Função Modular

MÓDULO OU VALOR ABSOLUTO DE UM NÚMERO REAL

O módulo de um número real **a** é representado por $|a|$, em que $|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geq 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$.

Exemplos:

1º) $|3| = 3$

2º) $|-4| = -(-4) = 4$

> Geometricamente, o módulo de um número real representa a distância do ponto **a** até a origem da reta real.

Propriedades do módulo

i) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $|x|.|y| = |x.y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$

iv) $|x|^2 = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$

v) $|x| = \sqrt{x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

vi) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, \forall y \neq 0$

EQUAÇÃO MODULAR

É toda equação na qual a incógnita se encontra na forma de módulo.

Exemplos:

1º) Resolver a equação $|x| = 8$.

Há dois valores que satisfazem a equação:

$x = -8$ ou $x = 8$

Portanto, $S = \{-8, 8\}$.

2º) Resolver a equação $|x - 4| = 10$.

Se um número possui módulo 10, esse número pode ser igual a -10 ou 10. Portanto, temos:

$$\begin{cases} x - 4 = 10 \\ \text{ou} \\ x - 4 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 14 \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases}$$

Portanto, $S = \{-6, 14\}$.

3º) Resolver a equação $|2x + |x - 1|| = 5$.

Resolvendo a equação anterior, temos:

$$\begin{cases} 2x + |x - 1| = 5 \\ \text{ou} \\ 2x + |x - 1| = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x - 1| = -2x + 5 \\ \text{ou} \\ |x - 1| = -2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$|x - 1| = -2x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -2x + 5 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \text{ou} \\ x = 4 \end{cases}$$

ou

$$|x - 1| = -2x - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -2x - 5 \\ \text{ou} \\ x - 1 = 2x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = -6 \end{cases}$$

Substituindo cada um dos resultados na equação original, verificamos que $x = -6$ ou $x = 2$ são soluções da equação.

Portanto, $S = \{-6, 2\}$.

4º) Resolva a equação $|x - 1| + |x + 3| = 14$.

Inicialmente, vamos calcular as raízes das expressões dentro dos módulos.

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ e $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

Observe que:

i) para valores de **x** menores do que -3, os termos $x - 1$ e $x + 3$ são **negativos**.

ii) para valores de **x** entre -3 e 1, o termo $x - 1$ é **negativo**, e o termo $x + 3$ é **positivo**.

iii) para valores de **x** maiores do que 1, os termos $x - 1$ e $x + 3$ são **positivos**.

Assim, podemos representar esse fato no esquema a seguir:

$x < -3$	**−3**	$-3 < x < 1$	**1**	$x > 1$
$-(x - 1) - (x + 3) = 14$		$-(x - 1) + (x + 3) = 14$		$x - 1 + x + 3 = 14$
$-x + 1 - x - 3 = 14$		$-x + 1 + x + 3 = 14$		$2x = 12$
$-2x = 16$		$4 = 14$		$x = 6$
$x = -8$				
(convém)		(absurdo)		(convém)

Devemos verificar também se as raízes -3 e 1 são soluções da equação:

i) Para $x = -3$, temos $4 = 14$. (absurdo)

ii) Para $x = 1$, temos $4 = 14$. (absurdo)

Assim, as soluções são $x = -8$ ou $x = 6$.

Portanto, $S = \{-8, 6\}$.

INEQUAÇÃO MODULAR

Uma inequação é dita modular quando a incógnita se encontra na forma de módulo.

Exemplos:

1º) Resolver a inequação $|x| > 7$.

Observe que há dois intervalos reais que satisfazem a essa condição: $x < -7$ ou $x > 7$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -7 \text{ ou } x > 7\}$.

2º) Resolver a inequação $|x| < 7$.

Observe que há apenas um intervalo que satisfaz a essa condição: $-7 < x < 7$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x < 7\}$.

GENERALIZANDO

Seja **a** um número real positivo. Há dois casos possíveis:

1º caso: $\boxed{|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ ou } x > a}$

2º caso: $\boxed{|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a}$

3º) Resolver a inequação $|3x - 2| \leq 7$.

$-7 \leq 3x - 2 \leq 7 \Rightarrow -7 + 2 \leq 3x - 2 + 2 \leq 7 + 2 \Rightarrow$

$-5 \leq 3x \leq 9 \Rightarrow -\frac{5}{3} \leq x \leq 3$

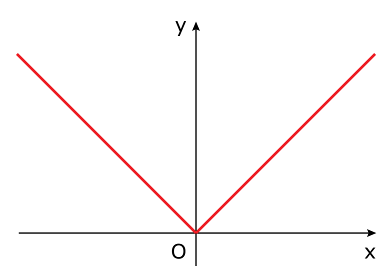
Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{5}{3} \leq x \leq 3\right\}$.

FUNÇÃO MODULAR

É uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$.

Essa função, de acordo com a definição de módulo, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\boxed{f(x) = |x| \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$



O gráfico da função modular é a reunião de duas semirretas de mesma origem. Observe que:

Para $x \geq 0$, temos o gráfico da reta $y = x$.

Para $x < 0$, temos o gráfico da função $y = -x$.

A imagem da função modular é o conjunto

$$Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}.$$

GRÁFICOS DE FUNÇÕES MODULARES

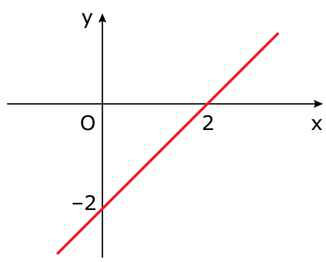
Gráficos de funções da forma $y = |f(x)|$

Esse tipo de gráfico é obtido pela "reflexão" ou "rebatimento", em relação ao eixo x, das partes do gráfico nas quais $f(x) < 0$.

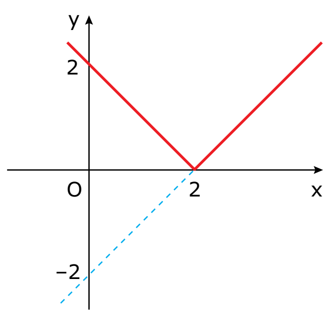
Exemplos:

1º) Esboçar o gráfico da função $y = |x - 2|$.

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função $y = x - 2$.



Agora, basta efetuar uma reflexão, em torno do eixo x, da parte do gráfico que possui ordenada negativa.

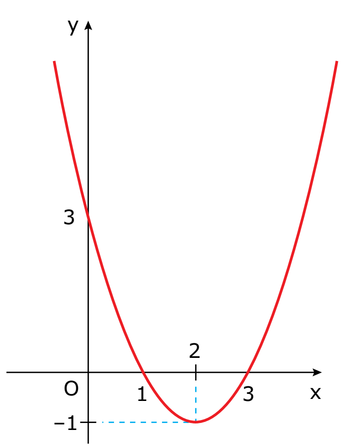


OBSERVAÇÃO

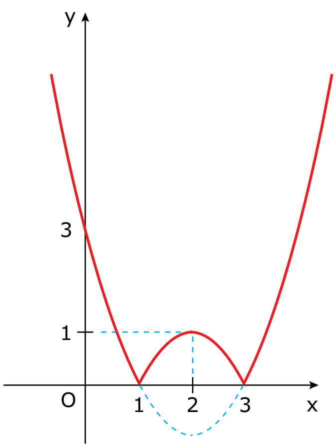
O gráfico da função básica $y = |x|$ também pode ser obtido por esse processo.

2º) Esboçar o gráfico da função $y = |x^2 - 4x + 3|$.

Inicialmente, vamos desconsiderar o módulo e esboçar o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.



Efetuando a reflexão em torno do eixo x, temos o seguinte gráfico:

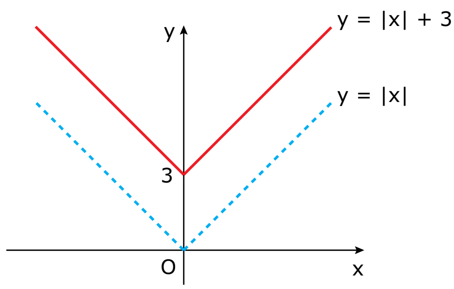


Outros gráficos

Exemplos:

1º) Esboçar o gráfico da função $y = |x| + 3$.

Basta esboçar o gráfico da função $y = |x|$ e, em seguida, deslocar esse gráfico 3 unidades para cima.



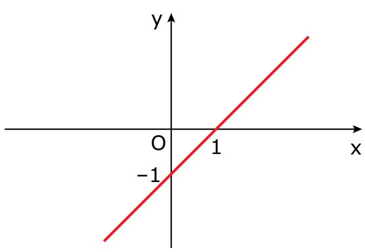
2º) Esboçar o gráfico da função $y = |x - 1| - 2$.

Basta esboçar o gráfico da função $y = |x - 1|$ e, em seguida, deslocar esse gráfico 2 unidades para baixo.

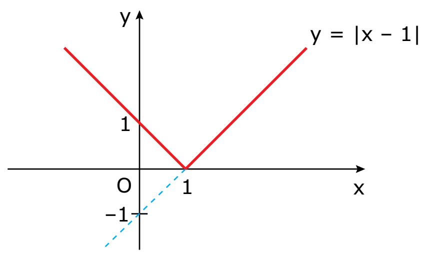
1º passo: Esboço do gráfico da função $y = |x - 1|$:

Nesse caso, podemos utilizar o "rebatimento" em relação ao eixo x, descrito anteriormente.

Inicialmente, desconsideramos o módulo e esboçamos o gráfico de $y = x - 1$.



Em seguida, basta efetuar uma reflexão em torno do eixo x, da parte do gráfico que possui ordenada negativa.



2º passo: Transladamos o gráfico da função $y = |x - 1|$ construído anteriormente 2 unidades para baixo. Para isso, é necessário encontrar os pontos de interseção de $y = |x - 1| - 2$ com os eixos coordenados:

- Interseção com o eixo Oy

  Fazendo $x = 0 \Rightarrow y = |0 - 1| - 2 \Rightarrow$

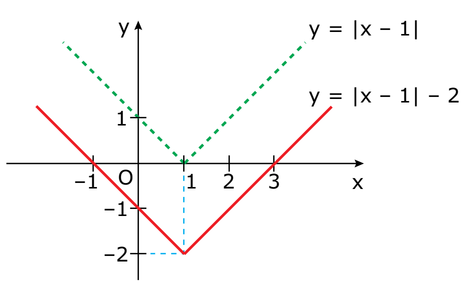
  $y = 1 - 2 \Rightarrow y = -1$

- Interseção com o eixo Ox

  Fazendo $y = 0 \Rightarrow 0 = |x - 1| - 2 \Rightarrow$

  $|x - 1| = 2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} x - 1 = 2 \\ \text{ou} \\ x - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$



3º) Esboço do gráfico da função $y = |x - 1| + |x + 2|$.

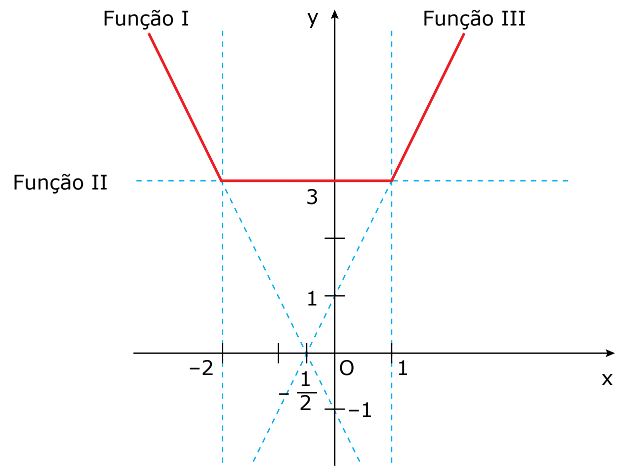
Vamos calcular as raízes das expressões dentro dos módulos:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

Logo, podemos usar o seguinte esquema:

$x \le -2$	**-2**	$-2 < x < 1$	**1**	$x \ge 1$
$y = -(x - 1) - (x + 2)$		$y = -(x - 1) + x + 2$		$y = x - 1 + x + 2$
$y = -x + 1 - x - 2$		$y = -x + 1 + x + 2$		$y = 2x + 1$
$y = -2x - 1$		$y = 3$		
(função I)		(função II)		(função III)

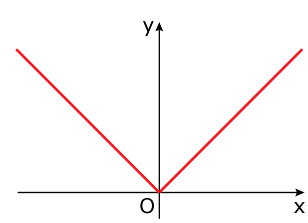
Daí, observe que há três funções, uma para cada intervalo de **x**. Representando tais funções em um mesmo sistema de coordenadas cartesianas, temos:



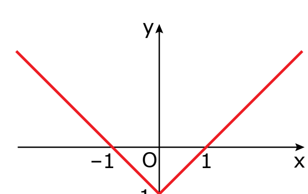
4º) Esboço do gráfico da função $y = ||x| - 1|$.

Inicialmente, esboçamos o gráfico da função $y = |x|$. Em seguida, deslocamos esse gráfico 1 unidade para baixo, obtendo o gráfico da função $y = |x| - 1$. Finalmente, "rebatemos", em relação ao eixo x, a parte do gráfico com ordenada negativa, obtendo o gráfico da função $y = ||x| - 1|$.

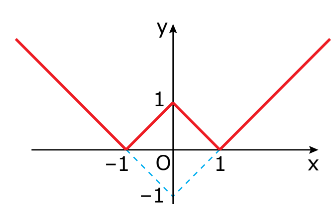
$y = |x|$



$y = |x| - 1$



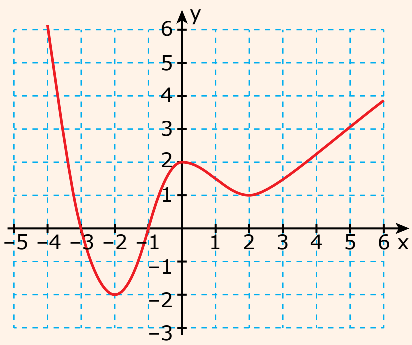
$y = ||x| - 1|$



EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Insper-SP) A figura a seguir mostra o gráfico da função f(x).



O número de elementos do conjunto solução da equação $|f(x)| = 1$, resolvida em $\mathbb{R}$ é igual a:

A) 6. B) 5. C) 4. D) 3. E) 2.

02. (CEFET-MG–2017) Seja f(x) uma função real. O gráfico gerado pelo módulo dessa função, $|f(x)|$,

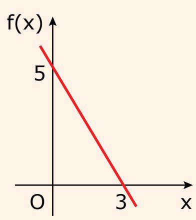
A) nunca passará pela origem.

B) nunca passará pelo 3º ou 4º quadrante.

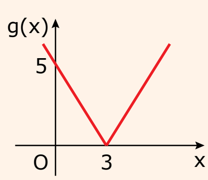
C) intercepta o eixo x somente se f(x) for do primeiro grau.

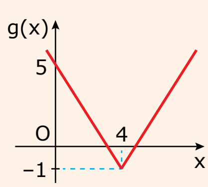
D) intercepta o eixo y somente se f(x) for do segundo grau.

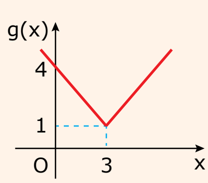
03. (Cesgranrio) No gráfico a seguir, está representada a função do 1º grau f(x).

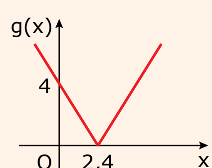


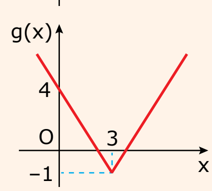
O gráfico que melhor representa $g(x) = |f(x)| - 1$ é:

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

04. (CEFET-MG–2015) O domínio da função real $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$ é o intervalo:

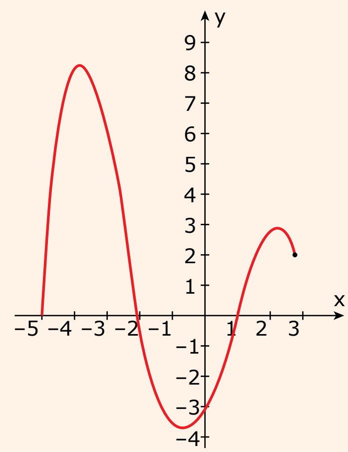
A) $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ ou } x > 1\}$

B) $\{x \in \mathbb{R} | x \le -1 \text{ ou } x \ge 1\}$

C) $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1\}$

D) $\{x \in \mathbb{R} | -1 \le x \le 1\}$

05. (UESC-BA) Para fazer um estudo sobre certo polinômio P(x), um estudante recorreu ao gráfico da função polinomial y = P(x), gerado por um *software* matemático. Na figura, é possível visualizar a parte da curva obtida para valores de **x**, de –5 até 2,7.



O número de raízes da equação $|P(x)| = 1$, no intervalo $[-5; 2,7]$, é igual a:

A) 2.

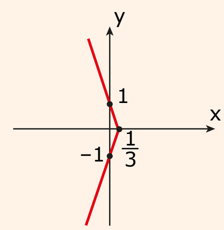
B) 3.

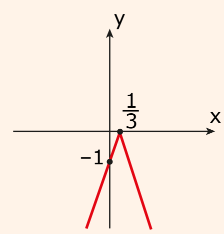
C) 4.

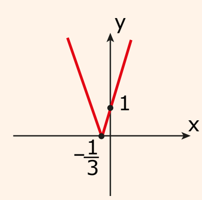
D) 5.

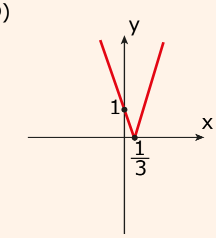
E) 6.

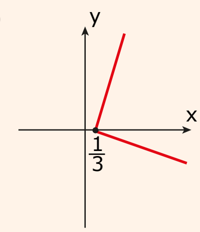
06. (PUC Rio–2016) Qual dos gráficos a seguir representa a função real $f(x) = |3x - 1|$?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

07. (Unit-AL–2015) Sabendo-se que x_1 e x_2 são números reais distintos que satisfazem a equação $|3x + 10| = |5x + 2|$, é correto afirmar que o valor de $|x_1 - x_2|$ é

A) $\frac{7}{2}$.

B) 4.

C) $\frac{11}{2}$.

D) 6.

E) $\frac{15}{2}$.

08. (UECE–2017) Se as raízes da equação $x^2 - 5|x| - 6 = 0$ são também raízes de $x^2 - ax - b = 0$, então, os valores dos números reais **a** e **b** são, respectivamente,

A) −1 e 6.

B) 5 e 6.

C) 0 e 36.

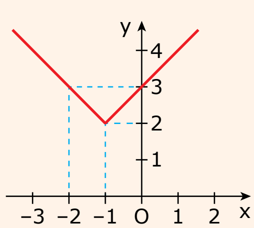
D) 5 e 36.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

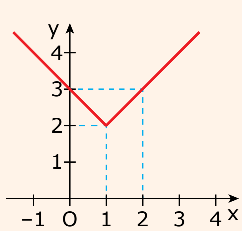
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UDESC) A alternativa que representa o gráfico da função $f(x) = |x + 1| + 2$ é:

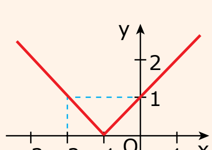
A)



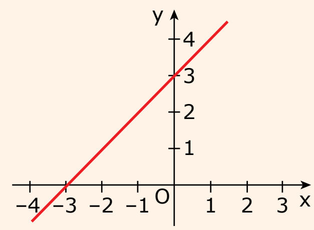
B)



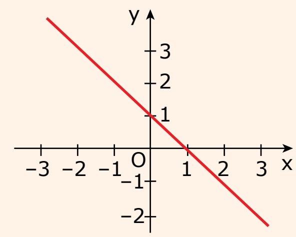
C)



D)



E)



02. (FGV-SP) A soma dos valores inteiros de **x** que satisfazem, simultaneamente, as desigualdades $|x - 5| < 3$ e $|x - 4| \geq 1$ é:

A) 25.
B) 13.
C) 16.
D) 18.
E) 21.

03. (Mackenzie-SP–2016) Os gráficos de $f(x) = 2|x^2 - 4|$ e $g(x) = (x - 2)^2$ se interceptam em

A) apenas um ponto.
B) dois pontos.
C) três pontos.
D) quatro pontos.
E) nenhum ponto.

04. (Unesp) No conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, o conjunto solução **S** da inequação modular $|x|.|x - 5| \geq 6$ é:

A) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 6\}$.

B) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3\}$.

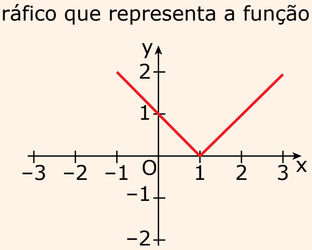
C) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 3 \text{ ou } x \geq 6\}$.

D) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3\}$.

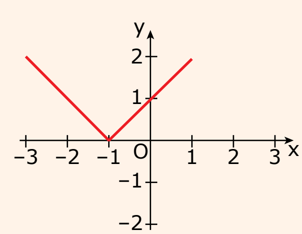
E) $S = \mathbb{R}$.

05. (PUC Rio) Considere a função real $f(x) = |-x + 1|$. O gráfico que representa a função é:

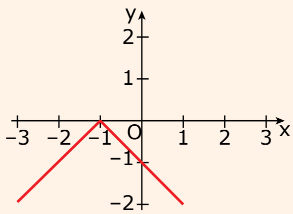
A)



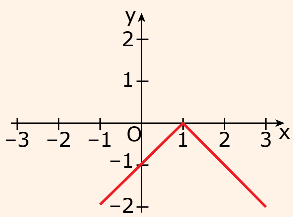
B)



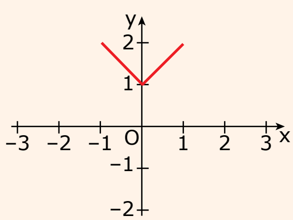
C)



D)



E)



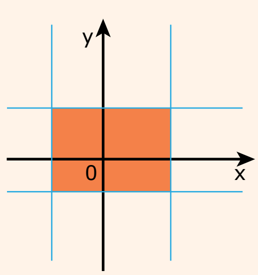
06. (EsPCEx-SP–2017) O conjunto solução da inequação $||x - 4| + 1| \leq 2$ é um intervalo do tipo [a, b]. O valor de a + b é igual a:

A) −8.
B) −2.
C) 0.
D) 2.
E) 8.

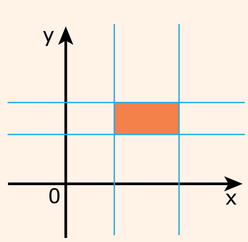
07. (UFRGS-RS–2016) Considere as desigualdades definidas por $|x + 5| \leq 2$ e $|y - 4| \leq 1$ representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Qual das regiões sombreadas dos gráficos a seguir melhor representa a região do plano cartesiano determinada pela interseção das desigualdades?

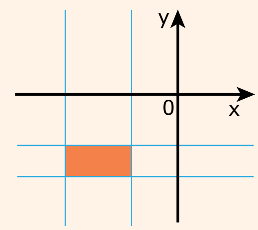
A)



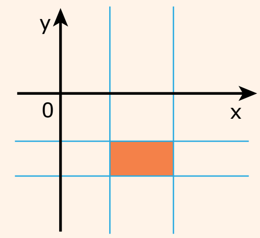
B)



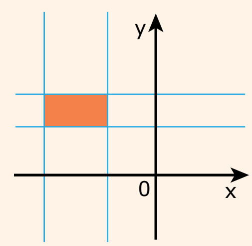
C)



D)



E)



08. (UFLA-MG) Se $y = |x|^2 - 5|x| + 6$, a afirmativa correta é:

A) **y** se anula somente para quatro valores de **x**.
B) **y** possui apenas um ponto de mínimo.
C) **y** se anula somente para dois valores de **x**.
D) **y** não é uma função par.

09. (FGV-SP) No plano cartesiano, os pontos (x, y) que satisfazem a equação $|x| + |y| = 2$ determinam um polígono cujo perímetro é:

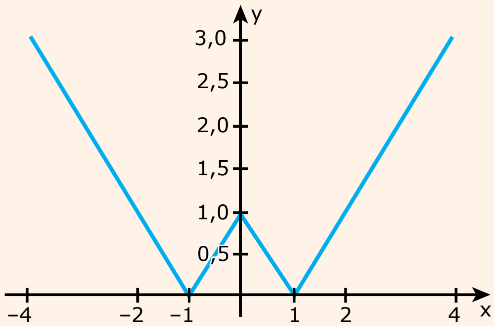
A) $2\sqrt{2}$
B) $4 + 2\sqrt{2}$
C) $4\sqrt{2}$
D) $8 + 4\sqrt{2}$
E) $8\sqrt{2}$

10. (UECE) Em um referencial cartesiano ortogonal, no qual a unidade linear é o centímetro, a área da região limitada pelo gráfico da equação $|x| + |y| = 1$, em centímetros quadrados, é:

A) 1
B) 2
C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\sqrt{2}$

11. (UFRJ) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(2x) = |1 - x|$. Determine os valores de **x** para os quais $f(x) = 2$.

12. (PUCPR–2017) Considere os seguintes dados. Pode-se dizer que quando duas variáveis **x** e **y** são tais que a cada valor de **x** corresponde um único valor de **y**, segundo uma lei matemática, diz-se que **y** é função de **x**. Considere uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ que é representada pelo gráfico ao lado.



Analisando o gráfico, julgue as proposições a seguir:

I. **f** é ímpar.
II. **f** é injetora.
III. A lei matemática de **f** é $f(x) = ||x| - 1|$.
IV. **f** é crescente se, e só se, $x > 1$.
V. $(f \circ f)(-1) = (f \circ f)(1)$.

A) Somente II é correta.
B) Somente I é correta.
C) Somente III e V são corretas.
D) Todas as proposições são corretas.
E) Todas as proposições são falsas.

13. (EN-RJ) A reta no $\mathbb{R}^2$ de equação $2y - 3x = 0$ intercepta o gráfico da função $f(x) = |x| \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x}$ nos pontos **P** e **Q**. Qual a distância entre **P** e **Q**?

A) $2\sqrt{15}$
B) $2\sqrt{13}$
C) $2\sqrt{7}$
D) $\sqrt{7}$
E) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

14. (UDESC–2016) A área da região fechada delimitada pelas funções $f(x) = |x|$, $g(x) = |x - 2|$ e $h(x) = |x - 3|$, em unidades de área, é igual a:

A) 1
B) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
C) $\sqrt{2}$
D) 2
E) $2\sqrt{2}$

SEÇÃO ENEM

01. Em uma gincana escolar, uma das etapas consistia na resolução de um desafio matemático. O professor forneceu uma série de informações acerca de um número **Y**. A primeira equipe que conseguisse determinar esse número venceria a prova.

As informações eram as seguintes:

- O número **Y** é natural.
- O número $|Y - 2| + 4$ encontra-se a 10 unidades da origem da reta real.

Acerca do número **Y**, podemos concluir que

A) é um número primo.
B) possui 6 divisores naturais.
C) é divisor de 56.
D) é um número ímpar.
E) é múltiplo de 3.

02. A elaboração de um programa computacional consiste em fornecer uma série de comandos ao computador para que o mesmo execute uma determinada tarefa. Tais comandos devem ser dados em uma linguagem apropriada, chamada linguagem de programação. É comum que um programador, antes de digitar o programa propriamente dito, crie um algoritmo, ou seja, uma espécie de rascunho que contém a sequência de operações que o futuro programa deverá executar. Um programador escreveu em um papel o seguinte algoritmo:

Passo 1) Dados iniciais
x_0: valor de entrada
Passo 2) Faça $x_0 - 1$.
Passo 3) Se $|x_0 - 1| = 6$, então FIM.
Passo 4) Se $|x_0 - 1| \neq 6$, então VOLTE AO PASSO 2, UTILIZANDO $|x_0 - 1|$ COMO DADO DE ENTRADA.

Após a implementação do programa, foram feitos vários testes. Em um desses testes, verificou-se que o passo 2 foi repetido uma única vez, antes de o programa terminar. O número de valores reais possíveis para o dado de entrada x_0, nessas condições, é igual a:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. B	03. E	05. D	07. C
02. B	04. D	06. D	08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A	08. A
02. E	09. E
03. C	10. B
04. C	11. $x = -2$ ou $x = 6$
05. A	12. C
06. E	13. B
07. E	14. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C	02. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Função Exponencial

INTRODUÇÃO

Conta uma lenda que um rei havia prometido realizar qualquer desejo a quem executasse uma difícil tarefa. Quando um dos seus súditos conseguiu realizá-la, o rei viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. O súdito pediu então que as 64 casas de um tabuleiro de xadrez, jogo muito apreciado no reino, fossem preenchidas com grãos de trigo, do seguinte modo: na primeira casa, seria colocado um grão de trigo e, em cada casa seguinte, seria colocado o dobro de grãos que havia na casa anterior. O rei suspirou aliviado, considerando o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os seus conselheiros, alguns dias depois, anunciaram que o reino encontrava-se totalmente sem provisões de trigo, uma vez que apenas na última casa o total de grãos era de 2^{63}, o que corresponde a, aproximadamente, 9 223 300 000 000 000 000 = $9{,}2233 \cdot 10^{18}$. Essa quantidade, juntamente com a soma das quantidades colocadas nas outras casas, superava em muito não só a capacidade do reino, mas a de todos os outros de que se tinha notícia.

Essa lenda nos dá um exemplo de uma função exponencial, a função $y = 2^x$. As funções exponenciais crescem ou decrescem muito rapidamente, sendo extremamente importantes para descrever diversos fenômenos, tais como crescimento populacional, reprodução de bactérias, decaimento radioativo, juros compostos, entre outros. Seu estudo desenvolveu-se notadamente por volta do século XVI, com o trabalho de dois matemáticos: John Napier (1550-1617) e Henry Briggs (1561-1630).

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$. Tal função é denominada **função exponencial**.

Exemplos:

1º) $f(x) = 3^x$

2º) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

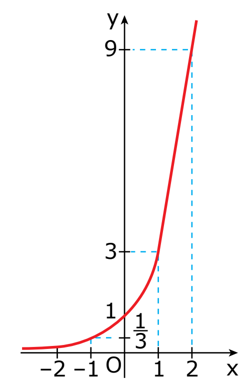
3º) $f(x) = 0{,}78^x$

4º) $f(x) = 2{,}23^x$

GRÁFICOS

Considere a função $y = 3^x$. Vamos atribuir alguns valores à variável, calcular a imagem correspondente e construir o gráfico. Assim, temos:

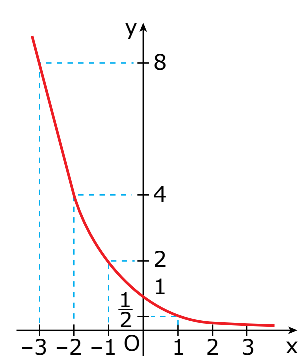
x	$y = 3^x$
−2	$\frac{1}{9}$
−1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3
2	9
3	27



Do mesmo modo, vamos obter o gráfico da função:

$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

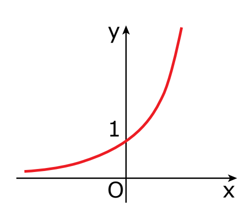


De modo geral, há dois tipos de gráfico para a função $f(x) = a^x$:

i) Se $a > 1$, então a função $f(x) = a^x$ é **crescente**.

Exemplo:

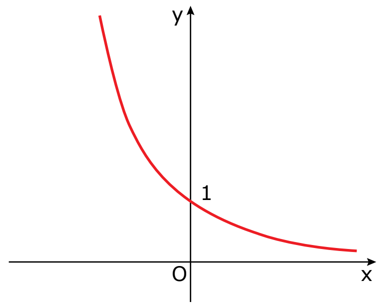
$f(x) = 2^x$



ii) Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$ é **decrescente**.

Exemplo:

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$



Com relação aos gráficos, podemos dizer que:

i) Trata-se de uma função injetora, pois, a cada valor da imagem, corresponde um único valor do domínio.

ii) O domínio de uma função exponencial é sempre igual ao conjunto dos números reais ($D = \mathbb{R}$).

iii) A curva está toda acima do eixo das abscissas, pois $y = a^x$ é sempre maior que zero para todo **x** real. Portanto, a sua imagem Im é dada por $Im = \mathbb{R}_+^*$.

iv) A curva corta o eixo das ordenadas no ponto (0, 1). Isso ocorre porque, para $x = 0$, temos $y = a^0 = 1$.

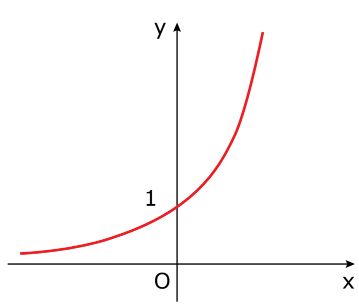
OBSERVAÇÃO

O número "e"

Trata-se de um número irracional, cujo valor é 2,71828... . Esse número é conhecido como número neperiano, uma referência ao matemático escocês John Napier (1550-1617), autor da primeira publicação sobre a Teoria dos Logaritmos.

O número **e** é extremamente importante no estudo de juros e de diversos fenômenos naturais, tais como crescimento populacional, decaimento radioativo, crescimento de bactérias, entre outros.

O gráfico da função $y = e^x$ é dado por:



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Determinar os valores de **k** para os quais a função $f(x) = \left(2 + \frac{3k}{5}\right)^x$ é crescente.

Resolução:

Para que a função seja crescente, é necessário que $2 + \frac{3k}{5} > 1$.

Portanto, temos:

$$2 + \frac{3k}{5} > 1 \Rightarrow \frac{3k}{5} > -1 \Rightarrow 3k > -5 \Rightarrow k > -\frac{5}{3}$$

02. (PUC-SP) Sobre a função $f(x) = e^x$ definida em $\mathbb{R}$, podemos afirmar que:

A) tem um único zero no intervalo [0, 2].

B) $e^x < a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}^*$.

C) $e^x > a^x$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}_+^*$.

D) assume valores de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+^*$.

E) assume valores apenas em $\mathbb{R}_+$.

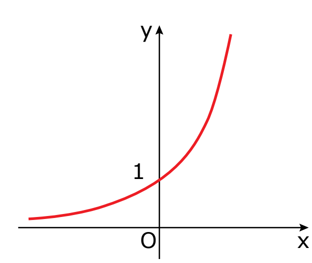
Resolução:

A função $f(x) = e^x$ não possui raízes, pois $e^x > 0$ para todo **x** real. Portanto, a alternativa A é falsa.

Para $0 < a < 1$, temos que $e^x > a^x$. Portanto, a alternativa B é falsa.

Para $a > e$, temos que $e^x < a^x$. Portanto, a alternativa C é falsa.

A função $f(x) = e^x$ possui o seguinte gráfico:



Observe que se trata de uma função com domínio $\mathbb{R}$ e imagem $\mathbb{R}_+^*$. Portanto, a alternativa D é verdadeira.

Conforme visto no item anterior, o domínio não se restringe ao conjunto $\mathbb{R}_+$. Portanto, a alternativa E é falsa.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (IMED-SP–2015) Em um experimento no laboratório de pesquisa, observou-se que o número de bactérias de uma determinada cultura, sob certas condições, evolui conforme a função $B(t) = 10 \cdot 3^{t-1}$, em que B(t) expressa a quantidade de bactérias e **t** representa o tempo em horas. Para atingir uma cultura de 810 bactérias, após o início do experimento, o tempo decorrido, em horas, corresponde a:

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

02. (EBMSP–2018) Muita gente não consegue começar o dia sem uma xícara de café e até mesmo há quem se refira ao café como "o combustível do homem moderno". Uma xícara de café contém vitamina B12, vitamina B5, magnésio e potássio, e outros nutrientes.

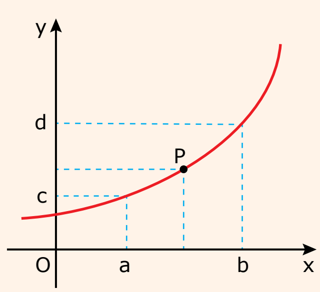
Para preparar um café instantâneo, adiciona-se água em ebulição, 100 °C, à mistura do café.

A uma temperatura ambiente de 30 °C, a temperatura do café, em °C, após **t** minutos, pode ser calculada pela função $f(t) = 30 + 70\left(\frac{5}{7}\right)^{\frac{t}{2}}$.

Passados quatro minutos, ápos o preparo do café, a temperatura da bebida é, aproximadamente,

A) 64 °C.
B) 66 °C.
C) 68 °C.
D) 70 °C.
E) 72 °C.

