

Se $b > 0$, então, para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta$, vem

$$f(x) > b - \frac{|b|}{2} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} > 0 \implies f \text{ tem o mesmo sinal de } b.$$

Se $b < 0$, então, para todo x tal que $0 < |x - a| < \delta$, vem

$$f(x) < b + \frac{|b|}{2} = b - \frac{b}{2} = \frac{b}{2} < 0 \implies f \text{ tem o mesmo sinal de } b.$$

93. Teorema do confronto

Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ e se f é tal que $g(x) < f(x) < h(x)$ para todo $x \in I - \{a\}$, em que I é intervalo aberto que contém a, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Demonstração

Sendo $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, então, para todo $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |g(x) - b| < \epsilon \implies b - \epsilon < g(x) < b + \epsilon$$
$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |h(x) - b| < \epsilon \implies b - \epsilon < h(x) < b + \epsilon$$

Sendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \implies b - \epsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < b + \epsilon \implies$$

$$\implies b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

isto é:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

"Se $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = b$ e se f é tal que $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ para todo $x \in]a, +\infty[$ então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$."

Demonstração

Sendo $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = b$, então para todo $\epsilon > 0$ existem $N_1 > 0$ e $N_2 > 0$ tais que

$$x > N_1 \implies |g(x) - b| < \epsilon \implies b - \epsilon < g(x) < b + \epsilon$$
$$x > N_2 \implies |h(x) - b| < \epsilon \implies b - \epsilon < h(x) < b + \epsilon$$

Sendo $N = max\,\{N_1, N_2\}$, para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$x > N \implies b - \epsilon < g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x) < b + \epsilon \implies$$
$$\implies b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon \implies |f(x) - b| < \epsilon$$

isto é, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Obs.: O teorema continua válido se substituirmos "$x \to +\infty$" por "$x \to -\infty$" e $]a, +\infty[$ por $]-\infty, a[$.

94. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, com $b < c$, então existe um intervalo aberto I contendo a, tal que $f(x) < g(x)$ em $I - \{a\}$.

Demonstração

Sendo $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ e tomando $\epsilon = \dfrac{c - b}{2}$ na definição de limite, decorre que existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:

$$0 < |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - b| < \frac{c - b}{2} \implies \frac{3b - c}{2} < f(x) < \frac{b + c}{2}$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - c| < \frac{c - b}{2} \implies \frac{b + c}{2} < g(x) < \frac{3c - b}{2}$$

Tomando $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\}$, temos:

$$\exists\, \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies f(x) < \frac{b + c}{2} < g(x) \implies f(x) < g(x)$$

II. Limites trigonométricos

95. Teorema

$$\lim_{x \to a} \text{sen } x = \text{sen } a, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$$

Demonstração

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to a} sen\ x = sen\ a$, provemos que $\lim\limits_{x \to a} (sen\ x - sen\ a) = 0$, já que $\lim\limits_{x \to a} sen\ x = sen\ a \iff \lim\limits_{x \to a} (sen\ x - sen\ a) = 0$.

Temos, da Trigonometria,

$$0 \leqslant |\text{sen } x - \text{sen } a| = \left|2 \text{ sen } \frac{x - a}{2} \cdot \cos \frac{x + a}{2}\right| = \left|2 \cos \frac{x + a}{2}\right| \cdot \left|\text{sen } \frac{x - a}{2}\right|$$

mas $\left|\text{sen } \dfrac{x - a}{2}\right| \leqslant \left|\dfrac{x - a}{2}\right|$ e $\left|2 \cos \dfrac{x + a}{2}\right| \leqslant 2$.

Então:

$$0 \leqslant |\text{sen } x - \text{sen } a| \leqslant 2\left|\frac{x - a}{2}\right| \implies 0 \leqslant |\text{sen } x - \text{sen } a| \leqslant |x - a|$$

Considerando as funções $g(x) = 0, f(x) = |sen\ x - sen\ a|$ e $h(x) = |x - a|$ e notando que

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} 0 = 0$$
$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} |x - a| = 0.$$

Segue-se pelo teorema do confronto que $\lim\limits_{x \to a} |sen\ x - sen\ a| = 0$ e, portanto, $\lim\limits_{x \to a} |sen\ x - sen\ a| = 0$, ou seja, $\lim\limits_{x \to a} sen\ x = sen\ a$.

96. Teorema

$$\lim_{x \to a} \cos x = \cos a, \ \forall\, a \in \mathbb{R}$$

A demonstração deste teorema, que é feita de modo análogo à do anterior, ficará como exercício.

97. *Teorema*

$$\lim_{x \to a} \text{tg } x = \text{tg } a, \quad \forall a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Demonstração

$$\lim_{x \to a} \text{tg } x = \lim_{x \to a} \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x \to a} \text{sen } x}{\lim\limits_{x \to a} \cos x} = \frac{\text{sen } a}{\cos a} = \text{tg } a$$

98. *Teorema (limite trigonométrico fundamental)*

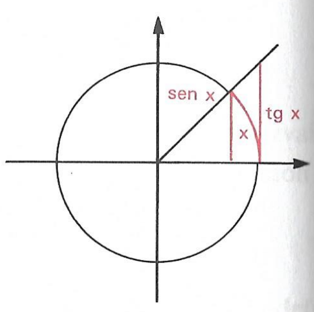
$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

Demonstração

Da Trigonometria, temos:

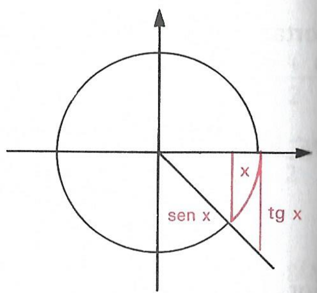
a) $0 < x < \frac{\pi}{2} \implies \text{sen } x < x < \text{tg } x \implies$

$$\implies \frac{1}{\text{sen } x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\text{tg } x} \quad \text{(I)}$$



b) $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \implies \text{sen } x > x > \text{tg } x \implies$

$$\implies \frac{1}{\text{sen } x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\text{tg } x} \quad \text{(II)}$$



Multiplicando as desigualdades (I) e (II) por *sen x*, resulta:

a) $0 < x < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{(\text{sen } x > 0)} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} > \frac{\text{sen } x}{x} > \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} \implies$

$$\implies 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

b) $-\frac{\pi}{2} < x < 0 \xrightarrow{(\text{sen } x < 0)} \frac{\text{sen } x}{\text{sen } x} > \frac{\text{sen } x}{x} > \frac{\text{sen } x}{\text{tg } x} \implies$

$$\implies 1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

Temos, portanto:

para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ e $x \neq 0$: $\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$

Considerando $g(x) = \cos x$, $f(x) = \frac{\text{sen } x}{x}$ e $h(x) = 1$ e notando que

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$

pelo teorema do confronto, resulta: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

EXERCÍCIOS

99. Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Solução

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(2 \cdot \frac{\text{sen } 2x}{2x}\right) = 2 \cdot 1 = 2$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{\text{sen } 3x}{3x} \cdot \frac{5x}{\text{sen } 5x}\right) = \frac{3}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 \cdot (1 + \cos x)} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{(\text{sen } x)^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}\right) = \frac{1}{2}$

90. Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x}{2x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{bx}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } 2x}{3x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } ax}{bx}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sec x}{x^2}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x + \text{sen } x}{x}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x \cdot \text{sen } x}$

91. Encontre $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a}$.

Solução

Da Trigonometria, temos:

$$\text{sen } x - \text{sen } a = 2 \text{ sen } \frac{x - a}{2} \cdot \cos \frac{x + a}{2}$$

Então:

$$\lim_{x \to a} \frac{\text{sen } x - \text{sen } a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2 \text{ sen } \dfrac{x - a}{2} \cdot \cos \dfrac{x + a}{2}}{x - a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \left(\frac{\text{sen } \dfrac{x - a}{2}}{\dfrac{x - a}{2}} \cdot \cos \frac{x + a}{2} \right) = 1 \cdot \cos a = \cos a$$

92. Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x - \cos a}{x - a}$

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\text{tg } x - \text{tg } a}{x - a}$

c) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\sec x - \sec a}{x - a}$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{sen } x - \cos x}{1 - \text{tg } x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } x - \text{sen } x}{\text{sen}^2 x}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 3x - \text{sen } 2x}{\text{sen } x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}(x + a) - \text{sen } a}{x}$

i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x + a) - \cos a}{x}$

j) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 - \text{sen } \dfrac{x}{2}}{\pi - x}$

k) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2 \cos x}{\pi - 3x}$

l) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x^2}{\text{sen } \pi x}$

m) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos 2x}{\cos x - \text{sen } x}$

n) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{\text{sen}^2 x}$

o) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } ax - \text{sen } bx}{x}$

p) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x}$

q) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \text{sen } 2x}{x + \text{sen } 3x}$

r) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

s) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cos \dfrac{\pi x}{2}}{1 - x}$

t) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \text{sen } x} - \sqrt{1 - \text{sen } x}}{x}$

93. Encontre:

a) $\lim\limits_{x \to 0} x \cdot \text{sen } \dfrac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \cdot \text{sen } \dfrac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x) \cdot \text{tg } \dfrac{\pi x}{2}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \text{cotg } 2x \cdot \text{cotg} \left(\dfrac{\pi}{2} - x \right)$

III. Limites da função exponencial

94. *Teorema*

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

Demonstração

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$, devemos provar:

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x| < \delta \implies |a^x - 1| < \epsilon$$

Supondo $a > 1$ e $0 < \epsilon < 1$, temos:

$|a^x - 1| < \epsilon \iff -\epsilon < a^x - 1 < \epsilon \iff 1 - \epsilon < a^x < 1 + \epsilon \iff$
$\iff \log_a (1 - \epsilon) < x < \log_a (1 + \epsilon)$

mas, se $a > 1$ e $0 < \epsilon < 1$, então $\log_a (1 - \epsilon) < 0$ e $\log_a (1 + \epsilon) > 0$ e, portanto:

$\log_a (1 - \epsilon) < x < \log_a (1 + \epsilon) \iff x < \log_a (1 + \epsilon)$ e
$-x < -\log_a (1 - \epsilon) \iff |x| < \log_a (1 + \epsilon)$ e $|x| < -\log_a (1 - \epsilon)$.

Assim, para todo $0 < \epsilon < 1$, existe $\delta = \min \{\log_a (1 + \epsilon), -\log_a (1 - \epsilon)\}$ tal que $0 < |x| < \delta \implies |a^x - 1| < \epsilon$.

Se $a > 1$ e $\epsilon \geqslant 1$, tomamos $\epsilon' < 1 \leqslant \epsilon$ e determinamos
$\delta' = \min \{\log_a (1 + \epsilon'), -\log_a (1 - \epsilon')\}$ tal que
$0 < |x| < \delta' \implies |a^x - 1| < \epsilon' < \epsilon$

Deixaremos a cargo do leitor a demonstração para o caso $0 < a < 1$.

100. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim\limits_{x \to b} a^x = a^b$.

Demonstração

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to b} a^x = a^b$, provemos que $\lim\limits_{x \to b} (a^x - a^b) = 0$.

Provemos inicialmente que $\lim\limits_{x \to b} a^{x-b} = 1$, isto é:

$\forall \epsilon > 0, \delta > 0 \mid 0 < |x - b| < \delta \implies |a^{x-b} - 1| < \epsilon$

Fazendo $x - b = w$, temos:

$\forall \epsilon > 0, \delta > 0 \mid 0 < |w| < \delta \implies |a^w - 1| < \epsilon$

que é verdadeiro pelo teorema anterior.

Mostremos agora que $\lim\limits_{x \to b} (a^x - a^b) = 0$. De fato:

$$\lim_{x \to b} (a^x - a^b) = \lim_{x \to b} [a^b \cdot (a^{x-b} - 1)] =$$
$$= a^b \cdot \lim_{x \to b} (a^{x-b} - 1) = a^b \cdot [\lim_{x \to b} a^{x-b} - 1] = a^b \cdot [1 - 1] = a^b \cdot 0 = 0$$

101. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$.

Demonstração

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$, devemos provar:

$\forall M > 0, \exists N > 0 \mid x > N \implies a^x > M$

Notemos que para todo $M > 0$ temos $a^x > M \iff x > \log_a M$.

Se $M > 1$, tomamos $N = \log_a M > 0$ e segue que, para todo $M > 1$, existe $N = \log_a M > 0$ tal que $x > N \implies a^x > M$.

Se $0 < M < 1$, tomamos $M' > 1 > M$, determinamos $N = \log_a M' > 0$ e segue que, para todo $M < 1$, existe $N = \log_a M' > 0$ tal que $x > N \implies a^x > M$.

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, devemos provar:

$\forall \epsilon > 0, \exists N < 0 \mid x < N \implies |a^x| < \epsilon$

Notemos que:

$|a^x| < \epsilon \iff a^x < \epsilon \iff x < \log_a \epsilon$

Se $0 < \epsilon < 1$, tomamos $N = \log_a \epsilon < 0$ tal que $x < N \implies |a^x| < \epsilon$.

Se $\epsilon > 1$, tomamos $\epsilon' < 1 < \epsilon$, determinamos $N = \log_a \epsilon' < 0$ e segue que, para todo $\epsilon > 1$, existe $N = \log_a \epsilon' < 0$ tal que $x < N \implies$ $\implies |a^x| < \epsilon' < \epsilon$.

102. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

A demonstração deste teorema ficará a cargo do leitor como exercício.

103. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$, então $\lim\limits_{x \to b} a^{f(x)} = 1$.

Demonstração

Considerando que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 0$ e supondo $a > 1$, temos:

1) Dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que
$0 < |x - b| < \delta_1 \implies |f(x)| < \log_a (1 + \epsilon_1) \implies$
$\implies -\log_a (1 + \epsilon_1) < f(x) < \log_a (1 + \epsilon_1)$.

2) Dado $0 < \epsilon_2 < 1$, existe $\delta_2 > 0$ tal que
$0 < |x - b| < \delta_2 \implies |f(x)| < -\log_a (1 - \epsilon_2) \implies$
$\implies \log_a (1 - \epsilon_2) < f(x) < -\log_a (1 - \epsilon_2)$

Notemos que, para $\epsilon_1 > 0$ e $0 < \epsilon_2 < 1$, temos:
$\log_a (1 - \epsilon_2) < 0 < \log_a (1 + \epsilon_1)$

Então, para todo $\epsilon > 0$, temos:

1) Se $0 < \epsilon < 1$, então existe $\delta = min\ \{\delta_1, \delta_2\}$ tal que
$0 < |x - b| < \delta \implies \log_a (1 - \epsilon) < f(x) < \log_a (1 + \epsilon) \implies$
$\implies 1 - \epsilon < a^{f(x)} < 1 + \epsilon \implies -\epsilon < a^{f(x)} - 1 < \epsilon \implies |a^{f(x)} - 1| < \epsilon$

2) Se $\epsilon > 1$, então tomamos $0 < \epsilon' < 1 < \epsilon$ e existe $\delta' > 0$ tal que
$0 < |x - b| < \delta' \implies |a^{f(x)} - 1| < \epsilon' < \epsilon$

Assim provamos que $\lim\limits_{x \to b} a^{f(x)} = 1$ para $a > 1$. Deixamos a cargo do leitor a demonstração para $0 < a < 1$, que é feita de modo análogo.

104. *Teorema*

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, então:

$$\lim_{x \to b} a^{f(x)} = a^{\lim\limits_{x \to b} f(x)} = a^c.$$

Demonstração

Por hipótese, temos $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, isto é, $\lim\limits_{x \to b} [f(x) - c] = 0$.

Pelo teorema anterior:

$\lim\limits_{x \to b} [f(x) - c] = 0 \implies \lim\limits_{x \to b} a^{[f(x) - c]} = 1$

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to b} a^{f(x)} = a^c$, provemos que $\lim\limits_{x \to b} [a^{f(x)} - a^c] = 0$.

Então:

$\lim\limits_{x \to b} [a^{f(x)} - a^c] = \lim\limits_{x \to b} a^c \cdot [a^{f(x) - c} - 1] =$

$= a^c \cdot \lim\limits_{x \to b} [a^{f(x) - c} - 1] = a^c \cdot [\lim\limits_{x \to b} a^{f(x) - c} - 1] =$

$= a^c \cdot (1 - 1) = a^c \cdot 0 = 0$

EXERCÍCIOS

94. Complete:

a) $\lim\limits_{x \to 2} 3^x =$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{1}{2}\right)^x =$

c) $\lim\limits_{x \to 2} e^x =$

d) $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{1}{e}\right)^x =$

95. Complete:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x =$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x =$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x =$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x =$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$

96. Complete:

a) $\lim\limits_{x \to 3} 2^{2x^2 - 3x + 1} =$

b) $\lim\limits_{x \to -2} 3^{x^2 + 6x + 2} =$

c) $\lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{3x + 2}{x - 1}} =$

d) $\lim\limits_{x \to -2} 10^{\frac{4x^2 + 6x - 2}{3x + 4}} =$

97. Complete:

a) $\lim\limits_{x \to 2} 3^{\frac{x^2 - 4}{x - 2}} =$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1 - x^2}{x - 1}} =$

c) $\lim\limits_{x \to 1} 2^{\frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + x - 2}} =$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2}} =$

e) $\lim\limits_{x \to 1} e^{\frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}} =$

f) $\lim\limits_{x \to 4} \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x} - 2}} =$

IV. Limites da função logarítmica

105. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim\limits_{x \to 1} (\log_a x) = 0$.

Demonstração

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to 1} (\log_a x) = 0$, devemos provar:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |\log_a x| < \epsilon$

Supondo $a > 1$ e $\epsilon > 0$, segue que:

$|\log_a x| < \epsilon \iff -\epsilon < \log_a x < \epsilon \iff a^{-\epsilon} < x < a^{\epsilon} \iff$

$\iff a^{-\epsilon} - 1 < x - 1 < a^{\epsilon} - 1$ mas $a^{-\epsilon} - 1 < 0$ e $a^{\epsilon} - 1 > 0$, portanto:

$a^{-\epsilon} - 1 < x - 1 < a^{\epsilon} - 1 \iff x - 1 < a^{\epsilon} - 1$ e $1 - x < 1 - a^{-\epsilon} \iff$

$\iff |x - 1| < a^{\epsilon} - 1$ e $|x - 1| < 1 - a^{-\epsilon}$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \min\{a^{\epsilon} - 1, 1 - a^{-\epsilon}\}$ tal que $0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |\log_a x| < \epsilon$.

Supondo $0 < a < 1$ e $\epsilon > 0$, segue que:

$|\log_a x| < \epsilon \iff -\epsilon < \log_a x < \epsilon \iff a^{\epsilon} < x < a^{-\epsilon} \iff$

$\iff a^{\epsilon} - 1 < x - 1 < a^{-\epsilon} - 1$ mas $a^{\epsilon} - 1 < 0$ e $a^{-\epsilon} - 1 > 0$, portanto:

$a^{\epsilon} - 1 < x - 1 < a^{-\epsilon} - 1 \iff x - 1 < a^{-\epsilon} - 1$ e $1 - x < 1 - a^{\epsilon} \iff$

$\iff |x - 1| < a^{-\epsilon} - 1$ e $|x - 1| < 1 - a^{\epsilon}$

Assim, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \min\{a^{-\epsilon} - 1, 1 - a^{\epsilon}\}$ tal que $0 < |x - 1| < \delta \Longrightarrow |\log_a x| < \epsilon$.

106. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, então $\lim\limits_{x \to b} (\log_a x) = \log_a b$ em que $b > 0$.

Demonstração

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to b} (\log_a x) = \log_a b$, provemos que $\lim\limits_{x \to b} (\log_a x - \log_a b) = 0$.

Provemos inicialmente que $\lim\limits_{x \to b} \left(\log_a \frac{x}{b}\right) = 0$, isto é,

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - b| < \delta \iff \left|\log_a \frac{x}{b}\right| < \epsilon$.

Fazendo $\frac{x}{b} = w$, isto é, $x = bw$ e notando que

$|x - b| = |bw - b| = |b| \cdot |w - 1|$, temos:

$\forall \epsilon > 0, \exists \delta' > 0 \mid 0 < |w - 1| < \frac{\delta}{|b|} = \delta' \Longrightarrow |\log_a w| < \epsilon$

que é verdadeira pelo teorema anterior.

Mostremos agora que $\lim\limits_{x \to b} (\log_a x - \log_a b) = 0$.

De fato:

$$\lim_{x \to b} (\log_a x - \log_a b) = \lim_{x \to b} \left(\log_a \frac{x}{b}\right) = 0.$$

107. Teorema

Se $a \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_a x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log_a x) = -\infty$.

Demonstração

Para demonstrarmos que

$$\lim_{x \to +\infty} (\log_a x) = +\infty$$

devemos provar:

$\forall M > 0, \exists N > 0 \mid x > N \Longrightarrow \log_a x > M$.

Notemos que, para todo $M > 0$, temos $\log_a x > M \iff x > a^M$.

Assim, tomando $N = a^M$, segue que para todo $M > 0$ existe $N = a^M > 0$ tal que:

$$x > N \Longrightarrow \log_a x > M$$

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log_a x) = -\infty$, devemos provar:

$\forall M < 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < x < \delta \Longrightarrow \log_a x < M$

Notemos que:

$$\log_a x < M \iff x < a^M$$

Assim, tomando $\delta = a^M$, para todo $M < 0$ existe $\delta = a^M > 0$ tal que

$$0 < x < \delta \implies \log_a x < M$$

108. *Teorema*

Se $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a < 1$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} (\log_a x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} (\log_a x) = +\infty$.

A demonstração deste teorema, que é feita de modo análogo à do anterior, ficará a cargo do leitor.

109. *Teorema*

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 1$, então $\lim\limits_{x \to b} [\log_a f(x)] = 0$.

Demonstração

Considerando que $\lim\limits_{x \to b} f(x) = 1$ e $a > 1$, temos:

1) Dado $\epsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$, tal que

$0 < |x - b| < \delta_1 \implies |f(x) - 1| < a^{\epsilon_1} - 1 \implies$

$\implies 1 - a^{\epsilon_1} < f(x) - 1 < a^{\epsilon_1} - 1 \implies 2 - a^{\epsilon_1} < f(x) < a^{\epsilon_1}$

2) Dado $\epsilon_2 > 0$, existe $\delta_2 > 0$, tal que

$0 < |x - b| < \delta_2 \implies |f(x) - 1| < 1 - a^{\epsilon_2} \implies a^{-\epsilon_2} - 1 <$

$< f(x) - 1 < 1 - a^{-\epsilon_2} \implies a^{-\epsilon_2} < f(x) < 2 - a^{-\epsilon_2}$

Notemos que, para $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$, temos $0 < a^{-\epsilon_2} < 1 < a^{\epsilon_1}$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = min\ \{\delta_1, \delta_2\}$ tal que

$0 < |x - b| < \delta \implies a^{-\epsilon} < f(x) < a^{\epsilon} \implies -\epsilon < \log_a f(x) < \epsilon \implies$

$\implies |\log_a f(x)| < \epsilon$.

Com isso provamos que $\lim\limits_{x \to b} [\log_a f(x)] = 0$ para $a > 1$. Deixamos a cargo do leitor a demonstração para $0 < a < 1$.

110. *Teorema*

Se $a \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$ e $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c > 0$, então:

$$\lim_{x \to b} [\log_a f(x)] = \log_a [\lim_{x \to b} f(x)] = \log_a c.$$

Demonstração

Por hipótese, temos $\lim\limits_{x \to b} f(x) = c$, isto é, $\lim\limits_{x \to b} \dfrac{f(x)}{c} = 1$.

Pelo teorema anterior,

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{c} = 1 \implies \lim_{x \to b} \left[\log_a \frac{f(x)}{c}\right] = 0.$$

Para demonstrarmos que $\lim\limits_{x \to b} [\log_a f(x)] = \log_a c$, provemos

$$\lim_{x \to b} [\log_a f(x) - \log_a c] = 0.$$

Temos:

$$\lim_{x \to b} [\log_a f(x) - \log_a c] = \lim_{x \to b} \left[\log_a \frac{f(x)}{c}\right] = 0$$

EXERCÍCIOS

98. Complete:

a) $\lim\limits_{x \to 2} \log_3 x =$

b) $\lim\limits_{x \to 4} \log_{\frac{1}{2}} x =$

c) $\lim\limits_{x \to e^2} \ell n\ x =$

d) $\lim\limits_{x \to 1000} \log x =$

99. Complete:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_2 x =$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x =$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ell n\ x =$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_{0,1} x =$

e) $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell n\ x =$

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_{\frac{1}{2}} x =$

100. Complete:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \log_2 (4x^2 - 7x + 5) =$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \ell n\ (3x^2 + 4x - 2) =$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \log \dfrac{6x + 2}{4x + 3} =$

d) $\lim\limits_{x \to 4} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3x^2 - 5x + 2}{2x^2 - x + 2} =$

101. Complete:

a) $\lim\limits_{x \to -1} \log_3 \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 5x + 4} =$

c) $\lim\limits_{x \to 3} \ell n \dfrac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} =$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \log \dfrac{x - x^3}{x^2 + x} =$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \log \dfrac{3 - \sqrt{1 - 4x}}{\sqrt{6 + x} - 2} =$

V. Limite exponencial fundamental

111. Teorema

Na função $f(n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ definida em $\mathbb{N}^*$, temos:

(1) f é crescente em $\mathbb{N}^*$

(2) $2 \leqslant f(n) < 3, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$

(3) existe $\lim\limits_{n \to +\infty} f(n)$.

Demonstração de (1)

Desenvolvendo $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ pelas fórmulas do binômio de Newton (veja no livro 5), temos:

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \ldots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

Lembrando que $\dbinom{n}{i} = \dfrac{n!}{i!\,(n - i)!}$ para $i \leqslant n$, vem:

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots +$$

$$+ \ldots + \frac{n(n - 1)(n - 2) \ldots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

ou seja:

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Indicando

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{i}{n}\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

temos:

$$f(n) = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(i + 1)!} \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

Desenvolvendo de modo análogo $f(n + 1) = \left(1 + \dfrac{1}{n + 1}\right)^{n+1}$, encontramos:

$$f(n + 1) = 2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i + 1)!} \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \frac{j}{n + 1}\right).$$

Para demonstrarmos que $f(n + 1) > f(n)$, devemos provar:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + i)!} \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \frac{j}{n + 1}\right) > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + i)!} \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$

b) $\displaystyle\frac{1}{(n + 1)!} \prod_{j=1}^{i} \left(1 - \frac{j}{n + 1}\right) > 0$

Prova de a

Notemos que, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $1 \leqslant j \leqslant n - 1$, temos:

$$\frac{j}{n + 1} < \frac{j}{n} \Rightarrow -\frac{j}{n + 1} > -\frac{j}{n} \Rightarrow 1 - \frac{j}{n + 1} > 1 - \frac{j}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n + 1}\right) > \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1 + i)!} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n + 1}\right) > \frac{1}{(1 + i)!} \prod_{j=1}^{n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + i)!} \prod_{j=1}^{n-1}\left(1 - \frac{j}{n + 1}\right) > \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(1 + i)!} \prod_{j=1}^{n-1}\left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

Prova de b

$$\frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{j}{n+1}\right)=\frac{1}{(n+1)!}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{n+1-j}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^n}\cdot\prod_{j=1}^{n}(n+1-j)=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{(n+1)^n}\cdot n!=$$

$$=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}>0 \text{ pois } n\in \mathbb{N}^*$$

Demonstração de (2)

Considerando que em (1) provamos que f é crescente em $\mathbb{N}^*$, decorre que f assumirá o menor valor para $n = 1$. Então:

$$f(1)=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$$

portanto $f(n) \geqslant 2$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Provemos agora que $f(n) < 3$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Notemos que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant j \leqslant n-1$, temos:

$$1-\frac{j}{n}<1 \implies \prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)<1$$

e, para todo $i \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, temos:

$$(1+i)! \geqslant 2^i \implies \frac{1}{(1+i)!}\leqslant\frac{1}{2^i} \qquad (*)$$

portanto, para todo $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$ e $1 \leqslant j \leqslant n-1$, temos:

$$\frac{1}{(1+i)!}\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)<\frac{1}{2^i}\implies\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(1+i)!}\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)<\sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{2^i}$$

Mas $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}$ é a soma dos termos de uma progressão geométrica, portanto:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1$$

(*) Fica como exercício provar por indução finita que $(1+i)! \geqslant 2^i$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$.

logo:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(1+i)!}\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)<\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{2^i}<1\implies$$

$$\implies f(n)=2+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{(1+i)!}\prod_{j=1}^{n-1}\left(1+\frac{j}{n}\right)<3$$

Demonstração de (3)

Considerando que f é crescente e limitada em $\mathbb{N}^*$, seja L, $2 \leqslant L < 3$ tal que:

1º) $f(n) < L$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$

2º) se $f(n) < K$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, então $K \geqslant L$

Mostremos que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = L$.

De fato, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$, tal que $f(n_1) > L - \epsilon$.

Tomando $M = n_1$, temos para todo $\epsilon > 0$ e $n > M$

$$L-\epsilon<f(n_1)<f(n)<L<L+\epsilon$$

isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $M > 0$ tal que:

$$n>M \implies |f(n)-L|<\epsilon.$$

112. Definição do número e

Chamamos de **e** o limite da função $f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ definida em $\mathbb{N}^*$, quando n tende a $+\infty$.

$$\boxed{e=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

O número **e** é um número irracional.

Um valor aproximado de **e** é *2,7182818284*.

113. Teorema

Seja a função $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ definida em $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1$ ou $x > 0\}$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

Demonstração

Sejam n e $n + 1$ dois números inteiros positivos e consecutivos. Para todo x tal que $n \leqslant x < n + 1$, temos:

$$n \leqslant x < n + 1 \implies \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \implies$$

$$\implies 1 + \frac{1}{n} \geqslant 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{n+1}$$

Considerando que $n \leqslant x < n + 1$, resulta:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Mas:

$$1)\ \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1+n}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

$$2)\ \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

então, pelo teorema do confronto, temos:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

114. *Teorema*

Seja f a função definida em $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 0\}$ por $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}$, então $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e$.

Demonstração

Fazendo $x = -(w + 1)$ e notando que se x tende a $-\infty$ então w tende a $+\infty$, temos:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{w \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{w+1}\right)^{-(w+1)} =$$

$$= \lim_{w \to +\infty} \left(\frac{w}{w+1}\right)^{-(w+1)} = \lim_{w \to +\infty} \left(\frac{w+1}{w}\right)^{w+1} =$$

$$= \lim_{w \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{w}\right)^{w+1} = \lim_{w \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{w}\right)^{w} \cdot \left(1 + \frac{1}{w}\right)\right] =$$

$$= \lim_{w \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{w}\right)^{w} \cdot \lim_{w \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{w}\right) = e \cdot 1 = e$$

115. *Teorema*

Seja a função definida em $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \neq 0\}$ por $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, então $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Demonstração

Fazendo $x = \frac{1}{y}$, obtemos $(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}$ e notando que

$$x \longrightarrow 0^{+} \implies y \longrightarrow +\infty$$
$$x \longrightarrow 0^{-} \implies y \longrightarrow -\infty$$

temos:

$$\lim_{x \to 0^{+}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

$$\lim_{x \to 0^{-}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

e portanto:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

116. *Teorema*

Se $a > 0$, então $\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^{x} - 1}{x} = \ell n\ a$.

Demonstração

Para $a = 1$, temos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = \ell n\, 1$$

Supondo $0 < a \neq 1$ e fazendo $a^x - 1 = w$, temos:

$$a^x - 1 = w \Longrightarrow a^x = 1 + w \Longrightarrow \ell n\, a^x = \ell n\,(1 + w) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x\ell n\, a = \ell n\,(1 + w) \Longrightarrow x = \frac{\ell n\,(1+w)}{\ell n\, a}.$$

Notemos que $\frac{a^x-1}{x} = (a^x - 1)\cdot\frac{1}{x} = w \cdot \frac{\ell n\, a}{\ell n\,(1+w)}$.

Notando que, se x tende a zero, então w também tende a zero, temos

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{w\to 0}\frac{w\cdot \ell n\, a}{\ell n\,(1+w)} = \ell n\, a \cdot \lim_{w\to 0}\frac{1}{\frac{1}{w}\,\ell n\,(1+w)} =$$

$$= \ell n\, a \cdot \lim_{w\to 0}\frac{1}{\ell n\,(1+w)^{\frac{1}{w}}} = \frac{\ell n\, a}{\ell n\,[\lim\limits_{w\to 0}(1+w)^{\frac{1}{w}}]} = \frac{\ell n\, a}{\ell n\, e} = \frac{\ell n\, a}{1} = \ell n\, a$$

EXERCÍCIOS

102. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x}$

Solução

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2}\right]^{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2} = e^2$

b) Fazendo $w = \frac{x}{3}$, temos:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{x} = \lim_{w\to -\infty}\left(1 + \frac{1}{w}\right)^{3w} = \lim_{w\to -\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{w}\right)^{w}\right]^{3} = e^3$$

103. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} =$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2} =$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x} =$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} =$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{x}{4}} =$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x} =$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} =$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x} =$

104. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{x} =$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{x} =$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{3x} =$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1 - \frac{3}{x}\right)^{2x} =$

105. Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

Solução

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x} = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}}\right)^{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}} = \frac{e}{\frac{1}{e}} = e^2$$

106. Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+4}{x-3}\right)^{x}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{x}$

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x-4}{x-1}\right)^{x+3}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$

107. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x + 3}{2x + 1}\right)^x$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{2x - 1}{2x + 1}\right)^x$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{3x + 2}{3x - 1}\right)^{2x}$

108. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{3x} - 1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3^{2x} - 1}{2^{5x} - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x - 2}$

f) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{e^x - e^a}{x - a}$

g) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{2^x - 2^a}{x - a}$

109. Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(1 + x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log\,(1 + x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ell n\,(1 + 2x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log\,(1 + 3x)}{x}$

110. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[x]{1 - 2x}$.

LEITURA

Newton e o Método dos Fluxos

Hygino H. Domingues

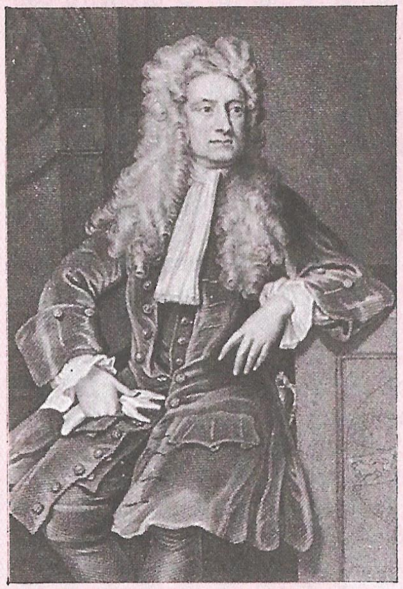
Matematicamente, o século XVII já reunia condições para a criação do cálculo diferencial e integral como disciplina independente da geometria — a álgebra simbólica e a geometria analítica, produtos recentes, propiciavam esse avanço. Por outro lado, os grandes problemas científicos da época requeriam um instrumento matemático mais ágil e abrangente que o método de exaustão. (Ver págs. 52 e 53.)

Esses problemas eram principalmente quatro. O primeiro consistia em achar velocidade e aceleração de um móvel, conhecida a lei algébrica relacionando espaço percorrido e tempo (e vice-versa). O segundo dizia respeito à determinação de tangentes a curvas (questões de óptica por exemplo, levavam a essa preocupação). O terceiro envolvia cálculos de máximos e mínimos (por exemplo, qual a máxima e qual a mínima distância de um planeta ao Sol?). Por fim, a obtenção de coisas como comprimentos, áreas, volumes e centros de gravidade, para as quais o método de exaustão exigia muita engenhosidade. Vários matemáticos do século XVII enfrentaram esses problemas, alguns com contribuições de grande porte. Dentre estes, porém, dois se sobressaíram, cada um a seu modo, com papel decisivo: Newton e Leibniz.

Isaac Newton (1643-1727) nasceu na aldeia de Woolsthorpe, Inglaterra, filho póstumo de um pequeno sitiante da localidade. Ele próprio estava fadado ao mesmo destino, não fora a habilidade demonstrada em menino para a construção de engenhos mecânicos. Assim, mesmo não revelando nenhum brilho especial na escola pública em que ingressou aos 12 anos de idade, em 1661 chegava ao Trinity College, Cambridge, onde se graduaria em ciências quatro anos depois. A peste bubônica que assolou Londres a seguir levou-o a passar os dois anos seguintes em sua aldeia natal. Foi nesse período que engendrou as bases científicas do *método dos fluxos* (hoje cálculo diferencial) e da teoria da gravitação universal. Em 1669, dois anos após ter retornado a Cambridge para obter o grau de mestre, sucede Isaac Barrow (1630-1677) no Trinity College (por indicação do próprio Barrow, seu ex-professor). Somente em 1696 deixaria sua cadeira em Cambridge a fim de exercer funções públicas de alto nível em Londres.

Numa monografia de 1669, que só circulou entre seus amigos e alunos (apenas em 1711 foi publicada), Newton expôs suas primeiras idéias sobre o cálculo. Por exemplo, usando a expansão generalizada de $(x + a)^p$, resultado que obtivera anteriormente (salvo quando p é inteiro positivo a expansão é infinita), mostrou que a área sob a curva $z = ax^p$ ($p \in \mathbb{Q}$) é $y = pax^{p-1}$ (derivada de z, na terminologia moderna). Vice-versa, a área sob a curva $y = pax^{p-1}$ é $z = ax^p$. Tudo indica que esta foi a primeira vez na história da matemática que uma área foi obtida pelo processo inverso da derivação. Este resultado contém, em gérmen, a essência do cálculo.

