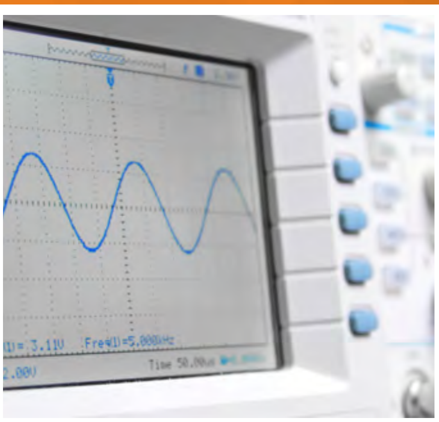
SEP

SISTEMA DE ENSINO
PREPARAENEM

MATEMÁTICA





2

SEP

SISTEMA DE ENSINO

PREPARAENEM

MATEMÁTICA

Volume 2 - 1ª Edição

Goiânia

CLASSIS EDITORA

2015

CLASSIS EDITORA

SISTEMA DE ENSINO PREPARAENEM - MATEMÁTICA

Volume 2

AUTORES
Alexandre Pullig Corrêa
Cristiano Siqueira

DIREÇÃO EDITORIAL
Alexandre Pullig Corrêa

COORDENAÇÃO DE ARTE
Gedson Clei Ribeiro Alves

CAPA
Gedson Clei Ribeiro Alves

IMAGEM DE CAPA
shutterstock.com

EDIÇÃO DE ARTE
Alex Alves da Silva
Gedson Clei Ribeiro Alves
Luiz Felipe Magalhães

REVISÃO
Alex Alves da Silva
Alexandre Pullig Corrêa
Cristiano Siqueira
Danielle Pullig Corrêa
Gedson Clei Ribeiro Alves
Yani Rebouças de Oliveira

PREPARAÇÃO DE TEXTOS
Alexandre Pullig Corrêa
Cristiano Siqueira

PROJETO GRÁFICO
Gedson Clei Ribeiro Alves
Alexandre Pullig Corrêa

DIAGRAMAÇÃO
Gedson Clei Ribeiro Alves

Goiânia - 1ª edição - 2015

CLASSIS EDITORA
Av. Eng. Eurico Miranda, Qd. 04, Lt. 12/14 - Sala 209
Ed. Concept Office - Vila Maria José
CEP: 74815465 - Goiânia - Goiás - Brasil
Fone: +55 (62) 3877 3214
classiseditora@gmail.com

ISBN: 978-85-88249-23-3

IMPRESSÃO E ACABAMENTO
POLIGRÁFICA

> "Competência é a faculdade de mobilizar um conjunto de recursos cognitivos – como saberes, habilidades e informações – para solucionar com pertinência e eficácia uma série de situações. Pensar em termos de competência significa pensar a sinergia, a orquestração de recursos cognitivos e afetivos diversos para enfrentar um conjunto de situações que apresentam analogias de estrutura."
>
> *Philippe Perrenoud*

Caro estudante,

Os novos desafios e mudanças propostas para a melhoria da educação brasileira têm provocado significativas transformações, exigindo mudanças tanto por parte da escola como por parte dos estudantes do ensino médio.

Nossa tradição escolar ainda tem muito do enciclopedismo iluminista. Muitos educadores ainda acreditam que devem fazer com que os alunos absorvam todo o conhecimento que existe no mundo, o que é impossível.

O novo aprendizado deve promover, não apenas a mera reprodução de dados, mas sim ajudá-lo a responder às transformações da sociedade e da cultura em que está inserido, desenvolvendo a capacidade cognitiva de interpretar textos, solucionar problemas e relacionar diferentes áreas do conhecimento.

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), desde a sua criação em 1998, procura avaliar as competências e habilidades adquiridas pelos estudantes ao término do ensino médio. Em 2009 o ENEM foi reformulado e, a partir de então, ganhou maior importância no cenário nacional, tornando-se o principal instrumento de seleção para as universidades no país. Ademais, ainda é o primeiro passo na promoção de um novo currículo para o ensino médio do Brasil.

A adoção do ENEM por todas as instituições federais de ensino superior do país em 2013 e o número recorde de inscritos em 2014 (que superou os 9,5 milhões de candidatos), revela que, além de ser hoje a forma principal de conquistar a tão sonhada vaga no curso superior, o exame está cada vez mais concorrido.

Com o intuito de oferecer condições mais efetivas para o aprendizado e o desenvolvimento das competências e habilidades estabelecidas pelo exame, o Sistema de Ensino PreparaEnem (SEP), apresenta os conteúdos de forma a desvendar os mistérios do exame, e de outros vestibulares, para garantir a você uma preparação completa e eficaz.

Grupo PREPARAENEM

SUMÁRIO

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA O ENEM

FRENTE A

FRENTE B

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. Dominar linguagens (DL)	dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.
II. Compreender fenômenos (CF)	construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.
III. Enfrentar situações-problema (SP)	selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.
IV. Construir argumentação (CA)	relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.
V. Elaborar propostas (EP)	recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS

Competência de área 1	
Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.	
H1	Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.
H2	Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.
H3	Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.
H4	Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.
H5	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2	
Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.	
H6	Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7	Identificar características de figuras planas ou espaciais.
H8	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
H9	Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3	
Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	
H10	Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11	Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.
H12	Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.
H13	Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.
H14	Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4	
Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.	
H15	Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16	Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.
H17	Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18	Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5	
Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.	
H19	Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20	Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21	Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22	Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6	
Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.	
H24	Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
H25	Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
H26	Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7	
Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.	
H27	Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28	Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29	Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.
H30	Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

OBJETOS DE CONHECIMENTO ASSOCIADOS À MATRIZ DE REFERÊNCIA

Conhecimentos numéricos	operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.
Conhecimentos geométricos	características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.
Conhecimentos de estatística e probabilidade	representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.
Conhecimentos algébricos	gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.
Conhecimentos algébricos/ geométricos	plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em : 28 jul. 2014.

COMBINAÇÃO SIMPLES

Em uma sorveteria, há sorvetes nos sabores morango, chocolate, creme e flocos. De quantas maneiras podemos montar uma casquinha, com dois sabores diferentes, nessa sorveteria?

Para determinarmos de quantas maneiras podemos montar uma casquinha, com dois sabores diferentes, utilizaremos um princípio de contagem denominado **combinação simples**. O termo "simples" indica que não há repetição entre os elementos.

Note que as possíveis casquinhas se diferem entre si:

- Pelos **elementos componentes.** Por exemplo: (creme, flocos) e (morango, flocos).
- As casquinhas (chocolate, creme) e (creme, chocolate) são iguais. Logo, a ordem dos elementos não altera a combinação.

Os grupos assim obtidos são chamados de **combinações simples** dos 4 elementos (sabores do sorvete), tomados 2 a 2 e são indicados por $C_{4,2}$.

De maneira geral, combinações simples de n elementos tomados k a k, indicados por $C_{n,k}$ com $n \geq k$, são todos os subconjuntos de k elementos que é possível formar a partir de um conjunto com n elementos.

A partir do princípio fundamental da contagem, é possível demonstrar que o número de combinações simples é dado por:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Portanto, o número de casquinhas, com dois sabores diferentes é dada por:

$$C_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4!}{2!.2!} = 6$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| De um grupo de 10 pessoas, deseja-se escolher uma comissão com 4 componentes. Quantas comissões podem ser formadas?

Resolução:

Devemos formar comissões com 4 componentes:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} = 210$$

02| UEG Na cantina "Canto Feliz", surgiram as seguintes vagas de trabalho: duas para serviços de limpeza, cinco para serviços de balcão, quatro para serviços de entregador e uma para serviços gerais. Para preencher essas vagas, candidataram-se 23 pessoas: oito para a função de limpeza, sete para a de balconista, seis para a de entregador e duas para serviços gerais. Considerando todas as possibilidades de seleção desses candidatos, determine o número total dessas possibilidades.

Resolução:

Há $C_{8,2} = \frac{8!}{2!.(8-2)!} = 28$ *modos de preencher as vagas para serviços de limpeza.*

$C_{7,5} = \frac{7!}{5!.(7-5)!} = 21$ *modos de preencher as vagas para balconista.*

$C_{6,4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$ *modos de selecionar 4 entregadores e 2 maneiras de escolher um candidato para a vaga de serviços gerais.*

Portanto, existem:

28.21.15.2 = 17.640 possibilidades de preenchimento das 12 vagas.

03. (UFC) Uma comissão de 5 membros será formada escolhendo-se parlamentares de um conjunto com 5 senadores e 3 deputados. Determine o número de comissões distintas que podem ser formadas obedecendo à regra: a presidência da comissão deve ser ocupada por um senador, e a vice-presidência, por um deputado (duas comissões com as mesmas pessoas, mas que a presidência ou a vice-presidência sejam ocupadas por pessoas diferentes, são consideradas distintas).

Resolução:

Há 5 escolhas para a presidência e 3 para a vice-presidência. Os outros membros da comissão podem ser escolhidos de $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!.(6-3)!} = 20$ *modos.*

Portanto, podemos formar uma comissão de $5 \,.\, 3 \,.\, 20 = 300$ *maneiras distintas.*

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

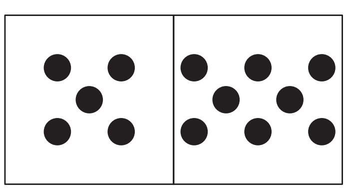
01| Quantos subconjuntos tem um conjunto de 5 elementos?

02| Quantos times de futebol de salão podemos formar com 8 jogadores capazes de jogar em qualquer posição?

03| Dados 10 pontos do espaço, dos quais 6 são coplanares. Quantos planos ficam definidos?

04| Dadas duas retas r e s paralelas. Sobre a reta r marcam-se 4 pontos distintos e sobre a reta s marcam-se 6 pontos distintos. Quantos triângulos com vértices nesses pontos podem ser formados? Quantos quadriláteros?

05| UFPE As pedras de um dominó usual são compostas por dois quadrados, com 7 possíveis marcas (de zero pontos até 6 pontos). Quantas pedras terá um dominó se cada quadrado puder ter até 9 pontos? Veja no desenho abaixo um exemplo de uma nova pedra do dominó.



06| UFPE De um grupo de 10 pessoas, entre as quais, Maria, Marta e Mércia, deseja-se escolher uma comissão com 4 componentes. Quantas comissões podem ser formadas, das quais participem Maria e Marta, mas Mércia não participe?

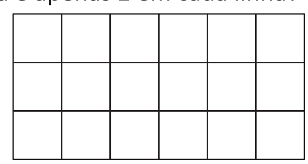
07| Numa escola existem 5 professores de Matemática e 4 de Química. Responda:

A Quantas comissões de 5 professores podemos formar?

B Quantas comissões de 5 professores podemos formar, de modo que sejam constituídas por 3 matemáticos e 2 químicos?

C Quantas comissões de 5 professores podemos formar, de modo que sejam constituídas por pelo menos 2 matemáticos?

08| A malha quadriculada abaixo é formada por 3 linhas e 6 colunas. De quantas maneiras distintas podemos pintar 6 desses quadrados, sendo pintados exatamente 1 em cada coluna e apenas 2 em cada linha?



09| UERJ Para montar um sanduíche, os clientes de uma lanchonete podem escolher:

- Um dentre os tipos de pão: calabresa, orégano e queijo.
- Um dentre os tamanhos: pequeno e grande.
- De um até cinco dentre os tipos de recheio: sardinha, atum, queijo, presunto e salame, sem possibilidade de repetição de recheio num mesmo sanduíche.

Calcule:

A Quantos sanduíches distintos podem ser montados.

B O número de sanduíches distintos que um cliente pode montar, se ele não gosta de orégano, só come sanduíches pequenos e deseja dois recheios em cada sanduíche.

10| UFPE Um escritório tem 7 copiadoras e 8 funcionários que podem operá-las.

Calcule o número m de maneiras de se copiar simultaneamente (em máquinas distintas, sendo operadas por funcionários diferentes) 5 trabalhos idênticos neste escritório. Indique a soma dos dígitos de m.

11| UNESP De uma certa doença são conhecidos n sintomas. Se, num paciente, forem detectados k ou mais desses possíveis sintomas, $0 < k \leq n$, a doença é diagnosticada. Seja S(n, k) o número de combinações diferentes dos sintomas possíveis para que o diagnóstico possa ser completado de maneira segura.

A Determine S (6, 4).

B Dê uma expressão geral para S(n, k), onde n e k são inteiros positivos, com $0 < k \leq n$.

T ENEM E VESTIBULARES

01| **UERN** Numa lanchonete são vendidos sucos de 8 sabores diferentes, sendo que 3 são de frutas cítricas e os demais de frutas silvestres. De quantas maneiras pode-se escolher 3 sucos de sabores diferentes, sendo que pelo menos 2 deles sejam de frutas silvestres?

- A 40
- B 55
- C 72
- D 85

02| **PUCRJ** Em uma sorveteria, há sorvetes nos sabores morango, chocolate, creme e flocos.

De quantas maneiras podemos montar uma casquinha, com dois sabores diferentes, nessa sorveteria?

- A 6 maneiras
- B 7 maneiras
- C 8 maneiras
- D 9 maneiras
- E 10 maneiras

03| **UFSM** As doenças cardiovasculares aparecem em primeiro lugar entre as causas de morte no Brasil. As cirurgias cardíacas são alternativas bastante eficazes no tratamento dessas doenças.

Supõe-se que um hospital dispõe de 5 médicos cardiologistas, 2 médicos anestesistas e 6 instrumentadores que fazem parte do grupo de profissionais habilitados para realizar cirurgias cardíacas.

Quantas equipes diferentes podem ser formadas com 3 cardiologistas, 1 anestesista e 4 instrumentadores?

- A 200
- B 300
- C 600
- D 720
- E 1.200

04| **UDESC** Uma turma de 25 alunos precisa escolher 6 representantes. Sabe-se que 28% dos alunos desta turma são mulheres, e que os representantes escolhidos devem ser 3 homens e 3 mulheres. Assim, o número de possibilidades para esta escolha é:

- A 28560
- B 851
- C 13800
- D 1028160
- E 5106

05| **UCS** Um professor apresenta 10 questões, das quais os seus alunos poderão escolher 8 para serem respondidas. De quantas maneiras diferentes um aluno pode escolher as 8 questões?

- A 90
- B 80
- C 45
- D 40
- E 8

06| **IFSUL** Sendo 15 pontos distintos pertencentes a uma circunferência, o número de retas, distintas, determinadas por esses pontos, é

- A 14
- B 91
- C 105
- D 210

07| **ENEM** Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus nacionais	Museus internacionais
Masp — São Paulo	**Louvre** — Paris
MAM — São Paulo	**Prado** — Madri
Ipiranga — São Paulo	**British Museum** — Londres
Imperial — Petrópolis	**Metropolitan** — Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

- A 6
- B 8
- C 20
- D 24
- E 36

08| INSPER Um dirigente sugeriu a criação de um torneio de futebol chamado Copa dos Campeões, disputado apenas pelos oito países que já foram campeões mundiais: os três sul-americanos (Uruguai, Brasil e Argentina) e os cinco europeus (Itália, Alemanha, Inglaterra, França e Espanha). As oito seleções seriam divididas em dois grupos de quatro, sendo os jogos do grupo A disputados no Rio de Janeiro e os do grupo B em São Paulo. Considerando os integrantes de cada grupo e as cidades onde serão realizados os jogos, o número de maneiras diferentes de dividir as oito seleções de modo que as três sul-americanas não fiquem no mesmo grupo é

A) 140

B) 120

C) 70

D) 60

E) 40

09| UNESP Um professor, ao elaborar uma prova composta de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas cada e apenas uma correta, deseja que haja um equilíbrio no número de alternativas corretas, a serem assinaladas com X na folha de respostas. Isto é, ele deseja que duas questões sejam assinaladas com a alternativa A, duas com a B, e assim por diante, como mostra o modelo.

Modelo de folha de resposta (gabarito)

	A	B	C	D	E
01	X				
02			X		
03		X			
04				X	
05	X				
06					X
07				X	
08					X
09		X			
10			X		

Nessas condições, a quantidade de folha de respostas diferentes, com a letra X disposta nas alternativas corretas, será

A) 302 400

B) 113 400

C) 226 800

D) 181 440

E) 604 800

10| UEMG Na Copa das Confederações de 2013, no Brasil, onde a seleção brasileira foi campeã, o técnico Luiz Felipe Scolari tinha à sua disposição 23 jogadores de várias posições, sendo: 3 goleiros, 8 defensores, 6 meio-campistas e 6 atacantes. Para formar seu time, com 11 jogadores, o técnico utiliza 1 goleiro , 4 defensores , 3 meio-campistas e 3 atacantes. Tendo sempre Júlio César como goleiro e Fred como atacante, o número de times distintos que o técnico poderá formar é

A) 14 000

B) 480

C) $8! + 4!$

D) 72 000

11| UEMG O jogo da Mega Sena consiste no sorteio de 6 números distintos de 1 a 60. Um apostador, depois de vários anos de análise, deduziu que, no próximo sorteio, os 6 números sorteados estariam entre os 10 números que tinha escolhido.

Sendo assim, com a intenção de garantir seu prêmio na Sena, ele resolveu fazer todos os possíveis jogos com 6 números entre os 10 números escolhidos.

Quantos reais ele gastará para fazê-los, sabendo que cada jogo com 6 números custa R$ 2,00?

A) R$ 540,00

B) R$ 302.400,00

C) R$ 420,00

D) R$ 5.040,00

12| UDESC As frutas são alimentos que não podem faltar na nossa alimentação, pelas suas vitaminas e pela energia que nos fornecem. Vera consultou um nutricionista que lhe sugeriu uma dieta que incluísse a ingestão de três frutas diariamente, dentre as seguintes opções: abacaxi, banana, caqui, laranja, maçã, pera e uva. Suponha que Vera siga rigorosamente a sugestão do nutricionista, ingerindo três frutas por dia, sendo pelo menos duas diferentes. Então, ela pode montar sua dieta diária, com as opções diferentes de frutas recomendadas, de:

A) 57 maneiras

B) 50 maneiras

C) 56 maneiras

D) 77 maneiras

E) 98 maneiras

13| UERN Uma família do interior, composta por 10 pessoas, necessita fazer uma viagem de retorno à cidade de origem após passar férias no litoral. A viagem será feita de ônibus, no domingo, e apenas dois horários estão disponíveis. De quantas maneiras poderão viajar essas pessoas de forma que a metade da família viaje num ônibus e a outra metade no outro?

- **A** 45
- **B** 252
- **C** 136
- **D** 90

14| UERN Régis está em uma loja de roupas e deseja selecionar 4 camisas dentre 14 modelos diferentes, sendo essas 8 brancas e 6 azuis. De quantas maneiras ele poderá escolher as 4 camisas de forma que pelo menos uma delas tenha cor distinta das demais?

- **A** 748
- **B** 916
- **C** 812
- **D** 636

15| FGV As saladas de frutas de um restaurante são feitas misturando pelo menos duas frutas escolhidas entre: banana, laranja, maçã, abacaxi e melão.

Quantos tipos diferentes de saladas de frutas podem ser feitos considerando apenas os tipos de frutas e não as quantidades?

- **A** 26
- **B** 24
- **C** 22
- **D** 30
- **E** 28

16| UFU Uma fábrica de tintas necessita contratar uma equipe para desenvolver e produzir um novo tipo de produto. A equipe deve ser formada por 4 químicos, 1 engenheiro ambiental e 2 engenheiros de produção. Se no processo final de seleção compareceram 6 químicos, 3 engenheiros ambientais e 4 engenheiros de produção, o número de maneiras que a equipe poderá ser formada é igual a (nos itens abaixo, x denota multiplicação numérica):

- **A** $6!\,.\,3$
- **B** $6!\,.\,18$
- **C** $6!\,.\,\frac{3}{8}$
- **D** $6!\,.\,\frac{3}{4}$

17| UFU Para participar de um campeonato de Futsal, um técnico dispõe de 3 goleiros, 3 defensores, 6 alas e 4 atacantes. Sabendo-se que sua equipe sempre jogará com 1 goleiro, 1 defensor, 2 alas e 1 atacante, quantos times diferentes o técnico poderá montar?

- **A** 216
- **B** 432
- **C** 480
- **D** 540

18| UFU Considere nove barras de metal que medem, respectivamente: 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9 metros. Quantas combinações de cinco barras, ordenadas em ordem crescente de comprimento, podem ser feitas de tal forma que a barra de 5 metros ocupe sempre a quarta posição?

- **A** 32
- **B** 16
- **C** 20
- **D** 18
- **E** 120

19| ENEM Estima-se que haja, no Acre, 209 espécies de mamíferos, distribuídas conforme a tabela a seguir.

grupos taxonômicos	número de espécies
Artiodáctilos	4
Carnívoros	18
Cetáceos	2
Quirópteros	103
Lagomorfos	1
Marsupiais	16
Perissodáctilos	1
Primatas	20
Roedores	33
Sirênios	1
Edentados	10
Total	209

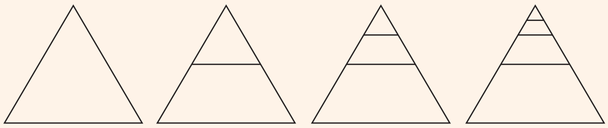
T & C Amazônia, ano 1, n.º 3, dez./2003.

Deseja-se realizar um estudo comparativo entre três dessas espécies de mamíferos — uma do grupo Cetáceos, outra do grupo Primatas e a terceira do grupo Roedores.

O número de conjuntos distintos que podem ser formados com essas espécies para esse estudo é igual a

- **A** 1.320
- **B** 2.090
- **C** 5.845
- **D** 6.600
- **E** 7.245

20| UFRGS Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



etapa 1 etapa 2 etapa 3 etapa 4

Na etapa 1, há um único triângulo equilátero. Na etapa 2, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo da etapa 1, formando dois triângulos equiláteros. Na etapa 3, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo menor da etapa 2, formando três triângulos equiláteros. Na etapa 4 e nas etapas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos triângulos menores da etapa anterior.

O número de trapézios na 6ª etapa de construção é

- **A** 14
- **B** 15
- **C** 16
- **D** 17
- **E** 18

TEXTO COMPLEMENTAR

O PRINCÍPIO DAS CASAS DOS POMBOS

Também conhecido como teorema de Dirichlet ou princípio das gavetas de Dirichlet, pois supõe-se que o primeiro relato deste princípio foi feito por Dirichlet em 1.834, com o nome de Schubfachprinzip ("princípio das gavetas").

Um possível enunciado para este princípio é o seguinte:

Se n objetos forem colocados em, no máximo, $n - 1$ gavetas, então, pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos.

Sendo um pouco mais formal:

Se o número de elementos de um conjunto finito A é maior do que o número de elementos de um outro conjunto B, então uma função de A em B não pode ser injetora.

Apesar de ser um fato extremamente elementar, ele é útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo, devemos identificar, na situação dada, quem faz o papel dos objetos e quem faz o papel das gavetas. Veja alguns exemplos de problemas com resolução a partir do princípio:

Problema 1: Quantos lançamentos de dado (um dado de 6 faces) são necessários para se garantir que um mesmo número vai cair duas vezes?

Solução: Na "pior" das hipóteses, se jogarmos o dado 6 vezes, teremos os números (não necessariamente nesta ordem): 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Se jogarmos o dado mais uma vez, o resultado será um número igual a outro já obtido.

Conclusão: Como temos 6 possibilidades de resultados (caixas), se jogarmos o dado $6 + 1 = 7$ vezes (pombos), teremos um número que se repete mais do que uma vez. (Princípio das Casas dos Pombos)

Problema 2: Uma urna contém 3 tipos de bolas (azul, vermelha, amarela). Quantas bolas no mínimo devemos retirar da sacola para garantirmos que temos duas bolas da mesma cor?

Solução: Na "pior" das hipóteses, ao retirarmos 3 bolas, teremos as cores (não necessariamente nesta ordem): azul, vermelho e amarela. Se retirarmos mais uma bola, a cor será uma das obtidas anteriormente.

Conclusão: Como temos 3 possibilidades de cores (caixas), se retirarmos $3 + 1 = 4$ bolas (pombos), teremos uma cor que se repete mais do que uma vez. (Princípio das Casas dos Pombos)

PROBABILIDADE

EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS

Há certos experimentos que embora sejam repetidos muitas vezes e sob condições idênticas, não apresentam os mesmos resultados. Por exemplo, no lançamento de um dado honesto, o resultado é imprevisível; não se pode determiná-lo antes de ser realizado. Aos experimentos desse tipo damos o nome de **experimentos aleatórios (ou casuais).**

Por Exemplo:

- Lançamento de uma moeda perfeita.
- Retirada de uma carta de um baralho.
- Resultado de um jogo da sena.

Pelo fato de não sabermos o resultado exato de um fenômeno aleatório é que buscamos os resultados prováveis, as chances, as probabilidades de um determinado resultado ocorrer. A teoria das probabilidades cria, elabora e pesquisa modelos para estudar os experimentos aleatórios.

ESPAÇO AMOSTRAL

Em um experimento aleatório, o conjunto formado por todos os resultados possíveis é chamado espaço amostral e é indicado pela letra U.

Por Exemplo:

- No lançamento de uma moeda, temos o seguinte espaço amostral:
  U = {cara, coroa}.
- No lançamento de um dado comum, temos o seguinte espaço amostral:
  U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- No lançamento simultâneo de uma moeda e dado comum, temos o seguinte espaço amostral:

  U = {(cara, 1), (cara, 2), (cara, 3), (cara, 4), (cara, 5), (cara, 6), (coroa, 1), (coroa, 2), (coroa, 3), (coroa, 4), (coroa, 5), (coroa, 6)}.
- No lançamento simultâneo de um dado azul e um dado laranja, temos o seguinte espaço amostral:

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
5	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
6	(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

EVENTO

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de evento.

Por Exemplo:

- No lançamento de um dado comum, podemos ter os seguintes eventos:

  Evento A: Obter um número par: A = {2, 4, 6}.

  Evento B: Obter um número maior que 2: B = {3, 4, 5, 6}.

- No lançamento simultâneo de uma moeda e um dado comum, podemos ter os seguintes eventos:

  Evento A: Obter cara na moeda e um número par no dado: A = {(cara, 2), (cara, 4), (cara, 6)}.

  Evento B: Obter 1 ou 5 no dado: B = {(cara, 1), (cara, 5), (coroa, 1), (coroa, 5)}.

- No lançamento simultâneo de dois dados, podemos ter os seguintes eventos:

  Evento A: Obter números iguais: A = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)}.

  Evento B: Obter números cuja soma é 4: B = {(1, 3), (2, 2), (3, 1)}.

PROBABILIDADE

Quando num experimento aleatório com espaço amostral finito, consideramos que todo evento elementar tem a mesma chance de ocorrer (espaço equiprovável), a probabilidade de ocorrer um evento A, indicada por p(A), é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. Assim, temos que:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{\text{número de elementos de A}}{\text{número de elementos de U}}$$

Pela definição,temos:

- $0 \leq p(A) \leq 1$.
- Se $p(A) = 0$, então A é chamado evento impossível, ou seja, necessariamente não ocorrerá.
- Se $p(A) = 1$, então A é chamado evento certo, ou seja, necessariamente ocorrerá.

OBSERVAÇÕES:

- Sejam A e $\overline{A}$ dois eventos de um espaço amostral U; sendo $\overline{A}$ o evento complementar de A, tem-se que: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

- Experimentos não equiprováveis são aqueles em que seus eventos elementares do espaço amostral não apresentam a mesma probabilidade de ocorrência. Para resolver problemas desta natureza temos que lembrar que a soma das probabilidades de todos os eventos elementares é igual a 1.

Por Exemplo:

- No lançamento simultâneo de um dado e de uma moeda, vamos obter a probabilidade de obtermos cara na moeda e um número par no dado.

Espaço amostral:

U = {(cara, 1), (cara, 2), (cara, 3), (cara, 4), (cara, 5), (cara, 6), (coroa, 1), (coroa, 2), (coroa, 3), (coroa, 4), (coroa, 5), (coroa, 6)}, logo n(U) = 12.

Evento:

A = {(cara,2),(cara,4),(cara,6)}, logo: n(A) = 3.

Portanto, a probabilidade de obtermos cara na moeda e um número par no dado, é:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| No lançamento de uma moeda, qual a probabilidade de obter a face coroa?

Resolução:

- *Espaço amostral: U = {cara, coroa}, logo n(U) = 2.*
- *Evento: A = {coroa}, logo n(A) = 1.*

Portanto, a probabilidade é dada por:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$$

02| Uma urna contém 10 bolas numeradas de 1 a 10. Uma bola é retirada ao acaso da urna. Qual a probabilidade de ser uma bola com número maior ou igual a 7?

Resolução:

- *Espaço amostral: U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}, logo n(U) = 10.*
- *Evento: A = {7, 8, 9, 10}, logo n(A) = 4.*

Portanto, a probabilidade é dada por:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{10} = 0,4 = 40\%$$

03| No lançamento simultâneo de dois dados comuns, determine a probabilidade de se obter faces voltadas para cima cuja soma seja igual a 9?

Resolução:

- *Espaço amostral: No lançamento simultâneo de dois dados, temos o seguinte espaço amostral, com n(U) = 36.*

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

- *O evento (A) consiste em obter soma 9 nas faces que estão voltadas para cima. Assim, temos que A = {(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}. Logo: n(A) = 4.*

Portanto, a probabilidade é dada por:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \cong 0,1111 \cong 11,11\%$$

04| Uma urna contém 4 bolas azuis e 3 bolas verdes. Ao retiramos de uma só vez duas bolas dessa urna, qual a probabilidade das bolas retiradas serem de cores diferentes?

Resolução:

- *O Espaço amostral (U) é o conjunto formado por todos os subconjuntos com 2 elementos obtidos a partir do conjunto de 7 bolas. Assim, temos que:*

$$n(U) = C_{7,2} = \frac{7!}{(7-2)!2!} = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

- *O evento (A) é um conjunto formado por todos os pares ordenados formados exatamente por uma bola azul e uma verde. Assim, temos que n(A) = 4.3 = 12.*

Portanto, a probabilidade é dada por:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(U)} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \cong 0,571 \cong 57,1\%$$

05| Considere um dado viciado de modo que a probabilidade de se obter uma face com um número ímpar é dobro da probabilidade de se obter um número par. Assim, determine a probabilidade de se obter o número 1 no lançamento desse dado.

Resolução:

De acordo com o enunciado, temos que:

- *P(2) = P(4) = P(6) = x.*
- *P(1) = P(3) = P(5) = 2x.*
- *P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1.*

Assim, temos que:

$$2x + x + 2x + x + 2x + x = 1 \Rightarrow 9x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{9}$$

Portanto, a probabilidade de se obter o número 1 é $\frac{2}{9}$.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Em uma pesquisa de opinião feita com 200 pessoas sobre o consumo dos produtos A, B e C constatou-se que: 60 entrevistados consomem A, 86 consomem B, 92 consomem C, 24 consomem A e B, 22 consomem A e C, 26 consomem B e C, 10 consomem A, B e C. Se escolhermos ao acaso um dentre os entrevistados, qual a probabilidade de dele não consumir nenhum dos três produtos?

02| UNICAMP Um dado é jogado três vezes, uma após a outra. Pergunta-se:

A) Quantos são os resultados possíveis em que os três números obtidos são diferentes?

B) Qual a probabilidade da soma dos resultados ser maior ou igual a 16?

03| Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Uma bola é retirada ao acaso da urna, determine:

A) A probabilidade de ser uma bola com um número par.

B) A probabilidade de ser uma bola com um número menor que 9.

C) A probabilidade de ser uma bola com um número primo.

04| Considere um casal planeja ter 2 filhos.

Determine a probabilidade dos eventos:

A) Os 2 serem do sexo feminino.

B) Pelo menos 1 ser do sexo masculino.

C) Os 2 serem do mesmo sexo.

05| UNICAMP Em uma festa para calouros estão presentes 250 calouros e 350 calouras. Para dançar, cada calouro escolhe uma caloura ao acaso formando um par. Pergunta-se:

A) Quantos pares podem ser formados?

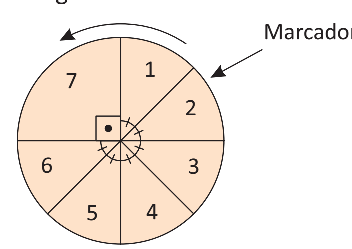
B) Qual a probabilidade de que uma determinada caloura não esteja dançando no momento em que todos os 250 calouros estão dançando?

06| PUC Qual a probabilidade de um número escolhido de 1 a 100 ser um quadrado perfeito?

07| FUVEST Uma urna contém três bolas pretas e cinco bolas brancas. Quantas bolas azuis devem ser colocadas nessa urna de modo que, retirando-se uma bola ao acaso, a probabilidade de ela ser azul seja igual a $\frac{2}{3}$?

08| UNESP Duas máquinas A e B produzem juntas 5.000 peças em um dia. A máquina A produz 2.000 peças, das quais 2% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 3.000 peças, das quais 3% são defeituosas. Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constatou-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que essa peça escolhida tenha sido produzida pela máquina A?

09| UFLA Em um programa de auditório, utiliza-se uma roleta, como na figura.



A) A roleta é girada três vezes. Calcule a probabilidade de os números obtidos no primeiro giro, no segundo giro e no terceiro giro, serem, respectivamente, 1, 2 e 3.

B) A roleta é girada duas vezes. Calcule a probabilidade de a soma do número obtido no primeiro giro mais o número obtido no segundo giro ser menor que 13.

10| Uma moeda é viciada de tal forma que os resultados possíveis, cara e coroa são tais, que a probabilidade de sair cara num lançamento é o quádruplo da de sair coroa. Lançando-se uma vez a moeda qual a probabilidade de sair coroa?

T ENEM E VESTIBULARES

01| UEMG Em uma empresa, foi feita uma pré-seleção para sorteio de uma viagem. Esta pré-seleção se iniciou com a distribuição, entre os funcionários, de fichas numeradas de 1 a 23. Em seguida, foram selecionados os funcionários com as fichas numeradas, com as seguintes regras:

- Fichas com um algarismo: o algarismo tem que ser primo;
- Fichas com dois algarismos: a soma dos algarismos deverá ser um número primo.

Após essa pré-seleção, Glorinha foi classificada para o sorteio.

A probabilidade de Glorinha ganhar essa viagem no sorteio é de, aproximadamente,

A) 7%

B) 8%

C) 9%

D) 10%

02| FUVEST O gamão é um jogo de tabuleiro muito antigo, para dois oponentes, que combina a sorte, em lances de dados, com estratégia, no movimento das peças. Pelas regras adotadas, atualmente, no Brasil, o número total de casas que as peças de um jogador podem avançar, numa dada jogada, é determinado pelo resultado do lançamento de dois dados. Esse número é igual à soma dos valores obtidos nos dois dados, se esses valores forem diferentes entre si; e é igual ao dobro da soma, se os valores obtidos nos dois dados forem iguais. Supondo que os dados não sejam viciados, a probabilidade de um jogador poder fazer suas peças andarem pelo menos oito casas em uma jogada é

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{5}{12}$

C) $\frac{17}{36}$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{19}{36}$

03| PUC Jogamos uma moeda comum e um dado comum.

A probabilidade de sair um número par e a face coroa é:

A) 0,1

B) 0,2

C) 0,25

D) 0,33

E) 0,5

04| UERJ Três modelos de aparelhos de ar-condicionado, I, II e III, de diferentes potências, são produzidos por um determinado fabricante. Uma consulta sobre intenção de troca de modelo foi realizada com 1000 usuários desses produtos. Observe a matriz A, na qual cada elemento a_{ij} representa o número daqueles que pretendem trocar do modelo i para o modelo j.

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 150 & 200 \\ 0 & 100 & 300 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Escolhendo-se aleatoriamente um dos usuários consultados, a probabilidade de que ele não pretenda trocar seu modelo de ar-condicionado é igual a:

A) 20%

B) 35%

C) 40%

D) 65%

05| ENEM José, Paulo e Antônio estão jogando dados não viciados, nos quais, em cada uma das seis faces, há um número de 1 a 6. Cada um deles jogará dois dados simultaneamente. José acredita que, após jogar seus dados, os números das faces voltadas para cima lhe darão uma soma igual a 7. Já Paulo acredita que sua soma será igual a 4 e Antônio acredita que sua soma será igual a 8.

Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de acertar sua respectiva soma é

A) Antônio, já que sua soma é a maior de todas as escolhidas.

B) José e Antônio, já que há 6 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 4 possibilidades para a escolha de Paulo.

C) José e Antônio, já que há 3 possibilidades tanto para a escolha de José quanto para a escolha de Antônio, e há apenas 2 possibilidades para a escolha de Paulo.

D) José, já que ha 6 possibilidades para formar sua soma, 5 possibilidades para formar a soma de Antônio e apenas 3 possibilidades para formar a soma de Paulo.

E) Paulo, já que sua soma é a menor de todas.

06| UFPR André, Beatriz e João resolveram usar duas moedas comuns, não viciadas, para decidir quem irá lavar a louça do jantar, lançando as duas moedas simultaneamente, uma única vez. Se aparecerem duas coroas, André lavará a louça; se aparecerem duas caras, Beatriz lavará a louça; e se aparecerem uma cara e uma coroa, João lavará a louça. A probabilidade de que João venha a ser sorteado para lavar a louça é de:

A) 25%.

B) 27,5%.

C) 30%.

D) 33,3%.

E) 50%.

07| UFPR Em uma cidade de 250.000 habitantes, aproximadamente 10.000 foram vacinados contra o vírus H1N1, número muito menor do que as autoridades de saúde previam. Se tomarmos aleatoriamente 50 habitantes dessa cidade, quantos deles se espera que tenham sido vacinados contra o vírus H1N1?

A) 2 habitantes.

B) 6 habitantes.

C) 8 habitantes.

D) 12 habitantes.

E) 15 habitantes.

08| **IFAL** Um casal planeja ter 4 crianças. A probabilidade de que o casal tenha exatamente 3 meninos, dado que a primeira criança que nasceu é menina é:

- **A** $\frac{1}{4}$
- **B** $\frac{1}{8}$
- **C** $\frac{1}{3}$
- **D** $\frac{1}{2}$
- **E** $\frac{1}{5}$

09| **ENEM** Em uma reserva florestal existem 263 espécies de peixes, 122 espécies de mamíferos, 93 espécies de répteis, 1 132 espécies de borboletas e 656 espécies de aves.

Disponível em: http:www.wwf.org.br. Acesso em: 23 abr. 2010 (adaptado).

Se uma espécie animal for capturada ao acaso, qual a probabilidade de ser uma borboleta?

- **A** 63,31%
- **B** 60,18%
- **C** 56,52%
- **D** 49,96%
- **E** 43,27%

10| **ENEM** Num determinado bairro há duas empresas de ônibus, ANDABEM e BOMPASSEIO, que fazem o trajeto levando e trazendo passageiros do subúrbio ao centro da cidade. Um ônibus de cada uma dessas empresas parte do terminal a cada 30 minutos, nos horários indicados na tabela.

ANDABEM	BOMPASSEIO
...	...
6h00min	6h10min
6h30min	6h40min
7h00min	7h10min
7h30min	7h40min
...	...

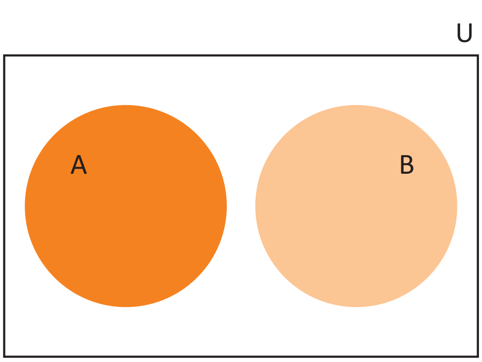
Carlos mora próximo ao terminal de ônibus e trabalha na cidade. Como não tem hora certa para chegar ao trabalho e nem preferência por qualquer das empresas, toma sempre o primeiro ônibus que sai do terminal. Nessa situação, pode-se afirmar que a probabilidade de Carlos viajar num ônibus da empresa ANDABEM é:

- **A** um quarto da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
- **B** um terço da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
- **C** metade da probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
- **D** duas vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.
- **E** três vezes maior do que a probabilidade de ele viajar num ônibus da empresa BOMPASSEIO.