03. (UFLA-MG) A figura é um esboço do gráfico da função $y = 2^x$. A ordenada do ponto **P** de abscissa $\frac{a+b}{2}$ é:



A) $\sqrt{cd}$
B) $\sqrt{c+d}$
C) cd
D) $(cd)^2$

04. (UNIFESP) Sob determinadas condições, o antibiótico gentamicina, quando ingerido, é eliminado pelo organismo à razão de metade do volume acumulado a cada 2 horas. Daí, se **K** é o volume da substância no organismo, pode-se utilizar a função $f(t) = K.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ para estimar a sua eliminação depois de um tempo **t**, em horas. Neste caso, o tempo mínimo necessário para que uma pessoa conserve no máximo 2 mg desse antibiótico no organismo, tendo ingerido 128 mg numa única dose, é de

A) 12 horas e meia.
B) 12 horas.
C) 10 horas e meia.
D) 8 horas.
E) 6 horas.

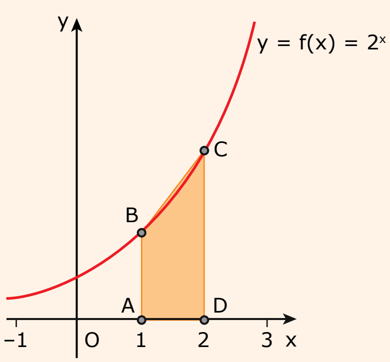
05. (UFGD-MS–2016) Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^{-2x}$. O valor de $f\left(\frac{3a}{2} - 1\right) - f\left(\frac{3a}{2}\right)$ é igual a:

A) 2
B) f(2a)
C) $3f\left(\frac{3}{2}a\right)$
D) $f\left(\frac{3}{2}a\right)$
E) −2

06. (ACAFE-SC) Um dos perigos da alimentação humana são os microrganismos, que podem causar diversas doenças e até levar a óbito. Entre eles, podemos destacar a *Salmonella*. Atitudes simples como lavar as mãos e armazenar os alimentos em locais apropriados ajudam a prevenir a contaminação por estes. Sabendo que certo microrganismo se prolifera rapidamente, dobrando sua população a cada 20 minutos, pode-se concluir que o tempo que a população de 100 microrganismos passará a ser composta de 3 200 indivíduos é

A) 1 h e 35 min.
B) 1 h e 40 min.
C) 1 h e 50 min.
D) 1 h e 55 min.

07. (UFJF-MG) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 2^x$. Na figura a seguir está representado, no plano cartesiano, o gráfico de **f** e um trapézio ABCD, retângulo nos vértices **A** e **D** e cujos vértices **B** e **C** estão sobre o gráfico de **f**.



A medida da área do trapézio ABCD é igual a:

A) 2.
B) $\frac{8}{3}$.
C) 3.
D) 4.
E) 6.

MATEMÁTICA

08. (UEL-PR) O crescimento de uma colônia de bactérias é descrito por $P(t) = \alpha.4^{\lambda.t}$, em que $t \geq 0$ é o tempo, dado em horas, e P(t) é a população de bactérias no instante **t**. Se, após 4 horas, a população inicial da colônia triplicou, após 8 horas o número de bactérias da colônia será:

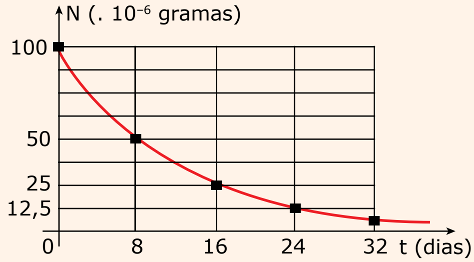
A) 6α
B) 8α
C) 9α
D) $8\alpha - 4$
E) $\alpha + 8$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC RS–2018) Em hospitais de grande porte das principais cidades do país são realizados tratamentos que utilizam radioisótopos emissores de radiações alfa, beta e gama.

O iodo 131, por exemplo, é um radioisótopo utilizado no tratamento de hipertireoidismo. O gráfico a seguir representa a massa residual de iodo 131 (N) presente em uma amostra em função do tempo (t).



A função que melhor descreve a massa residual de iodo 131 presente na amostra, em função do tempo, é $N(t) = N_0e^{kt}$, onde

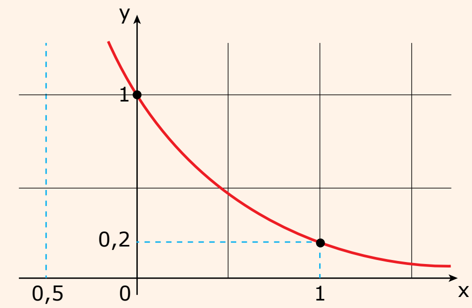
A) $N_0 > 0$ e $k > 0$
B) $N_0 < 0$ e $k > 0$
C) $N_0 > 0$ e $k < 0$
D) $N_0 < 0$ e $k < 0$

02. (UEL-PR–2015) A mitose é uma divisão celular, na qual uma célula duplica o seu conteúdo, dividindo-se em duas, ditas células-filhas. Cada uma destas células-filhas se divide, dando origem a outras duas, totalizando quatro células-filhas e, assim, o processo continua se repetindo sucessivamente.

Assinale a alternativa que corresponde, corretamente, à função que representa o processo da mitose.

A) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, dada por $f(x) = x^2$
B) $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, dada por $f(x) = 2^x$
C) $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, dada por $f(x) = 2^x$
D) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = 2^x$
E) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = 2x$

03. (Unesp–2016) A figura descreve o gráfico de uma função exponencial do tipo $y = a^x$, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$.



Nessa função, o valor de **y** para $x = -0{,}5$ é igual a:

A) log 5
B) $\log_5 2$
C) $\sqrt{5}$
D) $\log_2 5$
E) 2,5

04. (UFPR–2016) A análise de uma aplicação financeira ao longo do tempo mostrou que a expressão $V(t) = 1\,000 \,.\, 2^{0{,}0625.t}$ fornece uma boa aproximação do valor **V** (em reais) em função do tempo **t** (em anos), desde o início da aplicação. Depois de quantos anos o valor inicialmente investido dobrará?

A) 8
B) 12
C) 16
D) 24
E) 32

05. (EsPCEx-SP) Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão $N(t) = N_0.2^{kt}$, sendo N_0 a população no início do tratamento, N(t) a população após **t** dias de tratamento e **k** uma constante que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial. Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a:

A) 5^{-1}
B) -5^{-1}
C) 10
D) 10^{-1}
E) -10^{-1}

06. (Unemat-MT–2018) Certa substância se desintegra obedecendo à seguinte expressão: $Q(t) = k.2^{-0{,}5t}$, em que **t** é o tempo (em horas), **k** é uma constante real e Q(t) é a quantidade da substância (em gramas), no tempo **t**.

Considerando que no instante inicial, t = 0, a de substância é de 800 g, assinale a alternativa que corresponde ao tempo necessário para que a quantidade dessa substância esteja reduzida a 25% do seu valor inicial.

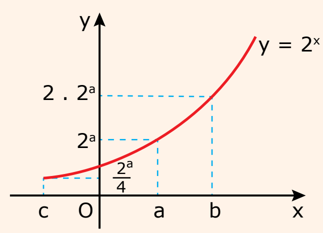
A) 2 h.
B) 4 h.
C) 6 h.
D) 8 h.
E) 10 h.

07. (ULBRA-RS–2016) Em um experimento de laboratório, 400 indivíduos de uma espécie animal foram submetidos a testes de radiação, para verificar o tempo de sobrevivência da espécie. Verificou-se que o modelo matemático que determinava o número de indivíduos sobreviventes, em função do tempo era $N(t) = C.A^t$, com o tempo **t** dado em dias e **A** e **C** dependiam do tipo de radiação. Três dias após o início do experimento, havia 50 indivíduos.

Quantos indivíduos vivos existiam no quarto dia após o início do experimento?

A) 40
B) 30
C) 25
D) 20
E) 10

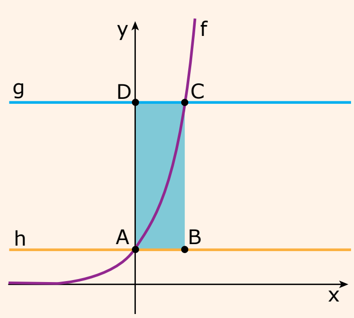
08. (UFRN) No plano cartesiano a seguir, estão representados o gráfico da função $y = 2^x$, os números **a**, **b**, **c** e suas imagens.



Observando-se a figura, pode-se concluir que, em função de **a**, os valores de **b** e **c** são, respectivamente,

A) $\frac{a}{2}$ e 4a
B) a – 1 e a + 2
C) 2a e $\frac{a}{4}$
D) a + 1 e a – 2

09. (UERJ–2017) Observe o plano cartesiano a seguir, no qual estão representados os gráficos das funções definidas por $f(x) = 2^{x+1}$, $g(x) = 8$ e $h(x) = k$, sendo $x \in \mathbb{R}$ e **k** uma constante real.



No retângulo ABCD, destacado no plano, os vértices **A** e **C** são as interseções dos gráficos $f \cap h$ e $f \cap g$, respectivamente. Determine a área desse retângulo.

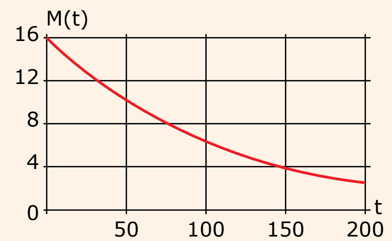
10. (UEPA) Os dados estatísticos sobre violência no trânsito nos mostram que é a segunda maior causa de mortes no Brasil, sendo que 98% dos acidentes de trânsito são causados por erro ou negligência humana e a principal falha cometida pelos brasileiros nas ruas e estradas é usar o celular ao volante. Considere que em 2012 foram registradas 60 000 mortes decorrentes de acidentes de trânsito e destes, 40% das vítimas estavam em motos.

VEJA, 19 ago. 2013 (Adaptação).

A função $N(t) = N_0.(1,2)^t$ fornece o número de vítimas que estavam de moto a partir de 2012, sendo **t** o número de anos e N_0 o número de vítimas que estavam em moto em 2012. Nessas condições, o número previsto de vítimas em moto para 2015 será de:

A) 41 472.
B) 51 840.
C) 62 208.
D) 82 944.
E) 103 680.

11. (Unicamp-SP) Em uma xícara que já contém certa quantidade de açúcar, despeja-se café. A curva a seguir representa a função exponencial M(t), que fornece a quantidade de açúcar não dissolvido (em gramas), **t** minutos após o café ser despejado. Pelo gráfico, podemos concluir que:



A) $M(t) = 2^{4 - \frac{t}{75}}$
B) $M(t) = 2^{4 - \frac{t}{50}}$
C) $M(t) = 2^{5 - \frac{t}{50}}$
D) $M(t) = 2^{5 - \frac{t}{150}}$

12. (Unifor-CE–2016) Num período prolongado de seca, a variação da quantidade de água de certo reservatório é dada por $q(t) = q_0.2^{-0,2t}$, q_0 quantidade inicial de água no reservatório e q(t) a quantidade de água no reservatório após **t** meses.

A quantidade de meses que a água do reservatório se reduzirá a 25% do que era no início é de:

A) 4.
B) 6.
C) 8.
D) 10.
E) 12.

13. (ESPM-SP–2016) Um novo aparelho eletrônico foi lançado no mercado em janeiro de 2014, quando foram vendidas cerca de 3 milhões de unidades. A partir de então, esse número teve um crescimento exponencial, dado pela expressão $v = n.k^t$, onde **n** e **k** são constantes reais e **t** é o número de meses após o lançamento (jan = 0, fev = 1, etc.). Se, em fevereiro desse ano foram vendidos 4,5 milhões de aparelhos, podemos concluir que, no mês seguinte, esse número passou para

A) 5,63 milhões.
B) 10,13 milhões.
C) 4,96 milhões.
D) 8,67 milhões.
E) 6,75 milhões.

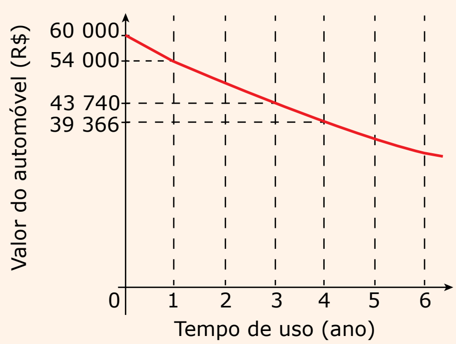
MATEMÁTICA

14. (UFTM-MG) A população **P** de um país no ano **t** pode ser estimada através da função $P(t) = m.n^{t-2011}$, para $n \neq 0$. Sabendo-se que a população atual desse país é de 15,3 milhões de habitantes, e que sua taxa anual de crescimento é de 2%, então, $\frac{m}{n}$ é igual a:

A) $1,2 . 10^6$
B) $1,5 . 10^6$
C) $1,2 . 10^7$
D) $1,5 . 10^7$
E) $1,2 . 10^8$

SEÇÃO ENEM

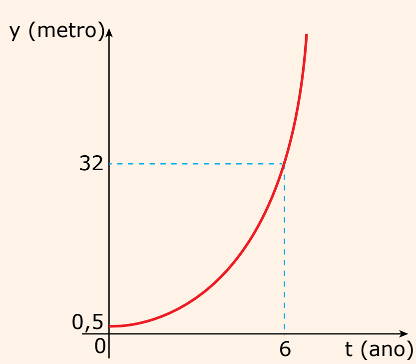
01. (Enem–2017) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b.a^t$, com **t** em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

A) 48 000,00
B) 48 114,00
C) 48 600,00
D) 48 870,00
E) 49 683,00

02. (Enem–2016) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual **y** representa a altura da planta em metro, **t** é considerado em ano, e **a** é uma constante maior do que 1. O gráfico representa a função **y**.



Admita ainda que y(0) fornece a altura da muda quando plantada, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem 7,5 m após o plantio.

O tempo entre a plantação e o corte, em ano, é igual a:

A) 3
B) 4
C) 6
D) $\log_2 7$
E) $\log_2 15$

03. (Enem–2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R$ 1 800,00 propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1\,800.(1,03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de tempo de serviço será, em reais,

A) 7 416,00.
B) 3 819,24.
C) 3 709,62.
D) 3 708,00.
E) 1 909,62.

04. Sob certas condições, o número **N** de bactérias de uma cultura, em função do tempo **t**, medido em horas, é dado por $N(t) = N_0.2^{\frac{t}{12}}$. Isso significa que, após 6 dias, o número inicial de bactérias terá sido multiplicado por:

A) $\sqrt{2}$
B) 2
C) 16
D) 1 024
E) 4 096

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. E	04. B	07. C
02. B	05. C	08. C
03. A	06. B	

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C	06. B	11. A
02. C	07. C	12. D
03. C	08. D	13. E
04. C	09. 12 u.a.	14. D
05. B	10. A	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. C	02. B	03. E	04. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Equações e Inequações Exponenciais

EQUAÇÃO EXPONENCIAL

Uma equação é dita exponencial quando a variável se apresenta no expoente. Seja **a** um número real tal que $0 < a \neq 1$. Como a função exponencial é injetora, temos:

Se $a^x = a^y$, então $x = y$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $32^x = 128$.

Resolução:

$32^x = 128 \Rightarrow (2^5)^x = 2^7 \Rightarrow 2^{5x} = 2^7 \Rightarrow$

$5x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$

Portanto, $S = \left\{\frac{7}{5}\right\}$.

02. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $3^x + 3^{-x} = \frac{82}{9}$.

Resolução:

Podemos escrever $3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{82}{9}$.

Substituindo 3^x por **y**, temos:

$y + \frac{1}{y} = \frac{82}{9} \Rightarrow \frac{9y^2 + 9}{9y} = \frac{82y}{9y}$

$9y^2 - 82y + 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (-82)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 9 = 6\,400$

$y = \frac{82 \pm 80}{18} \Rightarrow y = \frac{1}{9}$ ou $y = 9$

Para $y = \frac{1}{9}$, temos $3^x = \frac{1}{9} \Rightarrow 3^x = 3^{-2} \Rightarrow x = -2$.

Para $y = 9$, temos $3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$.

Portanto, $S = \{-2, 2\}$.

03. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $4^x - 2^x - 12 = 0$.

Resolução:

$2^{2x} - 2^x - 12 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0$

Substituindo 2^x por **y**, temos:

$y^2 - y - 12 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49$

$y = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow y = -3$ ou $y = 4$

Para $y = -3$, temos $2^x = -3$ (absurdo).

Para $y = 4$, temos $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

Portanto, $S = \{2\}$.

INEQUAÇÃO EXPONENCIAL

Toda desigualdade em que a variável aparece no expoente é uma inequação exponencial.

Exemplos:

1º) $7^x > 343$

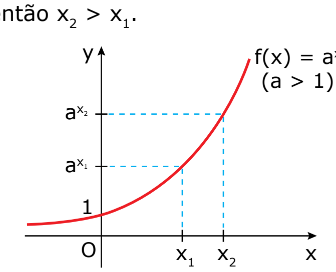
2º) $3^{x-4} \leq 81$

3º) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x - 21} \geq 25^{-1}$

De modo geral, uma inequação deve ser resolvida colocando-se a mesma base **a** nos dois membros da inequação e considerando-se os seguintes casos:

1º caso: a > 1

Como a função $f(x) = a^x$ é crescente, observamos que, se $a^{x_2} > a^{x_1}$, então $x_2 > x_1$.

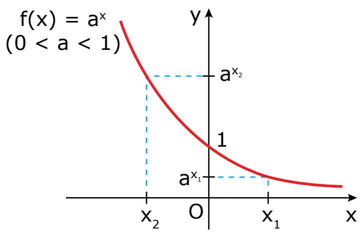


Portanto:

Se $a > 1$, devemos **conservar** o sinal da desigualdade ao compararmos os expoentes.

2º caso: 0 < a < 1

Como a função $f(x) = a^x$ é decrescente, observamos que, se $a^{x_2} > a^{x_1}$, então $x_2 < x_1$.



Portanto:

Se 0 < a < 1, devemos **inverter** o sinal da desigualdade ao compararmos os expoentes.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

04. Resolver a inequação $7^x > 343$.

Resolução:

$7^x > 343 \Rightarrow 7^x > 7^3$

Como 7 > 1, devemos conservar a desigualdade, ou seja, $x > 3$.

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

05. Resolver a inequação $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1}$.

Resolução:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq 25^{-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq \frac{1}{25} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-21} \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{2}$$

Como $0 < \frac{1}{5} < 1$, devemos inverter a desigualdade,

ou seja, $3x - 21 \leq 2 \Rightarrow 3x \leq 23 \Rightarrow x \leq \frac{23}{3}$.

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{23}{3}\right\}$.

06. Resolver a inequação $2^{x+2} - 2^{x-1} + 2^x \leq 18$.

Resolução:

Nesse caso, devemos utilizar as propriedades das potências.

$$2^x \cdot 2^2 - \frac{2^x}{2} + 2^x \leq 18 \Rightarrow 4 \cdot 2^x - \frac{2^x}{2} + 2^x \leq 18$$

Substituindo 2^x por **y**, temos:

$$4y - \frac{y}{2} + y \leq 18 \Rightarrow \frac{10y - y}{2} \leq 18 \Rightarrow 9y \leq 36 \Rightarrow y \leq 4$$

Substituindo **y** por 2^x, obtemos:

$2^x \leq 4 \Rightarrow 2^x \leq 2^2 \Rightarrow x \leq 2$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UNITAU-SP–2015) Sabendo-se que **x** é um número real, o conjunto solução da equação $5^{3x+1} = 625$ é:

A) $S = \{-1\}$
B) $S = \{0\}$
C) $S = \{1\}$
D) $S = \{2\}$
E) $S = \{\ \}$

02. (IFMA–2016) A soma das raízes da equação $(2^x)^{x-1} = 4$ é:

A) 1 e –2.
B) –1.
C) 2.
D) –1 e 2.
E) 1.

03. (UNITAU-SP–2015) Sabendo-se que **x** é um número real, o conjunto solução da equação $5^{x^2-6x+5} = 1$ é:

A) $S = \{-1; 5\}$
B) $S = \{0; 1\}$
C) $S = \{1; 5\}$
D) $S = \{-1; -5\}$
E) $S = \{\ \}$

04. (IFPE–2016) Agrônomos e Matemáticos do IFPE estão pesquisando o crescimento de uma cultura de bactérias e concluíram que a população de uma determinada cultura P(t), sob certas condições, em função do tempo **t**, em horas, evolui conforme a função $P(t) = 5 \cdot 2^{\frac{t}{3}}$. Para atingir uma população de 160 bactérias, após o início do experimento, o tempo decorrido, em horas, corresponde a:

A) 5.
B) 15.
C) 160.
D) 32.
E) 10.

05. (PUC Rio) A equação $2^{x^2-14} = \frac{1}{1\,024}$ tem duas soluções reais. A soma das duas soluções é:

A) –5.
B) 0.
C) 2.
D) 14.
E) 1 024.

06. (UPE–2016) Os técnicos de um laboratório observaram que uma população de certo tipo de bactérias cresce segundo a função $B(t) = 10^9 \cdot 4^{3t}$ com **t** sendo medido em horas. Qual o tempo necessário para que ocorra uma reprodução de $6{,}4 \cdot 10^{10}$ bactérias?

A) 1 h.
B) 3 h.
C) 4 h.
D) 6 h.
E) 16 h.

07. (USF-SP–2018) Em um experimento, o número de bactérias presentes nas culturas A e B, no instante **t**, em horas, é dado, respectivamente, por: $A(t) = 10 \cdot 2^{t-1} + 238$ e $B(t) = 2^{t+2} + 750$. De acordo com essas informações, o tempo decorrido, desde o início desse experimento, necessário para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B é

A) 5 horas.
B) 6 horas.
C) 7 horas.
D) 9 horas.
E) 12 horas.

08. (ESPM-SP) Se $(4^x)^2 = 16 \,.\, 2^{x^2}$, o valor de x^x é:

A) 27.
B) 4.
C) $\frac{1}{4}$.
D) 1.
E) $-\frac{1}{27}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFJF-MG) A função $c(t) = 200 \,.\, 3^{kt}$, com $k = \frac{1}{12}$, dá o crescimento do número **C**, de bactérias, no instante **t** em horas. O tempo necessário, em horas, para que haja, nessa cultura, 1 800 bactérias, está no intervalo:

A) [0, 4]
B) [4, 12]
C) [12, 36]
D) [36, 72]
E) [72, 108]

02. (FGV-SP) A raiz da equação $2^{x-1} + 2^{x+1} + 2^x = 7$ é

A) um número primo.
B) um número negativo.
C) um número irracional.
D) um número maior ou igual a 1.
E) um múltiplo de 5.

03. (Mackenzie-SP–2015) O conjunto solução, em $\mathbb{R}$, da inequação $M^{x^3-1} \leq M^{x^2-1}$, com **M** real e M > 1, é:

A) $]-\infty; 1]$
B) $[1; \infty[$
C) $[0; 1]$
D) $[-1; \infty[$
E) $[0; \infty[$

04. (ESPM-SP–2015) A soma das raízes da equação $4^x + 2^5 = 3 \,.\, 2^{x+2}$ é igual a:

A) 5.
B) 3.
C) 8.
D) 12.
E) 7.

05. (FGV–2015) A raiz da equação $3^{x-1} + 4 \,.\, 3^x + 3^{x+1} = 22\sqrt{3}$ é um número

A) inteiro positivo.
B) inteiro negativo.
C) irracional.
D) racional positivo não inteiro.
E) racional negativo não inteiro.

06. (UFSJ-MG) A interseção dos gráficos das funções $h(x) = 2^x + 1$ e $s(x) = 2^{x+1}$ é o ponto que tem a soma de suas coordenadas igual a

A) 2 e pertence à reta y = x + 2.
B) 1 e pertence à reta y = x + 1.
C) 2 e pertence à reta y = x − 2.
D) 1 e pertence à reta y = x − 1.

07. (UFSCar-SP) O par ordenado (x, y), solução do sistema $\begin{cases} 4^{x+y} = 32 \\ 3^{y-x} = \sqrt{3} \end{cases}$, é:

A) $\left(5, \frac{3}{2}\right)$
B) $\left(5, -\frac{3}{2}\right)$
C) $\left(3, \frac{2}{3}\right)$
D) $\left(1, \frac{3}{2}\right)$
E) $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

08. (ESPM-SP–2015) O valor de **x** na equação $4^x + 2 \,.\, 8^x = 2^x$ é

A) irracional.
B) racional não inteiro positivo.
C) racional não inteiro negativo.
D) racional inteiro positivo.
E) racional inteiro negativo.

09. (FUVEST-SP) Uma substância radioativa sofre desintegração ao longo do tempo, de acordo com a relação $m(t) = ca^{-kt}$, em que **a** é um número real positivo, **t** é dado em anos, m(t) é a massa da substância em gramas e **c**, **k** são constantes positivas. Sabe-se que m_0 gramas dessa substância foram reduzidos a 20% em 10 anos. A que porcentagem de m_0 ficará reduzida a massa da substância em 20 anos?

A) 10%.
B) 5%.
C) 4%.
D) 3%.
E) 2%.

10. (FGV–2015) Se $\frac{m}{n}$ é a fração irredutível que é solução da equação exponencial $9^x - 9^{x-1} = 1\,944$, então, m − n é igual a:

A) 2.
B) 3.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

11. (Mackenzie-SP–2018) Os valores de **x**, $x \in \mathbb{R}$, que satisfazem as condições $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \leq 5^{-4x}$ e $x^2 \leq 5$, são

A) $x \leq -\sqrt{5}$ ou $x \geq \sqrt{5}$
B) $-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$
C) $0 \leq x \leq 4$
D) $x \leq 0$ ou $x \geq 4$
E) $-\sqrt{5} \leq x \leq 0$

MATEMÁTICA

12. (FUVEST-SP) Quando se divide o Produto Interno Bruto (PIB) de um país pela sua população, obtém-se a renda *per capita* desse país. Suponha que a população de um país cresça à taxa constante de 2% ao ano. Para que sua renda per capita dobre em 20 anos, o PIB deve crescer anualmente à taxa constante de, aproximadamente,

Dado: $\sqrt[20]{2} \cong 1{,}035$.

A) 4,2%.
B) 5,6%.
C) 6,4%.
D) 7,5%.
E) 8,9%.

13. (UEMG–2017) Considere o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3^y - 2^x = 1 \\ 3 \cdot 2^{x-1} + 6 = 2 \cdot 3^y \end{cases}$$

Na solução desse sistema, tem-se x = a e y = b. Assim, o valor da expressão $\dfrac{(a-3b)(b-a)}{3(b+a)}$ é:

A) −1.
B) $-\frac{1}{2}$.
C) $\frac{1}{5}$.
D) $\frac{1}{3}$.

14. (UEL-PR) Um barco parte de um porto **A** com 2^k passageiros e passa pelos portos **B** e **C**, deixando em cada um metade dos passageiros presentes no momento de chegada, e recebendo, em cada um, $2^{\frac{k}{2}}$ novos passageiros. Se o barco parte do porto **C** com 28 passageiros e se **N** representa o número de passageiros que partiram de A, é correto afirmar que

A) **N** é múltiplo de 7.
B) **N** é múltiplo de 13.
C) **N** é divisor de 50.
D) **N** é divisor de 128.
E) **N** é primo.

15. (EsPCEx-SP) O conjunto solução do sistema $\begin{cases} 3^x \cdot 27^y = 9 \\ y^3 + \frac{2}{3}xy^2 = 0 \end{cases}$ é formado por dois pontos, cuja localização no plano cartesiano é:

A) Ambos no primeiro quadrante.
B) Um no quarto quadrante e o outro no eixo x.
C) Um no segundo quadrante e o outro no terceiro quadrante.
D) Um no terceiro quadrante e o outro no eixo y.
E) Um no segundo quadrante e o outro no eixo x.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2016) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que **t** é o tempo, em hora, e p(t) é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será

A) reduzida a um terço.
B) reduzida à metade.
C) reduzida a dois terços.
D) duplicada.
E) triplicada.

02. A pressão atmosférica **P**, em mmHg, é dada em função da altura **h** (em relação ao nível do mar) pela expressão $P(h) = 760 . e^{\lambda . h}$, sendo **e** o número neperiano, que vale aproximadamente 2,7182. Um alpinista, ao escalar uma elevação, verificou através de um barômetro (instrumento que mede a pressão atmosférica) que a pressão no ponto em que se encontrava era igual a 600 mmHg. Considerando o parâmetro λ = −0,0002, pode-se afirmar que a altura do alpinista, em relação ao nível do mar, é igual a

Dados: $e^{6,63} = 760$ e $e^{6,40} = 600$.

A) 1 150 m.
B) 1 370 m.
C) 1 520 m.
D) 2 240 m.
E) 3 000 m.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. C	05. B	07. D
02. E	04. B	06. A	08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. C	05. D	09. C	13. C
02. D	06. A	10. D	14. D
03. A	07. D	11. E	15. E
04. A	08. E	12. B	

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D	02. A

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Logaritmos

INTRODUÇÃO

No ano de 1614, foi lançada a obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, que significa "*Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*". Tal obra, escrita pelo nobre escocês John Napier (1550-1617), provocou uma verdadeira revolução na Matemática da época, bem como nas áreas relacionadas à astronomia e à navegação, ao apresentar um método que diminuiu enormemente o tempo gasto na realização dos cálculos que os estudiosos dessas áreas efetuavam frequentemente. Coube ao inglês Henry Briggs (1561-1630) o aperfeiçoamento desse método, por meio da elaboração da chamada *Tábua de logaritmos decimais*, que permitia escrever qualquer número positivo como uma potência de dez.

Com o surgimento das calculadoras científicas, as tábuas logarítmicas perderam a sua utilidade. Porém, o conceito de logaritmo continua sendo um dos mais importantes da Matemática, e o seu uso é fundamental na abordagem de diversos problemas das mais variadas áreas do conhecimento.

DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Imaginemos o seguinte problema:

A qual expoente devemos elevar o número 3 de modo a obtermos 243?

Observe que o problema anterior pode ser descrito através da seguinte equação exponencial:

$3^x = 243 \Rightarrow 3^x = 3^5 \Rightarrow x = 5$

A partir de agora, diremos que 5 é o logaritmo de 243 na base 3. Com isso, promovemos uma mudança na notação utilizada. Assim, escrevemos:

$\log_3 243 = 5$

Portanto, observamos que as expressões descritas anteriormente são equivalentes, ou seja:

$\log_3 243 = 5 \Leftrightarrow 3^5 = 243$

Podemos generalizar essa ideia do seguinte modo:

Sendo **a** e **b** números reais e positivos, com a ≠ 1, chama-se logaritmo de **b** na base **a** o expoente real **x** que se deve dar à base **a** de modo que a potência obtida seja igual a **b**.

$$\boxed{\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x, \text{ com } a, b > 0 \text{ e } a \neq 1}$$

Em que:

i) **b** é o logaritmando.

ii) **a** é a base.

iii) **x** é o logaritmo.

Exemplo:

Calcular o valor de cada logaritmo a seguir:

1º) $\log_2 32 = x \Rightarrow 2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5$

2º) $\log_{0,2} 625 = x \Rightarrow 0,2^x = 625 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 625 \Rightarrow$

$5^{-x} = 5^4 \Rightarrow x = -4$

OBSERVAÇÕES

i) As condições de existência do logaritmo $\log_a b$ são:

$$\boxed{b > 0 \text{ e } 0 < a \neq 1}$$

ii) Quando a base de um logaritmo é igual a 10 (logaritmo decimal), esta pode ser omitida.

Exemplo: $\log_{10} 5$ pode ser escrito como log 5.

iii) Quando a base do logaritmo é o número **e** (e = 2,71828...), esse logaritmo é chamado **logaritmo neperiano** ou **logaritmo natural** e é representado pela notação **ln**.

Exemplo: $\log_e 18$ pode ser escrito como ln 18.

Consequências da definição

Considerando a definição de logaritmo e suas condições de existência, temos:

i) $\log_a a = 1$, pois $a = a^1$;

ii) $\log_a 1 = 0$, pois $1 = a^0$;

iii) $\log_a a^k = k$, pois $a^k = a^k$;

iv) $a^{\log_a b} = b$.

Justificativa de **iv**:

Seja $a^{\log_a b} = x$ (I)

Chamando $\log_a b = y$ em (I), temos que $a^y = x$ (II).

Da definição, sabemos que, se $\log_a b = y \Rightarrow a^y = b$ (III).

De (II) e (III), deduzimos que $x = b$ e, assim: $a^{\log_a b} = x = b$.

PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Sendo **a**, **b** e **c** números reais e positivos, e $a \neq 1$, temos:

i) $\log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$;

ii) $\log_a \left(\dfrac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;

iii) $\log_a b^\alpha = \alpha . \log_a b$, com $\alpha \in \mathbb{R}$;

iv) $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} . \log_a b$, com $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Sendo $\log_2 x = 3$, $\log_2 y = 5$ e $\log_2 z = 7$, calcular o valor de $\log_2 \dfrac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2z}$, considerando satisfeitas as condições de existência.

Resolução:

$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2z} = \log_2 x^{\frac{3}{5}} - (\log_2 y^2 + \log_2 z) \Rightarrow$$

$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2z} = \frac{3}{5}\log_2 x - 2\log_2 y - \log_2 z \Rightarrow$$

$$\log_2 \frac{\sqrt[5]{x^3}}{y^2z} = \frac{3}{5}.3 - 2 . 5 - 7 = -\frac{76}{5}$$

02. (UFMG) A intensidade de um terremoto na escala Richter é definida por $I = \dfrac{2}{3}\log_{10}\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$, em que **E** é a energia liberada pelo terremoto, em quilowatt-hora (kWh), e $E_0 = 10^{-3}$ kWh. A cada aumento de uma unidade no valor de **I**, o valor de **E** fica multiplicado por:

A) $10^{\frac{1}{2}}$

B) 10

C) $10^{\frac{3}{2}}$

D) $\dfrac{20}{3}$

Resolução:

Sabemos que $I = \dfrac{2}{3}\log_{10}\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$. Seja **k** o número pelo qual o valor de **E** fica multiplicado a cada aumento de uma unidade no valor de **I**. Assim, temos:

$$I + 1 = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}.k\right) \Rightarrow I + 1 = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) + \frac{2}{3}.\log_{10} k \Rightarrow$$

$$\cancel{I} + 1 = \cancel{I} + \frac{2}{3} . \log_{10} k \Rightarrow \log_{10} k = \frac{3}{2} \Rightarrow k = 10^{\frac{3}{2}}$$

MUDANÇA DE BASE

Considere o logaritmo $\log_a b$, em que $b > 0$ e $0 < a \neq 1$. Se desejarmos escrever esse logaritmo em uma base **c**, em que $0 < c \neq 1$, utilizaremos a seguinte propriedade:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ sendo } \log_c a \neq 0, \text{ ou seja, } a \neq 1.}$$

Exemplos:

1º) Escrever $\log_7 5$ na base 2.

$$\log_7 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7}$$

2º) Escrever $\log_3 4$ na base 4.

$$\log_3 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 3} = \frac{1}{\log_4 3}$$

Nesse último exemplo, podemos observar que $\log_3 4$ é igual ao inverso de $\log_4 3$. E, é claro que, se $\log_3 4 = \dfrac{1}{\log_4 3}$, então $(\log_3 4).(\log_4 3) = 1$.

GENERALIZANDO

Se forem satisfeitas todas as condições de existência dos logaritmos, podemos escrever que:

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Uma outra forma de se escrever essa propriedade é:

$$\boxed{(\log_a b).(\log_b a) = 1}$$

COLOGARITMO

É definido como o valor oposto ao do logaritmo. Assim, escrevemos:

$$\text{colog}_a\ b = -\log_a b$$

Observe também que $-\log_a b = \log_a b^{-1} = \log_a \left(\frac{1}{b}\right)$

Portanto, podemos escrever que:

$$\boxed{\text{colog}_a\ b = -\log_a b = \log_a \left(\frac{1}{b}\right)}$$

EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São equações que envolvem logaritmos, em que as variáveis podem aparecer no logaritmando ou na base.

Assim, para resolvê-las, aplicamos a definição, as condições de existência e as propriedades dos logaritmos.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

03. Resolver, em $\mathbb{R}$, a seguinte equação logarítmica:

$$\log_5 (3x - 18) = \log_5 6$$

Resolução:

Inicialmente, devemos verificar as condições de existência (C.E.) de cada logaritmo. Assim, temos:

$3x - 18 > 0 \Rightarrow x > 6$

Em seguida, como as bases são iguais, devemos igualar também os logaritmandos.

Logo: $3x - 18 = 6 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$

Como esse valor satisfaz a condição de existência ($x > 6$), então a solução da equação é $S = \{8\}$.

04. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_2 (1 - 5x) = -3$.

Resolução:

Aplicando a condição de existência, temos:

$1 - 5x > 0 \Rightarrow -5x > -1 \Rightarrow 5x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{5}$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$1 - 5x = 2^{-3} \Rightarrow 1 - 5x = \frac{1}{8} \Rightarrow 1 - \frac{1}{8} = 5x \Rightarrow$

$\frac{7}{8} = 5x \Rightarrow x = \frac{7}{40}$

Então, como $\frac{7}{40} < \frac{1}{5}$, satisfazendo a condição de existência, a solução da equação é $S = \left\{\frac{7}{40}\right\}$.