Mas a exposição de Newton pecava quanto ao rigor lógico. Numa segunda versão em 1671 (só publicada em 1736) considera suas variáveis, às quais chamou de *fluentes*, e indicou por x, y, ..., geradas por movimentos contínuos. A taxa de variação de um fluente x é o que Newton chamou de *fluxo* de x e indicou por $\dot{x}$. Foi esta versão, porém numa linguagem geométrica, que Newton incluiu em sua obra-prima, os *Principia*. Em três volumes (o último de 1687), esta obra mostra, pela força do cálculo, como a lei da gravitação implica os movimentos em elipse dos planetas, conforme as leis de Kepler, além de abrir caminho para uma descrição matemática do Universo.



Isaac Newton (1643-1727).

A questão do rigor no cálculo ainda mereceria a atenção de Newton, num trabalho de 1676 — mas sem resultados significativos. Quase dois séculos decorreriam até que o assunto fosse posto em pratos limpos quanto à sua fundamentação lógica. Mas a essência dessa fundamentação, a teoria dos limites, estava em sua obra, na idéia de taxa de variação. De qualquer maneira, a obra de Newton é um monumento científico. Outros iriam cuidar dos acabamentos.

CAPÍTULO V

Continuidade

I. Noção de continuidade

117. *Definição*

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I. Dizemos que f é contínua em a, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Notemos que para falarmos em continuidade de uma função em um ponto é necessário que este ponto pertença ao domínio da função.

Da definição decorre que, se f é contínua em a, então as três condições deverão estar satisfeitas:

1º) existe f(a)

2º) existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

3º) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

118. *Definição*

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e a um elemento de I. Dizemos que f é descontínua em a se f não for contínua em a.

Observemos também que para falarmos em descontinuidade de uma função em um ponto é necessário que esse ponto pertença ao domínio da função.

Da definição decorre que, se f é descontínua em a, então as duas condições abaixo deverão estar satisfeitas:

1º) existe $f(a)$

2º) não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

119. Definição

Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo aberto $]a, b[$ se f for contínua em qualquer elemento x desse intervalo.

120. Definição

Seja a um ponto do domínio da função f.

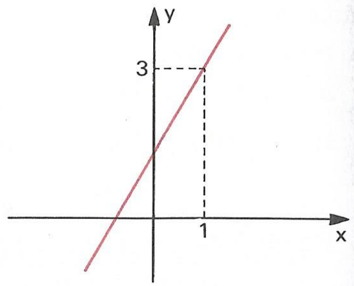
Dizemos que f é contínua à direita de a se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ e dizemos que f é contínua à esquerda de a se $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

121. Definição

Dizemos que uma função f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ se f for contínua no intervalo aberto $]a, b[$ e se também for contínua à direita de a e à esquerda de b.

122. Exemplos

1º) A função $f(x) = 2x + 1$ definida em $\mathbb{R}$ é contínua em 1, pois $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3 = f(1)$.

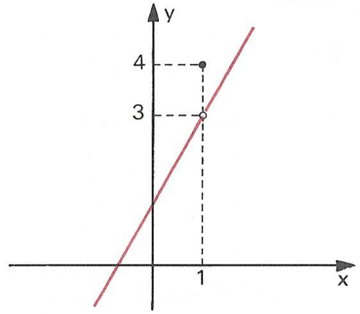


Notemos que f é contínua em $\mathbb{R}$, pois para todo $a \in \mathbb{R}$, temos: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (2x + 1) = 2a + 1 = f(a)$.

2º) A função

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{se } x \neq 1 \\ 4 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

definida em $\mathbb{R}$ é descontínua em 1, pois $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (2x + 1) = 3 \neq 4 = f(1)$.



Observemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$ pois, para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (2x + 1) = 2a + 1 = f(a)$$

3º) A função

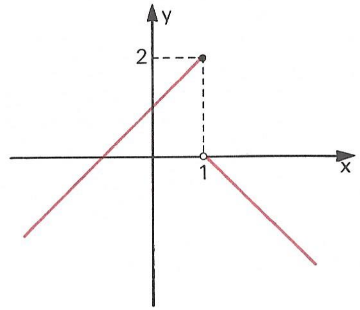
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

definida em $\mathbb{R}$ é descontínua em 1, pois

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$

e $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (1 - x) = 0$

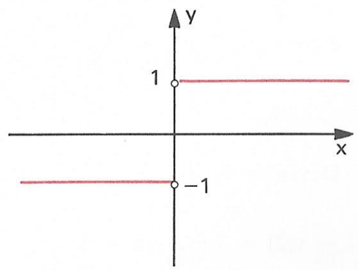
portanto, não existe $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



Observemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$ pois, para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos: se $a > 1$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (1 - x) = 1 - a = f(a)$

se $a < 1$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (x + 1) = a + 1 = f(a)$

4º) Na função $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ definida em $\mathbb{R}^*$ não podemos afirmar que f é descontínua em $x = 0$, pois $x = 0$ não pertence ao domínio da função.



Observemos que

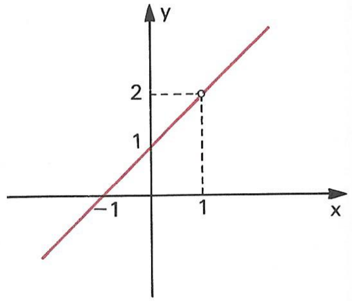
$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R}^*$ pois, para todo $a \in \mathbb{R}^*$, temos:

se $a > 0$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} 1 = 1 = f(a)$

se $a < 0$, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} (-1) = -1 = f(a)$

5º) Na função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ definida em $\mathbb{R} - \{1\}$ não podemos afirmar que f é descontínua em $x = 1$, pois $x = 1$ não pertence ao domínio da função.



Notemos que f é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$ pois, para todo $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to a} (x + 1) = a + 1 = f(a)$$

EXERCÍCIOS

111. Verifique se a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 2 \\ 7 - 2x & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

é contínua em $x = 2$.

Solução

Devemos verificar se $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$.

a) $f(2) = 7 - 2 \cdot 2 = 3$

b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 1) = 3$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (7 - 2x) = 3$

então $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 = f(2)$

logo f é contínua em $x = 2$.

112. Verifique se a função f é contínua no ponto especificado.

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 4 & \text{se } x = -2 \end{cases}$ no ponto $x = -2$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^2}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ -2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 1}{x + 1} & \text{se } x \neq -1 \\ 1 & \text{se } x = -1 \end{cases}$ no ponto $x = -1$

113. Verifique se a função f é contínua no ponto especificado.

a) $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x \geqslant -2 \\ -2x & \text{se } x < -2 \end{cases}$ no ponto $x = -2$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{se } x > 1 \\ x^2 + 4x - 5 & \text{se } x \leqslant 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x - 10 & \text{se } x > 4 \\ 2 & \text{se } x = 4 \\ 10 - 2x & \text{se } x < 4 \end{cases}$ no ponto $x = 4$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3x + 2 & \text{se } x > 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } x < 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

114. Verifique se a função f é contínua em $x = 0$:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{\text{sen } x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - \text{sen } x}{x + \text{sen } x} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

115. Verifique se a função f é contínua no ponto especificado.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ 0 & \text{se } x = 2 \end{cases}$ no ponto $x = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{(x - 1)^2} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x - 1|} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

116. Determine a para que a função seja contínua no ponto especificado.

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & \text{se } x \neq 2 \\ a & \text{se } x = 2 \end{cases}$ no ponto $x = 2$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - 1}{1 - x^3} & \text{se } x \neq 1 \\ a & \text{se } x = 1 \end{cases}$ no ponto $x = 1$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} & \text{se } x > 4 \\ 3x + a & \text{se } x \leqslant 4 \end{cases}$ no ponto $x = 4$

d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x} & \text{se } x > 0 \\ 3x^2 - 4x + a & \text{se } x \leqslant 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ a & \text{se } x = 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$

117. Determine a para que a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{tg } x}{\text{sen } 2x} & \text{se } x \neq 0 \\ \cos a & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

seja contínua em $x = 0$.

II. Propriedades das funções contínuas

123. *Teorema*

Se f e g são funções contínuas em a, então são contínuas em a as funções $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$, neste último caso, desde que $g(a) \neq 0$.

Demonstração

Demonstraremos como modelo a continuidade de $f + g$.

Como f e g são contínuas em a, pela definição temos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$$

Para provarmos que $f + g$ é contínua em a, devemos provar a igualdade:

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = (f + g)(a)$$

De fato:

$$\lim_{x \to a} (f + g)(x) = \lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

Agora faça a demonstração para as demais funções.

Exemplos

1º) A função $h(x) = x^2 + 2^x$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2^x$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e $h(x) = f(x) + g(x)$.

2º) A função $h(x) = x \cdot sen\ x$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois $f(x) = x$ e $g(x) = sen\ x$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

3º) A função $h(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^2 + 1$ são contínuas em $\mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $g(x) \neq 0$ para todo x real.

124. *Teorema do limite da função composta*

Se $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ e se f é uma função contínua em b, então $\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(b)$, isto é, $\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = f(\lim\limits_{x \to a} g(x))$.

Demonstração

O teorema ficará demonstrado se provarmos:

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |(f \circ g)(x) - f(b)| < \epsilon.$

Sabemos que f é contínua em b, isto é, $\lim\limits_{y \to b} f(y) = f(b)$; portanto,

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |y - b| < \delta_1 \implies |f(y) - f(b)| < \epsilon$ (I)

Por outro lado, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, isto é,

$\forall \delta_1 > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |g(x) - b| < \delta_1$ (II)

Se substituirmos y por $g(x)$ em (I), teremos:

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta_1 > 0 \mid 0 < |g(x) - b| < \delta_1 \implies |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon$ (III)

Com base nas afirmações (II) e (III), temos:

$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \implies |f(g(x)) - f(b)| < \epsilon \implies$
$\implies |(f \circ g)(x) - f(b)| < \epsilon.$

Observação

Este teorema continua válido se o símbolo "$x \to a$" for substituído por "$x \to a^+$" ou "$x \to a^-$".

Exemplos

1º) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen^2\ x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{sen\ x}{x}\right)^2 = \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{sen\ x}{x}\right)^2 = 1^2 = 1$

2º) $\lim\limits_{x \to 1} 2^{x^3 + 2x} = 2^{\lim\limits_{x \to 1} (x^3 + 2x)} = 2^3 = 8$

3º) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\left(\dfrac{x^2 + 4}{x - 1}\right) = \cos\left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 4}{x - 1}\right) = \cos(-4)$

125. *Teorema*

Se a função g é contínua em a e a função f é contínua em $g(a)$, então a função composta $f \circ g$ é contínua em a.

Demonstração

Considerando que g é contínua em a, isto é, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$ e f é contínua em $g(a)$, pelo teorema anterior temos:

$\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x \to a} g(x)) = f(g(a)) = (f \circ g)(a)$

o que prova que $f \circ g$ é contínua em a.

Exemplos

1º) A função $h(x) = sen\ (x^3 + x^2 + x + 1)$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois $f(x) = sen\ x$ e $g(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e $h(x) = f(g(x))$.

2º) A função $h(x) = 2^{cos\ x}$ é contínua em $\mathbb{R}$, pois $f(x) = 2^x$ e $g(x) = cos\ x$ são contínuas em $\mathbb{R}$ e $h(x) = f(g(x))$.

III. Limite da $\sqrt[n]{f(x)}$

Como havíamos prometido quando da apresentação da propriedade L_8 de limites, vamos demonstrar essa propriedade, mas antes vejamos dois lemas.

126. *Lema 1*

Se $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{R}_+$ ou se $n \in \mathbb{N}^*$, n é ímpar e $a \in \mathbb{R}_-^*$, então $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

Demonstração

Faremos a demonstração para o caso em que $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{R}_+$. Deixaremos a cargo do leitor a demonstração para o caso $n \in \mathbb{N}^*$, n é ímpar e $a \in \mathbb{R}_-^*$.

Para demonstrarmos que

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

devemos provar

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$$

Lembrando da fatoração

$$y^n - b^n = (y - b) \cdot (y^{n-1} + by^{n-2} + b^2y^{n-3} + \ldots + b^{n-2}y + b^{n-1})$$

isto é,

$$y^n - b^n = (y - b) \cdot \sum_{i=1}^{n} b^{i-1}y^{n-i}$$

podemos expressar $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}|$ em termos de $|x - a|$. Façamos $\sqrt[n]{x} = y$ e $\sqrt[n]{a} = b$; decorre $x = y^n$ e $a = b^n$. Então:

$$|x - a| = |y^n - b^n| = |(y - b) \cdot \sum_{i=1}^{n} b^{i-1}\, y^{n-i}| =$$

$$= |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| \cdot \left| \sum_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}} \right|$$

e finalmente temos:

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| = \frac{|x - a|}{\left| \sum\limits_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}} \right|}$$

Considerando que desejamos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |x - a| \cdot \frac{1}{\left| \sum\limits_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}} \right|} < \epsilon$$

podemos fazer com que o δ seja menor ou igual a a, isto é,

$$|x - a| < a \Longleftrightarrow 0 < x < 2a$$

Fazendo $x = 0$ em $\dfrac{1}{\left| \sum\limits_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}} \right|}$, temos:

$$|x - a| \cdot \frac{1}{\left| \sum\limits_{i=1}^{n} a^{\frac{i-n}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}} \right|} < |x - a| \cdot \frac{1}{a^{\frac{n-1}{n}}}$$

Como queremos que

$$|x - a| \cdot \frac{1}{a^{\frac{n-1}{n}}} < \epsilon$$

isto é,

$$|x - a| < a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon$$

tomamos $\delta = \min\{a, a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon\}$ e segue-se que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \min\{a, a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon\}$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| < \epsilon$$

De fato:

$$0 < |x - a| < \delta \Longrightarrow \begin{cases} 0 < |x - a| < a < a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon \\ \text{ou} \\ 0 < |x - a| < a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon < a \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 < |x - a| < a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon \Longrightarrow |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}| =$$

$$= |x - a| \cdot \frac{1}{\left| \sum\limits_{i=1}^{n} a^{\frac{i-1}{n}} \cdot x^{\frac{n-i}{n}} \right|} < a^{\frac{n-1}{n}} \cdot \epsilon \cdot \frac{1}{a^{\frac{n-1}{n}}} = \epsilon$$

127. *Lema 2*

A função $h(x) = \sqrt[n]{x}$, definida em $\mathbb{R}_+$ se n é par ou definida em $\mathbb{R}$ se n é ímpar, é contínua em a para $a \in \mathbb{R}_+^*$ (se n é par) ou $a \in \mathbb{R}$ (se n é ímpar).

Demonstração

Faremos a demonstração para o caso n par. Deixamos a cargo do leitor, como exercício, a demonstração para n ímpar.

Pelo lema 1, temos:

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} = h(a)$$

o que prova que h é contínua em a.

128. Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, em que $L \geqslant 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$ ou $L < 0$ e n é natural ímpar, então:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}.$$

Demonstração

Sendo a função h definida por $h(x) = \sqrt[n]{x}$, temos a composta $h \circ f$ definida por $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = \sqrt[n]{f(x)}$.

Pelo lema 2 a função h é contínua em L; então, pelo teorema do limite da função composta, temos:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \lim_{x \to a} h(f(x)) = h\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Exemplos

1º) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 1)} = \sqrt{9} = 3$

2º) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\text{sen } x} = \sqrt[3]{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \text{sen } x} = \sqrt[3]{1} = 1$

3º) $\lim\limits_{x \to -1} \sqrt[4]{e^x} = \sqrt[4]{\lim\limits_{x \to -1} e^x} = \sqrt[4]{e^{-1}} = e^{-\frac{1}{4}}$

CAPÍTULO VI

Derivadas

I. Derivada no ponto x_0

129. Definição

Seja f uma função definida em um intervalo aberto I e x_0 um elemento de I. Chama-se *derivada de f no ponto x_0* o limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se este existir e for finito.

A derivada de f no ponto x_0 é habitualmente indicada com uma das seguintes notações:

$$f'(x_0) \quad \text{ou} \quad \left[\frac{df}{dx}\right]_{x = x_0} \quad \text{ou} \quad Df(x_0)$$

A diferença $\Delta x = x - x_0$ é chamada *acréscimo* ou *incremento da variável x* relativamente ao ponto x_0. A diferença $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ é chamada *acréscimo* ou *incremento da função f* relativamente ao ponto x_0. O quociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ recebe o nome de *razão incremental de f* relativamente ao ponto x_0.

Frisemos que a derivada de f no ponto x_0 pode ser indicada das seguintes formas:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} \quad \text{ou} \quad \boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad \text{ou}$$

$$\text{ou} \quad \boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Quando existe $f'(x_0)$ dizemos que f é *derivável* no ponto x_0. Dizemos também que *f é derivável* no intervalo aberto I quando existe $f'(x_0)$ para todo $x_0 \in I$.

130. *Exemplos*

1º) Calculemos a derivada de $f(x) = 2x$ no ponto $x_0 = 3$.

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2(x - 3)}{x - 3} = 2$$

Outra maneira de proceder seria esta:

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(3 + \Delta x) - 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2 = 2$$

2º) Calculemos a derivada de $f(x) = x^2 + x$ no ponto $x_0 = 1$.

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x)] - [1^2 + 1]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^2 + 3 \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 3) = 3$$

3º) Calculemos a derivada de $f(x) = sen\ x$ em $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \Delta x\right) - \text{sen}\ \frac{\pi}{3}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \text{sen}\ \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\text{sen}\ \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

4º) Calculemos a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ em $x_0 = 0$.

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \quad \text{portanto, como}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty, \text{ não existe } f'(0).$$

EXERCÍCIOS

Nos problemas que seguem, calcule $f'(x_0)$.

118. $f(x) = 3x + 1, \quad x_0 = 2$

119. $f(x) = x^2 + 2x + 5, \quad x_0 = 1$

120. $f(x) = x^3, \quad x_0 = -1$

121. $f(x) = |x|, \quad x_0 = 1$

122. $f(x) = |x|, \quad x_0 = 0$

123. $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

124. $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$

125. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 2$

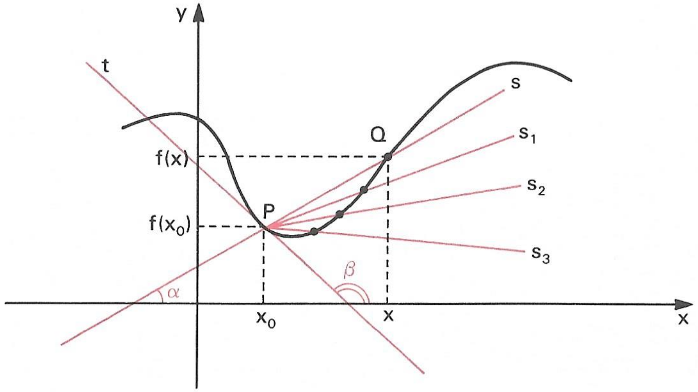
126. $f(x) = \sqrt[5]{x}, \quad x_0 = 0$

127. $f(x) = x \cdot |x|, \quad x_0 = 0$

II. Interpretação geométrica

131. Seja f uma função contínua no intervalo aberto I. Admitamos que exista a derivada de f no ponto $x_0 \in$ I.

Dado um ponto $x \in$ I, tal que $x \neq x_0$, consideremos a reta s determinada pelos pontos $P(x_0, f(x_0))$ e $Q(x, f(x))$.



A reta s é secante com o gráfico de f e seu coeficiente angular é:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

portanto, $tg\ \alpha$ é a razão incremental de f relativamente ao ponto x_0.

Se f é contínua em I, então, quando x tende a x_0, Q desloca-se sobre o gráfico da função e aproxima-se de P. Conseqüentemente, a reta s desloca-se tomando sucessivamente as posições s_1, s_2, s_3, ... e tende a coincidir com a reta t, tangente à curva no ponto P.

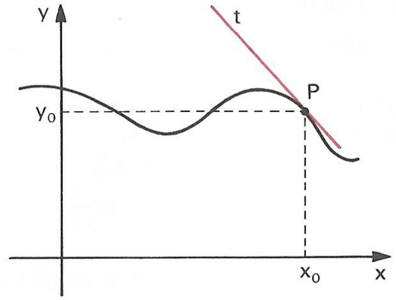
Como existe $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \text{tg}\ \alpha = \text{tg}\ (\lim\limits_{x \to x_0} \alpha) = \text{tg}\ \beta$,

concluímos:

> A derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

132. Quando queremos obter a equação de uma reta passando por $P(x_0, y_0)$ e com coeficiente angular m, utilizamos a fórmula de Geometria Analítica:

$$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$$



Em particular, se queremos a equação da tangente t ao gráfico de uma função f no ponto (x_0, y_0), em que f é derivável, basta fazer $y_0 = f(x_0)$ e $m = f'(x_0)$. A equação da reta t fica:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

EXERCÍCIOS

128. Qual é a equação da reta tangente à curva $y = x^2 - 3x$ no seu ponto de abscissa 4?

Solução

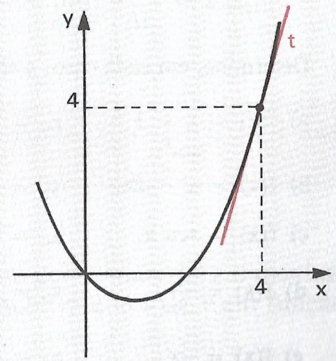
$x_0 = 4 \Longrightarrow f(x_0) = 4^2 - 3 \cdot 4 =$
$= 16 - 12 = 4$

então P(4, 4) é o ponto de tangência.

$$f'(x_0) = f'(4) = \lim_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x^2 - 3x) - 4}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{(x - 4)(x + 1)}{x - 4} = \lim_{x \to 4} (x + 1) = 5,$$



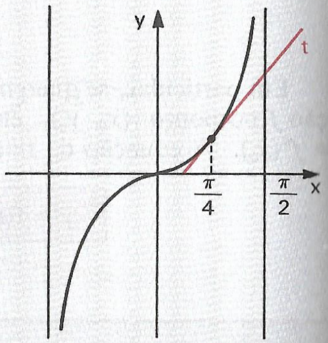
portanto, o coeficiente angular de t é 5 e sua equação é:
$y - 4 = 5(x - 4)$.

129. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = tg\ x$ no ponto de abscissa $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

Solução

$x_0 = \frac{\pi}{4} \implies f(x_0) = tg\ \frac{\pi}{4} = 1$, então

$P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ é o ponto de tangência.



$$f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{tg\ x - tg\ \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\dfrac{sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4}}}{x - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left[\frac{sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4}}\right] = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} = 2$$ e a equação da reta t é $y - 1 = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

130. Determine, em cada caso, a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0.

a) $f(x) = x + 1, \quad x_0 = 3$

b) $f(x) = x^2 - 2x, \quad x_0 = 1$

c) $f(x) = sen\ x, \quad x_0 = 0$

d) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$

e) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 4$

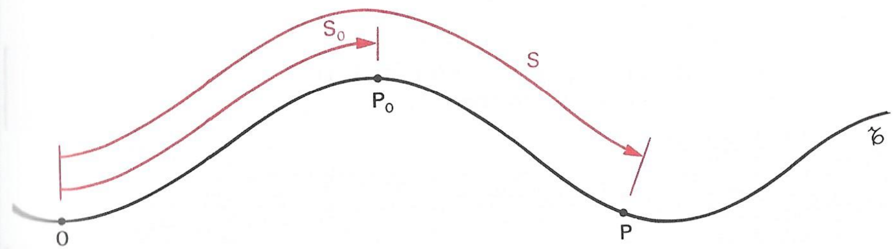
f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}, \quad x_0 = 2\sqrt{2}$

III. Interpretação cinemática

133. Do estudo da Cinemática sabemos que a posição de um ponto material em movimento, sobre uma curva $\mathscr{C}$ (trajetória) conhecida, pode ser determinada, em cada instante t, através de sua abscissa s, medida sobre a curva $\mathscr{C}$. A expressão que nos dá s em função de t:

$$s = s(t)$$

é chamada *equação horária*.



Sendo dado um instante t_0 e sendo t um instante diferente de t_0, chama-se *velocidade escalar média* do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente:

$$v_m = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

e chama-se *velocidade escalar* do ponto no instante t_0 o limite:

$$v_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} v_m = \lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0)$$

Daí se conclui que:

> A derivada da função $s = s(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à velocidade escalar do móvel no instante t_0.

134. Sabemos ainda que a velocidade v de um ponto material em movimento pode variar de instante para instante. A equação que nos dá v em função do tempo t:

$$v = v(t)$$

é chamada *equação da velocidade* do ponto.

Sendo dado um instante t_0 e um instante t, diferente de t_0, chama-se *aceleração escalar média* do ponto entre os instantes t_0 e t o quociente:

$$a_m = \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

e chama-se *aceleração escalar* do ponto no instante t_0 o limite:

$$a_{(t_0)} = \lim_{t \to t_0} a_m = \lim_{t \to t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t_0)$$

Daí se conclui que:

A derivada da função $v = v(t)$ no ponto $t = t_0$ é igual à aceleração escalar do móvel no instante t_0.

EXERCÍCIOS

131. Um ponto percorre uma curva obedecendo à equação horária $s = t^2 + t - 2$. Calcule a sua velocidade no instante $t_0 = 2$. (Unidades SI)

Solução

A velocidade no instante $t_0 = 2$ é igual à derivada de s no instante t_0:

$$s'(t_0) = s'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t^2 + t - 2) - (2^2 + 2 - 2)}{t - 2} =$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{t^2 + t - 6}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{(t - 2)(t + 3)}{t - 2} = 5 \text{ m/s}$$

132. Calcule no instante $t_0 = 3$ a velocidade de uma partícula que se move obedecendo à equação horária $s = \frac{1}{t}$. (Unidades SI)

133. Um ponto material em movimento sobre uma reta tem velocidade $v = \sqrt[3]{t}$ no instante t. Calcule a aceleração do ponto no instante $t_0 = 2$. (Unidades SI)

Solução

A aceleração no instante $t_0 = 2$ é igual à derivada de v no instante t_0:

$$v'(t_0) = v'(2) = \lim_{t \to 2} \frac{v(t) - v(2)}{t - 2} = \lim_{t \to 2} \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{2}}{t - 2} =$$

$$= \lim_{t \to 2} \frac{\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{t} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{t^2} + \sqrt[3]{2t} + \sqrt[3]{2^2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \text{ m/s}^2$$

134. Calcule a aceleração de uma partícula no instante $t_0 = 5$, sabendo que sua velocidade obedece à equação $v = 2 + 3t + 5t^2$. (Unidades SI)

IV. Função derivada

135. Seja f uma função derivável no intervalo aberto I. Para cada x_0 pertencente a I existe e é único o limite $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Portanto, podemos definir uma função $f': I \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x_0 \in I$ a derivada de f no ponto x_0. Esta função é chamada *função derivada de f* ou, simplesmente, ***derivada de f***.

Habitualmente a derivada de f é representada por f' ou $\frac{df}{dx}$ ou Df.

A lei $f'(x)$ pode ser determinada a partir da lei $f(x)$, aplicando-se a definição de derivada de uma função, num ponto genérico $x \in I$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

É isso o que faremos logo em seguida para calcular as derivadas das principais funções elementares.

V. Derivadas das funções elementares

136. *Derivada da função constante*

Dada a função $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = c \implies f'(x) = 0}$$

137. *Derivada da função potência*

Dada a função $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} \cdot \Delta x + \binom{n}{3}x^{n-3} \cdot (\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n}(\Delta x)^{n-1}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \binom{n}{1}x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = x^n \implies f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

138. *Derivada da função seno*

Dada a função $f(x) = sen\ x$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{sen}\,(x + \Delta x) - \text{sen}\,x}{\Delta x} = \frac{2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{=1} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = \text{sen}\,x \implies f'(x) = \cos x}$$

139. *Derivada da função cosseno*

Dada a função $f(x) = cos\ x$, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\,(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \frac{-2 \cdot \text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= -\text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \text{sen}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}}_{=1} = -\text{sen}\,x$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\text{sen}\,x}$$

140. *Derivada da função exponencial*

Dada a função $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$ e $0 < a \neq 1$, calculemos a sua derivada. Temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a^{x + \Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ell n\ a$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = a^x \implies f'(x) = a^x \cdot \ell n\ a}$$

No caso particular da função exponencial de base e, $f(x) = e^x$, temos o resultado notável:

$$f'(x) = e^x \cdot \ell n\ e = e^x$$

Logo,

$$\boxed{f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x}$$

EXERCÍCIOS

135. Obtenha a derivada das seguintes funções:

$f(x) = 5$ $\quad$ $g(x) = x^6$ $\quad$ $h(x) = x^{15}$

136. Obtenha a derivada das seguintes funções:

$f(x) = c \cdot x^n$ $\quad$ $(c \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*)$
$g(x) = tg\ x$
$h(x) = sec\ x$

137. Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = cos\ x$ no ponto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$.

Solução

O coeficiente angular da reta procurada é:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -sen\ \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto a equação da reta é:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

138. Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 2.

139. Um móvel desloca-se sobre um segmento de reta obedecendo à equação horária $s = cos\ t$ (Unidades SI). Determine:

a) sua velocidade no instante $t = \frac{\pi}{4} s$

b) sua aceleração no instante $t = \frac{\pi}{6} s$.

Solução

a) A derivada de s nos dá em cada instante a velocidade do móvel, isto é, $v = s'(t) = -sen\ t$.

No instante $t = \frac{\pi}{4} s$, temos:

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -sen\ \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ m/s$$

b) A derivada de v nos dá em cada instante a aceleração do móvel, isto é, $a = v'(t) = -cos\ t$.

No instante $t = \frac{\pi}{6} s$, temos:

$$a\left(\frac{\pi}{6}\right) = -cos\ \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\ m/s^2$$

140. Um móvel desloca-se sobre uma reta obedecendo à equação horária $s = t^4$ (Unidades SI). Determine:

a) sua velocidade no instante $t = 2s$,
b) sua aceleração no instante $t = 3s$,
c) em que instante sua velocidade é $108\ m/s$,
d) em que instante sua aceleração é $48\ m/s^2$.

VI. Derivada e continuidade

141. *Teorema*

Sejam a função $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Se f é derivável em x_0, então f é contínua em x_0.

Demonstração

Notemos que:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

então:

$$\lim_{x \to 0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

e portanto:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ e, por definição, f é contínua no ponto x_0.

142. Notemos que o recíproco deste teorema é falso, isto é, existem funções contínuas em x_0 e não deriváveis em x_0.

Exemplos

1º) A função $f(x) = |x|$ é contínua no ponto $x_0 = 0$, pois:

$$\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$$

porém esta função não é derivável no ponto $x_0 = 0$, pois:

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1$$

então não existe $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| - 0}{x - 0}$.

2º) A função $f(x) = x \cdot \cos \dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ é contínua no ponto $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0} \left(x \cdot \cos \frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$$

mas f não é derivável no ponto $x_0 = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \cos \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x}$$

e este último limite não existe.

LEITURA

Leibniz e as Diferenciais

Hygino H. Domingues

"Eu vi um professor de Matemática, só porque foi grande em sua vocação, ser enterrado como um rei que tivesse feito o bem para seus súditos." Foi assim que Voltaire se pronunciou após haver assistido aos funerais de Newton. De fato, o respeito pela obra científica de Newton conseguira transcender em muito o âmbito da comunidade especializada. Tanto que um sentimento de admiração generalizada cercou as últimas décadas de sua vida. Um episódio, porém, tinha turvado em parte a glória que pôde colher ainda em vida: a polêmica com Leibniz sobre a primazia da criação do cálculo.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig, filho de um jurista, professor da universidade local. Órfão de pais aos 6 anos de idade, foi em grande parte o responsável pela própria educação. Assim é que, revelando extrema precocidade intelectual, ainda criança conseguiu aprender latim e grego sozinho. Já graduado em Direito em Leipzig, em 1667 obtém o grau de doutor em Filosofia na Universidade de Altdorf com a tese *Ars combinatoria* (A arte das combinações), uma tentativa de criar um método universal de raciocínio, através de uma espécie de cálculo, numa antecipação da Álgebra de Boole do século XIX. Mas sua formação matemática ainda era precária, como ele próprio reconheceria futuramente.

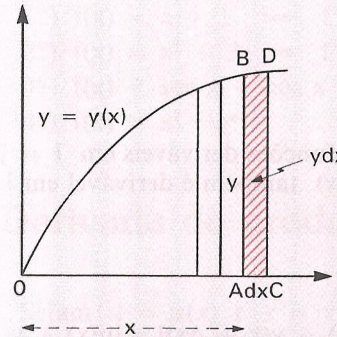
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Esta tese lhe valeu um convite para ser professor de Direito na própria Universidade de Altdorf. Mas sua aspiração era a carreira pública diplomática, que efetivamente veio a exercer por toda a vida, os últimos 40 anos junto à corte de Hanover.

A primeira missão diplomática de Leibniz no exterior, que acabou se estendendo de 1672 a 1676, em Paris, se politicamente não deixou marcas, no campo da matemática foi da mais alta importância. Dois fatores, principalmente, pesaram muito nesse sentido: a amizade que Leibniz travou com Huygens, que na época morava em Paris e se tornou seu orientador em matemática; e uma viagem que fez a Londres em 1673, na qual tomou conhecimento da obra de Barrow e, talvez, da primeira versão do cálculo de Newton (aí o embrião da futura controvérsia). Numa segunda ida a Londres em 1676, Leibniz já desenvolvera os principais aspectos e notações do seu cálculo.

Se para Newton a idéia central do cálculo era a de taxa de variação (velocidade), para Leibniz era a de diferencial. Embora sem dar uma definição precisa (nem havia como), diferencial para Leibniz era uma diferença entre dois valores infinitamente próximos de uma variável. Muito mais preocupado do que Newton com simbologia, fórmulas e regras, Leibniz acabou optando pela notação dx, dy, ... para as diferenciais de x, y, ..., respectivamente. E num artigo de 1682 estabeleceu regras como: (i) $da = 0$, se a é constante; (ii) $d(u + v) = du + dv$; (iii) $d(uv) = udv + vdu$. Na dedução desta última desprezou $(du)(dv)$ (sempre procedia assim com produtos de diferenciais).

Seu cálculo integral foi explicado noutro artigo, dois anos depois. A relação deste com o cálculo diferencial, cerne da questão, é focalizada em termos de somatórios de áreas infinitesimais. Cada uma destas sob a curva $y = y(x)$ é dada por ydx. Para a soma de todas inventou o símbolo $\int$ (um S alongado). Logo a área total sob a curva $y = y(x)$ é



$$\int ydx$$

Sendo Área (OCD)−Área (OAB) = ydx a diferencial da área, então

$$d\int ydx = ydx$$

o que mostra a invertibilidade de d e $\int$.

Hoje não há dúvida de que Newton e Leibniz seguiram linhas diferentes na criação do cálculo. Mas o segundo levou a pior na polêmica entre ambos, o que contribuiu para que tivesse um fim obscuro. O que diria Voltaire se assistisse ao enterro de Leibniz, no qual o único acompanhante era o fiel secretário do falecido?

CAPÍTULO VII

Regras de Derivação

Neste capítulo vamos sistematizar o cálculo das derivadas procurando obter regras de derivação para determinar a derivada de uma função, sem ter de recorrer necessariamente à definição.

I. Derivada da soma

143. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$. Provemos que a função $f(x) = u(x) + v(x)$ também é derivável em I e sua derivada é

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Temos:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] =$$
$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v$$

Então:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como u e v são funções deriváveis, os dois limites do segundo membro são finitos; portanto, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, isto é, f é derivável em I.

Calculando os limites, temos:

$f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Em resumo:

$$\boxed{f(x) = u(x) + v(x) \implies f'(x) = u'(x) + v'(x)}$$

Notemos que esta propriedade pode ser estendida para uma soma de n funções. Assim:

$$\boxed{f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \implies f'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x)}$$

sempre que $x \in I$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sejam deriváveis em I.

Notemos também que a derivada de uma diferença de funções pode ser obtida através de fórmula semelhante à da soma, pois:

$$f(x) = u(x) - v(x) \implies f(x) = u(x) + [-v(x)] \implies f'(x) = u'(x) + [-v'(x)]$$
$$\implies f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

144. *Exemplos*

1º) $f(x) = x + 1 \implies f'(x) = 1 + 0 = 1$

2º) $f(x) = x^2 + 3 \implies f'(x) = 2x + 0 = 2x$

3º) $f(x) = \text{sen } x + \cos x \implies f'(x) = \cos x - \text{sen } x$

4º) $f(x) = x^2 - e^x \implies f'(x) = 2x - e^x$

II. Derivada do produto

145. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em $I =]a, b[$. Provemos que a função $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ também é derivável em I e sua derivada é:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Temos:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$
$$= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x) =$$
$$= [u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)] =$$
$$= \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \cdot \Delta v$$

Então:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como u e v são funções deriváveis, e portanto contínuas, os quatro limites do segundo membro são finitos e, assim, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, isto é, f é derivável em I.

Calculando os limites, temos:

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Em resumo:

$$\boxed{f(x) = u(x) \cdot v(x) \implies f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)}$$

146. No caso particular em que $f(x) = c \cdot v(x)$, isto é, $u(x) = c$ (função constante) e $v(x)$ é uma função derivável, a regra precedente leva ao seguinte resultado:

$f'(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x) = c \cdot v'(x) + 0 \cdot v(x) = c \cdot v'(x)$

Logo:

$$\boxed{f(x) = c \cdot v(x) \implies f'(x) = c \cdot v'(x)}$$

147. *Exemplos*

1º) $f(x) = 3x^4 \implies f'(x) = 3(4x^3) = 12x^3$

2º) $f(x) = 3x^2 + 5x \implies f'(x) = 6x + 5$

3º) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 + 2x) \implies f'(x) = 2x \cdot (x^3 + 2x) + (x^2 + 1)(3x^2 + 2) = 5x^4 + 9x^2 + 2$

4º) $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x \implies f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot (-\text{sen } x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

148. Notemos que a propriedade da derivada do produto pode ser estendida para um produto de n fatores. Assim:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) \implies f'(x) &= u_1'(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) + \\ &+ u_1(x) \cdot u_2'(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) + \ldots + u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n'(x) \end{aligned}}$$

sempre que $x \in I$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sejam deriváveis em I.