PROBABILIDADE DA UNIÃO DE DOIS EVENTOS

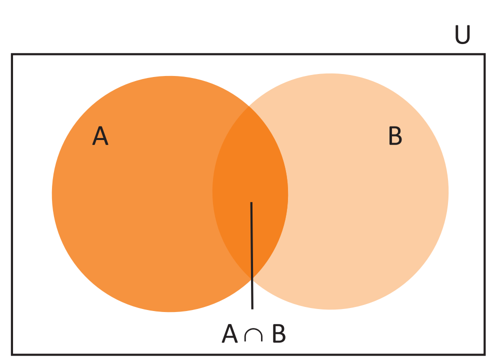
Sendo A e B eventos do mesmo espaço amostral, a probabilidade da ocorrência do evento $A \cup B$, será dada por:

- 1º caso: Se $A \cap B = \varnothing$. Nesse caso, os eventos são chamados de mutuamente exclusivos.



$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

- 2º caso: Se $A \cap B \neq \varnothing$



$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Exemplo:

- Num grupo de 40 alunos, 20 jogam futebol, 15 jogam vôlei e 10 jogam futebol e vôlei. Escolhendo ao acaso um dos alunos, vamos determinar a probabilidade dele jogar futebol ou vôlei. Assim, temos que:

O espaço amostral (U) é um conjunto formado pelos 40 alunos. Logo, n(U) = 40.

O evento (A) é um conjunto formado pelos alunos que jogam futebol. Logo n(A) = 20.

O evento (B) é um conjunto formado pelos alunos que jogam vôlei. Logo n(A) = 15.

O evento (A ∩ B) é o conjunto formado pelos alunos que jogam futebol e vôlei. Logo, (A ∩ B) = 10.

Assim, temos que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{20}{40} + \frac{15}{40} - \frac{10}{40} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$

PROBABILIDADE CONDICIONAL

A probabilidade condicional se caracteriza pelo conhecimento parcial do resultado do experimento, reduzindo o espaço amostral inicial. Veja o exemplo a seguir:

No lançamento de um dado comum, sabe-se que o resultado da face voltada para cima é par. Vamos calcular a probabilidade de ser a face com o número 2.

- O espaço amostral (U) do lançamento de um dado comum é: U = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
- O evento (A) consiste em sair face com o número 2, logo n(A) = 1.
- O evento (B) consiste em sair face com o número par, logo n(B) = 3.

Como sabemos que o a face obtida no dado é um número par, a probabilidade pedida é dada por:

$$p(A) = \frac{1}{3}$$

Assim, de modo geral, a probabilidade condicional do evento A, sabendo que ocorreu B, indicada por p(A/B), é dada por:

$$p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

Dividindo o numerador e o denominador dessa fração por n(U), temos:

$$p(A/B) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(U)}}{\frac{n(B)}{n(U)}}$$

Portanto, a expressão da probabilidade condicional também pode ser escrita na forma:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

MULTIPLICAÇÃO DE PROBABILIDADES

Da probabilidade condicional, sabemos que $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$. Daí, temos que:

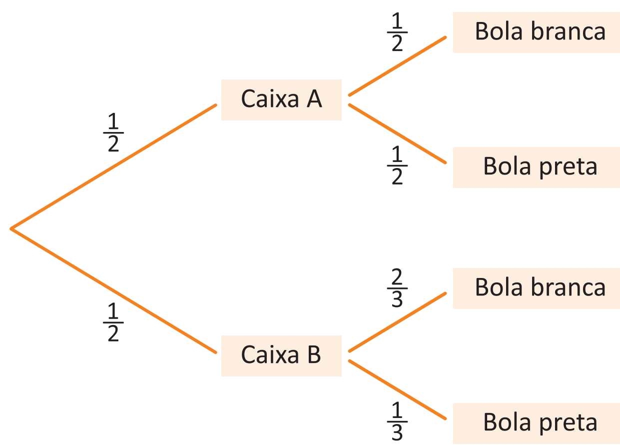
$$p(A \cap B) = p(B).p(A/B)$$

Assim, a probabilidade de ocorrer simultaneamente os eventos A e B, indicada por p(A ∩ B), é dada pelo produto da probabilidade de ocorrer um deles, por exemplo: p(B), pela probabilidade de ocorrer o outro (A) sabendo que B já ocorreu, ou seja p(A/B).

Exemplo:

- Numa caixa A, temos uma bola preta e outra branca e, numa caixa B, duas bolas brancas e uma preta. Escolhida uma caixa ao acaso, se dela retirarmos, também ao acaso, uma bola, então qual a probabilidade de termos uma bola branca da caixa B?

Para facilitar a visualização, vamos montar o seguinte esquema chamado de **árvore de possibilidades**. Em cada um de seus "galhos" estão associadas as probabilidades de escolha de cada um de seus componentes:



Sendo:

- O evento (A) que consiste em escolher aleatoriamente uma caixa.
- O evento (B) que consiste em escolher aleatoriamente uma bola.

Note que:

A segunda escolha depende da primeira, ou seja, o evento B depende do evento A. Logo, para os dois eventos simultaneamente, temos que:

$$p(A \cap B) = p(B).p(A/B) = \frac{1}{2}.\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

OBSERVAÇÃO:

- Se A e B são eventos independentes, ou seja, a ocorrência de um deles não influencia na ocorrência do outro, temos que:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

LEI BINOMIAL DA PROBABILIDADE

Cristiano pratica o jogo de dardos há alguns dias. De acordo com os resultados obtidos em seu último treino, seu instrutor estima que a probabilidade de Cristiano acertar o alvo com um tiro é $\frac{2}{5}$. Assim, qual a probabilidade dele acertar o alvo duas vezes em cinco tentativas?

Observe que, para cada tiro, a probabilidade de acertar o alvo é $\frac{2}{5} = 0{,}4$, e probabilidade de errar o alvo é $\frac{3}{5} = 0{,}6$ (eventos complementares). Logo, a probabilidade dele acertar o alvo duas vezes, em uma determinada ordem é dada por:

$$0{,}4^2 \,.\, 0{,}6^3$$

No entanto, o número de ordens possíveis é dada por:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2!.3!} = C_{5,2} = \binom{5}{2}$$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$p = \binom{5}{2}.0,4^2.0,6^3 = 10\,.\,0,16\,.\,0,216 = 0,3456 = 34,56\%$$

De maneira geral, se um experimento aleatório é repetido n vezes, em condições idênticas, com repetições independentes entre si, a probabilidade do evento A ocorrer k vezes é dada por:

$$p(A) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$$

Sendo p a probabilidade do evento A ocorrer em qualquer repetição.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| No lançamento de um dado, qual a probabilidade de que o número obtido na face superior seja o número 3 ou um número par?

Resolução:

Evento A: Ocorrência do número 3. Logo, A = {3} e n(A) = 1.

Evento B: Ocorrência de um número par. Logo, B = {2, 4, 6} e n(B) = 3.

Como, $A \cap B = \varnothing$, temos que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

02| No lançamento de um dado, qual a probabilidade de que o número obtido na face superior seja o número 2 ou um número par?

Resolução:

Evento A: Ocorrência do número 2. Logo, A = {2} e n(A) = 1.

Evento B: Ocorrência de um número par. Logo, B = {2, 4, 6}.

$A \cap B = \{2\} \cap \{2, 4, 6\} = \{2\}$.

Como, $A \cap B \neq \varnothing$, temos:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

03| No lançamento de um dado, qual a probabilidade de que o número obtido na face superior seja o número 2 sabendo-se que o número obtido é primo?

Resolução:

Evento A: Ocorrência do número 2. Logo, A = {2}.

Evento B: Ocorrência de um número primo. Logo, B = {2, 3, 5}.

Portanto, a probabilidade é dada por:

$$p(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3}$$

OBSERVAÇÃO:

p(A/B) indica a probabilidade de ocorrer um evento A sabendo-se que já ocorreu o evento B.

04| No lançamento simultâneo de um dado e de uma moeda, determine a probabilidade de obtermos cara na moeda e um número par no dado.

Resolução:

Evento A: Ocorrência de cara na moeda. Logo, $p(A) = \frac{1}{2}$.

Evento B: Ocorrência de um número par no dado. Logo, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Como os eventos A e B são eventos independentes, ou seja, a ocorrência de um deles não influi na ocorrência do outro, temos que:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

05| Uma moeda é lançada sete vezes. Qual a probabilidade de ocorrerem 2 caras e 5 coroas?

Resolução:

Sabemos que: se um experimento aleatório é repetido n vezes, em condições idênticas, com repetições independentes entre si, a probabilidade do evento A ocorrer k vezes é dada por:

$$p(A) = \binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$$

Sendo p a probabilidade do evento A ocorrer em qualquer repetição. Como $p = \frac{1}{2}$, temos:

$$p(A) = \binom{7}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2.\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{7-2}$$

$$p(A) = 21.\frac{1}{4}.\frac{1}{32} = \frac{21}{128}$$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| UNICAMP Uma urna contém 50 bolas que se distinguem apenas pelas seguintes características:

- x delas são brancas e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a x.
- x + 1 delas são azuis e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a x + 1.
- x + 2 delas são amarelas e numeradas sequencialmente com os números naturais de 1 a x + 2.
- x + 3 delas são verdes e numeradas sequencialmente de 1 a x + 3.

A Qual é o valor numérico de x?

B Qual a probabilidade de ser retirada, ao acaso, uma bola azul ou uma bola com o número 12?

02| UNICAMP Num grupo de 400 homens e 600 mulheres, a probabilidade de um homem estar com tuberculose é de 0,05 e de uma mulher estar com tuberculose é 0,10.

A Qual a probabilidade de uma pessoa do grupo estar com tuberculose?

B Se uma pessoa é retirada ao acaso e está com tuberculose, qual a probabilidade de que seja homem?

03| UNB

Idade	Probabilidade de morte %
0 — 10	3,23
10 — 20	0,65
20 — 30	1,21
30 — 40	1,84
40 — 50	4,31
50 — 60	9,69
60 — 70	18,21
70 — 80	27,28
80 em diante	33,58
Total	**100,00**

(Adaptada de UNITED STATES LIFE TABLES BY CAUSES OF DEATH, vol.1.)

Com base na tabela anterior, em que estão representadas as probabilidades de morte nas diferentes faixas etárias, nos Estados Unidos da América, calcule, em porcentagem, a probabilidade de um indivíduo que tem, hoje, 60 anos morrer antes de atingir o seu septuagésimo aniversário. Despreze a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

04| PUC Em uma amostra de vinte peças, existem exatamente 4 defeituosas.

A Calcule o número de maneiras diferentes de escolher, sem reposição, uma peça perfeita e uma defeituosa.

B Calcule o número de maneiras diferentes de escolher, sem reposição, duas peças perfeitas.

C Retirando-se, ao acaso, sem reposição, três peças, calcule a probabilidade de exatamente duas serem perfeitas. Escreva a resposta em forma de fração.

05| UERJ Uma pesquisa realizada em um hospital indicou que a probabilidade de um paciente morrer no prazo de um mês, após determinada operação de câncer, é igual a 20%. Se três pacientes são submetidos a essa operação, calcule a probabilidade de, nesse prazo:

A Todos sobreviverem.

B Apenas dois sobreviverem.

06| UNIFESP Sendo A e B eventos de um mesmo espaço amostral, sabe-se que a probabilidade de A ocorrer é $p(A) = \frac{3}{4}$, e que a probabilidade de B ocorrer é $p(B) = \frac{2}{3}$. Seja $p = p(A \cap B)$ a probabilidade de ocorrerem A e B.

A Obtenha os valores mínimo e máximo possíveis para p.

B Se $p = \frac{7}{12}$, e dado que A tenha ocorrido, qual é a probabilidade de ter ocorrido B?

07| FGV Num certo país, 10% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas verificou-se que 20% são fraudulentas. Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas.

A Se uma declaração é escolhida ao acaso, qual a probabilidade de ela ser suspeita e fraudulenta?

B Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade de ela ter sido suspeita?

08| FUVEST Considere uma urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e x bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, a sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, uma bola dessa urna. Para que valores de x a probabilidade de que as duas bolas sejam da mesma cor vale $\frac{1}{2}$?

09| FGV Uma moeda é viciada de tal forma que os resultados possíveis, cara e coroa são tais, que a probabilidade de sair cara num lançamento é o triplo da de sair coroa.

A Lançando-se uma vez a moeda qual a probabilidade de sair cara?

B Lançando-se três vezes a moeda, qual a probabilidade de sair exatamente uma cara?

10| UFF Em um jogo de dardos, a probabilidade de um jogador acertar o alvo é $\frac{1}{3}$. Determine a probabilidade de, ao lançar o dardo três vezes, o jogador acertar o alvo pelo menos duas vezes.

T ENEM E VESTIBULARES

01| UNESP Uma loja de departamentos fez uma pesquisa de opinião com 1.000 consumidores, para monitorar a qualidade de atendimento de seus serviços. Um dos consumidores que opinaram foi sorteado para receber um prêmio pela participação na pesquisa.

A tabela mostra os resultados percentuais registrados na pesquisa, de acordo com as diferentes categorias tabuladas.

categorias	percentuais
ótimo	25
regular	43
péssimo	17
não opinaram	15

Se cada consumidor votou uma única vez, a probabilidade de o consumidor sorteado estar entre os que opinaram e ter votado na categoria péssimo é, aproximadamente,

A 20%

B 30%

C 26%

D 29%

E 23%

02| ESPM A distribuição dos alunos nas 3 turmas de um curso é mostrada na tabela abaixo.

	A	B	C
Homens	42	36	26
Mulheres	28	24	32

Escolhendo-se uma aluna desse curso, a probabilidade de ela ser da turma A é:

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$

C $\frac{1}{4}$

D $\frac{2}{5}$

E $\frac{2}{7}$

03| FGV Dois eventos A e B de um espaço amostral são independentes. A probabilidade do evento A é $P(A) = 0{,}4$ e a probabilidade da união de A com B é $P(A \cup B) = 0{,}8$

Pode-se concluir que a probabilidade do evento B é:

A $\frac{5}{6}$

B $\frac{4}{5}$

C $\frac{3}{4}$

D $\frac{2}{3}$

E $\frac{1}{2}$

04| ENEM Para analisar o desempenho de um método diagnóstico, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

1. Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
2. Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.
3. Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO.
4. Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO.

Um índice de desempenho para avaliação de um teste diagnóstico é a sensibilidade, definida como a probabilidade de o resultado do teste ser POSITIVO se o paciente estiver com a doença.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para a doença A, aplicado em uma amostra composta por duzentos indivíduos.

Resultado do Teste	Doença A	
	Presente	Ausente
Positivo	95	15
Negativo	5	85

BENSEÑOR, I. M.; LOTUFO, P. A. Epidemiologia: abordagem prática. São Paulo: Sarvier, 2011 (adaptado).

Conforme o quadro do teste proposto, a sensibilidade dele é de

A 47,5%
B 85,0%
C 86,3%
D 94,4%
E 95,0%

05| UPE Dois atiradores, André e Bruno, disparam simultaneamente sobre um alvo.

- A probabilidade de André acertar no alvo é de 80%.
- A probabilidade de Bruno acertar no alvo é de 60%.

Se os eventos “André acerta no alvo” e “Bruno acerta no alvo”, são independentes, qual é a probabilidade de o alvo não ser atingido?

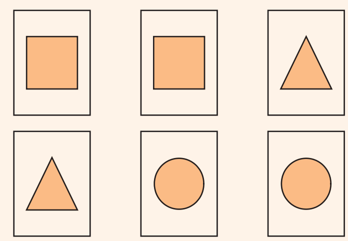
A 8%
B 16%
C 18%
D 30%
E 92%

06| UEPB Urna academia de dança de salão é formada por jovens com idade entre 14 e 26 anos, distribuídos por faixa etária conforme a tabela de distribuição de frequência que se segue. Um participante foi sorteado pela academia para receber uma passagem aérea em viagem internacional. A probabilidade de o sorteado ter idade igual ou superior a 18 anos e inferior a 24 anos é:

Faixa de idade em anos	Frequência
14 ↦ 16	20
16 ↦ 18	60
18 ↦ 20	40
20 ↦ 22	24
22 ↦ 24	20
24 ↦ 26	16
Total	**180**

A $\frac{5}{9}$
B $\frac{7}{15}$
C $\frac{8}{15}$
D $\frac{31}{45}$
E $\frac{2}{3}$

07| INSPER Em um curso de computação, uma das atividades consiste em criar um jogo da memória com as seis cartas mostradas a seguir.



Inicialmente, o programa embaralha as cartas e apresenta-as viradas para baixo. Em seguida, o primeiro jogador vira duas cartas e tenta formar um par.

A probabilidade de que o primeiro jogador forme um par em sua primeira tentativa é

A $\frac{1}{2}$
B $\frac{1}{3}$
C $\frac{1}{4}$
D $\frac{1}{5}$
E $\frac{1}{6}$

08| IBMEC Uma prova de Matemática contém oito questões, das quais quatro são consideradas difíceis. Cada questão tem quatro opções de resposta, das quais somente uma é correta. Se uma pessoa marcar aleatoriamente uma opção em cada uma das questões difíceis, é correto afirmar que

A a probabilidade de errar todas as questões difíceis é maior do que a probabilidade de acertar pelo menos uma questão difícil.
B a probabilidade de errar todas as questões difíceis é maior que 0,5.
C a probabilidade de errar todas as questões difíceis está entre 0,4 e 0,5.
D a probabilidade de errar todas as questões difíceis está entre 0,3 e 0,4.
E a probabilidade de errar todas as questões difíceis é menor do que 0,3.

09| ENEM Uma fábrica possui duas máquinas que produzem o mesmo tipo de peça. Diariamente a máquina M produz 2.000 peças e a máquina N produz 3.000 peças. Segundo o controle de qualidade da fábrica, sabe-se que 60 peças, das 2.000 produzidas pela máquina M, apresentam algum tipo de defeito, enquanto que 120 peças, das 3.000 produzidas pela máquina N, também apresentam defeitos. Um trabalhador da fábrica escolhe ao acaso uma peça, e esta é defeituosa.

Nessas condições, qual a probabilidade de que a peça defeituosa escolhida tenha sido produzida pela máquina M?

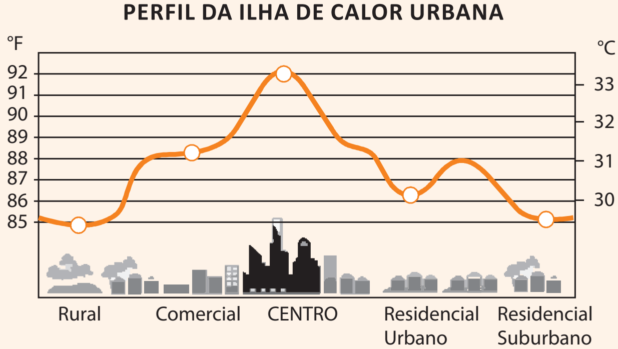
A) $\frac{3}{100}$
B) $\frac{1}{25}$
C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{3}{7}$
E) $\frac{2}{3}$

10| UFSJ Em uma gaveta, há cinco pares distintos de meias, mas os dois pés de um dos pares estão rasgados. Tirando-se da gaveta um pé de meia por vez, ao acaso, a probabilidade de se retirarem dois pés de meia do mesmo par, não rasgados, é

A) $\frac{56}{90}$
B) $\frac{8}{90}$
C) $\frac{81}{90}$
D) $\frac{9}{10}$

11| ENEM Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das "ilhas de calor" da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:

PERFIL DA ILHA DE CALOR URBANA



Fonte: EPA

Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é:

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{1}{4}$
C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{3}{5}$
E) $\frac{3}{4}$

12| INSPER Um país possui 1.000.000 de eleitores, divididos igualmente entre 10 estados. A tabela a seguir mostra o resultado final da votação para a escolha do novo presidente, quando todos os eleitores votaram.

Candidato	Percentual dos eleitores
X	52%
Y	25%
Z	20%
Votos brancos e nulos	3%

Durante a votação, uma pessoa entrevistou 10 eleitores, escolhidos aleatoriamente, para tentar prever o resultado da eleição. A probabilidade de que o percentual de eleitores dessa amostra que votaram no candidato Z seja igual ao percentual de votos obtidos por esse candidato na eleição é aproximadamente igual a

A) $(0,2)^2 \,.\, (0,8)^8$ (ou seja, aproximadamente 1%)
B) $(0,2)^2 + (0,8)^8$ (ou seja, aproximadamente 20%)
C) $45 \,.\, (0,2)^2 \,.\, (0,8)^8$ (ou seja, aproximadamente 30%)
D) $90 \,.\, (0,2)^2 \,.\, (0,8)^8$ (ou seja, aproximadamente 60%)
E) $\frac{2.(0,2)+8.(0,8)}{10}$ (ou seja, aproximadamente 68%)

13| UFG Segundo uma pesquisa realizada no Brasil sobre a preferência de cor de carros, a cor prata domina a frota de carros brasileiros, representando 31%, seguida pela cor preta, com 25%, depois a cinza, com 16% e a branca, com 12%. Com base nestas informações, tomando um carro ao acaso, dentre todos os carros brasileiros de uma dessas quatro cores citadas, qual a probabilidade de ele não ser cinza?

A) $\frac{4}{25}$
B) $\frac{4}{17}$
C) $\frac{17}{25}$
D) $\frac{37}{50}$
E) $\frac{17}{21}$

14| ENEM Um experimento foi conduzido com o objetivo de avaliar o poder germinativo de duas culturas de cebola, conforme a tabela.

Germinação de sementes de duas culturas de cebola

Culturas	Germinação		TOTAL
	Germinaram	Não Germinaram	
A	392	8	400
B	381	19	400
TOTAL	773	27	800

BUSSAB, W. O; MORETIN, L. G. Estatística para as ciências agrárias e biológicas (adaptado).

Desejando-se fazer uma avaliação do poder germinativo de uma das culturas de cebola, uma amostra foi retirada ao acaso. Sabendo-se que a amostra escolhida germinou, a probabilidade de essa amostra pertencer à Cultura A é de

A) $\frac{8}{27}$

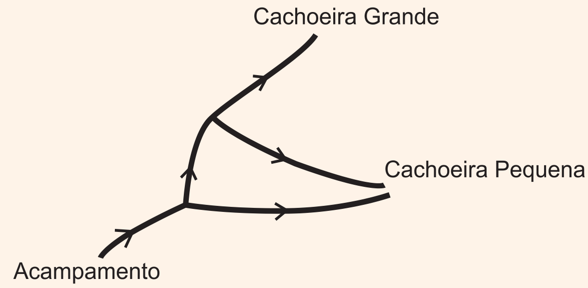
B) $\frac{19}{27}$

C) $\frac{381}{773}$

D) $\frac{392}{773}$

E) $\frac{392}{800}$

15| UFMG Dois jovens partiram do acampamento em que estavam em direção à Cachoeira Grande e à Cachoeira Pequena, localizadas na região, seguindo a trilha indicada neste esquema:



Em cada bifurcação encontrada na trilha, eles escolhiam, com igual probabilidade, qualquer um dos caminhos e seguiam adiante.

Então, é correto afirmar que a probabilidade de eles chegarem à Cachoeira Pequena é:

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{2}{3}$

C) $\frac{3}{4}$

D) $\frac{5}{6}$

ESTATÍSTICA

A Estatística é um ramo da Matemática estruturada a partir de um conjunto de métodos que visam coletar, organizar, apresentar, analisar e interpretar dados relacionados a algum fato (ou acontecimento), com objetivo de compreender a realidade específica desses dados para uma futura tomada da decisão.

VARIÁVEIS ESTATÍSTICAS

Quando o IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) realiza os chamados censos, busca obter informações a respeito do perfil da população brasileira. São analisados dados como: idade, sexo, grau de instrução, faixa de renda, etc. Na Estatística, esses itens são chamados de **variáveis**. Essas variáveis podem ser **qualitativas** ou **quantitativas**.

Variáveis qualitativas são aquelas que não são expressas por números, ou seja, são expressas por seus atributos (ou qualidades).

Variáveis quantitativas: são aquelas que são expressas por números.

Variáveis discretas são aquelas que normalmente são resultado de contagens. Portanto, podem assumir somente valores inteiros não negativos.

Variáveis contínuas são aquelas que normalmente são resultado da medição com auxílio de algum tipo de aparelho. Portanto, podem assumir qualquer valor real.

POPULAÇÃO E AMOSTRA

A população (ou universo estatístico) é o conjunto formado por todos os elementos que podem oferecer dados importantes ao assunto (ou pesquisa) em questão. Cada elemento da população estudada é chamado **unidade estatística**.

AMPLITUDE DE UMA AMOSTRA

A amplitude de uma amostra é dada pela diferença entre o maior e menor número dessa amostra.

DADOS BRUTOS E ROL

Dados brutos se caracterizam por uma sequência numérica de dados obtida a partir de um levantamento estatístico sem qualquer preocupação quanto à sua ordenação. Ordenando os dados brutos, ou seja, expressando-os em ordem crescente ou decrescente obtemos um **rol**.

TABELAS DE DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIAS

Após obtermos os dados de um levantamento estatístico convém organizá-los para facilitar a visualização e os cálculos das medidas estatísticas. Para isso podemos utilizar as chamadas **tabelas de distribuição de frequências** em que os elementos dessas tabelas são separados em **classes**. Suas colunas são constituídas pelas frequências absolutas e frequências relativas de cada um os valores observados na população (ou amostra).

- **Frequência absoluta (F)**; A frequência absoluta (F) de um valor é a quantidade de vezes que se observa esse valor em determinada população (ou amostra).
- **Frequência relativa (f)**: A frequência relativa (f) de um valor é dada pela razão entre sua frequência absoluta e a frequência absoluta total. Normalmente a frequência relativa é dada em porcentagem.

MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

MÉDIA ARITMÉTICA

A média aritmética dos n números x_1, x_2,x_3, ... x_n, indicada por $\overline{x}$, é dada por:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Utilizando o somatório, a média aritmética dos n números x_1, x_2, ... x_n é dada por:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$$

MEDIANA

A mediana dos n números ordenados (rol) x_1, x_2, x_3, ... , x_n, indicada por M_e, temos que:

- Se o número n de termos for ímpar, a mediana é o termo central dos números ordenados.
- Se o número n de termos for par, a mediana é a média aritmética dos dois termos centrais dos números ordenados.

MODA

A moda dos n números x_1, x_2,x_3, ... x_n, indicada por Mo, é o termo (ou os termos) com a maior frequência absoluta.

MEDIDAS DE DISPERSÃO

VARIÂNCIA

A variância é uma medida que indica a dispersão (ou afastamento) dos elementos de um conjunto de dados em relação à média. É definida como sendo a média aritmética dos quadrados dos desvios (diferenças) de cada um dos elementos em relação à média. Assim, a variância dos n números x_1, x_2,x_3, ... x_n, indicada por σ^2, é dada por:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + (x_3 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_n - \overline{x})^2}{n}$$

DESVIO PADRÃO

O desvio padrão, indicado por σ, é a raiz quadrada da variância.

OBSERVAÇÃO:

Outra medida de dispersão é o desvio médio que é definido pela média aritmética dos módulos dos desvios (diferenças) de cada um dos elementos em relação à média. Assim, o desvio médio dos n números $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, indicada por d_m, é dada por:

$$d_m = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + |x_3 - \bar{x}| + \ldots + |x_n - \bar{x}|}{n}$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Os dados seguintes se referem a 20 observações dos índices pluviométricos, em mm, de uma cidade do estado.

144	147	142	144	142	147	142	141	146	147
141	141	142	146	142	145	141	144	143	144

Construa uma tabela de classes unitárias com a distribuição das frequências absolutas e relativas (em porcentagem).

Resolução:

Índices Pluviométricos	Frequências absolutas (F)	Frequências relativas (f)
141	4	$\frac{4}{20} = 20\%$
142	5	$\frac{5}{20} = 25\%$
143	1	$\frac{1}{20} = 5\%$
144	4	$\frac{4}{20} = 20\%$
145	1	$\frac{1}{20} = 5\%$
146	2	$\frac{2}{20} = 10\%$
147	3	$\frac{3}{20} = 15\%$
Total	$\Sigma F = 20$	$\Sigma f = 100\%$

02| Um grupo de pessoas apresenta as idades de 10, 13, 15 e 17 anos. Se uma pessoa de 12 anos se juntar ao grupo, o que acontecerá com a média de idade do grupo?

Resolução:

- *Média entre as idades 10, 13, 15 e 17 anos:*

  $\bar{x} = \frac{10 + 13 + 15 + 17}{4} = \frac{55}{4} = 13,75$

- *Média entre as idades 10, 12, 13, 15 e 17 anos:*

  $\bar{x} = \frac{10 + 12 + 13 + 15 + 17}{5} = \frac{67}{5} = 13,40$

  Portanto, a média diminui de 13,75 para 13,40.

03| A tabela a seguir mostra os salários dos funcionários, em dólares, de uma empresa:

Salários em dólares	Quantidade de funcionários
1.000,00	15
1.200,00	10
1.500,00	11
1.800,00	8
2.000,00	6

Determine:

A O salário médio.

B O salário mediano.

C O salário modal.

Resolução:

A *O salário médio é dado pela média ponderada dos valores da tabela, ou seja:*

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 1000 + 10 \cdot 1200 + 11 \cdot 1500 + 8 \cdot 1800 + 6 \cdot 2000}{15 + 10 + 11 + 8 + 6}$$

$$\bar{x} = \frac{69.900}{50} = 1.398$$

B *O salário mediano é dado pelo termo central dos salários dispostos em ordem crescente ou decrescente. Assim, temos que:*

A quantidade total de funcionários é dada por 15 + 10 + 11 + 8 + 6 = 50. Como a quantidade de termos é par, o salário mediano é a média dos dois termos *centrais do rol dos salários, ou seja, entre o 25º e o 26º salários. Colocando os salários em ordem crescente, temos:*

$$\underbrace{1.000, \ldots, 1.000}_{15}, \underbrace{1.200, \ldots, \mathbf{1.200}}_{10}, \underbrace{\mathbf{1.500}, \ldots, 1.500}_{11},$$

$$\underbrace{1.800, \ldots, 1.800}_{8}, \underbrace{2.000, \ldots, 2.000}_{6}$$

Logo, o salário mediano é dada por:

$$Md = \frac{1.200 + 1.500}{2} = 1.350$$

C *O salário modal é aquele que se apresenta com a maior frequência. Logo o salário modal é Mo = 1.000.*

04| As alunas Ana e Bia se candidataram para fazer parte da comissão de formatura do 3º ano da escola que estudam. A tabela a seguir mostra o número de votos que elas receberam em cada uma das seis turmas de 3º ano.

	Turmas					
Alunas	3º A	3º B	3º C	3º D	3º E	3º F
Ana	12	15	12	16	14	15
Bia	12	11	18	9	19	15

Nessas condições, calcule:

A A variância e o desvio padrão do número de votos de cada uma das alunas.

B Qual das duas alunas é mais regular quanto ao número de votos recebidos?

Resolução:

A *Calculando a média dos votos de cada uma delas, temos:*

- *Para Ana:*

$$\overline{x} = \frac{12 + 15 + 12 + 16 + 14 + 15}{6} = \frac{84}{6} = 14$$

- *Para Bia:*

$$\overline{x} = \frac{12 + 11 + 18 + 9 + 19 + 15}{6} = \frac{84}{6} = 14$$

Calculando a variância do número de votos de cada uma delas, temos:

- *Para Ana:*

$$\sigma^2{}_K = \frac{(12-14)^2+(15-14)^2+(12-14)^2+(16-14)^2+(14-14)^2+(15-14)^2}{6}$$

$$\sigma^2{}_K = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

- *Para Bia:*

$$\sigma^2{}_F = \frac{(12-14)^2+(11-14)^2+(18-14)^2+(9-14)^2+(19-14)^2+(15-14)^2}{6}$$

$$\sigma^2{}_F = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}$$

Calculando o desvio padrão do número de votos de cada uma delas, temos:

- *Para Ana:*

$$\sigma_K = \sqrt{\frac{7}{3}} \approx 1,53$$

- *Para Bia:*

$$\sigma_F = \sqrt{\frac{40}{3}} \approx 3,65$$

B *Analisando os resultados obtidos, observa-se que o desvio padrão das quantidades de votos recebidos por Ana é menor que o desvio padrão das quantidades de votos recebidos por Bia. Logo, Ana é mais regular quanto ao número de votos recebidos.*

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| UFJF A editora de uma revista de moda resolveu fazer uma pesquisa sobre a idade de suas leitoras. Para isso selecionou, aleatoriamente, uma amostra de 25 leitoras. As idades que constaram da amostra foram:

19, 20, 21, 20, 19, 20, 19, 20, 21, 21, 21, 22, 20, 21, 22, 22, 23, 19, 20, 21, 21, 23, 20, 21, 19

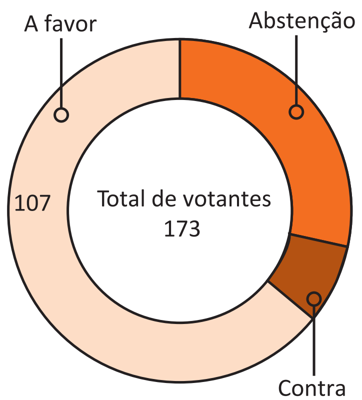
Considerando as informações dadas, faça o que se pede:

A Foi escrita uma reportagem dirigida a leitoras de 21 anos. Considerando que a pesquisa admite uma margem de erro de 2% para mais e para menos, determine quantas leitoras dessa idade leram a matéria, sabendo-se que foram vendidas 3.500 revistas?

B Complete a tabela de frequências absoluta (F) e relativa (f) a partir dos dados acima:

Idades	F	f(%)
Total		

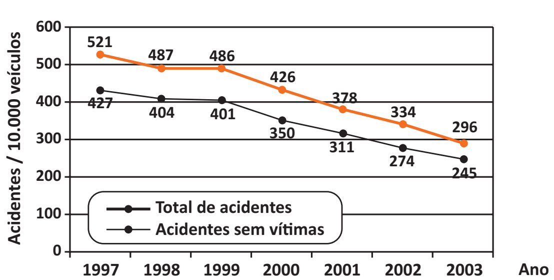
02| UFG Um estudante encontrou um fragmento de jornal que apresentava o resultado da votação na UNESCO sobre a admissão da Palestina como Estado-membro. Porém, as quantidades de abstenções e de votos contrários estavam ilegíveis, como indica a figura abaixo.



FOLHA DE S. PAULO, São Paulo, 1º nov. 2.011. [Adaptado].

Curioso para saber quantos países votaram contra e observando que se trata de um gráfico de setores, o estudante mediu com um transferidor o ângulo do setor circular correspondente aos votos contrários e obteve, aproximadamente, 29°. Com base nesta informação, determine o número de países que votaram contra a admissão da Palestina na UNESCO.

03| UNICAMP O gráfico a seguir mostra o total de acidentes de trânsito na cidade de Campinas e o total de acidentes sem vítimas, por 10.000 veículos, no período entre 1.997 e 2.003. Sabe-se que a frota da cidade de Campinas era composta por 500.000 veículos em 2.003 e era 4% menor em 2.002.



Adaptado de: Sumário Estatístico da Circulação em Campinas 2.002-2.003. Campinas, EMDEC, 2.004, p. 12.

A Calcule o número total de acidentes de trânsito ocorridos em Campinas em 2.003.

B Calcule o número de acidentes com vítimas ocorridos em Campinas em 2.002.

04| Um jogador de futebol controlou a bola com os pés sem derrubá-la, conseguindo os seguintes números de vezes:

23	43	16	26	49	15	58	68	71	71

Assim, para esses dados, determine:

A A amplitude

B A média aritmética

C A mediana

D A moda

05| UEG As notas dos alunos de um curso de inglês estão registradas na seguinte tabela de frequências:

Notas	Números de Alunos
7	7
8	5
9	9
10	11

Apresentando os cálculos, determine:

A a média.

B a mediana.

06| UFF Cada um dos 60 alunos da turma A obteve, na avaliação de um trabalho, nota 5 ou nota 10. A média aritmética dessas notas foi 6. Determine quantos alunos obtiveram nota 5 e quantos obtiveram nota 10.

07| FUVEST O número de gols marcados nos 6 jogos da primeira rodada de um campeonato de futebol foi 5, 3, 1, 4, 0 e 2. Na segunda rodada, serão realizados mais 5 jogos. Qual deve ser o número total de gols marcados nessa rodada para que a média de gols, nas duas rodadas, seja 20% superior à média obtida na primeira rodada?

08| As alturas de cinco jogadores de um time de vôlei são, em centímetros, dadas por 195, 198, 201, 192 e 204. Nessas condições, determine:

A A altura média.

B A variância e o desvio padrão das alturas.

09| UNICAMP Para um conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ a média aritmética de $\overline{x}$ é definida por $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$ e a variância de X é definida por $V = \dfrac{1}{4}\left[(x_1 - \overline{x})^2 + \ldots + (x_4 - \overline{x})^2\right]$.

Dado o conjunto $X = \{2, 5, 8, 9\}$, pede-se:

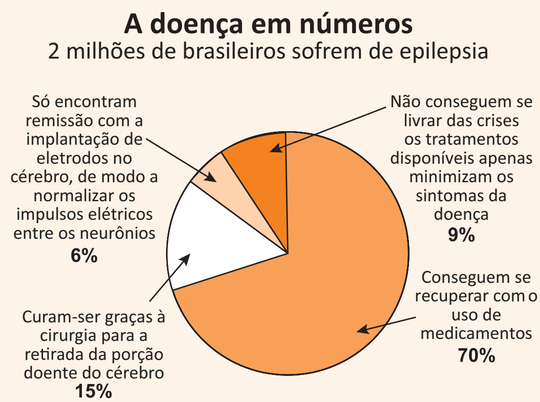
A Calcular a média aritmética de X.

B Calcular a variância de X.

C Quais elementos de X pertencem ao intervalo $[\overline{x} - \sqrt{V}; \overline{x} + \sqrt{V}]$.

T ENEM E VESTIBULARES

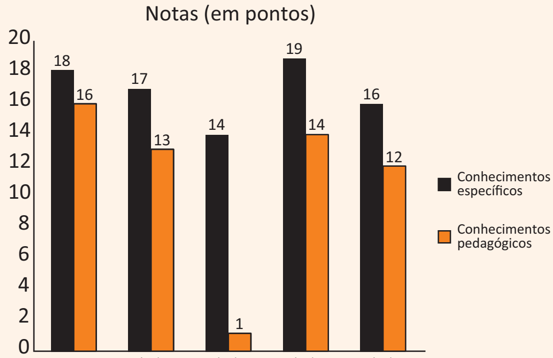
01| **ENEM** Existem hoje, no Brasil, cerca de 2 milhões de pessoas que sofrem de epilepsia. Há diversos meios de tratamento para a doença, como indicado no gráfico:



Considere um estado do Brasil, onde 400.000 pessoas sofrem de epilepsia. Nesse caso, o número de pessoas que conseguem se recuperar com o uso de medicamentos, ou se curar a partir da cirurgia para retirada da porção doente do cérebro, é aproximadamente:

- A 42.000
- B 60.000
- C 220.000
- D 280.000
- E 340.000

02| **ENEM** As notas de um professor que participou de um processo seletivo, em que a banca avaliadora era composta por cinco membros, são apresentadas no gráfico. Sabe-se que cada membro da banca atribui duas notas ao professor, uma relativa aos conhecimentos específicos da área de atuação e outra, aos conhecimentos pedagógicos, e que a média final do professor foi dada pela média aritmética de todas as notas atribuídas pela banca avaliadora.



Utilizando um novo critério, essa banca avaliadora resolveu descartar a maior e a menor notas atribuídas ao professor.