05. Determinar o conjunto solução da equação

$$\log_5 (x^2 - 4x) = \log_5 21, \text{ em } \mathbb{R}.$$

Resolução:

Inicialmente, verificamos a condição de existência:

$x^2 - 4x > 0$

Observação: Nesse caso, não julgamos necessário resolver a inequação de segundo grau, mas apenas indicá-la. Em seguida, resolvemos a equação e verificamos se cada uma das soluções satisfaz a condição de existência.

Como as bases são iguais, temos:

$x^2 - 4x = 21 \Rightarrow$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 . 1 . (-21) = 16 + 84 = 100$

$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{100}}{2 . 1} = \frac{4 \pm 10}{2} \Rightarrow$

$x_1 = -3$ ou $x_2 = 7$

Verificando as condições de existência, temos:

Para $x_1 = -3 \Rightarrow (-3)^2 - 4.(-3) = 9 + 12 = 21 > 0$ (convém)

Para $x_2 = 7 \Rightarrow 7^2 - 4 . 7 = 49 - 28 = 21 > 0$ (convém)

Portanto, a solução da equação é $S = \{-3, 7\}$.

06. Resolver, em $\mathbb{R}$, a equação $\log_2 (x + 7) - \log_2 (x - 11) = 2$.

Resolução:

Inicialmente, devemos verificar as condições de existência de cada logaritmo. Assim, temos:

$x + 7 > 0 \Rightarrow x > -7$ (condição I) e

$x - 11 > 0 \Rightarrow x > 11$ (condição II)

Como **x** deve atender simultaneamente às duas condições, temos que a interseção dessas é dada por $x > 11$.

Manipulando a equação, obtemos:

$\log_2 (x + 7) - \log_2 (x - 11) = 2 \Rightarrow$

$\log_2 \left(\frac{x+7}{x-11}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x+7}{x-11} = 2^2 \Rightarrow$

$\frac{x+7}{x-11} = 4 \Rightarrow 4x - 44 = x + 7 \Rightarrow$

$3x = 51 \Rightarrow$

$x = 17$

Como 17 satisfaz a condição de existência ($x > 11$), então a solução da equação é $S = \{17\}$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UECE–2018) Se **x** é o logaritmo de 16 na base 2, então, o logaritmo (na base 2) de $x^2 - 5x + 5$ é igual a

A) 2.

B) 1.

C) −1.

D) 0.

02. (PUC Rio–2015) Se $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$, então $\sqrt[3]{x} + x^2$ vale:

A) $\frac{3}{4}$.
B) 6.
C) 28.
D) 50.
E) 66.

03. (UFPR) Para se calcular a intensidade luminosa **L**, medida em lúmens, a uma profundidade de **x** centímetros num determinado lago, utiliza-se a Lei de Beer-Lambert, dada pela seguinte fórmula:

$$\log\left(\frac{L}{15}\right) = -0{,}08x$$

Qual a intensidade luminosa **L** a uma profundidade de 12,5 cm?

A) 150 lúmens.
B) 15 lúmens.
C) 10 lúmens.
D) 1,5 lúmens.
E) 1 lúmen.

04. (Unicamp-SP–2016) A solução da equação na variável real **x**, $\log_x (x + 6) = 2$, é um número

A) primo.
B) par.
C) negativo.
D) irracional.

05. (UFRGS-RS–2018) Se $\log_3 x + \log_9 x = 1$, então o valor de **x** é:

A) $\sqrt[3]{2}$
B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt[3]{3}$
D) $\sqrt{3}$
E) $\sqrt[3]{9}$

06. (FGV-SP–2016) Sendo **p** e **q** números reais, com $p > q$ e $p + q > 0$, definiremos a operação # entre **p** e **q** da seguinte forma: $p \# q = p^2 - q^2 + \log (p + q)$, com $\log (p + q)$ sendo o logaritmo na base 10 de $(p + q)$. Utilizando-se essa definição, o valor de $10 \# (-5)$ é igual a:

A) 176 – log 2

B) 174 – log 2

C) 76 – log 2

D) 74 + log 2

E) 74 – log 2

07. (Insper-SP) O número de soluções reais da equação $\log_x (x + 3) + \log_x (x - 2) = 2$ é:

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

08. (UFRGS-RS) Atribuindo para log 2 o valor 0,3, então os valores de log 0,2 e log 20 são, respectivamente,

A) −0,7 e 3.
B) −0,7 e 1,3.
C) 0,3 e 1,3.
D) 0,7 e 2,3.
E) 0,7 e 3.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UERJ–2017) Uma calculadora tem duas teclas especiais, **A** e **B**. Quando a tecla **A** é digitada, o número que está no visor é substituído pelo logaritmo decimal desse número. Quando a tecla **B** é digitada, o número do visor é multiplicado por 5.

Considere que uma pessoa digitou as teclas BAB, nesta ordem, e obteve no visor o número 10. Nesse caso, o visor da calculadora mostrava inicialmente o seguinte número:

A) 20.
B) 30.
C) 40.
D) 50.

02. (UFG-GO) Em um experimento hipotético com cinco espécies de bactérias em meio de cultura, cada uma com população inicial de 10 células, registraram-se as populações apresentadas na tabela a seguir, uma hora após o início do experimento.

Bactéria	Número de células uma hora após o início
Chlamydia trachomatis	160
Escherichia coli	50
Leptospira interrogans	40
Streptococcus pneumoniae	100
Vibrio cholerae	80

Considerando-se que o número de bactérias duplica a cada geração, define-se o número de geração, **n**, quando a população chega a **N** células, pela fórmula:

$$N = N_0 \cdot 2^n$$

em que N_0 é o número inicial de células.

O tempo de geração é definido como o tempo necessário para a população dobrar de tamanho, e pode ser obtido dividindo-se o tempo decorrido para a população passar de N_0 a **N** pelo número de geração correspondente. O bacilo, nesse experimento, causa diarreia e seu tempo de geração, em minutos, foi de:

Dado: log 2 = 0,3.

A) 30.
B) 26.
C) 20.
D) 18.
E) 15.

03. (PUC Rio–2015) Seja $x = \log_2 3 + \log_2 9 + \log_2 27$. Então, é correto afirmar que:

A) $6 \leq x \leq 7$
B) $7 \leq x \leq 8$
C) $8 \leq x \leq 9$
D) $9 \leq x \leq 10$
E) $x \geq 10$

04. (UFPR) Um importante estudo a respeito de como se processa o esquecimento foi desenvolvido pelo alemão Hermann Ebbinghaus no final do século XIX. Utilizando métodos experimentais, Ebbinghaus determinou que, dentro de certas condições, o percentual **P** do conhecimento adquirido que uma pessoa retém após **t** semanas pode ser aproximado pela fórmula:

$$P = (100 - a).b^t + a$$

sendo que **a** e **b** variam de uma pessoa para outra. Se essa fórmula é válida para um certo estudante, com a = 20 e b = 0,5, o tempo necessário para que o percentual se reduza a 28% será

A) entre uma e duas semanas.
B) entre duas e três semanas.
C) entre três e quatro semanas.
D) entre quatro e cinco semanas.
E) entre cinco e seis semanas.

05. (UERJ) Um lago usado para abastecer uma cidade foi contaminado após um acidente industrial, atingindo o nível de toxidez T_0, correspondente a dez vezes o nível inicial. Leia as informações a seguir:

- A vazão natural do lago permite que 50% de seu volume sejam renovados a cada dez dias.
- O nível de toxidez T(x), após **x** dias do acidente, pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$T(x) = T_0.(0{,}5)^{0{,}1x}$$

Considere **D** o menor número de dias de suspensão do abastecimento de água, necessário para que a toxidez retorne ao nível inicial.

Sendo log 2 = 0,3, o valor de **D** é igual a:

A) 30.
B) 32.
C) 34.
D) 36.

06. (Unicamp-SP) Uma barra cilíndrica é aquecida a uma temperatura de 740 °C. Em seguida, é exposta a uma corrente de ar a 40 °C. Sabe-se que a temperatura no centro do cilindro varia de acordo com a função:

$$T(t) = (T_0 - T_{AR}) \cdot 10^{-\frac{t}{12}} + T_{AR}$$

sendo **t** o tempo em minutos, T_0 a temperatura inicial e T_{AR} a temperatura do ar. Com essa função, concluímos que o tempo requerido para que a temperatura no centro atinja 140 °C é dado pela seguinte expressão, com o log na base 10:

A) 12.[log (7) – 1] minutos.
B) 12.[1 – log (7)] minutos.
C) 12.log (7) minutos.
D) $\dfrac{[1 - \log(7)]}{12}$ minutos.

07. (Unifor-CE) Em 1987, uma indústria farmacêutica iniciou a fabricação de certo tipo de medicamento e, desde então, sua produção tem crescido à taxa de 8% ao ano. Assim, em que ano a produção de tal medicamento quadruplicou a quantidade fabricada em 1987?

(São dadas as aproximações: log 2 = 0,30; log 3 = 0,48.)

A) 2002
B) 2003
C) 2004
D) 2005
E) 2006

08. (Albert Einstein–2016) Uma pesquisa foi desenvolvida a partir de 250 bactérias de uma cultura. Estimou-se então, de maneira aproximada, que, durante certo tempo, o aumento percentual do número de bactérias na cultura poderia ser obtido pela expressão $B(t) = -30.\log_3 (t + 21) + 150$, em que **t** é o tempo decorrido, em minutos, após o início da pesquisa, Nessas condições, ao fim da primeira hora da pesquisa, quantas bactérias havia em tal cultura?

A) 325
B) 400
C) 450
D) 525

09. (FGV-SP) Considere a função $f(x) = \log_{1\,319} x^2$.

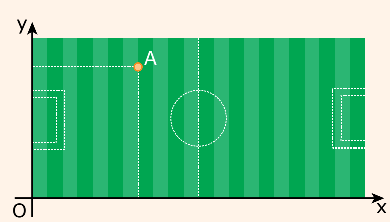
Se n = f(10) + f(11) + f(12), então:

A) n < 1
B) n = 1
C) 1 < n < 2
D) n = 2
E) n > 2

10. (UPF-RS–2015) Sendo $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ e $\log_c x = 5$, o valor de $\log_{abc} x$ é:

A) 30.
B) 31.
C) $\dfrac{31}{30}$.
D) $\dfrac{30}{31}$.
E) $\dfrac{1}{3}$.

11. (UFSM-RS) Suponha que um campo de futebol seja colocado em um sistema cartesiano ortogonal, conforme mostra a figura.



Para que o ponto $A(\log_{10} (x + 1) + 1; \log_{10} (x^2 + 35))$ tenha abscissa e ordenada iguais, é necessário e suficiente que:

A) x > –1
B) x = 5
C) x < –1
D) x = –5
E) x > 5

12. (FUVEST-SP–2019) Se $\log_2 y = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\log_2 x$, para x > 0, então

A) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{2}}$

B) $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{2}}$

C) $y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt[3]{x^2}$

D) $y = \sqrt{2}.\sqrt[3]{x^2}$

E) $y = \sqrt{2x^3}$

MATEMÁTICA

13. (UEL-PR) Considere **A**, **B** e **C** números reais positivos com $A \neq 1$, $B \neq 1$ e $C \neq 1$. Se $\log_A B = 2$ e $\log_C A = \frac{3}{5}$, conclui-se que o valor de $\log_B C$ é:

A) $\frac{1}{2}$. B) $\frac{5}{3}$. C) $\frac{1}{6}$. D) $\frac{5}{6}$. E) $\frac{6}{5}$.

14. (UFPR–2017) Suponha que a quantidade **Q** de um determinado medicamento no organismo **t** horas após sua administração possa ser calculada pela fórmula:

$$Q = 15 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{2t}$$

sendo **Q** medido em miligramas, a expressão que fornece o tempo **t** em função da quantidade de medicamento **Q** é:

A) $t = \log\sqrt{\frac{15}{Q}}$

B) $t = \frac{\log 15}{2\log Q}$

C) $t = 10\sqrt{\log\left(\frac{Q}{15}\right)}$

D) $t = \frac{1}{2}.\log\frac{Q}{15}$

E) $t = \log\frac{Q^2}{225}$

15. (UFC-CE) O valor da soma

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(\frac{2}{3}\right) + \log_{10}\left(\frac{3}{4}\right) + \ldots + \log_{10}\left(\frac{99}{100}\right) \text{ é:}$$

A) 0. B) –1. C) –2. D) 2. E) 3.

16. (UFSM–2015) Quando um elemento radioativo, como o Césio 137, entra em contato com o meio ambiente, pode afetar o solo, os rios, as plantas e as pessoas. A radiação não torna o solo infértil, porém tudo que nele crescer estará contaminado.

A expressão $Q(t) = Q_0.e^{-0,023t}$ representa a quantidade, em gramas, de átomos radioativos de Césio 137 presentes no instante **t**, em dias, onde Q_0 é a quantidade inicial.

O tempo, em dias, para que a quantidade de Césio 137 seja a metade da quantidade inicial é igual a:

Use: ln 2 = 0,69.

A) 60. B) 30. C) 15. D) 5. E) 3.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2017) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5 000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5\,000 \cdot 1{,}013^n \cdot 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

A) 12. B) 14. C) 15. D) 16. E) 17.

02. (Enem–2017) Em 2011, a costa nordeste do Japão foi sacudida por um terremoto com magnitude de 8,9 graus na escala Richter. A energia liberada **E** por esse terremoto, em kWh, pode ser calculada por $R = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, sendo $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh e **R** a magnitude desse terremoto na escala Richter. Considere 0,84 como aproximação para log 7.

Disponível em: <http://oglobo.globo.com>. Acesso em: 02 ago. 2012.

A energia liberada pelo terremoto que atingiu a costa nordeste do Japão em 2011, em KWh, foi de:

A) $10^{10,83}$ B) $10^{11,19}$ C) $10^{14,19}$ D) $10^{15,51}$ E) $10^{17,19}$

03. (Enem) Em setembro de 1987, Goiânia foi palco do maior acidente radioativo ocorrido no Brasil, quando uma amostra de césio-137, removida de um aparelho de radioterapia abandonado, foi manipulada inadvertidamente por parte da população. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que a massa desse material se reduza à metade. A meia-vida do césio-137 é 30 anos e a quantidade restante de massa de um material radioativo, após **t** anos, é calculada pela expressão $M(t) = A.(2,7)^{kt}$, onde **A** é a massa inicial e **k** é uma constante negativa.

Considere 0,3 como aproximação para $\log_{10}2$.

Qual é o tempo necessário, em anos, para que uma quantidade de massa do césio-137 se reduza a 10% da quantidade inicial?

A) 27 B) 36 C) 50 D) 54 E) 100

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

○ 01. D	○ 03. D	○ 05. E	○ 07. B
○ 02. E	○ 04. A	○ 06. C	○ 08. B

Propostos

Acertei ______ Errei ______

○ 01. A	○ 05. C	○ 09. E	○ 13. D
○ 02. B	○ 06. C	○ 10. D	○ 14. A
○ 03. D	○ 07. A	○ 11. B	○ 15. C
○ 04. C	○ 08. A	○ 12. A	○ 16. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

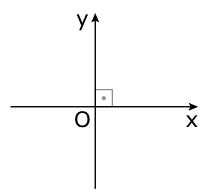
○ 01. D	○ 02. B	○ 03. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Sistema Cartesiano e Ponto

SISTEMA CARTESIANO – COORDENADAS DE UM PONTO

Sejam x e y dois eixos perpendiculares entre si e com origem comum **O**, conforme a figura a seguir:



Nessas condições, diz-se que x e y formam um sistema cartesiano retangular (ou ortogonal), e o plano por eles determinado é chamado plano cartesiano.

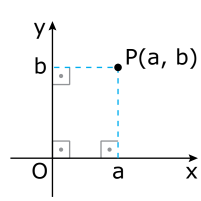
Eixo x (ou Ox): eixo das abscissas

Eixo y (ou Oy): eixo das ordenadas

O: origem do sistema

A cada ponto **P** do plano, corresponderão dois números: **a** (abscissa) e **b** (ordenada), associados às projeções ortogonais de **P** sobre o eixo x e sobre o eixo y, respectivamente.

Assim, o ponto **P** tem coordenadas **a** e **b**, e será indicado analiticamente pelo par ordenado (a, b).

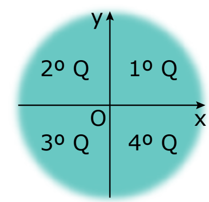


Nota:

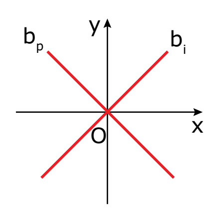
Neste estudo, será utilizado somente o sistema cartesiano retangular, que será chamado, simplesmente, sistema cartesiano.

OBSERVAÇÕES

i) Os eixos x e y dividem o plano cartesiano em quatro regiões ou quadrantes **Q**, que são numerados, como na figura a seguir:



ii) Neste curso, a reta suporte das bissetrizes do 1º e do 3º quadrantes será chamada bissetriz dos quadrantes ímpares e indicada por b_i. A do 2º e 4º quadrantes será chamada bissetriz dos quadrantes pares e indicada por b_p.

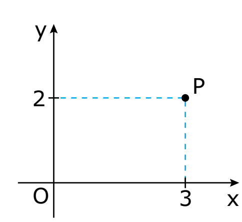


Propriedades

i) Todo ponto P(a, b) do 1º quadrante tem abscissa positiva ($a > 0$) e ordenada positiva ($b > 0$) e, reciprocamente, todo ponto P (a,b) com $a > 0$ e $b > 0$ pertence ao 1º quadrante.

$$\boxed{P(a, b) \in 1^{\text{o}}\ Q \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b > 0}$$

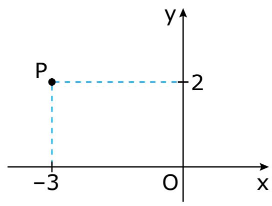
Assim: $P(3, 2) \in 1^{\text{o}}$ Q



ii) Todo ponto P(a, b) do 2º quadrante tem abscissa negativa ($a < 0$) e ordenada positiva ($b > 0$) e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in 2^{\text{o}}\ Q \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b > 0}$$

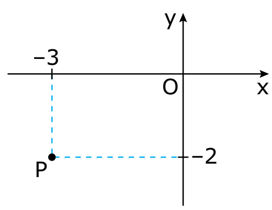
Assim: $P(-3, 2) \in 2º\ Q$



iii) Todo ponto P(a, b) do 3º quadrante tem abscissa negativa (a < 0) e ordenada negativa (b < 0) e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in 3º\ Q \Leftrightarrow a < 0 \text{ e } b < 0}$$

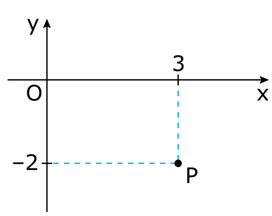
Assim: $P(-3, -2) \in 3º\ Q$



iv) Todo ponto P(a, b) do 4º quadrante tem abscissa positiva (a > 0) e ordenada negativa (b < 0) e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in 4º\ Q \Leftrightarrow a > 0 \text{ e } b < 0}$$

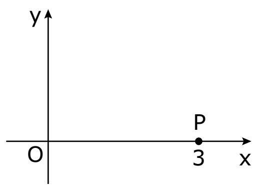
Assim: $P(3, -2) \in 4º\ Q$



v) Todo ponto do eixo das abscissas tem ordenada nula e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in Ox \Leftrightarrow b = 0}$$

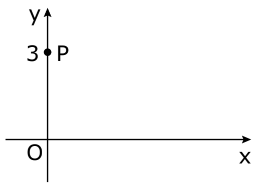
Assim: $P(3, 0) \in Ox$



vi) Todo ponto do eixo das ordenadas tem abscissa nula e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in Oy \Leftrightarrow a = 0}$$

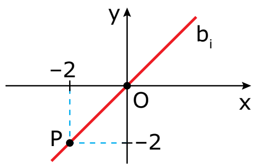
Assim: $P(0, 3) \in Oy$



vii) Todo ponto P(a, b) da bissetriz dos quadrantes ímpares tem abscissa e ordenada iguais (a = b) e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in b_i \Leftrightarrow a = b}$$

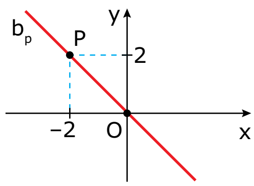
Assim: $P(-2, -2) \in b_i$



viii) Todo ponto P(a, b) da bissetriz dos quadrantes pares tem abscissa e ordenada opostas (a = −b) e reciprocamente.

$$\boxed{P(a, b) \in b_p \Leftrightarrow a = -b}$$

Assim: $P(-2, 2) \in b_p$



SIMETRIAS NO SISTEMA CARTESIANO

Consideramos dois tipos de simetria no sistema cartesiano:

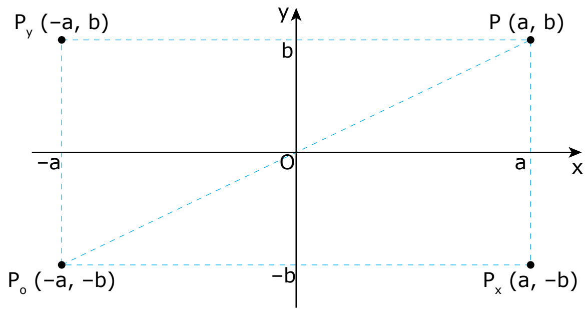
- Simetria central: transformação de reflexão de um objeto (ponto ou figura) em relação a um ponto.
- Simetria axial: transformação de reflexão de um objeto (ponto ou figura) em relação a uma reta.

Em relação a um ponto P(a, b), seus principais pontos simétricos são:

P_o: simétrico em relação à origem

P_x: simétrico em relação ao eixo x

P_y: simétrico em relação ao eixo y



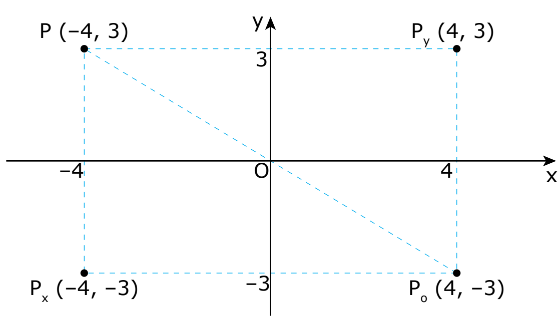
OBSERVAÇÕES

i) Note que, na representação gráfica, tomamos $P \in 1^o$ quadrante.

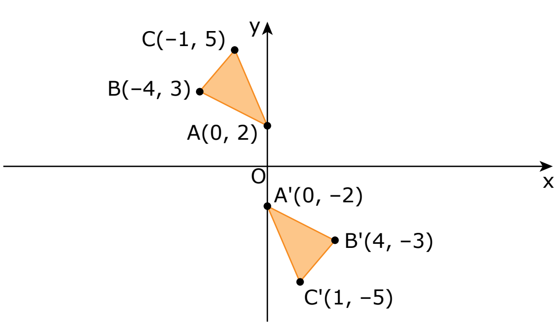
ii) Note que o simétrico de **P** em relação à origem é tal que: O(0, 0) é o ponto médio do segmento $\overline{PP_o}$.

Exemplos:

1º) Os principais pontos simétricos de P(–4, 3) são:



2º) O triângulo simétrico ao triângulo ABC em relação à origem é:



PONTO MÉDIO

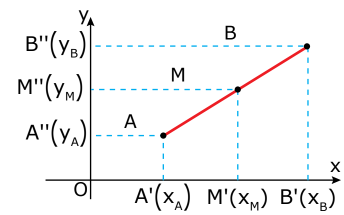
Considerem-se os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Sendo $M(x_M, y_M)$ o ponto médio de $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$), tem-se:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Ou seja, o ponto **M** é dado por:

$$\boxed{M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)}$$

Demonstração:



Se **M** é ponto médio de $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$), pelo Teorema de Tales, para o eixo x, pode-se escrever:

$$A'M' = M'B' \Rightarrow x_M - x_A = x_B - x_M \Rightarrow$$

$$2.x_M = x_A + x_B \Rightarrow x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Analogamente, para o eixo y, tem-se: $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Portanto, as coordenadas do ponto médio **M** do segmento $\overline{AB}$ (ou $\overline{BA}$) são, respectivamente, as médias aritméticas das abscissas de **A** e **B** e das ordenadas de **A** e **B**.

BARICENTRO DE UM TRIÂNGULO

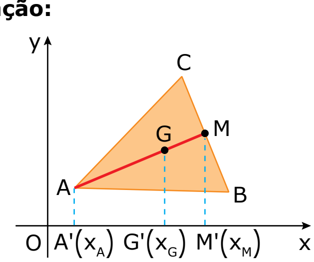
Seja o triângulo ABC de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$. O baricentro (ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC tem coordenadas:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \text{ e } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Ou seja, o ponto **G** é dado por:

$$\boxed{G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)}$$

Demonstração:



MATEMÁTICA

Considerando a mediana $\overline{AM}$, o baricentro **G** é tal que:

$$AG = 2.GM$$

Pelo Teorema de Tales, para o eixo x, podemos escrever:

$$\boxed{A'G' = 2.G'M'}$$

$$x_G - x_A = 2(x_M - x_G) \Rightarrow 3.x_G = x_A + 2.x_M$$

E, como $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}$, tem-se:

$$3.x_G = x_A + 2\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right) \Rightarrow x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

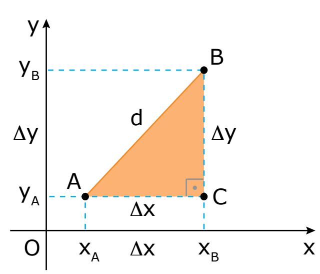
Analogamente, para o eixo y, tem-se:

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

Considerem-se dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, tais que o segmento $\overline{AB}$ não seja paralelo a algum dos eixos coordenados.

Traçando-se por **A** e **B** as retas paralelas aos eixos coordenados que se interceptam em **C**, tem-se o triângulo ACB, retângulo em **C**.



A distância entre os pontos **A** e **B** que se indica por **d** é tal que:

$$\boxed{d = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}$$

OBSERVAÇÕES

i) Como $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$, a ordem escolhida para a diferença das abscissas não altera o cálculo de **d**. O mesmo ocorre com a diferença das ordenadas.

ii) A fórmula para o cálculo da distância continua válida se o segmento $\overline{AB}$ é paralelo a um dos eixos, ou, ainda, se os pontos **A** e **B** coincidem, caso em que d = 0.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (EEAR–2016) Considere os pontos A(2, 8) e B(8, 0). A distância entre eles é de:

A) $\sqrt{14}$
B) $3\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{7}$
D) 10

02. (UFPI) A medida do perímetro do triângulo cujos vértices são os pontos (1, 1), (1, 3) e (2, 3) é:

A) $3 + \sqrt{5}$
B) $3 + 2\sqrt{5}$
C) $3 + 3\sqrt{5}$
D) $3 + 4\sqrt{5}$
E) $3 + 5\sqrt{5}$

03. (EEAR–2017) Seja ABC um triângulo tal que A(1, 1), B(3, –1) e C(5, 3). O ponto _____ é o baricentro desse triângulo.

A) (2, 1)
B) (3, 3)
C) (1, 3)
D) (3, 1)

04. (UNIFESP) Um ponto do plano cartesiano é representado pelas coordenadas (x + 3y, –x – y) e também por (4 + y, 2x + y), em relação a um mesmo sistema de coordenadas. Nestas condições, x^y é igual a:

A) –8.
B) –6.
C) 1.
D) 8.
E) 9.

05. (CEFET-MG) Os pontos A(–5, 2) e C(3, –4) são extremidades de uma diagonal de um quadrado. O perímetro desse quadrado é:

A) $18\sqrt{2}$
B) $20\sqrt{2}$
C) $24\sqrt{2}$
D) $28\sqrt{2}$

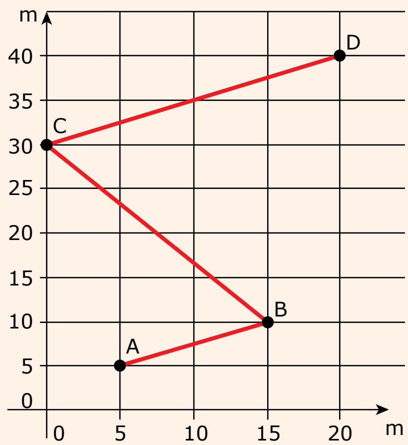
06. (UFRGS-RS) Sendo os pontos A = (–1, 5) e B = (2, 1) vértices consecutivos de um quadrado, o comprimento da diagonal desse quadrado é:

A) 2
B) $2\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}$
D) 5
E) $5\sqrt{2}$

07. (PUC Rio) Se os pontos A(–1, 0), B(1, 0) e C(x, y) são vértices de um triângulo equilátero, então a distância entre **A** e **C** é:

A) 1
B) 2
C) 4
D) $\sqrt{2}$
E) $\sqrt{3}$

08. (IFSC–2016) O plano cartesiano representado a seguir mostra o deslocamento de uma pessoa por 4 pontos diferentes, no interior do pavilhão da Oktoberfest. Considere que essa pessoa partiu do ponto **A** e formou, com seu trajeto, segmentos de reta entre os pontos consecutivos **A**, **B**, **C** e **D**, nessa ordem. Em uma escala em metros, é correto afirmar que ela se deslocou



A) $5(3\sqrt{5} + 5)$ m.

B) $(3\sqrt{5} + 5)$ m.

C) 53 m.

D) $2(3\sqrt{2} + 7)$ m.

E) $4(3\sqrt{5} + 5)$ m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (EEAR–2017) O triângulo ABC formado pelos pontos A(7, 3), B(–4, 3) e C(–4, –2) é

A) escaleno.

B) isósceles.

C) equiângulo.

D) obtusângulo

02. (Cesgranrio) Os pontos **M**, **N**, **P** e **Q** do $\mathbb{R}^2$ são os vértices de um paralelogramo situado no primeiro quadrante. Se M(3, 5), N(1, 2) e P(5, 1), então o vértice **Q** é:

A) (7, 4)

B) (6, 5)

C) (9, 8)

D) (8, 6)

E) (6, 3)

03. (FGV) No plano cartesiano, M(3, 3), N(7, 3) e P(4, 0) são os pontos médios respectivamente dos lados AB, BC, e AC de um triângulo ABC. A abscissa do vértice **C** é:

A) 6.

B) 7.

C) 8.

D) 9.

E) 0.

04. (PUC Minas) Os catetos AC e AB de um triângulo retângulo estão sobre os eixos de um sistema cartesiano. Se M = (–1, 3) for o ponto médio da hipotenusa BC, é correto afirmar que a soma das coordenadas dos vértices desse triângulo é igual a:

A) –4.

B) –1.

C) 1.

D) 4.

05. (PUC Minas–2015) Quando representamos no sistema de coordenadas xOy, o ponto **B** é o simétrico do ponto A(–3, 2) em relação à origem **O**; por sua vez, o ponto **C** é o simétrico de **B** em relação ao eixo x. Com base nessas informações, é correto afirmar que a medida de área do triângulo ABC é igual a:

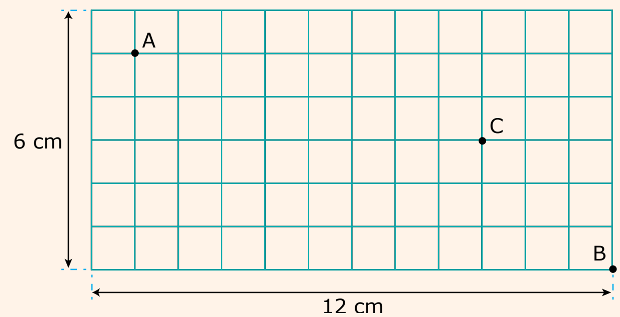
A) 8.

B) 9.

C) 10.

D) 12.

06. (Mackenzie-SP) Na representação em escala, os quadrados são iguais e cada centímetro representa 100 km. Um avião sai da cidade **A**, faz escala na cidade **C**, chegando à cidade **B**, conforme a figura.



Entre as alternativas dadas, identifique aquela em que consta o valor mais próximo da distância percorrida pelo avião, de **A** até **B**, passando por **C**.

A) 1 000 km.

B) 950 km.

C) 1 150 km .

D) 1 400 km.

E) 1 250 km.

07. (FGV) No plano cartesiano, o triângulo de vértices A(1, –2), B(m, 4) e C(0, 6) é retângulo em **A**. O valor de **m** é igual a:

A) 47.

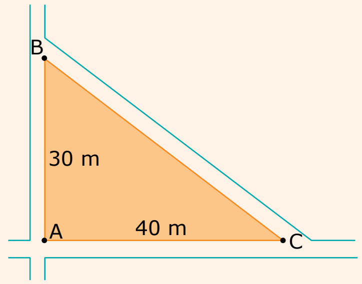
B) 48.

C) 49.

D) 50.

E) 51.

08. (ESPM-SP) A figura a seguir representa uma praça de forma triangular, em que o ângulo $\hat{A}$ é reto.

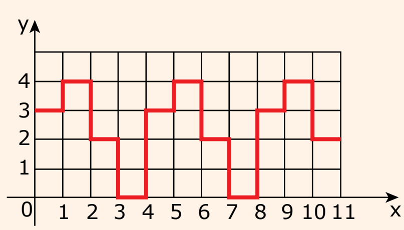


Duas pessoas percorrem o contorno da praça a partir do ponto **A**, mas em sentidos contrários, até se encontrarem num ponto **P** do lado BC. Sabendo-se que elas percorreram distâncias iguais, podemos concluir que a distância do ponto **P** ao ponto **A** em linha reta é de, aproximadamente:

Adote $\sqrt{5} \cong 2{,}25$.

A) 22 m.
B) 25 m.
C) 27 m.
D) 30 m.
E) 32 m.

09. (Fatec-SP) No plano cartesiano da figura, considere que as escalas nos dois eixos coordenados são iguais e que a unidade de medida linear é 1 cm. Nele, está representada parte de uma linha poligonal que começa no ponto P(0, 3) e, mantendo-se o mesmo padrão, termina em um ponto **Q**.



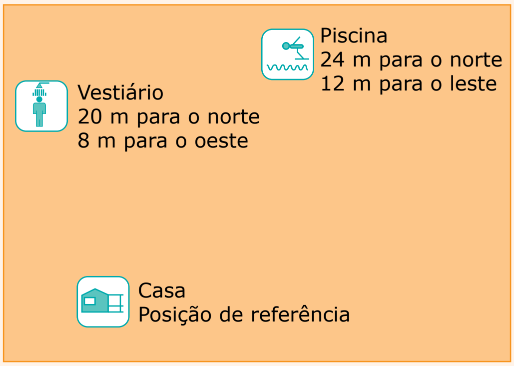
Na figura, a linha poligonal é formada por segmentos de reta

- que são paralelos aos eixos coordenados e
- cujas extremidades têm coordenadas inteiras não negativas.

Sabendo que o comprimento da linha poligonal, do ponto **P** até o ponto **Q**, é igual a 94 cm, as coordenadas do ponto **Q** são:

A) (25, 2).
B) (28, 1).
C) (32, 1).
D) (33, 1).
E) (34, 2).

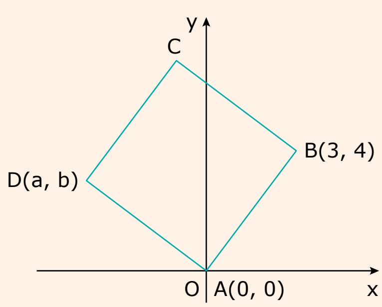
10. (Insper-SP–2015) O Sr. Antônio resolveu construir um poço em seu sítio. Ele passou ao engenheiro o esquema a seguir, indicando a posição da piscina e do vestiário em relação à localização da casa.



O Sr. Antônio disse ao engenheiro que queria o poço numa localização que estivesse à mesma distância da casa, da piscina e do vestiário. Para atendê-lo o engenheiro deve construir o poço na posição, em relação à casa, dada por, aproximadamente,

A) 4,2 m para o leste e 13,8 m para o norte.
B) 3,8 m para o oeste e 13,1 m para o norte.
C) 3,8 m para o leste e 13,1 m para o norte.
D) 3,4 m para o oeste e 12,5 m para o norte.
E) 3,4 m para o leste e 12,5 m para o norte.

11. (UFMG) Nesta figura, está representado um quadrado de vértices ABCD.



Sabe-se que as coordenadas cartesianas dos pontos **A** e **B** são A(0, 0) e B(3, 4). Então, é correto afirmar que o resultado da soma das coordenadas do vértice **D** é:

A) –2.
B) –1.
C) $-\frac{1}{2}$.
D) $-\frac{3}{2}$.