Em particular, se $u_1(x) = u_2(x) = \ldots = u_n(x) = u(x)$, esta propriedade se reduz a:

$$\boxed{f(x) = [u(x)]^n \implies f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)}$$

149. *Exemplos*

1º) $f(x) = \underbrace{x^2}_{u_1} \cdot \underbrace{\text{sen } x}_{u_2} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3} \implies f'(x) = \underbrace{2x}_{u_1'} \cdot \underbrace{\text{sen } x}_{u_2} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3} + \underbrace{x^2}_{u_1} \cdot \underbrace{\cos x}_{u_2'} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3} + \underbrace{x^2}_{u_1} \cdot \underbrace{\text{sen } x}_{u_2} \cdot \underbrace{e^x}_{u_3'}$

2º) $f(x) = \text{sen}^4 x = \underbrace{(\text{sen } x)^4}_{u} \implies f'(x) = 4 \cdot \underbrace{\text{sen}^3 x}_{u^3} \cdot \underbrace{\cos x}_{u'}$

3º) $f(x) = e^{5x} = \underbrace{(e^x)^5}_{u} \implies f'(x) = 5 \cdot \underbrace{e^{4x}}_{u^4} \cdot \underbrace{e^x}_{u'}$

EXERCÍCIOS

141. Calcule a derivada da função polinomial $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

Solução

Trata-se de uma soma em que as parcelas têm a forma $a_p x^p$; portanto, sua derivada é $p \cdot a_p x^{p-1}$. Assim, temos:

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n \cdot a_n x^{n-1}$

142. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 8x^{11}$

b) $f(x) = -\frac{7}{5} x^3 - \frac{\sqrt{3}}{7}$

c) $f(x) = 5 + x + 3x^2$

d) $f(x) = 3 + 5x^2 + x^4$

e) $f(x) = x^3 + x^2 + x + 5$

f) $f(x) = 3 + 2x^n + x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$

143. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = e^x \cdot \text{sen } x + 4x^3$ c) $h(x) = (e^x \cdot \cos x - x^2)^4$

b) $g(x) = (x^2 + x + 1)^5$

Solução

a) f deve ser vista como soma de duas parcelas ($e^x \cdot sen\ x$ e $4x^3$); portanto f' é a soma das derivadas das parcelas, sendo que a primeira parcela é um produto.

Então:

$$f'(x) = Df(x) = D(e^x \cdot \text{sen } x) + D(4x^3) =$$
$$= e^x \cdot \text{sen } x + e^x \cdot \cos x + 12x^2$$

b) Fazendo $x^2 + x + 1 = u(x)$, vem $g(x) = [u(x)]^5$, então:

$$g'(x) = 5 \cdot [u(x)]^4 \cdot u'(x) = 5(x^2 + x + 1)^4(2x + 1)$$

c) Fazendo $e^x \cdot cos\ x - x^2 = u(x)$, vem $h(x) = [u(x)]^4$, então:

$$h'(x) = 4 \cdot [u(x)]^3 \cdot u'(x) = 4 \cdot (e^x \cdot \cos x - x^2)^3 \cdot (e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \text{sen } x - 2x)$$

144. Obtenha a derivada de cada função f dada abaixo:

a) $f(x) = (3x^2 + x)(1 + x + x^3)$

b) $f(x) = x^2 (x + x^4)(1 + x + x^3)$

c) $f(x) = (2 + 3x + x^2)^5$

d) $f(x) = (2x + 3)^{52}$

e) $f(x) = x^3 \cdot e^x$

f) $f(x) = x \cdot e^x + \cos x$

g) $f(x) = x^4 \cdot a^{2x}$

h) $f(x) = 3^{3x}$

i) $f(x) = e^{5x + 1}$

j) $f(x) = \cos^5 x$

k) $f(x) = \text{sen}^7 x \cdot \cos^3 x$

l) $f(x) = a \cdot \text{sen } x + b \cdot \cos x$ $(a, b \in \mathbb{R})$

145. Calcule a derivada da função $f(x) = (sen\ x + e^x)^2 (cos\ x + x^3)^3$ no ponto $x_0 = 0$.

146. Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = (3 \cdot sen\ x + 4 \cdot cos\ x)^5$ no ponto da abscissa $x_0 = \pi$.

147. Obtenha a velocidade e a aceleração de um ponto material que percorre um segmento de reta obedecendo à equação horária $s = a \cdot e^{-t} \cdot cos\ t$, com $a \in \mathbb{R}$. (Unidades: SI)

III. Derivada do quociente

150. Sejam $u = u(x)$ e $v = v(x)$ duas funções deriváveis em I e $v(x) \neq 0$ em I. Provemos que a função $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ também é derivável em I e sua derivada é $f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$.

Temos:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} =$$

$$= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} =$$

$$= \frac{[u(x + \Delta x) - u(x)] \cdot v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \frac{u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} =$$

$$= \Delta u \cdot \frac{v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \frac{u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \cdot \Delta v$$

Então:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} -$$
$$- \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

Como u e v são deriváveis e contínuas, os quatro limites do segundo membro são finitos e, portanto, $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ é finito, ou melhor, f é derivável em I.

Calculando os limites, temos:

$$f'(x) = u'(x) \cdot \frac{v(x)}{[v(x)]^2} - \frac{u(x)}{[v(x)]^2} \cdot v'(x)$$

Em resumo:

$$\boxed{f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \implies f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

151. Exemplos

1º) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2} \implies f'(x) = \dfrac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4}$

2º) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1} \implies f'(x) = \dfrac{(2x)(x + 1) - (x^2 + 1)(1)}{(x + 1)^2} =$

$$= \frac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$$

3º) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{a^x} \implies f'(x) = \dfrac{\cos x \cdot a^x - \text{sen } x \cdot a^x \cdot \log_e a}{(a^x)^2} =$

$$= \frac{(\cos x - \text{sen } x \cdot \log_e a)}{a^x}$$

152. Conseqüências

1ª) Derivada da função tangente

Dada a função $f(x) = tg\ x$, sabemos que $f(x) = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}$ e então podemos aplicar a regra da derivada de um quociente:

$u(x) = \text{sen } x \implies u'(x) = \cos x$

$v(x) = \cos x \implies v'(x) = -\text{sen } x$

portanto,

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Logo:

$$\boxed{f(x) = tg\ x \implies f'(x) = \sec^2 x}$$

2ª) Derivada da função $f(x) = [u(x)]^{-n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Dada a função $f(x) = [u(x)]^{-n} = \dfrac{1}{[u(x)]^n}$, podemos aplicar a regra da derivada de um quociente:

$$f'(x) = \frac{0 \cdot [u(x)]^n - 1 \cdot n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)}{[u(x)]^{2n}} = \frac{-n \cdot u'(x)}{[u(x)]^{n+1}} =$$

$$= -n \cdot [u(x)]^{-(n+1)} \cdot u'(x)$$

Em particular, se $u(x) = x$, vem a importante regra:

$$\boxed{f(x) = x^{-n} \implies f'(x) = -n \cdot x^{-(n+1)}}$$

EXERCÍCIOS

148. Derive as seguintes funções:

$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{2}{x^4}$, $h(x) = \dfrac{1}{\text{sen } x}$, $i(x) = \dfrac{7}{e^{2x}}$

Solução

$f(x) = x^{-1} \implies f'(x) = (-1) \cdot x^{-2} = -\dfrac{1}{x^2}$

$g(x) = 2 \cdot x^{-4} \implies g'(x) = 2 \cdot (-4) \cdot x^{-5} = -\dfrac{8}{x^5}$

$h(x) = (\text{sen } x)^{-1} \implies h'(x) = (-1) \cdot (\text{sen } x)^{-2} \cdot \cos x = -\dfrac{\cos x}{\text{sen}^2 x}$

$i(x) = 7 \cdot (e^x)^{-2} \implies i'(x) = 7 \cdot (-2) \cdot (e^x)^{-3} \cdot e^x = -\dfrac{14}{e^{2x}}$

149. Derive as seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x^7}$

b) $f(x) = 3x^{-5}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

d) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 1} + \dfrac{x + 2}{x + 1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x - 2}$

g) $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot \text{sen } x}{e^x}$

h) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x \cdot e^x}$

150. Obtenha a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{cotg } x$

b) $f(x) = \sec x$

c) $f(x) = \text{cossec } x$

d) $f(x) = \text{tg}^2 x$

e) $f(x) = \sec x - \text{tg } x$

f) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \text{tg } x$

g) $f(x) = \dfrac{\text{tg } x}{\text{sen } x + \cos x}$

h) $f(x) = \left(\dfrac{e^x}{\text{tg } x}\right)^2$

151. Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \dfrac{1}{x} + e^x$ no ponto de abscissa $x_0 = -1$.

152. Calcule o valor da derivada da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + e^{-x} + sec^2\, x$ quando $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

153. É dada a função $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$.

a) Determine a derivada.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} y$.

c) Determine os pontos do gráfico em que a tangente passa pela origem.

IV. Derivada de uma função composta (Regra da cadeia)

153. Seja $f\colon A \to B$ uma função dada pela lei $y = f(x)$. Seja $g\colon B \to C$ uma função dada pela lei $z = g(y)$. Existe a função composta $F\colon A \to C$ dada pela lei $z = F(x) = g(f(x))$.

Supondo que f seja derivável no ponto x e g seja derivável no ponto y tal que $y = f(x)$, provemos que F também é derivável em x e sua derivada é $F'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$.

Temos inicialmente:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Notemos que, se Δx tende a zero, então Δy também tende a zero, pois a função $y = f(x)$ é derivável e, portanto, contínua no ponto x. Assim, para valores próximos de x $(\Delta x \to 0)$ a função f assume valores próximos de $y = f(x)$ $(\Delta y \to 0)$.

Então, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Como $z = g(y)$ e $y = f(x)$ são deriváveis, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta y}$ e $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ são ambos finitos; portanto, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$ também. Assim, $z = F(x)$ é derivável e sua derivada é:

$$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x)$$

Em resumo:

$$\boxed{F(x) = g(f(x)) \implies F'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)}$$

154. *Exemplos*

1º) Derivar $F(x) = \cos 2x$.

Fazendo $y = f(x) = 2x$ e $z = g(y) = \cos y$, temos:

$y' = f'(x) = 2$ e $z' = g'(y) = -\text{sen } y$; portanto, vem:

$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (-\text{sen } y) \cdot 2 = -2 \cdot \text{sen } 2x$

2º) Derivar $F(x) = \text{sen}^3 x$.

Fazendo $y = f(x) = \text{sen } x$ e $z = g(y) = y^3$, temos:

$y' = f'(x) = \cos x$ e $z' = g'(y) = 3y^2$; portanto, vem:

$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (3y^2) \cdot \cos x = 3 \cdot \text{sen}^2 x \cdot \cos x$

3º) Derivar $F(x) = e^{7x^2 - 2x}$.

Fazendo $y = 7x^2 - 2x$ e $z = g(y) = e^y$, temos:

$y' = f'(x) = 14x - 2$ e $z' = g'(y) = e^y$; portanto, vem:

$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = e^y \cdot (14x - 2) = (14x - 2) \cdot e^{7x^2 - 2x}$

EXERCÍCIOS

154. Utilizando a regra da função composta, obtenha a derivada de cada função abaixo:

a) $F(x) = \cos^n x \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
b) $F(x) = \operatorname{sen} x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
c) $F(x) = a^{(x^2)} \quad (a \in \mathbb{R}_+)$
d) $F(x) = (f(x))^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
e) $F(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$
f) $F(x) = \operatorname{sen}^3 3x$

Solução

a) Fazendo $y = f(x) = \cos x$ e $z = g(y) = y^n$, temos:
$y' = f'(x) = -\operatorname{sen} x$ e $z' = g'(y) = n \cdot y^{n-1}$, portanto, vem:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (ny^{n-1})(-\operatorname{sen} x) = -n \cdot \cos^{n-1} x \cdot \operatorname{sen} x$

b) Fazendo $y = f(x) = x^n$ e $z = g(y) = \operatorname{sen} y$, vem: $y' = f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ e $z' = g'(y) = \cos y$ e daí:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (\cos y) \cdot (nx^{n-1}) = nx^{n-1} \cdot \cos x^n$

c) Fazendo $y = f(x) = x^2$ e $z = g(y) = a^y$, vem: $y' = f'(x) = 2x$ e $z' = g'(y) = a^y \cdot \log_e a$ e daí:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (a^y \cdot \log_e a)(2x) = 2xa^{(x^2)} \cdot \log_e a$

d) Fazendo $y = f(x)$ e $z = g(y) = y^n$, vem: $y' = f'(x)$ e $z' = g'(y) = ny^{n-1}$, e daí:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = ny^{n-1} f'(x) = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$

e) Fazendo $y = f(x) = \operatorname{sen} x$ e $z = g(y) = \cos y$, vem: $y' = f'(x) = \cos x$ e $z' = g'(y) = -\operatorname{sen} y$, logo:
$F'(x) = g'(y) \cdot f'(x) = (-\operatorname{sen} y)(\cos x) = -\cos x \cdot \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$

f) Fazendo $y = f(x) = 3x$, $z = g(y) = \operatorname{sen} y$ e $t = h(z) = z^3$, temos $y' = f'(x) = 3$, $z' = g'(y) = \cos y$ e $t' = h'(z) = 3z^2$.

Notemos que $F(x) = h(g(f(x)))$, isto é, F é a composta de três funções. Como a regra da composta pode ser generalizada para a composta de n funções, vem:
$F'(x) = h'(z) \cdot g'(y) \cdot f'(x) = (3z^2)(\cos y)(3) = (3 \cdot \operatorname{sen}^2 y)(\cos y)(3) =$
$= 9 \cdot \operatorname{sen}^2 3x \cdot \cos 3x$

155. Obtenha a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $F(x) = \operatorname{sen} 4x$
b) $F(x) = \dfrac{\cos 7x}{x}$
c) $F(x) = a \cdot \operatorname{sen} bx \quad (a, b \in \mathbb{R})$
d) $F(x) = \cos(3x^2 + x + 5)$
e) $F(x) = \operatorname{sen} e^x$
f) $F(x) = x + 3 \cdot \operatorname{tg} 4x$
g) $F(x) = a^{\operatorname{sen} x} \quad (a \in \mathbb{R}_+)$
h) $F(x) = \operatorname{cotg}(3x - 1)$
i) $F(x) = a^{x^2 + 5x + 1} \quad (a \in \mathbb{R}_+)$
j) $F(x) = \operatorname{tg}(\cos x)$
k) $F(x) = \operatorname{tg}^3 2x$
l) $F(x) = e^{\operatorname{sen} 2x}$

156. Calcule o valor da derivada da função $f(x) = \cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x$ no ponto $x_0 = \pi/2$.

157. Calcule o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = e^{x^2 + 5x}$ no ponto de abscissa -1.

158. Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ no ponto de abscissa -2.

159. As derivadas dos termos da seqüência:

$\operatorname{sen} x,\ \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right),\ \operatorname{sen}(x + \pi),\ \ldots,\ \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right),\ \ldots$

também são termos da seqüência?

V. Derivada da função inversa

155. Seja a função $y = f(x)$ bijetora e derivável em I tal que $f'(x) \neq 0$ para $x \in I$. Provemos que a função inversa $x = f^{-1}(y)$ é derivável em $f(I)$ e que $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, sendo $y = f(x)$.

Como f é bijetora e derivável, decorre que $\Delta x \neq 0 \Rightarrow \Delta y \neq 0$; portanto, podemos escrever:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Sendo f derivável e, portanto, contínua, se Δx tende a zero, então Δy também tende a zero. Assim, temos:

$$(f^{-1})'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

Logo,

$$\boxed{x = f^{-1}(y) \implies (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

156. *Conseqüência*

1. Derivada da função logarítmica

Sabemos que a função logarítmica é a inversa da função exponencial:

$y = \log_a x \implies x = a^y$

Já vimos que:

$x = a^y \implies x' = a^y \cdot \ell n\, a$

Empregando a regra ora deduzida, vem:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{a^y \cdot \ell n\, a} = \frac{1}{a^{\log_a x} \cdot \ell n\, a} = \frac{1}{x \cdot \ell n\, a}$$

Em resumo:

$$\boxed{y = \log_a x \implies y' = \frac{1}{x \cdot \ell n\, a}}$$

No caso particular em que $a = e$, temos:

$$\boxed{y = \ell n\, x \implies y' = \frac{1}{x}}$$

2. Derivada da função potência com expoente real

Dada a função $y = x^\alpha$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, temos:

$y = x^\alpha = (e^{\ell n\, x})^{\alpha \cdot \ell n\, x}$

Aplicando a regra de derivação da função logarítmica, obtemos:

$$y' = e^{\alpha \cdot \ell n\, x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot x^{-1} = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$$

Em resumo, fica generalizada para qualquer α real a seguinte regra:

$$\boxed{y = x^\alpha \implies y' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}}$$

3. Derivada da função arc sen

Sabemos que a função $y = arc\ sen\ x$, definida em $I = [-1, 1]$ com imagens em $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, é a inversa de $x = sen\ y$:

$y = \text{arc sen } x \implies x = \text{sen } y$

Já vimos que:

$x = \text{sen } y \implies x' = \cos y$

Empregando a regra da derivada da inversa, vem:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2\, y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Em resumo:

$$\boxed{y = \text{arc sen } x \implies y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

4. Derivada da função arc cos

Sabemos que a função $y = arc\ cos\ x$, definida em $I = [-1, 1]$ com imagens em $[0, \pi]$, é a inversa de $x = cos\ y$:

$y = \text{arc cos } x \iff x = \cos y$

Já vimos que:

$x = \cos y \implies x' = -\text{sen } y$

Empregando a regra da inversa, vem:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{-\text{sen } y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Em resumo:

$$\boxed{y = \text{arc cos } x \implies y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

5. *Derivada da função arc tg*

Dada a função $y = arc\ tg\ x$, de IR em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, sabemos que

$y = \text{arc tg } x \iff x = \text{tg } y$

então:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \text{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Em resumo:

$$\boxed{y = \text{arc tg } x \implies y' = \frac{1}{1 + x^2}}$$

EXERCÍCIOS

160. Determine a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2 x$
b) $f(x) = \log_2 \cos x$
c) $f(x) = \sqrt{x}$
d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$
e) $f(x) = \sqrt{\text{sen } x}$
f) $f(x) = \text{arc sen } x^2$
g) $f(x) = \text{arc cos } e^x$
h) $f(x) = \text{arc tg } (\ell n\ x)$

Solução

a) $f' = \dfrac{1}{x \cdot \ell n\ 2}$

b) Vamos aplicar a regra para funções compostas:

$y = \cos x$ e $z = \log_2 y$ então $f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = \dfrac{1}{y \cdot \ell n\ 2} \cdot (-\text{sen } x) =$

$= -\dfrac{\text{sen } x}{\cos x \cdot \ell n\ 2}$

c) $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \implies f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \implies f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$

e) Fazendo $y = sen\ x$ e $z = \sqrt{y}$, temos:

$f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \cos x = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\text{sen } x}}$

f) Fazendo $y = x^2$ e $z = arc\ sen\ y$, temos:

$f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot 2x = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$

g) Fazendo $y = e^x$ e $z = arc\ cos\ y$, temos:

$f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \cdot e^x = -\dfrac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

h) Fazendo $y = \ell n\ x$ e $z = arc\ tg\ y$, temos:

$f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = \dfrac{1}{1 + y^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x(1 + \ell n^2\ x)}$

161. Determine a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ell n\ x$
b) $f(x) = x^n \cdot \ell n\ x \quad (n \in \mathbb{N})$
c) $f(x) = (ax + b) \cdot \ell n\ x$
d) $f(x) = \text{sen } x \cdot \ell n\ x$
e) $f(x) = \dfrac{\ell n\ x}{\cos x}$
f) $f(x) = \ell n \quad (ax^2 + bx + c)$
g) $f(x) = \ell n\ \text{sen } x$
h) $f(x) = \log_a \log_b x$

162. Determine a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = x^{4/7}$
b) $f(x) = \sqrt[3]{x^8}$
c) $f(x) = x\sqrt{x^7}$
d) $f(x) = \sqrt[5]{\dfrac{3}{x^2}}$
e) $f(x) = \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$
f) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - x^{-2}$
g) $f(x) = \sqrt{ax + b} \quad (a, b \in \mathbb{R})$
h) $f(x) = \sqrt[3]{ax^2 + bx + c} \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$
i) $f(x) = \sqrt{a + b\sqrt{x}} \quad (a, b \in \mathbb{R})$

j) $f(x) = \sqrt{\dfrac{ax^2 + bx + c}{cx^2 + bx + a}}$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

k) $f(x) = \sqrt[3]{\left(\dfrac{ax + b}{ax - b}\right)^2}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

l) $f(x) = \sqrt[3]{(1 + x + x^2)^4}$

m) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^2 + 1}$

n) $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \sqrt{3x + 2}$

o) $f(x) = \dfrac{3 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

p) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x} - 1}$

q) $f(x) = \cos \sqrt{x}$

r) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

s) $f(x) = \ell n \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$

t) $f(x) = \log_a \sqrt{1 + x}$

163. Determine a função derivada das seguintes funções:

a) $f(x) = \text{arc sen } 3x$

b) $f(x) = \text{arc cos } x^3$

c) $f(x) = \text{arc tg } \dfrac{1}{x}$

d) $f(x) = x^2 + \text{arc sen } x$

e) $f(x) = \text{arc cos } x - \sqrt{x}$

f) $f(x) = x \cdot \text{arc tg } x$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\text{arc sen } x}$

h) $f(x) = \ell n \text{ arc cos } x$

i) $f(x) = \sqrt{\text{arc tg } x}$

j) $f(x) = x \cdot \text{arc sen } x^2 - e^{x^3}$

k) $f(x) = \text{arc cos } \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

l) $f(x) = \ell n \dfrac{\text{arc sen } x}{\text{arc cos } x}$

164. Obtenha a equação da reta tangente à curva $y = x \cdot \sqrt{x + 1}$ no ponto de abscissa $x_0 = 3$.

165. Obtenha o ponto em que a reta tangente à curva $y = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x - 1}}$ é paralela ao eixo dos x.

166. Obtenha o valor da derivada da inversa da função $f(x) = x^3 + x$ no ponto $x_0 = 1$.

Solução

$$y = x^3 + x \implies \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \implies \frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 1}$$

para $x_0 = 1$, temos $\left[\dfrac{dx}{dy}\right]_{x_0 = 1} = \dfrac{1}{3 + 1} = \dfrac{1}{4}$

167. Dada a função $y = x^3 + x^2 + 4x$, calcule a derivada de sua função inversa no ponto $x_0 = -1$.

168. Dada a função $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$, calcule sua derivada.

Solução

$$f(x) = [u(x)]^{v(x)} = [e^{\ell n\, u(x)}]^{v(x)} = e^{v(x) \cdot \ell n\, u(x)}$$

Aplicando a regra de derivação da função composta, temos:

$y = v(x) \cdot \ell n\, u(x)$ e $z = e^y$

então:

$$f'(x) = z'(y) \cdot y'(x) = e^y \cdot \left[v'(x) \cdot \ell n\, u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x)\right]$$

e finalmente:

$$f'(x) = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x) \cdot \ell n\, u(x) + v(x) \cdot \frac{u'(x)}{u(x)}\right]$$

169. Obtenha a derivada da função $f(x) = (\cos x)^x$.

Solução

Empregando a regra que acaba de ser deduzida, vem:

$$f'(x) = (\cos x)^x \cdot \left[1 \cdot \ell n \cos x + x \cdot \frac{-\text{sen } x}{\cos x}\right] =$$
$$= (\cos x)^x \cdot (\ell n \cos x - x \cdot \text{tg } x)$$

170. Obtenha a derivada de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = (\text{sen } x)^{(x^2)}$

b) $f(x) = x^{(x^3)}$

c) $f(x) = x^{(e^x)}$

d) $f(x) = (e^x)^{\text{tg } 3x}$

VI. Derivadas sucessivas

157. Seja f uma função contínua em um intervalo I e seja I_1 o conjunto dos pontos de I em que f é derivável. Em I_1 já definimos a função f', chamada *função derivada primeira* de f. Seja I_2 o conjunto dos pontos de I_1 em que f' é derivável. Em I_2 podemos definir a função derivada de f' que chamaremos de *derivada segunda* de f e indicaremos por f''.

Repetindo o processo, podemos definir as derivadas terceira, quarta, etc. de f. A derivada de ordem n de f representaremos por $f^{(n)}$.

158. *Exemplos*

1º) Calcular as derivadas de $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$.
Temos:

$f'(x) = 6x + 5$

$f''(x) = 6$

$f'''(x) = f^{(4)}(x) = f^{(5)}(x) = \ldots = 0$

2º) Calcular as derivadas de $f(x) = sen\ 2x$.
Temos:

$f'(x) = 2 \cdot \cos 2x$

$$f''(x) = -4 \cdot \text{sen}\ 2x = 2^2 \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -8 \cdot \cos 2x = 2^3 \cdot \cos(2x + \pi)$$

$$f^{(n)} = 2^n \cdot \cos\left(2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right)$$

EXERCÍCIOS

171. Calcule as derivadas sucessivas para cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 1$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$
c) $f(x) = e^x$
d) $f(x) = e^{-x}$
e) $f(x) = \cos x$

172. Um ponto móvel sobre uma reta tem abscissa s dada em cada instante t pela lei $s = a \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ em que a, ω e φ são números reais dados. Determine:

a) a lei que dá a velocidade do ponto em cada instante;
b) a velocidade no instante $t = 0$;
c) a lei que dá a aceleração do ponto em cada instante;
d) a aceleração no instante $t = 1$.

173. A função $y = A \cdot sen\ kx$, com $A > 0$, e sua derivada segunda y'' satisfazem identicamente a igualdade $y'' + 4y = 0$. O valor da derivada primeira y', para $x = 0$, é 12. Calcule as constantes de A e k.

CAPÍTULO VIII

Estudo da Variação das Funções

Neste capítulo mostraremos algumas aplicações das derivadas. Veremos que, a partir da derivada de uma função, muitas conclusões podem ser tiradas sobre a variação da função e, portanto, sobre seu gráfico.

I. Máximos e mínimos

159. *Definições*

I) Seja a função $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in D$. Chamamos *vizinhança de* x_0 um intervalo $V =]x_0 - \delta,\ x_0 + \delta[$, em que δ é um número real positivo.

II) Dizemos que x_0 é um *ponto de máximo local* de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que:

$(\forall x)\ (x \in V \implies f(x) \leqslant f(x_0))$.

Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado *máximo local* de f.

III) Dizemos que x_0 é um *ponto de mínimo local* de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que:

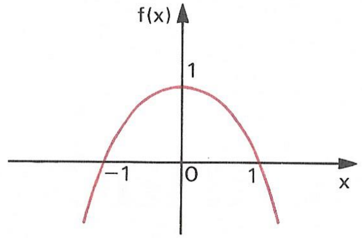
$(\forall x)\ (x \in V \implies f(x) \geqslant f(x_0))$

Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado *mínimo local* de f.

IV) Dizemos que x_0 é um *ponto extremo* ou um *extremante* se x_0 for um ponto de máximo local ou de mínimo local de f. Neste caso, o valor de $f(x_0)$ é chamado valor *extremo* de f.

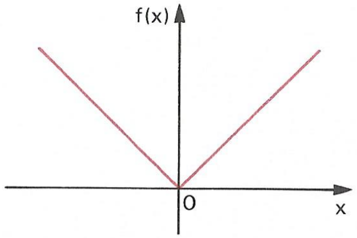
160. Exemplos

1º)



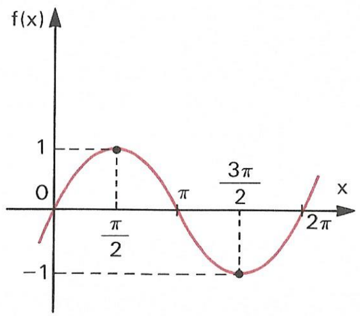
$x = 0$ é o ponto de máximo local da função $f(x) = 1 - x^2$; o máximo local de f é $f(0) = 1$.

2º)



$x = 0$ é o ponto de mínimo local de $f(x) = |x|$; o mínimo local de f é $f(0) = 0$.

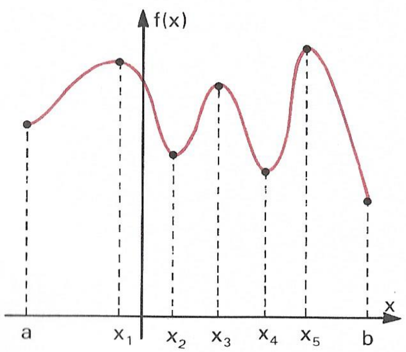
3º)



$x = \frac{\pi}{2}$ é o ponto de máximo local de $f(x) = sen\ x$; o máximo local de f é $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = sen\ \frac{\pi}{2} = 1$.

$x = \frac{3\pi}{2}$ é o ponto de mínimo local de $f(x) = sen\ x$; o mínimo local de f é $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = sen\ \frac{3\pi}{2} = -1$.

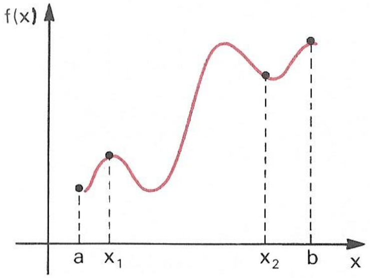
4º)



a, x_2, x_4 e b são pontos de mínimo locais de f, enquanto x_1, x_3 e x_5 são pontos de máximo locais de f.

Os pontos de máximo ou mínimo locais que não são extremos do intervalo em que a função está definida são chamados *pontos de máximo ou mínimo locais interiores*. No 4º exemplo, x_2 e x_4 são pontos de mínimo locais interiores.

5º)



As noções de máximo e mínimo locais referem-se a uma vizinhança do ponto considerado. Na função representada ao lado, existe uma vizinhança V_1 de x_1 em que $f(x) \leqslant f(x_1)$, $\forall x$; por outro lado, existe uma vizinhança V_2 de x_2 em que $f(x) \geqslant f(x_2)$, $\forall x$. Isto leva à conclusão (aparentemente contraditória) de que x_1 é ponto de máximo local, x_2 é ponto de mínimo local e $f(x_1) < f(x_2)$.

161. Definição

Dizemos que $f(x_0)$ é um *valor máximo absoluto* de f se $f(x_0) \geqslant f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_0)$ é o maior valor que f assume.

Dizemos que $f(x_0)$ é um *valor mínimo absoluto* de f se $f(x_0) \leqslant f(x)$ para todo x do domínio de f, isto é, $f(x_0)$ é o menor valor que f assume.

Voltando aos cinco exemplos anteriores, temos:

1º) o valor máximo absoluto de $f(x) = 1 - x^2$ é 1;

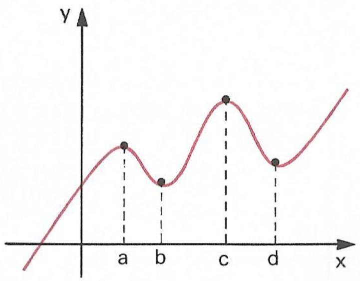
2º) o valor mínimo absoluto de $f(x) = |x|$ é 0;

3º) $f(x) = sen\ x$ tem um máximo absoluto que é 1 e um mínimo absoluto que é -1;

4º) $f(x_5)$ e $f(b)$ são, respectivamente, o máximo e o mínimo absolutos de f.

Observemos que são muitas as funções que têm máximos ou mínimos locais mas não apresentam um máximo ou mínimo absoluto.

Por exemplo, observando o gráfico ao lado, vemos que a e c são pontos de máximo local, b e d são pontos de mínimo local, porém a função não tem máximo absoluto nem mínimo absoluto.



162. *Teorema de Fermat*

Se $f\colon D \to \mathbb{R}$ é uma função derivável no ponto $x_0 \in D$ e x_0 é ponto extremo local interior de f, então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração

Suponhamos que x_0 seja ponto de mínimo local interior de f. Existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para todo $x \in V$, temos:

$$f(x_0) \leqslant f(x) \implies \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0 \text{ para } x < x_0 \\[2mm] \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0 \text{ para } x > x_0 \end{cases}$$

Sendo f derivável em x_0, existe e é finito o limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

que coincide com os limites laterais à esquerda e à direita de x_0. Lembrando do teorema da conservação do sinal para limites, temos:

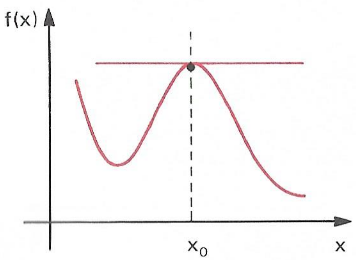
$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leqslant 0 \\[2mm] \displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geqslant 0 \end{array}\right\} \implies f'(x_0) = 0$$

Se x_0 for ponto de máximo local de f, a demonstração é análoga.

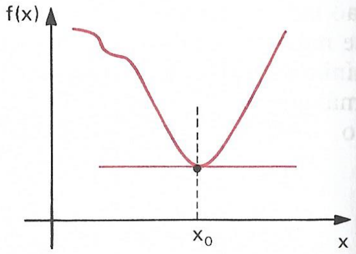
Interpretação geométrica

O teorema de Fermat garante que num extremo local interior de uma função derivável f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

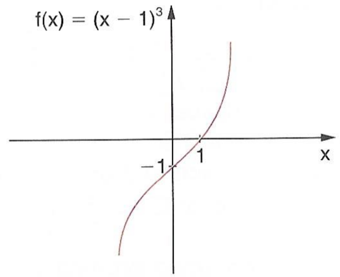
$f(x_0)$ é máximo local interior



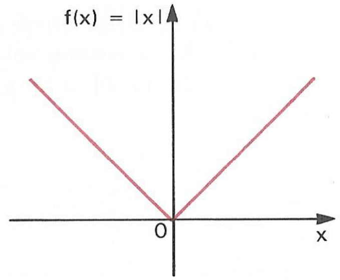
$f(x_0)$ é mínimo local interior



Observemos, porém, que o recíproco do teorema de Fermat é falso, isto é, existem funções f deriváveis no ponto x_0 do seu domínio, $f'(x_0) = 0$ e x_0 não é ponto extremo de f. É o caso, por exemplo, da função $f(x) = (x - 1)^3$. Sua derivada é $f'(x) = 3(x - 1)^2$, então $f'(1) = 0$ e 1 não é ponto extremo.



Observemos ainda que o teorema de Fermat não exclui a possibilidade de x_0 ser ponto extremo sem que se tenha $f'(x_0) = 0$. Isto pode ocorrer se f não é derivável em x_0. Por exemplo, 0 é ponto de mínimo de função $f(x) = |x|$ e não existe $f'(0)$.



II. Derivada — crescimento — decréscimo

163. Neste item vamos provar alguns teoremas que terminam por estabelecer um elo de ligação entre a derivada de uma função e crescimento ou decréscimo desta.

164. *Teorema de Rolle*

Se f é uma função contínua em $[a, b]$, é derivável em $]a, b[$ e $f(a) = f(b)$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in\,]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$.

Demonstração

1º caso: f é constante em $[a, b]$

Neste caso $f'(x) = 0$ em $]a, b[$, isto é, para todo $x_0 \in\,]a, b[$, temos $f'(x_0) = 0$.

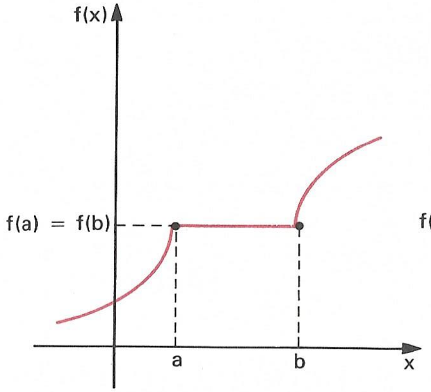
2º caso: f não é constante em $[a, b]$

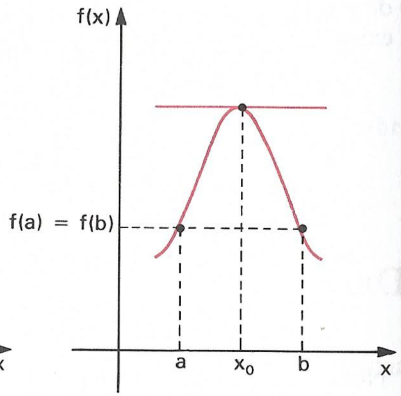
Neste caso existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) \neq f(a) = f(b)$. Como f é contínua em $[a, b]$, f tem um mínimo e um máximo em $[a, b]$. Se existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) > f(a) = f(b)$, então o valor $f(a) = f(b)$ não é o máximo de f em $[a, b]$; portanto, f assume valor máximo em algum ponto $x_0 \in]a, b[$ e, sendo f derivável em $]a, b[$, temos $f'(x_0) = 0$.

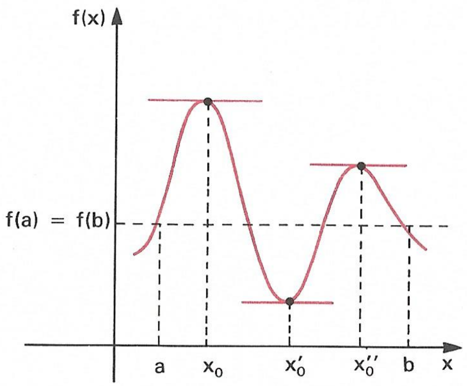
Se existe $x \in]a, b[$ tal que $f(x) < f(a) = f(b)$, a prova é análoga.