A nova média, em relação à média anterior, é:

- A 0,25 ponto maior
- B 1,00 ponto maior
- C 1,00 ponto menor
- D 1,25 ponto maior
- E 2,00 pontos menor

03| **ENEM** Cinco empresas de gêneros alimentícios encontram-se à venda. Um empresário, almejando ampliar os seus investimentos, deseja comprar uma dessas empresas. Para escolher qual delas irá comprar, analisa o lucro (em milhões de reais) de cada uma delas, em função de seus tempos (em anos) de existência, decidindo comprar a empresa que apresente o maior lucro médio anual. O quadro apresenta o lucro (em milhões de reais) acumulado ao longo do tempo (em anos) de existência de cada empresa.

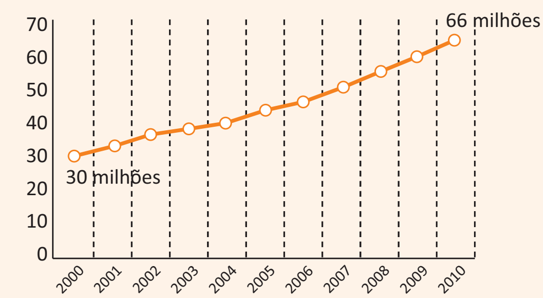
Empresa	Lucro (em milhões de reais)	Tempo (em anos)
F	24	3,0
G	24	2,0
H	25	2,5
M	15	1,5
P	9	1,5

O empresário decidiu comprar a empresa:

- A F
- B G
- C H
- D M
- E P

04| **ENEM** Nos últimos anos, a frota de veículos no Brasil tem crescido de forma acentuada. Observando o gráfico, é possível verificar a variação do número de veículos (carros, motocicletas e caminhões), no período de 2.000 a 2.010. Projeta-se que a taxa de crescimento relativo no período de 2.000 a 2.010 mantenha-se para década seguinte.

Evolução do total da frota na década



Qual será o número de veículos no ano de 2.020?

A) 79,2 milhões

B) 102,0 milhões

C) 132,0 milhões

D) 138,0 milhões

E) 145,2 milhões

05| ENEM Uma equipe de especialistas do centro meteorológico de uma cidade mediu a temperatura do ambiente, sempre no mesmo horário, durante 15 dias intercalados, a partir do primeiro dia de um mês. Esse tipo de procedimento é frequente, uma vez que os dados coletados servem de referência para estudos e verificação de tendências climáticas ao longo dos meses e anos. As medições ocorridas nesse período estão indicadas no quadro:

Dia do mês	Temperatura (em °C)
1	15,5
3	14
5	13,5
7	18
9	19,5
11	20
13	13,5
15	13,5
17	18
19	20
21	18,5
23	13,5
25	21,5
27	20
29	16

Em relação à temperatura, os valores da média, mediana e moda são, respectivamente, iguais a:

A) 17°C, 17°C e 13,5°C

B) 17°C, 18°C e 13,5°C

C) 17°C, 13,5°C e 18°C

D) 17°C, 18°C e 21,5°C

E) 17°C, 13,5°C e 21,5°C

06| ENEM O índice de eficiência utilizado por um produtor de leite para qualificar suas vacas é dado pelo produto do tempo de lactação (em dias) pela produção média diária de leite (em kg), dividido pelo intervalo entre partos (em meses). Para esse produtor, a vaca é qualificada como eficiente quando esse índice é, no mínimo, 281 quilogramas por mês, mantendo sempre as mesmas condições de manejo (alimentação, vacinação e outros). Na comparação de duas ou mais vacas, a mais eficiente é a que tem maior índice.

A tabela apresenta os dados coletados de cinco vacas:

DADOS RELATIVOS À PRODUÇÃO DE VACAS			
Vaca	Tempo de lactação (em dias)	Produção média diária de leite (em kg)	Intervalo entre partos (em meses)
Malhada	360	12,0	15
Mamona	310	11,0	12
Maravilha	260	14,0	12
Mateira	310	13,0	13
Mimosa	270	12,0	11

Após a análise dos dados, o produtor avaliou que a vaca mais eficiente é a:

A) Malhada

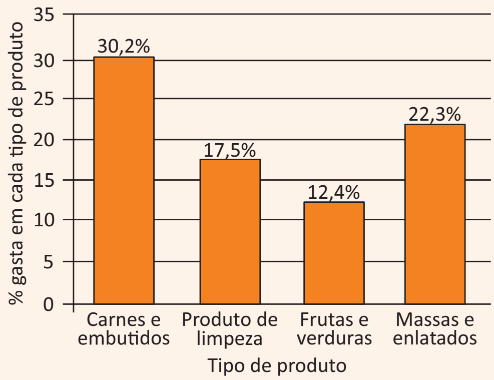
B) Mamona

C) Maravilha

D) Mateira

E) Mimosa

07| ENEM Uma dona de casa vai ao supermercado fazer a compra mensal. Ao concluir a compra, observa que ainda lhe restaram R$ 88,00. Seus gastos foram distribuídos conforme mostra o gráfico. As porcentagens apresentadas no gráfico são referentes ao valor total, em reais, reservado para a compra mensal.



Qual o valor total, em reais, reservado por essa dona de casa para a compra mensal?

A) 106,80

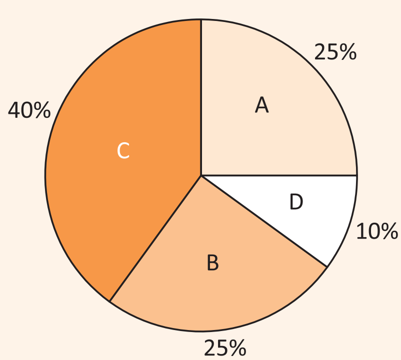
B) 170,40

C) 412,00

D) 500,00

E) 588,00

08| ENEM Foi realizado um levantamento nos 200 hotéis de uma cidade, no qual foram anotados os valores, em reais, das diárias para um quarto padrão de casal e a quantidade de hotéis para cada valor da diária. Os valores das diárias foram: A = R$ 200,00; B = R$ 300,00; C = R$ 400,00 e D = R$ 600,00. No gráfico, as áreas representam as quantidades de hotéis pesquisados, em porcentagem, para cada valor da diária.



O valor mediano da diária, em reais, para o quarto padrão de casal nessa cidade, é:

A) 300,00

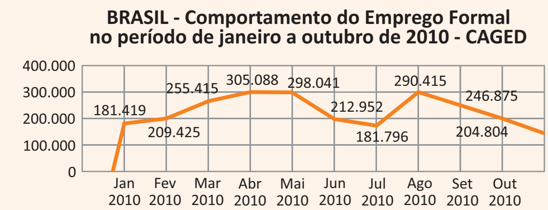
B) 345,00

C) 350,00

D) 375,00

E) 400,00

09| ENEM O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2.010 a outubro de 2.010.



Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é:

A) 212.952

B) 229.913

C) 240.621

D) 255.496

E) 298.041

10| FGV Um conjunto de dados numéricos tem variância igual a zero. Podemos concluir que:

A) a média também vale zero.

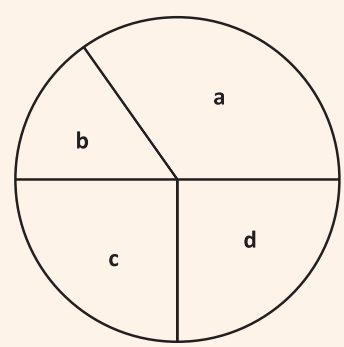
B) a mediana também vale zero.

C) a moda também vale zero.

D) o desvio padrão também vale zero.

E) todos os valores desse conjunto são iguais a zero.

11| UFRGS Os resultados de uma pesquisa de opinião foram divulgados utilizando um gráfico de setores circulares, como o representado na figura a seguir.



Ao setor a estão associadas 35% das respostas, ao setor b, 270 respostas e, aos setores c e d, um mesmo número de respostas. Esse número é:

A) 45

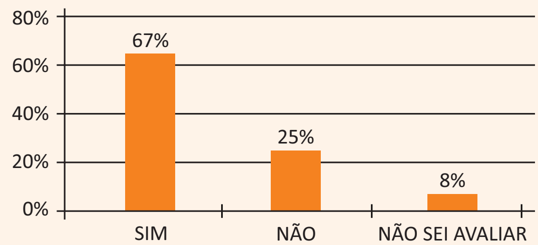
B) 90

C) 180

D) 450

E) 900

12| ENEM Uma enquete, realizada em março de 2.010, perguntava aos internautas se eles acreditavam que as atividades humanas provocam o aquecimento global. Eram três alternativas possíveis e 279 internautas responderam à enquete, como mostra o gráfico.

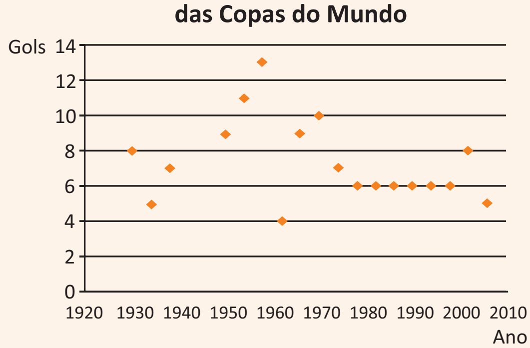


Analisando os dados do gráfico, quantos internautas responderam ''Não'' à enquete?

- **A** Menos de 23.
- **B** Mais de 23 e menos de 25.
- **C** Mais de 50 e menos de 75.
- **D** Mais de 100 e menos de 190.
- **E** Mais de 200.

13| ENEM O gráfico apresenta a quantidade de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo desde a Copa de 1.930 até a de 2.006.

Quantidade de Gols dos Artilheiros das Copas do Mundo



A partir dos dados apresentados, qual a mediana das quantidades de gols marcados pelos artilheiros das Copas do Mundo?

- **A** 6 gols
- **B** 6,5 gols
- **C** 7gols
- **D** 7,3 gols
- **E** 8,5 gols

14| ENEM O quadro seguinte mostra o desempenho de um time de futebol no ultimo campeonato. A coluna da esquerda mostra o número de gols marcados e a coluna da direita informa em quantos jogos o time marcou aquele número de gols.

Gols marcados	Quantidade de partidas
0	5
1	3
2	4
3	3
4	2
5	2
7	1

Se X, Y e Z são, respectivamente, a média, a mediana e a moda desta distribuição, então:

- **A** $X = Y < Z$
- **B** $Z < X = Y$
- **C** $Y < Z < X$
- **D** $Z < X < Y$
- **E** $Z < Y < X$

15| ENEM Em uma corrida de regularidade, a equipe campeã é aquela em que o tempo dos participantes mais se aproxima do tempo fornecido pelos organizadores em cada etapa. Um campeonato foi organizado em 5 etapas, e o tempo médio de prova indicado pelos organizadores foi de 45 minutos por prova. No quadro, estão representados os dados estatísticos das cinco equipes mais bem classificadas

Dados estatísticos das equipes mais bem classificadas (em minutos)

Equipes	Média	Moda	Desvio Padrão
Equipe I	45	40	5
Equipe II	45	41	4
Equipe III	45	44	1
Equipe IV	45	44	3
Equipe V	45	47	2

Utilizando os dados estatísticos do quadro, a campeã foi a equipe:

- **A** I
- **B** II
- **C** III
- **D** IV
- **E** V

16| **UFU** Uma pesquisa com 27 crianças, realizada por psicólogos em um ambiente hospitalar, avalia a redução dos custos hospitalares mensais individuais em função do bem-estar emocional promovido pela vivência de atividades artísticas.

Redução do Custo Mensal (por criança) em reais	Número de crianças
700,00	8
900,00	5
1.400,00	1
2.000,00	7
2.400,00	5
3.000,00	1

Com base nos dados descritos na tabela, a soma da média aritmética e da mediana correspondente à distribuição de redução dos custos mencionada é igual a:

A) 2.900
B) 3.400
C) 3.200
D) 3.700

17| **FUVEST** Num determinado país a população feminina representa 51% da população total. Sabendo-se que a idade média (média aritmética das idades) da população feminina é de 38 anos e a da masculina é de 36 anos. Qual a idade média da população?

A) 37,02 anos
B) 37,00 anos
C) 37,20 anos
D) 36,60 anos
E) 37,05 anos

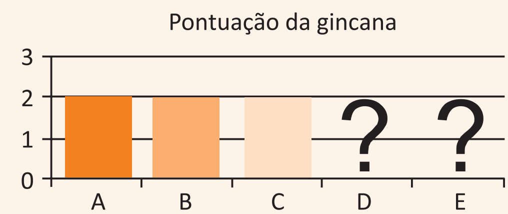
18| **ENEM** Na tabela, são apresentados dados da cotação mensal do ovo extra branco vendido no atacado, em Brasília, em reais, por caixa de 30 dúzias de ovos, em alguns meses dos anos 2.007 e 2.008.

Mês	Cotação	Ano
Outubro	R$ 83,00	2.007
Novembro	R$ 73,10	2.007
Dezembro	R$ 81,60	2.007
Janeiro	R$ 82,00	2.008
Fevereiro	R$ 85,30	2.008
Março	R$ 84,00	2.008
Abril	R$ 84,60	2.008

De acordo com esses dados, o valor da mediana das cotações mensais do ovo extra branco nesse período era igual a:

A) R$ 73,10
B) R$ 81,50
C) R$ 82,00
D) R$ 83,00
E) R$ 85,30

19| **ENEM** Cinco equipes A, B, C, D e E disputaram uma prova de gincana na qual as pontuações recebidas podiam ser 0, 1, 2 ou 3. A média das cinco equipes foi de 2 pontos. As notas das equipes foram colocadas no gráfico a seguir, entretanto, esqueceram de representar as notas da equipe D e da equipe E.



Mesmo sem aparecer as notas das equipes D e E, pode-se concluir que os valores da moda e da mediana são, respectivamente:

A) 1,5 e 2,0
B) 2,0 e 1,5
C) 2,0 e 2,0
D) 2,0 e 3,0
E) 3,0 e 2,0

20| **ENEM** Suponha que a etapa final de uma gincana escolar consista em um desafio de conhecimentos. Cada equipe escolheria 10 alunos para realizar uma prova objetiva, e a pontuação da equipe seria dada pela mediana das notas obtidas pelos alunos. As provas valiam, no máximo, 10 pontos cada. Ao final, a vencedora foi a equipe Ômega, com 7,8 pontos, seguida pela equipe Delta, com 7,6 pontos. Um dos alunos da equipe Gama, a qual ficou na terceira e última colocação, não pôde comparecer, tendo recebido nota zero na prova. As notas obtidas pelos 10 alunos da equipe Gama foram 10; 6,5; 8; 10; 7; 6,5; 7; 8; 6; 0. Se o aluno da equipe Gama que faltou tivesse comparecido, essa equipe:

A) teria a pontuação igual a 6,5 se ele obtivesse nota 0.
B) seria a vencedora se ele obtivesse nota 10.
C) seria a segunda colocada se ele obtivesse nota 8.
D) permaneceria na terceira posição, independentemente da nota obtida pelo aluno.
E) empataria com a equipe Ômega na primeira colocação se o aluno obtivesse nota 9.

21| ENEM A tabela apresenta os registros de ocorrência de acidentes de trabalho por categorias econômicas no Brasil, no mês de julho de 2001:

Afastamentos por acidentes de trabalho por atividades econômica — julho de 2001 (em valores aproximados)

Atividades Econômicas	Quantidade de Empregados	Afastamentos por Acidente de Trabalho
Agropecuária e extrativismo	1.414.000	8.000
Indústria leve	2.031.000	24.000
Indústria pesada	2.455.000	33.000
Construção civil	1.105.000	14.000
Comércio	4.097.000	24.000
Serviços	6.241.000	34.000
Transportes	1.278.000	13.000
Crédito	524.000	6.000
Administração pública	1.138.000	2.000
Não classificado	33.000	30
Total	20.316.000	158.030

Fonte: MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Caderno de teoria e prática 2 – TP2:** matemática na alimentação e nos impostos. Brasília, 2008 (adaptado).

Considerando os dados dispostos na tabela, uma pessoa que pretende ingressar no mercado de trabalho decide pela ocupação de menor grau de risco de acidente de trabalho. Sabendo que o grau de risco é a probabilidade de ocorrência de acidentes de trabalho em categorias de atividade econômica, sua opção é se empregar na atividade econômica

A crédito, pois representa risco aproximado de acidente de trabalho igual a 1,15%.

B crédito, pois representa risco aproximado de acidente de trabalho igual a 2,58%.

C crédito, pois apresenta o menor registro de quantidade de empregados.

D administração pública, pois representa risco aproximado de acidente de trabalho igual a 0,18%.

E administração pública, pois apresenta o menor registro de afastamento por acidente de trabalho.

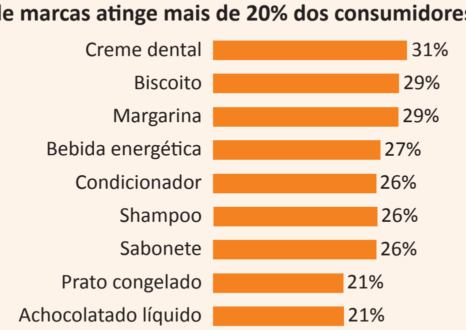
22| ENEM

Quando a propaganda é decisiva na troca de marcas

Todo supermercadista sabe que, quando um produto está na mídia, a procura pelos consumidores aumenta. Mas, em algumas categorias, a influência da propaganda é maior, de acordo com pesquisa feita com 400 pessoas pela consultoria YYY e com exclusividade para o supermercado XXX.

O levantamento mostrou que, mesmo não sendo a razão o fator mais apontado para trocar de marca, não se pode ignorar a força das campanhas publicitárias. Em algumas categorias, um terço dos respondentes atribuem a mudança à publicidade. Para Nicanor Guerreiro, a propaganda estabelece uma relação mais "emocional" da marca com o público. "Todos sentimos necessidade de consumir produtos que sejam 'aceitos' pelas outras pessoas. Por isso, a comunicação faz o papel de endosso das marcas", afirma. O executivo ressalta, no entanto, que nada disso adianta se o produto não cumprir as promessas transmitidas nas ações de comunicação. Um dos objetivos da propaganda é tornar o produto aspiracional, despertando o desejo de experimentá-lo. O que o consumidor deseja é o que a loja vende. E é isso o que o supermercadista precisa ter sempre em mente. Veja o gráfico:

Categorias em que a influência da propaganda na troca de marcas atinge mais de 20% dos consumidores



Disponível em: www.riovermelho.net. Acesso em: 3 mar. 2012 (adaptado)

De acordo com o texto e com as informações fornecidas pelo gráfico, para aumentar as vendas de produtos, é necessário que

A a campanha seja centrada em produtos alimentícios, a fim de aumentar o percentual de troca atual que se apresenta como o mais baixo.

B a preferência de um produto ocorra por influência da propaganda devido à necessidade emocional das marcas.

C a propaganda influencie na troca de marca e que o consumidor valorize a qualidade do produto.

D os produtos mais vendidos pelo comércio não sejam divulgados para o público como tal.

E as marcas de qualidade inferior constituam o foco da publicidade por serem mais econômicas.

Desde 1955 a indústria brasileira não tinha uma participação tão baixa no PIB (Produto Interno Bruto) do país. Só entre 2004 e 2012, a porcentagem foi de 19,2% para 13,3% — uma perda total de 30,8%. As conclusões são parte do estudo "Por que reindustrializar o Brasil?", divulgado pela Fiesp (Federação das Indústrias do Estado de São Paulo).

http://exame.abril.com.br/economia/noticias/importancia-da-industria-para-o-pib-cai-a-niveis-dos-anos-50 (Adaptado).

Acesso em 01.02.2015

É extremamente frequente o uso de expressões como as apresentadas no texto acima. O uso das porcentagens está nas revistas, nos jornais, na bolsa de valores, nas vitrines das lojas e em qualquer negociação, seja nas relações de mercados internacionais ou na feira mais próxima de onde moramos. As porcentagens são aplicadas em acréscimos ou decréscimos de preços, números ou quantidades, sempre tomando por base 100 unidades. Vejamos o seu significado:

Informação	Significado
O aumento dos combustíveis foi de 8%.	Para cada R$ 100,00 houve um aumento de R$ 8,00.
Algumas mercadorias importadas da China receberam desconto de 15%.	Para cada R$ 100,00 foi dado um desconto de R$ 15,00.

DEFINIÇÃO

A palavra porcentagem (ou percentagem) deriva do latim *per centum*, que significa "por cento", "a cada centena". Dá-se o nome de porcentagem a toda fração cujo denominador é 100.

RAZÃO CENTESIMAL

Toda razão que tem para o consequente (denominador) o número 100 denomina-se razão centesimal. Exemplos:

$$\frac{6}{100}, \frac{21}{100}, \frac{345}{100}$$

Podemos representar uma razão centesimal de outras formas:

$\frac{3}{100} = 0{,}03 = 3\%$ (Lê-se 3 por cento)

$\frac{27{,}5}{100} = 0{,}275 = 27{,}5\ \%$ (Lê-se 27,5 por cento)

$\frac{123}{100} = 1{,}23 = 123\%$ (Lê-se 123 por cento)

As expressões 3%, 27,5% e 123% são chamadas de **taxas centesimais** ou **taxas percentuais**.

Observações:

Uma razão $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ pode também ser escrita na forma %. São exemplos:

$\frac{1}{2} = 0{,}50 = \frac{50}{100} = 50\%$

$\frac{1}{4} = 0{,}25 = \frac{25}{100} = 25\%$

$\frac{1}{8} = 0{,}125 = \frac{12{,}5}{100} = 12{,}5\%$

$\frac{9}{40} = 0{,}225 = \frac{225}{1000} = \frac{22{,}5}{100} = 22{,}5\ \%$

Quando a taxa de porcentagem é muito pequena, podemos adotar uma taxa **por mil**. A expressão de um número por mil é uma maneira de o expressar como uma fração de denominador 1.000, ou como a décima parte de 1%. Utilizamos o símbolo ‰.

CONCEITOS E ESCLARECIMENTOS IMPORTANTES

- **Principal**

  É o número sobre o qual se deve calcular a porcentagem.

- **Taxa**

  É o número que mostra quantas unidades se têm de tomar em cada 100 (denominador da razão).

  Exemplo:

  Calcule 20% de 150 kg.

  150 kg → Principal

  20% → Taxa

  30 kg → Resultado → Porcentagem

- Taxa unitária ≠ Taxa percentual

  Taxa unitária: é um número real (fração irredutível);

  Taxa percentual: pode ser centesimal (%) ou milesimal (‰).

OPERAÇÕES COM PORCENTAGENS

As porcentagens podem ser submetidas a todas as operações aritméticas básicas. Dentre elas convém comentarmos sobre a potenciação e a radiciação, operações que necessitam de cuidados. Vejamos:

$$(10\%)^2 = \left(\frac{10}{100}\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} = 1\%$$

$$\sqrt{25\%} = \sqrt{\frac{25}{100}} = \frac{5}{10} = 0,50 = 50\%$$

FÓRMULA DE PORCENTAGEM

Podemos obter uma maneira de se calcular qualquer porcentagem através de uma regra de três simples. Vejamos:

Imagine que uma determinada unidade monetária está aplicada a uma taxa de i%. Determine o rendimento de "P" unidades monetárias.

Unidades Monetárias	Taxa
1	i
P	x

Note que as grandezas são diretamente proporcionais. Assim, teremos:

$$\frac{1}{P} = \frac{i}{x}$$

$$x = i\% \,.\, P$$

Exemplo de aplicação:

Calcular 15% de R$ 420,00.

$\frac{15}{100}$ x R$ 420,00 = 0,15 x R$ 420 = R$ 63,00.

PORCENTAGEM DE UM NÚMERO EM RELAÇÃO A OUTRO

Sendo a < b podemos encontrar a razão $\frac{a}{b}$. Observe o exemplo:

Dos 30 alunos de uma sala, 24 estão presentes. Qual é o porcentual de ausentes?

Se 24 estão presentes, então 6 estão ausentes. Assim a porcentagem de ausentes é de $\frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0{,}20 = 20\%$.

AUMENTO E DESCONTO PORCENTUAL (FATORES DE ATUALIZAÇÃO)

- No caso de haver um **acréscimo**, o fator de multiplicação será:

Fator de Multiplicação = 1 + taxa de acréscimo (na forma decimal)

Veja a tabela abaixo:

Acréscimo ou Lucro	Fator de Multiplicação
10%	1,10
15%	1,15
47%	1,47
67%	1,67

Exemplo:

Aumentando 10% no valor de R$ 10,00 temos: 10 . 1,10 = **R$ 11,00**

- No caso de haver um **decréscimo**, o fator de multiplicação será:

Fator de Multiplicação = 1 – taxa de desconto (na forma decimal).

Veja a tabela abaixo:

Desconto	Fator de Multiplicação
10%	0,90
25%	0,75
34%	0,66
90%	0,10

Exemplo:

Descontando 10% no valor de R$ 10,00 temos: 10 . 0,90 = **R$ 9,00**

AUMENTOS E DESCONTOS SUCESSIVOS

Suponhamos que o preço de uma mercadoria é de R$ 50,00. Após dois aumentos sucessivos de 10% e 20%, qual será o novo valor?

$i_1 = 10\% = 0,1$ (Fator de acréscimo = 1,1)

$i_2 = 20\% = 0,2$ (Fator de acréscimo = 1,2)

Valor Atual (VA) = 50

Novo Valor (NV) = ?

NV = 50 x 1,1 x 1,2 = R$ 66,00

Note que dois aumentos sucessivos de 10% e 20% não correspondem a um só aumento de 30%.

Observando o modelo prático anterior, podemos de maneira geral escrever:

Fórmula para aumentos sucessivos	$NV = VA \times (1+i_1)\ .\ (1+i_2)\ .\ (1+i_3)\ .\ ...$
Fórmula para descontos sucessivos	$NV = VA \times (1-i_1)\ .\ (1-i_2)\ .\ (1-i_3)\ .\ ...$

Onde,

NV = Novo Valor

VA = Valor atual

$i_1, i_2, i_3, ...$ = Taxas sucessivas

OPERAÇÕES SOBRE MERCADORIAS

Nas operações realizadas com mercadorias podemos obter os seguintes resultados:

Lucro (L)	Prejuízo (P)	Nem lucro e nem prejuízo
PV > PC	PV < PC	PV = PC

Onde,

PV = Preço de venda

PC = Preço de compra

OPERAÇÕES DE VENDA QUE UTILIZAM PORCENTAGENS

As palavras lucro, abatimento (desconto), comissão, vêm sempre acompanhadas de taxa porcentual, sem a qual perderiam o sentido. Podemos resolver problemas que envolvem essas expressões com relativa facilidade, utilizando-se das fórmulas práticas abaixo:

Lucro sobre a compra	PV = (1 + taxa sobre a compra) . PC
Prejuízo sobre a compra	PV = (1 – taxa sobre a compra) . PC
Lucro sobre a venda	PV = PC/(1 – taxa sobre a venda)
Prejuízo sobre a venda	PV = PC/(1 + taxa sobre a venda)

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Em uma eleição para síndico, a qual concorriam três candidatos, votaram 1.500 condôminos; o candidato A obteve 376 votos, o candidato B, 645 votos e o candidato C obteve 299 votos. Qual foi a porcentagem de votos brancos ou nulos?

Resolução:

Somando-se os votos dos candidatos A, B e C, temos: 376 + 645 + 299 = 1320. O número de votos brancos ou nulos será: 1500 – 1320 = 180. A porcentagem será dada por: $\frac{180}{1500}$ *x 100 = 12%*

02| Thiago compromete 20% do seu salário com o aluguel. Se este aluguel subir 40% e o salário do trabalhador tiver um reajuste de 12%, que porcentagem do salário ele passará a comprometer com o aluguel?

Resolução:

Vamos admitir que o salário do trabalhador seja igual a R$ 100,00.

Desse modo, o aluguel é igual a 20% desse valor, ou seja: R$ 20,00.

O novo salário será de 100 x 1,20 = R$ 112,00.

O novo aluguel será de 20 x 1,40 = R$ 28,00.

O novo percentual "x" comprometido com o aluguel será de:

$$X = \frac{100 \text{ x } 28}{112} = 25\%$$

03| Por quanto devo vender uma mercadoria comprada por R$ 1900,00 para lucrar 5% sobre a venda?

Resolução:

Podemos resolver por regra de três ou através da fórmula:

I. Por regra de três

95%.............1900

100%...........x

x = (100 . 1900)/95

x = 2000,00.

II. Pela fórmula

Preço de Venda = 1900/(1 – 0,05) = 1900/0,95 = 2000,00.

O preço de venda será de R$ 2.000,00.

04| Determine o prejuízo e o preço de venda de um imóvel comprado por R$ 8000,00 tendo perdido 25% do preço de venda.

Resolução:

Precisamos calcular 25% de uma quantia desconhecida. O preço de compra foi de 125%, já que o prejuízo foi de 25%.

125%..........8.000

100%..........x

x = (8.000 . 100)/125 = 6400.

Podemos calcular o preço de venda usando da fórmula:

PV = 8000/(1 + 0,25) = 6.400.

Portanto o preço de venda (com prejuízo de 25%), será de R$ 6.400,00, implicando em um prejuízo financeiro de R$ 1600,00.

05| Uma fatura no valor de R$ 5.000,00 sofrerá dois descontos sucessivos de 5% e mais 8%. Por quanto será liquidada?

Resolução:

Valor líquido = 5000 x (1 – 0,05) x (1 – 0,08)

Valor líquido = 5000 x (0,95) x (0,92)

Valor líquido = 4.370,00.

A fatura será liquidada por R$ 4.370,00.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| O salário de Augusto é de R$ 1430,00. Se ele receber um aumento de 30% sobre este salário, quanto passará a receber?

02| Everaldo queria comprar uma televisão. Na primeira loja que visitou, a televisão de seus sonhos custava R$ 430,00. Foi pesquisar o preço em outra loja e conseguiu um preço 10% menor. Na terceira loja, conseguiu um preço 15% menor que o da 2ª loja. Qual é o preço da televisão na terceira loja?

03| Aumentando-se os lados a e b de um retângulo de 15% e 20% respectivamente, em quantos por cento a área do retângulo é aumentada?

04| Um cliente pediu a um vendedor um desconto de 40% sobre o preço de tabela. O vendedor disse que poderia dar um desconto de 30% e ainda daria um desconto de 10% incidindo sobre o preço já com o desconto de 30%. Estas duas propostas, do cliente e do vendedor, apresentam uma diferença de quantos por cento sobre o preço da tabela?

05| Um comerciante aumenta o preço de um produto que custava R$ 300,00 em 20%. Um mês depois arrepende-se e faz um desconto de 20%. Qual será o novo preço do produto?

06| Sônia recebia R$ 1580,00, por mês, de salário. Ela teve um reajuste salarial de 24% sobre este salário e depois outro aumento de 10% sobre o novo salário. Qual é o salário de Sônia depois desses dois reajustes?

07| UNESP Misturam-se dois tipos de leite, um com 3% de gordura outro com 4% de gordura para obter, ao todo, 80 litros de leite com 3,25% de gordura. Quantos litros de leite de cada tipo foram misturados?

08| UNESP No início de um mês, João poderia comprar M kg de feijão, se gastasse todo seu salário nessa compra. Durante o mês o preço do feijão aumentou 30% e o salário de João aumentou 10%. No início do mês seguinte, se gastasse todo seu salário nesta compra, João só poderia comprar X% dos M kg de feijão. Calcule X.

09| Um comerciante compra 60 kg de arroz e quer vendê-los de modo a poder comprar, com o dinheiro da venda, 80 kg do mesmo arroz. Qual é a taxa de lucro do comerciante sobre a compra?

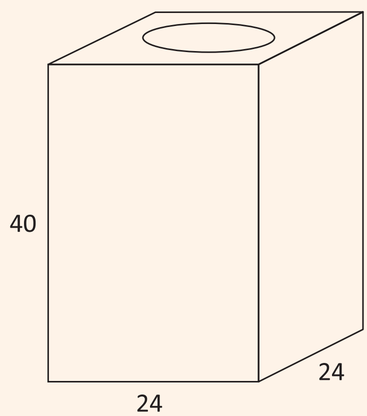
10| FUVEST Um comerciante deseja realizar uma grande liquidação anunciando x% de desconto em todos os produtos. Para evitar prejuízo o comerciante remarca os produtos antes da liquidação.

A De que porcentagem p devem ser aumentados os produtos para que, depois do desconto, o comerciante receba o valor inicial das mercadorias?

B O que acontece com a porcentagem p quando o valor do desconto da liquidação se aproxima de 100%?

T ENEM E VESTIBULARES

01| **ENEM** Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.



Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

A 14,4%

B 20%

C 32,0%

D 36,0%

E 64,0%

02| **ENEM** Uma pessoa compra semanalmente, numa mesma loja, sempre a mesma quantidade de um produto que custa R$ 10,00 a unidade. Como já sabe quanto deve gastar, leva sempre R$ 6,00 a mais do que a quantia necessária para comprar tal quantidade, para o caso de eventuais despesas extras. Entretanto, um dia, ao chegar à loja, foi informada de que o preço daquele produto havia aumentado 20%. Devido a esse reajuste, concluiu que o dinheiro levado era a quantia exata para comprar duas unidades a menos em relação à quantidade habitualmente comprada.

A quantia que essa pessoa levava semanalmente para fazer a compra era

A R$ 166,00

B R$ 156,00

C R$ 84,00

D R$ 46,00

E R$ 24,00

03| **ENEM** Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga da ponte, e o restante da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação.

No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente,

A 1,8t; 8,4t; 1,8t.

B 3,0t; 6,0t; 3,0t.

C 2,4t; 7,2t; 2,4t.

D 3,6t; 4,8t; 3,6t.

E 4,2t; 3,6t; 4,2t.

04| **ENEM** O Brasil é um país com uma vantagem econômica clara no terreno dos recursos naturais, dispondo de uma das maiores áreas com vocação agrícola do mundo. Especialistas calculam que, dos 853 milhões de hectares do país, as cidades, as reservas indígenas e as áreas de preservação, incluindo florestas e mananciais, cubram por volta de 470 milhões de hectares. Aproximadamente 280 milhões se destinam à agropecuária, 200 milhões para pastagens e 80 milhões para a agricultura, somadas as lavouras anuais e as perenes, como o café e a fruticultura.

FORTES, G. "Recuperação de pastagens é alternativa para ampliar cultivos".
Folha de S. Paulo, 30 out. 2011.

De acordo com os dados apresentados, o percentual correspondente à área utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é mais próximo de

A 32,8%

B 28,6%

C 10,7%

D 9,4%

E 8,0%

05| **ENEM** De acordo com a ONU, da água utilizada diariamente,

25% são para tomar banho, lavar as mãos e escovar os dentes.

33% são utilizados em descarga de banheiro.

27% são para cozinhar e beber.

15% são para demais atividades.

No Brasil, o consumo de água por pessoa chega, em média, a 200 litros por dia.

O quadro mostra sugestões de consumo moderado de água por pessoa, por dia, em algumas atividades.

Atividade	Consumo total de água na atividade (em litros)
Tomar banho	24,0
Dar descarga	18,0
Lavar as mãos	3,2
Escovar os dentes	2,4
Beber e cozinhar	22,0

Se cada brasileiro adotar o consumo de água indicado no quadro, mantendo o mesmo consumo nas demais atividades, então economizará diariamente, em média, em litros de água,

A 30,0
B 69,6
C 100,4
D 130,4
E 170,0

06| ENEM Os vidros para veículos produzidos por certo fabricante têm transparências entre e dependendo do lote fabricado. Isso significa que, quando um feixe luminoso incide no vidro, uma parte entre 70% e 90% da luz consegue atravessá-lo. Os veículos equipados com vidros desse fabricante terão instaladas, nos vidros das portas, películas protetoras cuja transparência, dependendo do lote fabricado, estará entre 50% e 70%. Considere que uma porcentagem P da intensidade da luz, proveniente de uma fonte externa, atravessa o vidro e a película.

De acordo com as informações, o intervalo das porcentagens que representam a variação total possível de P é

A [35; 63]
B [40; 63]
C [50; 70]
D [50; 90]
E [70; 90]

07| ENEM Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas. Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses.

Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser

A 72%
B 68%
C 64%
D 54%
E 18%

08| ENEM Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras. Um cliente deseja comprar um produto que custava R$50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de

A 15,00.
B 14,00.
C 10,00.
D 5,00.
E 4,00.

09| ENEM O contribuinte que vende mais de R$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R$ 34 mil um lote de ações que custou R$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de

A R$ 900,00.
B R$ 1200,00.
C R$ 2100,00.
D R$ 3900,00.
E R$ 5100,00.

10| ENEM O losango representado na Figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

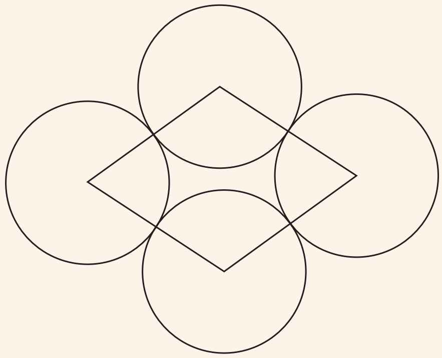


Figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

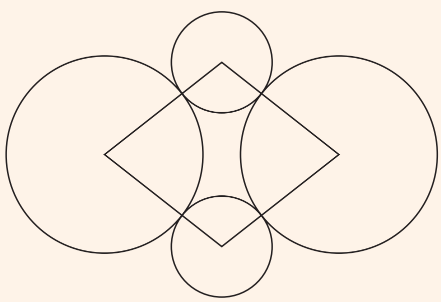


Figura 2

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de

A 300%.

B 200%.

C 150%.

D 100%.

E 50%.

11| ENEM A cerâmica possui a propriedade da contração, que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico submetido a uma determinada temperatura elevada: em seu lugar aparecendo "espaços vazios" que tendem a se aproximar. No lugar antes ocupado pela água vão ficando lacunas e, consequentemente, o conjunto tende a retrair-se. Considere que no processo de cozimento a cerâmica de argila sofra uma contração, em dimensões lineares, de 20%.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 30 mar. 2012 (adaptado).

Levando em consideração o processo de cozimento e a contração sofrida, o volume V de uma travessa de argila, de forma cúbica de aresta a, diminui para um valor que é

A 20% menor que V, uma vez que o volume do cubo é diretamente proporcional ao comprimento de seu lado.

B 36% menor que V, porque a área da base diminui de a^2 para $((1 – 0,2)a)^2$.

C 48,8% menor que V, porque o volume diminui de a3 para $(0,8a)^3$.

D 51,2% menor que V, porque cada lado diminui para 80% do comprimento original.

E 60% menor que V, porque cada lado diminui 20%.

12| ENEM Um grupo de pacientes com Hepatite C foi submetido a um tratamento tradicional em que 40% desses pacientes foram completamente curados. Os pacientes que não obtiveram cura foram distribuídos em dois grupos de mesma quantidade e submetidos a dois tratamentos inovadores. No primeiro tratamento inovador, 35% dos pacientes foram curados e, no segundo, 45%.

Em relação aos pacientes submetidos inicialmente, os tratamentos inovadores proporcionaram cura de

A 16%.

B 24%.

C 32%.

D 48%.

E 64%.

13| UERJ Considere uma mercadoria que teve seu preço elevado de x reais para y reais. Para saber o percentual de aumento, um cliente dividiu y por x obtendo quociente igual a 2,08 e resto igual a zero. Em relação ao valor de x, o aumento percentual é equivalente a:

A 10,8%

B 20,8%

C 108,0

D 208,0%

14| ACAFE Uma pequena fábrica de tubos de plástico calcula a sua receita em milhares de reais, através da função $R(x) = 3,8x$, onde x representa o número de tubos vendidos. Sabendo que o custo para a produção do mesmo número de tubos é 40% da receita mais R$ 570,00. Nessas condições, para evitar prejuízo, o número mínimo de tubos de plástico que devem ser produzidos e vendidos pertence ao intervalo:

A [240 ; 248].

B [248 ; 260].

C [252 ; 258].

D [255 ; 260].