12. (Unesp) Dado um sistema de coordenadas cartesianas no plano, considere os pontos A(2, 2), B(4, –1) e C(m, 0). Para que AC + CB seja mínimo, o valor de **m** deve ser:

A) $\frac{7}{3}$.
B) $\frac{8}{3}$.
C) $\frac{10}{3}$.
D) 3,5.
E) $\frac{11}{3}$.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

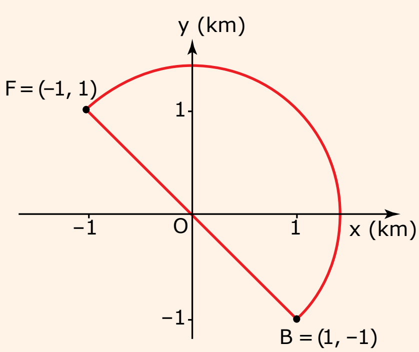
01. (Enem–2017) Foi utilizado o plano cartesiano para a representação de um pavimento de lojas. A loja **A** está localizada no ponto A(1, 2). No ponto médio entre a loja **A** e a loja **B** está o sanitário **S**, localizado no ponto S(5, 10).

Determine as coordenadas do ponto de localização da loja **B**.

A) (–3, –6)
B) (–6, –3)
C) (3, 6)
D) (9, 18)
E) (18, 9)

02. (Enem–2016) Em uma cidade será construída uma galeria subterrânea que receberá uma rede de canos para o transporte de água de uma fonte (**F**) até o reservatório de um novo bairro (**B**).

Após avaliações, foram apresentados dois projetos para o trajeto de construção da galeria: um segmento de reta que atravessaria outros bairros ou uma semicircunferência Que contornaria esses bairros, conforme ilustrado no sistema de coordenadas xOy da figura, em que a unidade de medida nos eixos é o quilômetro.



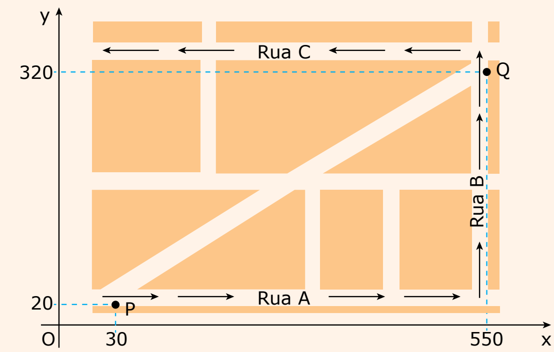
Estudos de viabilidade técnica mostraram que, pelas características do solo, a construção de 1 m de galeria via segmento de reta demora 1,0 h, enquanto que 1 m de construção de galeria via semicircunferência demora 0,6 h. Há urgência em disponibilizar água para esse bairro.

Use 3 como aproximação para π e 1,4 como aproximação para $\sqrt{2}$.

O menor tempo possível, em hora, para conclusão da construção da galeria, para atender às necessidades de água do bairro, é de:

A) 1 260.
B) 2 520.
C) 2 800.
D) 3 600.
E) 4 000.

03. (Enem–2015) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por **P** e **Q**.



Os estudos indicam que o novo ponto **T** deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes **P** e **Q**, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos **P** e **T** e entre os pontos **T** e **Q** sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são:

A) (290, 20)
B) (410, 0)
C) (410, 20)
D) (440, 0)
E) (440, 20)

04. (Enem) Um programa de edição de imagens possibilita transformar figuras em outras mais complexas. Deseja-se construir uma nova figura a partir da original. A nova figura deve apresentar simetria em relação ao ponto **O**.

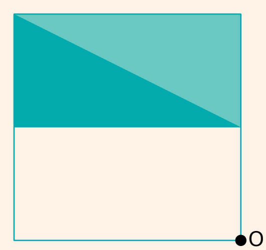
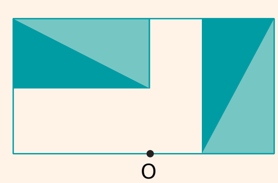
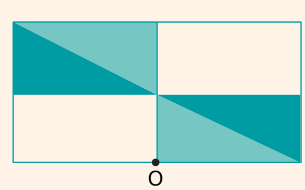
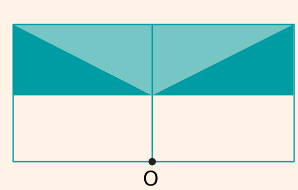


Figura original

A imagem que representa a nova figura é:

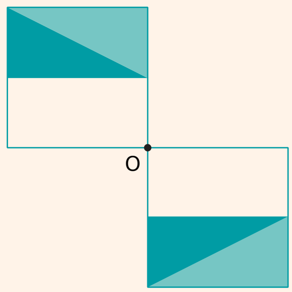
A) 

B) 

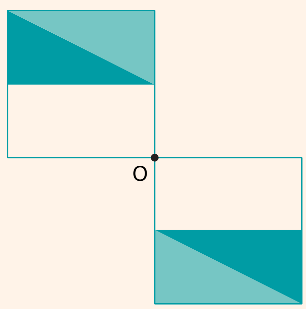
C) 

MATEMÁTICA

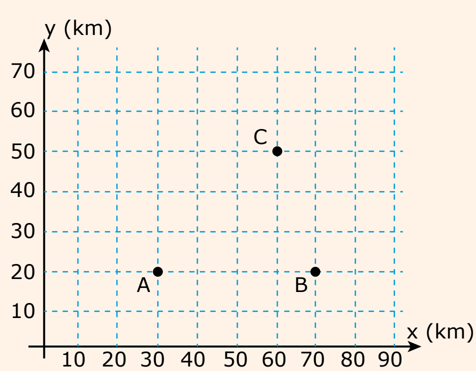
D)



E)



05. (Enem) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas **A**, **B** e **C**, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

A) (65, 35).

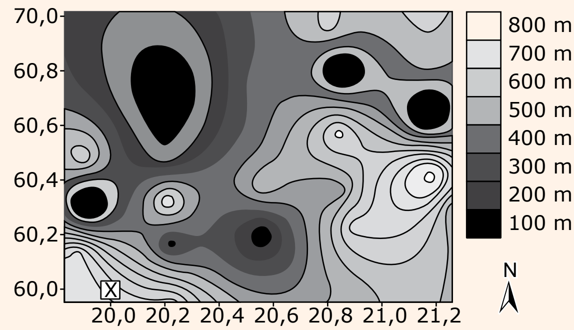
B) (53, 30).

C) (45, 35).

D) (50, 20).

E) (50, 30).

06. (Enem) A figura a seguir é a representação de uma região por meio de curvas de nível, que são curvas fechadas representando a altitude da região, com relação ao nível do mar. As coordenadas estão expressas em graus de acordo com a longitude, no eixo horizontal, e a latitude, no eixo vertical. A escala em tons de cinza desenhada à direita está associada à altitude da região.



Um pequeno helicóptero usado para reconhecimento sobrevoa a região a partir do ponto X = (20, 60). O helicóptero segue o percurso:

0,8° L → 0,5° N → 0,2° O → 0,1° S → 0,4° N → 0,3° L

Ao final, desce verticalmente até pousar no solo.

De acordo com as orientações, o helicóptero pousou em um local cuja altitude é

A) menor ou igual a 200 m.

B) maior que 200 m e menor ou igual a 400 m.

C) maior que 400 m e menor ou igual a 600 m.

D) maior que 600 m e menor ou igual a 800 m.

E) maior que 800 m.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. D	03. D	05. B	07. B
02. A	04. A	06. E	08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. A	04. D	07. C	10. C
02. A	05. D	08. C	11. B
03. C	06. E	09. C	12. C

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. D	03. E	05. E
02. B	04. E	06. A

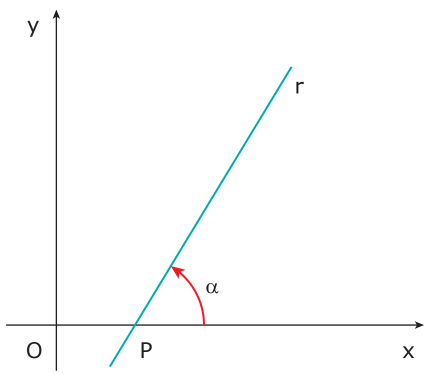
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Estudo Analítico da Reta

INCLINAÇÃO DE UMA RETA

Considere, no plano cartesiano, uma reta **r** concorrente com o eixo x no ponto **P**.

Chama-se inclinação de **r** a medida do ângulo α que **r** forma com o eixo Ox, sendo esse ângulo medido a partir do eixo x no sentido anti-horário.



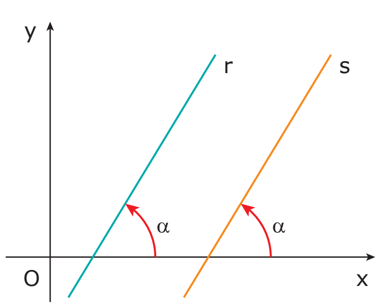
COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA

Considerando-se uma reta **r** não perpendicular ao eixo x (não vertical), ou seja, tal que $\alpha \neq 90°$, chama-se coeficiente angular (ou declividade) da reta **r** o número **m**, tal que $m = \text{tg}\ \alpha$.

OBSERVAÇÕES

i) A inclinação **m** de uma reta é tal que $0° \leq \alpha < 180°$.

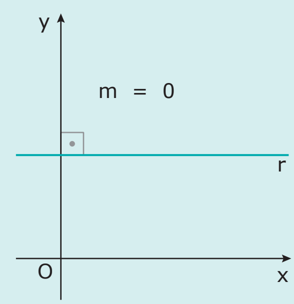
ii) No plano cartesiano, duas retas paralelas têm a mesma inclinação.



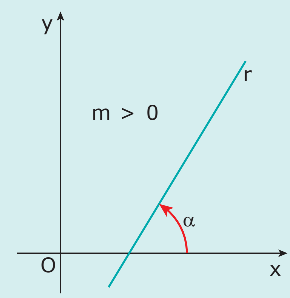
iii) Se $\alpha = 90°$, então a reta não tem coeficiente angular.

Assim, tem-se:

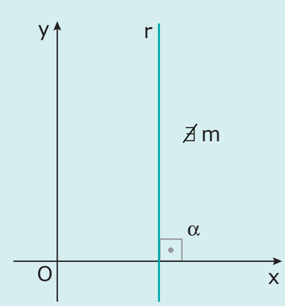
α = 0° (nulo)



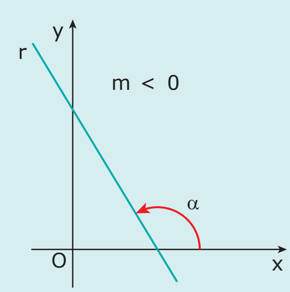
0° < α < 90° (agudo)



α = 90° (reto)



90° < α < 180° (obtuso)



Isto é:

i) Se $\alpha = 0°$, então $m = 0$.

ii) Se $\alpha = 90°$, então não existe **m**.

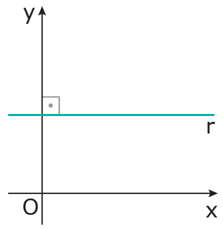
iii) Se $0 < \alpha < 90°$, então $m > 0$.

iv) Se $90° < \alpha < 180°$, então $m < 0$.

Exemplo:

Dar os coeficientes angulares das retas **r**, **s**, **t** e **u**.

A)

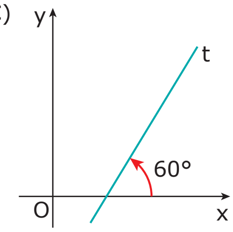


$\alpha_r = 0° \Rightarrow$

$m_r = \text{tg } 0° \Rightarrow$

$m_r = 0$

C)

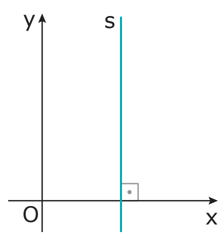


$\alpha_t = 60° \Rightarrow$

$m_t = \text{tg } 60° \Rightarrow$

$m_t = \sqrt{3}$

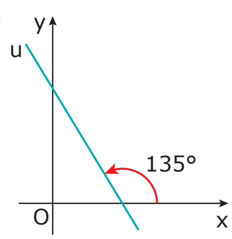
B)



$\alpha_s = 90° \Rightarrow$

Não existe m_s.

D)



$\alpha_u = 135° \Rightarrow$

$m_u = \text{tg } 135° \Rightarrow$

$m_u = -1$

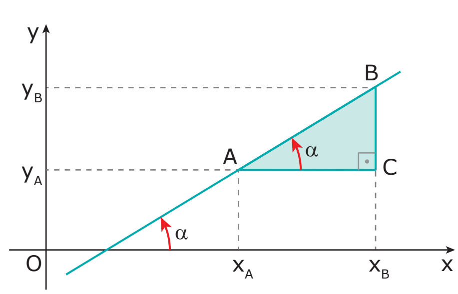
COEFICIENTE ANGULAR DE UMA RETA QUE PASSA POR DOIS PONTOS DADOS

Considerem-se dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, tais que $x_A \neq x_B$ e $y_A \neq y_B$, isto é, a reta AB não é paralela aos eixos coordenados. Há dois casos a se considerar:

1º caso: $\alpha < 90°$

Do triângulo ABC, tem-se:

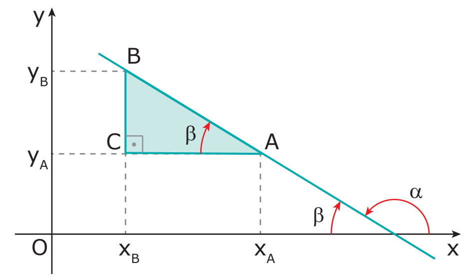
$$m = \text{tg } \alpha = \frac{CB}{CA} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



2º caso: $\alpha > 90°$

Do triângulo ABC, tem-se:

$$\text{tg } \beta = \frac{CB}{CA} = \frac{y_B - y_A}{x_A - x_B}$$



Como $\alpha + \beta = 180°$, tem-se $\text{tg } \alpha = -\text{tg } \beta$.

Logo: $m = \text{tg } \alpha = -\dfrac{y_B - y_A}{x_A - x_B} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Portanto, para os dois casos, tem-se:

$$\boxed{m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

OBSERVAÇÕES

i) Se a reta AB é paralela ao eixo x $(y_A = y_B \text{ e } x_A \neq x_B)$, tem-se $m = 0$, e a fórmula continua válida.

ii) Se a reta AB é perpendicular ao eixo x $(x_A = x_B \text{ e } y_A \neq y_B)$, não existe **m**, pois $x_B - x_A = 0$.

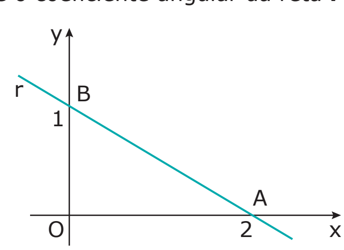
Exemplos:

1º) Qual é o coeficiente angular das retas que passam nos seguintes pontos?

A) $\left.\begin{matrix} A(2, 1) \\ B(4, 9) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{9-1}{4-2} \Rightarrow m_{AB} = 4$

B) $\left.\begin{matrix} A(-1, 2) \\ B(0, 5) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-2}{0-(-1)} \Rightarrow m_{AB} = 3$

2º) Qual é o coeficiente angular da reta **r** na figura?



Temos: A(2, 0) e B(0, 1)

$$m = m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-0}{0-2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

EQUAÇÃO FUNDAMENTAL DE UMA RETA

No plano cartesiano, uma reta fica determinada por um dos dois modos:

1º modo: Conhecendo-se um de seus pontos e sua declividade, que é dada pela inclinação da reta (coeficiente angular).

2º modo: Conhecendo-se dois pontos distintos que pertencem a ela.

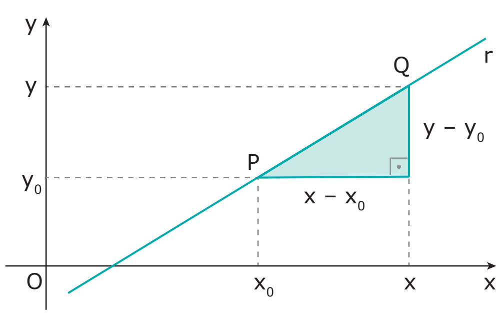
Vejamos, então, como se obtém a equação de uma reta.

1º modo: Temos dois casos a considerar:

i) A reta tem coeficiente angular.

Obter uma equação da reta **r**, que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m**.

Sendo Q(x, y) um ponto genérico de **r**, distinto de **P**, então o coeficiente angular **m** da reta pode ser calculado com base em **P** e **Q**.



$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad \text{(I)}$$

A relação (I) entre as coordenadas dos pontos **P** e **Q** pode ser escrita na forma:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad \text{(II)}$$

Note que, se P = Q, então $x = x_0$ e $y = y_0$, e a relação (II) continua verdadeira, pois $y_0 - y_0 = m(x_0 - x_0)$.

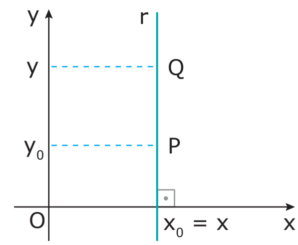
Assim:

A equação fundamental da reta que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular **m** é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ii) A reta não tem coeficiente angular.

Obter uma equação da reta **r** que passa pelo ponto $P(x_0, y_0)$ e tem inclinação 90° (reta vertical).

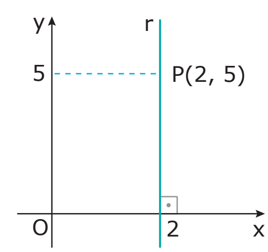


Sendo **r** uma reta vertical e Q(x, y) um ponto genérico de **r**, tem-se:

$$\boxed{x = x_0}$$

Exemplo:

Escrever uma equação da reta que passa pelo ponto P(2, 5) e é perpendicular ao eixo x.



$x = x_0$, isto é, $x = 2$, ou seja, $x - 2 = 0$.

2º modo: Obter uma equação da reta que passa por dois pontos distintos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$.

Procede-se da seguinte maneira:

1º passo: Calcula-se o coeficiente angular **m** da reta AB.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

2º passo: Com o coeficiente angular **m** e qualquer um dos dois pontos dados, recai-se no 1º modo.

Assim, tomando-se o ponto **A**, tem-se:

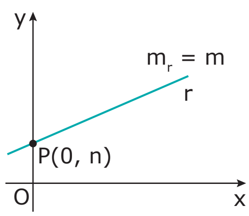
$$\boxed{y - y_A = m(x - x_A)}$$

Esta é a equação fundamental da reta que passa pelos pontos **A** e **B**.

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DE UMA RETA

Equação reduzida

Considere-se a reta **r** que passa pelo ponto P(0, n) e tem coeficiente angular **m**.



Sua equação fundamental é:

$$y - n = m(x - 0)$$

Segue-se que:

$$\boxed{y = mx + n}$$

Esta é chamada de equação reduzida da reta.

OBSERVAÇÕES

i) A equação reduzida de uma reta fornece diretamente o coeficiente angular **m** e a ordenada **n** do ponto onde esta reta intercepta o eixo y.

ii) As retas de inclinação igual a 90° não possuem equação reduzida.

Equação geral

No plano cartesiano, toda equação de uma reta pode ser escrita na forma $ax + by + c = 0$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. De fato:

Sendo $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos distintos, e $x_A \neq x_B$, temos:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

A equação fundamental da reta que passa por **A** e **B** é:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) \Rightarrow$$

$$(y - y_A)(x_B - x_A) = (y_B - y_A)(x - x_A) \Rightarrow$$

$$yx_B - yx_A - y_Ax_B + y_Ax_A = y_Bx - y_Bx_A - y_Ax + y_Ax_A \Rightarrow$$

$$(y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y + y_Bx_A - y_Ax_B = 0$$

Fazendo $y_A - y_B = a$, $x_B - x_A = b$ e $y_Bx_A - y_Ax_B = c$, a equação fica:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

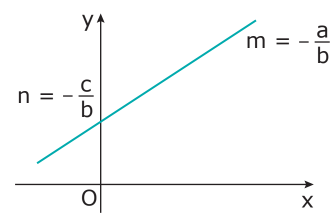
E, se $x_A = x_B$, a equação fica $ax + 0y + c = 0$, que é a equação de uma reta paralela ao eixo y.

Reciprocamente, no plano cartesiano, a equação $ax + by + c = 0$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ representa uma reta. De fato:

Se $b \neq 0$, tem-se:

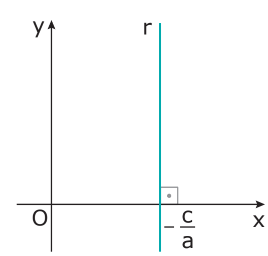
$$by = -ax - c \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

Comparando-se com a equação reduzida $y = mx + n$, tem-se:



$$m = -\frac{a}{b} \text{ e } n = -\frac{c}{b}$$

Se $b = 0$, tem-se $ax + c = 0$, ou seja, $x = -\frac{c}{a}$.



A reta é perpendicular ao eixo x.

A equação na forma

$$\boxed{ax + by + c = 0, \text{ com } a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0}$$

é chamada de equação geral da reta.

OBSERVAÇÕES

i) Se $c = 0$, a equação fica $ax + by = 0$, e a reta passa pela origem (0, 0). De fato: $a.0 + b.0 = 0$

Assim, por exemplo, a reta r: $2x + 3y = 0$ passa pela origem.

ii) Se a = 0, a equação fica by + c = 0, e a reta é paralela ao eixo x. De fato: $by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{b}$.

Assim, por exemplo, a reta r: 2y + 5 = 0 é paralela ao eixo x.

iii) Se b = 0, a equação fica ax + c = 0, e a reta é paralela ao eixo y. De fato: $ax + c = 0 \Rightarrow x = -\frac{c}{a}$.

Assim, por exemplo, a reta r: 2x − 7 = 0 é paralela ao eixo y.

iv) Toda reta do plano cartesiano possui infinitas equações na forma geral. Assim, se ax + by + c = 0 é a equação de uma reta, então a equação $k(ax + by + c) = 0$, $k \neq 0$, representa a mesma reta, pois são equações equivalentes, isto é, possuem as mesmas soluções.

Assim, por exemplo, x + 2y + 3 = 0 e 3(x + 2y + 3) = 0 representam a mesma reta.

Interseção de retas

Para obter o ponto de interseção entre duas retas concorrentes, basta resolvermos o sistema formado por suas equações gerais ou reduzidas.

Exemplos:

1º) Achar o ponto de interseção entre as retas:

$y = 2x - 5$ e $y = -x + 4$

Temos que:

$2x - 5 = -x + 4$

$x = 3 \Rightarrow y = 1$

Logo, o ponto de interseção é P(3, 1).

2º) Achar o ponto de interseção entre as retas:

$2x + y - 3 = 0$ e $3x - y - 7 = 0$

Temos que:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ \quad + \\ 3x - y = 7 \end{cases}$$

$5x = 10$

$x = 2 \Rightarrow y = -1$

Logo, o ponto de interseção é P(2, −1).

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (EEAR–2016) A equação reduzida da reta que passa pelos pontos A(0, 1) e B(6, 8) é dada por:

A) y = 7x + 1

B) y = 6x + 1

C) $\sqrt{5} \cong 2{,}2$.

D)

02. (IMED-SP–2016) Dadas as equações das retas (r): x − 2y − 10 = 0 e (s): 3x + 2y − 6 = 0 representadas no mesmo sistema de coordenadas cartesianas, pode-se afirmar que a abscissa do ponto de interseção entre as retas **r** e **s** é:

A) −3.

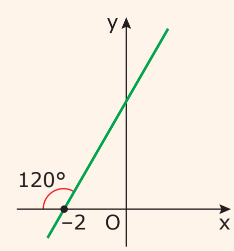
B) −2.

C) 2.

D) 4.

E) 6.

03. (UNIRIO-RJ)



A equação reduzida da reta representada anteriormente é:

A) $3x - \sqrt{3}y + 6 = 0$

B) $3x + \sqrt{3}y + 6 = 0$

C) $\sqrt{3}x - y - 2 = 0$

D) $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

E) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2)$

04. (IFSul–2016) Considerando as retas y = 5x + 12 e y = ax + 4 que se interceptam no ponto A(−1, b) os valores de **a** e **b** são, respectivamente:

A) −5 e 1.

B) −3 e 7.

C) −1 e 7.

D) 4 e 8.

05. (PUC Minas–2016) No final do ano de 2005, o número de casos de dengue registrados em certa cidade era de 400 e, no final de 2013, esse número passou para 560. Admitindo-se que o gráfico do número de casos registrados em função do tempo seja formado por pontos situados em uma mesma reta, é correto afirmar que, no final de 2015, o número de casos de dengue registrados será igual a:

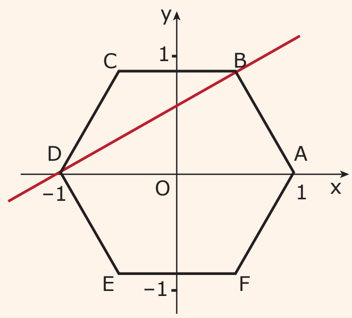
A) 580.

B) 590.

C) 600.

D) 610.

06. (UFRGS-RS–2017) Os pontos A, B, C, D, E e F determinam um hexágono regular ABCDEF de lado 1, tal que o ponto A tem coordenadas (1, 0) e o ponto D tem coordenadas (–1, 0), como na figura a seguir.



A equação da reta que passa pelos pontos B e D é:

A) $y = \sqrt{3}x$

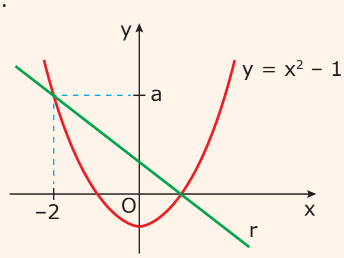
B) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$

C) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$

E) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}$

07. (UFMG) Observe os gráficos da reta **r** e da função quadrática.



A equação da reta **r** é:

A) $x - 2y - 2 = 0$

B) $-2x + y + 1 = 0$

C) $x + y - 2 = 0$

D) $x + y + 1 = 0$

E) $x + y - 1 = 0$

08. (UFSJ-MG) Dados o ponto P(–1, 2) e as retas r: $2x - 5y + 7 = 0$ e s: $2x + y + 7 = 0$, é correto afirmar que:

A) o ponto de interseção das duas retas tem coordenadas $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$.

B) o ponto **P** pertence à reta **r**.

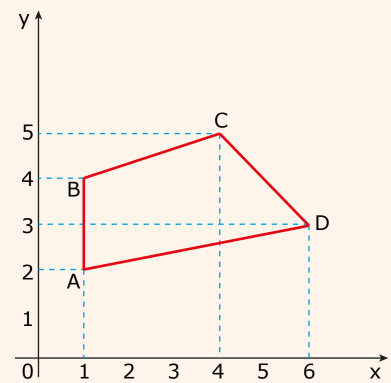
C) as retas **r** e **s** são paralelas.

D) as retas **r** e **s** não têm ponto comum.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC RS–2016) O polígono ABCD, na figura a seguir, indica o trajeto de uma maratona realizada em uma cidade, sendo que as coordenadas estão representadas no sistema de eixos cartesianos abaixo. A reta que passa pelos pontos **A** e **C**, vértices desse polígono, possui coeficiente linear igual a:



A) 0.

B) $\frac{2}{3}$.

C) $\frac{3}{4}$.

D) $\frac{4}{5}$.

E) 1.

02. (Unicamp-SP) No plano cartesiano, a reta de equação $2x - 3y = 12$ intercepta os eixos coordenados nos pontos **A** e **B**. O ponto médio do segmento AB tem coordenadas:

A) $\left(4, \frac{4}{3}\right)$

B) (3, 2)

C) $\left(4, -\frac{4}{3}\right)$

D) (3, –2)

03. (UPE) No plano cartesiano, as interseções das retas de equações $x - y + 2 = 0$; $y = 4$; $y + x = -4$ determinam um triângulo, cujos vértices são pontos de coordenadas:

A) (2, 4); (–4, 4); (2, –4)

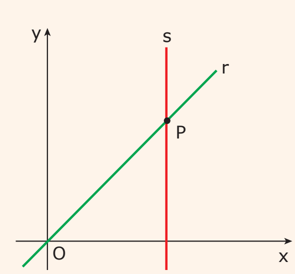
B) (–2, 4); (–4, 4); (-2, –4)

C) (–2, –4); (8, –4); (3, 1)

D) (4, 2); (4, –8); (–1, –3)

E) (2, 4); (–8, 4); (–3, –1)

04. (UFF-RJ) Na figura a seguir, estão representadas as retas **r** e **s**.



Sabendo que a equação da reta **s** é x = 3 e que $d_{OP} = 5$, a equação de **r** é:

A) $y = \frac{3}{4}x$

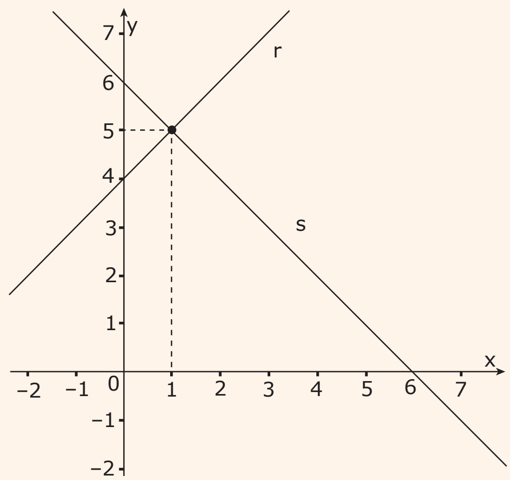
B) $y = \frac{4}{3}x$

C) $y = \frac{5}{3}x$

D) y = 3x

E) y = 5x

05. (UFRGS-RS–2018) A representação geométrica das retas **r** e **s** encontra-se desenhada no sistema de coordenadas cartesianas na imagem a seguir:



Assinale a alternativa que apresenta o sistema de equações lineares que pode representar as retas **r** e **s** da imagem anterior.

A) $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 5x + 5y = 1 \end{cases}$

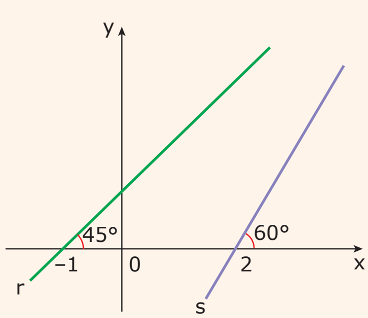
B) $\begin{cases} -x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$

C) $\begin{cases} -x + y = 4 \\ x + y = 6 \end{cases}$

D) $\begin{cases} -x - 2y = 3 \\ x + y = 6 \end{cases}$

E) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$

06. (Unifor-CE) Sejam as retas **r** e **s** representadas na figura a seguir:



A abscissa do ponto de interseção de **r** e **s** é:

A) $\frac{-3\sqrt{3} - 5}{2}$

B) $\frac{3\sqrt{3} + 7}{2}$

C) $\frac{3\sqrt{3} - 7}{2}$

D) $\frac{3\sqrt{3} + 5}{2}$

E) $\frac{3\sqrt{3} - 5}{2}$

07. (UECE) Seja **r** a reta que passa pelos pontos $P_1(-2, 1)$ e $P_2(5, 3)$. Se **r** intercepta os eixos coordenados nos pontos M(m, 0) e N(0, n), então o valor de $\frac{14}{11}(n - m)$ é:

A) 6.

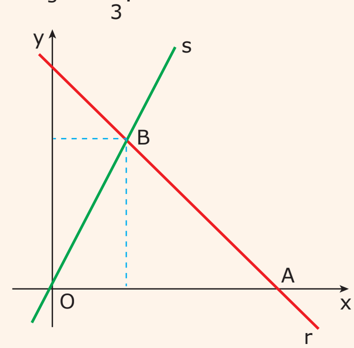
B) 7.

C) 8.

D) 9.

E) 1.

08. (Fatec-SP) Na figura a seguir, a reta **r** tem equação x + 3y − 6 = 0, e a reta **s** passa pela origem e tem coeficiente angular $\frac{2}{3}$.



A área do triângulo OAB, em unidades de área, é igual a:

A) 1.

B) 2.

C) 3.

D) 4.

E) 5.

09. (PUC Minas) O triângulo ABC tem seus lados apoiados sobre as retas x − 1 = 0, x − y = 0 e x + y − 4 = 0. Nessas condições, pode-se afirmar que ABC é um triângulo:

A) escaleno.

B) equilátero.

C) obtusângulo.

D) retângulo.

10. (UFMA) A soma dos coeficientes linear e angular da reta que passa pelos pontos A(0, k) e B(k, 0), sendo $k \neq 0$, vale:

A) k − 1

B) −k − 1

C) k + 1

D) k

E) $\frac{1}{k} + 1$

11. (Insper) No plano cartesiano, a reta **r**, de coeficiente angular 10, intercepta o eixo y em um ponto de ordenada **a**. Já a reta **s**, de coeficiente angular 9, intercepta o eixo y em um ponto de ordenada **b**. Se as retas **r** e **s** interceptam-se em um ponto de abscissa 6, então:

A) b = a

B) b = a − 9

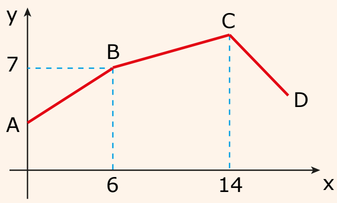
C) b = a − 6

D) b = a + 9

E) b = a + 6

MATEMÁTICA

12. (ESPM-SP–2015) O gráfico a seguir é formado por 3 segmentos de retas consecutivos.



Sabe-se que:

I. A reta que contém o segmento AB tem coeficiente linear igual a 4.

II. O coeficiente angular do segmento BC vale metade do coeficiente angular do segmento AB.

III. A ordenada do ponto **D** é $\frac{2}{3}$ da ordenada do ponto **C**.

IV. O coeficiente angular do segmento CD é igual a −1.

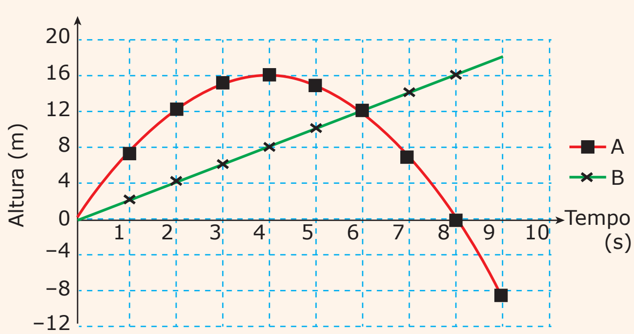
Podemos concluir que a abscissa do ponto **D** vale:

A) 17.
B) 19.
C) 15.
D) 18.
E) 16.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2016) Para uma feira de ciências, dois projéteis de foguetes, **A** e **B**, estão sendo construídos para serem lançados. O planejamento é que eles sejam lançados juntos, com o objetivo de o projétil **B** interceptar o **A** quando esse alcançar sua altura máxima. Para que isso aconteça, um dos projéteis descreverá uma trajetória parabólica, enquanto o outro irá descrever uma trajetória supostamente retilínea. O gráfico mostra as alturas alcançadas por esses projéteis em função do tempo, nas simulações realizadas.

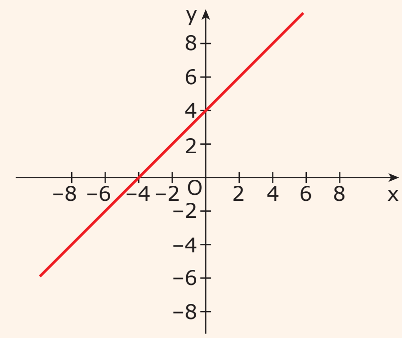


Com base nessas simulações, observou-se que a trajetória do projétil **B** deveria ser alterada para que o objetivo fosse alcançado.

Para alcançar o objetivo, o coeficiente angular da reta que representa a trajetória de **B** deverá

A) diminuir em 2 unidades.
B) diminuir em 4 unidades.
C) aumentar em 2 unidades.
D) aumentar em 4 unidades.
E) aumentar em 8 unidades.

02. (Enem) Um bairro de uma cidade foi planejado em uma região plana, com ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho. No plano de coordenadas cartesianas seguinte, esse bairro localiza-se no segundo quadrante, e as distâncias nos eixos são dadas em quilômetros.



A reta da equação y = x + 4 representa o planejamento do percurso da linha do metrô subterrâneo que atravessará o bairro e outras regiões da cidade. No ponto P(−5, 5), localiza-se um hospital público. A comunidade solicitou ao comitê de planejamento que fosse prevista uma estação do metrô de modo que sua distância ao hospital, medida em linha reta, não fosse maior que 5 km. Atendendo ao pedido da comunidade, o comitê argumentou corretamente que isso seria automaticamente satisfeito, pois já estava prevista a construção de uma estação no ponto:

A) (−5, 0).
B) (−3, 1).
C) (−2, 1).
D) (0, 4).
E) (2, 6).