Interpretação geométrica

O teorema de Rolle afirma que, se uma função é derivável em $]a, b[$, contínua em $[a, b]$ e assume valores iguais nos extremos do intervalo, então em algum ponto de $]a, b[$ a tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.







165. *Teorema de Lagrange ou teorema do valor médio*

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe ao menos um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$.

Demonstração

1º caso: $f(a) = f(b)$

Neste caso $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$ e, pelo teorema de Rolle, existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0 = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

2º caso: $f(a) \neq f(b)$

Consideremos a função $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$.

Observemos que:

I) g é contínua em $[a, b]$ por ser a diferença entre $f(x) - f(a)$ e $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$ que são contínuas em $[a, b]$;

II) g é derivável em $]a, b[$ e sua derivada é $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$;

III) nos extremos do intervalo $[a, b]$, temos:

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = 0$$

portanto, $g(a) = g(b) = 0$.

Sendo assim, é válido para g o teorema de Rolle: existe $x_0 \in]a, b[$ tal que $g'(x_0) = 0$, isto é,

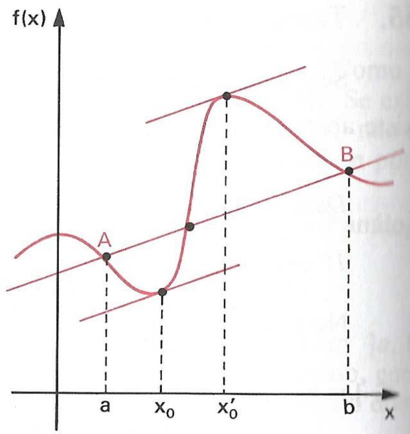
$$g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ou ainda:

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretação geométrica

Segundo o teorema de Lagrange, se f é função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existe um ponto $x_0 \in]a, b[$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x_0, f(x_0))$ é paralela à reta determinada pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, por terem coeficientes angulares iguais.



EXERCÍCIOS

174. Dada $f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 5x$, verifique se estão satisfeitas as condições para validade do teorema de Rolle em cada um dos seguintes intervalos: $[0, 1]$, $\left[1, \frac{5}{2}\right]$ e $\left[0, \frac{5}{2}\right]$. Determine um número α em cada um desses intervalos de modo que $f'(\alpha) = 0$.

Solução

Notemos que f é derivável e contínua em $\mathbb{R}$; portanto, também é nos intervalos dados.

Temos $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ e $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{75}{4}$. Assim, o teorema de Rolle é válido só no intervalo $[0, 1]$. Determinemos $\alpha \in [0, 1]$ tal que $f'(\alpha) = 0$:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x + 5 = 0 \implies x = \frac{9 + \sqrt{21}}{12} \text{ ou } x = \frac{9 - \sqrt{21}}{12}$$

portanto, $\alpha = \dfrac{9 - \sqrt{21}}{12}$ porque $\dfrac{9 - \sqrt{21}}{12} \in [0, 1]$.

Nos exercícios 175 a 177, verifique se as hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeitas pela função f no intervalo I.

175. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x - 4}$ e $I = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

176. $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x < 2 \\ 7 - x & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$ e $I = [-3, 7]$

177. $f(x) = 1 - |x|$ e $I = [-1, 1]$

178. O recíproco do teorema de Rolle não é válido. Dê exemplos de funções para as quais a tese do teorema é válida, porém uma das hipóteses não é.

Nos exercícios 179 a 181, verifique que as hipóteses do teorema de Rolle são satisfeitas pela função f no intervalo I. Em seguida, obtenha um $c \in I$ que satisfaça a tese do teorema.

179. $f(x) = x^2 - 6x + 8$ e $I = [2, 4]$

180. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ e $I = [-1, 2]$

181. $f(x) = x^3 - 16x$ e $I = [0, 4]$

182. Dada $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5$, verifique que as condições para validade do teorema do valor médio estão satisfeitas para $a = -1$ e $b = 2$. Encontre todos os números α,

$\alpha \in]-1, 2[$, tal que $f'(\alpha) = \dfrac{f(2) - f(-1)}{(2) - (-1)}$.

Solução

Notemos que f é derivável e contínua em $\mathbb{R}$; portanto, também é no intervalo $[-1, 2]$.

Sua derivada é $f'(x) = 3x^2 + 6x$. Então:

$$f'(\alpha) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \implies 3\alpha^2 + 6\alpha = \frac{15 - (-3)}{2 - (-1)} \implies$$

$3\alpha^2 + 6\alpha - 6 = 0 \implies \alpha = -1 + \sqrt{2}$ ou $\alpha = -1 - \sqrt{2}$.

Como queremos α no intervalo $]-1, 2[$, só convém $\alpha = -1 + \sqrt{2}$.

Nos exercícios 183 a 186 verifique que as hipóteses do teorema de Lagrange são satisfeitas pela função f no intervalo I. Em seguida, obtenha um $c \in I$ que satisfaça a tese do teorema.

183. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ e $I = [0, 1]$

184. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e $I = [0, 1]$

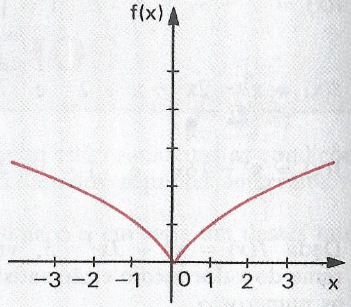
185. $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$ e $I = [-8, 6]$

186. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x}{x - 1}$ e $I = [2, 6]$

187. Dada $f(x) = x^{2/3}$, esboce o gráfico de f e mostre que não existe um número α, $\alpha \in]-3, 3[$ tal que $f'(\alpha) = \dfrac{f(3) - f(-3)}{(3) - (-3)}$. Qual a hipótese do teorema do valor médio que não se verificou?

Solução

Dando valores a x e calculando os correspondentes valores de $f(x)$, podemos obter pontos e esboçar o gráfico ao lado.



Temos $f'(x) = \dfrac{2}{3} \cdot x^{-1/3}$, então:

$$f'(\alpha) = \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)} \implies$$

$$\implies \frac{2}{3\sqrt[3]{\alpha}} = \frac{3^{2/3} - (-3)^{2/3}}{3 - (-3)} = 0$$

e não existe α satisfazendo esta última igualdade.
A função f é contínua em $\mathbb{R}$ mas não é derivável no ponto $x = 0$ que está no intervalo $]-3, 3[$. Isto invalida uma das hipóteses do teorema do valor médio.

Nos exercícios 188 a 190, verifique que hipótese do teorema de Lagrange não está satisfeita pela função f no intervalo I.

188. $f(x) = \dfrac{4}{(x - 3)^2}$ e $I = [1, 6]$

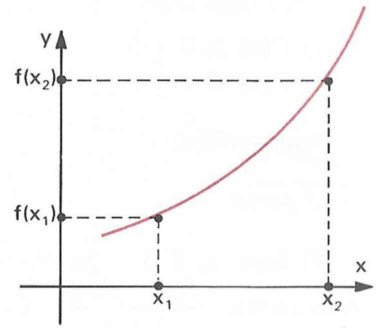
189. $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x - 4}$ e $I = [1, 2]$

190. $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{se } x < 1 \\ 8 - 3x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$ e $I = [-2, 4]$

166. Lembremos agora os conceitos de função crescente e de função decrescente num intervalo I.

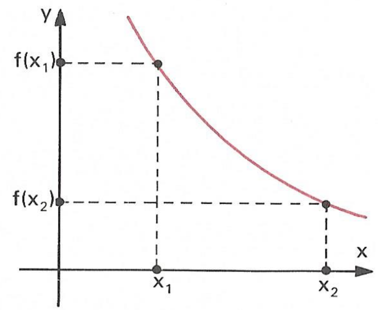
Uma função $f: D \to \mathbb{R}$ é *crescente* num intervalo I ($I \subset D$) quando, qualquer que seja $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$, temos:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$$



Uma função $f: D \to \mathbb{R}$ é *decrescente* num intervalo I ($I \subset D$) quando, qualquer que seja $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$, temos:

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$



Podemos também dizer que f é uma função crescente num intervalo I quando, aumentando o valor atribuído a x, aumenta o valor de $f(x)$.

Notemos ainda que, se f é crescente, então $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ para todos $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 \neq x_2$, pois numerador e denominador têm necessariamente sinais iguais.

Podemos também dizer que f é uma função decrescente num intervalo I quando, aumentando o valor atribuído a x, diminui o valor de $f(x)$.

Notemos ainda que, se f é decrescente, então $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ para todos $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 \neq x_2$, pois numerador e denominador têm necessariamente sinais contrários.

167. Teorema

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então:

I) $f'(x) \geqslant 0$ em $]a, b[\iff f$ é crescente em $[a, b]$
II) $f'(x) \leqslant 0$ em $]a, b[\iff f$ é decrescente em $[a, b]$

Demonstração

1ª parte: $\Longleftarrow$

I) Seja $x_0 \in I =]a, b[$. Dado um outro ponto $x \in I$, consideremos o quociente $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Conforme vimos no item anterior, se f é crescente em I, este quociente é positivo. De acordo com o teorema da conservação do sinal, decorre que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geqslant 0.$

II) Pode-se provar analogamente.

2ª parte: $\Longrightarrow$

I) Sejam $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $x_1 < x_2$.

Como $[x_1, x_2] \subset [a, b]$, f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$. De acordo com o teorema de Lagrange, existe $x_0 \in]x_1, x_2[$ tal que $f'(x_0) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, isto é, $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot f'(x_0)$.

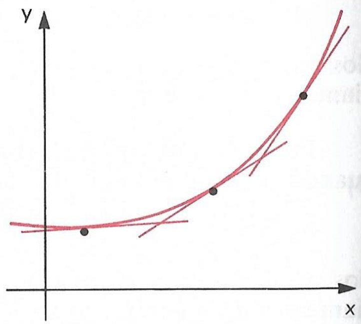
Sendo $f'(x) \geqslant 0$ em $]a, b[$, decorre $f'(x_0) \geqslant 0$. Como $x_2 - x_1 > 0$, vem: $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, isto é: $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ e, portanto, f é crescente.

II) Analogamente.

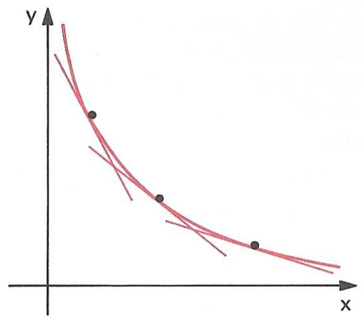
Interpretação geométrica

O teorema acaba de mostrar que:

I) Uma função f ser crescente em $[a, b]$, quando f é derivável, equivale a $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$, isto é, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f são não negativos.

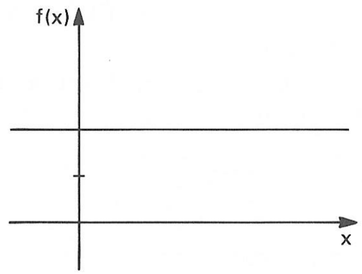


II) Uma função f ser decrescente em $[a, b]$, quando f é derivável, equivale a $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in]a, b[$, isto é, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico f são não positivos.

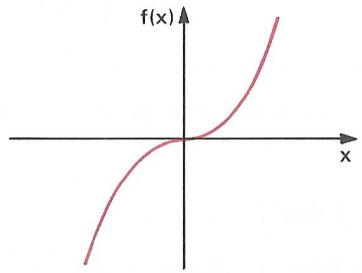


168. Exemplos

1º) A função $f(x) = 2$ é constante em $\mathbb{R}$. Sua derivada é $f'(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

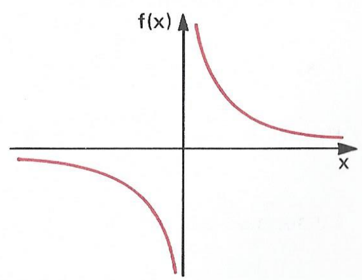


2º) A função $f(x) = x^3$ é crescente em $\mathbb{R}$. Sua derivada é $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.



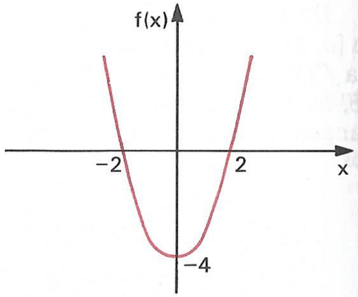
3º) A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é decrescente em qualquer intervalo que não contenha o zero. Sua derivada é

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^*.$$



4º) A função $f(x) = x^2 - 4$ é decrescente em qualquer intervalo contido em $\mathbb{R}_-$ e crescente em qualquer intervalo de $\mathbb{R}_+$. Sua derivada é $f'(x) = 2x$ tal que:

$$f'(x) \leqslant 0 \text{ se } x \in \mathbb{R}_-$$
$$f'(x) \geqslant 0 \text{ se } x \in \mathbb{R}_+$$



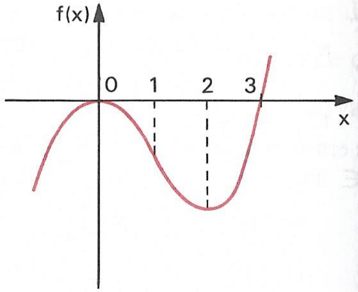
5º) A função $f(x) = x^3 - 3x^2$ tem derivada $f'(x) = 3x^2 - 6x$, então:

$$x \leqslant 0 \text{ ou } x \geqslant 2 \implies f'(x) \geqslant 0$$
$$0 \leqslant x \leqslant 2 \implies f'(x) \leqslant 0$$

portanto:

f é crescente $\iff x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 2$

f é decrescente $\iff 0 \leqslant x \leqslant 2$



EXERCÍCIOS

191. Determine o conjunto dos valores de x para os quais a função $f(x) = x^2 - \log_e x$ é crescente.

Solução

Devemos calcular a derivada de f e determinar em que conjunto a função f' é não negativa. Temos:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$$f'(x) \geqslant 0 \implies \frac{2x^2-1}{x} \geqslant 0 \implies -\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant x < 0 \text{ ou } x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lembrando que $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, vem a resposta: f é crescente para $x \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

192. Determine o conjunto dos valores de x para os quais cada função abaixo é *crescente*.

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 13$
$g(x) = 2 \cdot \cos x - x + 1$
$h(x) = \text{sen } x - \cos x$
$i(x) = ||x| - 1|$

193. Para que valores de x é decrescente a função $f(x) = |2 \cdot |x| - 4|$?

Solução

Vamos definir f através de várias sentenças. Como primeiro passo, temos:

$$f(x) = \begin{cases} |2x - 4|, & \text{se } x \geqslant 0 \\ |-2x - 4|, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

e finalmente vem:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & \text{se } x \geqslant 2 \\ -2x + 4, & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x + 4, & \text{se } -2 < x < 0 \\ -2x - 4, & \text{se } x \leqslant -2 \end{cases}$$

A derivada de f é, portanto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } -2 < x < 0 \text{ ou } x > 2 \\ -2, & \text{se } 0 < x < 2 \text{ ou } x < -2 \end{cases}$$

e não é definida para $x = 0$ ou 2 ou -2.

Assim, f é decrescente para x pertencente ao conjunto $[0, 2] \cup]-\infty, -2]$.

194. Determine o conjunto dos valores de x para os quais cada função abaixo é *decrescente*:

$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1;$
$g(x) = e^x - x,$
$h(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 1},$
$i(x) = \text{arc sen } x.$

Em cada um dos exercícios de 195 a 203, determine os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que é decrescente.

195. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$

196. $f(x) = x^4 + 4x$

197. $f(x) = x^5 - \frac{25}{3}x^3 + 20x - 2$

198. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

199. $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

200. $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x - 1}$

201. $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{se } x \leqslant 2 \\ 7 - x, & \text{se } x > 2 \end{cases}$

202. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se } x \leqslant 1 \\ x^2 + 2x - 3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

203. $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{se } x \leqslant 0 \\ x, & \text{se } 0 < x \leqslant 1 \\ 2x - x^3, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

204. Estude a função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = log_e x + log_e(x + 2)$, determinando os intervalos em que é crescente ou decrescente.

205. Descreva o crescimento e o decréscimo da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2, & \text{se } -1 < x \leqslant 1 \\ e^{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

206. Descreva o crescimento e o decréscimo da função $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2 + 3 \cdot sen\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

207. Determine para que valores de x é crescente ou decrescente a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{cos\, x}$.

208. Prove que se $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então a função $f(x) = \frac{sen\, x}{x}$ é decrescente.

209. Prove que o polinômio $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 1$ admite um único zero real.
Sugestão: calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e estude $f'(x)$.

210. Esboce o gráfico de uma função f para a qual são verificadas as seguintes hipóteses:

a) f é contínua em $\mathbb{R}$
b) $f(3) = 2$
c) $f'(x) = -1$ se $x < 3$
$f'(x) = 1$ se $x > 3$

211. Prove que, se f é uma função crescente em I, então $g = -f$ é decrescente em I.

Solução

Sejam $x_1 \in I$ e $x_2 \in I$ com $x_1 < x_2$. Temos:
$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leqslant f(x_2) \implies -f(x_1) \geqslant -f(x_2) \implies g(x_1) \geqslant g(x_2)$
então g é decrescente em I.

212. Prove que, se f é uma função crescente em I e h é definida em I pela lei $h(x) = \frac{1}{f(x)}$, então h é decrescente em I.

213. Prove que, se f é crescente num intervalo I, g é crescente em I e existe $f \circ g$, então $f \circ g$ é crescente em I.

III. Determinação dos extremantes

169. Dada uma função f, definida e derivável em $I =]a, b[$, o teorema de Fermat garante que os valores de x que anulam f', isto é, as raízes da equação $f'(x) = 0$ são possivelmente extremantes de f.

Assim, por exemplo, os possíveis extremantes da função $f(x) = x^4 - 4x^3$ são as raízes da equação $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$, isto é, 0 e 3. Em princípio, tanto 0 quanto 3 podem ser ponto de máximo ou ponto de mínimo ou não ser extremante. Com toda certeza nenhum número diferente desses dois é extremante por não anular f'. A questão agora é saber qual das alternativas é correta para 0 ou para 3.

170. Mais geralmente, dado um número $x_0 \in]a, b[$ tal que $f'(x_0) = 0$, como determinar se x_0 é ou não extremante de f e ainda, sendo extremante, como saber se x_0 é ponto de máximo ou de mínimo?

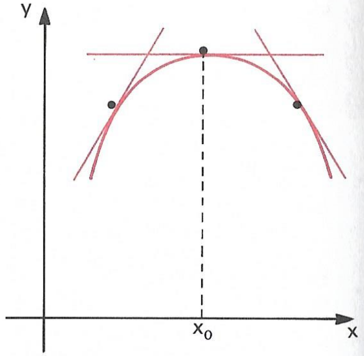
1ª resposta: x_0 é ponto de máximo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 *tal que* $f'(x)$ é positiva à esquerda e negativa à direita de x_0.

De fato, se existir uma vizinhança V de x_0 com a propriedade citada, temos para todo $x \in V$:

$$x < x_0 \implies f'(x) > 0 \implies f(x) \text{ crescente} \implies f(x) \leqslant f(x_0)$$
$$x > x_0 \implies f'(x) < 0 \implies f(x) \text{ decrescente} \implies f(x) \leqslant f(x_0)$$

e, então, x_0 é um ponto de máximo local.

O gráfico ao lado mostra que, numa vizinhança de um ponto x_0 de máximo local, as retas tangentes à curva passam de coeficiente angular positivo (à esquerda de x_0) para negativo (à direita de x_0). E o coeficiente angular é justamente a derivada de f.



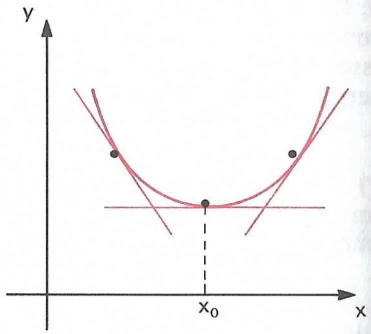
2ª resposta: x_0 é ponto de mínimo local de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $f'(x)$ é negativa à esquerda e positiva à direita de x_0.

De fato, se existir uma vizinhança V de x_0 com a propriedade referida, temos para todo $x \in V$:

$$x < x_0 \implies f'(x) < 0 \implies f(x) \text{ decrescente} \implies f(x) \geqslant f(x_0)$$
$$x > x_0 \implies f'(x) > 0 \implies f(x) \text{ crescente} \implies f(x) \geqslant f(x_0)$$

e, então, x_0 é um ponto de mínimo local.

O gráfico ao lado mostra que, numa vizinhança de um ponto x_0 de mínimo local, as retas tangentes à curva passam de coeficiente angular negativo (à esquerda de x_0) para positivo (à direita de x_0).



3ª resposta: x_0 não é extremante de f se existir uma vizinhança V de x_0 tal que para todo $x \in V$ e $x \neq x_0$ tem-se $f'(x)$ sempre com mesmo sinal.

A figura 1 mostra que, se existir uma vizinhança V de x_0 tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in V$ e $x \neq x_0$, então x_0 não é extremante. A figura 2 mostra, analogamente, para o caso em que $f'(x) < 0$, que x_0 não é extremante.

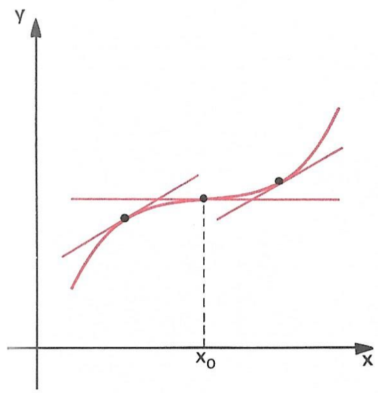


figura 1

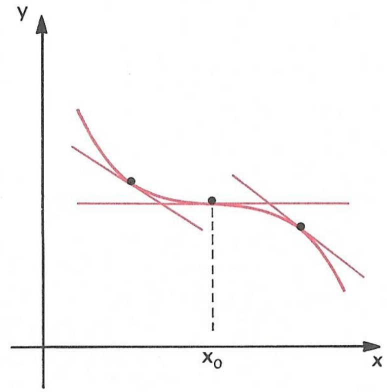


figura 2

171. *Exemplos*

1º) Verificar se $f(x) = x^4 - 4x^3$ tem extremante.

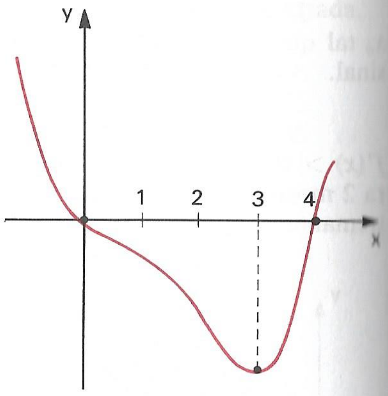
Já vimos que $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ tem raízes 0 e 3.

Analisemos a variação de sinal da função $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2 (x - 3)$:

		0		3		x
x^2	+		+		+	
$x - 3$	−		−		+	
$f'(x)$	−		−		+	

Existem vizinhanças de *0* em que $f'(x) < 0$, portanto, *0* não é extremante de *f*. Há vizinhanças de *3* em que $f'(x)$ passa de negativa a positiva, isto é, *3* é ponto de mínimo local.

O gráfico ao lado ilustra como varia a função *f*.



2º) Quais são os extremantes da função $f:]0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 \, sen \, x + cos \, 2x$?

Calculando a derivada:

$$f'(x) = 2 \cdot \cos x - 2 \cdot \text{sen } 2x = 2 \cdot \cos x - 4 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x =$$
$$= 2 \cdot \cos x \cdot (1 - 2 \cdot \text{sen } x)$$

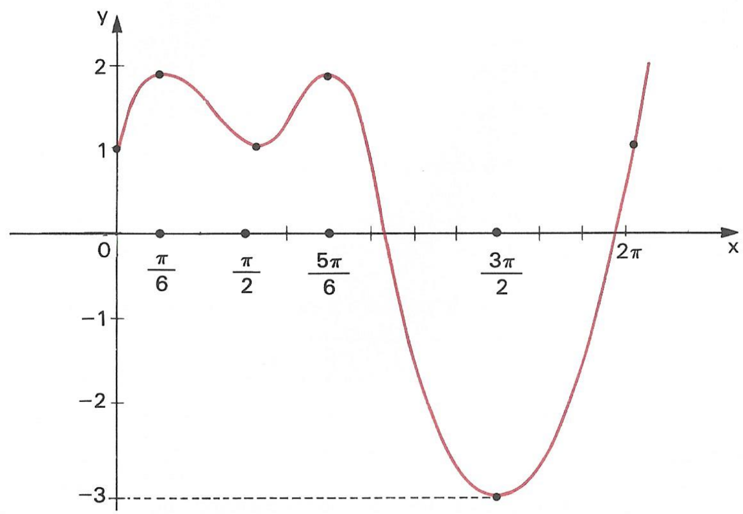
Os valores de *x* que anulam $f'(x)$ são as raízes das equações $cos \, x = 0$ e $sen \, x = \frac{1}{2}$, isto é, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$.

Analisando o sinal de $f'(x)$, temos:

	0 – $\pi/6$	$\pi/6$ – $\pi/2$	$\pi/2$ – $5\pi/6$	$5\pi/6$ – $3\pi/2$	$3\pi/2$ – 2π
cos x	+	+	−	−	+
1 − 2 sen x	+	−	−	+	+
f'(x)	+	−	+	−	+

Verificamos que $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ são pontos de máximo local, enquanto $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ são pontos de mínimo local.

O gráfico da função *f* confirma nossa análise.



EXERCÍCIOS

Nos exercícios 214 a 224, determine os extremantes da função *f*.

214. $f(x) = -x^2 - 5x - 4$

215. $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$

216. $f(x) = x^3 - 27x + 1$

217. $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

218. $f(x) = (x - 8)^3 (x - 6)^4$

219. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 5x - 6}$

220. $f(x) = \cos 3x$

221. $f(x) = \text{sen}\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

222. $f(x) = x \cdot \ell n \, x$

223. $f(x) = \ell n \, (x^2 + 1)$

224. $f(x) = e^{x^3 - 3x}$

225. Calcule o valor máximo assumido pela função $f(x) = e^{-(x-a)^2}$.

Solução

$f'(x) = -2(x - a) \cdot e^{-(x-a)^2}$

$f'(x) = 0 \implies -2(x - a) \cdot e^{-(x-a)^2} = 0 \implies x = a$

Como $e^{-(x-a)^2} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$x < a \implies x - a < 0 \implies f'(x) > 0$

$x > a \implies x - a > 0 \implies f'(x) < 0$

Assim $x = a$ é um ponto de máximo local de f. O valor máximo de f é:

$f(a) = e^{-(a-a)^2} = e^0 = 1$.

Nos exercícios 226 a 231, calcule os valores extremos de f.

226. $f(x) = x^2 - 4x - 1$

227. $f(x) = x^4 + 8x$

228. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

229. $f(x) = x^2 e^x$

230. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

231. $f(x) = (x - 1)^{2/3}$

Nos exercícios 232 a 235, determine as coordenadas dos pontos extremos da função f.

232. $f(x) = x^3 - 9x$

233. $f(x) = \dfrac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

234. $f(x) = \dfrac{1 - x^3}{x^2}$

235. $f(x) = \dfrac{\ell n\, x}{x^2}$

236. Calcule a e b de modo que a função $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ tenha um extremo relativo em $(1, 5)$.

237. Obtenha os extremos absolutos de $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ no intervalo $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$.

Solução

Como f é derivável em $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$, apliquemos o teorema de Fermat:

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 3(x + 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$ e os zeros de f' são os números -1 e $\frac{1}{3}$.

Analisando a variação de sinal de f', temos:

		-1		$1/3$		x
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	

então -1 é ponto de máximo interior e $1/3$ é ponto de mínimo interior. Calculemos o valor de f nesses pontos críticos e nos extremos do intervalo $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$:

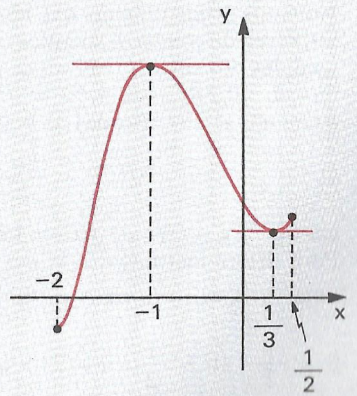
$f(-2) = -8 + 4 + 2 + 1 = -1$, $f(-1) = -1 + 1 + 1 + 1 = 2$,

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} + 1 = \frac{22}{27}$ e $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{7}{8}$

O valor máximo absoluto de f no intervalo $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ é o maior dos números $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f(-1)$, portanto é $f(-1) = 2$.

O valor mínimo absoluto de f no intervalo $\left[-2, \frac{1}{2}\right]$ é o menor dos números $f(-2)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ e $f\left(\frac{1}{3}\right)$; portanto é $f(-2) = -1$.

O gráfico da função ilustra o exposto.



238. Obtenha os extremos absolutos de $f(x) = (x - 2)^{2/3}$ no intervalo $[1, 5]$.

239. Dada a função $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$, obtenha os extremos absolutos de f no intervalo $[3, 6]$.

240. Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Sua altura h (metros), em relação ao solo, é dada por $h = 30 + 20t - 5t^2$, em que t indica o número de segundos decorridos após o lançamento. Em que instante a pedra atingirá sua altura máxima?

241. Um móvel desloca-se sobre um eixo de modo que sua abscissa s no instante t é dada por $s = a \cdot cos\,(kt + \ell)$, sendo a, k, ℓ constantes dadas.

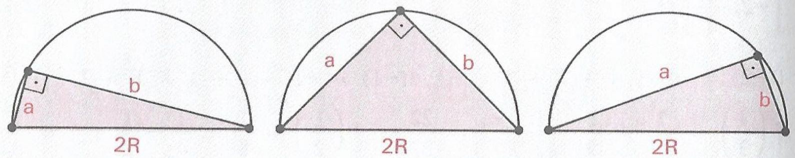
Determine:

a) instantes e posições em que é máxima a velocidade do móvel;

b) instantes e posições em que é mínima a aceleração do móvel.

242. Um triângulo está inscrito numa semicircunferência de raio R. Seus lados medem a, b e $2R$. Calcule a e b quando a área do triângulo é máxima.

Solução



Notemos primeiramente que numa semicircunferência de raio R é possível inscrever diferentes triângulos, todos retângulos. Observemos que a e b, medidas dos catetos, variam de um triângulo para outro e percorrem o intervalo $]0, 2R[$, isto é, $0 < a < 2R$ e $0 < b < 2R$. Para um mesmo triângulo são verificadas as seguintes relações:

$$S = \frac{ab}{2} \quad \text{e} \quad a^2 + b^2 = 4R^2$$

em que S é a área do triângulo.
Para determinarmos o máximo de S devemos colocar S como função de uma variável só (a ou b). Eliminando b, pois $b = \sqrt{4R^2 - a^2}$, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{4R^2 - a^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4R^2a^2 - a^4}$$

Provemos que S tem um ponto de máximo:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{8R^2a - 4a^3}{2\sqrt{4R^2a^2 - a^4}} = \frac{2R^2a - a^3}{\sqrt{4R^2a^2 - a^4}}$$

$S' = 0 \implies 2R^2a - a^3 = 0 \implies a = R\sqrt{2}$

$0 < a < R\sqrt{2} \implies a^2 < 2R^2 \implies a^3 < 2R^2a \implies S' > 0$

$R\sqrt{2} < a < 2R \implies 2R^2 < a^2 \implies 2R^2a < a^3 \implies S' < 0$

e, então, $a = R\sqrt{2}$ é um ponto de máximo local.

Conclusão: O triângulo de área máxima é aquele em que $a = R\sqrt{2}$ e $b = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$, isto é, é o triângulo isósceles.

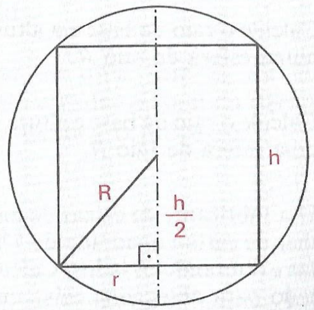
243. Um retângulo de dimensões x e y tem perímetro $2a$ (a é constante dada). Determine x e y para que sua área seja máxima.

244. Calcule o perímetro máximo de um trapézio que está inscrito numa semicircunferência de raio R.

245. Calcule o raio da base e a altura do cilindro de volume máximo que pode ser inscrito numa esfera de raio R.

Solução

A figura ao lado é uma secção da esfera e do cilindro inscrito, feita por um plano contendo o eixo de simetria do cilindro. Observemos que numa esfera podem ser inscritos diferentes cilindros, portanto, r e $\dfrac{h}{2}$ são variáveis. Para um dado cilindro são verificadas as seguintes condições:



$V = \pi r^2 h$, $0 < h < 2R$ e

$$r^2 + \frac{h^2}{4} = R^2$$

em que V é o volume do cilindro.

Para determinarmos o máximo de V, devemos colocar V como função de uma variável só (r ou h). Eliminando r, pois $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$, temos:

$$V = \pi r^2 h = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi R^2 h - \frac{\pi h^3}{4}$$

Provemos que V tem um ponto de máximo:

$$V' = \pi R^2 - \frac{3\pi h^2}{4}$$

$$V' = 0 \implies \frac{3\pi h^2}{4} = \pi R^2 \implies h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$0 < h < \frac{2R}{\sqrt{3}} \implies h^2 < \frac{4R^2}{3} \implies \frac{3\pi h^2}{4} < \pi R^2 \implies V' > 0$$

$$\frac{2R}{\sqrt{3}} < h < 2R \implies h^2 > \frac{4R^2}{3} \implies \frac{3\pi h^2}{4} < \pi R^2 \implies V' < 0$$

e, então, $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ é um ponto de máximo local.

Conclusão: O cilindro de volume máximo é aquele em que $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ e $r = \frac{2R}{\sqrt{3}}$.

246. Calcule o raio da base e a altura do cone de área lateral máxima que é inscritível numa esfera de raio R.

247. Calcule o raio da base e altura do cone de volume mínimo que pode circunscrever uma esfera de raio R.

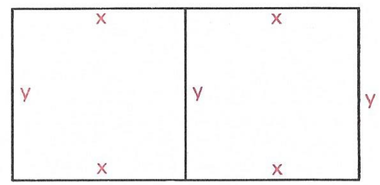
248. Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas abertas a partir de folhas de cartão quadrado de $576\ cm^2$, cortando quadrados iguais nas quatro pontas e dobrando os lados. Calcule a medida do lado do quadrado que deve ser cortado para obter uma caixa cujo volume seja o maior possível.

249. Uma ilha está em um ponto A, a $10\ km$ do ponto B mais próximo sobre uma praia reta. Um armazém está no ponto C, a $20\ km$ de B sobre a praia. Se um homem pode remar à razão de $4\ km/h$ e andar à razão de $5\ km/h$, onde deveria desembarcar para ir da ilha ao armazém no menor tempo possível?

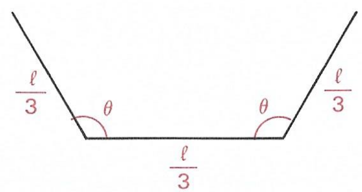
250. Um fio de comprimento L é cortado em dois pedaços, um dos quais formará um círculo e o outro, um quadrado. Como deve ser cortado o fio para que a soma das áreas do círculo e do quadrado seja mínima?

251. Um funil cônico tem raio r e altura h. Se o volume do funil é V (constante), calcule a razão r/h de modo que sua área lateral seja mínima.

252. Um fazendeiro precisa construir dois currais lado a lado, com uma cerca comum, conforme mostra a figura. Se cada curral deve ter uma certa área A, qual o comprimento mínimo que a cerca deve ter?



253. Uma calha de fundo plano e lados igualmente inclinados vai ser construída dobrando-se uma folha de metal de largura ℓ. Se os lados e o fundo têm largura $\ell/3$, calcule o ângulo θ de forma que a calha tenha a máxima secção reta.



172. *Extremantes e derivada segunda*

Um outro processo para determinar se uma raiz x_0 da equação $f'(x) = 0$ é extremante da função f consiste em estudar o sinal da derivada segunda de f no ponto x_0. O teorema seguinte explica o processo.

173. *Teorema*

Seja f uma função contínua e derivável até segunda ordem no intervalo $I =]a, b[$, com derivadas f' e f'' também contínuas em I. Seja $x_0 \in I$ tal que $f'(x_0) = 0$. Nestas condições, temos:

a) se $f''(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f;

b) se $f''(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f.

Demonstração

a) Se $f''(x_0) < 0$ e f'' é contínua, existe uma vizinhança V de x_0 na qual $f''(x) < 0, \forall x \in V$.

Se $f''(x) < 0$, então f' é decrescente em V; portanto, como $f'(x_0) = 0$, decorre que em V, à esquerda de x_0, temos $f'(x) > 0$ e à direita de x_0 temos $f'(x) < 0$. Concluímos assim que x_0 é ponto de máximo local.

b) Prova-se analogamente.

174. Exemplos

1º) Determinar os extremantes de $f(x) = x^4 - 4x^3$.

$$f(x) = x^4 - 4x^3 \implies f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \implies f''(x) = 12x^2 - 24x$$

As raízes da equação $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$ são 0 e 3. Substituindo esses números em $f''(x)$, vem:

$f''(0) = 0 \implies$ nada se conclui sobre 0.
$f''(3) = 12 \cdot 3^2 - 24 \cdot 3 = 36 > 0 \implies 3$ é ponto de mínimo.