15| FUVEST Um apostador ganhou um prêmio de R$1.000.000,00 na loteria e decidiu investir parte do valor em caderneta de poupança, que rende 6% ao ano, e o restante em um fundo de investimentos, que rende 7,5% ao ano. Apesar do rendimento mais baixo, a caderneta de poupança oferece algumas vantagens e ele precisa decidir como irá dividir o seu dinheiro entre as duas aplicações. Para garantir, após um ano, um rendimento total de pelo menos R$72.000,00 a parte da quantia a ser aplicada na poupança deve ser de, no máximo,

A R$ 200.000,00

B R$ 175.000,00

C R$ 150.000,00

D R$ 125.000,00

E R$ 100.000,00

16| CFTRJ Na Meia Maratona do Rio de Janeiro de 2013, os corredores Robson e Hudson largaram juntos, com velocidades constantes. Sabendo que Robson chegou 411 m na frente de Hudson e que a velocidade de Robson é 30% superior à velocidade de Hudson, qual a distância percorrida por Hudson até o momento em que Robson cruzou a linha de chegada?

A 1200 m

B 1256 m

C 1300 m

D 1370 m

17| PUCRJ Em uma loja, uma peça de roupa que custava R$ 200,00 passou a custar R$ 300,00. O reajuste foi de:

A 200%

B 100%

C 50%

D 20%

E 10%

18| CESGRANRIO A pressão P e o volume V de um gás perfeito mantido a uma temperatura constante satisfazem a Lei de Boyle PV = constante. Se aumentarmos a pressão em 25%, o volume do gás diminuirá de:

A 20%

B 25%

C 33%

D 45%

E 50%

19| UECE Um comerciante comprou um automóvel por R$ 18.000,00, pagou R$ 1.000,00 de imposto e, em seguida, vendeu-o com um lucro de 20% sobre o preço de venda. O lucro do comerciante foi

A R$ 3.750,00.

B R$ 4.050,00.

C R$ 4.350,00.

D R$ 4.750,00.

20| UFRGS Na compra de três unidades idênticas de uma mesma mercadoria, o vendedor oferece um desconto de 10% no preço da segunda unidade e um desconto de 20% no preço da terceira unidade. A primeira unidade não tem desconto. Comprando três unidades dessa mercadoria, o desconto total é

A 8%

B 10%

C 22%

D 30%

E 32%

21| UFJF Uma lanchonete vende cada copo de suco de laranja por R$ 1,50, obtendo um lucro de 50% sobre o custo do suco. Devido a uma queda na safra, o preço da laranja subiu, o que acarretou um aumento de 20% no custo do suco. O dono da lanchonete, para não diminuir as vendas de suco de laranja, decidiu manter o preço de cada copo de suco em R$ 1,50 e reduzir o tamanho do copo de modo a conservar a margem de lucro de 50% sobre o custo do suco. Originalmente, a capacidade do copo era 300 mℓ. O novo copo deve ter capacidade de:

A 150 mℓ

B 200 mℓ

C 250 mℓ

D 275 mℓ

E 280 mℓ

B JUROS

Em nosso cotidiano, é muito importante sabermos lidar com certas situações que envolvem juros. Todos nós, de um jeito ou de outro, temos a necessidade de compreender um pouco de matemática financeira. Ao fazermos, por exemplo, compras a crédito, nos é requisitado um mínimo de conhecimento sobre o assunto. Em muitas circunstâncias do nosso dia a dia verificamos o conceito de juros: financiamento de automóveis, empréstimos bancários e as correções de aplicações bancárias.

DEFINIÇÃO DE JUROS

Juros são uma compensação em dinheiro que se recebe ou que se paga pelo empréstimo de determinada quantia, ao final de um período.

JUROS SIMPLES

É aquele calculado apenas sobre o capital inicial. Esta modalidade de Regime de Capitalização não existe no Mercado Financeiro, uma vez que os juros dos períodos anteriores não são capitalizados. Há, portanto, nesse regime, pagamento de juros constantes por períodos iguais.

O rendimento de uma aplicação financeira, aplicada pelo prazo de um único período de tempo, no que se refere à taxa de juros, pode ser calculado da seguinte forma:

$$J = C.i$$

Onde,

J: Juros

C: Capital (Dinheiro que se empresta ou toma emprestado)

i: Taxa (Porcentagem que representa os juros que se recebe ou se paga, ao final de um período)

Devido ao comportamento linear no regime de juros simples, se aplicarmos um capital durante o tempo a que se refere a taxa de juros, o rendimento será calculado da maneira seguinte:

$$J = C.i.t$$

Onde,

t: tempo (Período utilizado na transação).

O total a ser pago ao final do empréstimo denomina-se montante (M) e corresponde ao capital mais o total de juros.

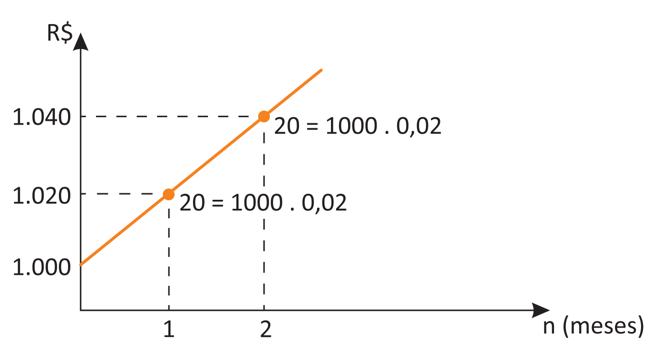
$M = C + J.$

Observações importantes

- Na determinação de juros, a taxa e o tempo devem estar relacionados na mesma unidade;
- A taxa normalmente é dada ao ano, ao mês ou ao dia;
- Por convenção, o mês comercial tem 30 dias e o ano comercial tem 360 dias.

Exemplo de um gráfico de Capitalização Simples

Considere um capital de R$ 1.000,00 remunerado à taxa de juros simples de 2% a.m., durante o período de 2 meses.



R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Calcule os juros simples obtidos nas seguintes condições:

A Um capital de R$220,00 é aplicado por três meses, à taxa de 4% a.m.

Resolução:

Aplicando a fórmula para juros simples em cada caso, com a unidade de tempo de aplicação igual à unidade de tempo da taxa, temos:

$$\begin{cases} t = 3 \text{ meses} \\ i = 0,04 \\ C = 220 \end{cases}$$

$J = C.i.t = (220) . (0{,}04) . (3) = R\$ \ 26{,}40$

B Um capital de R$ 540,00 é aplicado por um ano, à taxa de 5% a.m.

Resolução:

$$\begin{cases} t = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses} \\ i = 0,05 \\ C = 540 \end{cases}$$

$J = C.i.t = (540) . (0{,}05) . (12) = R\$ \ 324{,}00$

02| Obtenha o montante de uma dívida, contraída a juros simples, nas seguintes condições:

A capital: R$ 400,00; taxa: 48% ao ano; prazo: 5 meses;

Resolução:

Aplicando a fórmula para montante a juros simples, em cada caso, com a unidade de tempo da dívida igual à unidade de tempo da taxa, temos:

$$\begin{cases} t = 5 \text{ meses} = \dfrac{5}{12} \text{ ano} \\ i = 0,48 \\ C = 400 \end{cases}$$

$M = C + J$

$M = C + C.i.t.$

$M = C(1 + i.t)$

$M = (400) . \left(1 + 0,48.\dfrac{5}{12}\right)$

$M = (400) . (1 + 0{,}04.5)$

$M = (400) . (1 + 0{,}20)$

$M = (400) . (1{,}2)$

$M = R\$ \ 480{,}00$

B capital: R$180,00; taxa: 72% ao semestre; prazo: 8 meses;

Resolução:

$$\begin{cases} t = 8 \text{ meses} = \dfrac{8}{6} \text{ semestre} \\ i = 0,72 \\ C = 180 \end{cases}$$

$M = C + J$

$M = C + C.i.t.$

$M = C(1 + i.t)$

$M = (180) . \left(1 + 0,72.\dfrac{8}{6}\right)$

$M = (180) . (1 + 0{,}12.8)$

$M = (180) . (1 + 0{,}96)$

$M = (180) . (1{,}96)$

$M = R\$ \ 352{,}80$

03| Um capital é aplicado, a juros simples, à taxa de 5% a.m. Quanto tempo, no mínimo, ele deverá ficar aplicado, a fim de que seja possível resgatar dez vezes a quantia aplicada?

Resolução:

Considerando C o capital a ser aplicado, temos:

$$\begin{cases} t = ? \\ i = 0,05 \\ M = 10C \end{cases}$$

$M = C(1 + i.t)$

$10C = C.(1+0{,}05.t)$

$1 + 0{,}05t = 10$

$t = \dfrac{9}{0,05}$

$t = 180 \text{ meses}$

04| Gedson fez compras em uma loja no valor total de R$ 2400,00. Há duas opções para pagamento:

- à vista, com 3% de desconto;
- entrada de R$ 1200,00 mais uma parcela de R$1200,00 um mês após a compra.

A Que valor Gedson pagará se optar pelo pagamento à vista?

Resolução:

Com o pagamento à vista há o desconto de 3%.

$$\begin{cases} V_f = ? \\ V_i = 2400 \\ i = 0,03 \end{cases}$$

$V_f = 2400.(1-0{,}03)$

$V_f = 2400.(0{,}97)$

$V_f =$ R\$ 2328,00

B Que taxa mensal de juros simples a loja embute no pagamento parcelado?

Resolução:

O valor à vista é de R\$ 2328,00. Com a entrada de R\$ 1200,00 faltaria ser pago R\$ 1128,00. Mas será pago outra parcela de R\$ 1200,00. Ou seja, o valor que faltava sofre um juro no tempo igual a 1 mês.

$$\begin{cases} Vf = 1200 \\ Vi = 1128 \\ i = ? \end{cases}$$

$$1200 = 1128.(1+i.1)$$

$$1 + i = \frac{1200}{1128}$$

$$i \cong 1{,}063 - 1$$

$$i \cong 0{,}063$$

$$i \cong 6{,}3\%$$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Márcio emprestou R\$ 500,00 a João por 5 meses, no sistema de juros simples, a uma taxa de juros fixa e mensal. Se no final dos 5 meses José recebeu um total de R\$ 600,00, então qual foi a taxa fixa mensal aplicada?

02| Um capital aplicado a juros simples, à taxa de 2,5% ao mês, triplica em quanto tempo?

03| FGV Um aparelho de TV é vendido por R\$ 1.000,00 em dois pagamentos iguais, sem acréscimo, sendo o 1º como entrada e o 2º um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 4% sobre o preço de R\$ 1.000,00. Qual é a taxa mensal de juros simples do financiamento?

04| Arnaldo aplicou a quantia de R\$ 500,00 a juros simples durante 6 meses. A taxa de aplicação foi de 5% ao mês. Qual foi o montante obtido?

05| FGV A rede Corcovado de hipermercados promove a venda de uma máquina fotográfica digital pela seguinte oferta: "Leve agora e pague daqui a 3 meses". Caso o pagamento seja feito à vista, Corcovado oferece ao consumidor um desconto de 20%. Caso um consumidor prefira aproveitar a oferta, pagando no final do 3º mês após a compra, qual é a taxa anual de juros simples que estará sendo aplicada no financiamento?

06| PUCRJ Denise comprou um apartamento à vista por R\$ 50.000,00. Se tivesse comprado o apartamento a prazo, teria pagado uma entrada de 30% e uma parcela de R\$ 47.600,00 após 6 meses. Qual a taxa mensal de juros simples deste financiamento? Um ano depois, Denise vendeu o apartamento. O lucro foi de 20% do preço de venda. Isto equivale a qual porcentagem do preço (R\$ 50.000,00) que pagou à vista?

07| UFSM Para custear seus estudos em um curso de culinária, um aluno conseguiu um empréstimo no valor de R\$ 1.000,00 pelo qual pagará, após 4 meses, uma única parcela de R\$ 1.280,00. Portanto, qual é a taxa anual de juros simples desse empréstimo?

08| CFTMG A quantia de R\$17.000,00 investida a juros simples de 0,01% ao dia, gera, após 60 dias, um montante de quanto?

09| Amanda aplicou a quantia de R\$ 3 600,00 durante um período de 8 meses no regime de juros simples, obtendo no final um montante de R\$ 3 960,00. Qual foi a taxa de juros anual dessa aplicação?

T ENEM E VESTIBULARES

01| CPCAR Gabriel aplicou R\$ 6500,00 a juros simples em dois bancos.

No banco A, ele aplicou uma parte a 3% ao mês durante $\frac{5}{6}$ de um ano; no banco B, aplicou o restante a 3,5% ao mês, durante $\frac{3}{4}$ de um ano. O total de juros que recebeu nas duas aplicações foi de R\$ 2002,50. Com base nessas informações, é correto afirmar que

A é possível comprar um televisor de R\$ 3100,00 com a quantia aplicada no banco A

B o juro recebido com a aplicação no banco A foi menor que R\$ 850,00

C é possível comprar uma moto de R\$ 4600,00 com a quantia recebida pela aplicação no banco B

D o juro recebido com a aplicação no banco B foi maior que R\$ 1110,00

02| UFSJ Para adquirir uma certa mercadoria, são oferecidos ao consumidor três planos de pagamento possíveis:

I. Pagamento no ato da compra, com 15% de desconto à vista.

II. Três parcelas mensais fixas iguais, com pagamento da primeira no ato da compra.

III. Seis parcelas mensais fixas iguais, com juros simples de 2% ao mês, com pagamento da primeira 30 dias após a compra.

Se cada uma das parcelas do plano II é de x reais, é **CORRETO** afirmar que

A) no plano III, cada prestação é de 0,5x reais.

B) no plano I, o valor pago pela mercadoria é de 2,75x reais.

C) a diferença entre o valor pago pela mercadoria nos planos I e III é de 0,81x reais.

D) a diferença entre o valor pago pela mercadoria nos planos II e III foi de 0,3x reais.

03| CPCAR Sr. José tinha uma quantia x em dinheiro e aplicou tudo a juros simples de 5% ao ano.

Terminado o primeiro ano, reuniu o capital aplicado e os juros e gastou $\frac{1}{3}$ na compra de material para construção de sua casa.

O restante do dinheiro ele investiu em duas aplicações: colocou $\frac{5}{7}$ a juros simples de 6% ao ano e o que sobrou a juros simples de 5% ao ano, recebendo assim, 700 reais de juros relativos a esse segundo ano.

Pode-se afirmar, então, que a quantia x que o Sr. José tinha é um número cuja soma dos algarismos é

A) 10

B) 11

C) 12

D) 13

04| CPCAR Lucas e Mateus ganharam de presente de aniversário as quantias x e y reais, respectivamente, e aplicaram, a juros simples, todo o dinheiro que ganharam, da seguinte forma:

1. Mateus aplicou a quantia y durante um tempo que foi metade do que esteve aplicado a quantia x de Lucas.

2. Mateus aplicou seu dinheiro a uma taxa igual ao triplo da taxa da quantia aplicada por Lucas.

3. No resgate de cada quantia aplicada, Lucas e Mateus receberam o mesmo valor de juros.

Se juntos os dois ganharam de presente 516 reais, então x – y é igual a

A) R$ 103,20

B) R$ 106,40

C) R$ 108,30

D) R$ 109,60

05| UEPG Marcelo tinha um capital de R$ 5.000,00. Parte desse capital ele aplicou no banco A, por um ano, à taxa de juros simples de 2% ao mês, obtendo R$ 360,00 de juros. O restante aplicou no banco B, também pelo período de 1 ano, à taxa de juros simples de 20% ao ano. Com base nesses dados, assinale o que for correto.

A) No banco B ele aplicou menos de R$ 3.000,00.

B) Marcelo obteve um montante de R$ 6.060,00 referente às duas aplicações.

C) A aplicação no banco B rendeu R$ 70,00 de juros.

D) Ele aplicou no banco A 20% de seu capital.

06| PUC Vidal fez um empréstimo de certo valor, para ser quitado ao final de quatro meses, em parcela única. A taxa de juros negociada com o gerente do banco foi de 5% ao mês. Exatamente um mês depois, sua namorada Madalena emprestou, do mesmo banco, um valor para ser pago ao final de três meses, também em parcela única, ou seja, ambos empréstimos vencem no mesmo dia. Sabe-se que o valor emprestado por Vidal é superior a dois salários mínimos. (Considerar juros simples).

A) Se o casal emprestou valores iguais, ainda que Madalena pague uma taxa de juros 30% maior do que a taxa devida por Vidal, seu saldo devedor será menor do que o do seu namorado.

B) Se Madalena emprestou um valor 10% superior àquele emprestado por Vidal, a uma taxa de 3% ao mês, seu saldo devedor no vencimento será igual ao de Vidal.

C) Suponha que eles emprestaram valores iguais. Para que o saldo devedor de ambos coincida, a taxa de juros paga por Madalena deverá ser 40% superior à taxa paga por Vidal.

D) Se Madalena emprestou 10% a menos que Vidal, a uma taxa de juros equivalente ao dobro daquela devida por ele, eles terão saldos devedores iguais na data de vencimento.

E) Sem conhecer o valor absoluto de cada empréstimo, ou o valor exato de um salário mínimo, é impossível fazer qualquer avaliação.

07| CFT Um capital c foi aplicado a juros simples com taxa mensal **i** por um tempo de **n** meses. Para se obter um montante igual ao triplo do capital aplicado, a relação matemática necessária é

A) $i.n = 2$

B) $i.n = 3.c$

C) $1 + n = 3.c$

D) $c + n = 10$

08| UFPR Luiz Carlos investiu R$ 10.000,00 no mercado financeiro da seguinte forma: parte no fundo de ações, parte no fundo de renda fixa e parte na poupança. Após um ano ele recebeu R$ 1.018,00 em juros simples dos três investimentos. Nesse período de um ano, o fundo de ações rendeu 15%, o fundo de renda fixa rendeu 10% e a poupança rendeu 8%. Sabendo que Luiz Carlos investiu no fundo de ações apenas metade do que ele investiu na poupança, os juros que ele obteve em cada um dos investimentos foram:

A) R$ 270,00 no fundo de ações, R$ 460,00 no fundo de renda fixa e R$ 288,00 na poupança.

B) R$ 300,00 no fundo de ações, R$ 460,00 no fundo de renda fixa e R$ 258,00 na poupança.

C) R$ 260,00 no fundo de ações, R$ 470,00 no fundo de renda fixa e R$ 288,00 na poupança.

D) R$ 260,00 no fundo de ações, R$ 480,00 no fundo de renda fixa e R$ 278,00 na poupança.

E) R$ 270,00 no fundo de ações, R$ 430,00 no fundo de renda fixa e R$ 318,00 na poupança.

09| PUC Em 05 de agosto de 2004, aproveitando a possibilidade de desconto no benefício, certo aposentado contraiu um empréstimo de R$ 12.000,00 à taxa de juros simples de 2% ao mês. Se nenhuma parcela desse empréstimo foi descontada, o saldo devedor em 5 de dezembro de 2005 era de, aproximadamente:

A) R$ 15.250,00

B) R$ 15.840,00

C) R$ 16.160,00

D) R$ 16.720,00

10| FGV Um fabricante vende determinado produto pelo preço p, para pagamento n meses após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto igual a 5% de p. A taxa mensal de juros simples do financiamento é:

A) 100 / (19n)%

B) 100 / (20n)%

C) 100 / (21n)%

D) 100 / (22n)%

E) 100 / (23n)%

11| ENEM João deve 12 parcelas de R$ 150,00 referentes ao cheque especial de seu banco e cinco parcelas de R$ 80,00 referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse esta dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado.

A opção que dá a João o menor gasto seria

A) renegociar suas dívidas com o banco.

B) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.

C) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.

D) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.

E) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

12| FGV João divide suas economias e as aplica em dois fundos: A e B. No primeiro mês, o fundo A rendeu 50% e o fundo B, 30%. No segundo mês, ambos renderam 20%. Se a rentabilidade que João obteve no bimestre foi de 63,2%, que porcentagem de sua economia foi aplicada no fundo B?

A) 50%

B) 60%

C) 40%

D) 70%

E) 30%

JUROS COMPOSTOS

> *"Os juros compostos são a força mais poderosa do universo"*
>
> *Albert Einstein*

Já estudamos os juros simples: são aqueles calculados à uma taxa fixa, sempre a partir de uma mesma quantia inicial. Iremos agora para o estudo dos juros compostos, os famosos juros sobre juros, em que o cálculo é feito de maneira um pouco diferente do cálculo dos juros simples, porém, seus resultados são enormemente diferentes.

Exemplo prático

A diferença entre o regime de juros simples e o de juros compostos, pode ser mais naturalmente comprovada através de um exemplo prático.

Seja um principal de R$ 1.000,00 aplicado à taxa de 20% ao ano, durante um período de 4 anos.

Vamos montar uma tabela comparativa, confrontando os resultados da aplicação em juros simples e da aplicação em juros compostos. Vamos utilizar a seguinte legenda:

Capital inicial: $C = 1.000,00$

Taxa: $i = 20\%$ a. a.

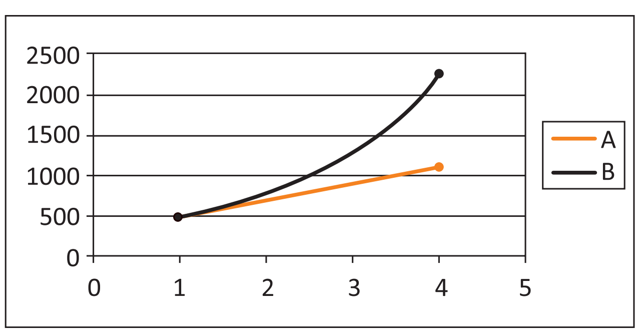
Tempo: $t = 4$ anos

TABELA COMPARATIVA

n	JUROS SIMPLES		JUROS COMPOSTOS	
	JUROS	MONTANTE	JUROS	MONTANTE
1	1.000 . 0,20 = 200	1.200	1.000 . 0,20 = 200	1.200
2	1.000 . 0,20 = 200	1.400	1.200 . 0,20 = 240	1.440
3	1.000 . 0,20 = 200	1.600	1.440 . 0,20 = 288	1.728
4	1.000 . 0,20 = 200	1.800	1.728 . 0,20 = 345,60	2.073,60

Para calcularmos os juros compostos, devemos aplicar a taxa sobre o montante do mês imediatamente anterior.

Note que no caso dos juros simples, a formação é linear. Já no caso dos juros compostos, a formação é exponencial (juros sobre juros).



A: Juros simples

B: Juros Compostos

Montante

Podemos encontrar uma equação que nos permita calcular de maneira direta o montante, a partir de uma taxa constante i e um capital inicial C.

Vamos deduzir a fórmula principal do regime composto. Seja uma aplicação de R$ 1.000,00 a juros compostos de 10% a.m. durante 3 meses. Observe que o montante de cada mês será o montante do mês anterior mais os juros:

Mês	Montante
1	$1000 + 10\% \,.\, 1000 = 1000 \,.\, (1 + 10\%)$
2	$1000 \,.\, (1+10\%) + 10\% \,[1000 \,.\, (1 + 10\%)] =$ $1000 \,.\, (1 + 10\%) \,.\, (1+10\%) =$ $1000 \,.\, (1 + 10\%)^2$
3	$1000 \,.\, (1 + 10\%)^2 + 10\% \,[1000 \,.\, (1 + 10\%)^2] =$ $1000 \,.\, (1 + 10\%)^2 \,.\, (1 + 10\%) =$ $1000\,(1 + 10\%)^3$

Observe que estas manipulações numéricas levaram em consideração a aplicação do princípio de cálculo dos juros compostos e também a aplicação de regras de fatoração. Na tabela abaixo está evidenciada um padrão que nos permitirá escrever uma generalização:

Mês	Montante
1	$1000 \,.\, (1 + 10\%)$
2	$1000 \,.\, (1 + 10\%)^2$
3	$1000 \,.\, (1 + 10\%)^3$

Observe ques os expoentes que aparece acima são relativos aos meses em questão. Isso nos permite com que que possamos prever os montantes para os demais meses. Generalizando, temos:

$$M = C.(1 + i)^t$$

onde:

M: montante

C: capital

i: taxa de juros

t: tempo de aplicação

Também é frequente encontramos a fórmula escrita com seguinte forma e notação:

$$FV = PV \,.\, \left(1 + \frac{i}{100}\right)^n$$

onde:

FV = futuro valor (montante)

PV = presente valor (principal)

i = taxa percentual de juros

n = prazo

A partir de agora, ficará implícito que o regime utilizado no cálculo dos juros será o composto. Isso se dá porque é o sistema mais justo, apesar de nem sempre ser o mais usado. Em contrapartida, quando o regime de juros simples for o utilizado, deixaremos bem claro no enunciado dos problemas.

Observações

O Cálculo do montante poderá ser feito de três maneiras:

- Usando logaritmos decimais;

- Recorrendo à tabela que determina $(1 + i)^t$.
- Com o uso de dados fornecidos no enunciado;
- Usando calculadora financeira (tecla exponencial).

TABELA PARA USO EM JUROS COMPOSTOS – VALORES DE $(1 + i)^t$

n	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1	1,0100	1,0200	1,0300	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000
2	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100
3	1,0303	1,0612	1,0927	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310
4	1,0406	1,0824	1,1255	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641
5	1,0510	1,1041	1,1593	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105
6	1,0615	1,1262	1,1941	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716
7	1,0721	1,1487	1,2299	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487
8	1,0829	1,1717	1,2668	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436
9	1,0937	1,1951	1,3048	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579
10	1,1046	1,2190	1,3439	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937
11	1,1157	1,2434	1,3842	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531
12	1,1268	1,2682	1,4258	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384
13	1,1381	1,2936	1,4685	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523
14	1,1495	1,3195	1,5126	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975
15	1,1610	1,3459	1,5580	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772
16	1,1726	1,3728	1,6047	1,8730	2,1829	2,5404	2,9522	3,4259	3,9703	4,5950
17	1,1843	1,4002	1,6528	1,9479	2,2920	2,6928	3,1588	3,7000	4,3276	5,0545
18	1,1961	1,4282	1,7024	2,0258	2,4066	2,8543	3,3799	3,9960	4,7171	5,5599
19	1,2081	1,4568	1,7535	2,1068	2,5270	3,0256	3,6165	4,3157	5,1417	6,1159
20	1,2202	1,4859	1,8061	2,1911	2,6533	3,2071	3,8697	4,6610	5,6044	6,7275

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Calcule os juros e o montante de uma aplicação financeira a juros compostos, nas seguintes condições:

A capital: R$ 300,00; taxa: 2% a.m.; prazo: 4 meses;

B capital: R$ 2500,00; taxa: 5% a.m.; prazo: 1 ano.

Resolução:

Use: $(1{,}02)^4 = 1{,}0824$; $(1{,}05)^{12} = 1{,}7957$. Valores colhidos da tabela dada em nossa abordagem teórica.

Vamos aplicar a fórmula de juros compostos em cada caso, tomando o cuidado de deixar a unidade de tempo de aplicação igual à unidade de tempo da taxa. Vejamos:

A $\begin{cases} t = 4 \text{ meses} \\ i = 0{,}02 \\ C = 300 \end{cases}$

$M = C.(1+i)^t$

$M = (300).(1+0{,}02)^4$

$M = (300).(1{,}02)^4$

$M = (300).(1{,}0824)$

$M = R\$324{,}72$

$J = M - C$

$J = R\$324{,}72 - R\$300{,}00$

$J = R\$24{,}72$

B $\begin{cases} t = 1 \text{ ano} = 12 \text{ meses} \\ i = 0{,}05 \\ C = 2500 \end{cases}$

$M = (2500).(1+0{,}05)^{12}$

$M = (2500).(1{,}05)^{12}$

$M = (2500).(1{,}7959)$

$M = R\$4.489{,}75$

$J = M - C$

$J = R\$4.489{,}75 - R\$2.500{,}00$

$J = R\$1989{,}75$

02| Flávia pegou emprestado "x" reais de uma amiga, prometendo devolver a quantia emprestada, acrescida de juros, após oito meses. O regime combinado foi de juros compostos, e a taxa, de 2,5% a.m. Se após o prazo combinado Flávia quitou a dívida com R$ 500,00, determine:

A O número inteiro mais próximo de "x";
Dado: $1{,}025^8 \cong 1{,}2184$

B O valor que Flávia deveria devolver à amiga, caso tivesse estabelecido regime de juros simples.

Resolução:

Vamos aplicar as fórmulas de juros compostos (letra a) e juros simples (letra b):

A $\begin{cases} t = 8 \text{ meses} \\ i = 0,025 \\ C = x \\ M = 500 \end{cases}$

$500 = x.(1+0,025)^8$

$(500) = x.(1,025)^8$

$x = \dfrac{500}{1,2184}$

$x = R\$\ 410,37$

Inteiro mais próximo $\rightarrow x = 410.$

B $\begin{cases} t = 8 \text{ meses} \\ i = 0,025 \\ C = 410,37 \end{cases}$

$M = (410,37).(1+0,025.8)$

$M = (410,37).(1+0,2)$

$M = (410,37).(1,2)$

$M = R\$\ 492,44$

03| Uma dívida, contraída a juros compostos, aumentou de R$ 200,00 para R$ 242,00 em dois meses. Admitindo que a taxa mensal de juros é fixa, determine:

A O valor da taxa.

B O montante dessa dívida meio ano após a data em que foi contraída.

Resolução:

Aplicando as fórmulas de juros compostos, temos:

A $242 = 200.(1+i)^2$

$(1+i)^2 = \dfrac{121}{100}$

$1+i = \sqrt{\dfrac{121}{100}}$

$1+i = \dfrac{11}{10}$

$i = 1,1 - 1$

$i = 0,1 \rightarrow 10\%$ a.m.

B meio ano = 6 meses

$M = 200 . (1+0,1)^6$

$M = (200) . (1,1)^6$

$M = (200) . (1,7716)$

$M = R\$\ 354,32$

04| O Sr. Paulo investiu R$ 5000,00 em um fundo de ações. No 1º ano as ações do fundo valorizaram-se 35%; no 2º ano, valorizaram-se 20% (em relação ao 1º ano) e no 3º ano desvalorizaram-se 30% (em relação ao 2º ano).

A Que valor o Sr. Paulo terá ao final dos três anos?

B Qual foi o rendimento percentual da aplicação nesses três anos?

Resolução:

Observe que as taxas não são fixas e ocorrem de forma sucessiva.

A $M = 5000.(1+0,35).(1+0,2).(1-0,3)$

$M = 5000.(1,35).(1,2).(0,7)$

$M = R\$5670,00$

B $5670 = 5000(1+i)$

$1+i = \dfrac{5670}{5000}$

$1+i = 1,134$

$i = 1,134 - 1$

$i = 0,134 \rightarrow 13,4\%$

Repare que a taxa acumulada apareceu no produto: $(1,35).(1,2).(0,7) = 1,134 = (1 + 0,134).$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Uma carteira de investimento rende 2% ao mês. Depois de três meses, R$ 1500,00 aplicados cumulativamente nesta carteira valem aproximadamente:

02| Durante os três primeiros meses de 2014, uma determinada aplicação apresentou os números do quadro abaixo. Quanto recebeu de juros compostos um aplicador que investiu R$ 100.000,00 nesse trimestre e nessa aplicação?

	Julho	Agosto	Setembro
Aplicação Financeira (%)	5,55	2,64	2,95

03| Pretendendo guardar uma certa quantia para as festas de fim de ano, uma pessoa depositou R$ 2.000,00 em 05/06/2012 e R$ 3.000,00 em 05/09/2012. Se o banco pagou juros compostos à taxa de 10% ao trimestre, em 05/12/2012 essa pessoa tinha um total de quanto?

04| A quantia de R$ 15.000.000,00 é emprestada a uma taxa de juros de 20% ao mês. Aplicando-se JUROS COMPOSTOS, qual será o valor que deverá ser pago para a quitação da dívida, três meses depois?

05| **FGV** O Sr. Alfredo costuma aplicar seu dinheiro num fundo de investimento que rende juros compostos.

A) Quanto deverá aplicar hoje, para ter um montante de R$ 13310,00 daqui a 3 anos, se a taxa de juros for de 10% ao ano?

B) Se ele aplicar hoje R$ 8000,00, qual a taxa anual de juros (constante) que o fundo deverá render para que ele possa sacar R$ 6000,00 daqui a 1 ano e R$ 9000,00 daqui a 2 anos, esgotando seu saldo?

06| Uma quantia de dinheiro Q, aplicada a juros compostos à taxa de i% ao mês, cresce mês a mês em progressão geométrica, sendo $a_1 = Q$ no início do primeiro mês, $a_2 = Q(100 + i)/100$ no início do segundo mês e assim por diante. Nessas condições, aplicando-se R$ 1.000,00 a juros compostos, à taxa de 5% ao mês, tem-se no início do terceiro mês um total de quanto?

07| Em um país irreal, o governante costuma fazer empréstimos para viabilizar sua administração. Existem dois empréstimos possíveis: pode-se tomar emprestado de países ricos com juros de 4,2% ao ano (aqui incluída a taxa de risco) ou toma-se emprestado dos banqueiros do país irreal que cobram juros compostos de 3% ao mês. Pressões políticas da oposição obrigam o governante a contrair empréstimo com os banqueiros do seu país. Quantas vezes maior que os juros anuais cobrados pelos países ricos são os juros anuais cobrados pelos banqueiros do país irreal?

Dado: use a aproximação $1{,}03^{12} \approx 42$

08| **FGV** Uma máquina de lavar roupa é vendida à vista por R$ 1200,00 ou, então, a prazo com R$ 300,00 de entrada mais uma parcela de R$ 1089,00, dois meses após a compra. Qual é a taxa mensal de juros compostos do financiamento?

09| **FGV** Fábio recebeu um empréstimo bancário de R$ 10.000,00, para ser pago em duas parcelas anuais, a serem pagas respectivamente no final do primeiro ano e do segundo ano, sendo cobrados juros compostos à taxa de 20% ao ano. Sabendo que o valor da 1ª parcela foi R$ 4.000,00, qual foi o valor da 2ª parcela?

T ENEM E VESTIBULARES

01| **UFSM** Uma empresa de cartão de crédito opera com juros compostos de 6% ao mês. Um usuário dessa empresa contraiu uma dívida de R$2.000,00 e, durante 6 meses, não pôde efetuar o pagamento. Ao procurar a empresa para renegociar a dívida, a empresa propôs que seja quitada em uma única parcela, com juros simples de 5% ao mês, referente aos 6 meses de atraso. Aceita a proposta, o total de juros pagos e o desconto obtido, em reais, são, respectivamente, iguais a

Dado: $(1{,}06)^6 = 1{,}4185$

A) 600,00 e 117,00.

B) 600,00 e 120,00.

C) 600,00 e 237,00.

D) 720,00 e 117,00.

E) 720,00 e 120,00.

02| **UFRN** Maria pretende comprar um computador cujo preço é R$ 900,00. O vendedor da loja ofereceu dois planos de pagamento: parcelar o valor em quatro parcelas iguais de R$ 225,00, sem entrada, ou pagar à vista, com 5% de desconto. Sabendo que o preço do computador será o mesmo no decorrer dos próximos quatro meses, e que dispõe de R$ 855,00, ela analisou as seguintes possibilidades de compra:

Opção 1	Comprar à vista, com desconto.
Opção 2	Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 1% de juros compostos ao mês e comprar, no final dos quatro meses, por R$ 900,00.
Opção 3	Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 1% de juros compostos ao mês e comprar a prazo, retirando, todo mês, o valor da prestação.
Opção 4	Colocar o dinheiro em uma aplicação que rende 2,0% de juros compostos ao mês e comprar, três meses depois, pelos R$ 900,00.

Entre as opções analisadas por Maria, a que oferece maior vantagem financeira no momento é a

A) opção 2.

B) opção 1.

C) opção 4.

D) opção 3.

03| FGV César aplicou R$ 10.000,00 num fundo de investimentos que rende juros compostos a uma certa taxa de juro anual positiva *i* . Após um ano, ele saca desse fundo R$ 7.000,00 e deixa o restante aplicado por mais um ano, quando verifica que o saldo é R$ 6.000,00. O valor de $(4i - 1)^2$ é:

A) 0,01

B) 0,02

C) 0,03

D) 0,04

E) 0,05

04| FGV Aplicando 1 real a juros compostos durante 12 anos, obtém-se um montante de 64 reais. Usando a tabela abaixo, pode-se dizer que a taxa anual de juros é:

X	1	2	3	4	5	6
$\sqrt{x}$	1	1,4142	1,7321	2	2,2361	2,4495

A) 41,42%

B) 73,21%

C) 100%

D) 123,61%

E) 144,95%

05| CFTMG O capital de R$2.000,00, aplicado a taxa de 3% a.m. por 60 dias, gerou um montante **M1** e o de R$1.200,00, aplicado a 2% a.m. por 30 dias, resultou um montante **M2**. Se as aplicações foram a juros compostos, então,

A) a soma dos montantes foi de R$3.308,48.

B) a soma dos montantes foi de R$3.361,92.

C) a diferença em modulo entre os montantes foi de R$897,80.

D) a diferença em modulo entre os montantes foi de R$935,86.

06| PUCMG Certa pessoa tomou um empréstimo de R$ 12.000,00 a juros compostos de 5% ao mês. Dois meses depois, pagou R$ 7.230,00 desse empréstimo e, dois meses após esse primeiro pagamento, liquidou todo seu débito. O valor desse segundo pagamento, em reais, foi:

A) 5.000,40

B) 5.200,00

C) 6.208,80

D) 6.615,00

07| UFES Um produto, cujo preço à vista é R$ 61,00, foi comprado com uma entrada à vista de R$ 25,00 e mais duas prestações mensais iguais de R$ 25,00 cada uma. A taxa percentual mensal de juros compostos praticada na venda do produto é

A) $\frac{1400}{61}$

B) 25

C) $\frac{1600}{61}$

D) 27

E) $\frac{1800}{61}$

08| ENEM João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os pontos possíveis, é de R$ 21.000,00 e esse valor não será reajustado nos próximos meses.

Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá esperar:

A) dois meses, e terá a quantia exata.

B) três meses, e terá a quantia exata.

C) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$225,00.

D) quatro meses, e terá a quantia exata.

E) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$430,00.

09| FGV O capital de R$ 12.000,00 foi dividido em duas partes (x e y), sendo que a maior delas (x) foi aplicada à taxa de juros de 12% ao ano, e a menor (y), à taxa de 8% ao ano, ambas aplicações feitas em regime de capitalização anual. Se, ao final de um ano, o montante total resgatado foi de R$ 13.300,00, então y está para x assim como 7 está para

A) 15

B) 16

C) 17

D) 18

E) 19

10| FGV O Conselho Monetário Nacional (CMN) determinou novas regras sobre o pagamento mínimo da fatura do cartão de crédito, a partir do mês de agosto de 2011. A partir de então, o pagamento mensal não poderá ser inferior a 15% do valor total da fatura. Em dezembro daquele ano, outra alteração foi efetuada: daí em diante, o valor mínimo a ser pago seria de 20% da fatura.

Disponível em: http://g1.globo.com. Acesso em: 29 fev. 2012.

Um determinado consumidor possuía no dia do vencimento, 01/03/2012, uma dívida de R$1.000,00 na fatura de seu cartão de crédito. Se não houver pagamento do valor total da fatura, são cobrados juros de 10% sobre o saldo devedor para a próxima fatura. Para quitar sua dívida, optou por pagar sempre o mínimo da fatura a cada mês e não efetuar mais nenhuma compra.

A dívida desse consumidor em 01/05/2012 será de

A) R$ 600,00.

B) R$ 640,00.

C) R$ 722,50.

D) R$ 774,40.

E) R$ 874,22.

11| ESPM No dia 1º de abril, Paulo fez uma aplicação financeira, com capitalização mensal, no valor de R$ 1 000,00. No dia 1º de maio, depositou outros R$ 1 000,00 na mesma aplicação. No dia 1º de junho, ele resgatou toda a aplicação e, com mais R$ 690,00, comprou a tão sonhada TV digital que custava R$ 3 000,00. A taxa mensal de juros dessa aplicação era de:

A) 8%

B) 6%

C) 10%

D) 9%

E) 7%

12| UECE Renato contratou um empréstimo de R$ 1.400,00, para pagar um mês depois, com juros de 15% ao mês. Ao final do mês, não podendo pagar o total, deu por conta apenas R$ 750,00 e, para o restante, firmou um novo contrato nas mesmas bases do anterior, o qual foi pago integralmente um mês depois. O valor do último pagamento foi

A) R$ 889,00.