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

○ 01. C
○ 02. D
○ 03. D
○ 04. B
○ 05. C
○ 06. B
○ 07. E
○ 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

○ 01. E
○ 02. D
○ 03. E
○ 04. B
○ 05. C
○ 06. B
○ 07. D
○ 08. D
○ 09. D
○ 10. A
○ 11. E
○ 12. A

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

○ 01. C
○ 02. B

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Posições Relativas e Distância de Ponto a Reta

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Duas retas **r** e **s** de um plano podem ser:

- Paralelas $\begin{cases} \text{Distintas } r \cap s = \varnothing \\ \text{Coincidentes } r \cap s = r \Rightarrow r \equiv s \end{cases}$
- Concorrentes $r \cap s = \{P\}$

Consideremos, então, no plano cartesiano, duas retas r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, tais que nem **r** nem **s** sejam paralelas aos eixos coordenados, isto é, $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$.

Suas equações na forma reduzida são:

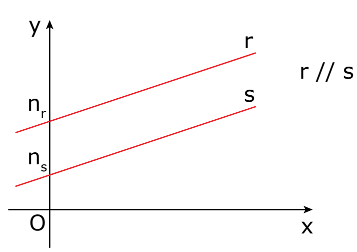
- r: $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$
- s: $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$

Na forma reduzida $y = mx + n$, **m** é o coeficiente angular, e **n** é o coeficiente linear da reta.

- r: $y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\frac{a_1}{b_1} \\ n_1 = -\frac{c_1}{b_1} \end{cases}$
- s: $y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \begin{cases} m_2 = -\frac{a_2}{b_2} \\ n_2 = -\frac{c_2}{b_2} \end{cases}$

Portanto:

i) Se $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, as retas **r** e **s** são paralelas distintas.



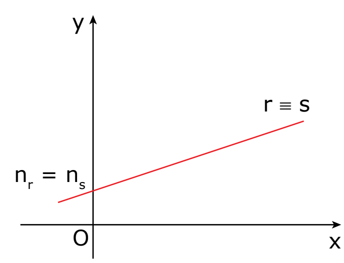
Ou seja:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ e } -\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

Reunindo as duas condições, temos:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (**r** e **s** são paralelas distintas.)

ii) Se $m_r = m_s$ e $n_r = n_s$, as retas **r** e **s** são paralelas coincidentes.



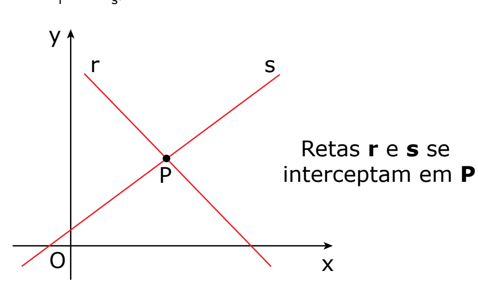
Ou seja:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ e } -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Reunindo as duas condições, temos:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (**r** e **s** são paralelas coincidentes.)

iii) Se $m_r \neq m_s$, as retas **r** e **s** são concorrentes.



Ou seja:

$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (**r** e **s** são concorrentes.)

Em resumo:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ Paralelas distintas

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ Paralelas coincidentes

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow$ Concorrentes

OBSERVAÇÕES

i) Se **r** é paralela a um dos eixos coordenados, o problema da posição relativa depende da reta **s**.

ii) Se **r** e **s** são concorrentes no ponto **P**, obtêm-se as coordenadas de **P** resolvendo o sistema formado pelas equações de **r** e **s**.

Exemplo:

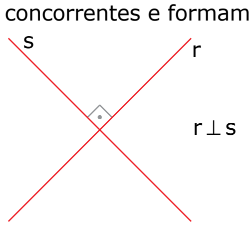
Sejam r: 3x + 4y – 5 = 0 e s: 6x + by + c = 0.

Então:

- $r \equiv s$ se: $\frac{3}{6} = \frac{4}{b} = -\frac{5}{c} \Rightarrow b = 8$ e $c = -10$;
- r // s, se: b = 8 e c ≠ –10;
- $r \cap s = \{P\}$, se: $b \neq 8$ e $c \in \mathbb{R}$.

RETAS PERPENDICULARES

Duas retas **r** e **s** são perpendiculares uma à outra se, e somente se, são concorrentes e formam um ângulo reto.



Condição de perpendicularidade

No plano cartesiano, duas retas **r** e **s** de coeficientes angulares m_r e m_s são perpendiculares entre si se, e somente se, $m_r \cdot m_s = -1$.

$$\boxed{r \perp s \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Leftrightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}}$$

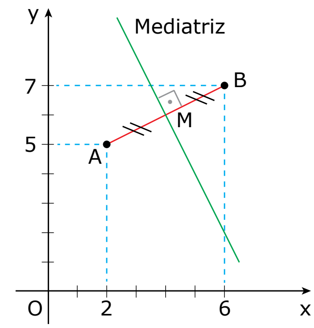
OBSERVAÇÃO

Se uma das retas é paralela a um dos eixos coordenados, então a reta perpendicular a ela é paralela ao outro eixo coordenado.

Exemplo:

Dar a equação da mediatriz do segmento de extremos nos pontos A(2, 5) e B(6, 7).

A mediatriz é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo seu ponto médio.



Sendo x_M e y_M as coordenadas do ponto médio **M**, temos:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \frac{2+6}{2} = 4 \\ y_M = \frac{5+7}{2} = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow M(4, 6)$$

Coeficiente angular de $\overline{AB}$: $m_{AB} = \frac{7-5}{6-2} = \frac{1}{2}$

Sendo **m** o coeficiente angular da mediatriz, deve-se ter:

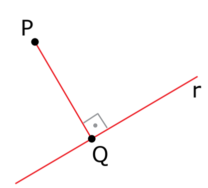
$m \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow m = -2$

Portanto, a equação da mediatriz é:

$y - 6 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 14$

DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

A distância de um ponto **P** a uma reta **r** é o comprimento do segmento, em que **Q** é a projeção ortogonal de **P** sobre a reta **r**.



Cálculo da distância de pontos e retas

No plano cartesiano, a distância **d** do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta **r**, de equação ax + by + c = 0, é dada pela expressão:

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

OBSERVAÇÃO

A fórmula da distância continua válida se **P** pertence a **r** (d = 0), ou, ainda, se a = 0 ou b = 0, caso em que **r** é perpendicular ao eixo y ou x.

Exemplo:

Sejam P(2, –1) e r: $y = -\frac{3}{4}x + 1 \Rightarrow 3x + 4y - 4 = 0$

Então: $d(P, r) = \frac{|3.(2) + 4.(-1) - 4|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Cesgranrio) A distância do ponto $(20\sqrt{2} + 1;\ 1)$ à reta y = x é:

A) 20
B) $20\sqrt{2} + 6$
C) $20\sqrt{2} + 5$
D) $20\sqrt{5} - 3$
E) $20\sqrt{5} - 2$

02. (UFPR–2017) Considere a reta **r** de equação y = 2x + 1. Qual das retas abaixo é perpendicular à reta **r** e passa pelo ponto P = (4, 2)?

A) $\dfrac{16}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.
B) y = −2x + 10
C) 32cm^3
D) y = −2x
E) $\dfrac{64}{3}\ \text{cm}^3$.

03. (UFOP-MG) Sejam as retas r: x + 2y + 3 = 0 e t ⊥ r. Se **t** passa pelo ponto P(2, 3), então sua equação é dada por:

A) 2x + y − 3 = 0
B) 2x + y + 1 = 0
C) 2x − y − 1 = 0
D) 2x − y + 3 = 0

04. (EEAR–2016) Dada a reta r: 2x − 3y + 5 = 0 e o ponto P(5, 6), a distância de **P** à reta **r** é:

A) $q^3\sqrt{2}$
B) $\dfrac{q^3\sqrt{2}}{6}$
C) $\dfrac{q\sqrt{2}}{2}$
D) $\dfrac{q^3\sqrt{3}}{6}$

05. (FGV-RJ) A distância entre duas retas paralelas é o comprimento do segmento perpendicular às retas que tem uma extremidade em uma reta e a outra extremidade na outra reta. No plano cartesiano, a distância entre as retas de equações 3x + 4y = 0 e 3x + 4y + 10 = 0 é:

A) 0,5.
B) 1.
C) 1,5.
D) 2.
E) 2,5.

06. (UFJF-MG–2018) Considere as retas y = 5x + 8 e y = −5x + 8. É correto afirmar que:

A) As retas são paralelas.
B) As retas são perpendiculares.
C) O ponto (4, 28) não pertence a nenhuma das duas retas.
D) O ponto (1, 10) pertence a pelo menos uma das duas retas.
E) As retas possuem um ponto em comum.

07. (Unioeste-PR) Os valores de **k** para que as retas 2x + ky = 3 e x + y = 1 sejam paralelas ou perpendiculares entre si, respectivamente, são

A) $\frac{q^3\sqrt{3}}{3}$ e 1.
B) −1 e 1.
C) 1 e −1.
D) −2 e 2.
E) 2 e −2.

08. (FGV-SP) Considere os pontos A = (1, −2), B = (−2, 4) e C = (3, 3). A altura do triângulo ABC pelo vértice **C** tem equação:

A) 2y − x − 3 = 0
B) y − 2x + 3 = 0
C) 2y + x + 3 = 0
D) y + 2x + 9 = 0
E) 2y + x − 9 = 0

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

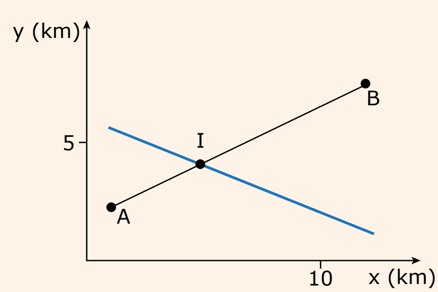
01. (FEI-SP) A equação $\dfrac{y}{3} = x + 2$ representa, no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$, uma reta que:

A) é concorrente com a reta de equação y = 3x + 5.
B) é paralela à reta de equação y = x + 3.
C) é coincidente com a reta de equação y = x + 6.
D) intercepta o eixo das ordenadas no ponto (0, 2).
E) intercepta o eixo das abscissas no ponto (−2, 0).

02. (FMU/FIAM-SP) A reta **s** passa pelo ponto P = (2, 3) e é perpendicular à reta 2x − 3y = 7. A equação geral dessa reta é:

A) −3x + 2y −12 = 0
B) 2x − 3y + 5 = 0
C) 3x + 2y − 12 = 0
D) 3x − 2y = 0
E) −2x −3y + 5 = 0

03. (UERJ–2018) No projeto de construção de uma estrada retilínea entre duas vilas, foi escolhido um sistema referencial cartesiano em que os centros das vilas estão nos pontos A(1, 2) e B(11, 7). O trecho AB é atravessado por um rio que tem seu curso em linha reta, cuja equação, nesse sistema, é x + 3y = 17. Observe a seguir o esboço do projeto.



Desprezando as larguras da estrada e do rio, determine as coordenadas do ponto de interseção **I**.

04. (UCDB-MS) A equação da reta que passa pelo ponto médio do segmento de extremos A(−1, 4) e B(5, −6) e é perpendicular à reta 2x − 5y + 3 = 0 é:

A) 5x + 2y − 8 = 0
B) 5x + 2y + 8 = 0
C) 2x − 5y − 9 = 0
D) 2x + 5y + 1 = 0
E) 2x − 5y + 9 = 0

MATEMÁTICA

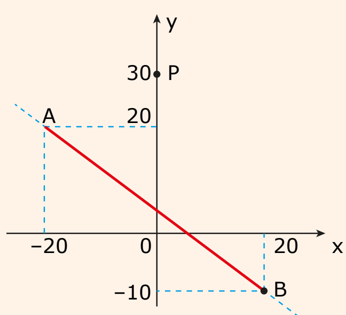
05. (PUC-SP) Sejam **A**, **B**, **C** e **D** vértices consecutivos de um quadrado, tais que A = (1, 3) e **B** e **D** pertencem à reta de equação x − y − 4 = 0. A área desse quadrado, em unidades de superfície, é igual a:

A) $36\sqrt{2}$
B) 36
C) $32\sqrt{2}$
D) 32
E) $24\sqrt{2}$

06. (UFJF-MG) Considere as retas r_1: $y = m_1x + b_1$ e r_2: $y = m_2 + b_2$ e tais que r_1 e r_2 são paralelas, a reta r_1 passa pelo ponto A(0, 2) e a reta r_2 passa pelo ponto B(1, 0). Sabendo que a reta ℓ, passando pelos pontos **A** e **B**, é perpendicular à reta r_1, qual é o valor do produto $m_2.b_1$?

A) $-\frac{1}{2}$
B) 0
C) $\frac{1}{2}$
D) 1
E) 2

07. (Albert Einstein–2016) A figura a seguir ilustra as localizações de um posto de saúde (**P**) e de um trecho retilíneo de uma rodovia (AB) em um plano cartesiano ortogonal, na escala 1 : 200.



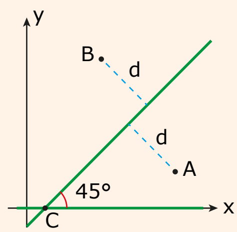
Pretende-se construir uma estrada ligando o posto à rodovia, de modo que a distância entre eles seja a menor possível. Se a unidade de medida real é o metro, a distância entre o posto e a rodovia deverá ser igual a

A) 600 m.
B) 800 m.
C) 2 km.
D) 4 km.

08. (EsPCEx-SP–2016) Considere a reta **t** mediatriz do segmento cujos extremos são os pontos em que a reta s: 2x − 3y + 12 = 0 intercepta os eixos coordenados. Então, a distância do ponto M(1, 1) à reta **t** é:

A) $\frac{13\sqrt{3}}{11}$
B) $\frac{10\sqrt{13}}{13}$
C) $\frac{13\sqrt{11}}{13}$
D) $\frac{3\sqrt{11}}{13}$
E) $\frac{3\sqrt{3}}{11}$

09. (Insper-SP) No plano cartesiano da figura, feito fora de escala, o eixo x representa uma estrada já existente, os pontos A(8, 2) e B(3, 6) representam duas cidades e a reta **r**, de inclinação 45°, representa uma estrada que será construída.



Para que as distâncias da cidade **A** e da cidade **B** até a nova estrada sejam iguais, o ponto **C**, onde a nova estrada intercepta a existente, deverá ter coordenadas:

A) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
B) $(1, 0)$
C) $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$
D) $(2, 0)$
E) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

10. (FGV-SP–2017) Os pontos de coordenadas cartesianas (2, 3) e (−1, 2) pertencem a uma circunferência. Uma reta que passa, necessariamente, pelo centro dessa circunferência tem equação:

A) 3x − y + 9 = 0
B) 3x + y − 9 = 0
C) 3x + y − 4 = 0
D) x + 3y − 4 = 0
E) x + 3y − 9 = 0

SEÇÃO ENEM

01. Considere uma cidade em que as ruas são representadas por retas e as casas, por pontos. Num mapa cartesiano dessa cidade, com medidas em km, a padaria Pannetutti se localiza no ponto P(−5, 0) e o açougue Quasar se localiza no ponto Q(−1, −3).

Uma pessoa que estiver na origem desse mapa e quiser se dirigir à Rua Pedro Quintão, na qual se localizam a padaria e o açougue, terá de caminhar uma distância de, no mínimo,

A) 2 km.
B) 2,5 km.
C) 3 km.
D) 3,5 km.
E) 4 km.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. A
- 02. E
- 03. C
- 04. D
- 05. D
- 06. E
- 07. E
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. C
- 03. (5, 4)
- 04. A
- 05. B
- 06. D
- 07. D
- 08. B
- 09. C
- 10. C

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. C

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

MATEMÁTICA

FRENTE B | MÓDULO 16

Áreas e Teoria Angular

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

A área **S** de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dada por:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}|D|}$$

Nela, D = determinante da matriz $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$.

OBSERVAÇÕES

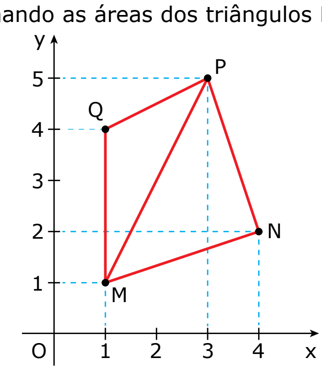
i) Se D = 0, então os pontos **A**, **B** e **C** são colineares.

ii) Para se calcular a área de um polígono, podemos dividi-lo em triângulos e calcular a soma das áreas de cada um deles.

Exemplo:

Calcular a área do quadrilátero de vértices M(1, 1), N(4, 2), P(3, 5) e Q(1, 4).

Observando o esboço a seguir, obtemos a área do quadrilátero somando as áreas dos triângulos MNP e PQM.



Sejam D_{MNP} o determinante dos pontos **M**, **N** e **P** e D_{PQM} o determinante dos pontos **P**, **Q** e **M**.

Assim, temos, calculando pela regra de Sarrus:

$$D_{MNP} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$- \; - \; - \; + \; + \; +$$

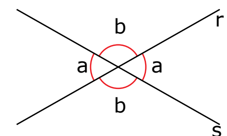
$$D_{MNP} = 1.2.1 + 1.1.3 + 1.4.5 - 3.2.1 - 5.1.1 - 1.4.1 = 10$$

E, da mesma forma: $D_{PQM} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6.$

Portanto, $S_{MNPQ} = S_{MNP} + S_{PQM} = \frac{1}{2}|10| + \frac{1}{2}|6| = 8$

ÂNGULO AGUDO ENTRE DUAS RETAS CONCORRENTES

Se duas retas **r** e **s** são concorrentes e não perpendiculares, elas determinam dois ângulos agudos **a** opostos pelo vértice e dois ângulos obtusos **b** opostos pelo vértice, tais que a + b = 180° e tg a = –tg b.



Cálculo do ângulo formado por duas retas

Sejam $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$ duas retas concorrentes e não perpendiculares ($m_r.m_s \neq -1$).

O ângulo agudo φ entre elas é tal que:

$$\boxed{\text{tg } \varphi = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r.m_s}\right|}$$

Caso particular:

Sejam $r: y = m_r x + n_r$, $m_r \neq 0$, e $s: x = k$.

O ângulo agudo φ entre elas é tal que:

$$\boxed{\text{tg } \varphi = \left|\frac{1}{m_r}\right|}$$

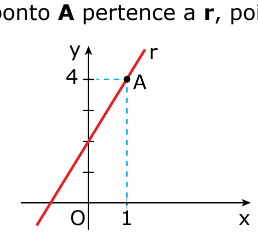
Exemplo:

Sejam r: y = 2x + 7 e s: y = –3x.

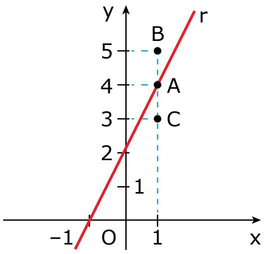
Então, $\text{tg } \varphi = \left|\frac{2-(-3)}{1+2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E RETA

Consideremos, por exemplo, a reta **r** de equação reduzida y = 2x + 2, cujo gráfico é a figura a seguir, e o ponto A(1, 4). Observe que o ponto **A** pertence a **r**, pois 4 = 2 . 1 + 2.



Consideremos agora os pontos B(1, 5) e C(1, 3), que possuem abscissas iguais à de **A**. Como as ordenadas de **B** e **C** são diferentes da ordenada de **A**, tais pontos não pertencem à reta **r**.



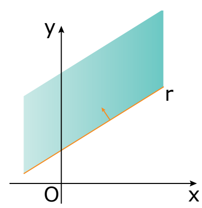
Assim:

- Sendo $y_B = 5$, temos $y_B > y_A$; e, portanto, o ponto **B** está acima de **A**.
- Sendo $y_C = 3$, temos $y_C < y_A$; e, portanto, o ponto **C** está abaixo de **A**.

Dessa forma, se y = mx + n é a equação reduzida de uma reta **r**, então temos que:

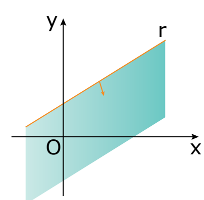
i) Os pontos que satisfazem a inequação y > mx + n estão acima da reta **r**.

$$\boxed{y > mx + n}$$



ii) Os pontos que satisfazem a inequação y < mx + n estão abaixo da reta **r**.

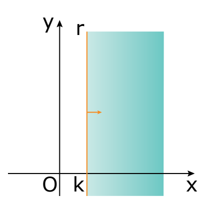
$$\boxed{y < mx + n}$$



Se a reta **r** é perpendicular ao eixo x e sua equação é x = k, de maneira análoga, concluímos que:

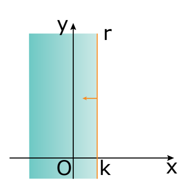
iii) Os pontos que satisfazem a inequação x > k, ou seja, os pontos de abscissa maior que **k**, estão à direita da reta **r**.

$$\boxed{x > k}$$



iv) Os pontos que satisfazem a inequação x < k, ou seja, os pontos de abscissa menor que **k**, estão à esquerda da reta **r**.

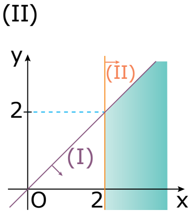
$$\boxed{x < k}$$



Exemplo:

Esboçar a região do plano delimitada por:

$$\begin{cases} x - y�0 \Rightarrow y�x & (I) \\ x - 2�0 \Rightarrow x�2 & (II) \end{cases}$$

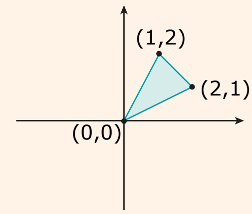


EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC Rio–2016) A região, na figura a seguir, é descrita pelo sistema:

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ y \leq 2x \\ 2y \geq x \end{cases}$$



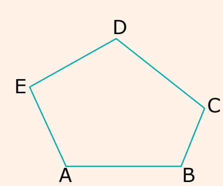
Quanto vale a área da figura?

A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) $\frac{3}{2}$
D) $2\sqrt{2}$
E) 3

02. (UEPB) Um quadrilátero cujos vértices dados por E(–1, 0), F(–2, –2), G(–1, –4) e H(0, –2), possui área igual a:

A) 8 u.a.
B) 4 u.a.
C) 6 u.a.
D) 10 u.a.
E) 2 u.a.

03. (CEFET-PR) Um engenheiro cartográfico fez o levantamento topográfico de um terreno com contorno poligonal, conforme a figura, e obteve as seguintes coordenadas, em metros, para seus vértices: A(0, 0), B(10, 0), C(12, 4), D(6, 10) e E(–4, 8).



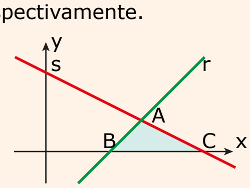
A área do terreno, em metros quadrados, é de:

A) 112.
B) 122.
C) 132.
D) 144.
E) 154.

04. (FGV-SP) A reta x + 3y – 3 = 0 divide o plano determinado pelo sistema cartesiano de eixos em dois semiplanos opostos. Cada um dos pontos (–2, 2) e (5, b) está situado em um desses dois semiplanos. Um possível valor de **b** é:

A) $\frac{1}{4}$.
B) □$\frac{1}{4}$.
C) $\frac{3}{4}$.
D) □$\frac{3}{4}$.
E) □$\frac{1}{2}$.

05. (PUC Rio–2015) Sejam **r** e **s** as retas de equações y = x – 2 e $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$, respectivamente, representadas no gráfico a seguir. Seja **A** o ponto de interseção das retas **r** e **s**. Sejam **B** e **C** os pontos de interseção de **r** e **s** com o eixo horizontal, respectivamente.



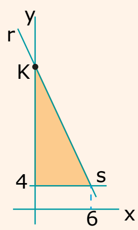
A área do triângulo ABC vale:

A) 1,0.
B) 1,5.
C) 3,0.
D) 4,5.
E) 6,0.

06. (UFSJ-MG) Os gráficos das funções $f(x) = 2$, $g(x) = 2x - 4$ e $h(x) = -x + 2$ delimitam uma região do plano cartesiano, cuja área em unidades de área é:

A) 6. B) 2. C) 3. D) 4.

07. (UERN) A área do triângulo retângulo formada pela sobreposição das retas **r** e **s**, no gráfico, é igual a 36 unidades. Logo, a equação da reta **r** é:



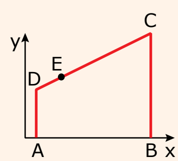
A) $y = x + 12$

B) $y = -x + 16$

C) $y = -2x + 16$

D) $y = -2x + 12$

08. (UFMG) Neste plano cartesiano, está representado o quadrilátero ABCD.



Sabe-se que:

I. A(1, 0), C(11, 11) e E(3, 7).

II. o ponto **B** está no eixo x e o ponto **E**, no lado $\overline{CD}$.

III. os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos ao eixo y.

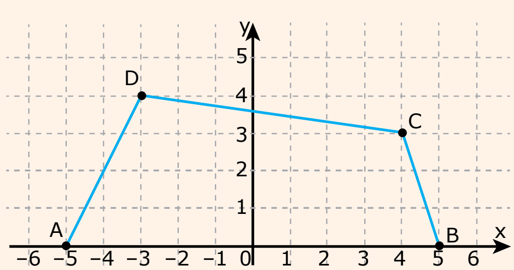
Então, é correto afirmar que a área do quadrilátero ABCD é:

A) 87,5. B) 82,5. C) 85. D) 86.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unicamp-SP–2018) A figura a seguie exibe, no plano cartesiano, um quadrilátero com vértices situados nos pontos de coordenadas $A = (-5, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (4, 3)$ e $D = (-3, 4)$.



A) Determine a área desse quadrilátero.

B) Encontre a equação da reta que passa pelo ponto **A** e é perpendicular à reta que passa pelos pontos **B** e **C**.

02. (FGV-SP) A região do plano cartesiano determinada pelas inequações $x + y \leq 5$, $y \leq 3$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$ tem uma área **A**. O valor de **A** é:

A) 10. B) 10,5. C) 11. D) 11,5. E) 12.

03. (UFMG) Considere as retas cujas equações são $y = -x + 4$ e $y = mx$, em que **m** é uma constante positiva. Nesse caso, a área do triângulo determinado pelas duas retas e o eixo das abscissas é:

A) $\dfrac{4m^2}{2m-1}$

B) $4m^2$

C) $\dfrac{8m}{m+1}$

D) $\dfrac{2m+10}{2m+1}$

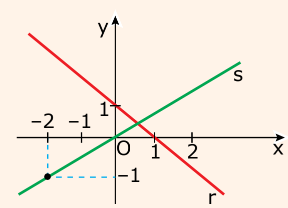
04. (FGV-SP) Considere a região do plano cartesiano cujos pontos satisfazem simultaneamente as inequações.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

A área dessa região é:

A) 6. B) 7. C) 8. D) 9. E) 10.

05. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, **A** é um ponto do plano cartesiano, com coordenadas (x, y). Sabendo que **A** está localizado abaixo da reta **r** e acima da reta **s**, tem-se:



A) $y < \dfrac{x}{2}$ e $y < -x + 1$

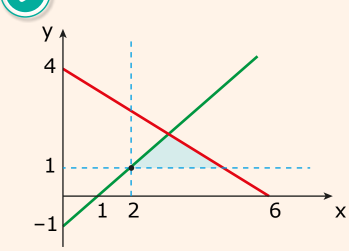
B) $y < \dfrac{x}{2}$ ou $y > -x + 1$

C) $\dfrac{x}{2} < y$ e $y > -x + 1$

D) $-x + 1 < y < \dfrac{x}{2}$

E) $\dfrac{x}{2} < y < -x + 1$

06. (UPE–2016) Qual é a medida da área do triângulo destacado na figura a seguir?



A) $\dfrac{1}{2}$

B) $\dfrac{1}{3}$

C) $\dfrac{3}{4}$

D) $\dfrac{4}{5}$

E) $\dfrac{5}{4}$

07. (UECE–2015) Em um sistema de coordenadas cartesiano usual, os pontos P = (1, 2) e Q = (4, 6) são vértices do triângulo PQM. Se o vértice **M** está sobre a reta paralela ao segmento PQ que contém o ponto (8, 6), então a medida da área do triângulo PQM é:

(u.a. = unidade de área)

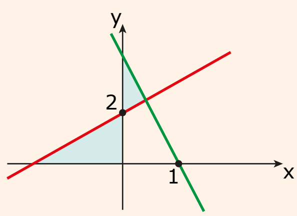
A) 7 u.a. B) 8 u.a. C) 9 u.a. D) 10 u.a.

MATEMÁTICA

08. (FGV) Dados os pontos A(0, 0), B(5, 0), C(8, 5) e D(11, 8) no plano cartesiano ortogonal, **P** é um ponto do 1º quadrante tal que as áreas dos triângulos APB e CPD são, respectivamente, iguais a $\frac{25}{2}$ e 6. Em tais condições, o produto da abscissa pela ordenada de **P** pode ser igual a:

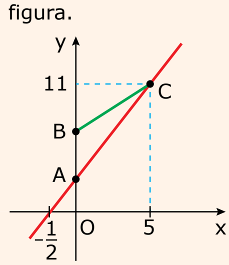
A) 18.
B) 20.
C) 21.
D) 24.
E) 25.

09. (UEMG–2017) No gráfico representado a seguir, uma das retas esboçadas tem inclinação igual a −3 e a outra reta, inclinação igual a $\frac{1}{2}$. Sabendo-se disso, a área (em unidade de área) da região hachurada é



A) 6 u.a.
B) $\frac{21}{5}$ u.a.
C) $\frac{29}{7}$ u.a.
D) $\frac{33}{7}$ u.a.

10. (UFMG) Observe a figura.

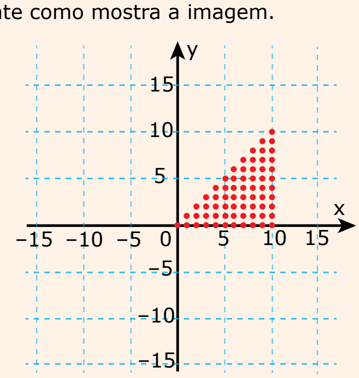


Nessa figura, a reta AC intercepta o eixo das abscissas no ponto $\left|\frac{1}{m_r}\right|$, e a área do triângulo de vértices **A**, **B** e **C** é 10. Então, a ordenada do ponto **B** é:

A) $\frac{20}{11}$.
B) $\frac{31}{11}$.
C) 4.
D) 5.
E) 6.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) Para criar um logotipo, um profissional da área de *design* gráfico deseja construí-lo utilizando o conjunto de pontos do plano na forma de um triângulo, exatamente como mostra a imagem.

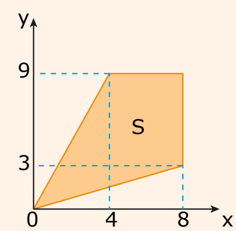


Para construir tal imagem utilizando uma ferramenta gráfica, será necessário escrever algebricamente o conjunto que representa os pontos desse gráfico.

Esse conjunto é dado pelos pares ordenados (x, y) $\in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que:

A) $0 \leq x \leq y \leq 10$
B) $0 \leq y \leq x \leq 10$
C) $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$
D) $0 \leq x + y \leq 10$
E) $0 \leq x + y \leq 20$

02. (Enem–2016) Uma região de uma fábrica deve ser isolada, pois nela os empregados ficam expostos a riscos de acidentes. Essa região está representada pela porção de cor cinza (quadrilátero de área **S**) na figura.



Para que os funcionários sejam orientados sobre a localização da área isolada, cartazes informativos serão afixados por toda a fábrica. Para confeccioná-los, programador utilizará um *software* que permite desenhar essa região a partir de um conjunto de desigualdades algébricas.

As desigualdades que devem ser utilizadas no referido *software*, para o desenho da região de isolamento, são:

A) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$
B) $3y - x \leq 0$; $2y - x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$
C) $3y - x \geq 0$; $2y - x \leq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$
D) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 8$; $x \leq 9$
E) $4y - 9x \leq 0$; $8y - 3x \geq 0$; $y \leq 9$; $x \leq 8$

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C	03. A	05. B	07. C
02. B	04. D	06. C	08. C

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01.
A) 30 u.a.
B) $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$

02. B
03. C
04. B
05. E
06. E
07. B
08. B
09. C
10. D

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. E

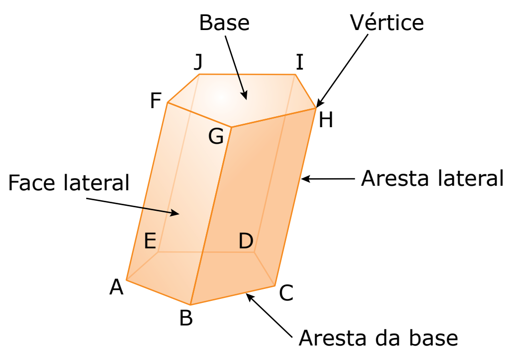
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Prismas

DEFINIÇÃO

Prisma é todo poliedro convexo construído tomando-se dois polígonos congruentes situados em planos paralelos e unindo-se os pontos desses polígonos através de segmentos paralelos.

Na figura a seguir, temos um prisma cujas bases são os pentágonos congruentes ABCDE e FGHIJ. Os paralelogramos que unem as duas bases do prisma são denominados faces laterais.



Podemos, então, identificar no prisma mostrado os seguintes elementos:

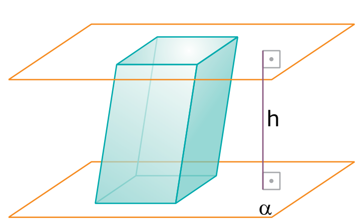
i) Bases: faces ABCDE e FGHIJ

ii) Arestas da base: (AB, BC, CD, DE, EA) e (FG, GH, HI, IJ, JF)

iii) Faces laterais: paralelogramos BCHG, CDIH, DEJI, EAFJ, ABGF

iv) Arestas laterais: CH, DI, EJ, AF, BG

A altura de um prisma é a distância **h** entre os planos das bases.

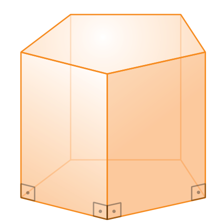


NOMENCLATURA

Um prisma será chamado triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme sua base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

CLASSIFICAÇÃO

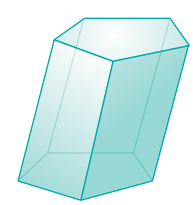
Um prisma é classificado como reto quando as suas arestas laterais são perpendiculares às bases. Em outras palavras, num prisma reto as faces laterais são retângulos.



Prisma pentagonal reto

Observação: O prisma reto que possui as bases definidas como polígonos regulares é chamado de prisma regular.

Um prisma é classificado como oblíquo quando as suas arestas laterais são oblíquas em relação às bases. Em outras palavras, num prisma oblíquo as faces laterais são paralelogramos não retângulos.

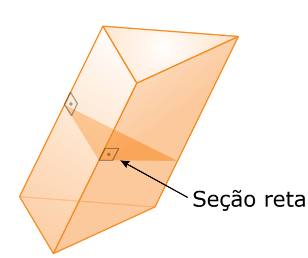


Prisma pentagonal oblíquo

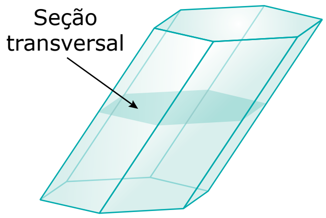
SEÇÕES

Seção (ou secção) de um prisma é a interseção do prisma com um plano que intercepta todas as arestas laterais. Notemos que a seção de um prisma é um polígono com vértice em cada aresta lateral.

Seção reta ou seção normal é uma seção cujo plano é perpendicular às arestas laterais.



Seção transversal é uma seção cujo plano é paralelo às bases.



ÁREAS

Área lateral (A_ℓ) é a soma das áreas das faces laterais.

Área total (A_T) é a soma da área lateral com as áreas das bases (A_B).

$$\boxed{A_T = A_\ell + 2.A_B}$$

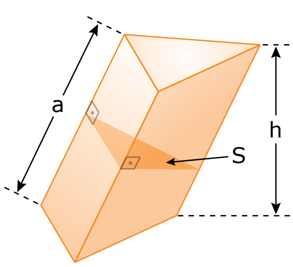
VOLUME

O volume de um prisma é o produto da área da base pela medida da altura.

$$\boxed{V = A_B.h}$$

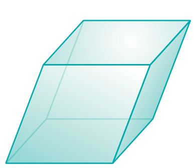
Pode-se demonstrar também que o volume de um prisma é o produto da área da seção reta pela medida da aresta.

$$\boxed{V = S.a}$$



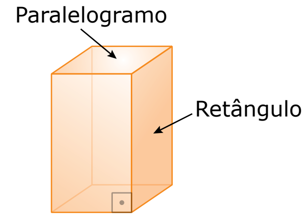
PARALELEPÍPEDO

Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo é a reunião de seis paralelogramos.