2º) Achar os extremantes de $f(x) = 2 \cdot sen\, x + cos\, 2x$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

$$f(x) = 2 \cdot \text{sen } x + \cos 2x \implies f'(x) = 2 \cdot \cos x - 2 \cdot \text{sen } 2x \implies$$
$$\implies f''(x) = -2 \cdot \text{sen } x - 4 \cdot \cos 2x$$

As raízes de $f'(x) = 2 \cdot cos\, x - 2 \cdot sen\, 2x = 0$ são $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6$ e $3\pi/2$. Testando cada uma em $f''(x)$, temos:

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{6} - 4 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = -1 - 2 = -3 < 0$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot \text{sen } \frac{\pi}{2} - 4 \cdot \cos \pi = -2 + 4 = 2 > 0$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -2 \cdot \text{sen } \frac{5\pi}{6} - 4 \cdot \cos \frac{5\pi}{3} = -1 - 2 = -3 < 0$$

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2 \cdot \text{sen } \frac{3\pi}{2} - 4 \cdot \cos 3\pi = +2 + 4 = 6 > 0$$

então $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{5\pi}{6}$ são pontos de máximo e $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2}$ são pontos de mínimo.

175. Observação

Devemos observar, nas condições do último teorema, que se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) = 0$ nada pode ser concluído sobre x_0. Um teorema mais geral que o anterior estabelece finalmente um critério para pesquisar máximos e mínimos locais sem chegar a impasse.

176. Critério geral para pesquisar extremantes

Seja f uma função derivável com derivadas sucessivas também deriváveis em $I =]a, b[$. Seja $x_0 \in I$ tal que

$$\boxed{f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ e } f^{(n)}(x_0) \neq 0}$$

Nestas condições, temos:

I) se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então x_0 é ponto de máximo local de f;
II) se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então x_0 é ponto de mínimo local de f;
III) se n é ímpar, então x_0 não é ponto de máximo local nem de mínimo local de f.

A demonstração deste teorema não cabe num curso deste nível.

177. Exemplo

Pesquisemos os extremantes da função $f(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2 + 1$.

Calculando as sucessivas derivadas de f, temos:

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x = x(x-1)^2(5x-2)$$
$$f''(x) = 20x^3 - 36x^2 + 18x - 2 = (x-1)(20x^2 - 16x + 2)$$
$$f'''(x) = 60x^2 - 72x + 18$$
$$f''''(x) = 120x - 72$$
$$f^{(v)}(x) = 120$$
$$f^{(n)}(x) = 0, \text{ para todo } n > 5.$$

As raízes de $f'(x) = 0$ são $0, 1$ e $2/5$.

Temos ainda:

$$f'(0) = 0 \text{ e } f''(0) = -2 < 0$$
$$f'(1) = 0, \; f''(1) = 0 \text{ e } f'''(1) = 6 \neq 0$$
$$f'\left(\frac{2}{5}\right) = 0 \text{ e } f''\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{18}{25} > 0$$

portanto: *0* é ponto de máximo, $\frac{2}{5}$ é ponto de mínimo e *1* não é ponto de máximo nem de mínimo.

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 254 a 259, determine os extremantes da função *f*, utilizando o critério da segunda derivada.

254. $f(x) = x(x - 2)^3$

255. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$

256. $f(x) = x^2e^x$

257. $f(x) = e^x + e^{-x}$

258. $f(x) = \log_e(1 + x^2)$

259. $f(x) = (x - 1)^{2/3}$

260. Calcule as coordenadas dos pontos extremos do gráfico da função

$$f(x) = \frac{\ell n \frac{x}{2}}{(\ell n\, x)^2}.$$

261. Dada a função $f(x) = -(x - 1)^2$, determine os extremos absolutos de *f* no intervalo $[-2, 3]$.

262. Obtenha os extremos absolutos de $f(x) = x^2 - 4x + 8$ em $[-1, 3]$.

263. Dada a função *f* tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 1 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

determine os extremos absolutos de *f* em $[-6, 5]$.

264. Ache o ponto P_0 situado sobre a hipérbole de equação $xy = 1$ e que está mais próximo da origem.

Solução

Seja $P_0 = (x, y)$. A distância de P_0 à origem é $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Estando P_0 sobre a hipérbole, $y = \frac{1}{x}$ e, então, $d = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}$. Calculemos x para que d seja mínima.

$$d' = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 2 \cdot x^{-3}) = \frac{x - \frac{1}{x^3}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$d' = 0 \implies x - \frac{1}{x^3} = 0 \implies x^4 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

e, portanto, $P_0 = (1, 1)$ ou $P_0 = (-1, -1)$.

265. Ache o ponto da curva $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 20$ que está a distância mínima do ponto $(-2, -4)$.

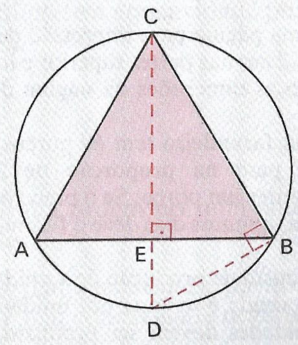
266. Um triângulo iósceles de base *a* está inscrito numa circunferência de raio *R*. Calcule *a* de modo que seja máxima a área do triângulo.

Solução

Seja *ABC* o triângulo isósceles de base $a = AB$ e altura $h = CE$. Sua área é dada pela fórmula

$$S = \frac{1}{2}ah$$

No triângulo retângulo *BCD*, a altura *BE* é média geométrica entre os segmentos que determina a hipotenusa *CD*. Então:



$$(BE)^2 = (EC)(ED) \implies \frac{a^2}{4} = h \cdot (2R - h) \implies a = 2\sqrt{2Rh - h^2}$$

$$S = \frac{1}{2} ah = h\sqrt{2Rh - h^2} = \sqrt{2Rh^3 - h^4}$$

Procuremos o valor máximo de S para $0 < h < 2R$:

$$S' = \frac{6Rh^2 - 4h^3}{2\sqrt{2Rh^3 - h^4}} = \frac{3Rh^2 - 2h^3}{\sqrt{2Rh^3 - h^4}}$$

$$S' = 0 \implies 3Rh^2 - 2h^3 = 0 \implies h = \frac{3R}{2}$$

Como $S = 0$ para $h = 0$ ou $h = 2R$ e

$$h = \frac{3R}{2} \implies S = \sqrt{2R\frac{27R^3}{8} - \frac{81R^4}{16}} = \sqrt{\frac{27R^4}{16}} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$$

então $h = \dfrac{3R}{2}$ é ponto de máximo para S e, neste caso,

$$a = 2\sqrt{2R \cdot \frac{3R}{2} - \frac{9R^2}{4}} = R\sqrt{3}.$$

267. Calcule o raio da base e a altura do cone de máximo volume que se pode inscrever numa esfera de raio R.

268. Determine as dimensões do cone de área total mínima que pode circunscrever uma esfera de raio R.

269. Um fabricante precisa produzir caixas de papelão, com tampa, tendo na base um retângulo com comprimento igual ao triplo da largura. Calcule as dimensões que permitem a máxima economia de papelão para produzir caixas de volume V (dado).

270. Uma página para impressão deve conter $300\ cm^2$ de área impressa, uma margem de $2\ cm$ nas partes superior e inferior e uma margem de $1,5\ cm$ nas laterais. Quais são as dimensões da página de menor área que preenche essas condições?

271. Um fazendeiro tem *80* porcos, pesando *150 kg* cada um. Cada porco aumenta de peso na proporção de *2,5 kg* por dia. Gastam-se R$*2*,00 por dia para manter um porco. Se o preço de venda está a R$ 3,00 por *kg* e cai R$0,03 por dia, quantos dias deve o fazendeiro aguardar para que seu lucro seja máximo?

272. O custo de produção de x unidades de uma certa mercadoria é $a + bx$ e o preço de venda é $c - dx$ por unidade, sendo a, b, c, d constantes positivas. Quantas unidades devem ser produzidas e vendidas para que seja máximo o lucro da operação?

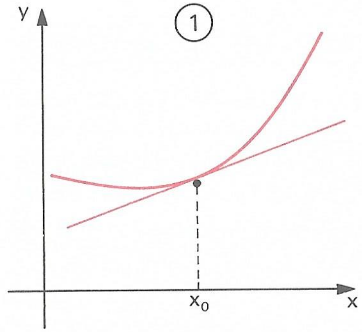
IV. Concavidade

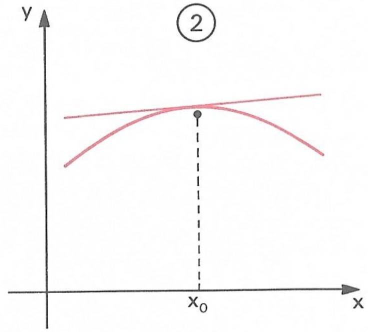
178. *Definição*

Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$ e derivável no ponto $x_0 \in]a, b[$. Dizemos que o gráfico de f tem *concavidade positiva* em x_0 se, e somente se, existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão acima da reta tangente à curva no ponto x_0.

Analogamente, se existe uma vizinhança V de x_0 tal que, para $x \in V$, os pontos do gráfico de f estão abaixo da reta tangente à curva no ponto x_0, dizemos que o gráfico de f tem *concavidade negativa*.

A figura 1 a seguir mostra o gráfico de uma função que tem concavidade positiva em x_0, enquanto a figura 2 ilustra uma concavidade negativa em x_0.





Um critério para determinar se um gráfico tem concavidade positiva ou negativa em x_0 é dado pelo seguinte teorema.

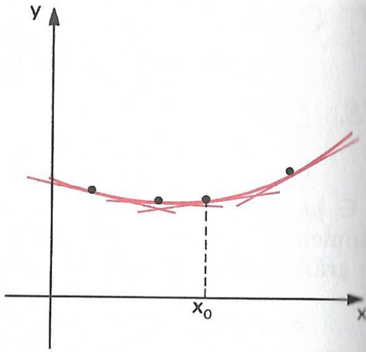
179. *Teorema*

Se f é uma função derivável até segunda ordem no intervalo $I = [a, b]$, x_0 é interno a $[a, b]$ e $f''(x_0) \neq 0$, então:

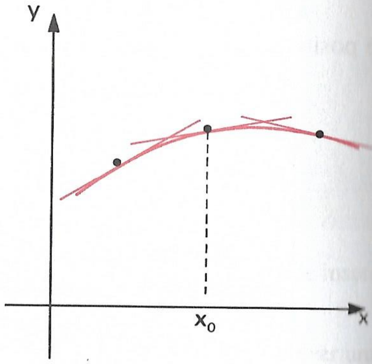
a) quando $f''(x_0) > 0$, o gráfico de f tem concavidade positiva em x_0;
b) quando $f''(x_0) < 0$, o gráfico de f tem concavidade negativa em x_0.

Apenas mostraremos geometricamente que o teorema é válido.

Se $f''(x_0) > 0$, então f' é crescente nas vizinhanças de x_0; portanto, as tangentes ao gráfico têm inclinação crescente e isto só é possível sendo positiva a concavidade.



Analogamente, se $f''(x_0) < 0$, então f' é decrescente nas vizinhanças de x_0, isto é, as retas tangentes à curva têm inclinação decrescente; portanto, a concavidade é negativa.



180. Exemplos

1º) Como é a concavidade do gráfico da função $f(x) = cos\ x$, para $x \in [0, 2\pi]$?

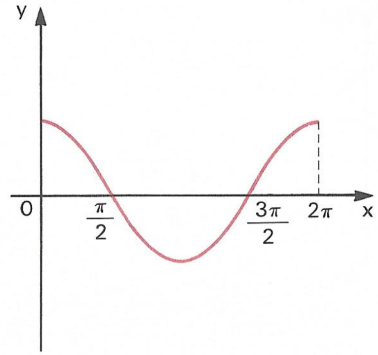
Temos $f'(x) = -sen\ x$ e $f''(x) = -cos\ x$.

Notando que:

$$f''(x) < 0 \iff -\cos x < 0 \iff 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leqslant 2\pi$$

$$f''(x) > 0 \iff -\cos x > 0 \iff \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$$

Concluímos que nos intervalos $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ a curva tem concavidade negativa e no intervalo $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ a concavidade é positiva. Confira no gráfico ao lado.



2º) Como é a concavidade da curva $y = x^4 - 4x^3$?

$$y = x^4 - 4x^3 \implies y' = 4x^3 - 12x^2 \implies y'' = 12x^2 - 24x$$

Notando que $y'' = 12 \cdot x \cdot (x - 2)$, temos:

$$x < 0 \text{ ou } x > 2 \implies y'' > 0 \implies \text{concavidade positiva.}$$

$$0 < x < 2 \implies y'' < 0 \implies \text{concavidade negativa.}$$

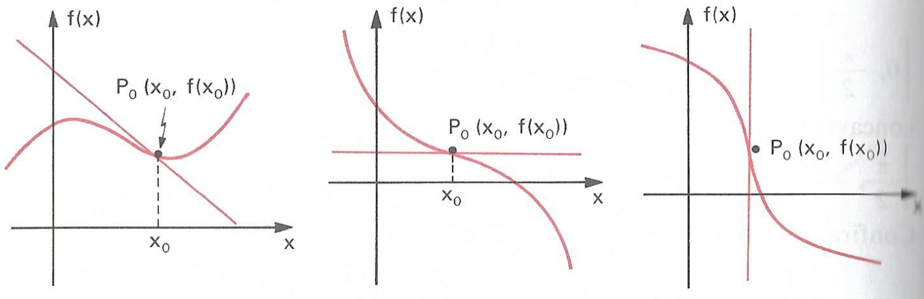
Confira com o gráfico do item 171.

V. Ponto de inflexão

181. Definição

Seja f uma função contínua no intervalo $I = [a, b]$ e derivável no ponto $x_0 \in]a, b[$. Dizemos que $P_0\ (x_0, f(x_0))$ é um *ponto de inflexão* do gráfico de f se, e somente se, existe uma vizinhança V de x_0 tal que nos pontos do gráfico f para $x \in V$ e $x < x_0$ a concavidade tem sempre o mesmo sinal, que é contrário ao sinal da concavidade nos pontos do gráfico para $x > x_0$.

Em outros termos, P_0 é ponto de inflexão quando P_0 é ponto em que a concavidade "troca de sinal". Eis alguns exemplos:



Retomando os exemplos do item 180, vemos que os pontos de inflexão de $f(x) = cos\ x$ no intervalo $[0, 2\pi]$ são os pontos de abscissas $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$; os pontos de inflexão da curva $y = x^4 - 4x^3$ são os de abscissas 0 e 2.

Os seguintes teoremas permitem localizar os pontos de inflexão no gráfico de uma função.

182. Teorema

Seja f uma função com derivadas até terceira ordem em $I =]a, b[$. Seja $x_0 \in]a, b[$. Se $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) \neq 0$, então x_0 é abscissa de um ponto de inflexão.

Demonstração

Suponhamos, por exemplo, $f''(x_0) = 0$ e $f'''(x_0) > 0$. De acordo com o teorema do item 173, x_0 é ponto de mínimo local da função f'. Assim sendo, existe uma vizinhança V de x_0 tal que:

$$(x \in V \text{ e } x < x_0) \implies f''(x_0) < 0$$
$$(x \in V \text{ e } x > x_0) \implies f''(x_0) > 0$$

isto é, em x_0 a função f'' "troca de sinal", ou ainda, em $P_0(x_0, f(x_0))$ a concavidade do gráfico de f troca de sinal; portanto, x_0 é abscissa de um ponto de inflexão.

183. Teorema

Se f é uma função derivável até segunda ordem em $I =]a, b[$, $x_0 \in]a, b[$ e x_0 é abscissa de ponto de inflexão do gráfico de f, então $f''(x_0) = 0$.

Demonstração

Suponhamos $f''(x_0) \neq 0$; por exemplo, admitamos $f''(x_0) > 0$. Temos:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$$

então existe uma vizinhança V de x_0 tal que $\dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} > 0$, $\forall\, x \in V$, $x \neq x_0$.

Assim, em V, a função f' é crescente; portanto, em V o gráfico de f tem concavidade sempre positiva, isto é, em $P_0\,(x_0, f(x_0))$ a concavidade não troca de sinal e P_0 deixa de ser ponto de inflexão.

184. Observação

Este último teorema mostra que uma condição necessária para x_0 ser a abscissa de um ponto de inflexão do gráfico de f é anular f''. Entretanto, nem todas as raízes de $f''(x) = 0$ são abscissas de pontos de inflexão. Se uma raiz x_0 de $f''(x) = 0$ não anular f''', o teorema do item 182 garante que x_0 é abscissa de ponto de inflexão. Se, porém, $f''(x_0) = f'''(x_0) = 0$, nada podemos concluir, usando a teoria dada.

185. Exemplo

Determinar os pontos de inflexão do gráfico da função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 12x - 5$.

Temos:

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 24x + 12$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x - 24$$

As raízes da equação $f''(x) = 0$, isto é, $12x^2 - 12x - 24 = 0$ são: 2 e -1.

Notando que $f'''(x) = 24x - 12$, vemos que:

$$f'''(2) = 48 - 12 = 36 \neq 0 \text{ e } f'''(-1) = -24 - 12 = -36 \neq 0$$

portanto, 2 e -1 são abscissas de pontos de inflexão e esses pontos são

$$P = (2, f(2)) = (2, -29) \text{ e } Q = (-1, f(-1)) = (-1, -26)$$

EXERCÍCIOS

Nos exercícios 273 a 277, determine onde o gráfico da função dada tem concavidade positiva, onde a concavidade é negativa e obtenha os pontos de inflexão, caso existam.

273. $f(x) = x^3 + 9x$

274. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

275. $f(x) = \sqrt[5]{x - 2}$

276. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt[2]{(x^2 + 4)^3}}$

277. $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ para } x < 1 \\ x^3 - 4x^2 + 7x - 3, \text{ para } x \geq 1 \end{cases}$

278. Determine os intervalos em que x deve estar para que o gráfico da função $f(x) = sen\ x - cos\ x$ tenha concavidade positiva.

279. Determine as abscissas dos pontos do gráfico da função $f(x) = x^5 - x^4$ nos quais a concavidade é negativa.

280. Quais são os pontos de inflexão no gráfico da função $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)$?

Nos exercícios 281 a 283, supondo que f é contínua em algum intervalo aberto que contém c, faça uma parte do gráfico de f numa vizinhança de c de modo que fiquem satisfeitas as condições dadas.

281. Para $x > c$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$ e
para $x < c$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$

282. Para $x > c$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$ e
para $x < c$, $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$

283. $f'(c) = f''(c) = 0$ e $f''(x) > 0$ para $x < c$ ou $x > c$.

284. Esboce o gráfico de uma função f tal que, para todo x real, tenhamos $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ e $f''(x) > 0$.

285. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$ existem e são positivas, $\forall x \in \mathbb{R}$.

286. Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, determine a_0, a_1, a_2 e a_3 de modo que f tenha um extremo relativo em $(0, 3)$ e um ponto de inflexão em $(1, -1)$.

287. Se $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, calcule a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4 de modo que o gráfico de f passe pela origem, seja simétrico em relação ao eixo y e tenha um ponto de inflexão em $(1, -1)$.

VI. Variação das funções

186. Um dos objetivos da teoria deste capítulo é possibilitar um estudo da variação de uma função f. Para caracterizar como varia uma função f, procuramos determinar:

a) o domínio;
b) a paridade;
c) os pontos de descontinuidade;
d) as interseções do gráfico com os eixos x e y;
e) o comportamento no infinito;
f) o crescimento ou decréscimo;
g) os extremantes;
h) os pontos de inflexão e a concavidade;
i) o gráfico.

187. *Exemplos*

1º) Estudar a variação da função $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$.

a) Seu domínio é $\mathbb{R}$.

b) A função não é par nem ímpar, pois:
$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - 5(-x) = -x^3 + x^2 + 5x$
não é idêntica a $f(x)$ nem a $-f(x)$.

c) A função polinomial f é contínua em $\mathbb{R}$.

d) Fazendo $x = 0$, temos $f(0) = 0$.

Fazendo $f(x) = 0$, temos $x^3 + x^2 - 5x = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = \dfrac{-1 - \sqrt{21}}{2}$ ou $x = \dfrac{-1 + \sqrt{21}}{2}$.

As interseções com os eixos são os pontos $(0, 0)$; $\left(\dfrac{-1 - \sqrt{21}}{2}, 0\right)$ e $\left(\dfrac{-1 + \sqrt{21}}{2}, 0\right)$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

f) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = 3(x - 1)\left(x + \dfrac{5}{3}\right)$

então:

$$x \leqslant -\frac{5}{3} \text{ ou } x \geqslant 1 \implies f'(x) \geqslant 0 \implies f \text{ crescente}$$

$$-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant 1 \implies f'(x) \leqslant 0 \implies f \text{ decrescente}$$

g) $f'(x) = 0 \implies x = 1$ ou $x = -\frac{5}{3}$

$$f''(x) = 6x + 2 \implies \begin{cases} f''(1) = 8 > 0 \\ f''\left(-\frac{5}{3}\right) = -8 < 0 \end{cases}$$

então f tem um mínimo em $x = 1$ e um máximo em $x = -\frac{5}{3}$.

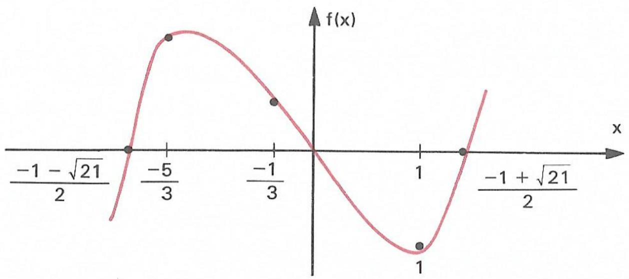
h) $f''(x) = 6x + 2$, então:

$$x < -\frac{1}{3} \implies f''(x) < 0 \implies \text{concavidade negativa}$$

$$x > -\frac{1}{3} \implies f''(x) > 0 \implies \text{concavidade positiva}$$

Como o sinal da concavidade muda em $x = -\frac{1}{3}$, o gráfico tem um ponto de inflexão em $-\frac{1}{3}$.

i) gráfico de f:



2º) Estudar a variação da função $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$.

a) Seu domínio é $D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$.

b) A função não é par nem ímpar, pois:

$f(-x) = \frac{-x-1}{2(-x)-5}$ não é idêntica a $f(x)$ nem a $-f(x)$.

c) Como $g(x) = x - 1$ e $h(x) = 2x - 5$ são contínuas, $f(x) = \frac{x-1}{2x-5}$ é contínua em todos os pontos do seu domínio.

Notemos que $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^-} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to \frac{5}{2}^+} f(x) = +\infty$.

d) Fazendo $x = 0$, temos $f(0) = \frac{0-1}{2 \cdot 0 - 5} = \frac{1}{5}$.

Fazendo $f(x) = 0$, temos $\frac{x-1}{2x-5} = 0$, isto é, $x = 1$.

As interseções com os eixos são os pontos $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ e $(1, 0)$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x-1}{2x-5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 - \frac{5}{x}} = \frac{1}{2}$ e

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ (analogamente)

f) $f'(x) = \frac{1 \cdot (2x-5) - (x-1) \cdot 2}{(2x-5)^2} = \frac{-3}{(2x-5)^2} < 0, \forall x \neq \frac{5}{2}$

então f é decrescente em todo intervalo que não contenha $\frac{5}{2}$.

g) f é derivável em seu domínio e f' nunca se anula, então f não tem extremantes.

h) $f''(x) = \frac{12}{(2x-5)^3}$

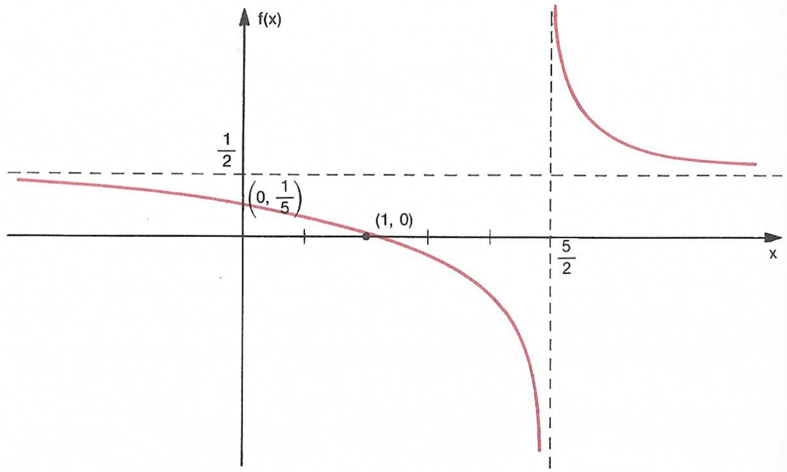
então:

$$x < \frac{5}{2} \implies 2x - 5 < 0 \implies f''(x) < 0 \implies \text{concavidade negativa}$$

$$x > \frac{5}{2} \implies 2x - 5 > 0 \implies f''(x) > 0 \implies \text{concavidade positiva}$$

Como o sinal da concavidade muda no ponto de abscissa $\frac{5}{2}$ (em que f não é definida), concluímos que o gráfico de f não tem ponto de inflexão.

i) gráfico de f:



EXERCÍCIOS

Nos exercícios 288 a 297, determine o domínio, a paridade, os pontos de descontinuidade, as interseções do gráfico com os eixos, o comportamento no infinito, o crescimento ou decrescimento, os extremantes, a concavidade, os pontos de inflexão e o gráfico de f.

288. $f(x) = 2x^3 - 6x$

289. $f(x) = 4x^3 - x^2 - 24x - 1$

290. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 6x^2 - 4$

291. $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)^3$

292. $f(x) = 3x^{2/3} - 2x$

293. $f(x) = x^{1/3} + 2 \cdot x^{4/3}$

294. $f(x) = 1 + (x - 2)^{1/3}$

295. $f(x) = x\sqrt{1 - x}$

296. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 3}$

297. $f(x) = \dfrac{9x}{x^2 + 9}$

LEITURA

Cauchy e Weierstrass: o Rigor Chega ao Cálculo

Hygino H. Domingues

O cálculo, tal como foi deixado por Newton e Leibniz, carecia quase totalmente de estruturação lógica. E nos 150 anos seguintes muito pouco mudou quanto a esse aspecto. Embora houvesse consciência, em todo esse tempo, da necessidade de demonstrações e justificativas, estas freqüentemente não correspondiam aos padrões atuais de rigor, apelando demasiado para a intuição geométrica.

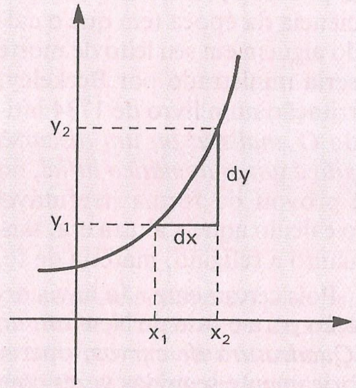
Assim é que por muito tempo a confiança no cálculo derivava sobretudo de sua eficácia. Um episódio envolvendo o matemático e astrônomo Edmund Halley (1656-1742) e o bispo George Berkeley (1685-1753) ilustra bem essa situação. O primeiro, talvez movido por concepções materialistas inspiradas na ciência da época (em que o cálculo tinha papel especial), teria convencido alguém em seu leito de morte a recusar o consolo espiritual que lhe seria ministrado por Berkeley. Este, exímio polemista, expressou sua irritação num livro de 1734 intitulado *O analista: ou um discurso dirigido a um matemático infiel*, no qual provou de forma irrefutável que o cálculo àquela altura era, tanto quanto a religião, matéria de fé.


Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

Pois certamente não havia explicação para o fato de Newton, no seu *Quadratura de curvas*, operar algebricamente seguidas vezes com um incremento h e, ao fim, considerar nulos todos os termos envolvendo h (agora igualado a zero). E tampouco para aceitar que a razão dy/dx entre as diferenciais, segundo conceito de Leibniz (ver págs. 138 e 139), expressava a inclinação da tangente, e não a da secante (ver figura). O desprezo das diferenciais superiores, sem nenhuma explicação convincente, levando a resultados corretos, ensejava a Berkeley a observação "em virtude de um erro duplo chega-se, ainda que não a uma ciência, pelo menos a uma verdade".

D'Alembert (1717-1783), que em algum momento teria declarado "avante, e a fé lhe virá", sugerindo como enfrentar os mistérios do cálculo na época, vislumbrava porém que para sair desse estado era preciso estabelecer um método de limites.

Em 1784, a Academia de Ciências de Berlim instituiu um concurso, cujo prêmio seria conferido dois anos depois, sobre o problema do infinito em matemática. O edital manifestava o desejo da Academia de uma explanação sobre o porquê de muitos teoremas corretos serem "deduzidos de suposições contraditórias". O vencedor foi o suíço Simon L'Huillier, com o trabalho *Exposição elementar do cálculo superior*. Mas L'Huillier, que introduziu a notação $dP/dx = lim\ (\Delta P/\Delta x)$ para a derivada, pouca luz trouxe ao problema. Seria só no século XIX, especialmente graças aos esforços de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e Karl Weierstrass (1815-1897), que o assunto seria fundamentado com rigor.



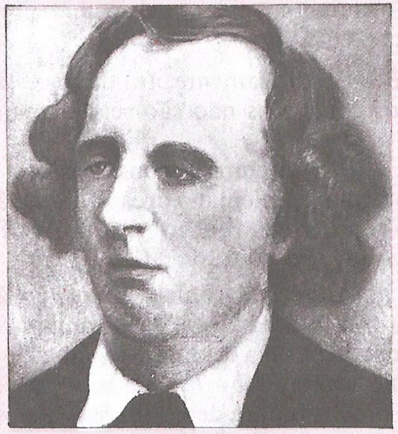
Natural de Paris, Cauchy estudou na Escola Politécnica e, a despeito de seu grande talento para a ciência pura, chegou a encetar uma promissora carreira de engenheiro, abandonada em 1815 por razões de saúde. Nesse mesmo ano inicia-se como professor na Escola Politécnica — afinal, a essa altura, seu currículo já exibia vários trabalhos de valor no campo da matemática, o primeiro de 1811. No ano seguinte aceita sua indicação para a Academia de Ciências, mesmo sendo para o lugar de Monge, excluído por razões políticas. Mas era coerente: em 1830, com a expulsão de Carlos X, exila-se voluntariamente; já de volta à França há cerca de dez anos, em 1848 passa a ocupar uma cadeira na Sorbonne, da qual é excluído em 1852 por sua recusa em jurar fidelidade ao governo (em 1854 foi readmitido sem essa exigência).

Cauchy deixou cerca de 800 trabalhos entre livros e artigos, cobrindo quase todos os ramos da matemática, um feito talvez só superado por Euler. Mas suas contribuições mais significativas estão na área do cálculo e da análise, sempre pautadas pela preocupação com o rigor e a clareza. Um exemplo disso está na sua abordagem das séries, com o cuidado que dispensou à questão da convergência.

Seu *Curso de análise*, um livro-texto feito para a Escola Politécnica, apresenta a primeira definição aritmética de limite. A precisão com que dela decorrem conceitos básicos como os de continuidade, diferenciabilidade e integral definida seguramente marca o início do cálculo moderno. Mas Cauchy recorria com freqüência a expressões como "aproximar-se indefinidamente" e "tão pequeno quanto se deseje", por exemplo, o que precisava ser quantificado convenientemente. Esse trabalho seria feito por Weierstrass.

Natural do povoado de Ostenfeld (Alemanha), Weierstrass era filho de um inspetor de alfândega autoritário que desejava vê-lo num alto posto administrativo — tanto mais que sua passagem pela escola secundária fora brilhante. Mas Weierstrass não deu essa alegria ao pai, embora tivesse ficado de 1834 a 1838 em Bonn matriculado no curso indicado (leis, que afinal não concluiu). Em 1839 habilitou-se para o ensino médio de Matemática em curso intensivo no qual teve como professor C. Guderman (1798-1852), especialista em funções elípticas, seu grande inspirador.

Paralelamente ao exercício do magistério secundário, Weierstras lançou-se à pesquisa. E seus trabalhos pouco a pouco foram-no fazendo conhecido: em 1855 obtinha um doutorado honorário na Universidade de Königsberg e em 1856 tornou-se professor da Universidade de Berlim, onde ensinaria nos 30 anos seguintes.


Weierstrass.

Weierstrass publicou pouco, comparado a Cauchy. Mas sua obra distingue-se pela qualidade e, em especial, pelo rigor. Os últimos resquícios de imprecisão que ainda acompanhavam os conceitos centrais do cálculo, como o de número real, função e derivada, por exemplo, foram eliminados por ele. No que se refere à teoria dos limites, sua grande arma foi a notação $\epsilon - \delta$. A razão finalmente se impunha à fé.

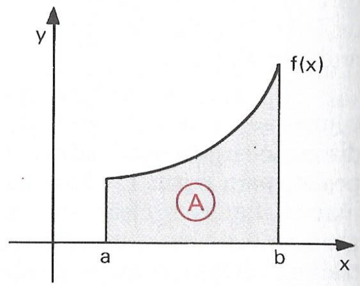
CAPÍTULO IX

Noções de Cálculo Integral

I. Introdução — Área

188. Historicamente, foi da necessidade de calcular áreas de figuras planas cujos contornos não são segmentos de reta que brotou a noção de integral.

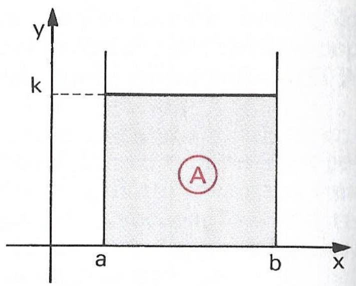
Por exemplo, consideremos o problema de calcular a área A da região sob o gráfico da função f: $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, em que $f(x) \geqslant 0$ (ver figura).



Admitindo conhecida uma noção intuitiva de área de uma figura plana e, ainda, que a área de um retângulo de base b e altura h é $b \cdot h$, vamos descrever um processo para determinar a área A.

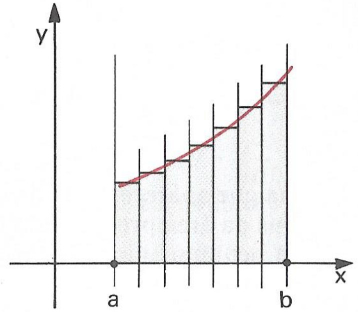
Se $f(x)$ fosse constante e igual a k em $[a, b]$, a área procurada seria a área de um retângulo e teríamos:

$$A = k \cdot (b - a)$$



Não sendo $f(x)$ constante, dividimos o intervalo $[a, b]$ em subintervalos suficientemente pequenos para que neles $f(x)$ possa ser considerada constante com uma boa aproximação.

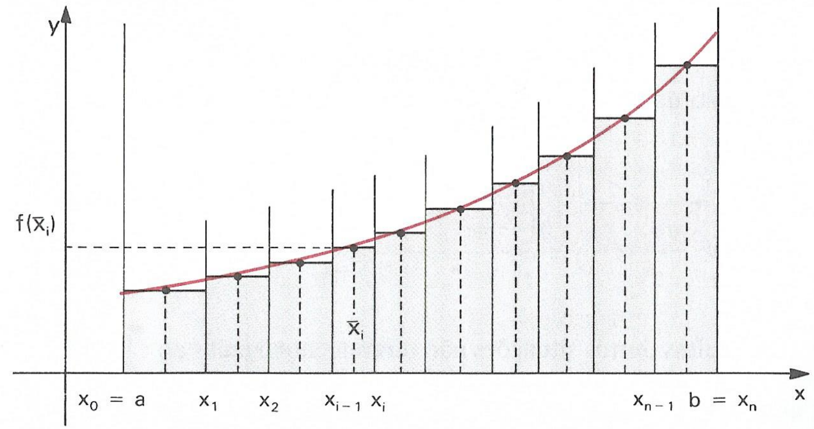
Em cada subintervalo podemos calcular, aproximadamente, a área sob o gráfico, calculando a área do pequeno retângulo que fica determinado quando supomos $f(x)$ constante; a área procurada será, aproximadamente, a soma das áreas destes retângulos.



Vamos descrever mais precisamente o procedimento acima relatado. A divisão de $[a, b]$ em subintervalos é feita intercalando-se pontos $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ entre a e b, como segue:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Os n subintervalos em que $[a, b]$ fica dividido têm comprimentos $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Escolhemos $\overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e supomos $f(x)$ constante e igual a $f(\overline{x}_i)$ em $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Graficamente, temos:



A área A é aproximadamente a soma das áreas dos retângulos, e escrevemos:

$$A \cong f(\overline{x}_1)\Delta_1 x + f(\overline{x}_2)\Delta_2 x + \ldots + f(\overline{x}_i)\Delta_i x + \ldots + f(\overline{x}_n)\Delta_n x$$

ou seja:

$$A \cong \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta_i x$$

A soma que aparece no 2º membro das igualdades anteriores se aproxima mais e mais da área procurada à medida que dividimos mais e mais $[a, b]$, não deixando nenhum subintervalo grande demais.

189. De um modo geral, se f é uma função contínua definida em $[a, b]$, o número do qual as somas $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta_i x$ se aproximam arbitrariamente à medida que todos os $\Delta_i x$ se tornam simultaneamente pequenos é chamado *integral de f em* $[a, b]$ e é representado por $\int_a^b f(x)dx$. Assim, podemos dizer que, sendo $\Delta_i x$ pequeno, $i = 1, 2, \dots n$, temos a igualdade aproximada:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta_i x$$

No caso da área A que estávamos calculando, podemos escrever:

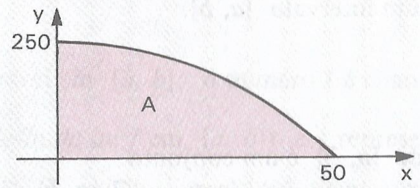
$$A = \int_a^b f(x)dx$$

190. Em muitas outras situações não diretamente ligadas ao cálculo de áreas, somos levados através de um raciocínio semelhante ao exposto acima, a considerar uma função f definida em $[a, b]$, subdividir $[a, b]$, formar somas do tipo $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta_i x$ e determinar o número de que tais somas se aproximam à medida que os $\Delta_i x$ diminuem, ou seja, somos levados a um *processo de integração*. Estabelecer a noção de integral desta forma geral é o que pretendemos a partir do próximo item.