B) R$ 939,00.

C) R$ 989,00.

D) R$ 1.009,00.

13| UFPR Ana investiu R$ 1 000,00 em uma financeira, a juro composto de 1% ao mês. O gráfico que representa o montante M em função do tempo t (em meses) de investimento é uma

A) exponencial passando pelos pontos (0; 1000) e (1; 1010).

B) reta passando pelos pontos (0; 1000) e (1; 1010).

C) parábola passando pelos pontos (1; 1010) e (2; 1020).

D) hipérbole passando pelos pontos (1; 1030) e (2; 1010).

E) senoide passando pelos pontos (0; 1000) e (2; 1020).

14| ENEM Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

- Investimento A 3% ao mês
- Investimento B: 36% ao ano
- Investimento C: 18% ao semestre

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	$1{,}03^n$
3	1,093
6	1,194
9	1,305
12	1,426

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá

A) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuas são iguais a 36%.

B) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

C) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

D) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

E) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

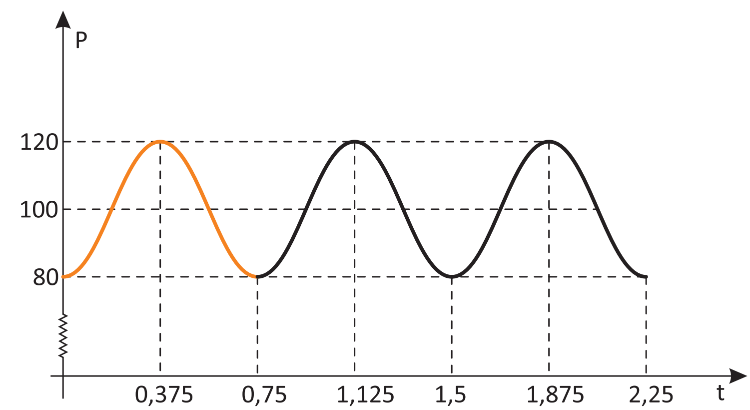
INTRODUÇÃO

Primeiramente definimos as razões trigonométricas em que o ângulo α era superior a 0° e inferior a 90°. Assim, no triângulo retângulo, o domínio estava restringido a $0° < \alpha < 90°$, ou se usarmos radianos (unidade de medida que iremos estudar neste capítulo), $0 < \alpha < \pi/2$.

A extensão dos domínios das funções trigonométricas a toda a reta real faz-se recorrendo ao ciclo trigonométrico. Ele é definido por uma circunferência de raio unitário (isto é, igual a um) centrada na origem dos eixos coordenados.

Portanto, a trigonometria não é usada apenas para os triângulos. Quando os ângulos extrapolam a amplitude de 90°, iremos fazer uso das circunferências. A compreensão da trigonometria no ciclo é muito importante para os cálculos que envolvem fenômenos periódicos, tais como nos estudos da eletricidade, da termodinâmica, da óptica, dos eletrocardiogramas, entre outros.

Um exemplo de relação que pode ser modelada por uma função trigonométrica circular é a variação da pressão nas paredes dos vasos sanguíneos de um certo indivíduo em função do momento de coleta dessa medida. O gráfico abaixo representa a situação clínica de um paciente, sendo P a pressão nas paredes dos vasos sanguíneos (em milímetros de mercúrio: mmHg) e t o tempo (em segundos).

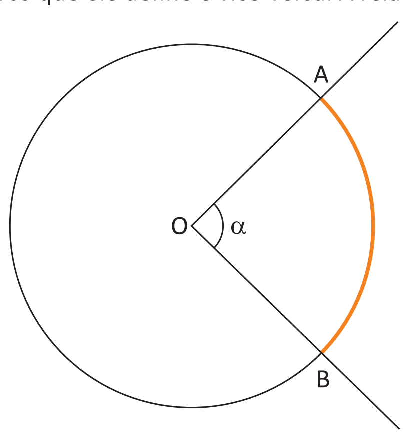


De uma forma geral, a pressão apresentada no gráfico obedece a um determinado ciclo, sendo que a cada ciclo completo temos um batimento cardíaco. Observe que o gráfico nos mostra um período completo a cada 0,75 segundos. Isso nos permite concluir que a frequência cardíaca do indivíduo avaliado é de 80 batimentos por minuto.

Este capítulo nos servirá de base para uma compreensão aprofundada das funções circulares.

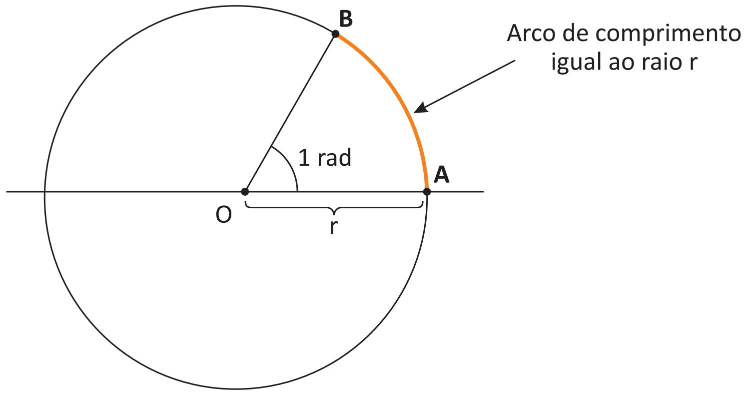
GRAUS E RADIANOS

Todo ângulo central tem a amplitude do arco que ele define e vice-versa. A relação entre eles é direta.



Portanto, se $\alpha = 70°$, então a medida do arco $\overset{\frown}{AB} = 70°$.

A unidade de medida de arcos é o radiano, que corresponde a um arco com a mesma medida do raio da circunferência.



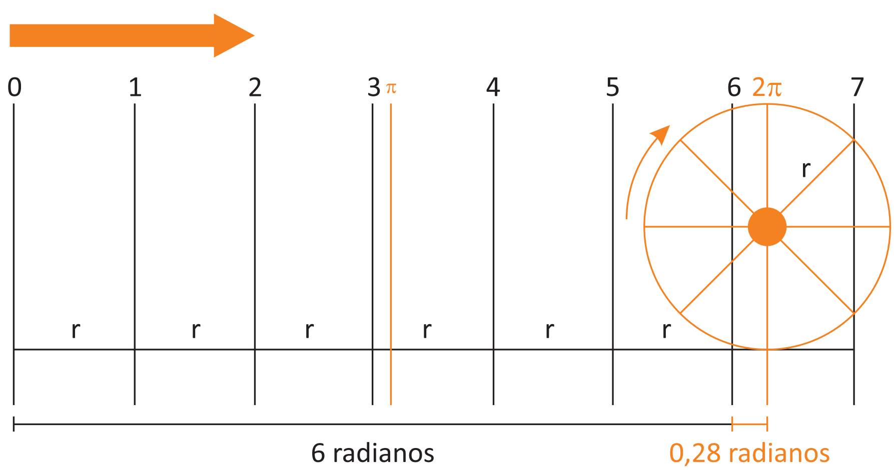
$\widehat{AB} = 1$ radiano.

Para sabermos quantos radianos possui uma circunferência, basta dividir o seu comprimento pela medida do seu raio. Em termos gerais temos:

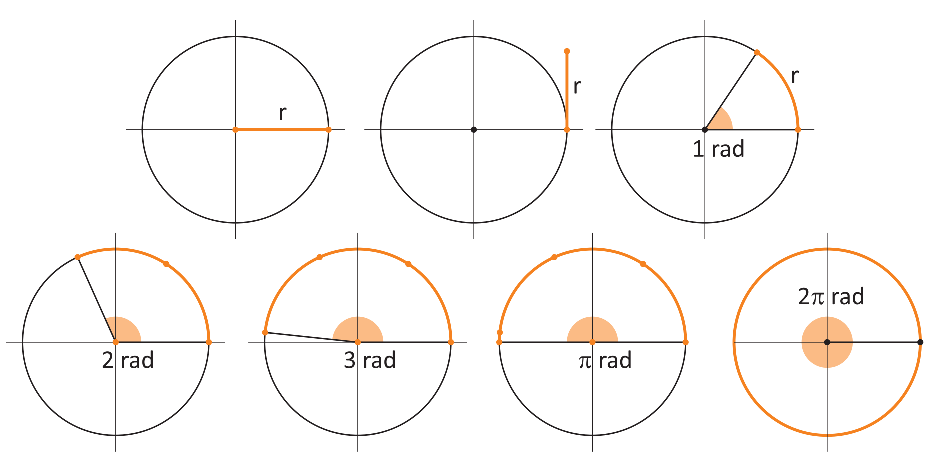
Número de radianos em uma circunferência $= \dfrac{2\pi r}{r} = \dfrac{2\pi \cancel{r}}{\cancel{r}} = 2\pi = 2 \,.\, 3{,}14 = 6{,}28$.

É importante nos lembramos que $\pi \cong 3{,}14$.

Imagine uma circunferência girando, no sentido horário, por sobre uma reta dividida em segmentos congruentes de medidas iguais ao seu raio. Graficamente, podemos assim representar:



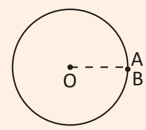
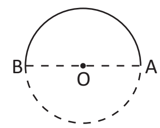
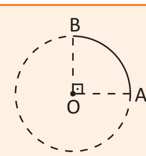
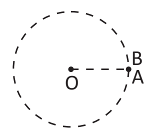
Vejamos outra representação didática:



Em suma, qualquer circunferência tem 2π radianos de comprimento, ou, ainda, um ângulo de 360° que delimita toda a circunferência com sua medida de 2π radianos.

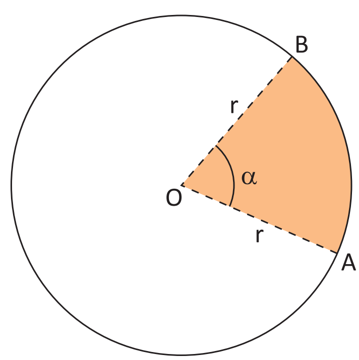
Para convertermos em radianos a medida de um ângulo dado em graus, basta que façamos uma regra de três. Note que, se 2π equivale a 360°, então π equivale a 180°.

Veja algumas importantes relações entre arcos e ângulos:

	Representação	Medida em graus	Medida em radianos
Arco completo		360°	2π
Arco de meia volta		180°	π
Arco de 1/4 de volta		90°	$\frac{\pi}{2}$
Arco nulo		0°	0

MEDIDA DE UM ARCO EM RADIANOS

A razão entre o comprimento do arco e o raio da circunferência sobre a qual este arco está determinado, nos dá a medida de um arco em radianos. Vejamos:



$$\alpha = \frac{\text{compr}\,(\overset{\frown}{AB})}{r}$$

A medida de um arco em radianos é um número real e, assim, é de costume não escrevermos o símbolo rad. Quando escrevemos que um certo arco mede 4, por exemplo, fica implícito que sua medida é de 4 radianos. Em outras palavras, o comprimento do arco é o quádruplo da medida do raio.

Sendo G a medida do arco em graus e r a medida em radianos, podemos converter graus em radianos (ou vice-versa) através de uma regra de três simples. Usamos a correspondência $180° = \pi$. Assim:

$$\begin{cases} 360° \text{..........} 2\pi \\ G \text{ ....} r \end{cases} \Leftrightarrow \frac{360°}{G} = \frac{2\pi}{r} \Leftrightarrow \frac{180°}{G} = \frac{\pi}{r}$$

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Determine a medida, em radianos, dos arcos correspondentes aos ângulos dados em graus:

A 30°

Resolução:

$\pi rad \rightarrow 180°$

$x \rightarrow 30°$

$$x = \frac{(30°)(\pi rad)}{180°} = \frac{\pi rad}{6}$$

B 120°

Resolução:

$\pi rad \rightarrow 180°$

$x \rightarrow 120°$

$$x = \frac{(120°)(\pi rad)}{180°} = \frac{2\pi rad}{3}$$

C 315°

Resolução:

$\pi rad \rightarrow 180°$

$x \rightarrow 315°$

$$x = \frac{(315°)(\pi rad)}{180°} = \frac{35\pi rad}{20} = \frac{7\pi rad}{4}$$

02| Expresse em graus:

A $\frac{10\pi}{9}$ rad

Resolução:

Podemos aqui substituir πrad pelo seu correspondente em graus, 180°. Depois é só simplificar a fração.

$$\frac{10\pi}{9} rad = \frac{10(180°)}{9} = \frac{1800°}{9} = 200°$$

B $\frac{11\pi}{8}$ rad

Resolução:

$$\frac{11\pi}{8} rad = \frac{11(180°)}{8} = \frac{11(45°)}{2} = 247°30'$$

C $\frac{4\pi}{3}$ rad

Resolução:

$$\frac{4\pi}{3} rad = \frac{4(180°)}{3} = \frac{720°}{3} = 240°$$

03| Um automóvel ao percorrer 78,5 m de uma curva, descreve um arco de 45°. Calcule o raio da curva.

Resolução:

Como estamos lidando com uma curva de 78,5 metros representando o comprimento do arco, precisamos expressar o ângulo central em radianos.

Graus	Radianos
180°	π
45°	x

$$x = \frac{45° \cdot \pi}{180°} = \frac{\pi}{4} rad = \frac{3,14}{4} = 0,785 \ rad$$

Dizemos que o arco mede um radiano se o comprimento do arco for igual à medida do raio da circunferência. Portanto, para encontrarmos a medida de um arco (α) em radianos, devemos calcular quantos raios (r) da circunferência "cabem" no comprimento (s) do arco. Portanto:

$$\alpha = \frac{s}{r}$$

$$s = \alpha \cdot r$$

Podemos agora efetuar as substituições:

$$78{,}5 = 0{,}785.r$$

$$r = 78{,}5 \div 0{,}785$$

$$r = 100 \ m.$$

04| Calcule o menor e o maior ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 16h44min.

Resolução:

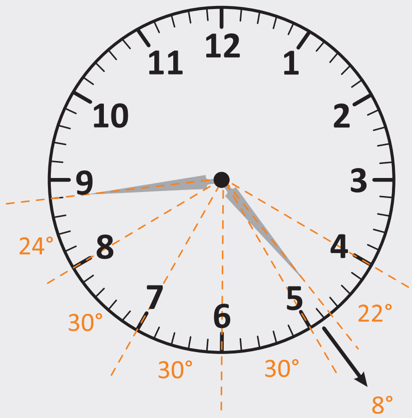
O relógio nada mais é do que uma circunferência dividida em 12 partes iguais. Assim, os números estão distantes entre si de arcos de 30°, pois 360° dividido por 12 resulta em 30°. É importante lembrar que o único momento em que os ponteiros do relógio estão exatamente sobre os números é na hora exata. Por exemplo, os ponteiros estiveram apontando exatamente para os números às 16h00. A partir desse momento, apenas o ponteiro grande está nessa situação. Podemos utilizar de regra de três para resolvermos problemas que envolvem ângulos compreendidos entre os ponteiros de um relógio analógico. Vejamos:

O ponteiro pequeno (horas) leva 60 minutos para percorrer os 30°. Enquanto isso, o grande (minutos) dá uma volta completa, ou seja 360°:

	Minutos percorridos	Graus percorridos
Ponteiro das horas	60	30°
Ponteiro dos minutos	44	x

$x = \frac{(44)(30)}{60} = 22°$

Vamos visualizar a situação:



O ponteiro dos minutos, a cada minuto, percorre 6°.

$\frac{360°}{60} = 6°$(A circunferência está dividida em 60 partes iguais, relativas aos minutos)

É por isso que entre os números 8 e 9 o ponteiro dos minutos desloca 24°, afinal entre esses números, temos 4 x 6° = 24°.

Portanto, o menor ângulo formado entre os ponteiros do relógio será de 8° + 30° + 30° + 30° + 24° = 122°.

Para calcularmos o maior ângulo basta fazermos 360° – 122° = 238°.

Importante!

Nos problemas envolvendo ângulos compreendidos entre os ponteiros de um relógio, para evitarmos cálculos e ganharmos agilidade, podemos utilizar a seguinte fórmula:

$$\alpha = |30h - 5{,}5m|$$

Onde:

α = ângulo entre o ponteiros

h = horas dadas (para 12 horas usar 0)

m = minutos dados

Vamos testar para 16h44:

$$\alpha = |30h - 5{,}5m|$$

$$\alpha = |30.4 - 5{,}5.44|$$

$$\alpha = |120 - 242|$$

$$\alpha = |-122| = 122°$$

$$\alpha = 122° \rightarrow \text{menor ângulo.}$$

05| Expresse em graus e radianos a medida do arco que corresponde a $\frac{2}{5}$ da medida da circunferência.

Resolução:

360° é a medida da circunferência em graus. Isso corresponde 2π radianos. Portanto, o valor pedido corresponde a:

Em graus:

$$\frac{2}{5}(360°) = (2)(72°) = 144°$$

Em radianos:

$$\frac{2}{5}(2\pi rad) = \frac{4\pi}{5} rad$$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Transforme os ângulos abaixo para radianos.

A 270°

B 45°

C 160°

02| Disponha em ordem crescente as seguintes medidas de ângulos: $\frac{7\pi}{12}$ rad, 40°, π rad, $\frac{4\pi}{9}$ rad, 89°

03| UNICAMP Um relógio foi acertado exatamente ao meio dia. Determine as horas e minutos que estará marcando esse relógio após o ponteiro menor ter percorrido um ângulo de 42°.

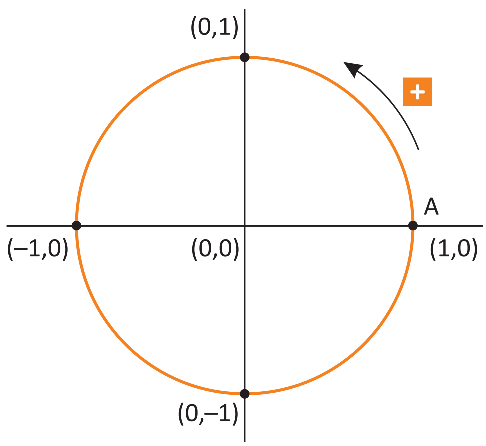
04| Dada uma circunferência de raio 30 centímetros, encontre a medida do comprimento de um arco de 150°. (Use π = 3,14).

05| Uma pista para competições de ciclismo tem a forma de uma circunferência de raio 120 metros. Um ciclista dá uma volta na pista em 4 minutos. Calcule o comprimento da pista em metros e a velocidade do ciclista em metros por minuto.

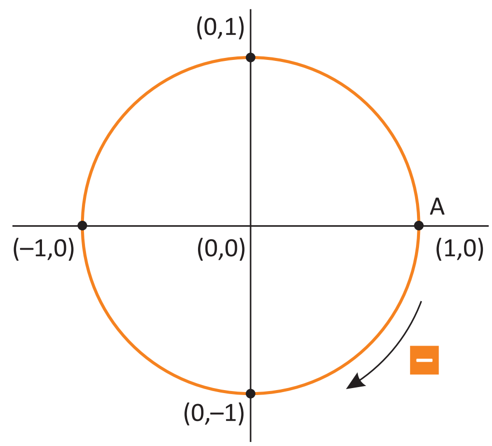
O CICLO TRIGONOMÉTRICO

Ciclo trigonométrico é a denominação dada a toda circunferência orientada, de raio unitário cujo centro está na origem do sistema de coordenadas cartesianas. O ponto P (1,0) é a origem da orientação. O sentido positivo é o sentido anti-horário e, o negativo, o horário. Observe a representação.

Sentido Anti-horário

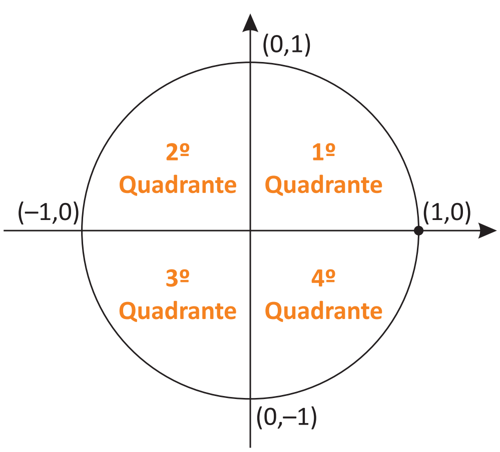


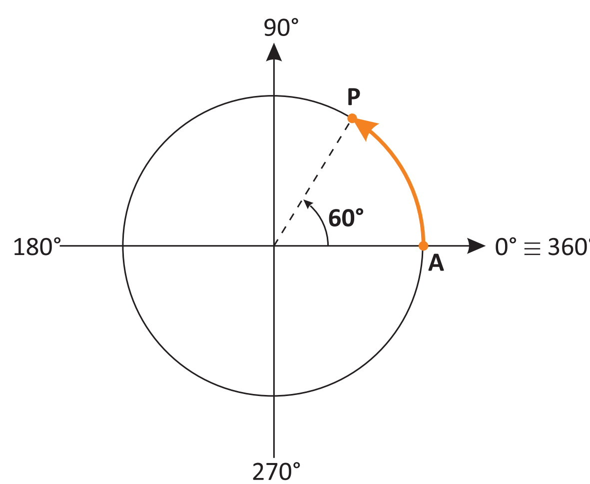
Sentido Horário



Elementos

Considere os ciclos trigonométrico abaixo:





Os eixos cartesianos limitam a circunferência trigonométrica em quatro partes denominadas quadrantes que são numerados de 1 a 4, no sentido anti-horário.

1º quadrante: arcos entre 0° e 90° $\left(0 \text{ e } \frac{\pi}{2}\right)$, medidos a partir da origem.

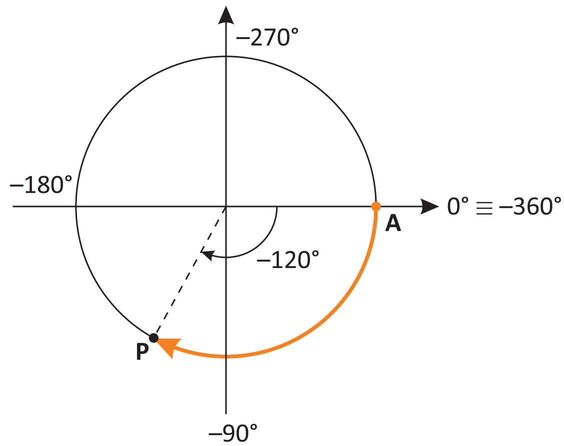
2º quadrante: arcos entre 90° e 180° $\left(\frac{\pi}{2} \text{ e } \pi\right)$, medidos a partir da origem.

3º Quadrante: arcos entre 180° e 270° $\left(\pi \text{ e } \frac{3\pi}{2}\right)$, medidos a partir da origem.

4º Quadrante: arcos entre 270° e 360° $\left(\frac{3\pi}{2} \text{ e } 2\pi\right)$, medidos a partir da origem.

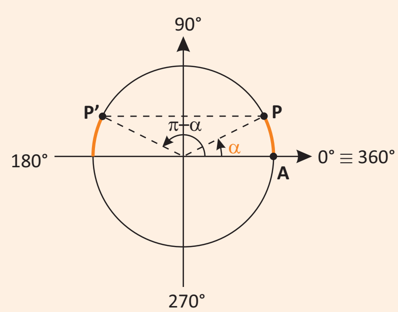
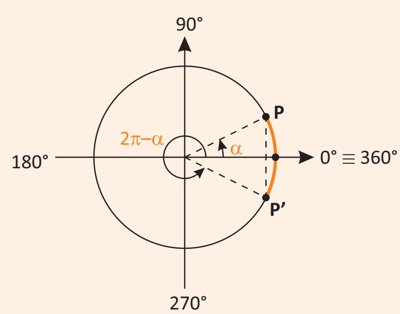
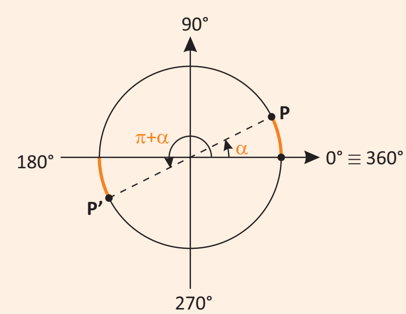
Note que a marcação positiva (ponto P no sentido anti-horário) do ângulo de 60° cai no 1º quadrante.

O ângulo negativo é marcado no ciclo trigonométrico a partir do ponto de origem A e no sentido horário. O ponto P marca a extremidade do arco descrito pelo ângulo. Vejamos um exemplo, onde o a marcação negativa do ângulo de 120° está representada:



SIMETRIAS

No ciclo trigonométrico, três tipos de simetrias são muito importantes: a simetria em relação ao eixo vertical, em relação ao eixo horizontal e em relação ao centro. Essas simetrias serão bastante úteis no estudo das funções circulares. Para a análise de cada uma dessas simetrias, tomaremos um arco de medida α, situado no 1º quadrante e da 1ª volta, ou seja, compreendido entre 0° e 90°.

Simetria em relação ao eixo vertical	Simetria em relação ao eixo horizontal	Simetria em relação ao centro
		
Seja P a extremidade do ângulo de amplitude α. O simétrico de P em relação ao eixo vertical é o ponto P', extremidade do ângulo de amplitude $\pi-\alpha$. Os ângulos α e $\pi-\alpha$ são *suplementares (somam 180°). Note na figura acima que os pontos P e P' têm a mesma projeção no eixo vertical e também terão projeções idênticas no eixo horizontal, contudo, invertidas (sinais contrários).	Seja P a extremidade do ângulo de amplitude α. O simétrico de P em relação ao eixo horizontal é o ponto P', extremidade do ângulo de amplitude $2\pi-\alpha$. Os ângulos α e $2\pi-\alpha$ são *replementares (somam 360°). Note na figura acima que os pontos P e P' têm a mesma projeção no eixo horizontal e também terão projeções idênticas no eixo vertical, mas com sinais contrários.	Seja P a extremidade do ângulo de amplitude α. O simétrico de P em relação ao centro do ciclo trigonométrico é o ponto P', extremidade do ângulo de amplitude $\alpha+\pi$. Os ângulos α e $\alpha+\pi$ são *explementares (somam 270°). Verifique que na figura acima os pontos P e P' possuem a mesma projeção no eixo horizontal e também no eixo vertical, mas essas projeções são, ambas, invertidas.

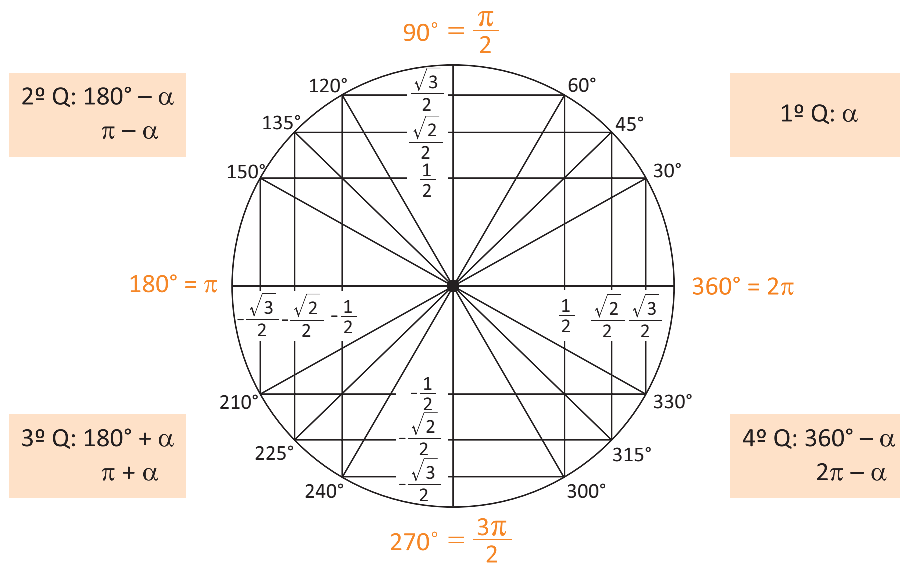
*** OBSERVAÇÃO**

Um processo mnemônico interessante para nos lembrarmos destes termos:

Com o **S**enhor **E**stou a **R**ezar

C = Complemento (90°), S = Suplemento (180°), E = Explemento (270°) e R = Replemento (360°).

Reunindo os valores e os seus simétricos numa única circunferência, temos:



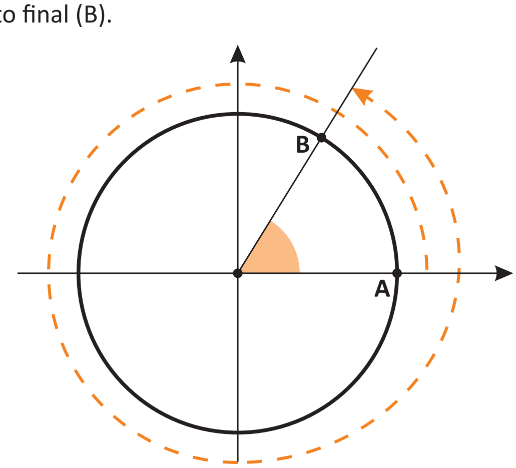
Lembrando que:

$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$
$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$225^\circ = \frac{5\pi}{4}$
$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$240^\circ = \frac{4\pi}{3}$
$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$
$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$	$300^\circ = \frac{5\pi}{3}$
$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$	$315^\circ = \frac{7\pi}{4}$
$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$	$330^\circ = \frac{11\pi}{6}$
$180^\circ = \pi$	$360^\circ = 2\pi$

Mais adiante aprofundaremos no estudo da figura acima. No momento, o importante é nos atermos às simetrias dos ângulos no ciclo trigonométrico.

ARCOS CÔNGRUOS

Um ângulo (em valor modular) maior que 360° (ou 2π) percorre mais de uma volta no ciclo trigonométrico. Portanto, ele possui um ângulo congruente (côngruo) a ele que é menor que 360°. Dois ângulos são ditos côngruos quando eles possuem o mesmo ponto inicial (A) e o mesmo ponto final (B).



Alguns exemplos:

a) $30°$ e $(30° + 360°) = \frac{\pi}{6}$ e $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi\right)$ são côngruos

b) $45°$ e $(45° + 2.360°) = \frac{\pi}{4}$ e $\left(\frac{\pi}{4} + 2.2\pi\right)$ são côngruos

c) $60°$ e $(60° - 3.360°) = \frac{\pi}{3}$ e $\left(\frac{\pi}{3} - 3.2\pi\right)$ são côngruos

Se quisermos encontrar arcos côngruos de ângulos maiores que 360°, devemos dividir o ângulo dado por 360°. O quociente indicará o número de voltas dadas no ciclo e, o resto, nos dará o ângulo congruente procurado (1ª determinação positiva).

1º Exemplo:

Qual é a primeira determinação positiva do ângulo de 1590°?

$1590° = 4 \times 360° + 150° \rightarrow$ São 4 voltas inteiras + 150° (2º quadrante) que é a 1ª determinação positiva.

150°	1ª determinação positiva
510° (150° + 360°)	Arco côngruo a 150°
870° (510° + 360°)	Arco côngruo a 150°
1230° (870° + 360°)	Arco côngruo a 150°
1590°(1230° + 360°)	Arco côngruo a 150°
1950° (1590° + 360°)	Arco côngruo a 150°
. . .	. . .

2º Exemplo:

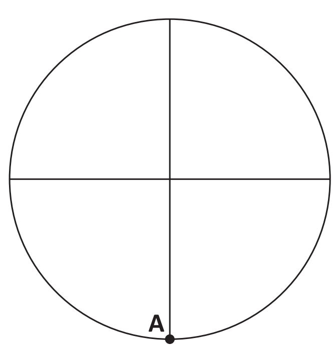
Encontre a primeira determinação positiva de – 2165°.

Aqui procedemos da mesma maneira. No entanto, é preciso que ao final somemos 360° ao resultado. Afinal, estamos à procura de um valor positivo.

$-2165° \div 360° = -6 \,.\, 360° + (-5°) \rightarrow$ são 6 voltas completas no sentido horário + 5°. Como já sabemos, o sinal de (–) indica o sentido da volta.

A 1ª determinação positiva é 355° (–5° + 360° = 355°). Fica, portanto, no 4º quadrante.

3º Exemplo:



$270° \equiv 630° \equiv -90° \equiv -450° \equiv \ldots$

Colocando em ordem crescente as extremidades dos arcos côngruos com vértices em **A**, tem-se:

$$\begin{matrix} & & \alpha & \\ & & \downarrow & \\ (\ldots, -450°, & -90°, & 270°, & 630°, \ldots) \end{matrix}$$

r = 360°

Note que na sequência acima temos uma P.A. de razão 360°. Isso nos permite escrever a expressão geral dos arcos côngruos em A. Nesse caso, ela será dada em graus por:

$$x = 270° + k \cdot 360°, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

Para um arco α qualquer, seus congruentes são da forma $\alpha + 2k\pi$ ou $\alpha + k.360°$, onde k é um número inteiro que representa a quantidade de voltas que se dá partindo do valor α.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Quantas voltas completas um móvel dá e em que quadrante ele para, partindo da origem dos arcos, na circunferência trigonométrica, percorrendo um arco de:

A 1812°?

B 2350°?

C −1200°?

Resolução:

Sabemos que voltas completas em graus são múltiplos de 360° e, em radianos, múltiplos de 2π. Portanto, precisamos, em cada um dos exercícios, dividir os valores pelas respectivas voltas completas. É importante observar os restos para sabermos onde o móvel irá parar. Vejamos:

A *$1812° \div 360° = 5$ e resto: 12°*

Logo são 5 voltas completas + 12° que faz com que o móvel pare no 1º quadrante.

B *$2360° \div 360° = 6$ e resto: 200°*

Logo são 6 voltas completas + 200° que faz com que o móvel pare no 3º quadrante.

C *$-1230° \div 360° = -3$ e resto: 150°*

Logo são 3 voltas completas no sentido horário + 150° que faz com que o móvel pare no 3º quadrante.

02| Determine o quadrante onde está a **1ª determinação positiva** dos seguintes arcos:

A –1640°

B $\frac{2487\pi}{4}$ rad

Resolução:

Precisamos saber que a 1ª determinação positiva é um arco α tal que $0° \leq \alpha < 360°$ com orientação anti-horária. Significa encontrar os restos nas divisões por 360° ou 2π.

A *$-1640° \div 360° = -4$ e resto: $-200°$ $(-200° + 360° = 160°)$*

A 1ª determinação positiva é 160°. Está situada no 2º quadrante.

B $\frac{2487\pi}{4} = \frac{2480\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 620\pi + \frac{7\pi}{4}$

A 1ª determinação positiva é $\frac{7\pi}{4}$. Está situada no 4° quadrante.

03| Dê as expressões gerais dos arcos côngruos de cada um dos arcos abaixo:

A 1710°

B $-\frac{33\pi}{8}$ rad

Resolução:

Sabemos que a expressão geral será determinada pela 1ª determinação dos ângulos adicionadas por múltiplos de 360° ou 2 π positivos ou negativos, a depender do sentido da volta.

A *$1710° \div 360° = 4$ voltas $\rightarrow$ resto $= 270°$*

Expressão geral $= 270° + k \cdot (360°)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B $-\frac{33\pi}{8} rad = -\frac{32\pi}{8} rad - \frac{\pi}{8} rad = 2 \text{ voltas} - \frac{\pi}{8} rad$

A 1ª determinação será $2\pi\ rad - \frac{\pi}{8} rad = \frac{15\pi}{8} rad$

Expressão geral $= \frac{15\pi}{8} rad + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Encontre a menor determinação positiva dos arcos:

A $\frac{318\pi}{5}$

B 1227π

02| Encontre os côngruos na primeira volta positiva, dos ângulos:

A 518°

B 1327°

03| Encontre a forma geral dos côngruos aos arcos ou ângulos:

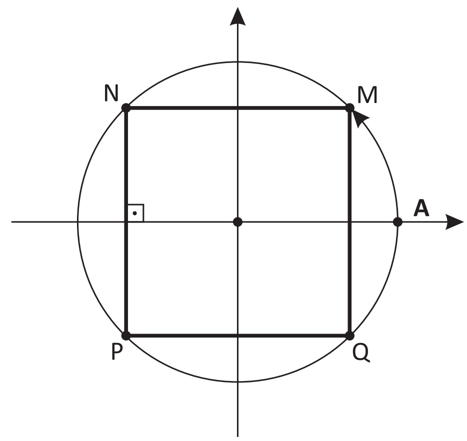
A 1550°

B –2165°

C $\dfrac{23\pi}{4}$

04| Considere os arcos com extremidade final no intervalo de -2π a 2π. Encontre todos os côngruos a $\dfrac{\pi}{9}$ dentro deste intervalo.

05| A figura MNPQ é um retângulo inscrito em um círculo. Se a medida do arco AM é $\dfrac{\pi}{4}$, quais são, em radianos, as medidas dos arcos AN e AP?



T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM Nos X-Games Brasil, em maio de 2004, o skatista brasileiro Sandro Dias, apelidado "Mineirinho", conseguiu realizar a manobra denominada "900", na modalidade skate vertical, tornando-se o segundo atleta no mundo a conseguir esse feito. A denominação "900" refere-se ao número de graus que o atleta gira no ar em torno de seu próprio corpo, que, no caso, corresponde a

A uma volta completa.

B uma volta e meia.

C duas voltas completas.

D duas voltas e meia.

E cinco voltas completas.

02| IFCE Considere um relógio analógico de doze horas. O ângulo obtuso formado entre os ponteiros que indicam a hora e o minuto, quando o relógio marca exatamente 5 horas e 20 minutos, é

A 330°.

B 320°.

C 310°.

D 300°.

E 290°.

03| UNESP A figura mostra um relógio de parede, com 40 cm de diâmetro externo, marcando 1 hora e 54 minutos.

Usando a aproximação $\pi = 3$, a medida, em cm, do arco externo do relógio determinado pelo ângulo central agudo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos, no horário mostrado, vale aproximadamente

A 22.

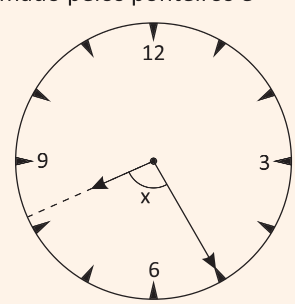
B 31.

C 34.

D 29.

E 20.

04| CFTMG Se o relógio da figura marca 8 h e 25 min, então o ângulo x formado pelos ponteiros é



A 12° 30’.

B 90°.

C 102° 30’.

D 120°.

05| UFG As cidades de Goiânia e Curitiba têm, aproximadamente, a mesma longitude. Goiânia fica a uma latitude de 16°40', enquanto a latitude de Curitiba é de 25°25'. Considerando-se que a Terra seja aproximadamente esférica, com a linha do equador medindo, aproximadamente, 40000 km, a distância entre as duas cidades, em quilômetros, ao longo de um meridiano,

A é menor que 700.
B fica entre 700 e 800.
C fica entre 800 e 900.
D fica entre 900 e 1000.
E é maior que 1000.

06| IFSP Considere uma circunferência de centro O e raio Sendo A e B pontos distintos dessa circunferência, sabe-se que o comprimento de um arco AB é 5π cm. A medida do ângulo $A\widehat{O}B$ central correspondente ao arco AB considerado, é

A 120°.
B 150°.
C 180°.
D 210°.
E 240°.