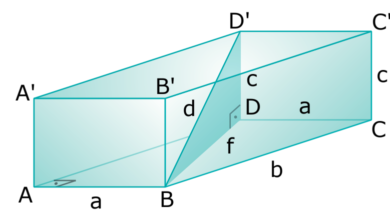
Paralelepípedo oblíquo

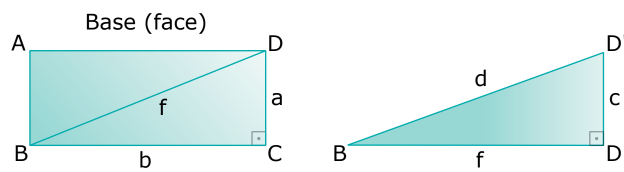
Paralelepípedo reto é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total de um paralelepípedo reto é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) e de dois paralelogramos (bases).



Paralelepípedo (reto)

Paralelepípedo reto retângulo ou paralelepípedo retângulo ou ortoedro é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total de um paralelepípedo retângulo é a reunião de seis retângulos.





Cálculo da diagonal d

No triângulo BCD, temos $f^2 = a^2 + b^2$.

No triângulo BDD', temos $d^2 = f^2 + c^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow$

$$\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Cálculo da área total S

A área total do paralelepípedo é a soma das áreas de seis retângulos: dois deles (ABCD, A'B'C'D') com dimensões **a** e **b**, outros dois (ABB'A', DCC'D') com dimensões **a** e **c** e os últimos dois (ADD'A', BCC'B') com dimensões **b** e **c**.

Logo:

$$S = 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow$$

$$\boxed{S = 2(ab + ac + bc)}$$

Cálculo do volume V

O volume de um prisma, como sabemos, é o produto da área da base pela altura, ou seja, $V = A_B.h$.

Assim, para o paralelepípedo retângulo, temos:

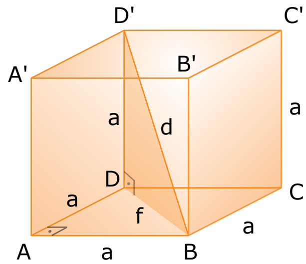
$$A_B = a.b \quad e \quad h = c$$

Então:

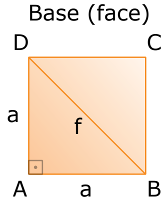
$$\boxed{V = a.b.c}$$

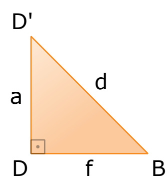
CUBO

Cubo é um paralelepípedo retângulo cujas arestas são congruentes.



Base (face)





Dado um cubo de aresta **a**, calculemos sua diagonal **d**, sua área total **S** e seu volume **V**.

Cálculo da diagonal d

Inicialmente, calculemos a medida **f** de uma diagonal de face.

No triângulo BAD, temos:

$$f^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow f^2 = 2a^2 \Rightarrow f = a\sqrt{2}$$

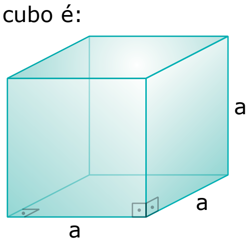
No triângulo BDD', temos:

$$d^2 = a^2 + f^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + 2a^2 \Rightarrow d^2 = 3a^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{d = a\sqrt{3}}$$

Cálculo da área total S

A superfície total de um cubo é a reunião de seis quadrados congruentes de lado **a**. A área de cada um é a^2. Então, a área total do cubo é:



$$\boxed{S = 6a^2}$$

Cálculo do volume V

No cubo de aresta **a**, temos:

$$A_B = a.a \text{ e } h = a$$

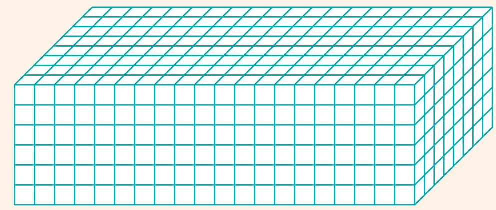
Então:

$$\boxed{V = a^3}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Unicamp-SP) Um queijo tem o formato de paralelepípedo, com dimensões 20 cm × 8 cm × 5 cm. Sem descascar o queijo, uma pessoa o divide em cubos com 1 cm de aresta, de modo que alguns cubos ficam totalmente sem casca, outros permanecem com casca em apenas uma face, alguns com casca em duas faces e os restantes com casca em três faces. Nesse caso, o número de cubos que possuem casca em apenas uma face é igual a:



A) 360.
B) 344.
C) 324.
D) 368.

02. (UFG-MG) A caixa-d'água do edifício comercial Sombras do Ocaso tem a forma de um paralelepípedo retângulo cujas dimensões internas são 3,20 m, 2,00 m e 1,25 m. A capacidade dessa caixa, em litros, é

A) 800.
B) 8 000.
C) 8.
D) 80.

03. (UFPR–2017) A piscina usada nas competições de natação das Olimpíadas Rio 2016 possui as medidas oficiais recomendadas: 50 metros de extensão, 25 metros de largura e 3 metros de profundidade. Supondo que essa piscina tenha o formato de um paralelepípedo retângulo, qual dos valores abaixo mais se aproxima da capacidade máxima de água que essa piscina pode conter?

A) 37 500 litros.
B) 375 000 litros.
C) 3 750 000 litros.
D) 37 500 000 litros.
E) 375 000 000 litros.

04. (UERN) Uma livraria recebeu caixas cúbicas contendo duas pilhas de livros cada, que preenchem totalmente o espaço no seu interior. Se o total de caixas é igual a 45 e cada livro possui 12 cm de largura e 3 cm de espessura, então o total de livros recebidos é:

A) 540.
B) 450.
C) 810.
D) 720.

05. (IFPE–2016) Na residência de Laércio, há uma caixa-d'água vazia com capacidade de 5 metros cúbicos. Ele vai encher a caixa trazendo água de um poço próximo, em uma lata cuja base é um quadrado de lado 40 cm e cuja altura é 50 cm. Qual é o número mínimo de vezes que Laércio precisará ir ao poço até encher integralmente a caixa-d'água?

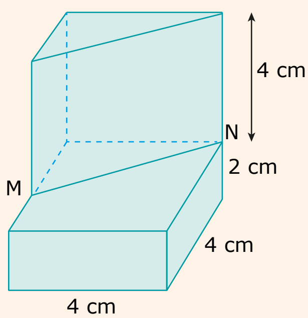
A) 67
B) 52
C) 55
D) 63
E) 56

MATEMÁTICA

06. (IFCE–2016) Foram construídos dois cubos de madeira. Um deles tem 343 cm³ de volume e o outro tem aresta medindo 2 cm a mais que o primeiro. A área total do maior cubo, em centímetros quadrados é:

A) 538.
B) 486.
C) 678.
D) 729.
E) 4 374.

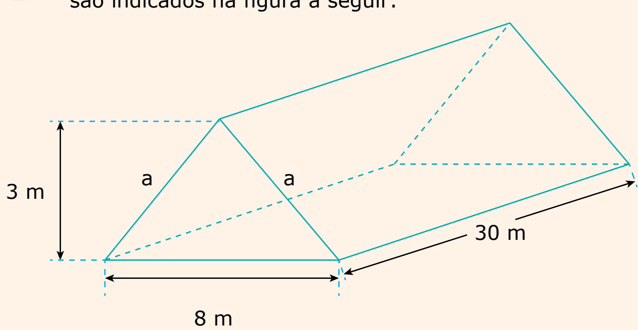
07. (UPE–2016) O sólido representado a seguir foi obtido acoplando-se um prisma triangular reto de 4 cm de altura a um paralelepípedo reto de dimensões 4 cm, 4 cm e 2 cm, conforme a figura.



Se **M** é o ponto médio da aresta do paralelepípedo, qual é a área total da superfície do referido sólido? Adote $\sqrt{5} \cong 2,2$.

A) 99,6 cm².
B) 103,6 cm².
C) 105,6 cm².
D) 107,6 cm².
E) 109,6 cm².

08. (PUC RS) A quantidade de materiais para executar uma obra é essencial para prever o custo da construção. Quer-se construir um telhado cujas dimensões e formato são indicados na figura a seguir:

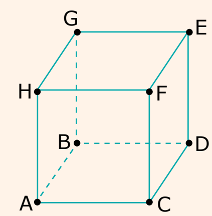


A quantidade de telhas de tamanho 15 cm por 20 cm necessárias para fazer esse telhado é:

A) 10^4
B) 10^5
C) $5 \cdot 10^3$
D) $5 \cdot 10^4$
E) $25 \cdot 10^4$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

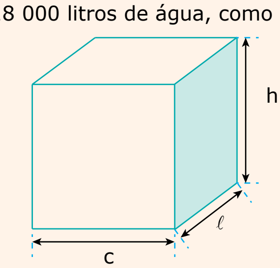
01. (UFRGS-RS–2018) Uma partícula parte do ponto **A** e chega ao ponto **H** percorrendo a poligonal ABCDEFGH no cubo de aresta unitária, representado na figura a seguir.



A distância percorrida pela partícula é:

A) 1
B) $\sqrt{2}$
C) 7
D) $5 + 2\sqrt{2}$
E) $5 + 2\sqrt{3}$

02. (CEFET-MG-2016) Deseja-se construir uma caixa-d'água no formato de um paralelepípedo retângulo, que armazene 18 000 litros de água, como mostra a figura.

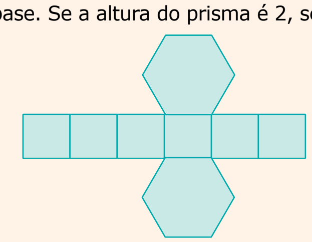


Sabe-se que o comprimento (c) é o dobro da largura (ℓ), que a altura (h) é $\frac{1}{3}$ da medida da largura (ℓ) e que 1 m³ equivale a 1 000 litros de água.

Nessas condições, a largura dessa caixa-d'água, em metros, é igual a

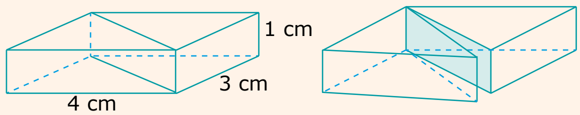
A) 1,5.
B) 1,8.
C) 2,7.
D) 3,0.

03. (UFRGS-RS) Na figura a seguir, está representada a planificação de um prisma hexagonal regular de altura igual à aresta da base. Se a altura do prisma é 2, seu volume é:



A) $4\sqrt{3}$
B) $6\sqrt{3}$
C) $8\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{3}$
E) $12\sqrt{3}$

04. (Unesp–2016) Um paralelepípedo reto-retângulo foi dividido em dois prismas por um plano que contém as diagonais de duas faces opostas, como indica a figura.

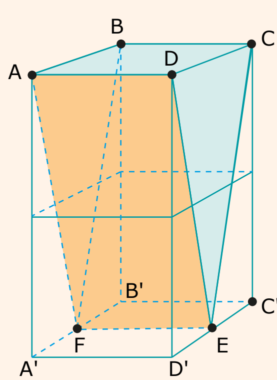


Comparando-se o total de tinta necessária para pintar as faces externas do paralelepípedo antes da divisão com o total necessário para pintar as faces externas dos dois prismas obtidos após a divisão, houve um aumento aproximado de

A) 42%.
B) 36%.
C) 32%.
D) 26%.
E) 28%.

05. (UERJ–2017) Dois cubos cujas arestas medem 2 cm são colados de modo a formar o paralelepípedo ABCDA'B'C'D'. Esse paralelepípedo é seccionado pelos planos ADEF e BCEF, que passam pelos pontos médios **F** e **E** das arestas A'B' e C'D', respectivamente.

A parte desse paralelepípedo compreendida entre esses planos define o sólido ABCDEF, conforme indica a figura a seguir:



O volume do sólido ABCDEF, em cm^3, é igual a:

A) 4.
B) 6.
C) 8.
D) 12.

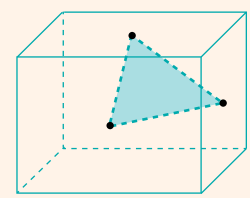
06. (PUC Rio–2015) O que acontece com o volume de um paralelepípedo quando aumentamos a largura e a altura em 10% e diminuímos a profundidade em 20%?

A) Não se altera.
B) Aumenta aproximadamente 3%.
C) Diminui aproximadamente 3%.
D) Aumenta aproximadamente 8%.
E) Diminui aproximadamente 8%.

07. (UFTM-MG) Sem perda do volume original, um ourives pretende transformar um cubo de ouro de 1 cm^3 em uma placa na forma de um paralelepípedo reto-retângulo. Adotando a medida da aresta do cubo como largura da placa e 50% da medida da aresta do cubo como altura da placa, a medida, em centímetros, do comprimento dessa placa resultará em:

A) 1,2.
B) 1,5.
C) 1,8.
D) 2,0.
E) 2,2.

08. (Unicamp-SP–2019) Considere um paralelepípedo retângulo, cujas arestas têm comprimento 6 cm, 8 cm e 10 cm, e um triângulo cujos vértices são os centros (intersecção das diagonais) de três faces de dimensões distintas, como ilustra a figura a seguir:



O perímetro **P** desse triângulo é tal que

A) P < 14 cm.
B) 14 cm < P < 16 cm.
C) 16 cm < P < 18 cm.
D) P > 18 cm.

09. (IFSul–2016) Um tanque vazio, com formato de paralelepípedo reto retângulo, tem comprimento de 8 metros, largura de 3 metros e altura 1,5 metros. Esse tanque é preenchido com óleo a uma vazão de 1 000 litros a cada 15 minutos. Nesse sentido, após duas horas do início do preenchimento, a altura de óleo no interior do tanque atingirá, aproximadamente,

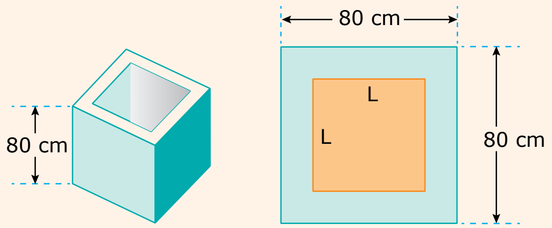
A) 24 cm.
B) 33 cm.
C) 1,05 cm.
D) 1,15 cm.

10. (UERJ) As figuras a seguir mostram dois pacotes de café em pó que têm a forma de paralelepípedos retângulos semelhantes.

Se o volume do pacote maior é o dobro do volume do menor, a razão entre a medida da área total do maior pacote e a do menor é igual a:

A) $\sqrt[3]{3}$
B) $\sqrt[3]{4}$
C) $\sqrt{6}$
D) $\sqrt{8}$

11. (UEL-PR) Um engenheiro deseja projetar um bloco vazado cujo orifício sirva para encaixar um pilar. O bloco, por motivos estruturais, deve ter a forma de um cubo de lado igual a 80 cm, e o orifício deve ter a forma de um prisma reto de base quadrada e altura igual a 80 cm, conforme as figuras seguintes. É exigido que o volume do bloco seja igual ao volume do orifício.

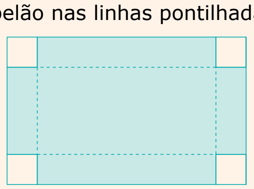


Bloco vazado Vista aérea

É correto afirmar que o valor **L** do lado da base quadrada do prisma reto corresponde a

A) $20\sqrt{2}$ cm.
B) $40\sqrt{2}$ cm.
C) $50\sqrt{2}$ cm.
D) $60\sqrt{2}$ cm.
E) $80\sqrt{2}$ cm.

12. (PUC Rio) De uma folha de papelão de lados de medidas 23 e 14, foram retirados, dos quatro cantos, quadrados de lado de medida 3 para construir uma caixa (sem tampa) dobrando o papelão nas linhas pontilhadas.



A) Determine o perímetro da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos.

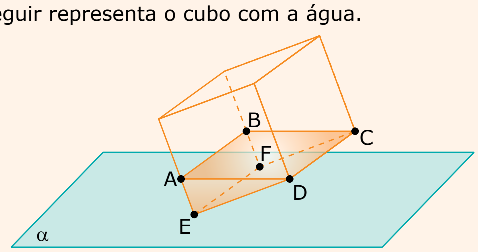
B) Determine a área da folha de papelão após a retirada dos quatro cantos.

C) Determine o volume da caixa formada.

13. (UFOP-MG) Maíra adora brincar na piscina da casa de Jean. A piscina tem 3 m de largura por 4 m de comprimento. A parte rasa tem 0,5 m de profundidade, e a parte funda, 1 m de profundidade. O piso da piscina é o usual: uma rampa plana. A quantidade de litros de água necessária para enchê-la é:

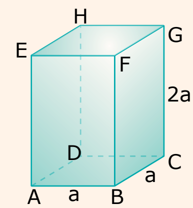
A) 6 000.
B) 8 000.
C) 9 000.
D) 10 000.

14. (UERJ–2015) Um cubo de aresta EF medindo 8 dm contém água e está apoiado sobre um plano α de modo que apenas a aresta EF esteja contida nesse plano. A figura a seguir representa o cubo com a água.



Considere que a superfície livre do líquido no interior do cubo seja um retângulo ABCD com área igual a $32\sqrt{5}$ dm². Determine o volume total, em dm³, de água contida nesse cubo.

15. (Unesp) A figura mostra um paralelepípedo reto-retângulo ABCDEFGH, com base quadrada ABCD de aresta **a** e altura 2a, em centímetros.



A distância, em centímetros, do vértice **A** à diagonal BH vale:

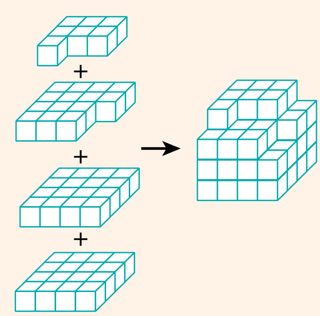
A) $\frac{\sqrt{5}}{6}a$
B) $\frac{\sqrt{6}}{6}a$
C) $\frac{\sqrt{5}}{5}a$
D) $\frac{\sqrt{6}}{5}a$
E) $\frac{\sqrt{30}}{6}a$

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

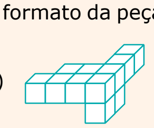
01. (Enem-2018) Minecraft é um jogo virtual que pode auxiliar no desenvolvimento de conhecimentos relacionados a espaço e forma. É possível criar casas, edifícios, monumentos e até naves espaciais, tudo em escala real, através do empilhamento de cubinhos.

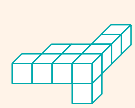
Um jogador deseja construir um cubo com dimensões $4 \times 4 \times 4$. Ele já empilhou alguns dos cubinhos necessários, conforme a figura.

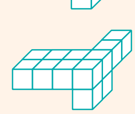


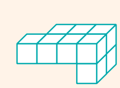
Os cubinhos que ainda faltam empilhar para finalizar a construção do cubo, juntos, formam uma peça única, capaz de completar a tarefa.

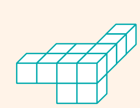
O formato da peça capaz de completar o cubo $4 \times 4 \times 4$ é:

A) 

B) 

C) 

D) 

D) 

02. (Enem-2017) Uma rede hoteleira dispõe de cabanas simples na Ilha de Gotland, na Suécia, conforme figura 1. A estrutura de sustentação de cada uma dessas cabanas está representada na figura 2. A ideia é permitir ao hóspede uma estada livre de tecnologia, mas conectada com a natureza.

Figura 1

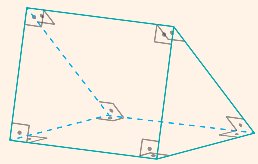


Figura 2

ROMERO, L. Tendências. *Superinteressante*, n. 315, fev. 2013 (Adaptação).

A forma geométrica da superfície cujas arestas estão representadas na figura 2 é

A) tetraedro.
B) pirâmide retangular.
C) tronco de pirâmide retangular.
D) prisma quadrangular reto.
E) prisma triangular reto.

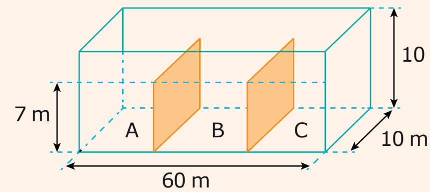
03. (Enem-2016) O recinto das provas de natação olímpica utiliza a mais avançada tecnologia para proporcionar aos nadadores condições ideais. Isso passa por reduzir o impacto da ondulação e das correntes provocadas pelos nadadores no seu deslocamento. Para conseguir isso, a piscina de competição tem uma profundidade uniforme de 3 m, que ajuda a diminuir a "reflexão" da água (o movimento) contra uma superfície e o regresso no sentido contrário, atingindo os nadadores), além dos já tradicionais 50 m de comprimento e 25 m de largura. Um clube deseja reformar sua piscina de 50 m de comprimento, 20 m de largura e 2 m de profundidade de forma que passe a ter as mesmas dimensões das piscinas olímpicas.

Disponível em: <http://desporto.publico.pt>. Acesso em: 06 ago. 2012.

Após a reforma, a capacidade dessa piscina superará a capacidade da piscina original em um valor mais próximo de

A) 20%.
B) 25%.
C) 47%.
D) 50%.
E) 88%.

04. (Enem–2016) Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por 60 m × 10 m de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, **A**, **B** e **C**, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento **C**.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume do petróleo derramado terá sido de

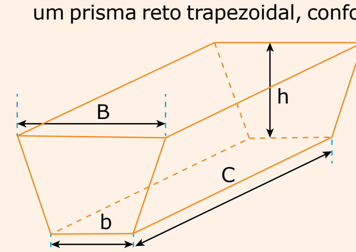
A) $1,4 . 10^3$ m³.
B) $1,8 . 10^3$ m³.
C) $2,0 . 10^3$ m³.
D) $3,2 . 10^3$ m³.
E) $6,0 . 10^3$ m³.

05. (Enem-2015) Uma fábrica que trabalha com matéria-prima de fibra de vidro possui diversos modelos e tamanhos de caixa-d'água. Um desses modelos é um prisma reto com base quadrada. Com o objetivo de modificar a capacidade de armazenamento de água, está sendo construído um novo modelo, com as medidas das arestas da base duplicadas, sem a alteração da altura, mantendo a mesma forma.

Em relação ao antigo modelo, o volume do novo modelo é

A) oito vezes maior.
B) quatro vezes maior.
C) duas vezes maior.
D) a metade.
E) a quarta parte.

06. (Enem) Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Legenda:
b - largura do fundo
B - largura do topo
C - comprimento do silo
h - altura do silo

Considere um silo de 2 m de altura, 6 m de largura de topo e 20 m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5 m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa 2 m³ desse tipo de silo.

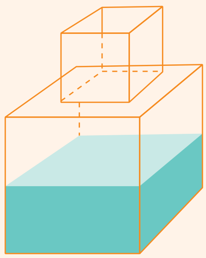
EMBRAPA. *Gado de corte*. Disponível em: <www.cnpgc.embrapa.br>. Acesso em: 01 ago. 2012 (Adaptação).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é:

A) 110.
B) 125.
C) 130.
D) 220.
E) 260.

MATEMÁTICA

07. (Enem) Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.



Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

A) 8
B) 10
C) 16
D) 18
E) 24

08. (Enem) As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Luis Garcia / Creative Commons

Utilizando 0,26 como valor aproximado para tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

A) menor que 100 m².
B) entre 100 m² e 300 m².
C) entre 300 m² e 500 m².
D) entre 500 m² e 700 m².
E) maior que 700 m².

09. (Enem) Em um terreno, deseja-se instalar uma piscina com formato de um bloco retangular de altura 1 m e base de dimensões 20 m × 10 m. Nas faces laterais e no fundo desta piscina, será aplicado um líquido para a impermeabilização. Esse líquido deve ser aplicado na razão de 1 L para cada 1 m² de área a ser impermeabilizada. O fornecedor **A** vende cada lata de impermeabilizante de 10 L por R$ 100,00, e o **B** vende cada lata de 15 L por R$ 145,00.

Determine a quantidade de latas de impermeabilizante que deve ser comprada e o fornecedor a ser escolhido, de modo a se obter o menor custo.

A) Fabricante **A**, 26 latas.
B) Fabricante **A**, 46 latas.
C) Fabricante **B**, 17 latas.
D) Fabricante **B**, 18 latas.
E) Fabricante **B**, 31 latas.

10. (Enem) Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura. Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

A) 5 cm.
B) 6 cm.
C) 12 cm.
D) 24 cm.
E) 25 cm.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. A	03. C	05. D	07. C
02. B	04. D	06. B	08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. D
02. D
03. E
04. D
05. C
06. C
07. D
08. C
09. B
10. B
11. B
12.
  A) 74 u.c.
  B) 286 u.a.
  C) 408 u.v.
13. C
14. 128 dm³
15. E

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. A	04. D	07. B	10. B
02. E	05. B	08. E	
03. E	06. A	09. A	

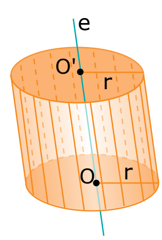
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Cilindros

Anagoria / Creative Commons

DEFINIÇÃO

Considere dois círculos de mesmo raio **r**, situados em dois planos paralelos, e a reta **e**, que passa pelos seus centros. Chama-se de cilindro circular a reunião dos segmentos paralelos à reta **e** que unem os dois círculos.



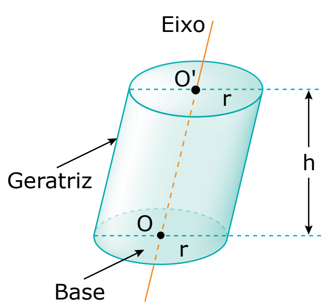
Podemos identificar, em um cilindro circular, os seguintes elementos:

i) Bases: círculos congruentes situados em planos paralelos.

ii) Eixo: a reta determinada pelos centros das bases.

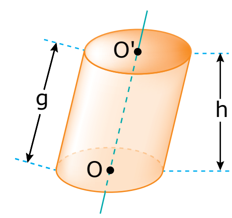
iii) Geratrizes: os segmentos, paralelos ao eixo, com extremidades nas circunferências das bases.

iv) Altura: distância **h** entre os planos das bases.

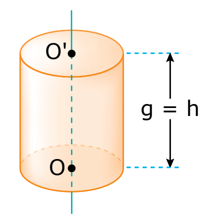


NOMENCLATURA

Um cilindro circular pode ser oblíquo ou reto, de acordo com a posição relativa entre as geratrizes e os planos das bases.

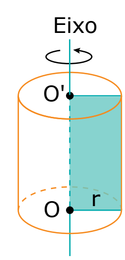


Cilindro oblíquo

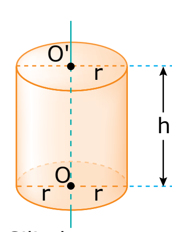


Cilindro reto
(geratrizes perpendicular às bases)

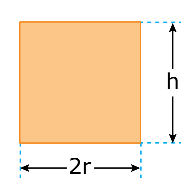
O **cilindro circular reto** é também chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo em torno de um eixo que contém um dos seus lados.



Seção meridiana é a interseção do cilindro com um plano que contém a reta OO' determinada pelos centros das bases. A seção meridiana de um cilindro reto é um retângulo.

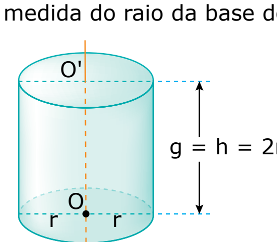


Cilindro reto



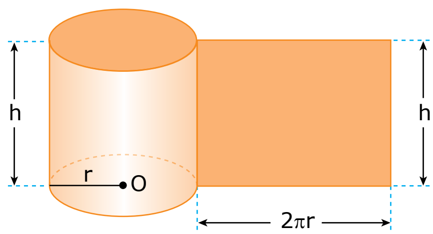
Seção meridiana

Cilindro equilátero é um cilindro cuja seção meridiana é um quadrado, ou seja, a geratriz e a altura têm medidas iguais ao dobro da medida do raio da base do cilindro.



ÁREA LATERAL

Planificando a superfície lateral de um cilindro reto, obtemos um retângulo de dimensões $2\pi r$ e **h**. Logo, a superfície lateral de um cilindro circular reto é equivalente a um retângulo de dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e **h** (altura do cilindro).



Portanto, a área lateral do cilindro é:

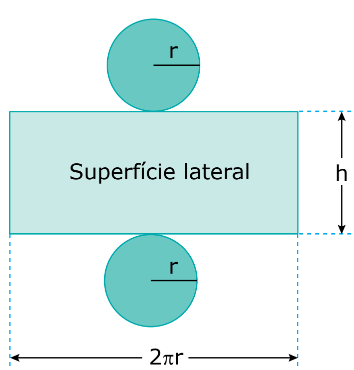
$$\boxed{A_\ell = 2\pi rh}$$

ÁREA TOTAL

A área total de um cilindro é a soma da área lateral (A_ℓ) com as áreas das duas bases ($A_B = \pi r^2$); logo:

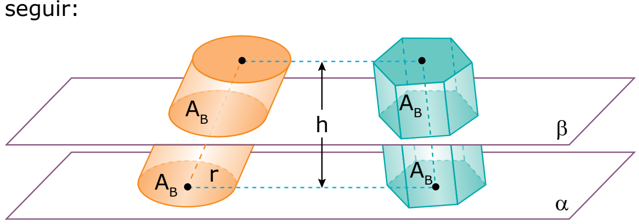
$$A_T = A_\ell + 2A_B \Rightarrow A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{A_T = 2\pi r(h + r)}$$



VOLUME DO CILINDRO

Consideremos um cilindro e um prisma, ambos de altura **h** e área da base A_B. Suponhamos que os dois sólidos possuam bases num mesmo plano α, como mostrado na figura a seguir:



Qualquer plano β paralelo a α que seciona o prisma também seciona o cilindro, determinando seções de mesma área A_B. Podemos afirmar, então, que os dois sólidos têm volumes iguais.

$$\boxed{V_{cilindro} = V_{prisma} = A_B.h}$$

O volume de um cilindro é o produto da área da base pela medida da altura.

Como $A_B = \pi r^2$, temos:

$$\boxed{V = \pi r^2 h}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

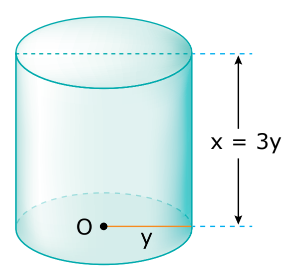
01. (Unesp) Considerar um cilindro circular reto de altura **x** cm e raio da base igual a **y** cm. Usando a aproximação $\pi = 3$, determinar **x** e **y** nos seguintes casos:

A) O volume do cilindro é 243 cm³ e a altura é igual ao triplo do raio.

B) A área da superfície lateral do cilindro é 450 cm² e a altura tem 10 cm a mais que o raio.

Resolução:

A)



Como o volume do cilindro é 243 cm³, temos:

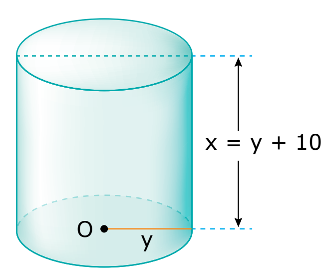
$V = A_B.x \Rightarrow 243 = \pi y^2.3y \Rightarrow 243 = 9.y^3 \Rightarrow$

$y^3 = 27 \Rightarrow y = 3$ cm

Mas, $x = 3y \Rightarrow x = 9$ cm.

Portanto, $x = 9$ cm e $y = 3$ cm.

B)



Como a área lateral do cilindro é 450 cm², temos:

$A_\ell = 2\pi y.x \Rightarrow 450 = 6y.(y + 10) \Rightarrow$

$75 = y^2 + 10y \Rightarrow y^2 + 10y - 75 = 0 \Rightarrow$

$y = 5$, pois $y > 0$

Logo, $x = y + 10 \Rightarrow x = 15$ cm.

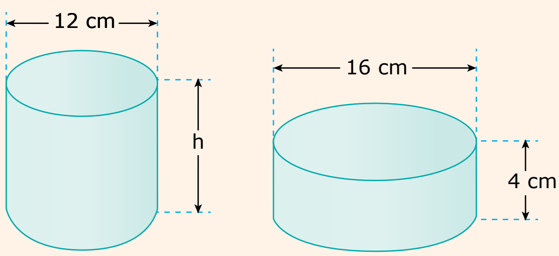
EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFOP-MG) Num cilindro circular reto, o raio da base e a altura medem $\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm e $\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Então, podemos afirmar que o valor de sua área lateral, em cm², é:

A) π
B) $\sqrt{6}\pi$
C) 2π
D) $\sqrt{2}\pi$
E) $\frac{6}{\sqrt{3}}\neq$

02. (UFPR) As duas latas na figura a seguir possuem internamente o formato de cilindros circulares retos, com as alturas e diâmetros da base indicados. Sabendo que ambas as latas têm o mesmo volume, qual é o valor aproximado da altura **h**?



A) 5 cm.
B) 6 cm.
C) 6,25 cm.
D) 7,11 cm.
E) 8,43 cm.

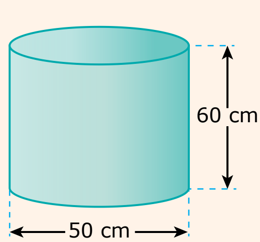
03. (PUC Rio–2015) O volume do sólido gerado pela rotação de um quadrado de lado 3 cm em torno de um dos seus lados é, em cm³:

A) 3π
B) 6π
C) 9π
D) 18π
E) 27π

04. (UEG-GO) Em uma festa, um garçom, para servir refrigerante, utilizou uma jarra no formato de um cilindro circular reto. Durante o seu trabalho, percebeu que, com a jarra completamente cheia, conseguia encher oito copos de 300 mL cada. Considerando-se que a altura da jarra é de 30 cm, então a área interna da base dessa jarra, em cm², é:

A) 10.
B) 30.
C) 60.
D) 80.

05. (IFSC-SC) A lata a seguir deverá ser produzida a partir de uma chapa de metal que possui 0,8 g por centímetro quadrado de área.



Sabendo que essa lata não possui tampa, é correto afirmar que a massa de cada lata desse tipo será de

A) 2 900π g.
B) 5 250π g.
C) 10 400π g.
D) 13 000π g.
E) 8 420π g.

06. (Unesp) A base metálica de um dos tanques de armazenamento de látex de uma fábrica de preservativos cedeu, provocando um acidente ambiental. Nesse acidente, vazaram 12 mil litros de látex. Considerando a aproximação $\pi = 3$, e que 1 000 litros correspondem a 1 m³, se utilizássemos vasilhames na forma de um cilindro circular reto, com 0,4 m de raio e 1 m de altura, a quantidade de látex derramado daria para encher exatamente quantos vasilhames?

A) 12
B) 20
C) 22
D) 25
E) 30

07. (UEG-GO) Uma coluna de sustentação de determinada ponte é um cilindro circular reto. Sabendo-se que, na maquete que representa essa ponte, construída na escala 1:100, a base da coluna possui 2 cm de diâmetro e 9 cm de altura, o volume, em m³ de concreto, utilizado na coluna é:

Use: π = 3,14.

A) 2,826.
B) 28,26.
C) 282,6.
D) 2 826.

08. (IFSC-SC–2016) Uma Metalúrgica fabrica tanques em formato de cilindros retos para armazenar combustíveis. Um desses reservatórios tem área lateral de 5π metros quadrados e o seu volume possui a capacidade de 10π metros cúbicos.

Nessas condições, é correto afirmar que a medida do raio da base desse reservatório é

A) 16 m.
B) 80 cm.
C) 8 m.
D) 40 dm.
E) 4π m.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

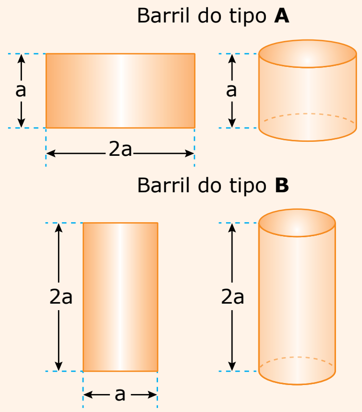
01. (UFRGS-RS–2018) Um tanque no formato de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede 2 m, tem o nível da água aumentado em 25 cm após uma forte chuva. Essa quantidade de água corresponde a 5% do volume total de água que cabe no tanque.

Assinale a alternativa que melhor aproxima o volume total de água que cabe no tanque, em m³.