EXERCÍCIOS

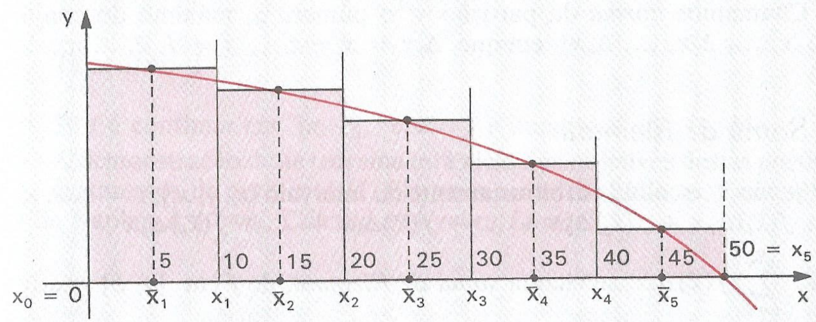
298. Faça uma estimativa da área A sob o gráfico de $f(x) = 250 - \dfrac{x^2}{10}$, $0 \leqslant x \leqslant 50$, dividindo o intervalo $[0, 50]$ em subintervalos de comprimento 10.

Solução



Façamos $x_0 = 0$, $x_1 = 10$, $x_2 = 20$, $x_3 = 30$, $x_4 = 40$, $x_5 = 50$ e escolhamos, por exemplo, $\overline{x}_1 = 5$, $\overline{x}_2 = 15$, $\overline{x}_3 = 25$, $\overline{x}_4 = 35$ e $\overline{x}_5 = 45$.

Graficamente, temos:



A área A terá o valor aproximado:

$A \cong f(\overline{x}_1)\Delta_1 x + f(\overline{x}_2)\Delta_2 x + f(\overline{x}_3)\Delta_3 x + f(\overline{x}_4)\Delta_4 x + f(\overline{x}_5)\Delta_5 x$

Efetuando os cálculos, resulta:

$A \cong 8\,375$

O valor correto, conforme veremos, é $8\,333\,\frac{1}{3}$, sendo o erro cometido da ordem de $0{,}5\%$, apesar de o número de subdivisões ser tão pequeno.

299. Obtenha uma estimativa da área sob o gráfico da função $f(x) = \dfrac{200}{x}$, $x \in [10, 50]$ dividindo o intervalo em 4 subintervalos de comprimento *10*. (O valor correto da área procurada é *321,9*.)

II. A integral definida

Vamos agora estabelecer de um modo geral a noção de integral de uma função f definida em um intervalo $[a, b]$.

191. *Partição*

Uma *partição* de $[a, b]$ é um conjunto
$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\}$ com $x_i \in [a, b]$, $i = 1, 2, \ldots n$ e

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

192. *Norma*

Chamamos *norma* da partição $\mathcal{P}$ o número μ, máximo do conjunto $\{\Delta_1 x, \Delta_2 x, \ldots, \Delta_i x, \ldots, \Delta_n x\}$ em que $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots n$.

193. *Soma de Riemann*

Sendo $\overline{x}_i$ escolhido arbitrariamente no intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots n$, a soma $f(\overline{x}_1)\Delta_1 x + f(\overline{x}_2)\Delta_2 x + \ldots + f(\overline{x}_i)\Delta_i x + \ldots + f(\overline{x}_n)\Delta_n x$

ou seja, $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta_i x$ se chama *soma de Riemann* de f em $[a, b]$ relativa à partição $\mathcal{P}$ e à escolha feita dos $\overline{x}_i$.

194. *Função integrável*

Sob certas condições bem gerais, que estabeleceremos a seguir, as somas de Riemann se aproximam arbitrariamente de um número fixo I, quando a norma μ da partição $\mathcal{P}$ se torna cada vez menor, independentemente das escolhas dos x_i. Quando isto ocorre, dizemos que a função *f é integrável* em $[a, b]$ e I é a integral de f em $[a, b]$.

Precisamente, dizemos que f é integrável em $[a, b]$ se existe um número real I satisfazendo a seguinte condição:

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que em toda partição $\mathcal{P}$ com norma $\mu < \delta$ temos $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta_i x - I\right| < \epsilon$, qualquer que seja a escolha dos $\overline{x}_i$ em $[x_{i-1}, x_i]$.

195. *Integral*

Sendo f integrável em $[a, b]$, o número I é chamado *integral* de f em $[a, b]$ (ou *integral definida* de f em $[a, b]$) e é representado por $\int_a^b f(x)dx$; resulta que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que

$$\mu < \delta \implies \left| \sum f(\overline{x}_i)\Delta_i x - \int_a^b f(x)dx \right| < \epsilon$$

Vamos, agora, estabelecer uma condição geral de integrabilidade.

196. *Teorema 1*

Se f é contínua em $[a, b]$, então f é integrável em $[a, b]$.

A demonstração deste teorema está além dos objetivos destas noções iniciais e deixaremos de apresentá-la. Ela pode ser encontrada, por exemplo, no livro de Kaplan & Lewis, **Cálculo e Álgebra Linear***.

EXERCÍCIOS

300. Calcule, pela definição, a integral de $f(x) = 5x + 7$ em $[1, 5]$.

* Vol. 1, Cap. 4.26. Livros Técnicos e Científicos Edit.

Solução

Devemos calcular $\int_1^5 (5x + 7)dx$. Como a função $f(x) = 5x + 7$ é contínua em $[1, 5]$, sabemos pelo teorema 1 que a integral existe. Dividindo $[1, 5]$ em n subintervalos iguais de comprimento $\frac{4}{n}$, temos:

$$x_0 = 1,\ x_1 = 1 + \frac{4}{n},\ x_2 = 1 + 2 \cdot \frac{4}{n},\ \ldots,\ x_{i-1} = 1 + (i-1)\frac{4}{n},$$

$$x_i = 1 + i \cdot \frac{4}{n},\ \ldots,\ x_n = 5$$

Escolhendo, por exemplo, em cada subintervalo, $\overline{x}_i$ como sendo o ponto médio, resulta:

$$\overline{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = \frac{1 + \frac{4}{n}(i-1) + 1 + \frac{4}{n}i}{2} = 1 + \frac{4}{n}i - \frac{2}{n}$$

Segue que $f(\overline{x}_i) = 5\overline{x}_i + 7 = 12 + \frac{20}{n}i - \frac{10}{n}$,

$$f(\overline{x}_i)\Delta_i x = \left(12 + \frac{20}{n}i - \frac{10}{n}\right)\frac{4}{n}, \text{ ou seja,}$$

$$f(\overline{x}_i)\Delta_i x = \frac{48}{n} - \frac{40}{n^2} + \frac{80}{n^2}i$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{48}{n} - \frac{40}{n^2} + \frac{80}{n^2}i\right) =$$

$$= n \cdot \frac{48}{n} - n \cdot \frac{40}{n^2} + \frac{80}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = 48 - \frac{40}{n} + \frac{80}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i$$

Como $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$, resulta que

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta_i x = 48 - \frac{40}{n} + \frac{80}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = 48 - \frac{40}{n} + 40 \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)$$

Como $\Delta_1 x = \Delta_2 x = \ldots = \Delta_i x = \ldots = \Delta_n x = \frac{4}{n}$, a norma μ será igual a $\frac{4}{n}$; logo, quando μ se aproxima de zero, temos:

1) n cresce arbitrariamente

2) $\frac{40}{n}$ se aproxima de zero

3) $\frac{n+1}{n}$ se aproxima de 1

4) $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta_i x$ se aproxima arbitrariamente do número $48 - 0 + 40 \cdot 1$

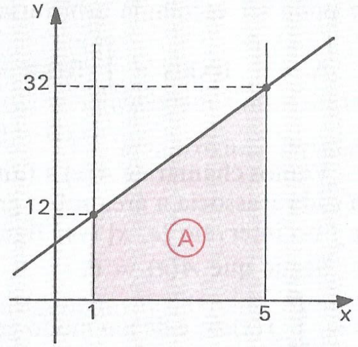
ou seja,

$$\mu \cong 0 \implies \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\Delta_i x \cong 88$$

Temos, então:

$$\boxed{\int_1^5 (5x + 7)dx = 88}$$

De fato, calculando a área sob o gráfico de $f(x) = 5x + 7$ entre $x = 1$ e $x = 5$, temos:



$$A = \left(\frac{12 + 32}{2}\right) \cdot 4 = 88$$

301. Calcule, pela definição, conforme o exercício 300, $\int_1^5 (5x + 7)dx$, escolhendo em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ um ponto $\overline{x}_i$ tal que

a) $\overline{x}_i = x_{i-1}$ b) $\overline{x}_i = x_i$

302. Calcule, pela definição, conforme o exercício 300, $\int_3^6 x^2\,dx$.

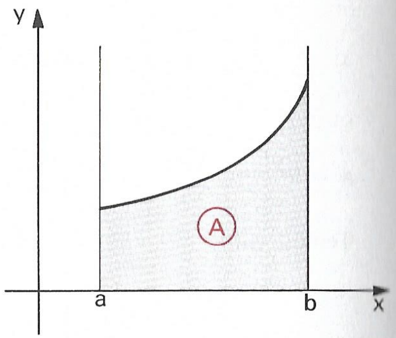
Dado: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$.

III. O cálculo da integral

197. Vamos agora procurar um processo para calcular a integral de f em $[a, b]$ sem termos que recorrer à definição.

Consideremos f contínua e não negativa em $[a, b]$. O número $\int_a^b f(x)dx$ representa a área A sob o gráfico de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

$$\boxed{A = \int_a^b f(x)dx}$$



Observação: Naturalmente, a letra que representa a variável independente pode ser escolhida arbitrariamente, e considera-se que:

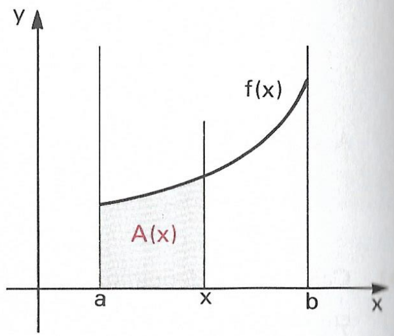
$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \dots \text{ etc.}$$

Vamos chamar de $A(x)$ a função que a cada x associa a área sob o gráfico de f no intervalo $[a, x]$ (ver figura).

Segue que $A(a) = 0$,

$A(b) = \int_a^b f(x)dx$, e de um modo geral.

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$



(Evitamos escrever $A(x) = \int_a^x f(x)dx$ para poder destacar que a variável x é um dos extremos do intervalo de integração.)

Com as hipóteses já admitidas anteriormente, vamos mostrar que a derivada da função $A(x)$ é a função $f(x)$.

198. *Teorema 2*

Se $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, então $A'(x) = f(x)$.

Demonstração

Seja $x \in [a, b]$ e $h > 0$ com $x + h \in [a, b]$.

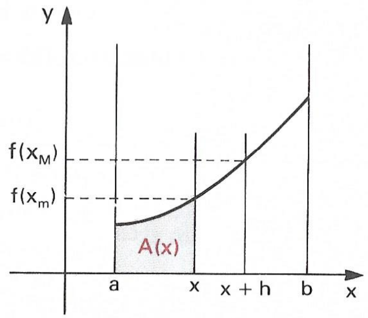
Sendo f contínua em $[a, b]$, ela o será em $[x, x + h]$, e portanto admite um ponto de máximo x_M e um ponto de mínimo x_m em $[x, x + h]$.

Raciocinando geometricamente, em termos de área, na figura ao lado, segue que:

$f(x_m) \cdot h \leqslant A(x + h) - A(x) \leqslant f(x_M) \cdot h.$

Logo,

$$f(x_m) \leqslant \frac{A(x + h) - A(x)}{h} \leqslant f(x_M).$$



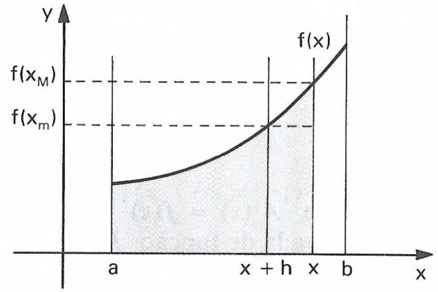
Quando h tende a zero, $f(x_m)$ e $f(x_M)$ se aproximam simultaneamente de $f(x)$ enquanto o quociente $\frac{A(x + h) - A(x)}{h}$ se aproxima da derivada à direita de $A(x)$, isto é:

$f(x) \leqslant A'(x^+) \leqslant f(x)$

Resulta que $A'(x^+) = f(x)$:

Analogamente, sendo $h < 0$, considerando o intervalo $[x + h, x]$, temos:

$f(x_m) \cdot (-h) \leqslant A(x) - A(x + h) \leqslant f(x_M) \cdot (-h).$



Segue que

$$f(x_m) \leqslant \frac{A(x) - A(x+h)}{-h} \leqslant f(x_M)$$

$$f(x_m) \leqslant \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leqslant f(x_M)$$

e como no caso anterior, quando h tende a zero, resulta que a derivada à esquerda de $A(x)$ é igual a $f(x)$:

$f(x) \leqslant A'(x^-) \leqslant f(x)$, isto é, $A'(x^-) = f(x)$

Isso mostra que $A'(x) = f(x)$ em $[a, b]$.

Utilizando a notação $A'(x) = \dfrac{dA}{dx}$ e lembrando que $A(x) = \int_a^x f(t)dt$, temos o resultado

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)}$$

bastante sugestivo, já que estabelece uma relação essencial entre dois conceitos que nasceram de forma independente: o de derivada e o de integral.

Para calcular $\int_a^b f(x)dx$, podemos procurar uma função como $A(x)$, tal que $A(a) = 0$ e $A'(x) = f(x)$, e teremos: $A(b) = \int_a^b f(x)dx$.

Este procedimento pode ser simplificado se atentarmos para o seguinte teorema.

199. *Teorema 3*

Se $F(x)$ é uma função qualquer que satisfaz a condição $F'(x) = f(x)$ em $[a, b]$, f contínua em $[a, b]$, então $F(x) = A(x) + c$ em que c é uma constante e $A(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Demonstração

De fato, mostramos que $A'(x) = f(x)$ e sabemos por hipótese que $F'(x) = f(x)$; segue que a derivada de função $F(x) - A(x)$ é nula em $[a, b]$ e então $F(x) - A(x)$ é constante, ou seja, $F(x) - A(x) = c$.

Sendo, então, $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$, temos:

$$\begin{cases} F(b) = A(b) + c \\ F(a) = A(a) + c = 0 + c = c \end{cases}$$

Logo, $F(b) = A(b) + F(a)$ e então $A(b) = F(b) - F(a)$.

200. Resumindo, o procedimento para determinar $\int_a^b f(x)dx$, em que f é *uma função contínua* em $[a, b]$ deve ser o seguinte:

a) procuramos uma função $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$

b) vale que $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Observação: Na justificativa do procedimento acima, utilizamos como hipótese o fato de f ser não negativa em $[a, b]$; caso $f(x) < 0$, uma pequena alteração nos argumentos levaria à mesma conclusão, de modo que a única exigência efetiva para f é a continuidade em $[a, b]$.

201. Uma função F satisfazendo a condição $F'(x) = f(x)$ é chamada *primitiva* de f ou, ainda, *integral indefinida* de f. Se F é uma primitiva de f, então $F(x) + c$, em que c é uma constante, também é. De um modo geral, representamos uma primitiva genérica de f por $\int f(x)dx$. Assim, por exemplo, se $f(x) = x^2$, são primitivas de f as funções $\dfrac{x^3}{3}$, $\dfrac{x^3}{3} + 5$, ou, de um modo geral, $\dfrac{x^3}{3} + c$, e escrevemos:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c.$$

Outros exemplos:

1. $\int x^5 dx = \dfrac{x^6}{6} + c$

2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$

3. $\int 1 dx = \int dx = x + c$

4. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$

5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$

6. $\int e^x dx = e^x + c$ etc.

202. Como conseqüência de propriedades conhecidas para as derivadas, temos ainda:

$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
$\int (k \cdot f(x))dx = k \cdot \int f(x)dx$ k constante (k $\neq$ 0)

Seguem mais alguns exemplos que ilustram a aplicação das propriedades acima.

1. $\int (x^3 + \cos x)dx = \int x^3 dx + \int \cos x\,dx = \frac{x^4}{4} + \operatorname{sen} x + c$

2. $\int 5x^3 dx = 5\int x^3 dx = 5 \cdot \frac{x^4}{4} + c$

3. $\int (3x + 7)dx = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 7x + c$

4. $\int (3 \operatorname{sen} x + 4 \cos x)dx = -3 \cos x + 4 \operatorname{sen} x + c$

5. $\int (x^2 - 5x + 3)dx = \frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 3x + c$

EXERCÍCIOS

303. Determine primitivas para as funções:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

c) $f(x) = x^{-2/5}$

d) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

Solução

Lembrando das regras de derivação já estabelecidas, temos:

a) $f(x) = x^{1/2}$; $F(x) = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2}$

b) $f(x) = x^{-3}$; $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{-1}{2x^2}$

c) $f(x) = x^{-2/5}$; $F(x) = \frac{x^{-2/5+1}}{-\frac{2}{5} + 1} = \frac{5}{3}x^{3/5}$

d) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$; $F(x) = \operatorname{arc\,tg} x$

e) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; $F(x) = x + \frac{1}{x}$

Em cada caso, $F(x) + c$, em que c é constante, também é uma primitiva de $f(x)$. Poderíamos escrever genericamente: $\int x^{1/2} dx = \frac{2}{3}x^{3/2} + c$, etc.

304. Determine primitivas para as funções indicadas:

a) $f(x) = x^3 - 2x + 7$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x + 3 \cos x$

c) $f(x) = -x^5 + 3$

d) $f(x) = \frac{x^7}{3} + \frac{x^3}{7}$

e) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{7}$

305. Determine as integrais indefinidas indicadas:

a) $\int (x^3 - 4x^2 - 2x + 1)dx$

b) $\int \sec^2 x\,dx$

c) $\int \left(\frac{-1}{x^2}\right)dx$

d) $\int \frac{1}{x^3}dx$

e) $\int \left(\frac{x^3 + 1}{x^2}\right)dx$

306. Calcule:

a) $\int \sqrt[5]{x}\,dx$

b) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

c) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$

307. Calcule $\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx$.

Solução

Uma primitiva de $f(x) = \cos x$ é $F(x) = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x$. Segue que

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1.$$

Também costumamos indicar os cálculos como segue:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1$$

308. Calcule as integrais definidas:

a) $\int_0^1 x\, dx$

b) $\int_1^2 x^2 dx$

c) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen} x\, dx$

d) $\int_0^{\pi/4} \cos x\, dx$

e) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx$

309. Calcule:

a) $\int_{-1}^1 7\, dx$

b) $\int_{-1}^1 x^2\, dx$

c) $\int_{-1}^1 x^7\, dx$

d) $\int_0^1 (-x^2)dx$

e) $\int_{-1}^1 2x^4\, dx$

310. Calcule:

a) $\int_0^2 (x^2 - 3x + 5)dx$

b) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\operatorname{sen} x + \cos x)dx$

c) $\int_0^{\pi/2} (1 + \cos x)dx$

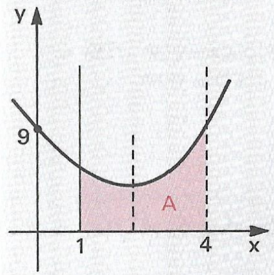
d) $\int_0^1 (x^5 - 1)x\, dx$

e) $\int_1^4 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

311. Calcule a área sob o gráfico de $f(x) = x^2 - 5x + 9,\ 1 \leqslant x \leqslant 4$.

Solução

A área A será igual a $\int_1^4 f(x)dx$ (ver figura). Logo,



$$F(x) = \int (x^2 - 5x + 9)dx = \frac{x^3}{3} - 5\,\frac{x^2}{2} + 9x$$

e então

$$\int_1^4 (x^2 - 5x + 9)dx = F(4) - F(1) =$$

$$= \frac{52}{3} - \frac{41}{6} = \frac{21}{2}.$$

312. Calcule a área sob o gráfico de f entre $x = a$ e $x = b$.

a) $f(x) = 4 - x^2$ e $[a, b] = [-2, 2]$

b) $f(x) = x^2 + 7$ e $[a, b] = [0, 3]$

c) $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$ e $[a, b] = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

d) $f(x) = \sqrt{x} + 1$ e $[a, b] = [0, 4]$

e) $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ e $[a, b] = [0, 1]$

313. Calcule $\int_1^4 (-x^2 + 5x - 9)dx$ e interprete o resultado obtido.

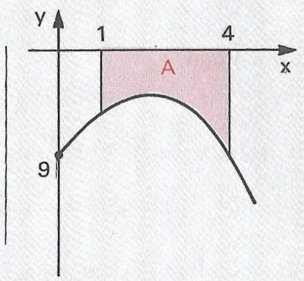
Solução

Temos: $F(x) = \int (-x^2 + 5x - 9)dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 9x$

$$\int_1^4 (-x^2 + 5x - 9)dx = F(4) - F(1)$$

$$= \left(-\frac{52}{3}\right) - \left(-\frac{41}{6}\right) = -\frac{63}{6} = -\frac{21}{2}$$

O número $-21/2$ é o simétrico da medida da área indicada na figura abaixo.



(Lembramos que a medida de uma área é um número sempre não negativo.)

De um modo geral, se $f(x) < 0$ em $[a, b]$, resulta que:

$-f(x) > 0$ em $[a, b]$ e $\int (-f(x))dx = -\int f(x)dx$. Logo, se $f(x) < 0$ em $[a, b]$, $\int_a^b f(x)dx = -A$ em que A é a área da região situada entre o eixo x e o gráfico de f no intervalo $[a, b]$.

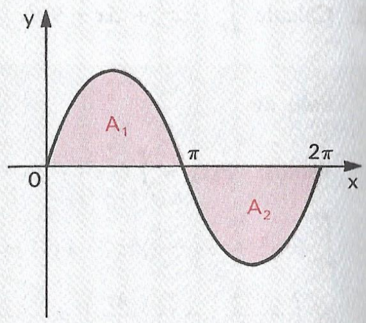
314. Calcule $\int_0^{2\pi} sen\ x\ dx$ e interprete o resultado.

Solução

Temos: $\int \text{sen } x \, dx = -\cos x$

$\int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) =$

$= -1 + 1 = 0.$



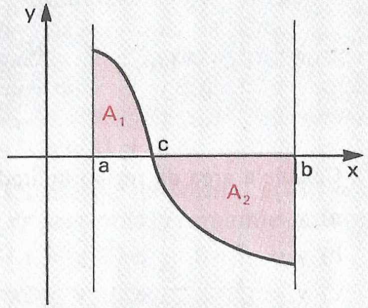
Como $sen\ x \geqslant 0$ em $[0, \pi]$ e $sen\ x \leqslant 0$ em $[\pi, 2\pi]$,

$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = A_1$ (ver figura)

$\int_{\pi}^{2\pi} \text{sen } x \, dx = -A_2$ (ver figura)

Como, por simetria, sabemos que $A_1 = A_2$, segue que

$\int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx = A_1 + (-A_2) = 0.$



De um modo geral, se $f(x) \geqslant 0$ em $[a, c]$, e $f(x) \leqslant 0$ em $[c, b]$, então,

$\int_a^b f(x)dx = A_1 - A_2$ (ver figura)

315. Justifique geometricamente, através de uma figura, as afirmações:

a) se f é uma função ímpar, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

b) se f é uma função par, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

316. Calcule as áreas da região compreendida entre as curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solução

Nos pontos de interseção das curvas, temos:

$x^2 = -x^2 + 4x \Longrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Longrightarrow$

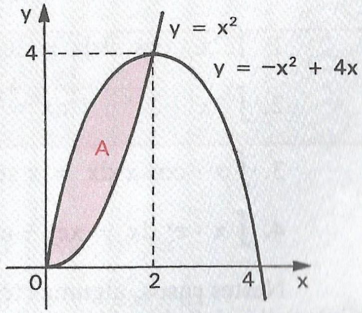
$\Longrightarrow x = 0$ ou $x = 2$

A área A pode ser calculada assim

$A = \int_0^2 (-x^2 + 4x)dx - \int_0^2 x^2dx$

ou, equivalentemente:

$A = \int_0^2 [(-x^2 + 4x) - (x^2)]dx$



Temos, então: $A = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx$

e segue que $F(x) = \int (-2x^2 + 4x)dx = -\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}$

e $A = F(2) - F(0) = \left(-\frac{16}{3} + 8\right) - 0 = \frac{8}{3}$.

317. Calcule a área da região limitada pelas curvas:

a) $y = x$ e $y = x^2$

b) $y = x^2 - 1$ e $y = 1 - x^2$

c) $y = x^2$ e $y = 2x + 8$

d) $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

e) $y = \text{sen } x$ e $y = x^2 - \pi x$

318. Calcule $\frac{dF}{dx}$, sendo $F(x)$ igual a:

a) $\int_1^x (5t + 2)dt$ b) $\int_5^x \sqrt{t}\, dt$ c) $\int_1^x \sqrt{t}\, dt$

IV. Algumas técnicas de integração

203. Até agora determinamos $\int f(x)dx$ utilizando as regras de derivação e algumas propriedades das derivadas. Entretanto, o cálculo de uma primitiva pode não ser uma tarefa simples ou imediata. Vejamos alguns exemplos:

1. $\int 2x \cdot \cos x^2 dx = \text{sen } x^2 + c$

2. $\int 3x^2 \cdot \sqrt{x^3 - 1}\, dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 1)^3} + c$

3. $\int x \cdot \cos x\, dx = x \text{ sen } x + \cos x + c$

4. $\int x \cdot e^x\, dx = xe^x - e^x + c$

Nestes casos, algumas técnicas são requeridas, a fim de determinarmos a integral indefinida. Nestas noções iniciais sobre integral, examinaremos duas: *a integração por substituição* e *a integração por partes.*

204. *Integração por substituição*

Consideremos o cálculo de uma primitiva de $f(x) = 2x \cdot \cos x^2$. Fazendo a substituição $x^2 = u(x)$, teremos $u'(x) = 2x$, e então $f(x) = u'(x) \cdot \cos u(x)$. Lembrando da regra da cadeia, do cálculo das derivadas resulta que uma primitiva de $u'(x) \cdot \cos u(x)$ é $\text{sen } u(x)$, ou seja, que

$$\int u'(x) \cos u(x)dx = \text{sen } u(x) + c$$

De um modo geral, se $f(x)$ pode ser escrita na forma $g(u) \cdot u'$, em que $u = u(x)$, então uma primitiva de $f(x)$ será obtida tomando-se uma primitiva de $g(u)$ e substituindo u por $u(x)$, ou seja:

$$\int f(x)dx = \int g(u) \cdot u'(x)dx = G(u(x)) + c$$

onde $G(u)$ é tal que $G'(u) = g(u)$.

205. No caso de $\int 3x^2 \sqrt{x^3 - 1}\, dx$, temos:

$u(x) = x^3 - 1$, $u'(x) = 3x^2$

$$\int 3x^2 \cdot \sqrt{x^3 - 1}\, dx = \int \sqrt{u} \cdot u'\, dx = \frac{u^{3/2}}{3/2} + c =$$

$$= \frac{(x^3 - 1)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}\sqrt{(x^3 - 1)^3} + c$$

EXERCÍCIOS

319. Determine as primitivas indicadas:

a) $\int 7 \cdot \text{sen } 7x\, dx$

b) $\int \cos 3x\, dx$

c) $\int e^{x^2} \cdot x\, dx$

d) $\int (x + 1)^{17}\, dx$

e) $\int e^{\text{sen } x} \cdot \cos x\, dx$

Solução

a) Fazendo $u(x) = 7x$, temos $u'(x) = 7$ e segue que

$$\int 7 \text{ sen } 7x \, dx = \int u' \cdot \text{sen } u \, dx = -\cos u + c = -\cos 7x + c$$

b) Fazendo $u(x) = 3x$, temos $u'(x) = 3$ e segue que

$$\int \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}\int 3 \cdot \cos 3x \, dx = \frac{1}{3}\int u' \cdot \cos u \, dx =$$

$$= \frac{1}{3} \text{ sen } u + c = \frac{\text{sen } 3x}{3} + c$$

c) Fazendo $u(x) = x^2$, temos $u'(x) = 2x$ e segue que:

$$\int e^{(x^2)} x \cdot dx = \frac{1}{2}\int e^{(x^2)} \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2}\int e^u \cdot u' dx = \frac{1}{2} e^u + c =$$

$$= \frac{1}{2} e^{(x^2)} + c$$

d) Fazendo $u(x) = x + 1$, temos $u'(x) = 1$ e segue que

$$\int (x + 1)^{17} dx = \int u^{17} \cdot u' \, dx = \frac{u^{18}}{18} + c = \frac{(x + 1)^{18}}{18} + c$$

e) Fazendo $u(x) = \text{sen } x$, segue que

$$\int e^{\text{sen } x} \cos x \, dx = \int e^u \cdot u' dx = e^u + c = e^{\text{sen } x} + c$$

320. Calcule as integrais indefinidas indicadas:

a) $\int (3x + 7)^{15} \cdot 3 \, dx$

b) $\int e^{3x} \cdot 3 \, dx$

c) $\int 5 \cdot \cos 5x \, dx$

d) $\int 3 \cdot \sqrt{3x + 7} \, dx$

e) $\int \frac{1}{(x + 1)^2} dx$

321. Calcule:

a) $\int e^{x^3} \cdot x^2 dx$

b) $\int x \cdot \cos 3x^2 dx$

c) $\int (5x - 1)^{13} dx$

d) $\int \sqrt{5x - 1} \, dx$

e) $\int \frac{1}{(3x + 7)^2} dx$

322. Calcule:

a) $\int e^{3x} dx$

b) $\int (\text{sen } x)^5 \cos x \, dx$

c) $\int \text{sen } 5x \, dx$

d) $\int \cos(3x + 1) dx$

e) $\int (3 - 2x)^4 dx$

206. *Integração por partes*

Sabemos que para a derivada de um produto $u(x) \cdot v(x)$ vale a igualdade:

$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$.

Assim, segue que uma primitiva de $(u(x) \cdot v(x))'$ é igual à soma de uma primitiva de $u'(x)v(x)$ com uma primitiva de $v'(x) \cdot u(x)$ (a menos de uma constante), ou seja:

$$\int (u(x) \cdot v(x))' dx = \int v(x) \cdot u'(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Mas uma primitiva de $(u(x) \cdot v(x))'$ é $u(x) \cdot v(x)$; logo:

$$\boxed{u(x) \cdot v(x) = \int v(x) \cdot u'(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx}$$

Isso significa que

$$\boxed{\int v(x) \cdot u'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx}$$

e que uma primitiva de $v(x) \cdot u'(x)$ pode ser obtida através de uma primitiva de $u(x) \cdot v'(x)$, caso isso seja conveniente.

207. Por exemplo, procuremos uma primitiva de $x \cdot e^x$. Fazendo $v(x) = x$ e $u'(x) = e^x$, temos:

$$\int x \cdot e^x dx = \int v(x) \cdot u'(x) dx$$

Como $u'(x) = e^x \implies u(x) = e^x$
$v(x) = x \implies v'(x) = 1$

$$\int v(x) \cdot u'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

segue que:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx$$
$$= x \cdot e^x - e^x + c$$

208. Um outro exemplo: procuremos $\int x \cdot \cos x\, dx$.

Fazendo $v(x) = x$ e $u'(x) = \cos x$, segue que:

$$\int x \cdot \cos x\, dx = \int v(x) \cdot u'(x)dx.$$

Como $u'(x) = \cos x \implies u(x) = \text{sen } x$
$v(x) = x \implies v'(x) = 1,$

$$\int v(x) \cdot u'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x)dx$$

segue que:

$$\int x \cdot \cos x\, dx = x \cdot \text{sen } x - \int \text{sen } x\, dx = x \cdot \text{sen } x + \cos x + c$$

EXERCÍCIO

323. Calcule:

a) $\int x \cdot \text{sen } x\, dx$

b) $\int (3x + 7) \cdot \cos x\, dx$

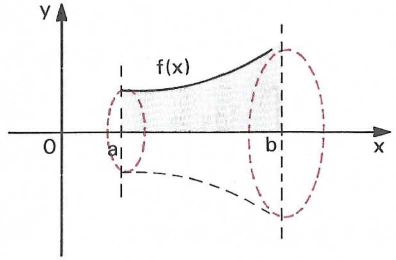
c) $\int (2x - 1) \cdot e^x dx$

d) $\int (-3x + 1) \cdot \cos 5x\, dx$

e) $\int (2x - 3) \cdot e^{1-3x} dx$

V. Uma aplicação geométrica: cálculo de volumes

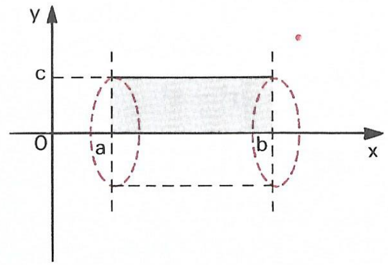
209. Consideremos o sólido de revolução gerado a partir da rotação do gráfico de f em torno do eixo dos x, sendo $f(x) \geqslant 0$ em $[a, b]$ (ver figura).



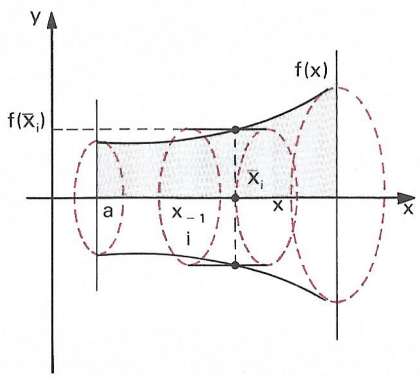
Vamos descrever um modo de calcular o seu volume V.

Se f fosse constante e igual a c em $[a, b]$, o sólido gerado seria um cilindro e teria volume V igual a $\pi c^2 \cdot (b - a)$:

$$\boxed{V = \pi c^2 \cdot (b - a)}$$



Não sendo f constante, vamos dividir $[a, b]$ em pequenos subintervalos e em cada um deles, aproximando $f(x)$ por uma função constante, vamos calcular o volume da fatia do sólido gerado como se fosse o de uma fatia cilíndrica.



Assim, o volume V será, aproximadamente, a soma dos volumes das fatias cilíndricas consideradas, ou seja:

$$V \cong \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot [f(\overline{x}_i)]^2 \cdot \Delta_i x$$

em que $\overline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ e $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$.

Lembrando da definição de integral, resulta:

$$\boxed{V = \int_a^b \pi \cdot [f(x)]^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

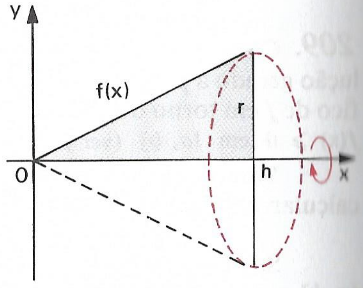
210. No caso de um cone circular de raio da base *r* e altura *h*, podemos ter:

$$f(x) = \frac{r}{h}x$$

Logo: $V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx =$

$$= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \pi \frac{r^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3}$$



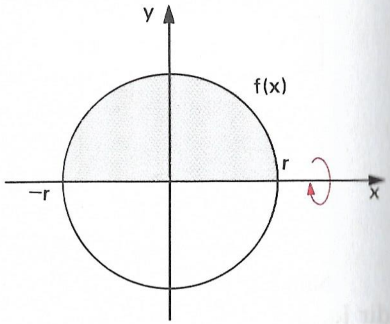
211. No caso de uma esfera de raio *r*, podemos ter:

$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Logo:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) dx =$$



$$= \pi \cdot \left(r^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-r}^{r} = \pi \cdot \frac{2}{3}r^2 - \pi\left(-\frac{2}{3}r^3\right) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

EXERCÍCIOS

324. Determine o volume do tronco de cone gerado pela rotação do segmento de reta *AB*, em torno do eixo dos *x*, sendo $A = (1, 1)$ e $B = (2, 3)$.

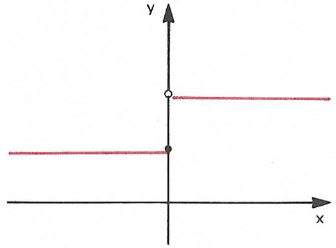
325. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação do gráfico de $f(x) = x^2$, $x \in [1, 3]$, em torno do eixo dos *x*.

326. A curva $y = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 4]$, ao ser girada em torno do eixo dos *x* determina um sólido de volume *V*. Calcule *V*.