07| UDESC O relógio *Tower Clock*, localizado em Londres, Inglaterra, é muito conhecido pela sua precisão e tamanho. O ângulo interno formado entre os ponteiros das horas e dos minutos deste relógio, desprezando suas larguras, às 15 horas e 20 minutos é:

A $\dfrac{\pi}{12}$
B $\dfrac{\pi}{36}$
C $\dfrac{\pi}{6}$
D $\dfrac{\pi}{18}$
E $\dfrac{\pi}{9}$

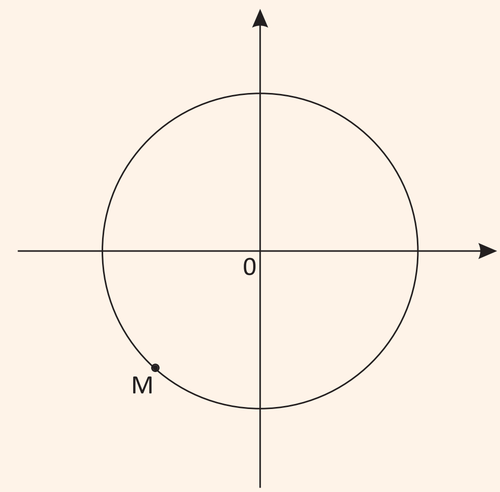
08| UEG Considerando 1º como a distância média entre dois meridianos, e que na linha do equador corresponde a uma distância média de 111,322 km, e tomando-se esses valores como referência, pode-se inferir que o comprimento do círculo da Terra, na linha do equador, é de, aproximadamente,

A 52.035 km
B 48.028 km
C 44.195 km
D 40.076 km

09| ITA Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a

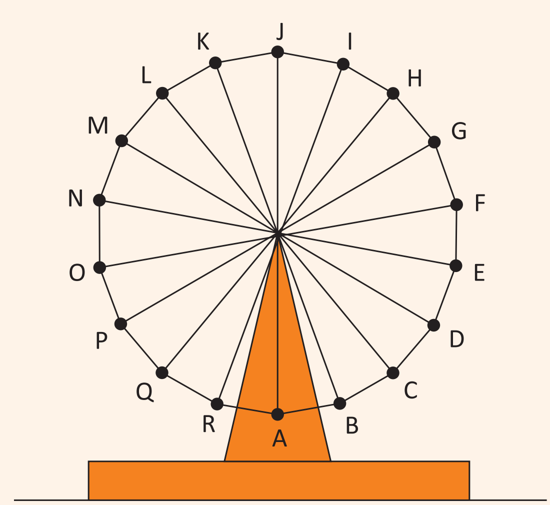
A $\dfrac{23}{11}\pi$
B $\dfrac{16}{6}\pi$
C $\dfrac{24}{11}\pi$
D $\dfrac{25}{11}\pi$
E $\dfrac{7}{3}\pi$

10| CFTMG Na circunferência abaixo, o ponto M representa a imagem de um arco de medida, em radianos, igual a



A $-\dfrac{56\pi}{3}$
B $-\dfrac{7\pi}{4}$
C $\dfrac{5\pi}{6}$
D $\dfrac{21\pi}{5}$

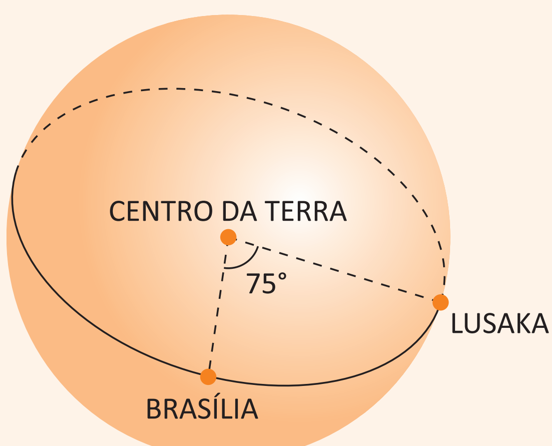
11| CPS A roda-gigante de um parque de diversões tem dezoito cadeiras, igualmente espaçadas ao longo do seu perímetro e move-se no sentido anti-horário, isto é, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.



Na figura, as letras A, B, C, ... e R indicam as posições em que as cadeiras ficam cada vez que a roda gigante para. Com a roda gigante parada, Bruna senta-se na cadeira que está na posição A, posição mais baixa da roda gigante. A roda gigante move-se $\frac{5}{6}$ de uma volta e para. Nesse momento, a letra relativa à posição da cadeira ocupada por Bruna é

A) D.
B) I.
C) K.
D) P.
E) R.

12| UEL Os primeiros relógios baseavam-se no aparente movimento do Sol na abóboda celeste e no deslocamento da sombra projetada sobre a superfície de um corpo iluminado pelo astro. Considere que: a Terra é esférica e seu período de rotação é de 24 horas no sentido oeste-leste; o tempo gasto a cada 15° de rotação é de 1 hora; o triângulo Brasília/Centro da Terra/Luzaka (Zâmbia) forma, em seu vértice central, um ângulo de 75°.



A hora marcada em Luzaka, num relógio solar, quando o sol está a pino em Brasília é:

A) 5 horas.
B) 9 horas.
C) 12 horas.
D) 17 horas.
E) 21 horas.

13| UFSCAR A sequência de figuras mostra um único giro do ponto A, marcado em uma roda circular, quando ela rola, no plano, sobre a rampa formada pelos segmentos RQ e QP

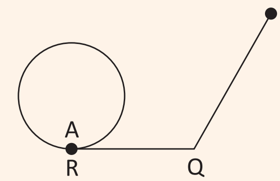


FIGURA 1

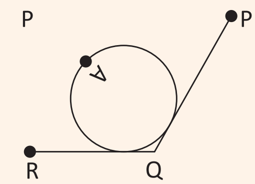


FIGURA 2

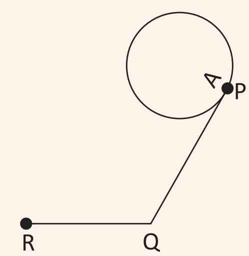
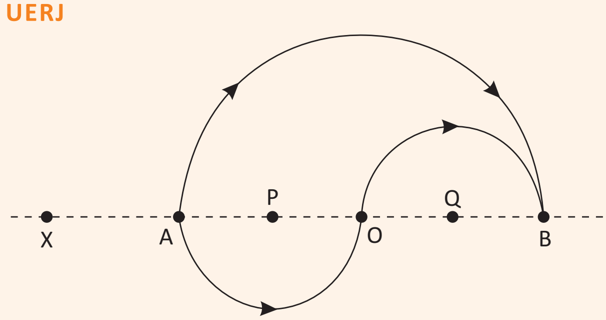


FIGURA 3

Além do que indicam as figuras, sabe-se que o raio da roda mede 3 cm, e que ela gira sobre a rampa sem deslizar em falso. Sendo assim, o comprimento RQ + QP da rampa, em cm, é igual a

A) $5\pi + 2\sqrt{3}$.
B) $4\pi + 3\sqrt{5}$.
C) $6\pi + \sqrt{3}$.
D) $7\pi - \sqrt{3}$.
E) $8\pi - 3\sqrt{5}$.

14| UERJ



No esquema acima estão representadas as trajetórias de dois atletas que, partindo do ponto X, passam simultaneamente pelo ponto A e rumam para o ponto B por caminhos diferentes, com velocidades iguais e constantes. Um deles segue a trajetória de uma semicircunferência de centro O e raio 2R. O outro percorre duas semicircunferências cujos centros são P e Q.

Considerando $\sqrt{2} = 1{,}4$, quando um dos atletas tiver percorrido 3/4 do seu trajeto de A para B, a distância entre eles será igual a:

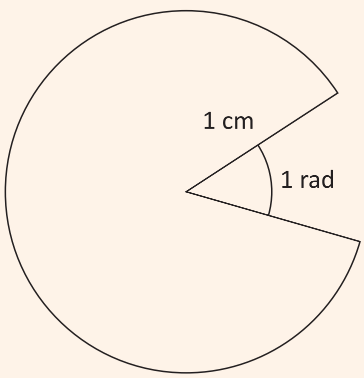
A) 0,4 R

B) 0,6 R

C) 0,8 R

D) 1,0 R

15| UNESP Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura.



A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 radiano. O perímetro do "monstro", em cm, é:

A) $\pi - 1$.

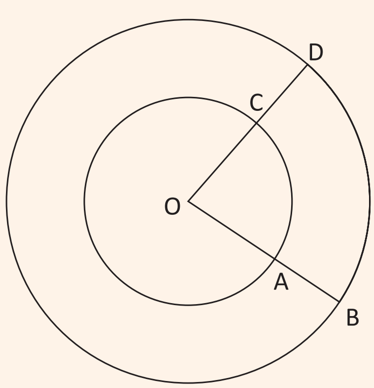
B) $\pi + 1$.

C) $2\pi - 1$.

D) 2π.

E) $2\pi + 1$.

16| CFTMG Na figura, tem-se duas circunferências coplanares e concêntricas. Sendo OA = 4 cm, CD = 6 cm e o comprimento do arco AC = 6 cm, o comprimento do arco BD, em cm, é



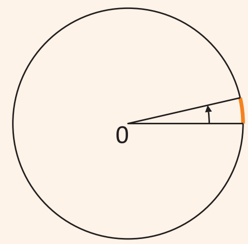
A) 8

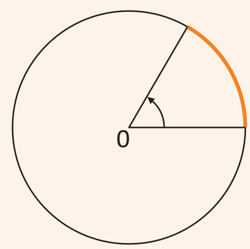
B) 12

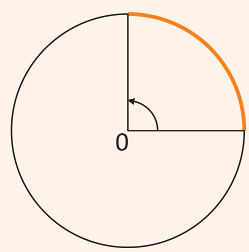
C) 15

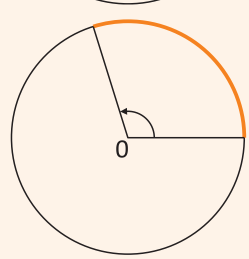
D) 18

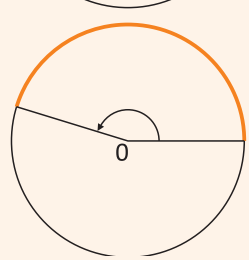
17| UFRGS Dentre os desenhos abaixo, aquele que representa o ângulo que tem medida mais próxima de 1 radiano é

A)


B)


C)


D)


E)


18| FUVEST Considere um arco AB de 110° numa circunferência de raio 10 cm. Considere, a seguir, um arco A'B' de 60° numa circunferência de raio 5 cm.

Dividindo-se o comprimento do arco AB pelo do arco A'B' (ambos medidos em cm), obtém-se:

Ⓐ $\frac{11}{6}$

Ⓑ 2.

Ⓒ $\frac{11}{3}$

Ⓓ $\frac{22}{3}$

Ⓔ 11.

19| FUVEST O perímetro de um setor circular de raio R e ângulo central medindo á radianos é igual ao perímetro de um quadrado de lado R. Então á é igual a

Ⓐ $\frac{\pi}{3}$

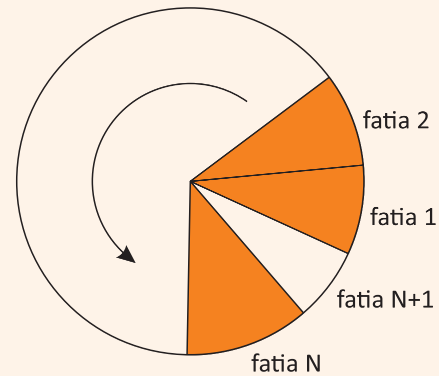
Ⓑ 2

Ⓒ 1

Ⓓ $\frac{2\pi}{3}$

Ⓔ $\frac{\pi}{2}$

20| UFSCAR Uma pizza circular será fatiada, a partir do seu centro, em setores circulares. Se o arco de cada setor medir 0,8 radiano, obtém-se um número máximo N de fatias idênticas, sobrando, no final, uma fatia menor, que é indicada na figura por fatia N+1.



Considerando $\pi = 3{,}14$, o arco da fatia N+1, em radiano, é

Ⓐ 0,74.

Ⓑ 0,72.

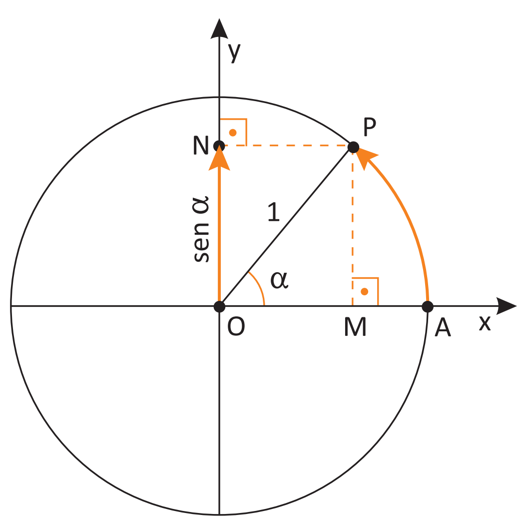
Ⓒ 0,68.

Ⓓ 0,56.

Ⓔ 0,34.

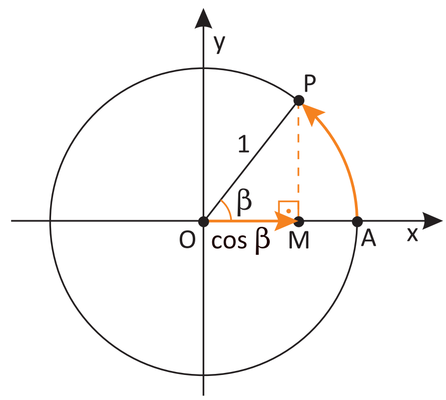
SENO, COSSENO E TANGENTE DE UM ARCO

O seno de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$, de extremidade P, é a ordenada do ponto P. Vejamos:



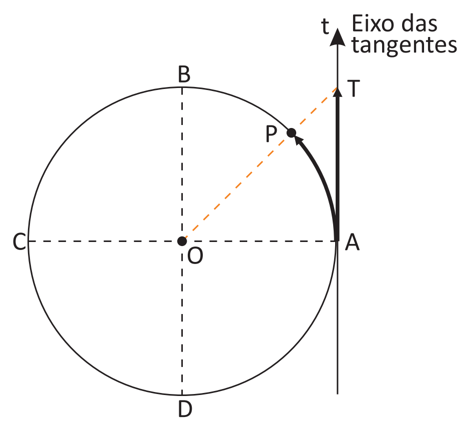
$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{MP}{OP} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{ON}{1} \Leftrightarrow \boxed{\operatorname{sen}\alpha = ON}$$

O cosseno de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$, de extremidade P, é a abscissa do ponto P. Vejamos:

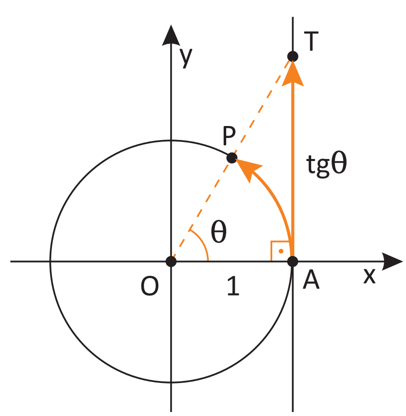


$$\cos\beta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{OM}{OP} \Leftrightarrow \cos\beta = \frac{OM}{1} \Leftrightarrow \boxed{\cos\beta = OM}$$

Vamos considerar, no ciclo trigonométrico de origem A, um eixo t perpendicular ao eixo x e de origem também A. Ele será denominado eixo das tangentes. A intersecção da reta $\overleftrightarrow{OP}$ com o eixo das tangentes será o ponto T. Sabemos que a tangente é a razão do cateto oposto pelo cateto adjacente (raio = 1). Vejamos:



$$\text{tg}\ \overset{\frown}{AP} = AT$$

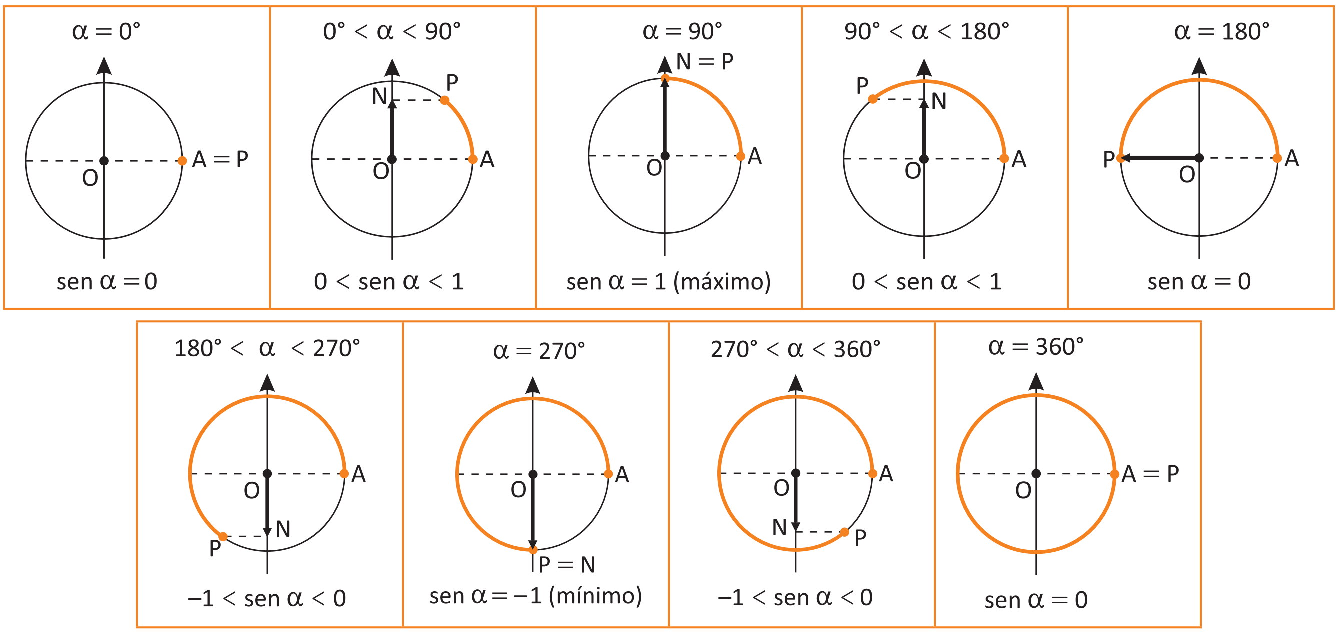


$$\text{tg}\ \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \Leftrightarrow \text{tg}\ \theta = \frac{AT}{OA} \Leftrightarrow \text{tg}\ \theta = \frac{AT}{1} \Leftrightarrow \boxed{\text{tg}\ \theta = AT}$$

VARIAÇÕES DAS FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

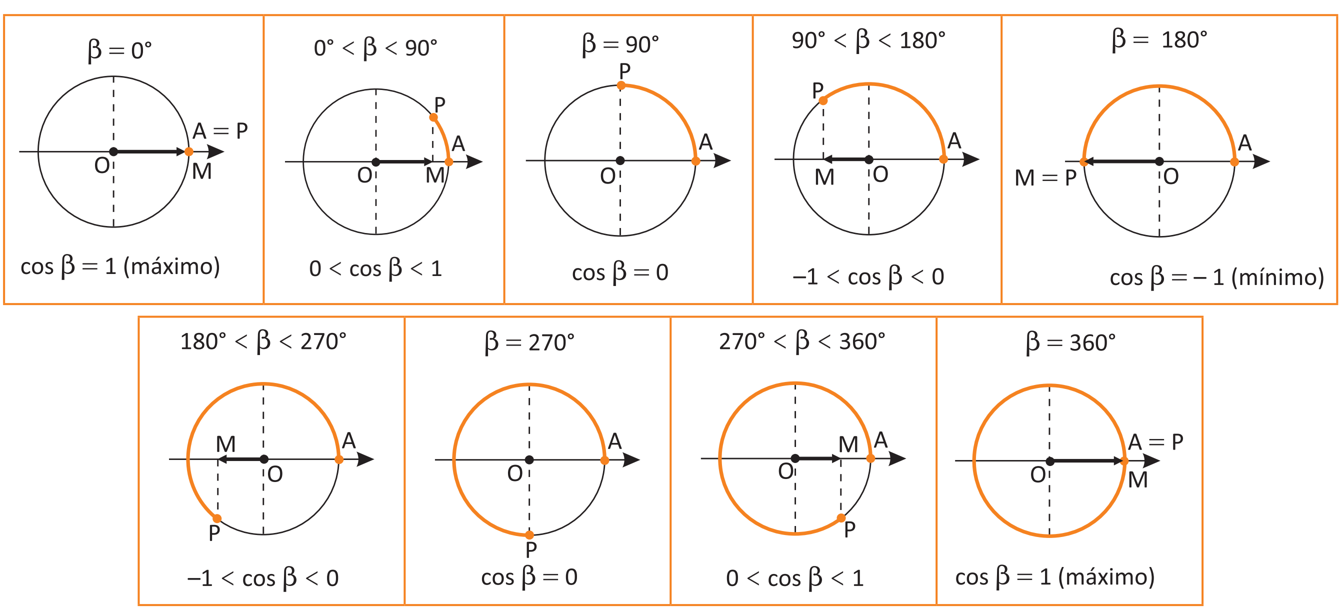
FUNÇÃO SENO

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta positiva (sentido anti-horário), o número real α varia de 0° a 360° e o seno de α está sempre compreendido de – 1 a 1 (eixo das ordenadas). Vejamos os gráficos abaixo ilustrando as várias situações possíveis:



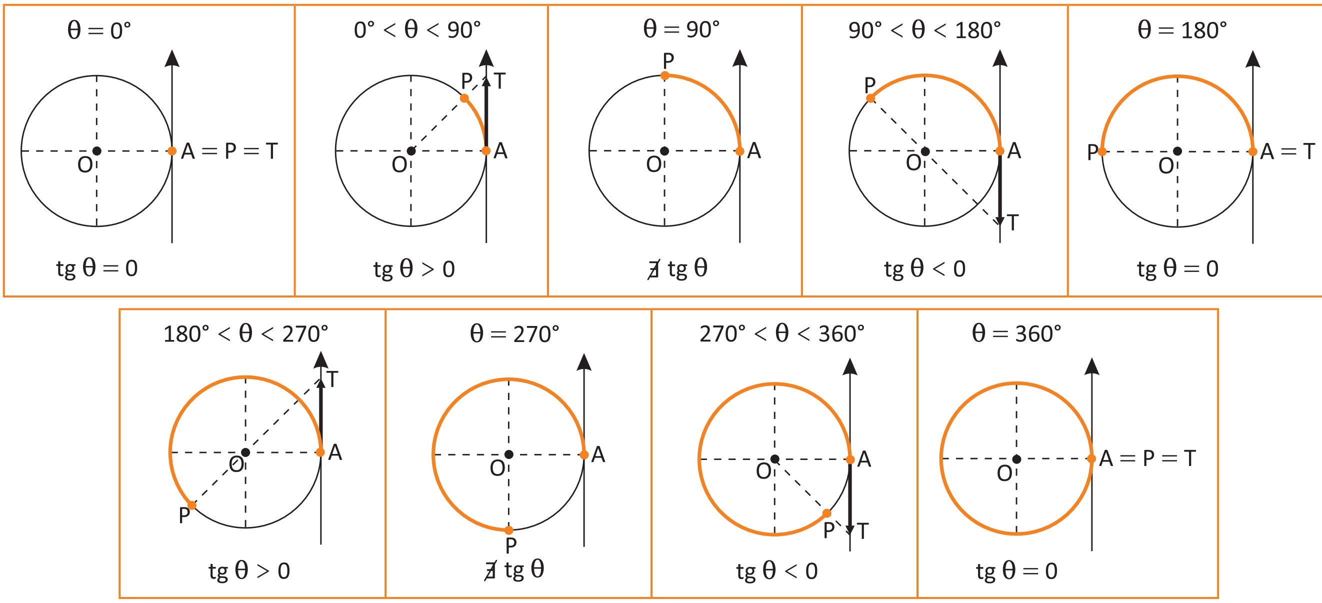
FUNÇÃO COSSENO

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta positiva (sentido anti-horário), o número real β, assim como na função seno, varia de 0° a 360° e o cosseno de β também está sempre compreendido de – 1 a 1 (eixo das abscissas). Vejamos os gráficos abaixo ilustrando as várias situações possíveis:



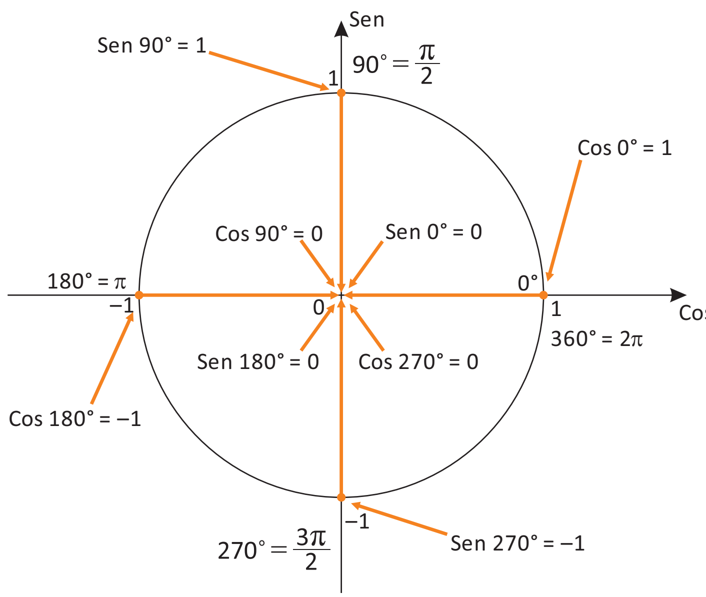
FUNÇÃO TANGENTE

Nesse caso, enquanto o ponto P percorre a primeira volta positiva (sentido anti-horário), o número real θ, assim como na função seno e na função cosseno, varia de 0° a 360°. No entanto, a variação da tangente vai de menos infinito ($-\infty$) a mais infinito ($+\infty$).

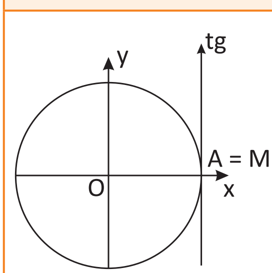
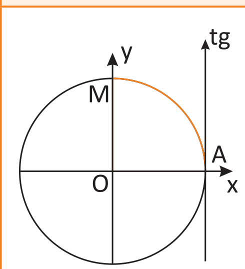
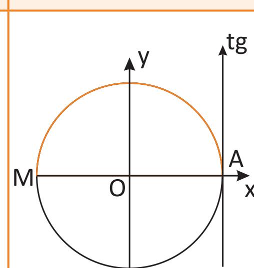
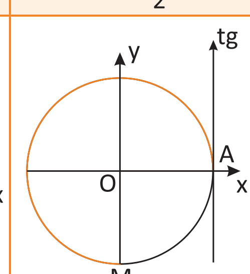
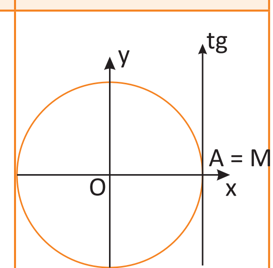


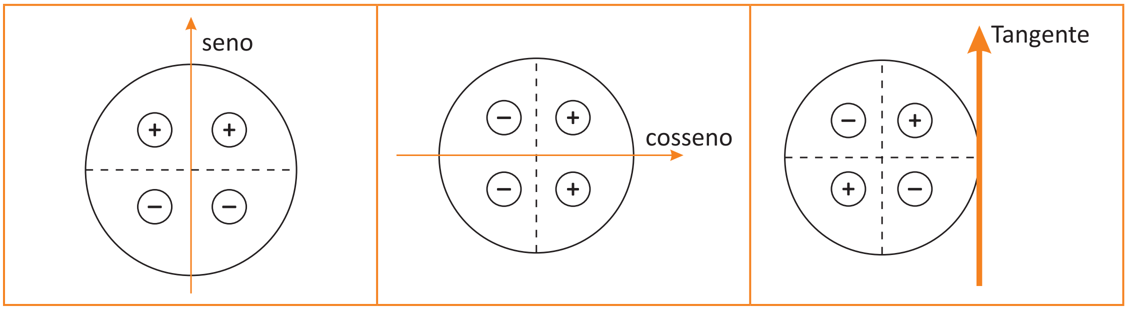
VALORES IMPORTANTES DE sen x, cos x e tg x

SENO E COSSENO



TANGENTE

$\theta = 0$	$\theta = \frac{\pi}{2}$	$\theta = \pi$	$\theta = \frac{3\pi}{2}$	$\theta = \pi$
				
tg 0° = 0	tg 90° = $\nexists$ tg $\left(\frac{\pi}{2}\right) = \nexists$	tg 180° = 0 tg $\pi = 0$	tg 270° = $\nexists$ tg $\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \nexists$	tg 360° = 0 tg $2\pi = 0$



Importante!

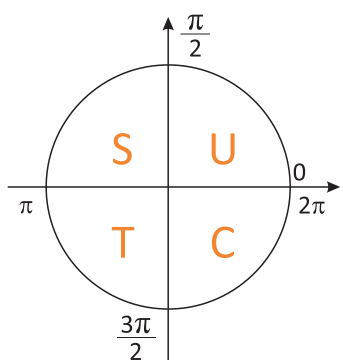
Processos mnemônicos:

1º)

SE	TA	CO^{+}
12	13	14

- O seno é positivo no 1º e 2º quadrantes;
- O cosseno é positivo no 1º e 4º quadrantes;
- A tangente é positiva no 1º e 3º quadrantes.

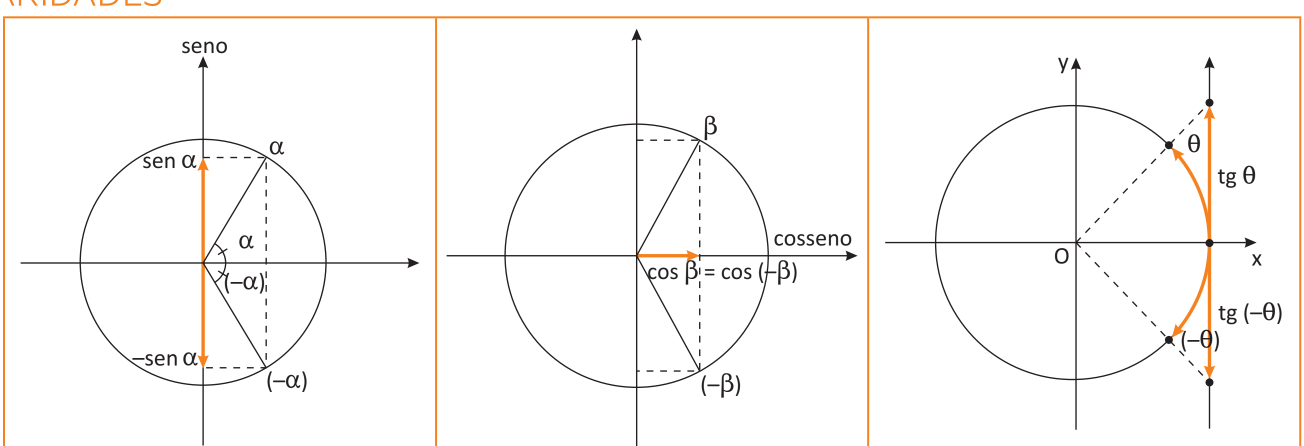
2º)



Use **S**empre a **T**ua **C**abeça

U = Todas as funções tem valor positivo.
S = A função seno tem valor positivo.
T = A função tangente tem valor positivo.
C = A função cosseno tem valor positivo.

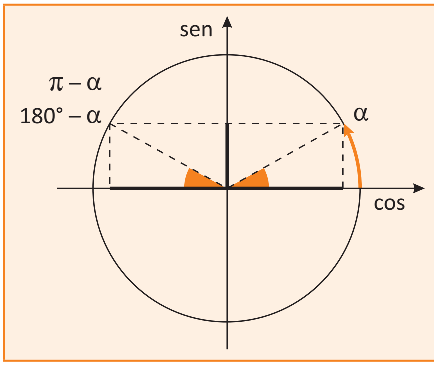
PARIDADES



A função seno é ímpar, ou seja, elementos simétricos possuem imagens simétricas. **Exemplo:** $\text{sen}(30°) = \frac{1}{2}$ $\text{sen}(-30°) = -\frac{1}{2}$	A função cosseno é par, ou seja, elementos simétricos possuem a mesma imagem. **Exemplo:** $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ $\cos(-60°) = \frac{1}{2}$	A função tangente é uma função ímpar, pois: $\text{tg}(-\theta) = -\text{tg}(\theta)$, para todo $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **Exemplo:** $\text{tg}(45°) = 1$ $\text{tg}(-45°) = -1$

REDUÇÕES AO 1º QUADRANTE

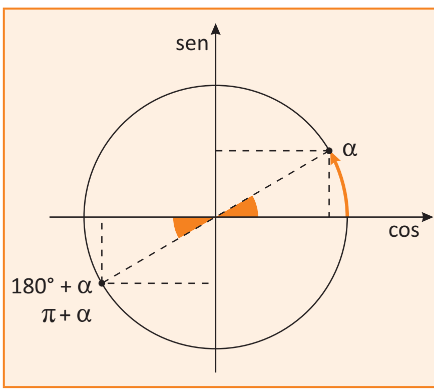
Redução do segundo para o primeiro quadrante:



$\text{sen}(180° - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$ ou $\text{sen}(\pi - \alpha) = \text{sen}\ \alpha$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ ou $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

Arcos suplementares	
Senos idênticos	Cossenos simétricos

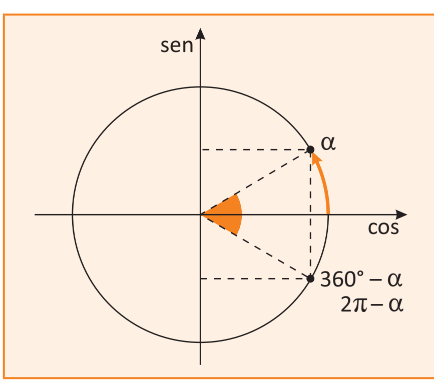


$\text{sen}(180° + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$ ou $\text{sen}(\pi + \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$

$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$ ou $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

Arcos de medidas α e $(180° + \alpha)$ ou α e $(\pi + \alpha)$	
Senos simétricos	Cossenos simétricos

Redução do quarto para o primeiro quadrante:



$\text{sen}(360° - \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$ ou $\text{sen}(2\pi - \alpha) = -\text{sen}\ \alpha$

$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$ ou $\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha$

Arcos de medidas α e $(360° + \alpha)$ ou α e $(2\pi + \alpha)$	
Senos simétricos	Cossenos idênticos

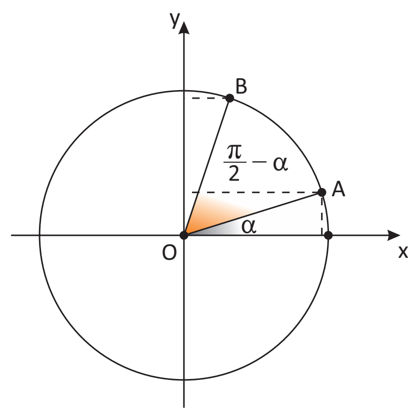
Importante!

$(360° - \alpha)$ e $-\alpha$ são medidas de arcos côngruos.

$\text{sen}\,(360° - \alpha) = \text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha$

$\cos\,(360° - \alpha) = \cos\,(-\alpha) = \cos\,\alpha$

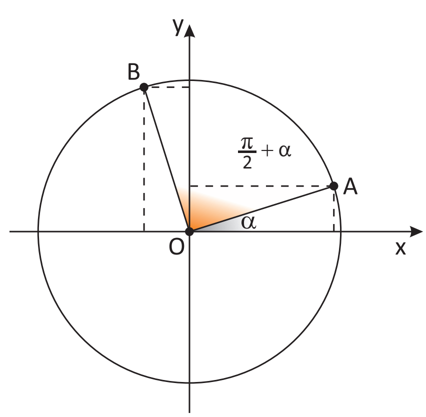
Há relações de grande utilidade entre ângulos da forma α e $\frac{\pi}{2} \pm \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$



O pontos A e B são **simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares**. Repara que a abcissa de um é igual à ordenada do outro e vice-versa. Assim, temos que:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}\,\alpha$$

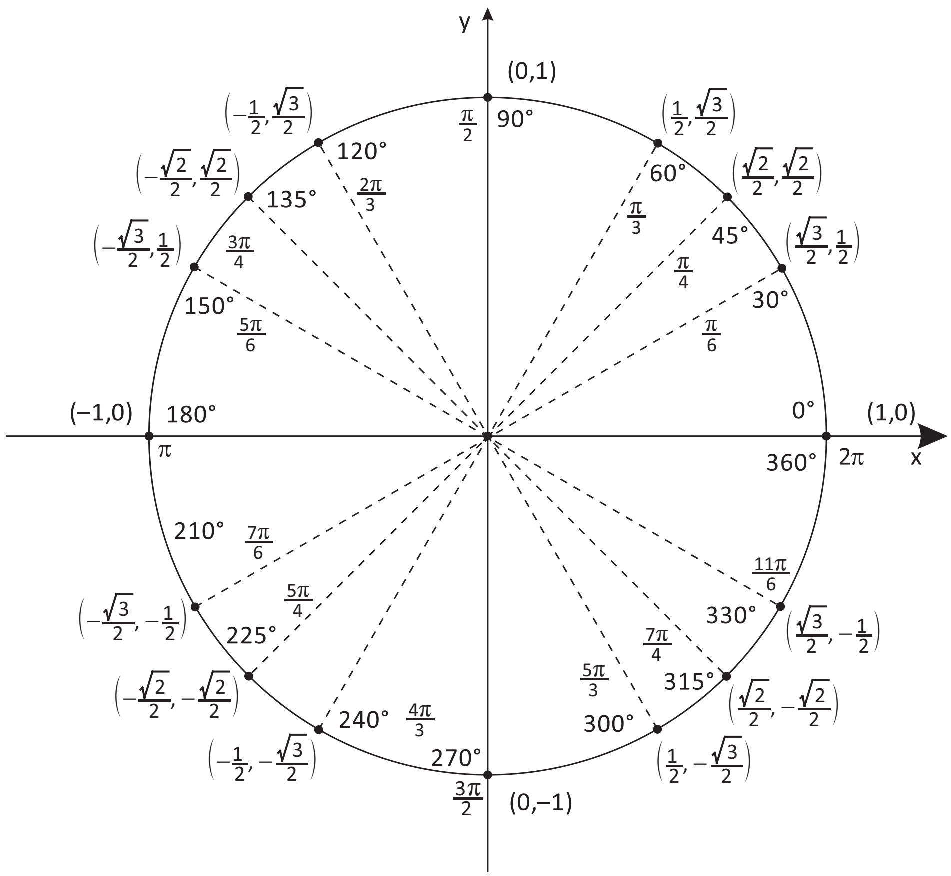
Analogamente, se trabalharmos com um ângulo da forma $\frac{\pi}{2} + \alpha$:



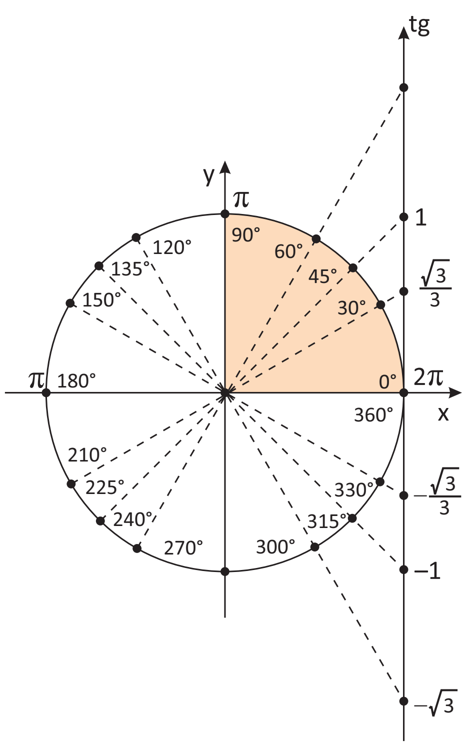
Concluímos que:

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\,\text{sen}\,\alpha$$

Valores do seno e do cosseno de arcos recorrentes no estudo da trigonometria



Também podemos relacionar a tangente de um arco de qualquer quadrante com valores da tangente de um arco do 1° quadrante. Basta que continuemos a utilizar das simetrias, efetuando reduções ao 1° quadrante. Vejamos:



Redução do 2º quadrante para o 1º quadrante:

Grau	Radiano
tg (180° – θ)= –tg θ	tg (π – θ)= –tg θ

Redução do 3º quadrante para o 1º quadrante:

Grau	Radiano
tg (180° + θ)= tg θ	tg (π + θ)= tg θ

Redução do 4º quadrante para o 1º quadrante:

Grau	Radiano
tg (360° – θ) = –tg θ	tg (2π – θ)= –tg θ

GRÁFICOS DAS FUNÇÕES SENO, COSSENO E TANGENTE

Alguns fenômenos naturais são cíclicos ou periódicos, isto é, acontecem da mesma maneira de tempos em tempos, apresentando uma periodicidade. São exemplos as marés alta e baixa, a alternância das correntes elétricas e a oscilação do pêndulo de um relógio.