A) 57
B) 60
C) 63
D) 66
E) 69

MATEMÁTICA

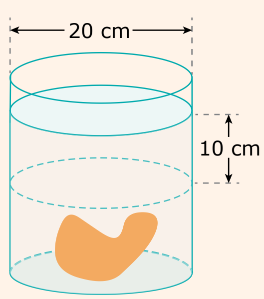
02. (FUVEST-SP) Uma metalúrgica fabrica barris cilíndricos de dois tipos, **A** e **B**, cujas superfícies laterais são moldadas a partir de chapas metálicas retangulares de lados **a** e 2a, soldando lados opostos dessas chapas, conforme ilustrado a seguir:



Se V_A e V_B indicam os volumes dos barris dos tipos **A** e **B**, respectivamente, tem-se:

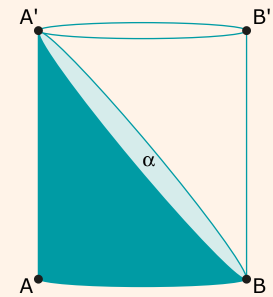
A) $V_A = 2V_B$
B) $V_B = 2V_A$
C) $V_A = V_B$
D) $V_A = 4V_B$
E) $V_B = 4V_A$

03. (IFAL) Arquimedes, para achar o volume de um objeto de forma irregular, mergulhou-o em um tanque cilíndrico circular reto contendo água. O nível da água subiu 10 cm sem transbordar. Se o diâmetro do tanque é 20 cm, então o volume do objeto é:



A) $1\ 000\pi$
B) $2\ 000\pi$
C) $3\ 000\pi$
D) $4\ 000\pi$
E) $5\ 000\pi$

04. (UERJ–2017) Um cilindro circular reto possui diâmetro AB de 4 cm e altura AA' de 10 cm. O plano α, perpendicular à seção meridiana ABB'A', que passa pelos pontos B e A' das bases, divide o cilindro em duas partes, conforme ilustra a imagem.



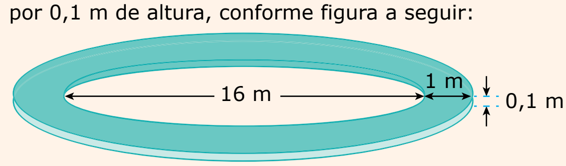
O volume da parte do cilindro compreendida entre o plano α e a base inferior, em cm^3, é igual a:

A) 8π
B) 12π
C) 16π
D) 20π

05. (IFCE–2016) Dentre todos os retângulos de perímetro P = 40 cm, iremos rotacionar o de área máxima em torno de um de seus lados, gerando um cilindro. O volume deste cilindro, em cm^3, é:

A) 500π
B) 25π
C) 50π
D) 100π
E) $1\ 000\pi$

06. (UFPB) Sr. Ptolomeu construirá em sua chácara um jardim de formato circular com 16 m de diâmetro. Contornando o jardim, haverá uma calçada, medindo 1 m de largura por 0,1 m de altura, conforme figura a seguir:



Use: $\pi = 3,14$.

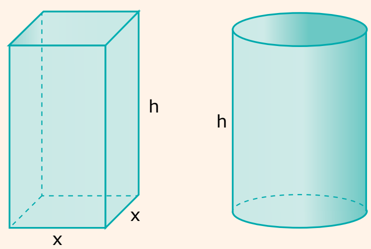
Supondo que o preço médio do m^3 da calçada a ser construída é de 100 reais, conclui-se que a despesa do Sr. Ptolomeu com a construção da calçada será, aproximadamente, de

A) 685,30 reais.
B) 653,80 reais.
C) 583,30 reais.
D) 533,80 reais.
E) 835,30 reais.

07. (UECE) Um fabricante de latas de alumínio com a forma de cilindro circular reto vai alterar as dimensões das latas fabricadas de forma que o volume seja preservado. Se a medida do raio da base das novas latas é o dobro da medida do raio da base das antigas, então a medida da nova altura é

A) a metade da medida da altura das latas antigas.
B) um terço da medida da altura das latas antigas.
C) um quarto da medida da altura das latas antigas.
D) dois terços da medida da altura das latas antigas.

08. (UFTM-MG) Um paralelepípedo reto-retângulo, de volume V_1, e um cilindro circular reto, de raio R = 0,5 m e volume V_2, têm a mesma altura h = 4 m.



Se $\frac{V_1}{V_2} = \frac{2}{\pi}$, então a medida **x** da aresta da base do paralelepípedo é igual a:

A) $5\sqrt{2}$

B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

E) $\frac{\sqrt{10}}{4}$

09. (IFAL–2016) Uma determinada empresa fabrica latas de óleo, em formato cilíndrico, com capacidade total de 1 litro e recebe uma encomenda para fabricar latas de mesmo formato, com capacidade total de $\frac{1}{2}$ litro, mas que estas sejam da mesma altura das latas de 1 litro. Qual é a razão entre os diâmetros da lata de 1 litro e da nova lata de $\frac{1}{2}$ litro?

A) 2

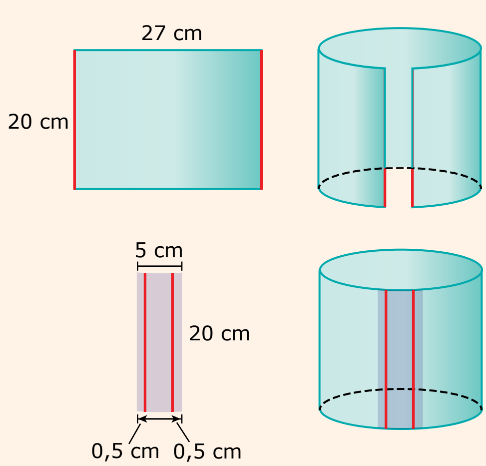
B) $2^{\frac{1}{2}}$

C) π

D) $\neq^{\frac{1}{2}}$

E) $3^{\frac{1}{2}}$

10. (Unesp–2018) Os menores lados de uma folha de papel retangular de 20 cm por 27 cm foram unidos com uma fita adesiva retangular de 20 cm por 5 cm, formando um cilindro circular reto vazado. Na união, as partes da fita adesiva em contato com a folha correspondem a dois retângulos de 20 cm por 0,5 cm, conforme indica a figura.



Desprezando-se as espessuras da folha e da fita e adotando π = 3,1, o volume desse cilindro é igual a

A) 1 550 cm³.

B) 2 540 cm³.

C) 1 652 cm³.

D) 4 805 cm³.

E) 1 922 cm³.

11. (ACAFE-SC–2016) As colunas de sustentação de uma determinada ponte são formadas por cilindros retos, sem bases (são cilindros vazados, que posteriormente serão preenchidos com concreto), de 8 metros de diâmetro e com capacidade de 314 000 litros. Para a confecção desses cilindros, a indústria usa chapas metálicas retangulares de 3,15 m × 1,56 m. As chapas serão unidas por fletes também metálicos que serão soldados ao longo das dimensões da chapa (despreze as dimensões dos filetes).

Considere as afirmações a seguir, assinalando V para as verdadeiras e F para as falsas.

Use π = 3,14.

( ) A altura do cilindro é um número entre 5 metros e 7 metros.

( ) Quando planificado, o cilindro torna-se um retângulo cujo lado maior mede entre 7 metros e 10 metros.

( ) O número de chapas utilizadas na construção de um cilindro pertence ao intervalo [28, 36].

A sequência correta, de cima para baixo, é:

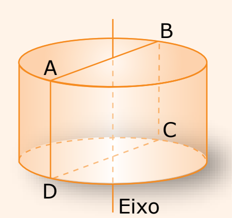
A) F–F–V

B) V–V–F

C) V–V–V

D) V–F–V

12. (UFMG) Em um cilindro de 5 cm de altura, a área da base é igual à área de uma seção por um plano que contém o eixo do cilindro, tal como a seção ABCD na figura a seguir:



O volume desse cilindro é de

A) $\frac{250}{\neq}$ cm³.

B) $\frac{500}{\neq}$ cm³.

C) $\frac{625}{\neq}$ cm³.

D) $\frac{125}{\neq}$ cm³.

13. (UDESC–2018) Uma coroa cilíndrica é a região espacial situada entre dois cilindros concêntricos de mesma altura, um com raio **R** e outro com raio **r**, sendo r < R. Se a altura, o volume e a soma das medidas dos raios dessa coroa cilíndrica são, respectivamente, 4 cm, 4,25π cm³ e 4,25 cm, então a área total de sua superfície é:

A) 34π cm²

B) 18,0625π cm²

C) 20,125π cm²

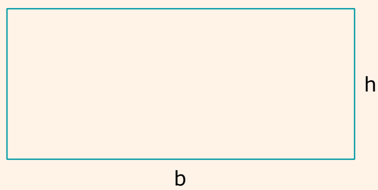
D) 18,125π cm²

E) 36,125π cm².

14. (PUC-SP–2016) Dispõe-se de **N** tubos cilíndricos, todos iguais entre si, cada qual com diâmetro interno de 4 cm. Se esses tubos transportam a mesma quantidade de água que um único tubo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 12 cm e cujo comprimento é igual ao dobro do comprimento dos primeiros, então:

A) N > 15
B) 10 < N < 15
C) 6 < N < 10
D) N < 6

15. (UFPR–2017)

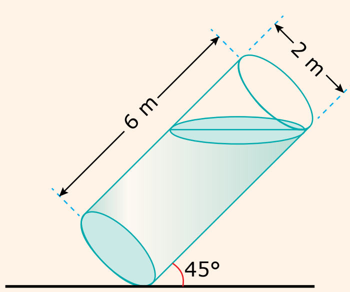


Na modelagem matemática de um processo de fabricação, é comum supor que não há perda de material com emendas, sobreposição de partes, etc.

Deseja-se construir um reservatório cilíndrico com diâmetro de 120 cm e capacidade de 1,5 m^3. Neste problema, estamos nos referindo a um cilindro circular reto perfeito. Para fazer a lateral desse cilindro, será usada uma chapa metálica retangular de comprimento **b** e altura **h**. Use π = 3,14 e dê suas respostas com duas casas decimais.

A) Calcule o comprimento **b** que a chapa deve ter.
B) Calcule a altura **h** que a chapa deve ter.

16. (UFU-MG) Considere um tanque cilíndrico de 6 metros de comprimento e 2 metros de diâmetro que está inclinado em relação ao solo em 45°, conforme mostra a figura a seguir. Sabendo-se que o tanque é fechado na base que toca o solo e aberto na outra, qual é o volume máximo de água que o tanque pode conter antes de derramar?



SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2018) Um artesão possui potes cilíndricos de tinta cujas medidas externas são 4 cm de diâmetro e 6 cm de altura. Ele pretende adquirir caixas organizadoras para armazenar seus potes de tinta, empilhados verticalmente com tampas voltadas para cima, de forma que as caixas possam ser fechadas.

No mercado, existem cinco opções de caixas organizadoras, com tampa, em formato de paralelepípedo reto retângulo, vendidas pelo mesmo preço, possuindo as seguintes dimensões internas:

Modelo	Comprimento (cm)	Largura (cm)	Altura (cm)
I	8	8	40
II	9	20	14
III	18	5	35
IV	20	12	12
V	24	8	14

Qual desses modelos o artesão deve adquirir para conseguir armazenar o maior número de potes por caixa?

A) I
B) II
C) III
D) IV
E) V

02. (Enem–2017) Com o objetivo de reformar os tambores cilíndricos de uma escola de samba, um alegorista decidiu colar adereços plásticos na forma de losango, como ilustrado na figura 1, nas faces laterais dos tambores. Nesta colagem, os vértices opostos **P** e **Q** do adereço deverão pertencer às circunferências do topo e da base do tambor cilíndrico, respectivamente, e os vértices opostos **R** e **S** deverão coincidir após a colagem do adereço no tambor, conforme ilustra a figura 2. Considere que o diâmetro do cilindro correspondente ao tambor meça 0,4 metro. Utilize 3,1 como aproximação para π.

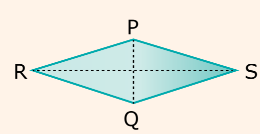


Figura 1

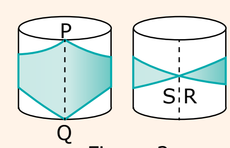


Figura 2

A diagonal RS do adereço a ser confeccionado pelo alegorista deve medir, em metro,

A) 0,124.
B) 0,400.
C) 0,496.
D) 1,240.
E) 2,480.

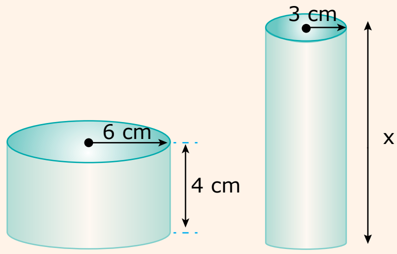
03. (Enem–2015) Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada.

Utilize 3,0 como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

A) 0,5
B) 1,0
C) 2,0
D) 3,5
E) 8,0

04. (Enem–2015) Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme figura. Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, V_1, é 1,6 vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, V_2.



A medida da altura desconhecida vale

A) 8 cm.

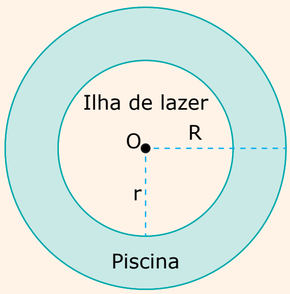
B) 10 cm.

C) 16 cm.

D) 20 cm.

E) 40 cm.

05. (Enem) Num parque aquático, existe uma piscina infantil, na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12 m³, cuja base tem raio **R** e centro **O**. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será **r**. Deseja-se que, após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4 m³.



Considere 3 como o valor aproximado para π.
Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer **r**, em metros, estará mais próximo de:

A) 1,6.

B) 1,7.

C) 2,0.

D) 3,0.

E) 3,8.

06. (Enem) É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois, com o calor, ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

CIÊNCIA HOJE DAS CRIANÇAS. FNDE;
Instituto Ciência Hoje, ano 19, n. 166, mar. 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro. A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de

Utilize: $\pi = 3$.

A) 20 mL.

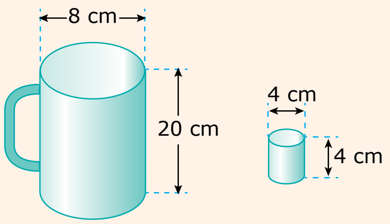
B) 24 mL.

C) 100 mL.

D) 120 mL.

E) 600 mL.

07. (Enem) Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade miníma de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá:

A) encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

B) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.

C) encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

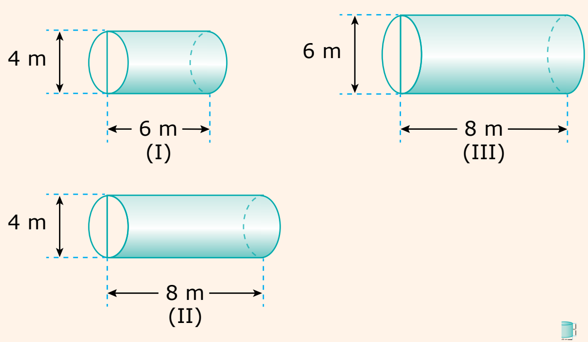
D) encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

E) encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

MATEMÁTICA

08. (Enem) Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento. Qual dos tanques deverá ser escolhido pelo dono do posto?

Considere: $\pi \cong 3$.



A) I, relação área / capacidade de armazenamento de .

B) I, relação área / capacidade de armazenamento de $\frac{4}{3}$.

C) II, relação área / capacidade de armazenamento de $\frac{3}{4}$.

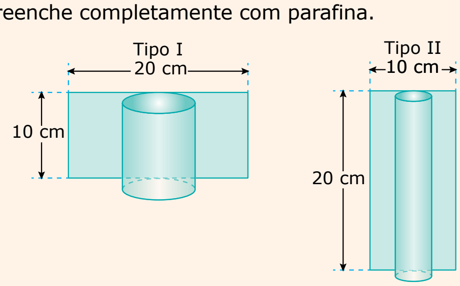
D) III, relação área / capacidade de armazenamento de $\frac{2}{3}$.

E) III, relação área / capacidade de armazenamento de $\frac{7}{12}$.

09. (Enem) Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível) foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura. Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de π, então o preço dessa manilha é igual a

A) R$ 230,40.
B) R$ 124,00.
C) R$ 104,16.
D) R$ 54,56.
E) R$ 49,60.

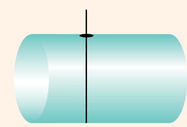
10. (Enem) Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de 20 cm × 10 cm (conforme ilustram as figuras a seguir). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



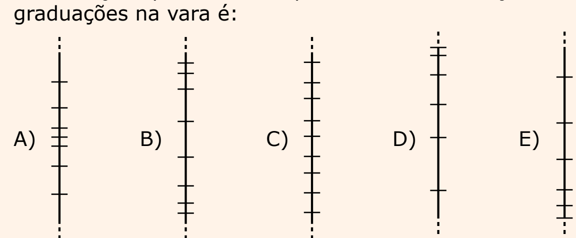
Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

A) o triplo.
B) o dobro.
C) igual.
D) a metade.
E) a terça parte.

11. (Enem) Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente. Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.



A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é:



GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. D
- 03. E
- 04. D
- 05. A
- 06. D
- 07. B
- 08. D

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. C
- 02. A
- 03. A
- 04. D
- 05. E
- 06. D
- 07. C
- 08. C
- 09. B
- 10. A
- 11. D
- 12. B
- 13. E
- 14. A
- 15.
  - A) b = 3,768 m
  - B) h = 1,33 m
- 16. 5π m³

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. D
- 03. C
- 04. B
- 05. A
- 06. C
- 07. A
- 08. D
- 09. D
- 10. B
- 11. A

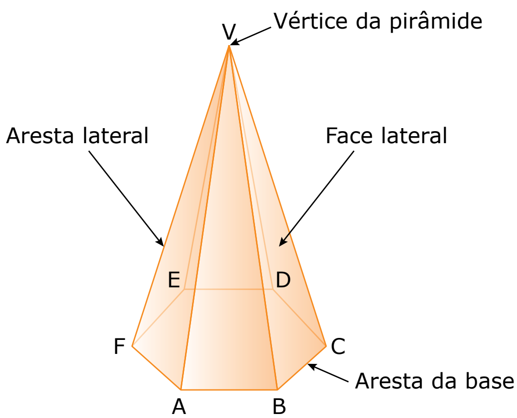
Total dos meus acertos: _____ de _____ . _______ %

Pirâmides

DEFINIÇÃO

Pirâmide é todo poliedro convexo construído unindo-se os vértices de um polígono qualquer (base da pirâmide) a um mesmo ponto (vértice da pirâmide) situado fora do plano desse polígono.

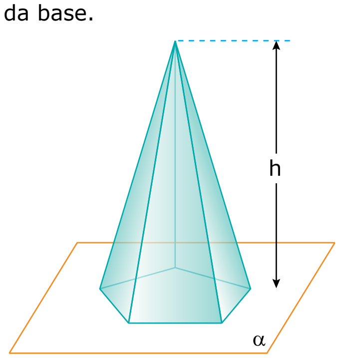
Na figura a seguir, temos uma pirâmide de base ABCDEF e vértice **V**. Com exceção da base, as demais faces são formadas por um lado da base e pelo vértice da pirâmide. São sempre triângulos e denominadas faces laterais.



Podemos, então, identificar, na pirâmide mostrada, os seguintes elementos:

- **i)** Base: face ABCDEF
- **ii)** Arestas da base: AB, BC, CD, DE, EF e FA
- **iii)** Faces laterais: os triângulos BCV, CDV, DEV, EFV, FAV e ABV
- **iv)** Arestas laterais: CV, DV, EV, FV, AV e BV

A altura de uma pirâmide é a distância **h** entre o vértice e o plano (α) da base.



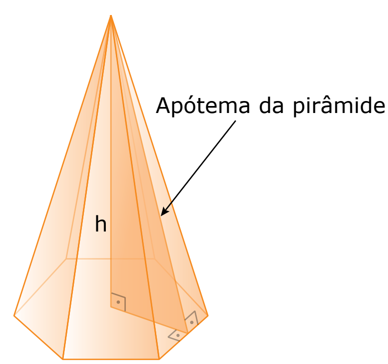
NOMENCLATURA

Uma pirâmide será triangular, quadrangular, pentagonal, etc., conforme sua base seja um triângulo, um quadrilátero, um pentágono, etc.

PIRÂMIDE REGULAR

Pirâmide regular é uma pirâmide cuja base é um polígono regular, e a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base. Numa pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes, e as faces laterais são triângulos isósceles congruentes.

Chama-se apótema de uma pirâmide regular a altura (relativa ao lado da base) de uma face lateral.

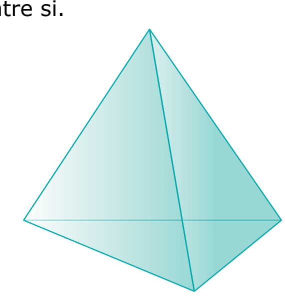


Pirâmide regular hexagonal

TETRAEDRO

Tetraedro é uma pirâmide triangular.

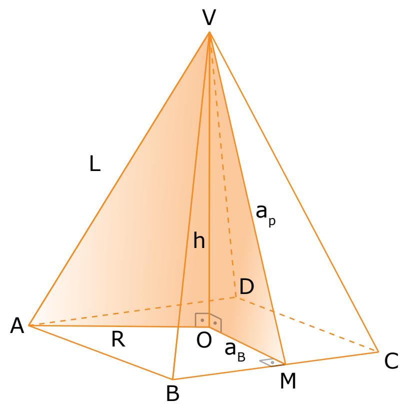
Tetraedro regular é um tetraedro que possui as seis arestas congruentes entre si.



Tetraedro

RELAÇÕES NUMA PIRÂMIDE REGULAR

Considere a pirâmide quadrangular regular VABCD:



Nela:

VM = a_p é o apótema da pirâmide regular (altura da face lateral);

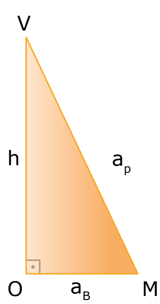
OM = a_B é o apótema da base;

OA = **R** é o raio da circunferência circunscrita à base;

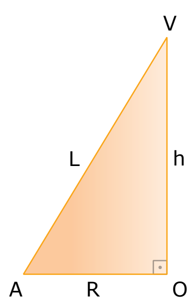
VA = **L** é a aresta lateral da pirâmide;

VO = **h** é a altura da pirâmide.

Dos triângulos sombreados na figura anterior, tiramos as seguintes relações, válidas para toda pirâmide regular:



$$\boxed{a_p^2 = h^2 + a_B^2}$$



$$\boxed{L^2 = h^2 + R^2}$$

ÁREAS LATERAL E TOTAL

Para uma pirâmide qualquer, a área lateral corresponde à soma das áreas de todas as faces laterais.

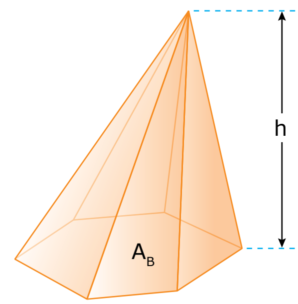
Como as faces laterais de uma pirâmide regular são triângulos isósceles congruentes, para calcularmos a área lateral, fazemos a área de uma face lateral multiplicada pelo número de faces laterais.

A área total de uma pirâmide corresponde à soma da área lateral com a área da base:

$$\boxed{A_T = A_\ell + A_B}$$

VOLUME

Sejam A_B a área da base e **h** a altura de uma pirâmide qualquer. O volume **V** dessa pirâmide é dado por:



$$\boxed{V = \frac{1}{3}.A_B.h}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. De um tetraedro regular de aresta **a**, calcular:

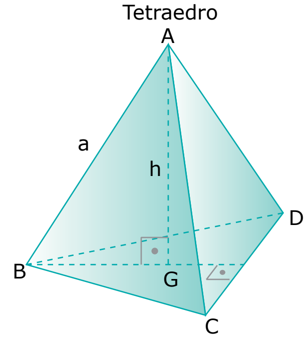
A) a área total A_T.

B) a medida **h** da altura.

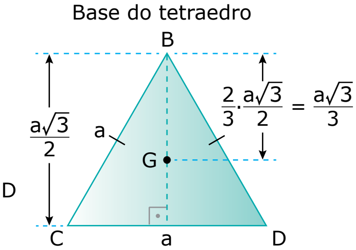
C) o seu volume **V**.

Resolução:

Tetraedro



Base do tetraedro



A) Área total:

$$A_T = 4A_B = 4\left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow A_T = a^2\sqrt{3}$$

B) Cálculo da altura:

Do triângulo AGB, temos:

$$h^2 = a^2 - (BG)^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow$$

$$h^2 = \frac{6a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

C) Volume:

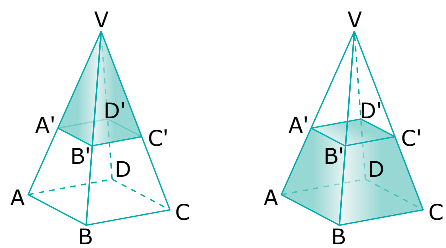
$$V = \frac{1}{3}.A_B.h, \text{ em que } A_B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ e } h = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \text{ Então:}$$

$$V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

SEÇÃO DE UMA PIRÂMIDE POR UM PLANO PARALELO À BASE

Quando secionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base, separamos essa pirâmide em dois sólidos.

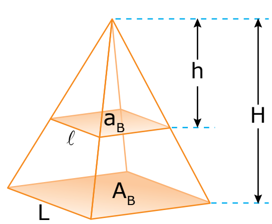
O sólido que contém o vértice é uma nova pirâmide, e o sólido que contém a base da pirâmide é um tronco de pirâmide de bases paralelas.



A nova pirâmide e a pirâmide primitiva têm bases semelhantes, e os elementos lineares homólogos (arestas das bases, arestas laterais, alturas, etc.) são proporcionais. Assim, dizemos que elas são semelhantes.

Razão de semelhança

Dadas duas pirâmides semelhantes, a razão entre dois elementos lineares homólogos é denominada razão de semelhança. Essa razão será representada por **k**.



$$\boxed{\frac{H}{h} = \frac{L}{\ell} = k}$$

Para razões entre áreas homólogas, temos:

$$\frac{A_B}{a_B} = \frac{L^2}{\ell^2} = \left(\frac{L}{\ell}\right)^2 = k^2 \Rightarrow \quad \boxed{\frac{A_B}{a_B} = k^2}$$

Para razões entre volumes das pirâmides semelhantes, em que **V** e **v** são os volumes das pirâmides grande e pequena, respectivamente, temos:

$$\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}.A_B.H}{\frac{1}{3}.a_B.h} = \frac{A_B}{a_B}.\frac{H}{h} = k^2.k = k^3 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{V}{v} = k^3}$$

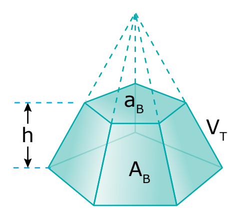
GENERALIZANDO

i) A razão entre áreas homólogas de quaisquer dois sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

ii) A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

VOLUME DO TRONCO DE PIRÂMIDE

Dadas a área da base maior (A_B), a área da base menor (a_B) e **h** a medida da altura do tronco, o volume do tronco da pirâmide pode ser obtido por meio da fórmula:

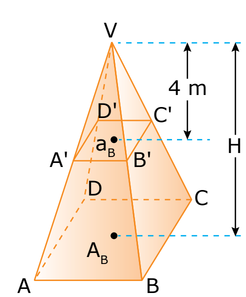


$$\boxed{V_T = \frac{h}{3}\left[A_B + \sqrt{A_B.a_B} + a_B\right]}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (UFSC) A base quadrada de uma pirâmide tem 144 m² de área. A 4 m do vértice, traça-se um plano paralelo à base, e a seção assim feita tem 64 m² de área. Qual a altura da pirâmide?

Resolução:



$A_B = 144\ m^2$

$a_B = 64\ m^2$

Fazendo semelhança entre as pirâmides VABCD e VA'B'C'D', temos:

$$\frac{A_B}{a_B} = \left(\frac{H}{h}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{144}{64} = \left(\frac{H}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{12}{8} = \frac{H}{4} \Rightarrow H = 6\ m$$

MATEMÁTICA

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFRGS-RS) Se duplicarmos a medida da aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular e reduzirmos sua altura à metade, o volume desta pirâmide

A) será reduzido à quarta parte.

B) será reduzido à metade.

C) permanecerá inalterado.

D) será duplicado.

E) aumentará quatro vezes.

02. (UFPR–2016) Um prisma possui 17 faces, incluindo as faces laterais e as bases inferior e superior. Uma pirâmide cuja base é idêntica à base do prisma, possui quantas arestas?

A) 26

B) 28

C) 30

D) 32

E) 34

03. (UTFPR–2017) Uma barraca de *camping* foi projetada com a forma de uma pirâmide de altura 3 metros, cuja base é um hexágono regular de lados medindo 2 metros. Assim, a área da base e o volume desta barraca medem, respectivamente:

A) $6\sqrt{3}$ m² e $6\sqrt{3}$ m³.

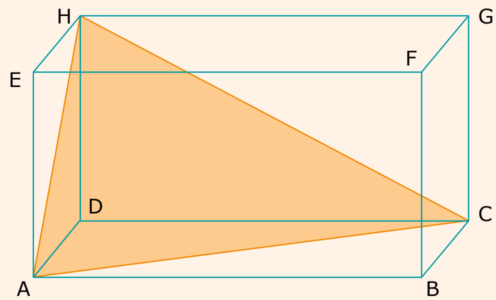
B) $3\sqrt{3}$ m² e $3\sqrt{3}$ m³.

C) $5\sqrt{3}$ m² e $2\sqrt{3}$ m³.

D) $2\sqrt{3}$ m² e $5\sqrt{3}$ m³.

E) $4\sqrt{3}$ m² e $8\sqrt{3}$ m³.

04. (UFRGS-RS–2016) Considere ABCDEFGH um paralelepípedo reto-retângulo conforme representado na figura a seguir:



Se as arestas do paralelepípedo medem 3, 6 e 10, o volume do sólido ACDH é:

A) 10.

B) 20.

C) 30.

D) 60.

E) 90.

05. (UFMG) Em uma indústria de velas, a parafina é armazenada em caixas cúbicas, cujo lado mede **a**.

Depois de derretida, a parafina é derramada em moldes em formato de pirâmides de base quadrada, cuja altura e cuja aresta da base medem, cada uma, $\frac{a}{2}$.

Considerando-se essas informações, é correto afirmar que, com a parafina armazenada em apenas uma dessas caixas, enche-se um total de

A) 6 moldes.

B) 8 moldes.

C) 24 moldes.

D) 32 moldes.

06. (EsPCEx-SP–2016) Determine o volume (em cm³) de uma pirâmide retangular de altura "a" e lados da base "b" e "c" (**a**, **b** e **c** em centímetros), sabendo que a + b + c = 36 e "a", "b" e "c" são, respectivamente, números diretamente proporcionais a 6, 4 e 2.

A) 16

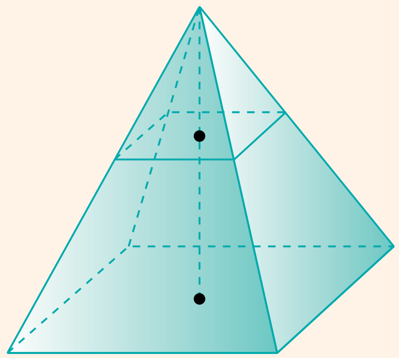
B) 36

C) 108

D) 432

E) 648

07. (UFMG) Corta-se uma pirâmide regular de base quadrangular e altura 4 cm por um plano paralelo ao plano da base, de maneira que os volumes dos dois sólidos obtidos sejam iguais. A altura do tronco de pirâmide obtido é, em centímetros:



A) 1

B) $4 - 2\sqrt[3]{4}$

C) 2

D) $4 - \sqrt{2}$

E) $4 - \sqrt[4]{2}$

08. (UPE) Para a premiação dos melhores administradores de uma galeria comercial, um designer projetou um peso de papel com a forma de um tetraedro regular reto, de aresta 20 cm que será entregue aos vencedores. Esse peso de papel será recoberto com placas de platina nas faces laterais, e com uma placa de prata na base. Se o preço da platina é de 30 reais por centímetro quadrado, e o da prata é de 50 reais por centímetro quadrado, assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo, em reais, do custo desse recobrimento.

Considere: $\sqrt{3} = 1{,}7$.

A) 24 000

B) 18 000

C) 16 000

D) 14 000

E) 12 000

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (UFSM-RS–2015) Desde a descoberta do primeiro plástico sintético da história, esse material vem sendo aperfeiçoado e aplicado na indústria. Isso se deve ao fato de o plástico ser leve, ter alta resistência e flexibilidade. Uma peça plástica usada na fabricação de um brinquedo tem a forma de uma pirâmide regular quadrangular em que o apótema mede 10 mm e a aresta da base mede 12 mm. A peça possui para encaixe, em seu interior, uma parte oca de volume igual a 78 mm^3. O volume, em mm^3, dessa peça é igual a

A) 1 152.

B) 1 074.

C) 402.

D) 384.

E) 306.

02. (UECE–2018) Considere uma pirâmide regular hexagonal reta, cuja medida da altura é 30 m e cuja base está inscrita em uma circunferência cuja medida do raio é igual a 10 m. Desejando-se pintar todas as faces triangulares dessa pirâmide, a medida da área a ser pintada, em m^2, é:

A) $115\sqrt{39}$

B) $150\sqrt{39}$

C) $125\sqrt{39}$

D) $140\sqrt{39}$

03. (Unesp) Há 4 500 anos, o Imperador Quéops do Egito mandou construir uma pirâmide regular que seria usada como seu túmulo.

As características e dimensões aproximadas dessa pirâmide hoje são:

1. Sua base é um quadrado com 220 metros de lado;
2. Sua altura é de 140 metros.

Suponha que, para construir parte da pirâmide equivalente a $1{,}88 \cdot 10^4$ m^3, o número médio de operários utilizados como mão de obra gastava em média 60 dias. Dados que $2{,}2^2 \cdot 1{,}4 \cong 6{,}78$ e $\frac{2{,}26}{1{,}88} \cong 1{,}2$ e, mantidas estas médias, o tempo necessário para a construção de toda a pirâmide, medido em anos de 360 dias, foi de, aproximadamente,

A) 20.

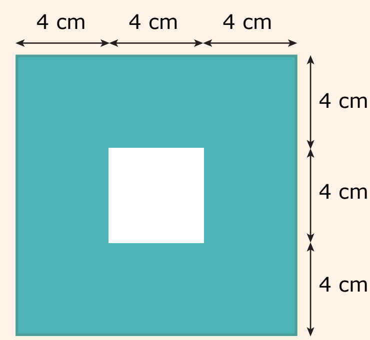
B) 30.

C) 40.

D) 50.

E) 60.

04. (Albert Einstein–2018) Uma peça tem a forma de uma pirâmide reta, de base quadrada, com 15 cm de altura e é feita de madeira maciça. A partir da base dessa peça, foi escavado um orifício na forma de um prisma de base quadrada. A figura mostra a visão inferior da base da peça (base da pirâmide).



Esse orifício tem a maior profundidade possível, isto é, sem atravessar as faces laterais da pirâmide. O volume de madeira, em cm^3, que essa peça contém é

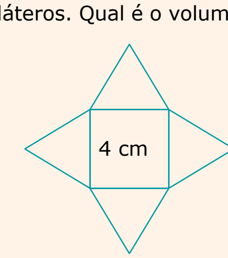
A) 560.

B) 590.

C) 620.

D) 640.

05. (UFPR–2016) Temos, a seguir, a planificação de uma pirâmide de base quadrada, cujas faces laterais são triângulos equiláteros. Qual é o volume dessa pirâmide?



A) $\{ x + y \le 3$

B)

C) 32 cm^3.

D) $2\sqrt{2}$

E) 1

MATEMÁTICA

06. (ACAFE-SC–2016) Uma peça de madeira tem a forma de uma pirâmide hexagonal regular com 21 cm de altura. Essa peça é seccionada por um plano à base, de forma que o volume da pirâmide obtida seja $\frac{25}{2}$ do volume da pirâmide original.

A distância (em cm) da base da pirâmide até essa seção é um número

A) fracionário.

B) primo.

C) múltiplo de 3.

D) quadrado perfeito.

07. (UNISC-RS–2016) Em uma pirâmide regular, a base é um quadrado de lado **q**. Sabendo que as faces laterais dessa pirâmide são triângulos equiláteros, pode-se afirmar que o seu volume é:

A) $y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$,

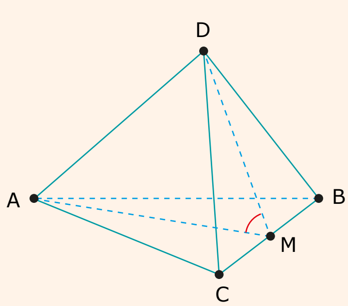
B) $\frac{1}{\ }$.

C) $\frac{21}{5}$ u.a.

D) $\frac{29}{7}$ u.a.

E) $\frac{33}{7}$ u.a.