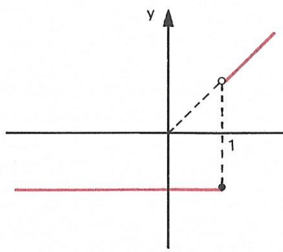
Respostas dos Exercícios

Capítulo I

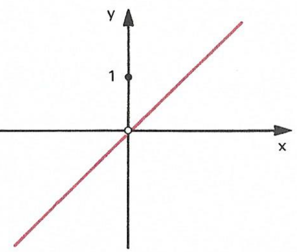
1. a)



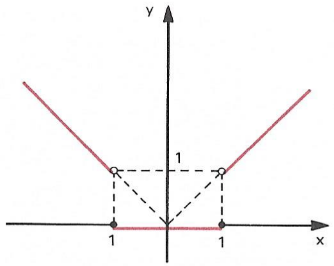
b)



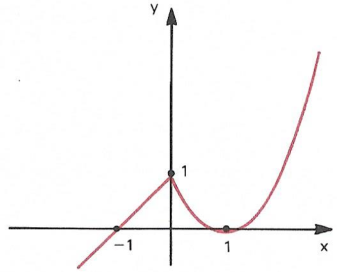
c)



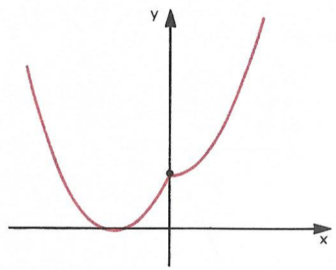
d)



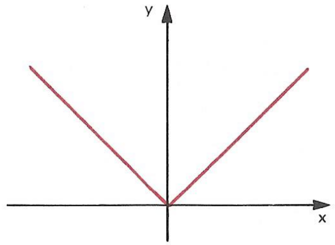
e)



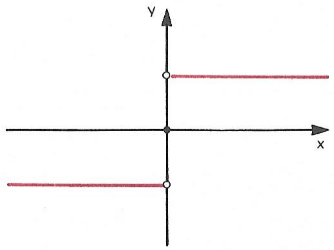
f)



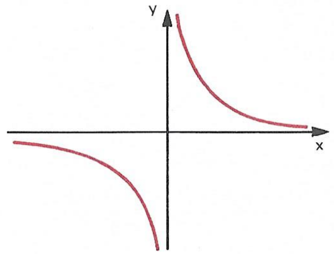
2\. a)



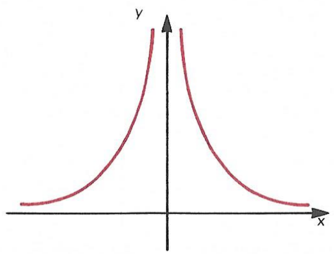
b)



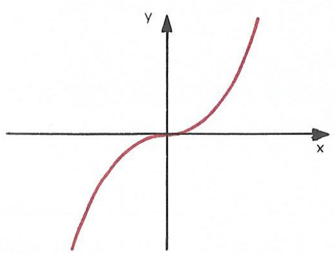
c)



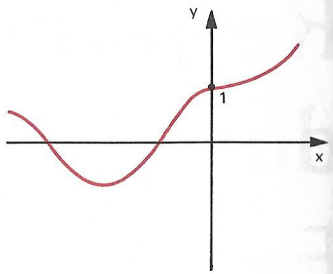
d)



e)



3\.



4\. $g \circ f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$

5\. $(g \circ f)(x) = x^3 + 1$
$(f \circ g)(x) = (x + 1)^3$
$(f \circ f)(x) = x^9$
$(g \circ g)(x) = x + 2$

6\. $(h \circ g \circ f)(x) = 2^{(x+2)^2}$
$(f \circ g \circ h)(x) = 2^{2x} + 2$

7\. a) $g(x) = |x|$ e $f(x) = x^2 + 1$
b) $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = x^2 + 4$
c) $g(x) = \operatorname{tg} x$ e $f(x) = x^3$
d) $g(x) = x^2$ e $f(x) = \operatorname{tg} x$
e) $g(x) = 2^x$ e $f(x) = \cos x$
f) $g(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = 3^x$

8\. $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2^x$ e $h(x) = \cos x$

9\. a) $f^{-1} = \{(a', a), (b', b), (c', c)\}$
b) *g* não é inversível
c) $h^{-1}(x) = \dfrac{1 - x}{5}$
d) $i^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 2}$
e) $j^{-1}(x) = -\sqrt{x}$
f) $p^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$

10\. $f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{quando } x \leqslant 1 \\ 2x - 1 & \text{quando } 1 < x \leqslant 2 \\ \sqrt{x + 7} & \text{quando } x > 2 \end{cases}$

11\. $(g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \dfrac{x^3 + 9x^2 + 27x + 35}{8}$

12\. $f^{-1}(x) = 10^{2x}$

13\. $f^{-1}(x) = 2 \cdot \operatorname{arc\,sen} x$

Capítulo II

15\. $0 < \delta \leqslant \dfrac{0{,}01}{3}$

16\. $0 < \delta \leqslant 0{,}0005$

17\. $0 < \delta \leqslant 0{,}01$

18\. $0 < \left| x - \dfrac{2}{3} \right| < \delta$ e $0 < \delta \leqslant \dfrac{0{,}0001}{3}$

28\. a) 2 b) 4 c) $-\dfrac{8}{3}$ d) -12 e) 0 f) $\dfrac{1}{8}$ g) $\dfrac{9}{4}$ h) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ i) 2 j) -2

30\. a) 2 b) 4 c) 6 d) $\dfrac{2}{5}$ e) $-\dfrac{7}{3}$ f) $\dfrac{7}{11}$ g) $\dfrac{3}{2}$ h) 3 i) $-\dfrac{8}{3}$

32\. 5

33\. -3

35\. a) $-\dfrac{4}{5}$ b) $\dfrac{21}{19}$ c) 1 d) $\dfrac{11}{2}$

37\. a) $\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{1}{5}$ c) 8 d) $\dfrac{7}{8}$

38\. a) 2a b) $\dfrac{2}{3a}$ c) n d) $\dfrac{m}{n}$ e) $n\,a^{n-1}$ f) $\dfrac{m}{n}\,a^{m-n}$

40\. a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) -1 e) 1 f) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

41\. a) $\dfrac{1}{12}$ b) $-\dfrac{1}{24}$ c) $-\dfrac{1}{4}$ d) -8 e) 3

43\. a) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ b) $-\dfrac{1}{2}$ c) 1 d) 2

44\. a) $\dfrac{5}{14}$ b) -4

46\. a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $-\dfrac{1}{6}$

47\. a) $\dfrac{1}{3}$ b) $-\dfrac{3}{8}$ c) $\dfrac{5}{3}$

48\. a) $\dfrac{5}{2}$ b) $\dfrac{5}{6}$ c) -3

50\. a) $\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{3}{2}$ c) $\dfrac{4}{3}$ d) $\dfrac{3}{2}$

51\. a) 3a b) $\dfrac{1}{n}$ c) $\dfrac{n}{m}$ d) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{na}$ e) $\dfrac{n \cdot \sqrt[mn]{a^{n-m}}}{m}$

52\. a) 1 b) 5 c) não existe

53\. a) 5 b) 5 c) 5

54\. a) 1 b) -11 c) não existe

55\. a) 1 b) -3 c) não existe

56\. a) 2 b) 2 c) 2

57\. a) 1 b) 1 c) 1

59\. a) 1 b) -1 c) não existe

60\. a) -1 b) 1 c) não existe

61\. a) -3 b) 3 c) não existe

62\. a) 7 b) -7 c) não existe

63\. a) -1 b) 1 c) não existe

64\. a) -3 b) 3 c) não existe

65\. a) 1 b) 0 c) não existe d) 0 e) 1 f) não existe g) 2 h) 1 i) não existe

66\. $a = -10$

67\. $a = 1$

68\. $a = -4$

Capítulo III

70. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $-\infty$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $-\infty$

72. a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $+\infty$ f) $-\infty$ g) $-\infty$ h) $+\infty$ i) $-\infty$ j) $+\infty$

76. a) $+\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$

77. a) $+\infty$
b) $-\infty$ se n for par e $+\infty$ se n for ímpar
c) $+\infty$ se $c > 0$ e $-\infty$ se $c < 0$
d) $-\infty$ se $c > 0$ e $+\infty$ se $c < 0$

78. a) $+\infty$ b) $+\infty$

80. a) $-\frac{2}{5}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) 0 f) 0 g) $\frac{1}{3}$ h) 8 i) $\frac{9}{8}$ j) 72 k) $\frac{3}{2}$

82. a) 1 b) -1 c) 2 d) 2 e) $+\infty$ f) 0 g) 1 h) 0

84. a) $\frac{3}{2}$ b) $+\infty$ c) 0 d) $-\frac{1}{2}$ e) 0 f) $-\frac{1}{2}$ g) 0 h) $\frac{a}{2}$

85. a) 2 b) 1 c) 2

86. a) $+\infty$ b) 0 c) $\frac{1}{2}$

Capítulo IV

90. a) $\frac{3}{2}$ b) 2 c) $\frac{a}{b}$ d) $\frac{a}{b}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{a}{b}$ g) 0 h) $-\frac{1}{2}$ i) 2 j) $\frac{1}{2}$

92. a) $-\text{sen } a$ b) $\sec^2 a$ c) $\sec a \cdot \text{tg } a$ d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) 0 f) 1 g) $\frac{5}{2}$ h) $\cos a$ i) $-\text{sen } a$ j) 0 k) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ l) $\frac{2}{\pi}$ m) $\sqrt{2}$ n) $\frac{3}{2}$ o) $a - b$ p) 0 q) $-\frac{1}{4}$ r) $\frac{1}{2}$ s) $\frac{\pi}{2}$ t) 1

93. a) 0 b) 1 c) $\frac{2}{\pi}$ d) $\frac{1}{2}$

94. a) 9 b) 2 c) e^2 d) e^{-3}

95. a) $+\infty$ b) 0 c) 0 d) $+\infty$. e) $+\infty$ f) 0

96. a) 2^{10} b) 3^{-6} c) e^{-2} d) 10^{-1}

97. a) 81 b) 4 c) 1 d) 3 e) e^2 f) e^{-12}

98. a) $\log_3 2$ b) -2 c) 2 d) 3

99. a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$ f) $+\infty$

100. a) 4 b) $\ell n\ 37$ c) $\log \frac{4}{3}$ d) 0

101. a) -1 b) 0 c) $\ell n\ 4$ d) $\log \frac{8}{3}$

103. a) e^3 b) e c) e^4 d) e^6 e) $e^{\frac{3}{4}}$ f) e^a g) e^{ab} h) $\frac{1}{e}$

104. a) $\frac{1}{e}$ b) $\frac{1}{e^2}$ c) $\frac{1}{e^3}$ d) $\frac{1}{e^6}$

106. a) e^7 b) e c) e^{-5} d) e^{-3} e) e^4

107. a) e b) e^{-1} c) e^2

108. a) 2 b) $3\ \ell n\ 2$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{2\ \ell n\ 3}{5\ \ell n\ 2}$ e) e^2 f) e^a g) $2^a \cdot \ell n\ 2$

109. a) 1 b) log e c) 2 d) $\frac{3}{\ell n\ 10}$

110. e^{-2}

Capítulo V

112. a) descontínua b) descontínua c) contínua d) descontínua

113. a) descontínua b) contínua c) contínua d) descontínua

114. a) contínua b) contínua c) descontínua d) descontínua

115. a) descontínua b) descontínua c) descontínua

116. a) $a = -1$ b) $a = -\frac{1}{3}$ c) $a = \frac{-47}{4}$ d) $a = \frac{\sqrt{2}}{4}$ e) $a = \frac{1}{3}$

117. $a = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$

Capítulo VI

118. 3

119. 4

120. 3

121. 1

122. Não existe.

123. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

124. $\frac{1}{2}$

125. $\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

126. Não existe.

127. zero

130. a) $y = x + 1$ b) $y = -1$ c) $y = x$ d) $y = -x + 2$ e) $y = \frac{1}{4}x + 1$ f) $y = \frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{2}{3}$

132. $-\frac{1}{9}$ m/s

134. 53 m/s^2

135. $f'(x) = 0$
$g'(x) = 6x^5$
$h'(x) = 15x^{14}$

136. $f'(x) = cn\ x^{n-1}$
$g'(x) = \sec^2 x$
$h'(x) = \sec x \cdot \text{tg } x$

138. $y = e^2 x - e^2$

140. a) 32 m/s b) 108 m/s^2 c) $t = 3$s d) $t = 2$s

Capítulo VII

142. a) $f'(x) = 88\ x^{10}$
b) $f'(x) = -\frac{21}{5}x^2$
c) $f'(x) = 6x + 1$
d) $f'(x) = 4x^3 + 10x$
e) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$
f) $f'(x) = 2nx^{2n-1} + 2n\ x^{n-1}$

144. a) $f'(x) = 15x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 8x + 1$
b) $f'(x) = 9x^8 + 7x^6 + 12x^5 + 4x^3 + 3x^2$
c) $f'(x) = 5(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^4$

d) $f'(x) = 104 \cdot (2x + 3)^{51}$
e) $f'(x) = (x^3 + 3x^2) \cdot e^x$
f) $f'(x) = (1 + x) \cdot e^x - \text{sen } x$
g) $f'(x) = 2a^{2x} \cdot x^3\,(2 + x\,\ell n\, a)$
h) $f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$
i) $f'(x) = 5e^{5x+1}$
j) $f'(x) = -5 \cdot \cos^4 x \cdot \text{sen } x$
k) $f'(x) = \text{sen}^6 x \cdot \cos^2 x\,(7 \cdot \cos^2 x - 3 \cdot \text{sen}^2 x)$
l) $f'(x) = a \cdot \cos x - b \cdot \text{sen } x$

145. $f'(0) = 4$

146. $y = -3840 \cdot x + (3840\pi - 1024)$

147. $v = -a \cdot e^{-t} \cdot (\cos t + \text{sen } t)$
$\alpha = 2a \cdot \text{sen } t \cdot e^{-t}$

149. a) $f'(x) = -14 \cdot x^{-8}$
b) $f'(x) = -15 \cdot x^{-6}$
c) $f'(x) = -\dfrac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$
d) $f'(x) = -\dfrac{2}{(x - 1)^2}$
e) $f'(x) = -\dfrac{5x^2 + 6x + 5}{(x^2 - 1)^2}$
f) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 7}{(x - 2)^2}$
g) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot \text{sen } x + x^2 \cdot \cos x - x^2 \cdot \text{sen } x}{e^x}$
h) $f'(x) = -\dfrac{x(\text{sen } x + \cos x) + \cos x}{x^2 \cdot e^x}$

150. a) $f'(x) = -\text{cossec}^2\, x$
b) $f'(x) = \sec x \cdot \text{tg } x$
c) $f'(x) = -\text{cossec } x \cdot \text{cotg } x$
d) $f'(x) = 2 \cdot \text{tg } x \cdot \sec^2 x$
e) $f'(x) = \sec x \cdot (\text{tg } x - \sec x)$
f) $f'(x) = 2x \cdot \text{tg } x + (x^2 + 1) \cdot \sec^2 x$
g) $f'(x) = \dfrac{\sec^2 x \cdot (\text{sen} x + \cos x) - \text{tg} x \cdot (\cos x - \text{sen} x)}{(\text{sen } x + \cos x)^2}$
h) $f'(x) = \dfrac{2 \cdot e^{2x}}{\text{tg}^3\, x} \cdot (\text{tg } x - \sec^2 x)$

151. $y = \left(\dfrac{1}{e} - 1\right)(x + 2)$

152. $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{128}{\pi^3} - \dfrac{1}{e^{\pi/4}} + 4$

153. a) $y' = \dfrac{2x}{(x^2 + 1)^2}$

b) 1
c) $(0, 0), \left(1, \dfrac{1}{2}\right), \left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$

155. a) $F'(x) = 4 \cdot \cos 4x$
b) $F'(x) = -\dfrac{7x \cdot \text{sen } 7x + \cos 7x}{x^2}$
c) $F'(x) = ab \cdot \cos bx$
d) $F'(x) = -(6x + 1) \cdot \text{sen}(3x^2 + x + 5)$
e) $F'(x) = e^x \cdot \cos e^x$
f) $F'(x) = 1 + 12 \cdot \sec^2 4x$
g) $F'(x) = a^{\text{sen } x} \cdot \cos x \cdot \ell n\, a$
h) $F'(x) = -3 \cdot \text{cossec}^2\,(3x - 1)$
i) $F'(x) = (2x + 5) \cdot a^{x^2 + 5x + 1} \cdot \ell n\, a$
j) $F'(x) = -\text{sen } x \cdot \sec^2(\cos x)$
k) $F'(x) = 6 \cdot \text{tg}^2\, 2x \cdot \sec^2 2x$
l) $F'(x) = 2 \cdot e^{\text{sen } 2x} \cdot \cos 2x$

156. $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

157. $f'(-1) = 3 \cdot e^{-4}$

158. $y = \dfrac{e^{-2} - e^2}{2} \cdot x + \dfrac{3e^{-2} - e^2}{2}$

159. Sim: $a_1' = \cos x = a_2$
$a_2' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = a_3$
$a_3' = \cos(x + \pi) = a_4$
$\vdots$
$a_n' = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right) = a_{n+1}$

161. a) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$
b) $f'(x) = x^{n-1}\,(n \cdot \ell n\, x + 1)$
c) $f'(x) = a \cdot \ell n\, x + \dfrac{ax + b}{x}$
d) $f'(x) = \cos x \cdot \ell n\, x + \dfrac{\text{sen } x}{x}$
e) $f'(x) = \dfrac{\cos x + x \cdot \ell n\, x \cdot \text{sen } x}{x \cdot \cos^2 x}$
f) $f'(x) = \dfrac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}$
g) $f'(x) = \text{cotg } x$
h) $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ell n\, x \cdot \ell n\, a}$

162. a) $f'(x) = \dfrac{4}{7 \cdot x^{3/7}}$
b) $f'(x) = \dfrac{8}{3} \cdot \sqrt[3]{x^5}$

c) $f'(x) = \dfrac{9}{2}\sqrt{x^7}$
d) $f'(x) = -\dfrac{2\sqrt[5]{3}}{5} \cdot x^{-7/5}$
e) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
f) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{2}{x^3}$
g) $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{ax + b}}$
h) $f'(x) = \dfrac{2ax + b}{3\sqrt[3]{ax^2 + bx + c}}$
i) $f'(x) = \dfrac{b}{4\sqrt{ax + bx^{3/2}}}$
j) $f'(x) = \dfrac{(a - c) \cdot [bx^2 + 2(a + c)x + b]}{2\sqrt{(ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a)^3}}$
k) $f'(x) = -\dfrac{4ab}{3\sqrt[3]{(ax + b)(ax - b)^5}}$
l) $f'(x) = \dfrac{8x + 4\sqrt[3]{1 + x + x^2}}{3}$
m) $f'(x) = \dfrac{5x^2 + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}}$
n) $f'(x) = \dfrac{15x^2 + 8x + 3}{2\sqrt{3x + 2}}$
o) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x} \cdot (2 - \sqrt{x})^2}$
p) $f'(x) = \dfrac{x - 3}{2(x - 1)^{3/2}}$
q) $f'(x) = -\dfrac{\text{sen}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$
r) $f'(x) = -\dfrac{\text{sen } x}{2\sqrt{\cos x}}$
s) $f'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$
t) $f'(x) = \dfrac{1}{2(1 + x) \cdot \ell n\, a}$

163. a) $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}$
b) $f'(x) = -\dfrac{3x^2}{\sqrt{1 - x^6}}$
c) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2 + 1}$
d) $f'(x) = 2x + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
e) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
f) $f'(x) = \text{arc tg } x + \dfrac{x}{1 + x^2}$
g) $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x^2} \cdot \text{arc sen } x - 3x}{3\sqrt[6]{x^4(1 - x^2)^3}\,(\text{arc sen } x)^2}$
h) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \text{arc cos } x}$
i) $f'(x) = \dfrac{1}{2(1 + x^2)\sqrt{\text{arc tg } x}}$
j) $f'(x) = \text{arc sen } x^2 + \dfrac{2x^2}{\sqrt{1 - x^4}} - 3x^2\, e^{x^3}$
k) $f'(x) = -\dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{x\, e^{2x} - x^2}}$.
l) $f'(x) = \dfrac{\text{arc sen } x + \text{arc cos } x}{\sqrt{1 - x^2} \cdot \text{arc sen } x \cdot \text{arc cos } x}$

164. $y = \dfrac{11}{4}x - \dfrac{9}{4}$

165. $(3, 2\sqrt{2})$

167. $\dfrac{1}{9}$

170. a) $f'(x) = (\text{sen}\, x)^{(x^2)} \cdot [2x \cdot \ell n\, \text{sen}\, x + x^2 \cdot \text{cotg}\, x]$
b) $f'(x) = x^{(x^3)} \cdot x^2\,[3 \cdot \ell n\, x + 1]$
c) $f'(x) = x^{(e^x)} \cdot e^x \cdot \left[\ell n\, x + \dfrac{1}{x}\right]$
d) $f'(x) = (e^x)^{\text{tg } 3x} \cdot [3x \cdot \sec^2 3x + \text{tg } 3x]$

171. a) $f'(x) = 4x^3 + 10x$
$f''(x) = 12x^2 + 10$
$f'''(x) = 24x$
$f^{\text{IV}}(x) = 24$
$f^{(n)}(x) = 0, \ \forall\, n \geq 5$
b) $f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n!\; x^{-n-1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
c) $f^{(n)}(x) = e^x, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
d) $f^{(n)}(x) = (-1)^n, e^{-x}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
e) $f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right), \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

172. a) $v(t) = -a\omega \text{ sen } (\omega t + \varphi)$
b) $v(0) = -a\omega \text{ sen } \varphi$
c) $\alpha(t) = -a\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$
d) $\alpha(1) = -a\omega^2 \cos(\omega + \varphi)$

173. $A = 6$ e $k = 2$

Capítulo VIII

175. Sim.

176. Não, não existe $f'(2)$.

177. Não, não existe $f'(0)$.

178. $f(x) = x^2$, no intervalo $[-1, 4]$, tem derivada nula para $x = 0$ e, no entanto, $f(-1) = 1 \neq f(4) = 16$; $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, no intervalo $[-2, 2]$, tem derivada nula para $x = 0$, $f(-2) = f(2) = \dfrac{1}{3}$ e, no entanto, g não é contínua no intervalo.

179. $c = 3$

180. $c = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

181. $c = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

183. $c = \dfrac{1}{2}$

184. $c = \dfrac{8}{27}$

185. $c = \pm\sqrt{2}$

186. $c = 1 + \sqrt{5}$

188. f não é contínua em I.

189. f não é contínua em I.

190. f não é derivável em $x = 1 \in I$.

192. f: $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 7$

g: $\dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

h: $-\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

i: $-1 \leqslant x \leqslant 0$ ou $x \geqslant 1$

194. f: $x \leqslant -2$ ou $0 \leqslant x \leqslant 1$

g: $x \leqslant 0$

h: não existe x

i: não existe x

195. crescente para $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 5$

decrescente para $1 \leqslant x \leqslant 5$

196. crescente para $x \geqslant -1$

decrescente para $x \leqslant -1$

197. crescente para $x \leqslant -2$ ou $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 2$

decrescente para $-2 \leqslant x \leqslant -1$ ou $1 \leqslant x \leqslant 2$

198. crescente para $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$

decrescente para $-1 \leqslant x \leqslant 1$ e $x \neq 0$

199. crescente para $\dfrac{-3\sqrt{2}}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

decrescente para $-3 < x \leqslant -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ou $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \leqslant x < 3$

200. decrescente para todo $x \in \mathbb{R}$

201. crescente para $x \leqslant 2$

decrescente para $x > 2$

202. crescente para $x \geqslant 0$

decrescente para $x \leqslant 0$

203. crescente para $-\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$

decrescente para $x \leqslant -\dfrac{1}{2}$ ou $x \geqslant 1$

204. crescente para todo $x \in \mathbb{R}^*_+$

205. crescente em $\mathbb{R}_+$

decrescente em $\mathbb{R}_-$

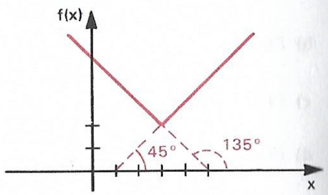
206. crescente para $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{5\pi}{12}$ ou $\dfrac{11\pi}{12} \leqslant x \leqslant \dfrac{17\pi}{12}$ ou $\dfrac{23\pi}{12} \leqslant x \leqslant 2\pi$

decrescente para $\dfrac{5\pi}{12} \leqslant x \leqslant \dfrac{11\pi}{12}$ ou $\dfrac{17\pi}{12} \leqslant x \leqslant \dfrac{23\pi}{12}$

207. crescente para $\pi + 2k\pi \leqslant x \leqslant 2\pi + 2k\pi$

decrescente para $2k\pi \leqslant x \leqslant \pi + 2k\pi$

210.



214. $x = -\dfrac{5}{2}$ é ponto de máximo

215. $x = 2$ é ponto de mínimo

216. $\begin{cases} x = 3 & \text{é ponto de mínimo e} \\ x = -3 & \text{é ponto de máximo} \end{cases}$

217. $x = 2$ é ponto de inflexão

218. $\begin{cases} x = 6 & \text{é ponto de máximo e} \\ x = \dfrac{50}{7} & \text{é ponto de mínimo} \end{cases}$

219. $x = -\dfrac{5}{2}$ é ponto de máximo

220. $\begin{cases} x = \dfrac{2k\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ é ponto de máximo e} \\ x = \dfrac{(2k+1)\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ é ponto de minimo} \end{cases}$

221. $\begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ é ponto de máximo} \\ x = \dfrac{7\pi}{8} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ é ponto de mínimo} \end{cases}$

222. $x = e^{-1}$ é ponto de mínimo

223. $x = 0$ é ponto de mínimo

224. $x = -1$ é ponto de máximo e

$x = 1$ é ponto de mínimo

226. $f(2) = -5$ é valor mínimo

227. $f(\sqrt[3]{-2}) = 2\sqrt[3]{2} + 8\sqrt[3]{-2}$ é valor mínimo

228. $\begin{cases} f(1) = \dfrac{1}{2} \text{ é valor máximo e} \\ f(-1) = -\dfrac{1}{2} \text{ é valor mínimo} \end{cases}$

229. $\begin{cases} f(0) = 0 \text{ é valor mínimo e} \\ f(-2) = 4e^{-2} \text{ é valor máximo} \end{cases}$

230. Não tem extremos.

231. $f(1) = 0$ é valor mínimo

232. $\begin{cases} (-\sqrt{3}, 6\sqrt{3}) \text{ é ponto máximo e} \\ (\sqrt{3}, -6\sqrt{3}) \text{ é ponto mínimo} \end{cases}$

233. $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{3}\right)$ é ponto máximo

234. $\left(\sqrt[3]{-2}, \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$ é ponto mínimo

235. $\left(\sqrt{e}, \dfrac{1}{2e}\right)$ é ponto máximo

236. $a = -\dfrac{3}{2}$ e $b = \dfrac{11}{2}$

238. $x = 2$ é ponto de mínimo absoluto

$x = 5$ é ponto de máximo absoluto

239. $x = 6$ é ponto de mínimo absoluto

$x = 3$ é ponto de máximo absoluto

240. $t = 2$ s

241. a) $t = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi - \ell\right)$ e $s = 0$

b) $t = \dfrac{1}{k}(2n\pi - \ell)$ e $s = a$

243. $x = y = \dfrac{a}{2}$

244. 5 R

246. $h = \dfrac{4R}{3}$ e $r = \dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$

247. $r = R\sqrt{2}$ e $h = 4R$

248. 4 cm

249. 13,333 km de B e 6,666 km de C

250. $\ell_1 = \dfrac{\pi L}{\pi + 4}$ e $\ell_2 = \dfrac{4L}{\pi + 4}$

251. $\dfrac{r}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

252. $4\sqrt{3A}$

253. $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$ rad

254. $x = \dfrac{1}{2}$ é ponto de mínimo

255. $\begin{cases} x = -1 & \text{é ponto de mínimo e} \\ x = 1 & \text{é ponto de máximo} \end{cases}$

256. $\begin{cases} x = 0 & \text{é ponto de mínimo e} \\ x = -2 & \text{é ponto de máximo} \end{cases}$

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

257. $x = 0$ é ponto de mínimo

258. $x = 0$ é ponto de mínimo

259. Não é possível determinar os extremos usando o critério da derivada segunda.

260. $\left(4, \frac{1}{4\ell n 2}\right)$ é ponto de máximo

261. $x = 1$ é ponto de máximo absoluto e
$x = -2$ é ponto de mínimo absoluto

262. $x = -1$ é ponto de máximo absoluto e
$x = 2$ é ponto de mínimo absoluto

263. $x = -6$ é ponto de mínimo absoluto e
$x = 1$ e $x = 5$ são pontos de máximo absoluto

265. $(1, 2)$

267. $h = \frac{4R}{3}$ e $r = \frac{2\sqrt{2}R}{3}$

268. $h = 4R$ e $r = R\sqrt{2}$

269. $\frac{\sqrt[3]{6V}}{3}, \sqrt[3]{6V}, \frac{\sqrt[3]{6V}}{2}$

270. 18 cm e 24 cm

271. 7 dias

272. $\frac{c - b}{2d}$

273. $\begin{cases} \text{conc. posit. para } x > 0 \\ \text{conc. negat. para } x < 0 \\ \text{ponto de inflexão: } (0, 0) \end{cases}$

274. $\begin{cases} \text{conc. posit. para } x > 1 \text{ ou } -1 < x < 0 \\ \text{conc. negat. para } x < -1 \text{ ou } 0 < x < 1 \\ \text{ponto de inflexão: } (0, 0) \end{cases}$

275. $\begin{cases} \text{conc. posit. para } x < 2 \\ \text{conc. negat. para } x > 2 \\ \text{ponto de inflexão: } (2, 0) \end{cases}$

276. $\begin{cases} \text{conc. posit. para } -\sqrt{6} < x < 0 \text{ ou } x > \sqrt{6} \\ \text{conc. negat. para } x < -\sqrt{6} \text{ ou } 0 < x < \sqrt{6} \\ \text{pontos de inflexão: } (0, 0), \left(\sqrt{6}, \frac{\sqrt{60}}{50}\right), \\ \left(-\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{60}}{50}\right) \end{cases}$

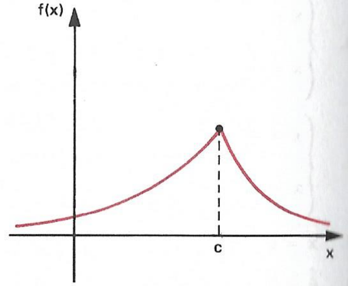
277. $\begin{cases} \text{conc. posit. para } x < 1 \text{ ou } x > \frac{4}{3} \\ \text{conc. negat. para } 1 < x < \frac{4}{3} \\ \text{pontos de inflexão: } (1, 1) \text{ e } \left(\frac{4}{3}, \frac{43}{27}\right) \end{cases}$

278. $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{9\pi}{4} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

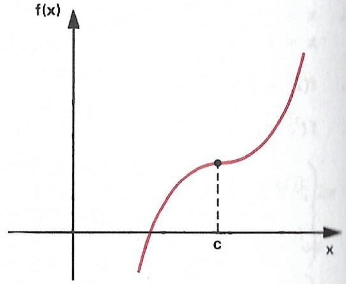
279. $x < \frac{3}{5}$ e $x \neq 0$

280. $\left(-\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{19}{36}\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{5}{6}}, \frac{19}{36}\right)$

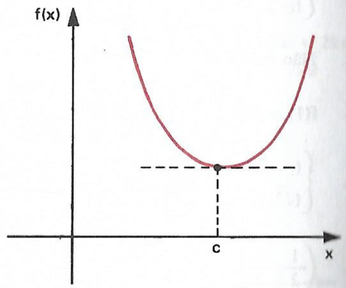
281.



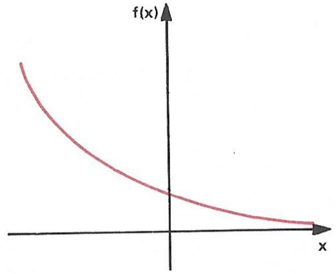
282.



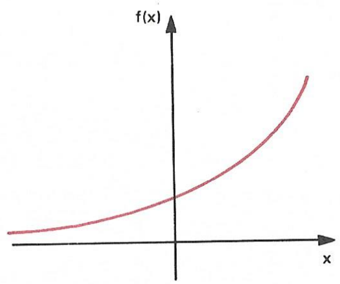
283.



284.



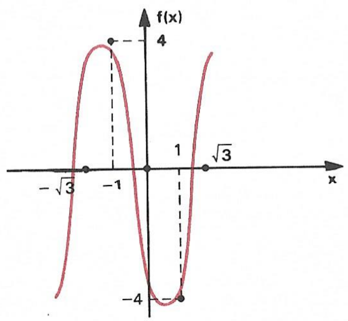
285.



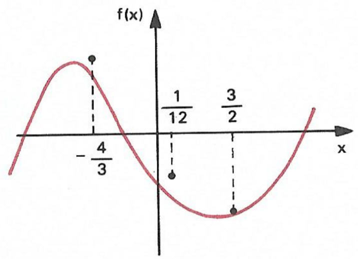
286. $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = -6$ e $a_3 = 2$

287. $a_0 = a_1 = a_3 = 0$, $a_2 = -\frac{6}{5}$, $a_4 = \frac{1}{5}$

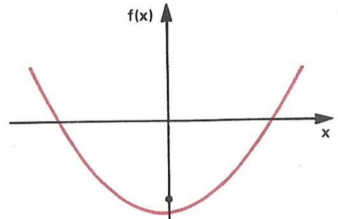
288.



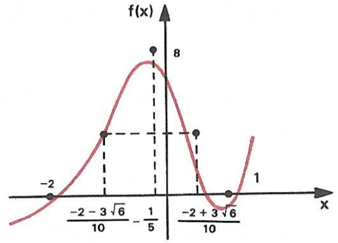
289.



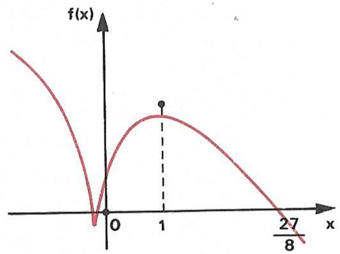
290.



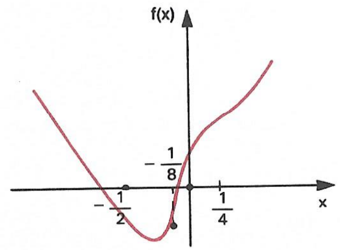
291.



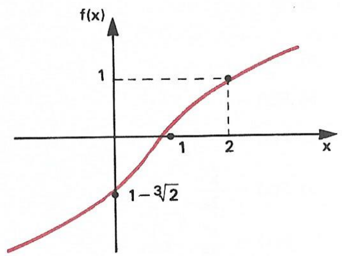
292.



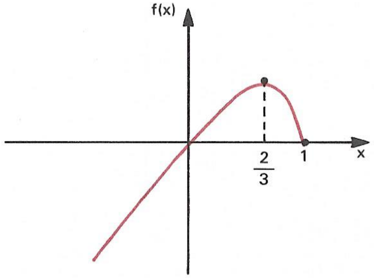
293.



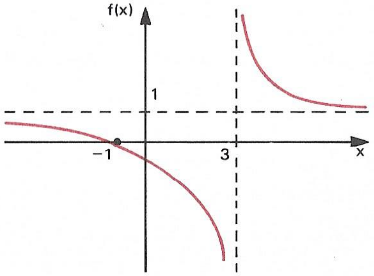
294.



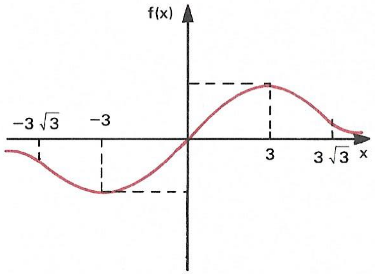
295.



296.



297.