A descrição matemática destes fenômenos passa por algumas considerações importantes: num certo instante, o que está se observando atinge seu máximo e, em outros, chega a seu menor valor, como por exemplo, a maré alta e a maré baixa. Estes valores máximo e mínimo são os mesmos a cada período de tempo.

Para estudar a função seno ($y = \text{sen}\ \alpha$) e a função cosseno ($y = \cos \alpha$) vamos variar α no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

- $y = \text{sen}\ \alpha$

Lembrando que $\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (\alpha \pm 2\pi)$, pois α e $\alpha \pm 2\pi$ são as medidas de arcos de mesma extremidade (côngruos).

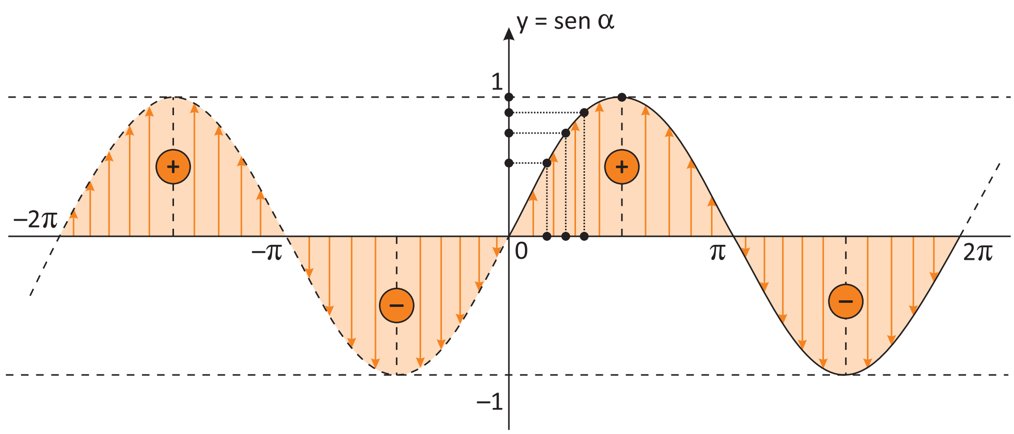


Imagem de f: **{y ∈ R/–1 ≤ y ≤ 1}**

Domínio de f: **D(f) = IR**

Contradomínio de f: **CD(f) = IR**

Conjunto imagem: **Im(f) = [–1; 1]**

Gráfico: **senoide**

O gráfico da função seno é chamado de senoide e ele continua à direita de 2π e à esquerda de 0 (zero). Note que a função é periódica de período 2π.

Quando adicionamos $2\,k\pi$, com $k \in IR$, ao arco α, obtemos sempre o mesmo valor para o seno, pois a função seno é periódica:

$$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (\alpha + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

De modo geral, o período de uma função do tipo $y = a + b\ \text{sen}\ (cx + d)$, com $a \in IR$, $b \in IR$ e $c \in IR$, é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{|c|}$$

- $y = \cos \alpha$

Lembrando que $\cos \alpha = \cos (\alpha \pm 2\pi)$, pois α e $\alpha \pm 2\pi$ são as medidas de arcos de mesma extremidade (côngruos).

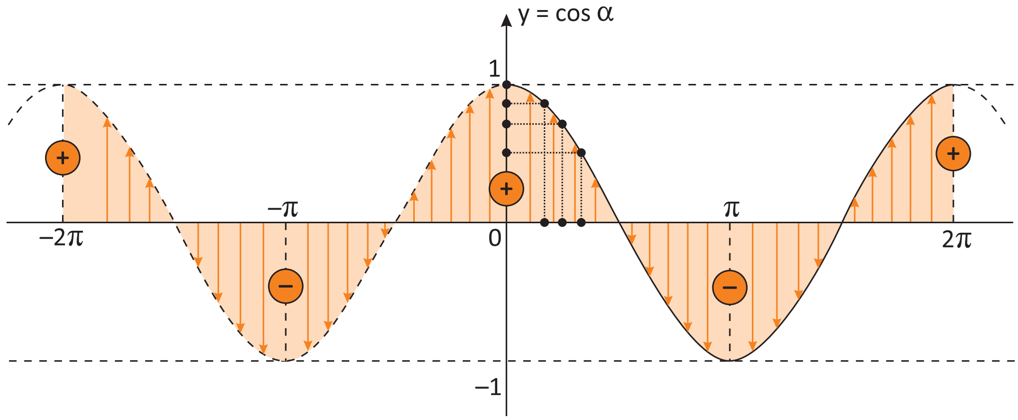


Imagem de f: **{y ∈ IR/–1 ≤ y ≤ 1}**

Domínio de f: **D(f) = IR**

Contradomínio de f: **CD(f) = IR**

Conjunto imagem: **Im(f) = [–1; 1]**

Gráfico: **senoide**

O gráfico da função cosseno é também chamado de senoide. Note que a curva é a mesma do gráfico que estudamos anteriormente, com uma defasagem de $\frac{\pi}{2}$. Ele continua à direita de 2π e à esquerda de 0 (zero). Note que a função é periódica de período 2π.

Quando adicionamos 2 $k\pi$, com $k \in$ IR, ao arco α, obtemos sempre o mesmo valor para o cosseno, pois a função cosseno é periódica:

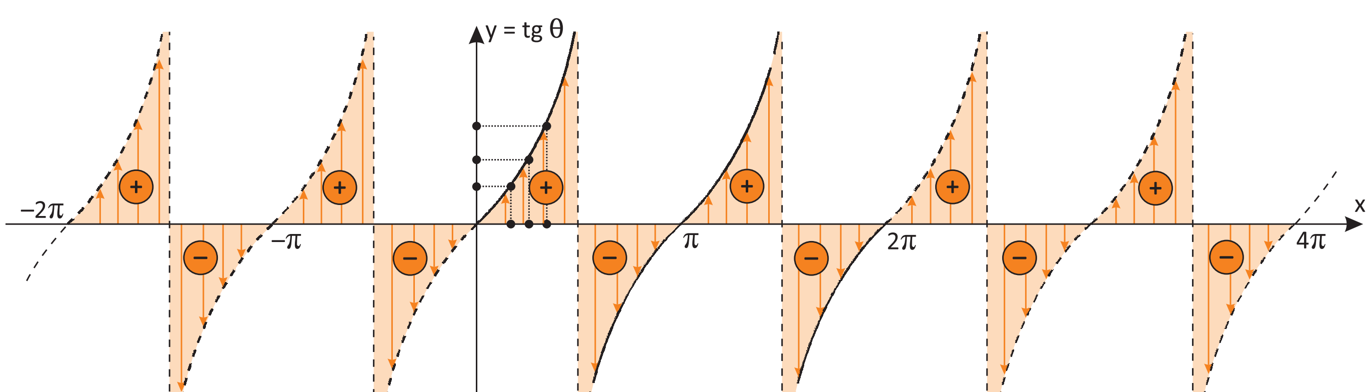
$$\cos \alpha = \cos (\alpha + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$$

De modo geral, o período de uma função do tipo $y = a + b \cos (cx + d)$, com $a \in$ IR, $b \in$ IR e $c \in$ IR, é dado por:

$$p = \frac{2\pi}{|c|}$$

- $y = \text{tg}\ \theta$

Lembrando que $\text{tg}\ \theta = \text{tg}\ (\theta \pm \pi)$.



O domínio da função y = tg θ é: $D(f) = \left\{\theta \in \mathbb{R} \mid \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Os "ramos" do gráfico nunca tocam as retas perpendiculares ao eixo x pelos pontos em que $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$.

A imagem da função y = tg θ é o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

O período da função y = tg θ é $P = \pi$.

O gráfico da função tangente é chamado de tangentoide. Ele continua à direita de 2π e à esquerda de 0 (zero), repetindo sempre o mesmo padrão.

TRANSFORMAÇÕES NOS GRÁFICOS

Dadas as funções **f(x) = a ± b . sen (cx +d)** e **f(x) = a ± b . cos (cx +d)** é muito importante sabermos qual o papel de cada um dos coeficientes a, b, c e d da função. Vejamos:

Eixo central
Altera ou define a flutuação

f(x) = a ± b . sen ou cos (c . x ± d)

Desloca o gráfico horizontalmente
Amplitude
Altera ou define o período

- O parâmetro **a** é o responsável pelo deslocamento vertical da curva;
- O parâmetro **b** é a amplitude da curva, ou seja, a altura da curva;
- O parâmetro **c** influencia no período da função que é calculado por $p = \frac{2\pi}{c}$;
- O parâmetro **d** provoca translação no sentido horizontal;
- A imagem é o intervalo [a − b, a + b];
- Se d = 0, então o gráfico da função seno passa pelo ponto (0, a), enquanto que a função cosseno passa pelo ponto (0, a + b) ou (0, a – b), a depender do sinal do parâmetro **b**.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Calcule o valor das expressões abaixo:

A $E = \frac{\cos 120^\circ + \text{sen } 330^\circ}{\cos 180^\circ}$

B $E = \frac{\cos 810^\circ + \cos 900^\circ}{\text{sen } 630^\circ + \text{sen } 1080^\circ}$

C $E = \cos 1500^\circ + \text{sen } \frac{37\pi}{6} + \cos \frac{19\pi}{3}$

Resolução:

Calculando os valores das primeiras determinações (reduções ao 1º quadrante), temos:

A $E = \frac{\cos 120^\circ + \text{sen } 330^\circ}{\cos 180^\circ} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$

B $E = \frac{\cos 810^\circ + \cos 900^\circ}{\text{sen } 630^\circ + \text{sen } 1080^\circ} = \frac{\cos 90^\circ + \cos 180^\circ}{\text{sen } 270^\circ + \text{sen } 0^\circ} = \frac{0 - 1}{-1 + 0} = 1$

C $E = \cos 1500^\circ + \text{sen } \frac{37\pi}{6} + \cos \frac{19\pi}{3} = \cos 60^\circ + \text{sen } \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

02| Sabendo que $\text{sen } x = \frac{3}{5}$ e $\cos x = -\frac{4}{5}$, calcule $\text{sen } (2\pi + x) + \cos (\pi + x)$

Resolução:

Observe que, adicionando uma volta completa, encontramos um arco côngruo. No entanto, se adicionarmos meia volta, a extremidade do arco será simétrica em relação ao centro do ciclo trigonométrico.

$\text{sen}(2\pi + x) = \text{sen } x$ e $\cos(\pi + x) = -\cos x$

Portanto, temos que:

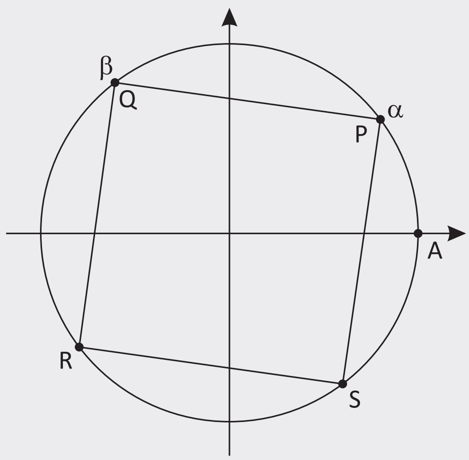
$\text{sen}(2\pi + x) + \cos(\pi + x) = \text{sen } x - \cos x = \frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

03| Qual é o valor de (cos165° + sen155° + cos145° − sen25° + cos35° + cos15°)?

Resolução:

$(\cos 165^\circ + \text{sen } 155^\circ + \cos 145^\circ - \text{sen } 25^\circ + \cos 35^\circ + \cos 15^\circ) = -\cos 15^\circ + \text{sen } 25^\circ - \cos 35^\circ - \text{sen } 25^\circ + \cos 35^\circ + \cos 15^\circ = 0$

04| Na figura abaixo, temos o quadrado PQRS que está inscrito na circunferência trigonométrica. Os arcos $\overset{\frown}{AP}$ e $\overset{\frown}{AQ}$ têm medidas iguais a α e β respectivamente, com $0 < \alpha < \beta < \pi$. Se $\cos \alpha = 0{,}8$ qual é o valor de $\cos \beta$?



Resolução:

Seja O a origem do plano cartesiano.

Como $P\hat{O}Q = \beta - \alpha = 90°$, segue-se que $\beta = \alpha + 90°$

Sabendo que $\cos(\alpha + 90°) = -\text{sen}\,\alpha$,

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e $\cos\alpha = 0{,}8$,

$\cos 0 < \alpha < \beta < 180°$, temos

$$\cos\beta = \cos(\alpha + 90°) = -\text{sen}\,\alpha = -0{,}6.$$

05| UECE Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $f(x) = 2^{\text{sen}\,x} + 1$, então o produto do maior valor pelo menor valor que f assume é igual a:

- **A** 4,5
- **B** 3,0
- **C** 1,5
- **D** 0

Resolução:

Se sen x = 1 então $f(x) = 2^1 + 1 = 3$ (maior valor).

Se sen x = –1, então $f(x) = 2^{-1} + 1 = \frac{3}{2}$ (menor valor).

Logo, o produto pedido será $3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2} = 4{,}5$

Alternativa **A**.

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Calcule o valor das expressões abaixo:

- **A** $\dfrac{\text{tg } 2205°}{\text{sen } 2460° \cdot \cos 1110°}$
- **B** $E = \text{sen } 240° - \cos 150° + \text{tg } 330°$
- **C** $E = \dfrac{\cos 1380° + \text{sen } 1260°}{\text{sen } 765° + \cos 3\pi}$

02| Simplifique as expressões seguintes, usando como referência o arco x.

- **A** $\dfrac{\text{sen}\,(180° - x) - \text{sen}\,(180° + x)}{\cos\,(180° + x)}$
- **B** $\dfrac{\cos\,(2\pi - x) \cdot \cos\,(\pi + x)}{\cos\,(\pi - x) \cdot \cos x}$
- **C** $\dfrac{\cos\,(\pi + x) + \cos\,(-x) + \cos\,(\pi - x)}{\text{sen}\,(-x) + \text{sen}\,(\pi - x) + \cos x}$

03| Se $A = \text{sen } 430°$ e $B = \text{sen } 700°$, então podemos afirmar que $A < B$?

04| Qual é o valor mínimo da função $f(x) = 2 + 5\,\text{sen}\,(4x)$?

05| UFSM Em muitas cidades, os poluentes emitidos em excesso pelos veículos causam graves problemas a toda população. Durante o inverno, a poluição demora mais para se dissipar na atmosfera, favorecendo o surgimento de doenças respiratórias. Suponha que a função

$$N(x) = 180 - 54\cos\left(\frac{\pi}{6}(x - 1)\right)$$

represente o número de pessoas com doenças respiratórias registrado num Centro de Saúde, com x = 1 correspondendo ao mês de janeiro, x = 2 ao mês de fevereiro e assim por diante.

Qual é a soma do número de pessoas com doenças respiratórias registrado nos meses de janeiro, março, maio e julho?

06| UCS Nossa respiração é um fenômeno cíclico, com períodos alternados de inspiração e expiração. Em um determinado adulto, a velocidade do ar nos pulmões em função do tempo, em segundos, decorrido a partir do início de uma inspiração é dada pela equação $v(t) = 0{,}5 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi t}{5}\right)$. Qual é o ciclo respiratório completo desse adulto?

T ENEM E VESTIBULARES

01| ENEM Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \,.\, \cos(0,06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de *r*, no *apogeu* e no *perigeu*, representada por S. O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de

A) 12 765 km.

B) 12 000 km.

C) 11 730 km.

D) 10 965 km.

E) 5 865 km.

02| ESPCEX (AMAN) A população de peixes em uma lagoa varia conforme o regime de chuvas da região. Ela cresce no período chuvoso e decresce no período de estiagem. Esta população é descrita pela expressão $P(t) = 10^3\left(\cos\left(\left(\frac{t-2}{6}\right)\pi\right) + 5\right)$ em que o tempo t é medido em meses. É correto afirmar que

A) o período chuvoso corresponde a dois trimestres do ano.

B) a população atinge seu máximo em $t = 6$.

C) o período de seca corresponde a 4 meses do ano.

D) a população média anual é de 6.000 animais.

E) a população atinge seu mínimo em $t = 4$ com 6.000 animais.

03| MACKENZIE Seja $g(x) = x^2 + x\cos\beta + \operatorname{sen}\beta$. Se $g(x) = 0$ e $\beta = \frac{3\pi}{2}$ então x vale

A) somente 1

B) somente –1

C) –1 ou 0

D) –1 ou 1

E) 1 ou 0

04| PUCRJ Assinale a alternativa correta

A) $\operatorname{sen}(1000°) < 0$

B) $\operatorname{sen}(1000°) > 0$

C) $\operatorname{sen}(1000°) = \cos(1000°)$

D) $\operatorname{sen}(1000°) = -\operatorname{sen}(1000°)$

E) $\operatorname{sen}(1000°) = -\cos(1000°)$

05| PUCRJ Assinale a alternativa correta:

A) $\cos(2000°) < 0$

B) $\operatorname{sen}(2000°) > 0$

C) $\operatorname{sen}(2000°) = \cos(2000°)$

D) $\operatorname{sen}(2000°) = -\operatorname{sen}(2000°)$

E) $\operatorname{sen}(2000°) = -\cos(2000°)$

06| UCS Suponha que, em determinado lugar, a temperatura média diária T em °C, possa ser expressa, em função do tempo t em dias decorridos desde o início do ano, por $T(t) = 14 + 12\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(t-105)}{364}\right)$.

Segundo esse modelo matemático, a temperatura média máxima nesse lugar, ocorre, no mês de

A) julho.

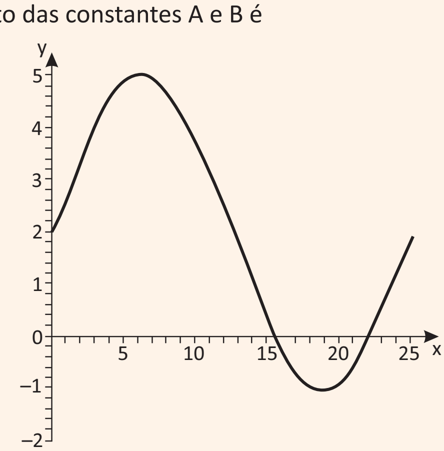
B) setembro.

C) junho.

D) dezembro.

E) março.

07| PUCRS A figura a seguir representa um esboço do gráfico de uma função $y = A + B\operatorname{sen}\left(\frac{x}{4}\right)$ que é muito útil quando se estudam fenômenos periódicos, como, por exemplo, o movimento de uma mola vibrante. Então, o produto das constantes A e B é



A) 6

B) 10

C) 12

D) 18

08| UEPB Sendo $f(x) = -4\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\cos x$, o valor de f $\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ é:

A) $\sqrt{2}$

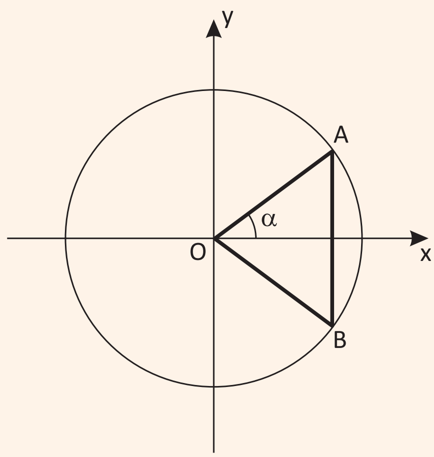
B) 2

C) $-\sqrt{2}$

D) –1

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

09| UPE Na figura a seguir, estão representados o ciclo trigonométrico e um triângulo isósceles OAB.



Qual das expressões abaixo corresponde à área do triângulo OAB em função do ângulo α?

A) $\text{tg}\,\alpha \,.\, \text{sen}\,\alpha$

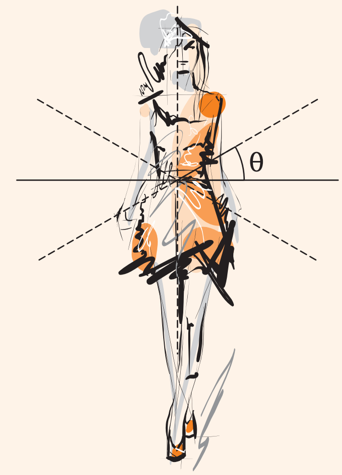
B) $\frac{1}{2} \,.\, \text{tg}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$

C) $\text{sen}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$

D) $\frac{1}{2} \,.\, \text{tg}\,\alpha \,.\, \text{sen}\,\alpha$

E) $\text{tg}\,\alpha \,.\, \cos\alpha$

10| UEPA Os desfiles de moda parecem impor implicitamente tanto o "vestir-se bem" quanto o "ser bela" definindo desse modo padrões de perfeição. Nesses desfiles de moda, a rotação pélvica do andar feminino é exagerada quando comparada ao marchar masculino, em passos de igual amplitude. Esse movimento oscilatório do andar feminino pode ser avaliado a partir da variação do ângulo θ conforme ilustrado na figura abaixo, ao caminhar uniformemente no decorrer do tempo (t).



(Fonte: http://www.google.com.br/search?hl=PT – Acesso em 9 de setembro de 2011 – Texto adaptado)

Um modelo matemático que pode representar esse movimento oscilatório do andar feminino é dado por: $\theta(t) = \frac{\pi}{10}\cos\left(\frac{4\pi}{3}t\right)$. Nestas condições, o valor de $\theta\left(\frac{3}{2}\right)$ é:

A) $\frac{\pi}{8}$

B) $\frac{\pi}{10}$

C) $\frac{\pi}{12}$

D) $\frac{\pi}{18}$

E) $\frac{\pi}{20}$

11| UFRGS O número de interseções da função $f(x) = \text{sen}\,5x$ com o eixo das abscissas no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ é

A) 10

B) 14

C) 21

D) 24

E) 27

12| UFRGS A previsão mensal da venda de sorvetes para 2012, em uma sorveteria, é dada por $P = 6000 + 50x + 2000\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)$, em que *P* é o número de unidades vendidas no mês x; x = 0 representa janeiro de 2012, x = 1 representa fevereiro de 2012, x = 2 representa março de 2012 e assim por diante. Se essas previsões se verificarem, em julho haverá uma queda na quantidade vendida, em relação a março, de aproximadamente:

A) 39,5%

B) 38,5%

C) 37,5%

D) 36,5%

E) 35,5%

13| MACKENZIE O maior valor que o número real $\dfrac{10}{2-\dfrac{\text{sen}\,x}{3}}$ pode assumir é

A) $\dfrac{20}{3}$

B) $\dfrac{7}{3}$

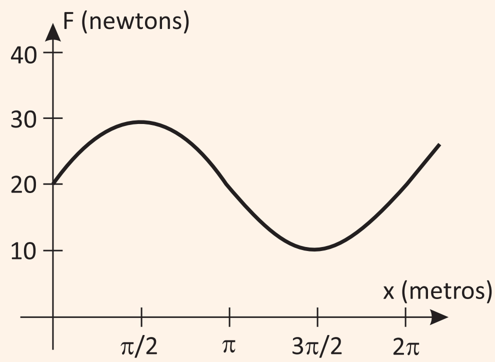
C) 10

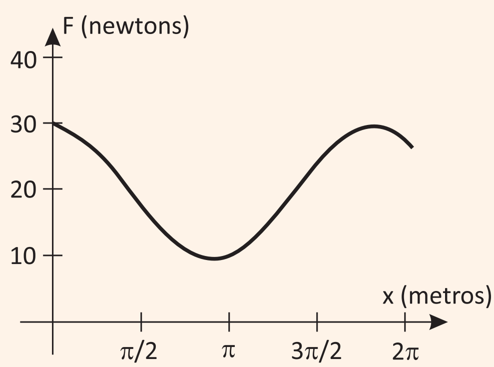
D) 6

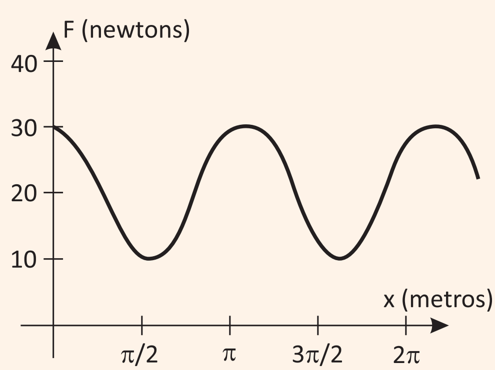
E) $\dfrac{20}{7}$

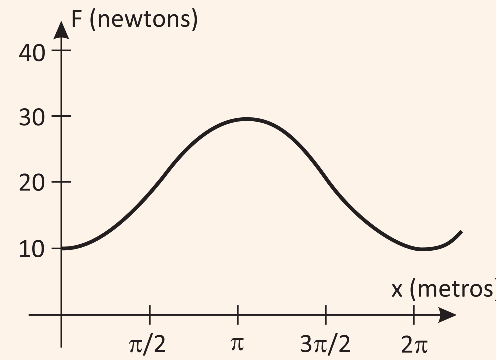
14| UCS Para colocar um objeto em movimento e deslocá-lo sobre uma trajetória retilínea por x metros, é necessário aplicar uma força de 20 + 10 sen(x) newtons sobre ele.

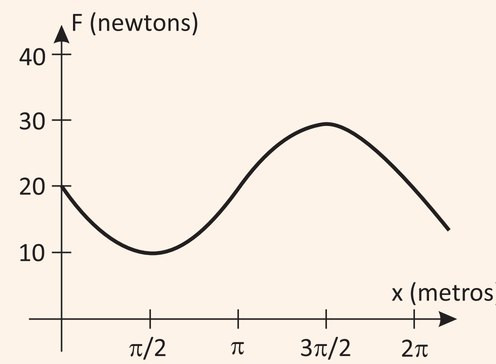
Em qual dos gráficos abaixo, no intervalo [0,3] está representada a relação entre a força aplicada e a distância, quando o objeto é deslocado até 3 metros?

A)


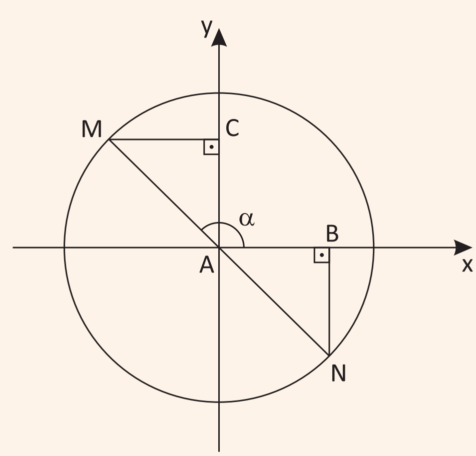
B)


C)


D)


E)


15| CFTMG A figura abaixo representa uma circunferência trigonométrica em que MN é diâmetro e o ângulo α mede $\dfrac{5\pi}{6}$ radianos.



A razão entre as medidas dos segmentos AB e AC é

A) $26\sqrt{3}$

B) $\sqrt{3}$

C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

16| INSPER O professor de Matemática de Artur e Bia pediu aos alunos que colocassem suas calculadoras científicas no modo "radianos" e calculassem o valor de sen $\frac{\pi}{2}$. Tomando um valor aproximado, Artur digitou em sua calculadora o número 1,6 e, em seguida, calculou o seu seno, encontrando o valor A. Já Bia calculou o seno de 1,5 obtendo o valor B. Considerando que $\frac{\pi}{2}$ vale aproximadamente 1,5708 assinale a alternativa que traz a correta ordenação dos valores A, B e sen $\frac{\pi}{2}$.

- **A** $\text{sen}\,\frac{\pi}{2} < A < B$
- **B** $A < \text{sen}\,\frac{\pi}{2} < B$
- **C** $A < B < \text{sen}\,\frac{\pi}{2}$
- **D** $B < \text{sen}\,\frac{\pi}{2} < A$
- **E** $B < A < \text{sen}\,\frac{\pi}{2}$

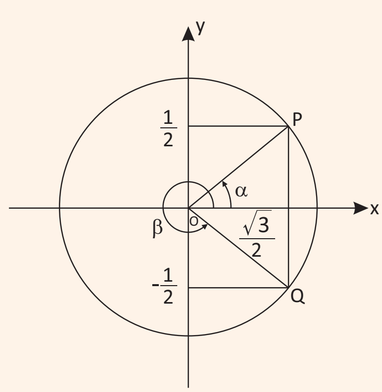
17| UFRGS O período da função definida por $f(x) = \text{sen}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ é

- **A** $\frac{\pi}{2}$
- **B** $\frac{2\pi}{3}$
- **C** $\frac{5\pi}{6}$
- **D** π
- **E** 2π

18| INSPER Considere dois ângulos agudos cujas medidas a e b, em graus, são tais que a + b = 90° e 4 sen a – 10sen b = 0. Nessas condições é correto concluir que

- **A** tg a = 1 e tg b = 1.
- **B** tg a = 4 e tg b = $\frac{1}{4}$
- **C** tg a = $\frac{1}{4}$ e tg b = 4
- **D** tg a $\frac{2}{5}$ e tg b = $\frac{5}{2}$
- **E** tg a = $\frac{2}{5}$ e tg b = $\frac{5}{2}$

19| CFTMG Na figura, P e Q são pontos da circunferência trigonométrica de centro O e raio unitário.



sen α: ordenada do ponto P

cos α: abscissa do ponto P

sen β: ordenada do ponto Q

cos β: abscissa do ponto Q

O valor de α + β em radianos, é

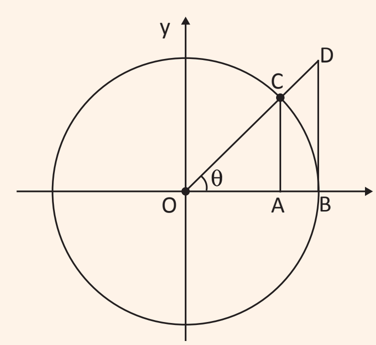
- **A** 2π
- **B** $\frac{11\pi}{6}$
- **C** $\frac{13\pi}{6}$
- **D** $\frac{25\pi}{12}$

20| UFSM Uma gráfica que confeccionou material de campanha determina o custo unitário de um de seus produtos, em reais, de acordo com a lei C(t) = 200 + 120 . sen (π . t)/2, com t medido em horas de trabalho. Assim, os custos máximos e mínimo desse produto são

- **A** 320 e 200
- **B** 200 e 120
- **C** 200 e 80
- **D** 320 e 80
- **E** 120 e 80

21| UFMG A figura abaixo mostra, no plano cartesiano, uma circunferência centrada na origem, de raio igual a 1, passando pelos pontos B e C. Nessa figura, os pontos O, C e D são colineares, os segmentos de retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são paralelos ao eixo y e θ é o ângulo que o segmento de reta $\overline{OD}$ faz com o eixo x.

Com respeito a essa figura, é correto afirmar que:



- **A** $\overline{OA} = \text{sen}\,\theta$
- **B** $\overline{OC} = \cos\theta$
- **C** $\overline{BD} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}}$
- **D** $\frac{\overline{AC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}}$
- **E** $\overline{OB}^2 + \overline{BD}^2 = 1$

D TEORIA DOS CONJUNTOS
FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º E 2º GRAUS

A LINGUAGEM SIMBÓLICA DA MATEMÁTICA

Através dos tempos, no desenvolvimento da matemática, vários símbolos foram criados com o intuito de simplificar e universalizar a linguagem matemática, tornando-a mais ágil e fácil de ser compreendida.

Na teoria dos conjuntos, utilizaremos alguns desses símbolos em determinadas definições. Assim, antes de iniciarmos o nosso estudo, tais símbolos serão apresentados no quadro abaixo.

Símbolo	Significado
$\mid$	tal que
$\exists$	existe pelo menos um
$\exists \mid$	existe um único
$\forall$	qualquer que seja ou para todo
$\Rightarrow$	implica
$\Leftrightarrow$	equivalente
$\therefore$	portanto

DEFINIÇÕES

Frequentemente, usamos a ideia de conjunto quando agrupamos objetos ou pessoas que possuem características comuns. Assim, ao elaborar uma lista de convidados para uma festa, ou ao colocar todos os lápis de cor em um estojo, estamos fazendo agrupamentos chamados **conjuntos**. Cada um dos componentes dos conjuntos são chamados de **elementos**.

REPRESENTAÇÕES

Podemos representar os conjuntos de três maneiras. Por enumeração, por propriedade ou por diagramas.

- **Por enumeração:** o conjunto é expresso através da citação dos seus elementos separados por vírgula e entre chaves.

  Exemplo: O conjunto dos dias da semana que começam com a letra S é A = {segunda-feira, sexta-feira, sábado}.

- **Por propriedade:** o conjunto é expresso através de uma propriedade que caracteriza seus elementos.

  Exemplo: $B = \{x \mid x$ é uma letra da palavra comer$\}$.

- **Por diagrama de Venn:** o conjunto é expresso através de uma linha fechada de modo que seus elementos estejam localizados no seu interior. Essa representação foi criada pelo matemático inglês John Venn com o objetivo de facilitar a visualização dos conjuntos e suas relações.

  Exemplo: O conjunto dos primeiros cinco meses do ano é dado por:

Observe que, para nomear os conjuntos, utilizamos letras maiúsculas do nosso alfabeto.

CLASSIFICAÇÃO

Os conjuntos podem ser classificados em:

- **Conjunto vazio:** é aquele que não possui elemento algum. Os símbolos utilizados para indicar conjunto vazio são $\varnothing$ ou { }.
  Exemplo: D = {x | x é um estado brasileiro que começa com a letra Q}
- **Conjunto unitário:** é aquele que possui exatamente um elemento.
  Exemplo: $E = \{x \mid x$ é um estado brasileiro que começa com a letra G}.
- **Conjunto universo:** é aquele que possui todos os elementos necessários para a realização de um determinado estudo.
  Exemplo: Ao questionar os alunos do 1º ano sobre suas preferências em relação às disciplinas estudadas, o conjunto universo é aquele formado exclusivamente pelos alunos do 1º ano. Utilizaremos a letra U para indicar o conjunto universo.
- **Conjunto finito:** é aquele que é possível contar todos os seus elementos um a um.
  Exemplo: F = {1, 2, 3, ..., 40} é um conjunto finito com 40 elementos. Simbolicamente, temos que n(F) = 40.
- **Conjunto infinito:** é aquele que não é possível contar todos os seus elementos um a um.
  Exemplo: G = {2, 4, 6, 8, ...} é um conjunto infinito, ou seja, possui infinitos elementos.

IGUALDADE

Conjuntos iguais são aqueles que possuem os mesmos elementos.

Exemplo: H = {a, e, i, o, u} e J = {i, e, a, o, e, i, u} são iguais, pois possuem os mesmos elementos.

Observe que a n(H) = 5 e n(J) = 5. Assim, a repetição dos elementos no conjunto J não o alteram, portanto, J = {i, e, a, o, e, i, u} = {i, e, a, o, u}.

RELAÇÕES DE PERTINÊNCIA

De maneira geral, dizemos que $x \in M$ (x pertence a M) quando x é um elemento do conjunto M. Por outro lado, dizemos que $x \notin M$ (x não pertence a M) quando x não é um elemento do conjunto M.

Exemplo: No conjunto M = {1, 2, 3, 4, 5}, temos que:

- $0 \notin M$.
- $5 \in M$.

OBSERVAÇÃO:

- Os símbolos $\in$ e $\notin$ são utilizados para relacionar elemento com conjunto.

RELAÇÕES DE INCLUSÃO

De maneira geral, dizemos que $A \subset B$ (A está contido em B) ou $B \supset A$ (B contém A) quando todo elemento do conjunto A também for elemento do conjunto B.

Por outro lado, dizemos que $A \not\subset B$ (A não está contido em B) ou $B \not\supset A$ (B não contém A) quando algum elemento do conjunto A não for elemento do conjunto B.

OBSERVAÇÃO:

- Os símbolos $\subset$, $\not\subset$, $\supset$, e $\not\supset$ relacionam conjunto com conjunto.

PROPRIEDADES:

- Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente, se $A \subset B$ e $B \subset A$.
- Dados os conjuntos A, B e C, temos que: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

CONJUNTO DAS PARTES

O conjunto das partes do conjunto A, que é indicado por P(A), é o conjunto de todos os possíveis subconjuntos de A.

Exemplo:

O conjunto das partes de A = {a, b, c} é dado por: P(A) = {{a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, $\varnothing$}.

OPERAÇÕES

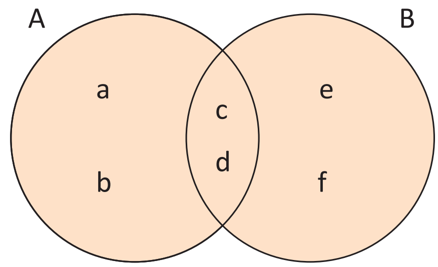
UNIÃO

A união entre os conjuntos A e B é definida por: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Assim, para que um elemento x seja elemento da união de A e B, x deve ser elemento de A ou de B.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$, temos que $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

Podemos representar essa operação por meio do diagrama a seguir:



$A \cup B$

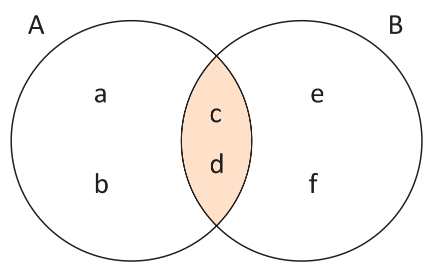
INTERSECÇÃO

A intersecção entre os conjuntos A e B é definida por: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$. Assim, para que um elemento x seja elemento da intersecção de A e B, x deve ser elemento de A e B.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$, temos que $A \cap B = \{c, d\}$.

Podemos representar essa operação por meio do diagrama a seguir:



$A \cap B$

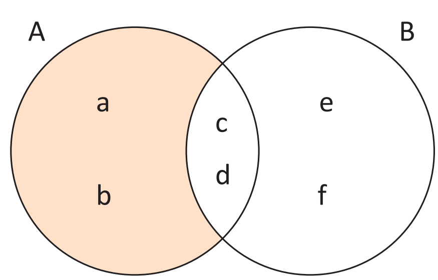
DIFERENÇA

A diferença entre os conjuntos A e B é definida por: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Assim, para que um elemento x seja elemento da diferença $A - B$, x deve ser elemento de A e não de B.

Exemplo:

Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{c, d, e, f\}$, temos que $A - B = \{a, b\}$ e $B - A = \{e, f\}$.

Podemos representar essa operação por meio dos diagramas a seguir:



$A - B$

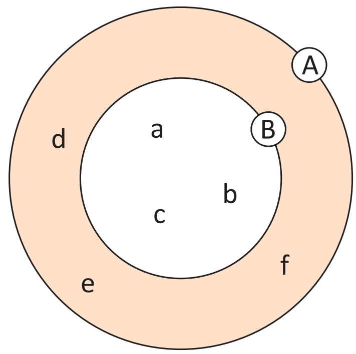
COMPLEMENTAR

O complementar entre os conjuntos A e B é definido por: $C_A^B = A - B$ se, e somente se, $A \subset B$. Assim, para que um elemento x seja elemento do complementar de B em relação a A, x deve ser elemento A e não de B.