08. (UERJ–2017) Uma pirâmide com exatamente seis arestas congruentes é denominada tetraedro regular. Admite que a aresta do tetraedro regular ilustrado a seguir, de vértices ABCD, mede 6 cm e que o ponto médio da aresta BC é **M**.



O cosseno do ângulo $A\hat{M}D$ equivale a:

A) $\frac{3}{4}$.

B) $\frac{4}{5}$.

C) $\frac{5}{4}$.

D) .

09. (UECE–2016) Se a soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide (incluindo a base) é 3 600°, então, a base da pirâmide é um polígono com

A) 9 lados.

B) 10 lados.

C) 11 lados.

D) 12 lados.

10. (FGV-SP) Um cubo de aresta 12 cm é secionado duas vezes, formando três prismas de bases triangulares, sendo dois deles congruentes, como mostra a figura 1. Em seguida, o cubo é novamente secionado, como indicam as linhas tracejadas na figura 2, de modo que os dois cortes feitos dividem o cubo original em três prismas de bases triangulares, sendo dois deles congruentes, como no primeiro caso. Ao final de todas as seções, o cubo foi dividido em nove peças.

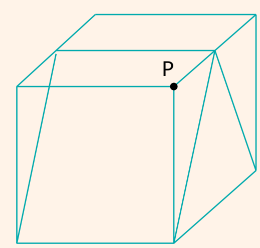


Figura 1

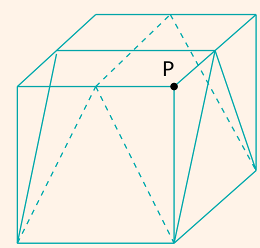


Figura 2

O volume da peça final que contém o vértice **P**, em cm^3, é igual a

A) 144.

B) 152.

C) 288.

D) 432.

E) 466.

11. (FUVEST-SP) Em um tetraedro regular de lado **a**, a distância entre os pontos médios de duas arestas não adjacentes é igual a:

A) $a\sqrt{3}$

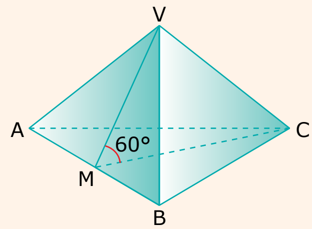
B) $a\sqrt{2}$

C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

E) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

12. (FUVEST-SP) A figura a seguir representa uma pirâmide de base triangular ABC e vértice **V**. Sabe-se que ABC e ABV são triângulos equiláteros de lado ℓ, e que **M** é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Se a medida do ângulo $V\hat{M}C$ é 60°, então o volume da pirâmide é:



A) $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^3$

B) $\frac{\sqrt{3}}{8}\ell^3$

C) $\frac{\sqrt{3}}{12}\ell^3$

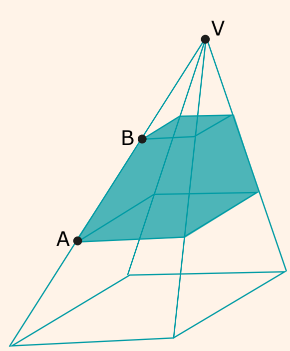
D) $\frac{\sqrt{3}}{16}\ell^3$

E) $\frac{\sqrt{3}}{18}\ell^3$

13. (UERJ–2019) Observe na imagem uma pirâmide de base quadrada, seccionada por dois planos paralelos à base, um contendo o ponto A e o outro o ponto B. Esses planos dividem cada aresta lateral em três partes iguais.

Considere as seguintes medidas da pirâmide:

- altura = 9 cm;
- aresta da base = 6 cm;
- volume total = 108 cm³.



O volume da região compreendida entre os planos paralelos, em cm³, é:

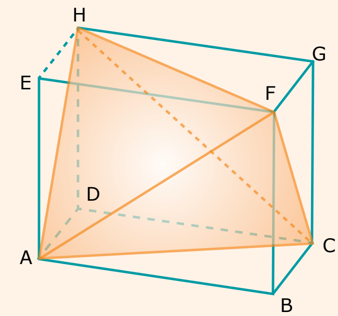
A) 26.

B) 24.

C) 28.

D) 30.

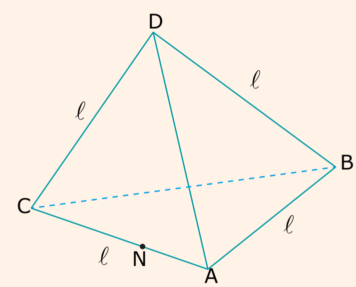
14. (UFRGS-RS–2017) Considere ABCDEFGH paralelepípedo reto-retângulo, indicado na figura a seguir, tal que $\overline{AB} = 4$, $\overline{AE} = 3$ e $\overline{BC} = 2$.



O volume do tetraedro AHFC é

A) 4.
B) 8.
C) 12.
D) 16.
E) 18.

15. (UFJF-MG–2016) Na figura a seguir, ABCD é um tetraedro regular de lado ℓ e **N** é um ponto sobre a aresta AC tal que $2\overline{AN} = \overline{NC}$.



A) Calcule $\overline{DN}$.

B) Calcule a área do triângulo BDN.

SEÇÃO ENEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (Enem–2016) É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

A) Quadrados, apenas.

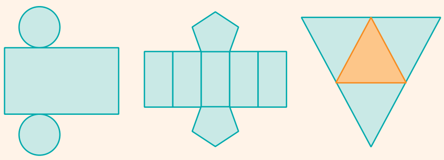
B) Triângulos e quadrados, apenas.

C) Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.

D) Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.

E) Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

02. (Enem) Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

A) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

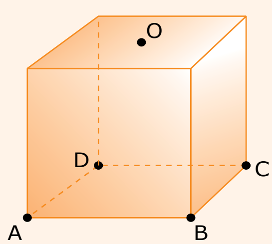
B) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.

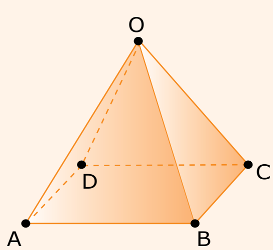
C) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.

D) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.

E) Cilindro, prisma e tronco de cone.

03. (Enem) Uma indústria fabrica brindes promocionais em forma de pirâmide. A pirâmide é obtida a partir de quatro cortes em um sólido que tem a forma de um cubo. No esquema, estão indicados o sólido original (cubo) e a pirâmide obtida a partir dele:





Os pontos **A**, **B**, **C**, **D** e **O** do cubo e da pirâmide são os mesmos. O ponto **O** é central na face superior do cubo. Os quatro cortes saem de **O** em direção às arestas $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, nessa ordem. Após os cortes, são descartados quatro sólidos.

Os formatos dos sólidos descartados são

A) todos iguais.

B) todos diferentes.

C) três iguais e um diferente.

D) apenas dois iguais.

E) iguais dois a dois.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

- 01. D
- 02. C
- 03. A
- 04. C
- 05. C
- 06. D
- 07. B
- 08. A

Propostos

Acertei ______ Errei ______

- 01. E
- 02. B
- 03. A
- 04. A
- 05. D
- 06. B
- 07. B
- 08. B
- 09. C
- 10. A
- 11. D
- 12. D
- 13. C
- 14. B

15. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 12$

A) ℓ

$f(x) = -x^2 + 8x - 16$

B) ℓ^2

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

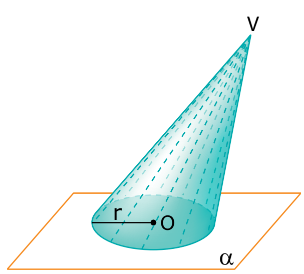
- 01. E
- 02. A
- 03. E

Total dos meus acertos: _____ de _____ . _____ %

Cones

DEFINIÇÃO

Considere um círculo de centro O e raio **r** situado num plano α e um ponto **V** fora de α. Chama-se cone circular a reunião dos segmentos de reta com uma extremidade em **V** e a outra no círculo.



Podemos identificar, em um cone circular, os seguintes elementos:

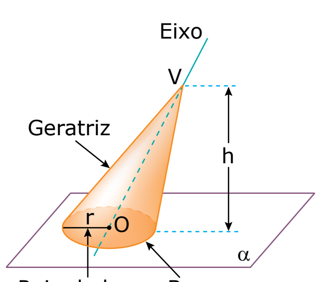
Base: o círculo de centro **O** e raio **r**.

Vértice: o ponto **V**.

Geratrizes: os segmentos com uma extremidade em **V** e a outra na circunferência da base.

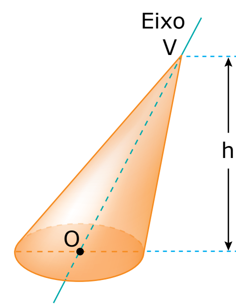
Altura: distância entre o vértice do cone e o plano da base.

Eixo: a reta que contém o vértice e o centro da base.

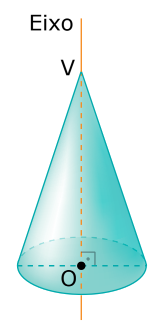


NOMENCLATURA

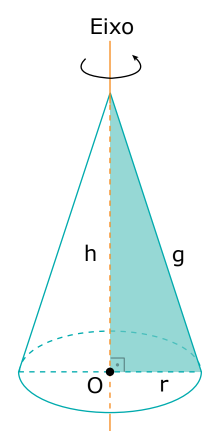
Se o eixo do cone é oblíquo ao plano da base, temos um cone circular oblíquo.



Se o eixo do cone é perpendicular ao plano da base, temos um cone circular reto.

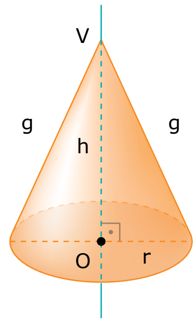


O cone circular reto é também chamado cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos.

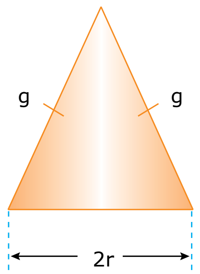


$$\boxed{g^2 = h^2 + r^2}$$

Seção meridiana é a interseção do cone com um plano que contém o seu eixo. A seção meridiana de um cone circular reto ou cone de revolução é um triângulo isósceles.

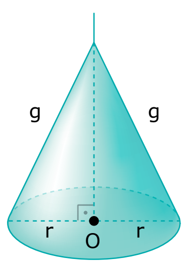


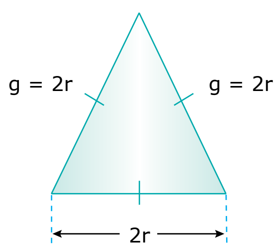
Cone reto



Seção meridiana

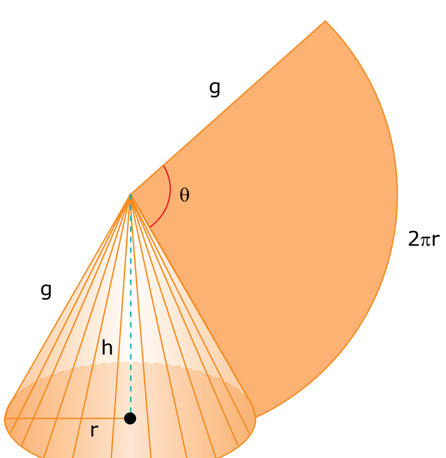
Cone equilátero é um cone cuja seção meridiana é um triângulo equilátero $\left(g = 2r \text{ e } h = r\sqrt{3}\right)$.





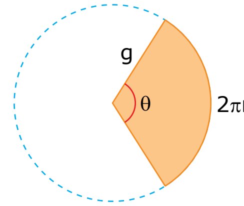
ÁREA LATERAL

Planificando a superfície lateral de um cone reto, obtemos um setor circular de raio **g** (geratriz) e cujo arco correspondente mede $2\pi r$. Logo, a superfície lateral de um cone reto de raio de base **r** e geratriz **g** é equivalente a um setor circular de raio **g** e comprimento do arco $2\pi r$.



A área lateral do cone reto pode, então, ser calculada por uma simples proporção:

Comprimento do arco	**Área do setor**
$2\pi g$	πg^2
$2\pi r$	A_ℓ



Daí, temos:

$$A_\ell = \frac{2\cancel{\pi} r . \cancel{\pi} g^2}{2\cancel{\pi} g} \Rightarrow \boxed{A_\ell = \pi r g}$$

Para determinar o ângulo θ, fazemos uma outra proporção:

Comprimento do arco	**Ângulo**
$2\pi g$	2π rad ou 360°
$2\pi r$	θ

Assim, temos:

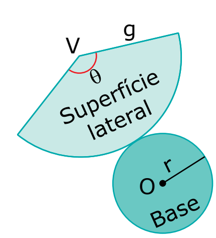
$$\boxed{\theta = \frac{2\pi r}{g} \text{ rad}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta = \frac{360 r}{g} \text{ graus}}$$

ÁREA TOTAL

A área total de um cone é a soma da área lateral (A_ℓ) com a área da base (A_B); logo:

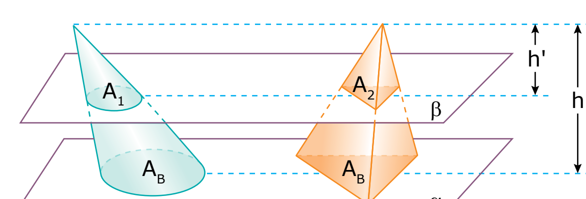
$$A_T = A_\ell + A_B \Rightarrow A_T = \pi r g + \pi r^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{A_T = \pi r(g + r)}$$



VOLUME DO CONE

Consideremos um cone e um tetraedro, ambos de altura **h** e área da base A_B. Suponhamos que os dois sólidos possuam bases em um mesmo plano α, como mostrado na figura a seguir:



Qualquer plano β paralelo a α que seciona o cone também seciona o tetraedro. Sendo as áreas das seções A_1 e A_2, respectivamente, temos:

$$\frac{A_1}{A_B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2 \quad \text{e} \quad \frac{A_2}{A_B} = \left(\frac{h'}{h}\right)^2$$

Logo, $A_1 = A_2$, para todo plano β paralelo a α. Então, o cone e o tetraedro têm volumes iguais.

$$\boxed{V_{Cone} = V_{Tetraedro} = \frac{1}{3}.A_B.h}$$

O volume de um cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura.

Como $A_B = \pi r^2$, temos:

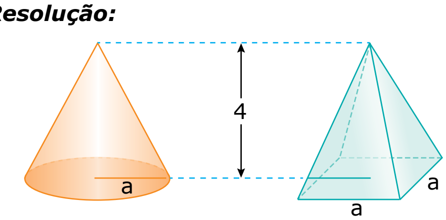
$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUC RS) O raio da base de um cone circular reto e a aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular têm mesma medida. Sabendo que suas alturas medem 4 cm, então a razão entre o volume do cone e o da pirâmide é:

A) 1
B) 4
C) $\frac{1}{\neq}$
D) π
E) 3π

Resolução:



Sejam **a** o raio da base do cone e **a** a aresta da base da pirâmide.

Sejam V_c e V_p o volume do cone e da pirâmide, respectivamente. Logo:

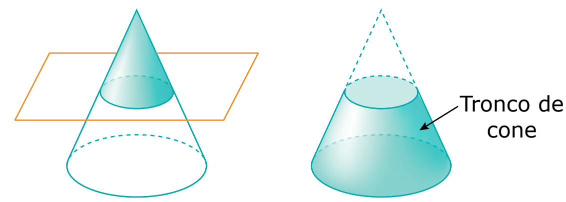
- $V_c = \frac{1}{3}.A_B.H = \frac{1}{3}\pi a^2 4 = \frac{4}{3}\pi a^2$ e
- $V_p = \frac{1}{3}.A_B.H = \frac{1}{3}a^2 4 = \frac{4}{3}a^2$

Assim, a razão entre os volumes é:

$$\frac{V_c}{V_p} = \frac{\frac{4}{3}\pi a^2}{\frac{4}{3}a^2} = \pi$$

TRONCO DE CONE

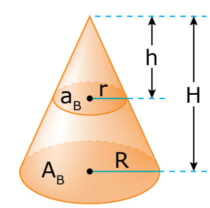
Secionando-se um cone por um plano paralelo à base, obtemos um sólido denominado tronco de cone. Veja:



O novo cone e o cone primitivo têm bases semelhantes, e os elementos lineares homólogos (raios das bases, geratrizes, alturas, etc.) são proporcionais. Assim, dizemos que eles são semelhantes.

Razão de semelhança

Dados dois cones semelhantes, a razão entre dois elementos lineares homólogos é denominada razão de semelhança. Essa razão será representada por **k**.



$$\boxed{\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = k}$$

Para razões entre áreas homólogas, temos:

$$\boxed{\frac{A_B}{a_B} = \frac{\neq R^2}{\neq r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = k^2}$$

Para razões entre volumes dos cones semelhantes, em que **V** e **v** são os volumes dos cones grande e pequeno, respectivamente, temos:

$$\boxed{\frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3}.A_B.H}{\frac{1}{3}.a_B.h} = \frac{A_B}{a_B}.\frac{H}{h} = k^2.k = k^3}$$

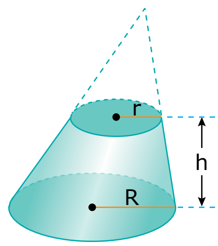
Podemos, então, generalizar da seguinte maneira:

i) A razão entre áreas homólogas de quaisquer dois sólidos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

ii) A razão entre os volumes de dois sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

VOLUME DO TRONCO DE CONE

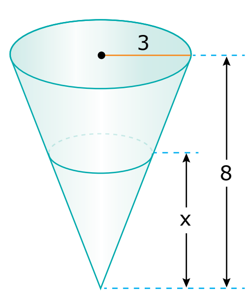
Dados o raio **R** da base maior, o raio **r** da base menor e **h** a medida da altura do tronco, o volume do tronco de cone pode ser obtido por meio da fórmula:



$$V_T = \frac{\pi h}{3}[R^2 + Rr + r^2]$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO

02. (FUVEST-SP) Um copo tem a forma de um cone com altura 8 cm e raio da base 3 cm. Queremos enchê-lo com quantidades iguais de suco e de água. Para que isso seja possível, a altura **x** atingida pelo primeiro líquido colocado deve ser:



A) $\frac{8}{3}$ cm.

B) 6 cm.

C) 4 cm.

D) $4\sqrt{3}$ cm.

E) $4\sqrt[3]{4}$ cm.

Resolução:

Chamamos de **V** o volume de suco e de água.

O volume do cone grande é, então, 2V.

Como os cones das figuras são semelhantes, então a razão entre os seus volumes é igual ao cubo da razão entre as alturas. Assim, temos:

$$\frac{2V}{V} = \left(\frac{8}{x}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{2} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow x = 4\sqrt[3]{4}\text{ cm}$$

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (FMP-RJ–2017) Um recipiente cilíndrico possui raio da base medindo 4 cm e altura medindo 20 cm. Um segundo recipiente tem a forma de um cone, e as medidas do raio de sua base e de sua altura são iguais às respectivas medidas do recipiente cilíndrico.

Qual é a razão entre o volume do recipiente cilíndrico e o volume do recipiente cônico?

A) $\frac{1}{2}$

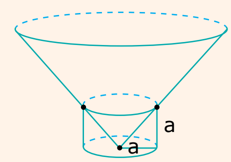
B) $\frac{1}{5}$

C) 3

D) 4

E) 5

02. (PUC-RS–2015) Uma casquinha de sorvete na forma de cone foi colocada em um suporte com formato de um cilindro, cujo raio da base e a altura medem **a** cm, conforme a figura.



O volume da parte da casquinha que está no interior do cilindro, em cm³, é:

A) $\frac{\pi a^2}{2}$

B) $\frac{\pi a^2}{3}$

C) $\frac{\pi a^3}{2}$

D) $\frac{\pi a^3}{3}$

E) $\frac{\pi a^3}{6}$

03. (UEMG–2015) Um reservatório de água, de formato cônico, com raio da tampa circular igual a 8 metros e altura igual a 9 metros, será substituído por outro de forma cúbica, de aresta igual a 10 metros.

Estando o reservatório cônico completamente cheio, ao se transferir a água para o reservatório cúbico, a altura do nível atingida pela água será de

Considere $\pi \cong 3$.

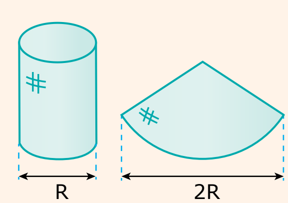
A) 5,76 m.

B) 4,43 m.

C) 6,38 m.

D) 8,74 m.

04. (Unicamp-SP) Depois de encher de areia um molde cilíndrico, uma criança virou-o sobre uma superfície horizontal. Após a retirada do molde, a areia escorreu, formando um cone cuja base tinha raio igual ao dobro do raio da base do cilindro.



A altura do cone formado pela areia era igual a:

A) $\frac{3}{4}$ da altura do cilindro.

B) $\frac{1}{2}$ da altura do cilindro.

C) $\frac{2}{3}$ da altura do cilindro.

D) $\frac{1}{3}$ da altura do cilindro.

05. (UPE) Um torneiro mecânico construiu uma peça retirando, de um cilindro metálico maciço, uma forma cônica, de acordo com a figura 1 a seguir:

Considere $\pi \cong 3$.

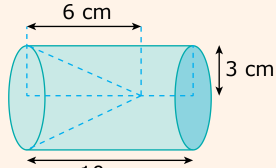
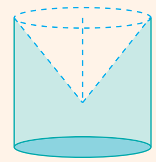


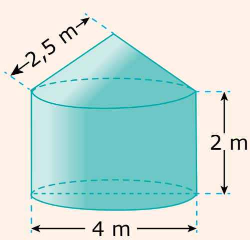
Figura 1


Peça

Qual é o volume aproximado da peça em milímetros cúbicos?

A) $2,16 . 10^5$
B) $7,2 . 10^4$
C) $2,8 . 10^5$
D) $8,32 . 10^4$
E) $3,14 . 10^5$

06. (UFPB) A prefeitura de certo município realizou um processo de licitação para a construção de 100 cisternas de placas de cimento para famílias da zona rural. Esse sistema de armazenamento de água é muito simples, de baixo custo e não poluente. A empreiteira vencedora estipulou o preço de 40 reais por m^2 construído, tomando por base a área externa da cisterna. O modelo de cisterna pedido no processo tem a forma de um cilindro com uma cobertura em forma de cone, conforme a figura a seguir:

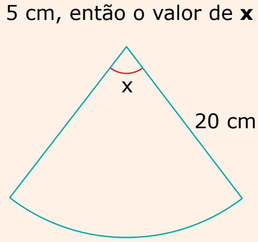


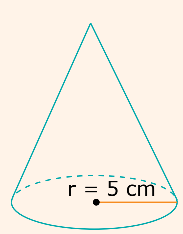
Considerando que a construção da base das cisternas deve estar incluída nos custos, é correto afirmar que o valor, em reais, a ser gasto pela prefeitura na construção das 100 cisternas será, no máximo, de:

Dado: $\pi = 3,14$.

A) 100 960.
B) 125 600.
C) 140 880.
D) 202 888.
E) 213 520.

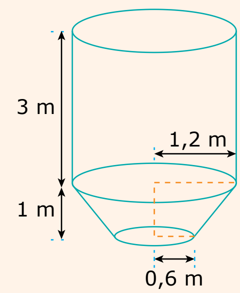
07. (UEL-PR) Uma chapa com forma de um setor de raio 20 cm e ângulo de **x** graus é manuseada para se transformar num cone. Se o raio da base do cone obtido é r = 5 cm, então o valor de **x** é:





A) 60°.
B) 75°.
C) 80°.
D) 85°.
E) 90°.

08. (UPF–2016) Um reservatório de água tem formato de um cilindro circular reto de 3 m de altura e base com 1,2 m de raio, seguido de um tronco de cone reto cujas bases são círculos paralelos, de raios medindo 1,2 m e 0,6 m respectivamente, e altura 1 m, como representado na figura a seguir:



Nesse reservatório, há um vazamento que desperdiça $\frac{1}{3}$ do seu volume por semana.

Considerando a aproximação $\pi \cong 3$ e sabendo que $1\ dm^3 = 1\ L$, esse vazamento é de

A) 4 320 litros.
B) 15,48 litros.
C) 15 480 litros.
D) 12 960 litros.
E) 5 160 litros.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

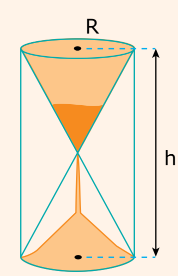
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

01. (PUC-SP–2018) Considere um cilindro reto de área lateral igual a $64\pi\ cm^2$ e um cone reto, com volume igual a $128\pi\ cm^3$ cujo raio da base é o dobro do raio da base do cilindro.

Sabendo que a altura do cone é 2 cm menor do que a altura do cilindro, e que a altura do cilindro é um número inteiro, a área lateral desse cone é

A) $100\pi\ cm^2$.
B) $80\pi\ cm^2$.
C) $64\pi\ cm^2$.
D) $40\pi\ cm^2$.

02. (UCS–2016) Uma ampulheta tem a forma de dois cones circulares retos idênticos (mesmo raio e mesma altura) no interior de um cilindro circular reto, conforme mostra a figura.



O volume da parte do cilindro sem os dois cones é igual ____________ soma dos volumes desses cones. Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna.

A) à
B) ao dobro da
C) à metade da
D) a um terço da
E) a dois terços da

03. (UFC-CE) Ao secionarmos um cone circular reto por um plano paralelo a sua base, cuja distância ao vértice do cone é igual a um terço da sua altura, obtemos dois sólidos: um cone circular reto S_1 e um tronco de cone S_2. A relação $\dfrac{\text{volume}(S_2)}{\text{volume}(S_1)}$ é igual a:

A) 33. C) 26. E) 3.
B) 27. D) 9.

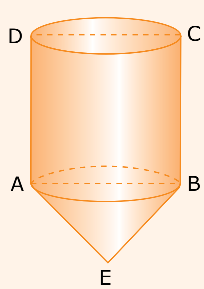
04. (Unifor-CE) Parte do líquido de um cilindro circular reto que está cheio é transferido para dois cones circulares retos idênticos de mesmo raio e mesma altura do cilindro. Sabendo-se que os cones ficaram totalmente cheios e que o nível da água que ficou no cilindro é de 3 m, a altura do cilindro é de

A) 5 m. C) 8 m. E) 12 m.
B) 6 m. D) 9 m.

05. (UEFS-BA–2017) Se um cone circular reto tem altura igual a 4 cm e base circunscrita a um hexágono regular de lado medindo 2 cm, então a sua área lateral, em cm^2, mede, aproximadamente:

A) $4\pi\sqrt{6}$ C) 4π E) $\pi\sqrt{2}$
B) $4\pi\sqrt{5}$ D) $\pi\sqrt{3}$

06. (Mackenzie-SP) No sólido da figura, ABCD é um quadrado de lado 2 e AE = BE = $\sqrt{10}$. O volume desse sólido é:



A) $\dfrac{5\neq}{2}$

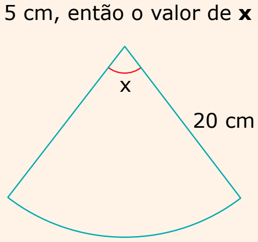
B) $\dfrac{4\neq}{3}$

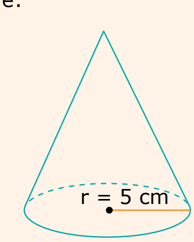
C) 4π

D) 5π

E) 3π

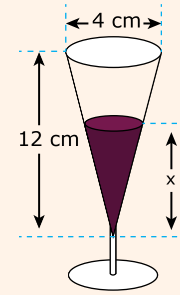
07. (UEL-PR) Uma chapa com forma de um setor de raio 20 cm e ângulo de **x** graus é manuseada para se transformar num cone. Se o raio da base do cone obtido é r = 5 cm, então o valor de **x** é:





A) 60°. C) 80°. E) 90°.
B) 75°. D) 85°.

08. (UFPR) A parte superior de uma taça tem o formato de um cone, com as dimensões indicadas na figura.



A) Qual o volume de líquido que essa taça comporta quando está completamente cheia?
B) Obtenha uma expressão para o volume **V** de líquido nessa taça, em função da altura **x** indicada na figura.

09. (IFAL–2016) Girando, em uma volta completa, um triângulo retângulo de catetos 3 cm e 4 cm, em torno de seu cateto maior, teremos o sólido a seguir com suas características:

A) pirâmide com área lateral 30 cm^2 e volume 10 cm^3.
B) cone com área lateral 15π cm^2 e volume 12π cm^3.
C) cone com área da base 16 cm^2 e volume 12π cm^3.
D) pirâmide com área da base e área lateral iguais a 12π cm^3.
E) cone com área da base e área lateral iguais a 15π cm^3.

10. (Mackenzie-SP–2016) Em um triângulo retângulo, a medida do menor cateto é 6 cm. Rotacionando esse triângulo ao redor desse cateto, obtém-se um sólido de revolução, cujo volume é 128π cm^3. Nessas condições, a área total da superfície do sólido obtido na revolução, em cm^2, é:

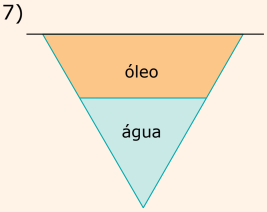
A) 144π C) 80π E) 64π
B) 120π D) 72π

11. (IFRS–2017) Um cone com altura igual a $\dfrac{30}{\neq}$ dm e raio de 1 dm é colocado com o vértice para baixo a fim de coletar a água de uma torneira que pinga 1 litro de água a cada hora, sendo o intervalo entre um pingo e outro constante.

Qual é o tempo necessário para que a água atinja a metade da altura do cone?

A) 1 hora e 15 minutos.
B) 1 hora e 25 minutos.
C) 2 horas e 30 minutos.
D) 3 horas e 30 minutos.
E) 5 horas.

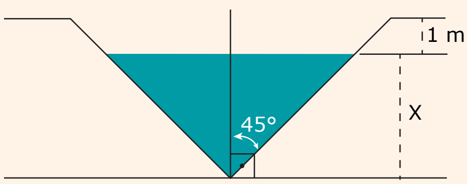
12. (UCB-DF–2017)



O desenho mostra a secção de um reservatório subterrâneo em forma de cone reto. Sabendo que a altura do reservatório é de 6 m, e que ele contém a mesma quantidade de água e óleo, a altura da coluna de água é

A) menor que 2 metros.
B) maior que 2 metros e menor que 3 metros.
C) maior que 3 metros e menor que 4 metros.
D) maior que 4 metros e menor que 5 metros.
E) maior que 5 metros.

13. (UERJ–2018) Um depósito de óleo tem a forma de um cone circular reto cujo eixo vertical forma com suas geratrizes o ângulo de 45°. Foram retirados desse depósito 19 m³ de óleo. Com isso, a altura do nível de óleo foi reduzida em 1 m e passou a ter **X** metros de altura.



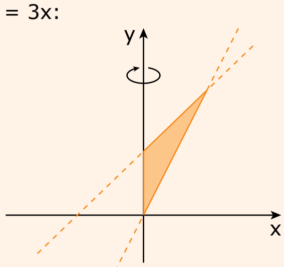
Considerando $\pi = 3$, calcule a altura **X** do nível de óleo.

14. (UFG-GO) A terra retirada na escavação de uma piscina semicircular de 6 m de raio e 1,25 m de profundidade foi amontoada, na forma de um cone circular reto, sobre uma superfície horizontal plana. Admita que a geratriz do cone faça um ângulo de 60° com a vertical e que a terra retirada tenha volume 20% maior do que o volume da piscina.

Nessas condições, a altura do cone, em metros, é de:

A) 2,0.
B) 2,8.
C) 3,0.
D) 3,8.
E) 4,0.

15. (UFMG) Na figura a seguir, está representada a região **T**, do plano cartesiano, limitada pelo eixo y e pelas retas $y = x + 1$ e $y = 3x$:



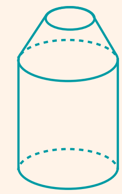
Seja **S** o sólido obtido pela rotação da região **T** em torno do eixo y. Então, é correto afirmar que o volume de **S** é:

A) $\frac{\neq}{24}$
B) $\frac{\neq}{12}$
C) $\frac{\neq}{8}$
D) $\frac{\neq}{4}$

SEÇÃO ENEM

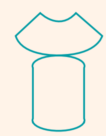
RESOLUÇÕES NO Bernoulli Play

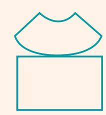
01. (Enem–2017) Para divulgar sua marca, uma empresa produziu um porta-canetas de brinde, na forma do sólido composto por um cilindro e um tronco de cone, como na figura.

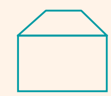


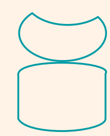
Para recobrir toda a superfície lateral do brinde, essa empresa encomendará um adesivo na forma planificada dessa superfície.

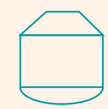
Que formato terá esse adesivo?

A) 

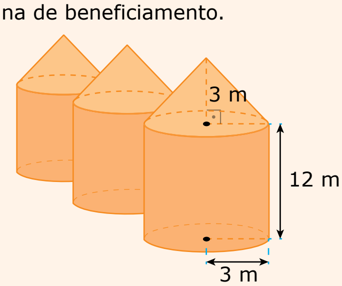
B) 

C) 

D) 

E) 

02. (Enem–2016) Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposta por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de 20 m³. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

A) 6.
B) 16.
C) 17.
D) 18.
E) 21.

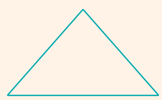
03. (Enem–2015) Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

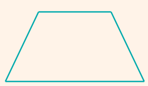
Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

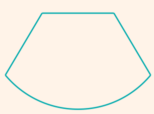
A) 1,44
B) 6,00
C) 7,20
D) 8,64
E) 36,00

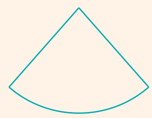
04. (Enem) Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

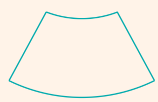
Qual deverá ser a forma do adesivo?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

05. (Enem) Nas empresas em geral, são utilizados dois tipos de copos plásticos descartáveis, ambos com a forma de troncos de cones circulares retos:

- copos pequenos, para a ingestão de café: raios das bases iguais a 2,4 cm e 1,8 cm e altura igual a 3,6 cm;
- copos grandes, para a ingestão de água: raios das bases iguais a 3,6 cm e 2,4 cm e altura igual a 8,0 cm.

Uma dessas empresas resolve substituir os dois modelos de copos descartáveis, fornecendo para cada um de seus funcionários canecas com a forma de um cilindro circular reto de altura igual a 6 cm e raio da base de comprimento igual a **y** centímetros. Tais canecas serão usadas tanto para beber café como para beber água.

Sabe-se que o volume de um tronco de cone circular reto, cujos raios das bases são respectivamente iguais a **R** e **r** e a altura é **h**, é dado pela expressão:

$$V_{\text{Tronco de cone}} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$$

O raio **y** da base dessas canecas deve ser tal que y^2 seja, no mínimo, igual a:

A) 2,664 cm.
B) 7,412 cm.
C) 12,160 cm.
D) 14,824 cm.
E) 19,840 cm.

06. (Enem) Um vasilhame na forma de um cilindro circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 30 cm está parcialmente ocupado por 625π cm³ de álcool. Suponha que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de um cone circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 6 cm, conforme ilustra a figura 1. O conjunto, como mostra a figura 2, é virado para baixo, sendo **H** a distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame.

Volume do cone: $V_{cone} = \frac{\pi r^2 h}{3}$.

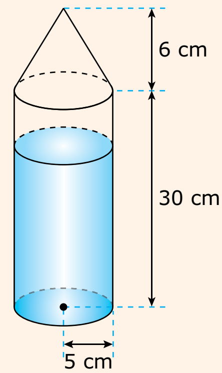


Figura 1

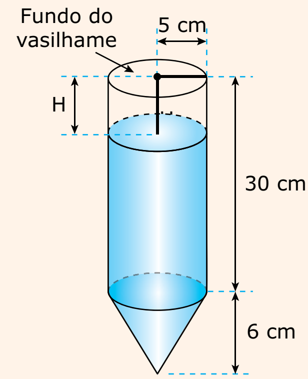


Figura 2

Considerando-se essas informações, qual é o valor da distância **H**?

A) 5 cm.
B) 7 cm.
C) 8 cm.
D) 12 cm.
E) 18 cm.

GABARITO

Meu aproveitamento

Aprendizagem

Acertei ______ Errei ______

01. C
02. D
03. A
04. A
05. A
06. E
07. D
08. E

Propostos

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. B
03. C
04. D
05. B
06. E
07. E
08.
   A) $V = 16\pi$ cm³
   B) $V_{\text{líquido}} = \frac{x^3\pi}{108}$ cm³
09. B
10. A
11. A
12. D
13. X = 2
14. C
15. B

Seção Enem

Acertei ______ Errei ______

01. B
02. D
03. B
04. E
05. C
06. B

Total dos meus acertos: ______ de ______ . ______ %