Capítulo IX

299. 314,9

301. a) 88 b) 88

304. a) $F(x) = \frac{x^4}{4} - x^2 + 7x$

b) $F(x) = -\cos x + 3 \operatorname{sen} x$

c) $F(x) = -\frac{x^6}{6} + 3x$

d) $F(x) = \frac{x^8}{24} + \frac{x^4}{28}$

e) $F(x) = \frac{x^4}{28} + \frac{x}{7}$

305. a) $\frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - x^2 + x + c$

b) $\operatorname{tg} x + c$ d) $\frac{-1}{2x^2} + c$

c) $\frac{1}{x} + c$ e) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + c$

306. a) $\frac{5}{6}x^{6/5} + c$ d) $2\sqrt{x} + c$

b) $\frac{3}{4}x^{4/3} + c$ e) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$

c) $\frac{3}{5}x^{5/3} + c$

308. a) $\frac{1}{2}$ c) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{3}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

309. a) 14 c) 0 e) $\frac{4}{5}$

b) $\frac{2}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$

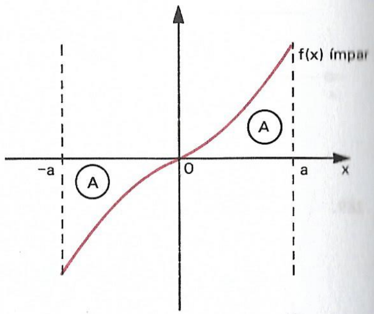
310. a) $\frac{20}{3}$ c) $\frac{\pi}{2} + 1$ e) $\frac{20}{3}$

b) 2 d) $-\frac{5}{14}$

312. a) $\frac{32}{3}$ c) $\frac{3\pi}{2} + 1$ e) $\frac{\pi}{4}$

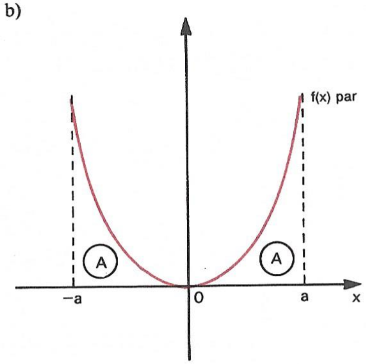
b) 30 d) $\frac{28}{3}$

315. a)



$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx$$
$$= A - A = 0$$

b)



$$\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx \therefore$$
$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

317. a) $\frac{1}{6}$ c) 36 e) $2 + \frac{\pi^3}{6}$

b) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{1}{3}$

318. a) $\frac{dF}{dx} = 5x + 2$ c) $\frac{dF}{dx} = \sqrt{x}$

b) $\frac{dF}{dx} = \sqrt{x}$

320. a) $\frac{(3x + 7)^{16}}{16} + c$ d) $\frac{2}{3}\sqrt{(3x + 7)^3} + c$

b) $e^{3x} + c$ e) $-\frac{1}{x + 1} + c$

c) $\operatorname{sen} 5x + c$

321. a) $\frac{e^{x^3}}{3} + c$

b) $\frac{\operatorname{sen} 3x^2}{6} + c$

c) $\frac{1}{70}(5x - 1)^{14} + c$

d) $\frac{2}{15}(5x - 1)^{3/2} + c$

e) $-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(3x + 7)} + c$

322. a) $\frac{e^{3x}}{3} + c$

b) $\frac{\operatorname{sen}^6 x}{6} + c$

c) $-\frac{\cos 5x}{5} + c$

d) $\frac{\operatorname{sen}(3x + 1)}{3} + c$

e) $-\frac{(3 - 2x)^5}{10} + c$

323. a) $-x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + c$

b) $(3x + 7) \operatorname{sen} x + 3 \cos x + c$

c) $e^x (2x - 3) + c$

d) $\frac{5(-3x + 1) \cdot \operatorname{sen} 5x - 3 \cos 5x}{25} + c$

e) $\left(-\frac{2}{3}x + \frac{7}{9}\right) e^{1-3x} + c$

324. $\frac{13\pi}{3}$

325. $\frac{242\pi}{5}$

326. $\frac{3\pi}{4}$

Testes de vestibulares

Limites

1. (Ucsal-BA) Calculando-se o limite $\lim_{x \to -1} (3x^2 - 5x + 9)$, obtém-se:

a) -1
b) 9
c) 17
d) 21
e) 22

2. (U. E. Londrina-PR) O valor do limite $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 3}{x + \frac{1}{2}}$ é:

a) $-\frac{5}{2}$
b) $-\frac{3}{2}$
c) -1
d) $-\frac{2}{3}$
e) $-\frac{2}{5}$

3. (UF-PR) O $\lim_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 12x + 16}{3x^2 + 3x - 18}$ é igual a:

a) $-\frac{4}{15}$
b) $-\frac{2}{5}$
c) $-\frac{1}{2}$
d) $-\frac{3}{2}$
e) $-\frac{5}{2}$

4. (Cefet-PR) Se $f(x) = \dfrac{3x^3 - 2x^2 - x + 4}{2x^2 + 4x + 2}$, então $\lim_{x \to -1} f(x)$ é igual a:

a) 12
b) 0
c) 1
d) inexistente
e) 2

5. (U. F. Uberlândia-MG) Sabendo-se que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x + 3m}{x - m} = \dfrac{4}{3}$, $x \neq m$, então podemos afirmar que:

a) m é maior do que 4.

b) m é menor do que -4.

c) $m \in [1; 4]$.

d) $m \in [-4; 1]$.

e) não existe m, tal que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x + 3m}{x - m} = \dfrac{4}{3}$.

6. (Cesgranrio-RJ) O valor de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ é:

a) $-\infty$
b) -1
c) 0
d) 1
e) ∞

7. (UF-PA) Seja f definida por $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$. Qual o valor de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

8. (U. E. Londrina-PR) Considere a função real com domínio $\mathbb{R} - \{2\}$, dada por $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$. É verdade que:

a) se x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para zero.
b) se x tende para $+\infty$, $f(x)$ tende para $-\infty$.
c) para qualquer valor de x, $f(x)$ é um número negativo.
d) se x é um número muito próximo de 2, $f(x)$ é um número muito próximo de $\dfrac{1}{2}$.
e) $f(2) = 0$.

9. (UF-PA) Qual o valor de $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$?

a) 0
b) $\dfrac{1}{4}$
c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
d) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$
e) $\dfrac{1}{2}$

10. (UF-AM) O $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ é:

a) $\dfrac{1}{2}$
b) 0
c) $\dfrac{1}{4}$
d) 1
e) $\dfrac{1}{6}$

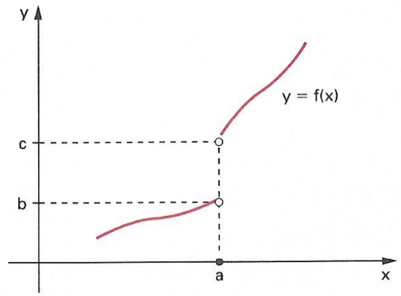
11. (Mackenzie-SP) O $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x^2 - 9x}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{9}$
b) $\dfrac{1}{27}$
c) $\dfrac{1}{243}$
d) $\dfrac{1}{81}$
e) $\dfrac{1}{54}$

12. (UF-AM) O $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$ é igual a:

a) $\dfrac{1}{2}$
b) 0
c) $\dfrac{1}{4}$
d) 2
e) 4

13. (UF-PA) Dado o gráfico da função $y = f(x)$:



Podemos afirmar que:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$
b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$
c) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$
d) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = c$
e) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = b$

14. (U. F. Uberlândia-MG) O limite $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3}{2x - 6}$ vale:

a) ∞
b) $-\infty$
c) 0
d) 1
e) Não existe.

15. (UF-PA) Qual o valor de $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2 + x + 1}{x^3 + 4x - 5}$?

a) 0
b) 2
c) 4
d) $-\infty$
e) $+\infty$

16. (UF-PR) O valor do limite $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2 + x + \frac{1}{2}}{(x + 2)^3 - (x - 2)^3}$ é:

a) $-\dfrac{1}{6}$
b) 5
c) 9
d) $\dfrac{4}{3}$
e) $\dfrac{1}{12}$

17. (PUC-PR) Se $P(x) = ax^2 + bx + c$ e $L = \lim\limits_{x\to -\infty} P(x)$, então necessariamente temos:

a) $L = +\infty$ se $a > 0$
b) $L = -\infty$ se $a > 0$
c) $L = +\infty$ se $a < 0$
d) $L = -\infty$ se $a = 0$
e) L depende de a, b e c.

18. (FCMSC-SP) Calculando o $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{sen } 2x - \cos 2x - 1}{\cos x - \text{sen } x}$, obtém-se:

a) $\sqrt{2}$
b) $-\sqrt{2}$
c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
d) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
e) n.d.a.

19. (UC-MG) Se $f(x) = \ell n\, x - \ell n\,(\text{sen } 5x)$, então $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ é:

a) $-\ell n\, 5$
b) $\ell n\, 5$
c) 0
d) 1
e) ∞

20. (Cesgranrio-RJ) O valor de $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) e
e) ∞

21. (UF-AM) O $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{8}{x}\right)^x$ é igual a:

a) e
b) 8e
c) $-\dfrac{e}{8}$
d) e^8
e) e^{-1}

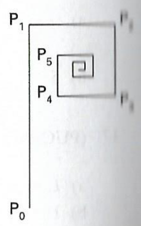
22. (Mackenzie-SP) Seja f uma função definida em $\mathbb{R} - \{4\}$ por $f(x) = \begin{cases} \log_2 \sqrt{x}, & \text{se } x > 4 \\ 3 - Kx, & \text{se } x < 4 \end{cases}$. Para que exista $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$, K deve ser igual a:

a) 0
b) $\dfrac{1}{2}$
c) $-\dfrac{1}{2}$
d) 1
e) 2

23. (Mackenzie-SP) O valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 3}{2^x - 1}$ é:

a) -1
b) -2
c) ∞
d) 0
e) 1

24. (Cesgranrio-RJ) Na poligonal da figura ao lado, de lados P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, ..., cada lado é perpendicular ao anterior e tem comprimento igual à metade do comprimento do lado anterior. Se $P_0P_1 = 1$, então, quando n tende para infinito, o limite da distância entre os vértices P_0 e P_n vale:



a) 1
b) $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$
c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$
d) $\dfrac{4}{5}$
e) $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

25. (U. F. Uberlândia-MG) O limite do ângulo interno de um polígono regular de n lados, quando $n \to \infty$, vale:

a) $\dfrac{\pi}{4}$
b) π
c) $\dfrac{3\pi}{2}$
d) $\dfrac{\pi}{2}$
e) 2π

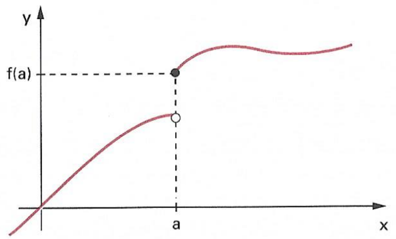
26. (UC-MG) O valor do $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x - x)$ é:

a) $-\infty$
b) $+\infty$
c) 0
d) 1
e) -1

27. (U. F. Uberlândia-MG) A função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ não está definida para $x = 1$. Para que a função f(x) seja contínua no ponto $x = 1$, devemos completá-la com f(1) igual a:

a) $-\infty$
b) $\dfrac{2}{3}$
c) $\dfrac{1}{3}$
d) $+\infty$
e) 0

28. (U. F. Juiz de Fora-MG) Sobre a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ representada pelo esboço de gráfico abaixo:

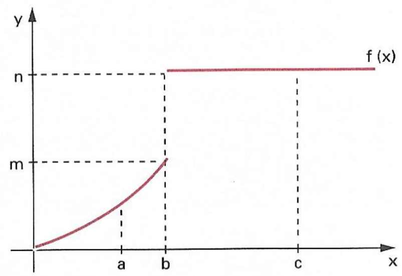


Podemos afirmar que:

a) não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
b) existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, mas f não é contínua no ponto de abscissa a.
c) não existe o limite lateral de f(x) quando x tende a a pela esquerda.
d) os limites laterais de f(x) quando x tende a a existem e são iguais a f(a).

Derivadas

29. (UF-PR) Observando o gráfico da função f(x), podemos afirmar que:



a) a função f(x) é derivável em $x = b$.
b) $\lim\limits_{x \to b^+} f(x) = m$.
c) $\lim\limits_{x \to b} f(x) = n$.
d) a função f(x) não é derivável no intervalo (b, c).
e) nenhuma das alternativas anteriores é verdadeira.

30. (Cesgranrio-RJ) O valor do parâmetro m para o qual a reta $y - 1 = m(x - 1)$ é tangente à parábola $y = x^2$ é:

a) -2
b) $-\dfrac{1}{2}$
c) 0
d) $\dfrac{1}{2}$
e) 2

31. (UF-PA) A equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 - 1$, no ponto de abscissa 1, é:

a) $y = 4x - 3$
b) $y = 4x - 1$
c) $y = 2x + 3$
d) $y = -2x + 1$
e) $y = 3x + 2$

32. (Unip-SP) A equação da reta tangente à curva $y = x^3$ no ponto de abscissa $x = 1$ é:

a) $y = 6x - 4$
b) $y = 3x$
c) $y = 3x - 3$
d) $y = 3x - 2$
e) $y = 6x + 5$

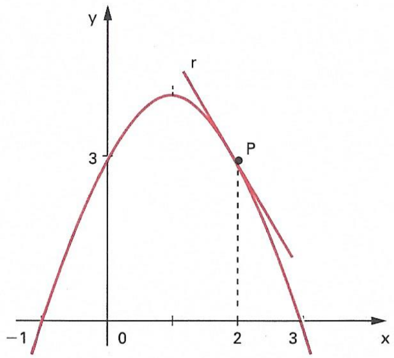
33. (Fuvest-SP) Qual a equação da reta tangente ao gráfico da função $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ no ponto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$?

a) $3x + 2y = 4$
b) $x - 2y = 0$
c) $3x - 2y = 2$
d) $x + 2y = 2$
e) $2x + 3y = 5$

34. (U. F. Uberlândia-MG) Seja *r* uma reta tangente à parábola $y = x^2$. Sabendo-se que *r* é paralela à reta $y = 2x - 3$, podemos afirmar que a equação da reta *r* é:

a) $x - 2y + 1 = 0$
b) $x - 2y - 1 = 0$
c) $2x - y - 1 = 0$
d) $x - y + 1 = 0$
e) $2x - y + 1 = 0$

35. (Mackenzie-SP) Na figura, a reta *r* é tangente à parábola no ponto *P*.



Então a equação de *r* é:

a) $3x + 2y - 12 = 0$
b) $2x + y - 7 = 0$
c) $x + 3y - 11 = 0$
d) $x + 6y - 20 = 0$
e) n.d.a.

36. (Mackenzie-SP) A reta tangente à curva $y = \dfrac{1}{x}$ no ponto de abscissa $x = 2$ é perpendicular à reta:

a) $y - x = 0$
b) $y - 1 = 0$
c) $x - 1 = 0$
d) $y - 4x + 7 = 0$
e) $4y - x + 2 = 0$

37. (FCMSC-SP) A equação da reta tangente à curva definida pela função $f(x) = \cos x$ no ponto de abscissa $x = \dfrac{\pi}{3}$ é:

a) $y - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
b) $y - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$
c) $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$
d) $y - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$
e) n.d.a.

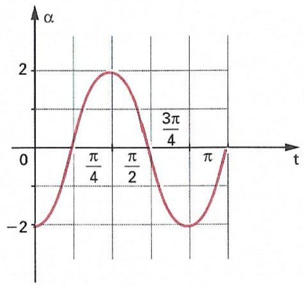
38. (UF-GO) A equação da reta tangente à circunferência de centro em $(0, -2)$, no ponto $(1, 2)$, é:

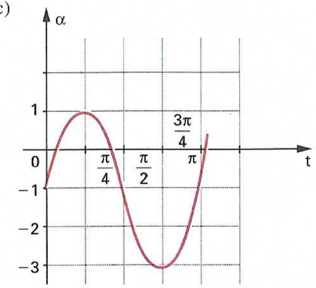
a) $y = 4x + 2$
b) $y = 4x + 9$
c) $y - 4x = -2$
d) $4y - x = 7$
e) $4y + x = 9$

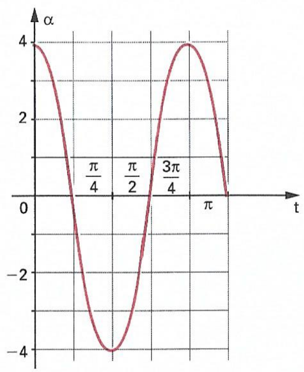
39. (FCMSC-SP) Considere um móvel deslocando-se sobre um segmento de reta, obedecendo à equação horária $s = \cos 2t$ (unidade SI). Sabe-se da Física que a derivada de *s* em relação ao tempo nos dá a velocidade do móvel em cada instante e que a derivada da velocidade *V*, ainda em relação ao tempo, nos dá a aceleração do móvel para cada instante.
Um dos instantes para o qual a velocidade do móvel vale $\sqrt{2}$ m/s é:

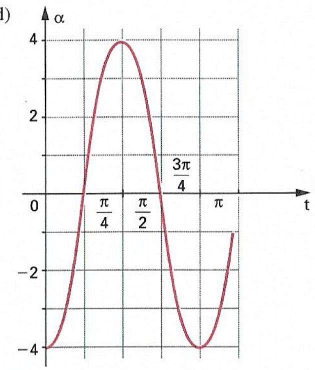
a) $t = \dfrac{5\pi}{8}$ s
b) $t = \dfrac{5\pi}{4}$ s
c) $t = \dfrac{\pi}{4}$ s
d) $t = \dfrac{\pi}{3}$ s
e) n.d.a.

40. O gráfico que melhor representa a aceleração α (m/s^2) em função do tempo (s) é:

a)


c)


b)


d)


41. (UF-PA) A função $F(x) = x^2 - x + 35$ é a derivada da função f(x). Qual das expressões abaixo correspon- de à função f(x)?

a) $2x - 1$
b) $x^3 - x^2 + 35$
c) $x^3 - x^2 + 35x + 4$
d) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 35x - 1$
e) $\frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{3} + 35x + 1$

42. (U. E. Londrina-PR) A derivada da função *f*, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -2x^5 + 4x^3 + 3x - 6$, no ponto de abscissa $x_0 = -1$, é igual a:

a) 25
b) 19
c) 9
d) 5
e) 3

43. (U. E. Londrina-PR) A equação da reta tangente à curva de equação $y = x^3 + 2x - 1$, no ponto em que $x = -1$, é:

a) $y = 5x + 1$
b) $y = 4x + 1$
c) $y = 3x - 1$
d) $y = -3x + 1$
e) $y = -4 + 1$

44. (U. E. Londrina-PR) A equação horária de um móvel é $y = \frac{t^3}{3} + 2t$, sendo *y* sua altura em relação ao solo, medida em metros, e *t* o número de segundos transcorridos após sua partida. Sabe-se que a velocidade do móvel no instante $t = 3$ s é dada por $y'(3)$, ou seja, é a derivada de *y* calculada em 3. Essa velocidade é igual a:

a) 6 m/s
b) 11 m/s
c) 15 m/s
d) 27 m/s
e) 29 m/s

45. (UC-MG) Um dos valores que anula a derivada primeira de $f(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ é:

a) -2
b) -1
c) 1
d) 2
e) 3

46. (Unip-SP) A derivada da função $y = \frac{x^2}{x - 1}$ no ponto de abscissa $x = 2$ é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 0
e) 1

47. (UF-AM) Se $f(x) = \frac{a^3}{x^2}$, então a derivada primeira de *f*, no ponto $x = a$, é igual a:

a) a^3
b) 2
c) -2
d) $-2a$
e) $-2a^2$

48. (UF-AM) Se $f(x) = \sqrt{2x^5}$, então a derivada primeira de *f*, no ponto $x = 1$, é igual a:

a) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
b) $\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

49. (PUC-MG) O valor da derivada da função $f(x) = \sqrt{7 - x}$ no ponto $(-2, 3)$ é:

a) $-\frac{1}{2}$
b) $-\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{6}$
d) 2
e) 3

50. (UC-MG) Se $f(x) = \sqrt{x^3} - 3x^2 + 5$, então $f'(1)$ é igual a:

a) $-1{,}5$
b) $-2{,}5$
c) $-3{,}5$
d) $-4{,}5$
e) -5

51. (UF-PA) A função derivada de $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$ é y' igual a:

a) $2x \cdot \sqrt[3]{x} + x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$
b) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt[3]{x^2}$
c) $\frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$
d) $\frac{5}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$
e) $\frac{7x}{3} \cdot \sqrt[3]{x}$

52. (UF-PR) Se $f(x) = \frac{\ell n\, x^2}{e^{2x}}$, então $f'(1)$ é:

a) $2e^{-2}$
b) $-2e^{-2}$
c) e
d) 2
e) $2e^2$

53. (U. F. Uberlândia-MG) A derivada da função $y = \ell n \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$ é:

a) sen x
b) cos x
c) tg x
d) cossec x
e) sec x

54. (UF-PA) Dada a função $f(x) = \ell n\,(1 + x^2)$, qual o valor de $f'(1)$?

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

55. (UF-PR) A derivada de primeira ordem da função $f(x) = \text{arc tg}\,\sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$ é:

a) $\frac{\sqrt{x}}{(x + 1)^2}$
b) $\frac{1}{x^2 + 1}$
c) $\frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$
d) $\frac{1}{(x + 1)^2}$
e) $\frac{1}{\sqrt{x} \cdot (x + 1)^2}$

56. (UF-PA) Se $y = x \cos x$, então $y''(x)$ é igual a:

a) x sen x
b) x cos x
c) $-(x \text{ sen } x + \cos x)$
d) $-(x \cos x + 2 \text{ sen } x)$
e) $x(\cos x - \text{sen } x)$

57. (UF-PA) O conjunto dos valores de *x* que anulam a derivada de $y = x^3\, \ell n\, x - 1$ é:

a) $\left[0, e^{-\frac{1}{3}}\right]$
b) [1, e]
c) $\left[1, e^{-\frac{1}{3}}\right]$
d) $\left[e, e^{\frac{2}{3}}\right]$
e) $\left[e^{-\frac{1}{3}}\right]$

Variação de funções

58. (U. F. Uberlândia-MG) A função real de variável real definida por $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 6$ é decrescente no intervalo:

a) $-4 < x < 1$
c) $x > 0$
e) $-1 < x < 4$
b) $x < -4$
d) $x > 1$

59. (UF-PA) A função $y = x^2(x - 3)$ é decrescente no intervalo:

a) $[0, 2]$
d) $]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$
b) $[0, 3]$
e) $[3, +\infty[$
c) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

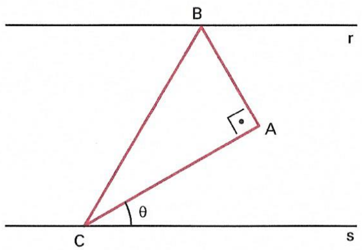
60. (UF-PA) A abscissa do ponto de máximo relativo de $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$ é:

a) -5
c) 0
e) 5
b) -3
d) 3

61. (Cesgranrio-RJ) Se (x, y) satisfaz a equação $3x + 4y = 12$, então o valor mínimo de $\sqrt{x^2 + y^2}$ é:

a) 12
c) 3
e) $\frac{12}{5}$
b) $\frac{4}{3}$
d) 4

62. (Mackenzie-SP) Na figura, as retas *r* e *s* são paralelas, os pontos *B* de *r* e *C* de *s* são móveis e o ponto *A* é fixo.



Dentre todos os triângulos ABC, retângulos em *A*, teremos o de área mínima quando:

a) $\theta = \frac{\pi}{3}$
c) $\theta = \frac{\pi}{5}$
e) n.d.a.
b) $\theta = \frac{\pi}{4}$
d) $\theta = \frac{\pi}{6}$

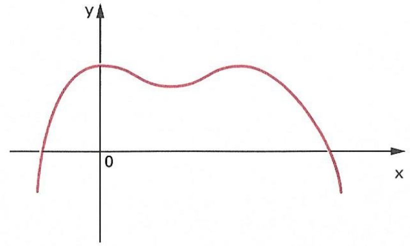
63. (U. F. Uberlândia-MG) Para que o ponto $(1, 3)$ seja ponto de inflexão da curva $y = mx^3 + nx^2$, devemos ter:

a) $m = \frac{1}{2}$; $n = \frac{5}{2}$
d) $m = 2$; $n = 1$
b) $m = -\frac{2}{3}$; $n = 1$
e) $m = n = \frac{3}{2}$
c) $m = -\frac{3}{2}$; $n = \frac{9}{2}$

64. (UC-MG) O valor de *m*, para que a equação $x^3 + mx - 1 = 0$ tenha duas raízes reais iguais, é:

a) $-\sqrt{2}$
c) $-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$
e) $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$
b) $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
d) $-\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$

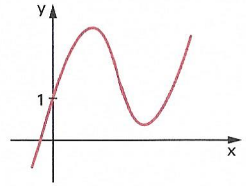
65. (Mackenzie-SP) Seja a função definida por $y = f(x)$ e representada pelo gráfico abaixo.

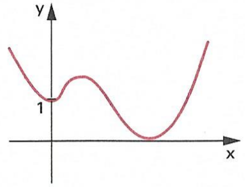


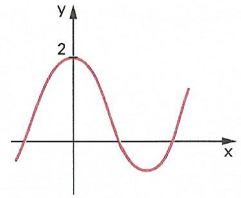
Então, certamente:

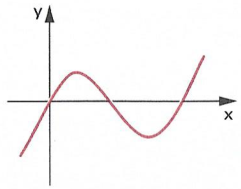
a) E *k* tal que $f'(k) > 0$
b) E *k* tal que $f'(k) = 0$
c) E *k* tal que $f'(k) < 0$
d) dados k_1 e k_2 quaisquer $f'(k_1) \leqslant f'(k_2)$
e) dados k_1 e k_2 quaisquer $f'(k_1) \leqslant f'(k_2)$

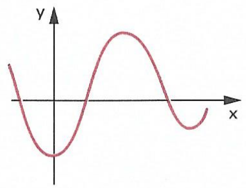
66. (Vest. Unificado-RS) A figura que melhor representa o gráfico da função $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ é:

a)


d)


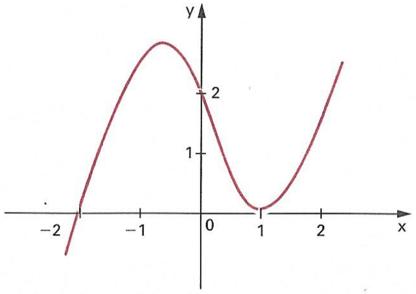
b)


e)


c)


67. (PUC-RS) O gráfico na figura é de uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que f(x) é um polinômio do 3º grau. Para a equação $f(x) = 0$, afirmamos:

I) O termo independente de x é igual a 2.
II) Suas raízes são -2, 2 e 1.
III) Suas raízes são -2, -2 e 1.
IV) Suas raízes são -2, 1 e 1.



Está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

a) II
b) III
c) I e II
d) I e III
e) I e IV

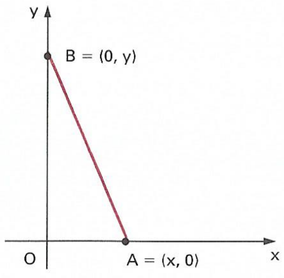
68. (UF-MG) A área de uma peça retangular é menor que 147 cm^2. O comprimento e a largura dessa peça, em centímetros, são números inteiros, sendo o comprimento 14 cm maior que a largura.
A área da peça, em cm^2, é o maior inteiro possível. Tal número *não* é múltiplo de:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

69. (Puccamp-SP) Considere a função dada por $y = 3t^2 - 6t + 24$, na qual y representa a altura, em metros, de um móvel, no instante t, em segundos.
O ponto de mínimo da função corresponde ao instante em que:

a) a velocidade do móvel é nula.
b) a velocidade assume valor máximo.
c) a aceleração é nula.
d) a aceleração assume valor máximo.
e) o móvel se encontra no ponto mais distante da origem.

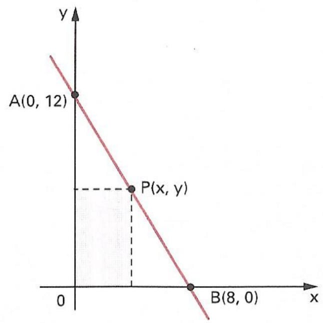
70. (UnB-DF) Uma escada de 10 cm de comprimento apóia-se no chão e na parede, formando o triângulo retângulo AOB. Utilizando-se um sistema de coordenadas cartesianas, a situação pode ser representada como na figura abaixo.



Considerando que, em função de x, a área S do triângulo AOB é dada por $S(x) = \dfrac{x\sqrt{10^2 - x^2}}{2}$, julgue os itens seguintes.

1) O domínio da função S é o intervalo [0, 10].
2) Existe um único valor de x para o qual a área S correspondente é igual a 24 cm^2.
3) Se $S(x) = 24$ e $x > y$, então o ponto médio da escada tem coordenadas (4, 3).
4) Se $B = (0, 9)$, então a área do triângulo AOB é a maior possível.

71. (U. F. Santa Maria-RS) A figura mostra um retângulo com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice na reta que passa pelos pontos A(0, 12) e B(8, 0).



As dimensões x e y do retângulo, para que sua área seja máxima, devem ser, respectivamente, iguais a:

a) 4 e 6
b) 5 e $\dfrac{9}{2}$
c) 5 e 7
d) 4 e 7
e) 6 e 3

Respostas dos testes

1. c
2. e
3. a
4. d
5. d
6. e
7. d
8. a
9. d
10. c
11. e
12. c
13. e
14. e
15. a
16. e
17. a
18. b
19. a
20. d
21. d
22. b
23. b
24. e
25. b
26. b
27. b
28. a
29. e
30. e
31. a
32. d
33. d
34. c
35. b
36. d
37. b
38. e
39. a
40. d
41. d
42. d
43. a
44. b
45. d
46. a
47. c
48. a
49. b
50. d
51. e
52. a
53. d
54. b
55. a
56. d
57. e
58. a
59. a
60. b
61. e
62. b
63. c
64. e
65. b
66. a
67. e
68. e
69. a
70. V, F, V, F
71. a

Significado das siglas de vestibulares

Acafe-SC — Associação Catarinense das Fundações Educacionais, Santa Catarina
AFA-SP — Academia da Força Aérea, São Paulo
Aman-RJ — Academia Militar de Agulhas Negras, Rio de Janeiro
Cefet-PR — Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
Cesesp-PE — Centro de Estudos Superiores do Estado de Pernambuco
Cesgranrio-RJ — Centro de Seleção de Candidatos ao Ensino Superior do Grande Rio, Rio de Janeiro
Cesubra-DF — Centro de Ensino Superior Unificado de Brasília, Distrito Federal
Cesupa-PA — Centro Universitário do Pará
Covest-PE — Comissão de Vestibulares de Pernambuco
ECM-AL — Escola de Ciências da Saúde de Alagoas
EEM-SP — Escola de Engenharia Mauá, São Paulo
Efei-MG — Escola Federal de Engenharia de Itajubá, Minas Gerais
Efoa-MG — Escola de Farmácia e Odontologia de Alfenas, Minas Gerais
E. Naval-RJ — Escola Naval do Rio de Janeiro
Enem-MEC — Exame Nacional do Ensino Médio
Esal-MG — Escola Superior de Agricultura de Lavras, Minas Gerais
Esccai-MG — Escola Superior de Ciências Contábeis e Administrativas de Ituiutaba, Minas Gerais
Escola Técnica Federal-RJ — Escola Técnica Federal do Rio de Janeiro
EsPCEx-SP — Escola Preparatória de Cadetes do Exército, São Paulo
ESPM-SP — Escola Superior de Propaganda e Marketing, São Paulo
Faap-SP — Fundação Armando Álvares Penteado, São Paulo
Fatec-SP — Faculdade de Tecnologia de São Paulo
FCM-MG — Faculdade de Ciências Médicas de Minas Gerais
FCMSC-SP — Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo
F. E. Edson Queiroz-CE — Fundação Educacional Edson Queiroz, Ceará
FEI-SP — Faculdade de Engenharia Industrial, São Paulo
Fesp-SP — Faculdade de Engenharia de São Paulo
FGV-SP — Fundação Getúlio Vargas, São Paulo
FISFS-SP — Faculdades Integradas de Santa Fé do Sul, São Paulo
F. Luiz Meneghel-PR — Faculdades Luiz Meneghel, Paraná
F. M. ABC-SP — Faculdade de Medicina do ABC, São Paulo
F. M. Bragança-SP — Faculdade de Medicina de Bragança, São Paulo
F. M. Itajubá-MG — Faculdade de Medicina de Itajubá, Minas Gerais
F. M. Jundiaí-SP — Faculdade de Medicina de Jundiaí, São Paulo
F. M. Pouso Alegre-MG — Faculdade de Medicina de Pouso Alegre, Minas Gerais
F. M. Triângulo Mineiro-MG — Faculdade de Medicina do Triângulo Mineiro, Minas Gerais
F. M. Vassouras-RJ — Faculdade de Medicina de Vassouras, Rio de Janeiro
Fund. Carlos Chagas-SP — Fundação Carlos Chagas, São Paulo
Furg-RS — Fundação Universidade do Rio Grande, Rio Grande do Sul
Fuvest-SP — Fundação para o Vestibular da Universidade de São Paulo
IME-RJ — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro
IMES-SP — Centro Universitário Municipal de São Caetano do Sul, São Paulo
Inatel-MG — Instituto Nacional de Telecomunicações, Minas Gerais
ITA-SP — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São Paulo
Mackenzie-SP — Universidade Mackenzie de São Paulo

Omec-SP — Organização Mogiana de Educação e Cultura, São Paulo
PUC-BA — Pontifícia Universidade Católica da Bahia
Puccamp-SP — Pontifícia Universidade Católica de Campinas, São Paulo
PUC-MG — Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR — Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-RS — Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
PUC-SP — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
U. Caxias do Sul-RS — Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul
U. C. Brasília-DF — Universidade Católica de Brasília, Distrito Federal
UCDB-MS — Universidade Católica Dom Bosco, Mato Grosso do Sul
UC-GO — Universidade Católica de Goiás
UC-MG — Universidade Católica de Minas Gerais
Ucsal-BA — Universidade Católica de Salvador, Bahia
UCS-RS — Universidade de Caxias do Sul, Rio Grande do Sul
UE-CE — Universidade Estadual do Ceará
UEFS-BA — Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia
U. E. Londrina-PR — Universidade Estadual de Londrina, Paraná
UE-MA — Universidade Estadual do Maranhão
U. E. Maringá-PR — Universidade Estadual de Maringá, Paraná
UE-MG — Universidade Estadual de Minas Gerais
UE-PA — Universidade do Estado do Pará
UE-PB — Universidade Estadual da Paraíba
UE-PI — Universidade Estadual do Piauí
UE-RJ — Universidade Estadual do Rio de Janeiro
Uesb-BA — Universidade Estadual do Sudoeste Baiano, Bahia
UF-AC — Universidade Federal do Acre
UF-AL — Universidade Federal de Alagoas
UF-AM — Universidade Federal do Amazonas
UF-BA — Universidade Federal da Bahia
UF-CE — Universidade Federal do Ceará
UF-ES — Universidade Federal do Espírito Santo
UFF-RJ — Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro
UF-GO — Universidade Federal de Goiás
U. F. Juiz de Fora-MG — Universidade Federal de Juiz de Fora, Minas Gerais
U. F. Lavras-MG — Universidade Federal de Lavras, Minas Gerais
UF-MA — Universidade Federal do Maranhão
UF-MG — Universidade Federal de Minas Gerais
UF-MT — Universidade Federal do Mato Grosso
U. F. Ouro Preto-MG — Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais
UF-PA — Universidade Federal do Pará
UF-PB — Universidade Federal da Paraíba
UF-PE — Universidade Federal de Pernambuco
U. F. Pelotas-RS — Universidade Federal de Pelotas, Rio Grande do Sul
UF-PI — Universidade Federal do Piauí
UF-PR — Universidade Federal do Paraná
UFRA-PA — Universidade Federal Rural da Amazônia, Pará

UF-RJ — Universidade Federal do Rio de Janeiro
UF-RN — Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFR-RJ — Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
UFRR-RR — Universidade Federal de Roraima
UF-RS — Universidade Federal do Rio Grande do Sul
U. F. Santa Maria-RS — Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul
U. F. São Carlos-SP — Universidade Federal de São Carlos, São Paulo
UF-SC — Universidade Federal de Santa Catarina
UF-SE — Universidade Federal de Sergipe
U. F. Uberaba-MG — Universidade Federal de Uberaba, Minas Gerais
U. F. Uberlândia-MG — Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais
U. F. Viçosa-MG — Universidade Federal de Viçosa, Minas Gerais
U. Gama Filho-RJ — Universidade Gama Filho, Rio de Janeiro
Ulbra-DF — Universidade Luterana do Brasil, Distrito Federal
Ulbra-RS — Universidade Luterana do Brasil, Rio Grande do Sul
UMC-SP — Universidade de Mogi das Cruzes, São Paulo
Umesp-SP — Universidade Metodista de São Paulo
Unaerp-SP — Universidade de Ribeirão Preto, São Paulo
Unama-PA — Universidade do Amazonas, Pará
UnB-DF — Universidade de Brasília, Distrito Federal
Uneb-BA — Universidade do Estado da Bahia
Unemat-MT — Universidade do Estado de Mato Grosso
Unespar — Universidade Estadual do Paraná
Unicamp-SP — Universidade Estadual de Campinas, São Paulo
Unicap-PE — Universidade Católica de Pernambuco
Unifenas-MG — Universidade de Alfenas, Minas Gerais
Unifesp-SP — Universidade Federal de São Paulo
Unifor-CE — Universidade de Fortaleza, Ceará
Unimep-SP — Universidade Metodista de Piracicaba, São Paulo
Unimes-SP — Universidade Metropolitana de Santos, São Paulo
Unip-SP — Universidade Paulista Objetivo, São Paulo
Unirio-RJ — Universidade do Rio de Janeiro
Unirp- SP — Centro Universitário do Rio Preto, São Paulo
Unir-RO — Fundação Universidade Federal de Rondônia
Unisa-SP — Universidade de Santo Amaro, São Paulo
Unisinos-RS — Universidade do Vale do Rio dos Sinos, Rio Grande do Sul
Unitau-SP — Universidade de Taubaté, São Paulo
Uniube-MG — Universidade de Uberaba, Minas Gerais
Univale-MG — Universidade do Vale do Rio Doce, Minas Gerais
Univali-SC — Universidade do Vale do Itajaí, Santa Catarina
Unopar-PR — Universidade do Norte do Paraná
U. Passo Fundo-RS — Universidade de Passo Fundo, Rio Grande do Sul
UPE-PE — Universidade do Estado de Pernambuco
USF-SP — Universidade São Francisco, São Paulo
USJT-SP — Universidade São Judas Tadeu, São Paulo
Vunesp-SP — Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

Impresso por
EGB
EDITORA GRÁFICA BERNARDI LTDA
Aqui, os sentimentos são impressos.
Tel/Fax: 11 2431 - 5577
www.egb.com.br

Fundamentos de Matemática Elementar é uma coleção consagrada ao longo dos anos por oferecer ao estudante o mais completo conteúdo de Matemática elementar. Os volumes estão organizados da seguinte forma:

- volume 1 — conjuntos, funções
- volume 2 — logaritmos
- volume 3 — trigonometria
- volume 4 — seqüências, matrizes, determinantes, sistemas
- volume 5 — combinatória, probabilidade
- volume 6 — complexos, polinômios, equações
- volume 7 — geometria analítica
- volume 8 — limites, derivadas, noções de integral
- volume 9 — geometria plana
- volume 10 — geometria espacial
- volume 11 — matemática comercial, matemática financeira, estatística descritiva

A coleção atende a alunos do ensino médio que procuram uma formação mais aprofundada, estudantes em fase pré-vestibular e também universitários que necessitam rever a Matemática elementar.

Os volumes contêm teoria e exercícios de aplicação, além de uma seção de testes de vestibulares, acompanhados de respostas. Há ainda uma série de artigos sobre história da Matemática relacionados aos temas abordados.

Na presente edição, a seção de testes de vestibulares foi atualizada, apresentando novos testes selecionados a partir dos melhores vestibulares do país.

ATUAL EDITORA