Exemplo:

Dados os conjuntos A = {a, b, c, d, e, f} e B = {a, b, c}, temos que: $C_A^B = A - B = \{d, e, f\}$.

Podemos representar essa operação por meio do diagrama a seguir:



TEXTO COMPLEMENTAR

NOÇÕES DE LÓGICA

CONCEITOS INICIAIS

O conceito mais elementar no estudo da lógica é o de **Proposição**.

Proposição “vem de propor” que significa submeter à apreciação; requerer um juízo. Trata-se de uma **sentença declarativa** – algo que será declarado por meio de termos, palavras ou símbolos – e cujo conteúdo poderá ser considerado **verdadeiro** ou **falso**.

Então, se eu afirmar “a Terra é maior que a Sol”, estarei diante de uma **proposição** cujo **valor lógico** é falso.

Quando falamos em **valor lógico** estamos nos referindo a um dos dois possíveis juízos que atribuímos a uma proposição: **verdadeiro (V)** ou **falso (F)**.

As proposições são representadas por letras minúsculas (p, q, r, s, etc). São exemplos de **proposições**:

p: André é médico.

q: $3 > 5$

r: Bia foi ao teatro ontem à noite.

PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO

Uma proposição ou será verdadeira, ou será falsa: não há outra possibilidade.

PROPOSIÇÕES SIMPLES E PROPOSIÇÕES COMPOSTAS

Proposições podem ser ditas simples ou compostas. Serão proposições simples aquelas sozinhas, desacompanhadas de outras proposições, Exemplo:

- Todo homem é imortal.
- O novo papa é argentino.

Se duas (ou mais) proposições vêm conectadas entre si, formando uma só sentença, estaremos diante de uma proposição composta, Exemplo:

- André é médico **e** Bia é enfermeira.
- Caio vai ao cinema **ou** Dani vai ao teatro.
- **Se** não chover amanhã, **então** irei à praia.

Nas sentenças acima, vimos em destaque alguns tipos de conectivos – ditos **conectivos lógicos** – que poderão estar presentes em uma proposição composta.

CONECTIVOS LÓGICOS

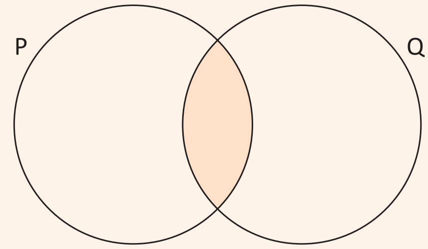
Conectivos Lógicos são expressões que servem para unir duas ou mais proposições. Veremos alguns deles a seguir, uma vez que é de nosso interesse conhecer o **valor lógico** das proposições compostas.

CONJUNÇÃO "e"

Proposições compostas em que está presente o conectivo **"e"** são ditas **CONJUNÇÕES.**

Uma conjunção só será **verdadeira**, se **ambas** as proposições componentes forem também **verdadeiras**.

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos, por meio de um diagrama, a conjunção "**p e q"** corresponderá à **interseção** do conjunto **p** com o conjunto **q**, Exemplo:

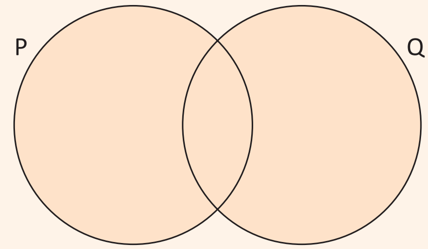


DISJUNÇÃO "ou"

Proposições compostas em que está presente o conectivo **"ou"** são ditas **DISJUNÇÕES.**

Uma disjunção só será **falsa** quando as duas partes que a compõem forem **ambas falsas**. Nos demais casos, a disjunção será verdadeira.

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos por meio de um diagrama, a disjunção "**p ou q"** corresponderá à **união** do conjunto **p** com o conjunto **q**, Exemplo:

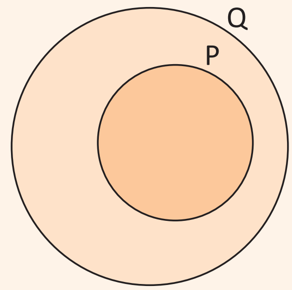


CONDICIONAL "Se ... então ..."

Proposições compostas em que está presente o conectivo **"Se ... então ..."** são ditas **CONDICIONAIS.**

Uma condicional só será **falsa** quando a **primeira parte** for **verdadeira**, e a **segunda** for **falsa**. Nos demais casos, a condicional será verdadeira.

Se as proposições **p** e **q** forem representadas como conjuntos, por meio de um diagrama, a proposição condicional "**Se p então q"** corresponderá à **inclusão** do conjunto **p** no conjunto **q** (p está contido em q), Exemplo:



R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Julgue os itens a seguir em certo (C) ou errado (E) sendo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 5, 7\}$.

A $1 \subset A$.

B $\{4\} \in B$.

C $\{2, 3\} \subset B$.

D $\{1, 2, 5\} \not\subset A$.

E $B \supset \{1, 3, 7\}$.

F $A \supset \varnothing$

Resolução:

A *E, pois $\subset$ relaciona conjunto com conjunto.*

B *E, pois {4} não é elemento do conjunto B.*

C *C, pois todo elemento do conjunto {2, 3} também é elemento do conjunto B.*

D *C, pois existe elemento do conjunto {1, 2, 5} que não é elemento do conjunto A.*

E *C, pois todo elemento do conjunto {1, 3, 7} também é elemento do conjunto B.*

F *C, pois $\varnothing$ está contido em todos os conjuntos.*

02| Dados os conjuntos:

- $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}$,
- $A = \{x \in U \mid x$ é par$\}$.
- $B = \{x \in U \mid x$ é menor que $6\}$.
- $C = \{x \in U \mid x$ é maior que 3 e menor que $10\}$.

Determine:

A $B \cup C$

B $A \cap C$

C $C - A$

D $(A \cap C) - B$

Resolução:

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$

$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

a) $B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) $A \cap C = \{4, 6, 8\}$.

c) $C - A = \{5, 7, 9\}$.

d) $(A \cap C) - B = \{4, 6, 8\} - \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 8\}$.

03| Numa pequena fábrica 65 funcionários praticam futebol, 31 funcionários praticam voleibol, 17 praticam futebol e voleibol e 9 funcionários não praticam nem futebol e nem voleibol. Assim, calcule:

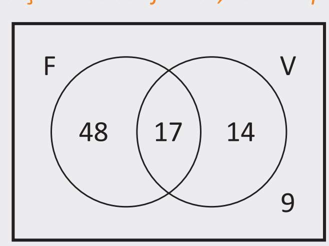
A A quantidade total de funcionários dessa fábrica.

B A quantidade de funcionários que praticam apenas futebol.

C A quantidade de funcionários que não praticam voleibol.

Resolução:

Vamos distribuir essas quantidades nas respectivas regiões do diagrama a seguir. Começando essa distribuição pela intersecção dos conjuntos, temos que:



Sendo:

- *F o conjunto dos funcionários que praticam futebol, temos que n(F) = 65.*

- *V o conjunto dos funcionários que praticam voleibol, temos que n(V) = 31.*
- *F ∩ V o conjunto dos funcionários que praticam futebol e voleibol, temos que n(F ∩ V) = 17.*

A *A quantidade total de funcionários dessa fábrica é dada por 48 + 17 + 14 + 9 = 88.*

B *A quantidade de funcionários que praticam apenas futebol é dada por 65 – 17 = 48.*

C *A quantidade de funcionários que não praticam voleibol é dada por 48 + 9 = 57.*

04| Uma pesquisa de mercado foi realizada para verificar a preferência de três produtos de limpeza A, B e C.

Os resultados obtidos nessa pesquisa estão na tabela a seguir.

Produto	Número de pessoas
A	150
B	200
C	180
A e B	40
A e C	25
B e C	45
A, B e C	15
Nenhuma dos três	50

Assim, calcule:

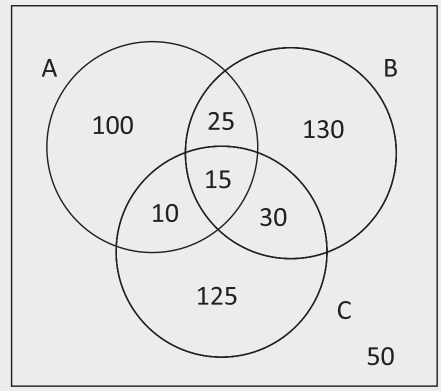
A O número total de pessoas consultadas.

B O número de pessoas que preferem apenas ao produto A.

C O número de pessoas que não preferem o produto B.

Resolução:

Vamos distribuir essas quantidades nas respectivas regiões do diagrama a seguir. Começando essa distribuição pela intersecção dos três conjuntos, temos que:



Sendo:

- *A o conjunto das pessoas que preferem o produto A, assim temos que n(A) = 150.*
- *B o conjunto das pessoas que preferem o produto B, assim temos que n(B) = 200.*
- *C o conjunto das pessoas que preferem o produto C, assim temos que n(C) = 180.*

A *O número total de pessoas consultadas é dado por:*

100 + 130 + 125 + 25 + 10 + 30 + 15 + 50 = 485.

B *O número de pessoas que preferem apenas o produto A é 100.*

C *O número de pessoas que não preferem o produto B é dado por 100 + 10 + 125 + 50 = 285.*

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Sendo M = {{a}, {b}, {a, b}}, com a ≠ b, julgue os itens a seguir em certo (C) ou errado (E).

A {a} ∉ M.

B {b} ⊂ M.

C a ∉ M.

D {a,b} ∈ M.

E {{a}, {b}} ⊂ M.

02| O dono de uma lanchonete, a partir de 5 ingredientes, montou um cardápio com várias vitaminas. Sabendo-se que tais vitaminas podem ser obtidas a partir da mistura de dois a cinco desses ingredientes, calcule o número de vitaminas que podem ser assim obtidas.

03| UFAL No universo IN (naturais), sejam A o conjunto dos números pares, B o conjunto dos números múltiplos de 3 e C o conjunto dos números múltiplos de 5. Determine os 10 menores números que pertencem ao conjunto B – (A ∪ C).

04| IFRJ Uma das grandes paixões dos cariocas é o desfile de escolas de samba.

Foram entrevistados alguns foliões com a seguinte pergunta: “*Em qual ou quais escolas você irá desfilar em 2012?*”, e os entrevistadores chegaram a algumas conclusões, de acordo com a tabela:

Escola de samba	Número de foliões
Mangueira	1500
Portela	1200
Salgueiro	800
Mangueira e Portela	600
Portela e Salgueiro	400
Mangueira e Salgueiro	200
Mangueira, Portela e Salgueiro	150
Nenhuma das três	700

A) Quantos foliões foram entrevistados?

B) Quantos, dentre os entrevistados, não pretendem desfilar na Salgueiro?

05| UERJ Em uma escola circulam dois jornais: *Correio do Grêmio* e *O Estudante*. Em relação à leitura desses jornais, por parte dos 840 alunos da escola, sabe-se que:

- 10% não leem esses jornais;
- 520 leem o jornal *O Estudante*;
- 440 leem o jornal *Correio do Grêmio*.

Calcule o número total de alunos do colégio que leem os dois jornais.

06| UFPE Os alunos de uma turma cursam alguma(s) dentre as disciplinas Matemática, Física e Química. Sabendo que:

- o numero de alunos que cursam Matemática e Física excede em 5 o número de alunos que cursam as três disciplinas;
- existem 7 alunos que cursam Matemática e Química, mas não cursam Física;
- existem 6 alunos que cursam Física e Química, mas não cursam Matemática;
- o numero de alunos que cursam exatamente uma das disciplinas e 150;
- o numero de alunos que cursam pelo menos uma das três disciplinas e 190.

Quantos alunos cursam as três disciplinas?

07| PUC Um trem viajava com 242 passageiros, dos quais:

- 96 eram brasileiros,
- 64 eram homens,
- 47 eram fumantes,
- 51 eram homens brasileiros,
- 25 eram homens fumantes,
- 36 eram brasileiros fumantes,
- 20 eram homens brasileiros fumantes.

Calcule:

A) o número de mulheres brasileiras não fumantes;

B) o número de homens fumantes não brasileiros;

C) o número de mulheres não brasileiras, não fumantes.

08| UFMG Uma pesquisa foi feita com um grupo de pessoas que frequentam, pelo menos, uma das três livrarias, A, B e C. Foram obtidos os seguintes dados:

- das 90 pessoas que frequentam a Livraria A, 28 não frequentam as demais;
- das 84 pessoas que frequentam a Livraria B, 26 não frequentam as demais;
- das 86 pessoas que frequentam a Livraria C, 24 não frequentam as demais;
- oito pessoas frequentam as três livrarias.

A) Determine o número de pessoas que frequentam apenas uma das livrarias.

B) Determine o número de pessoas que frequentam, pelo menos, duas livrarias.

C) Determine o número total de pessoas ouvidas nessa pesquisa.

09| UFF Dos 135 funcionários de uma empresa localizada em Niterói, 2/3 moram na cidade do Rio de Janeiro. Dos funcionários que moram na cidade do Rio de Janeiro, 3/5 usam ônibus até a estação das barcas e, em seguida, pegam uma barca para chegar ao trabalho. Sabe-se que 24 funcionários da empresa usam exclusivamente seus próprios automóveis para chegar ao trabalho, sendo que 1/3 destes não mora na cidade do Rio de Janeiro. Os demais funcionários da empresa usam somente ônibus para chegar ao trabalho.

Determine:

A) o número de funcionários da empresa que usam somente ônibus para chegar ao trabalho;

B) o número de funcionários da empresa que usam somente ônibus para chegar ao trabalho e que não moram na cidade do Rio de Janeiro.

10| UNESP Um estudo de grupos sanguíneos humanos realizado com 1000 pessoas (sendo 600 homens e 400 mulheres) constatou que 470 pessoas tinham o antígeno A, 230 pessoas tinham o antígeno B e 450 pessoas não tinham nenhum dos dois. Determine:

A) o número de pessoas que têm os antígenos A e B simultaneamente;

B) supondo independência entre sexo e grupo sanguíneo, a probabilidade de que uma pessoa do grupo, escolhida ao acaso, seja homem e tenha os antígenos A e B simultaneamente.

T ENEM E VESTIBULARES

01| PUC Considere o conjunto $A = \{3, 5\}$. Sabendo que $B \cap A = \{3\}$ e $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine o conjunto B.

A) $B = \{1, 2, 3\}$

B) $B = \{1, 2, 4\}$

C) $B = \{1, 2, 3, 4\}$

D) $B = \{1, 2, 3, 5\}$

E) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

02| UECE Os subconjuntos P, X e Y do conjunto IN dos números naturais são dados por:

- P = {números primos},
- X = {múltiplos de 2}
- Y = {múltiplos de 3}.

Podemos afirmar corretamente que

A) $P \cup X \cup Y = N$

B) $P \cap X \cap Y \neq \varnothing$

C) $X \cup Y \subset N - P$

D) $X \cap Y \subset N - P$

03| EFOA Em uma cidade com 40.000 habitantes há três clubes recreativos: Colina, Silvestre e Campestre. Feita uma pesquisa, foram obtidos os seguintes resultados: 20% da população frequenta o Colina; 16% o Silvestre; 14% o Campestre; 8% o Colina e o Silvestre; 5% o Colina e o Campestre; e 4% o Silvestre e o Campestre. Somente 2% frequentam os três clubes. O número de habitantes que não frequentam nenhum destes três clubes é:

A) 26.000

B) 30.000

C) 28.000

D) 32.000

E) 34.000

04| ENEM Uma pesquisa foi realizada para tentar descobrir, do ponto de vista das mulheres, qual é o perfil da parceira ideal procurada pelo homem do séc. XXI. Alguns resultados estão apresentados no quadro abaixo.

O QUE AS MULHERES PENSAM QUE OS HOMENS PREFEREM	
72% das mulheres têm certeza de que os homens odeiam ir ao shopping	**65%** pensam que os homens preferem mulheres que façam todas as tarefas da casa
No entanto, apenas **39%** dos homens disseram achar a atividade insuportável	No entanto, **84%** deles disseram acreditar que as tarefas devem ser divididas entre o casal

Correio Braziliense, 29 jun. 2.008 (adaptado).

Se a pesquisa foi realizada com 300 mulheres, então a quantidade delas que acredita que os homens odeiam ir ao shopping e pensa que eles preferem que elas façam todas as tarefas da casa é:

A) Inferior a 80.

B) Superior a 80 e inferior a 100.

C) Superior a 100 e inferior a 120.

D) Superior a 120 e inferior a 140.

E) Superior a 140.

05| UEG Na escola do professor Golias, são praticadas duas modalidades de esportes: o futebol e a natação. Exatamente 80% dos alunos praticam futebol e 60%, natação. Se a escola tem 300 alunos e todo aluno pratica pelo menos um esporte, então o número de alunos que praticam os dois esportes é:

A) 240

B) 204

C) 180

D) 139

E) 120

06| **ITA** Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

(I) $\varnothing \in U$ e $n(U) = 10$

(II) $\varnothing \subset U$ e $n(U) = 10$

(III) $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$

(IV) $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s):

A) Apenas I e III

B) Apenas II e IV

C) Apenas II e III

D) Apenas IV

E) Todas as afirmações

07| **CEFET** Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{4, 5, 6, 7\}$; $C - A = \{7, 8, 9\}$; $C - B = \{3, 8, 9\}$ e $A \cap B \cap C = \{4\}$, o número de elementos do conjunto C é:

A) 6

B) 7

C) 3

D) 4

E) 5

08| **UEPI** Seja o conjunto $A = \{0, \{0\}, 1, \{1\}, \{0, 1\}\}$, é correto afirmar que:

A) $0 \notin A$

B) $\{0,1\} \in A$

C) $\{0,1\} \not\subset A$

D) Os elementos de A são 0 e 1

E) O número de subconjuntos de A é $2^2 = 4$

09| **UFCE** Sejam M e N conjuntos que possuem um único elemento em comum. Se o número de subconjuntos de M é igual ao dobro do número de subconjuntos de N, o número de elementos do conjunto $M \cup N$ é:

A) O triplo do número de elementos de M.

B) O triplo do número de elementos de N.

C) O quádruplo do número de elementos de M.

D) O dobro do número de elementos de M.

E) O dobro do número de elementos de N.

10| **UFMG** Em uma pesquisa de opinião, foram obtidos estes dados:

- 40% dos entrevistados leem o jornal A.
- 55% dos entrevistados leem o jornal B.
- 35% dos entrevistados leem o jornal C.
- 12% dos entrevistados leem os jornais A e B.
- 15% dos entrevistados leem os jornais A e C.
- 19% dos entrevistados leem os jornais B e C.
- 7% dos entrevistados leem os três jornais.
- 135 pessoas entrevistadas não leem nenhum dos três jornais.

Considerando-se esses dados, é correto afirmar que o número total de entrevistados foi:

A) 1.200

B) 1.500

C) 1.250

D) 1.350

11| **CEFET** Considere os conjuntos:

$A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{a, b, d, e\}$ e $C = \{b, d, f, g\}$. O conjunto Y, tal que $Y \subset A$ e $A - Y = B \cap C$ é:

A) {b, c}

B) {a, d}

C) {b, d}

D) {c, d}

E) {a, c}

12| **UFTO** Uma Instituição de Ensino Superior oferece os cursos A e B. Em seu processo seletivo o candidato pode optar por inscrever-se nos dois cursos ou apenas em um curso. Ao final, o número de inscrições por curso e o número total de candidatos inscritos pode ser observado no quadro que segue:

Número de inscrições no Curso A	Número de inscrições no Curso B	Número total de candidatos inscritos
480	392	560

Com base nas informações acima e nas possibilidades de inscrições, pode se afirmar que o número de candidatos que optaram por inscrever-se somente no curso A foi:

A) 80

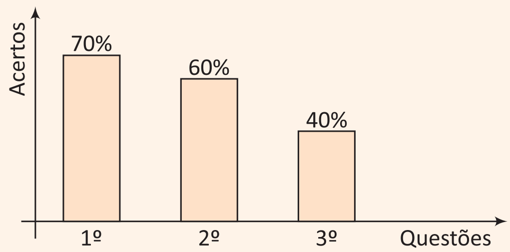
B) 168

C) 312

D) 480

E) 560

13| UFTO Foi aplicado um teste contendo três questões para um grupo de 80 alunos. O gráfico abaixo representa a porcentagem de acerto dos alunos por questão.



Suponha que 52 alunos acertaram pelo menos duas questões e 8 alunos não acertaram nenhuma. O número de alunos que acertaram as três questões é:

A) 44
B) 40
C) 12
D) 20
E) 30

14| UDESC Em uma turma de Engenharia, dentre os alunos matriculados nas disciplinas A, B e C, apenas 40 alunos as cursaram até o final do semestre. O índice de aprovação destes alunos nas disciplinas A, B e C foi de 50%, 70% e 65%, respectivamente. Dentre os aprovados, somente 10% passaram nas três disciplinas; 30% somente foram aprovados na disciplina A; 50% somente na disciplina C, e 5% somente nas disciplinas A e C. Então o número de aprovados somente na disciplina B é igual a:

A) 26
B) 10
C) 28
D) 12
E) 22

15| UFOP Três frutas são consumidas por um grupo de 400 pessoas: laranja, banana e maçã. Dessas pessoas, 185 consomem laranja, 125 consomem laranja e banana, 130 consomem banana e maçã, 120 consomem laranja e maçã e 100 consomem laranja, banana e maçã. O número de pessoas que consomem banana é igual ao número de pessoas que consomem maçã. O número de pessoas que consomem maçã e não consomem laranja é de:

A) 95
B) 125
C) 195
D) 245

16| ENEM Um fabricante de cosméticos decide produzir três diferentes catálogos de seus produtos, visando a públicos distintos. Como alguns produtos estarão presentes em mais de um catálogo e ocupam uma página inteira, ele resolve fazer uma contagem para diminuir os gastos com originais de impressão. Os catálogos C_1, C_2 e C_3 terão, respectivamente, 50, 45 e 40 páginas. Comparando os projetos de cada catálogo, ele verifica que C_1 e C_2 terão 10 páginas em comum; C_1 e C_3 terão 6 páginas em comum; C_2 e C_3 terão 5 páginas em comum, das quais 4 também estarão em C_1. Efetuando os cálculos correspondentes, o fabricante concluiu que, para a montagem dos três catálogos, necessitará de um total de originais de impressão igual a:

A) 135
B) 126
C) 118
D) 114
E) 110

17| UEL Um grupo de estudantes resolveu fazer uma pesquisa sobre as preferências dos alunos quanto ao cardápio do Restaurante Universitário. Nove alunos optaram somente por carne de frango, 3 somente por peixes, 7 por carne bovina e frango, 9 por peixe e carne bovina e 4 pelos três tipos de carne. Considerando que 20 alunos manifestaram-se vegetarianos, 36 não optaram por carne bovina e 42 não optaram por peixe, assinale a alternativa que apresenta o número de alunos entrevistados.

A) 38
B) 42
C) 58
D) 62
E) 78

18| INSPER Dentro de um grupo de tradutores de livros, todos os que falam alemão também falam inglês, mas nenhum que fala inglês fala japonês. Além disso, os dois únicos que falam russo também falam coreano. Sabendo que todo integrante desse grupo que fala coreano também fala japonês, pode-se concluir que, necessariamente,

A) todos os tradutores que falam japonês também falam russo.
B) todos os tradutores que falam alemão também falam coreano.
C) pelo menos um tradutor que fala inglês também fala coreano.
D) nenhum dos tradutores fala japonês e também russo.
E) nenhum dos tradutores fala russo e também alemão.

19| INSPER As três afirmações abaixo, todas verdadeiras, foram feitas por Luís para descrever o que pretendia fazer em relação às suas economias e planos de viagem.

- Se o preço do dólar cair no final do ano, então eu vou investir em poupança e viajar para o exterior.
- Se eu viajar para o exterior, então vou comprar um equipamento de esqui.
- Se eu alugar ou comprar um equipamento de esqui, então vou esquiar em Bariloche.

A partir das três afirmações e da informação de que Luís não esquiou em Bariloche, pode-se tirar algumas conclusões que são, necessariamente, verdadeiras. Dentre as conclusões abaixo, a única que não é, necessariamente, verdadeira é

A) o preço do dólar não caiu no final do ano.
B) Luís não investiu em poupança.
C) Luís não viajou para o exterior.
D) Luís não comprou um equipamento de esqui.
E) Luís não alugou um equipamento de esqui.

20| UERJ Rafael comprou quatro passagens aéreas para dar uma de presente para cada um de seus quatro netos. Para definir a época em que irão viajar, Rafael pediu para cada um dizer uma frase. Se a frase fosse verdadeira, o neto viajaria imediatamente; se fosse falsa, o neto só viajaria no final do ano.

O quadro a seguir apresenta as frases que cada neto falou:

NETO	FRASE
I	Viajarei para a Europa
II	Meu voo será noturno
III	Viajarei no final do Ano
IV	O Flamento é o melhor time do Brasil

A partir das frases ditas, Rafael não pôde definir a época da viagem do neto representado pelo seguinte número:

A) I
B) II
C) III
D) IV

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

Uma função f: IR → IR é chamada de função polinomial do 1º grau ou função afim se, e somente se, for expressa pela seguinte lei de formação.

$$f(x) = ax + b, \text{ com } a \in \mathbb{R}^* \text{ e } b \in \mathbb{R}$$

Assim, são exemplos de funções polinomiais do 1º grau ou função afim:

- $f(x) = 3x - 8$, com $a = 3$ e $b = -8$
- $f(x) = -2x + 5$, com $a = -2$ e $b = 5$

OBSERVAÇÕES:

- Os coeficientes a e b são chamados de coeficiente angular e coeficiente linear, respectivamente.
- Se $b = 0$ em $f(x) = ax + b$, temos que $f(x) = ax$. Nesse caso, a função afim recebe o nome particular de função linear.
- Se $b = 0$ e $a = 1$ em $f(x) = ax + b$, temos que $f(x) = x$. Nesse caso, a função afim recebe o nome particular de função identidade.

RAIZ OU ZERO

De maneira geral, raiz ou zero de uma função f(x) é o valor x que torna $f(x) = 0$. Assim, para uma função expressa por $f(x) = ax + b$, temos que:

$$f(x) = ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Portanto, a raiz ou zero de uma função polinomial do 1º grau é $x = -\frac{b}{a}$.

TAXA DE VARIAÇÃO

O parâmetro a (coeficiente angular) da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$ é uma constante, também chamada de taxa de variação.

GRÁFICO NO PLANO CARTESIANO

O gráfico cartesiano de uma função polinomial do 1º grau, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua em relação aos eixos coordenados.

A princípio, para esboçar esse gráfico, podemos montar uma tabela numérica escolhendo valores arbitrários para x e calculando os correspondentes valores de $y = f(x)$. Contudo, já sabemos da geometria, que uma reta fica determinada por apenas dois pontos distintos.

Portanto, para esboçar o gráfico de uma função polinomial do 1º grau, basta atribuir dois valores arbitrários para x, calcular seus correspondentes valores $y = f(x)$ e traçar uma reta passando por esses dois pontos.

Geralmente, os pontos utilizados são os de intersecção da reta com os eixos coordenados. Assim:

- Para obter a intersecção com o eixo das abscissas basta fazer $y = f(x) = 0$.
- Para obter a intersecção com o eixo das ordenadas basta fazer $x = 0$.

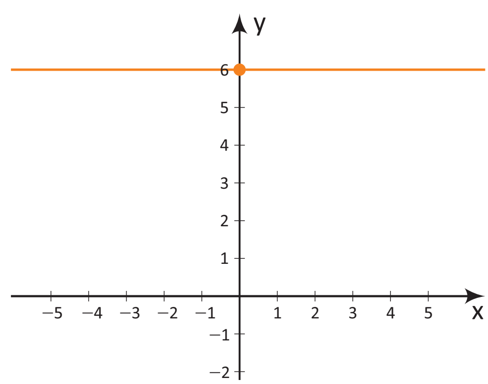
FUNÇÃO CONSTANTE

De maneira geral, uma função f: IR → IR é chamada de função constante se, e somente se, for expressa pela seguinte lei de formação.

$$f(x) = k, \text{ sendo k uma constante real}$$

Assim, a função f associa todo número real x a uma mesma imagem k. Portanto, seu gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas passando pelos pontos de ordenada $y = k$.

Exemplo: $f(x) = 6$

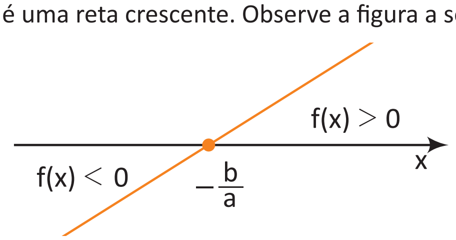


ESTUDO DO SINAL

Estudar o sinal de uma função f(x) significa determinar os valores de x para os quais f(x) é positivo, negativo ou zero.

Assim, para estudar o sinal de uma função do tipo $f(x) = ax + b$, devemos inicialmente determinar sua raiz ou zero, que é $x = -\frac{b}{a}$ e, em seguida, esboçar o seu gráfico verificando, através do coeficiente angular, se o mesmo é uma reta é crescente ou decrescente.

- Se $a > 0$, o gráfico de $f(x) = ax + b$ é uma reta crescente. Observe a figura a seguir.



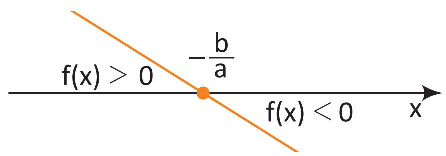
Assim, temos que:

Para $x < -\frac{b}{a}$, temos $f(x) < 0$.

Para $x > -\frac{b}{a}$, temos $f(x) > 0$.

Para $x = -\frac{b}{a}$, temos $f(x) = 0$.

- Se $a < 0$, o gráfico de $f(x) = ax + b$ é uma reta decrescente. Observe a figura a seguir.



Assim, temos que:

Para $x < -\frac{b}{a}$, temos $f(x) > 0$.

Para $x > -\frac{b}{a}$, temos $f(x) < 0$.

Para $x = -\frac{b}{a}$, temos $f(x) = 0$.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Dada a função afim $f(x) = 2x - 13$, determine:

A O valor de f(5).

B A expressão de $f(x + 3)$.

C O valor de x para que $f(x) = 7$.

Resolução:

A *$f(5) = 2.5 - 13 = 10 - 13 \therefore f(5) = -3$*

B *$f(x + 3) = 2.(x + 3) - 13 \Rightarrow f(x + 3) = 2x + 6 - 13 \quad \therefore f(x + 3) = 2x - 7$*

C *$f(x) = 2x - 13 \Rightarrow 2x - 13 = 7 \Rightarrow 2x = 20 \therefore x = 10$*

02| O órgão responsável pela conservação dos rios e lagos de uma cidade detectou que certa companhia estava poluindo o Rio das Almas. Logo, multou-a em R$ 15.000,00, mais R$ 200,00 por dia até que a companhia se ajustasse às normas que regulamentam os índices de poluição.

Nessas condições, determine:

A A lei matemática que fornece o valor P, em reais, pago pela companhia em função do número x de dias que a mesma esteve fora das referidas normas.

B O valor da multa paga por um período de 20 dias.

C O número de dias correspondente a uma multa de R$ 30.000,00.

Resolução:

A *A lei é dada por $P(x) = 15.000 + 200x$.*

B *$P(20) = 15.000 + 200.20 = 15.000 + 4.000$*

$P(20) = 19.000$ reais.

C *$P(x) = 15.000 + 200x = 30.000$*

$200x = 15.000 \therefore x = 75$ dias.

03| Determine os valores numéricos de a e b na função afim $f(x) = ax + b$, sabendo-se que $f(-1) = -12$ e $f(2) = 3$.

Resolução:

Na função $f(x) = ax + b$, temos que:

- *$f(-1) = a.(-1) + b = -12 \Rightarrow -a + b = -12$.*
- *$f(2) = a.2 + b = 3 \Rightarrow 2a + b = 3$.*

Assim, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -a + b = -12 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$$

Subtraindo as equações membro a membro, temos:

$2a + b - (-a + b) = 3 - (-12) \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$.

Substituindo $a = 5$ na 1ª equação, temos:

$-5 + b = -12 \Rightarrow b = -7$.

Portanto, $a = 5$ e $b = -7$.

04| Determine as coordenadas do ponto de intersecção do gráfico da função $f(x) = -2x + 18$ com o eixo das abscissas.

Resolução:

Para obter as coordenadas desse ponto, basta fazer $f(x) = 0$.

$-2x + 18 = 0 \Rightarrow x = 9$

Portanto, as coordenadas são $x = 9$ e $y = 0$.

05| Uma loja de materiais escolares vende 31 mochilas da marca KB por mês a R$ 80,00. Seu proprietário notou que, para cada R$ 2,00 de desconto, eram vendidas 5 mochilas a mais. Nessas condições, determine a lei de formação que relaciona a quantidade y de mochilas vendidas em função do seu preço x.

Resolução:

Se a cada desconto de R$ 2,00 a quantidade de mochilas vendidas aumenta em 5, então a razão entre variação da quantidade vendida y e a variação do preço de venda x é constante. Logo, a lei de formação é da forma $y = ax + b$. Daí, temos que:

Para $x = 80$, temos que $y = 31$.

Logo, $80a + b = 31$.

Para $x = 78$, temos que $y = 36$.

Logo, $78a + b = 36$.

Assim, obtemos seguinte sistema:

$$\begin{cases} 80a + b = 31 \\ 78a + b = 36 \end{cases}$$

Subtraindo as equações membro a membro, temos:

$78a + b - (80a + b) = 36 - 31 \Rightarrow -2a = 5 \Rightarrow a = -2,5$

Substituindo $a = -2,5$ na 1ª equação, temos:

$80.(-2,5) + b = 31 \Rightarrow b = 231$

Portanto, a lei de formação é $y = -2,5x + 231$.

OBSERVAÇÃO:

- *Poderíamos ter obtido o coeficiente angular (taxa de variação) através da razão entre a variação da quantidade vendida e a variação do preço de venda das mochilas. Observe a seguir:*

$$a = \frac{36 - 31}{78 - 80} = -2,5$$

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| Considerando a função afim $f(x) = ax + b$, tal que:

- $f(1) - f(0) = 1$
- $f(0) + f(-1) = 2$

Determine:

A Os valores numéricos de a e b.

B A raiz de f(x).

02| Determine o valor de m para que o gráfico da função $f(x) = (3m - 4)x + 6$ seja:

A Uma reta decrescente.

B Uma reta constante.

03| Determine os valores numéricos de a e b para que os gráficos das funções $f(x) = ax + 1$ e $g(x) = bx + 4$ se interceptem no ponto P(1, 6).

04| **FGV** Uma locadora A de automóveis cobra R$ 90,00 por dia de aluguel de certo carro. Outra locadora B cobra pelo mesmo modelo de carro um valor fixo de R$ 210,00 mais R$ 80,00 por dia de aluguel. Seja n o número de dias que um cliente pretende alugar este carro.

A Para que valores de n é preferível a empresa A?

B Qual deveria ser o valor fixo cobrado pela locadora B, para que B fosse preferível para $n > 27$ dias?

05| **UEL** *ViajeBem* é uma empresa de aluguel de veículos de passeio que cobra uma tarifa diária de R$ 160,00 mais R$ 1,50 por quilômetro percorrido, em carros de categoria A. *AluCar* é uma outra empresa que cobra uma tarifa diária de R$ 146,00 mais R$ 2,00 por quilômetro percorrido, para a mesma categoria de carros.

A Represente graficamente, em um mesmo plano cartesiano, as funções que determinam as tarifas diárias cobradas pelas duas empresas de carros da categoria A que percorrem, no máximo, 70 quilômetros.

B Determine a quantidade de quilômetros percorridos para a qual o valor cobrado é o mesmo. Justifique sua resposta apresentando os cálculos realizados.

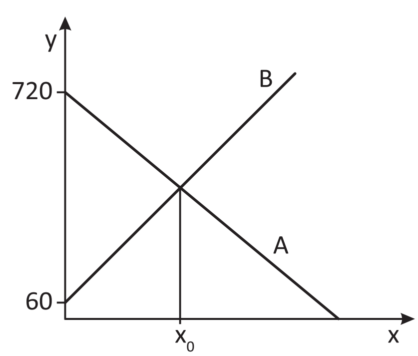
06| **FGV** A quantidade de cópias vendidas de cada edição de uma revista jurídica é função linear do número de matérias que abordam julgamentos de casos com ampla repercussão pública. Uma edição com quatro matérias desse tipo vendeu 33 mil exemplares, enquanto que outra contendo sete matérias que abordavam aqueles julgamentos vendeu 57 mil exemplares.

A Quantos exemplares da revista seriam vendidos, caso fosse publicada uma edição sem matéria alguma que abordasse julgamento de casos com ampla repercussão pública?

B Represente graficamente, no plano cartesiano, a função da quantidade (Y) de exemplares vendidos por edição, pelo número (X) de matérias que abordem julgamentos de casos com ampla repercussão pública.

C Suponha que cada exemplar da revista seja vendido a R$ 20,00. Determine qual será o faturamento, por edição, em função do número de matérias que abordem julgamentos de casos com ampla repercussão pública.

07| UERJ O reservatório A perde água a uma taxa constante de 10 litros por hora, enquanto o reservatório B ganha água a uma taxa constante de 12 litros por hora. No gráfico, estão representados, no eixo y, os volumes, em litros, da água contida em cada um dos reservatórios, em função do tempo, em horas, representado no eixo x.



Determine o tempo x_0, em horas, indicado no gráfico.

08| UNICAMP A numeração dos calçados obedece a padrões distintos, conforme o país. No Brasil, essa numeração varia de um em um, e vai de 33 a 45, para adultos. Nos Estados Unidos a numeração varia de meio em meio, e vai de 3,5 a 14 para homens e de 5 a 15,5 para mulheres.

A Considere a tabela abaixo.

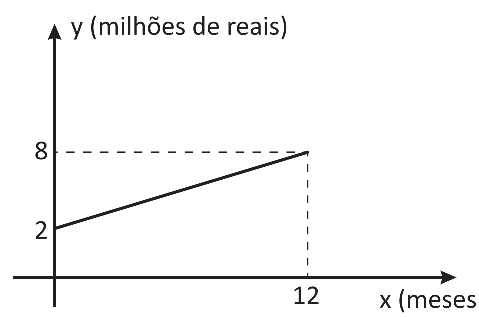
Numeração brasileira (t)	Comprimento do calçado (x)
35	23,8 cm
42	27,3 cm

Suponha que as grandezas estão relacionadas por funções afins $t(x) = ax + b$ para a numeração brasileira e $x(t) = ct + d$ para o comprimento do calçado. Encontre os valores dos parâmetros a e b da expressão que permite obter a numeração dos calçados brasileiros em termos do comprimento, **ou** os valores dos parâmetros c e d da expressão que fornece o comprimento em termos da numeração.

B A numeração dos calçados femininos nos Estados Unidos pode ser estabelecida de maneira aproximada pela função real f definida por $f(x) = 5(x - 20) / 3$, em que x é o comprimento do calçado em cm. Sabendo que a numeração dos calçados n_k forma uma progressão aritmética de razão 0,5 e primeiro termo $n_1 = 5$, em que $n_k = f(c_k)$, com k natural, calcule o comprimento c_5.

09| UEG Uma estudante oferece serviços de tradução de textos em língua inglesa. O preço a ser pago pela tradução inclui uma parcela fixa de R$ 20,00 mais R$ 3,00 por página traduzida. Em determinado dia, ela traduziu um texto e recebeu R$ 80,00 pelo serviço Calcule a quantidade de páginas que foi traduzida.

10| UFJF Uma construtora, para construir o novo prédio da biblioteca de uma universidade, cobra um valor fixo para iniciar as obras e mais um valor, que aumenta de acordo com o passar dos meses da obra. O gráfico abaixo descreve o custo da obra, em milhões de reais, em função do número de meses utilizados para a construção da obra.



A Obtenha a lei $y = f(x)$, para $x \geq 0$ que determina o gráfico.

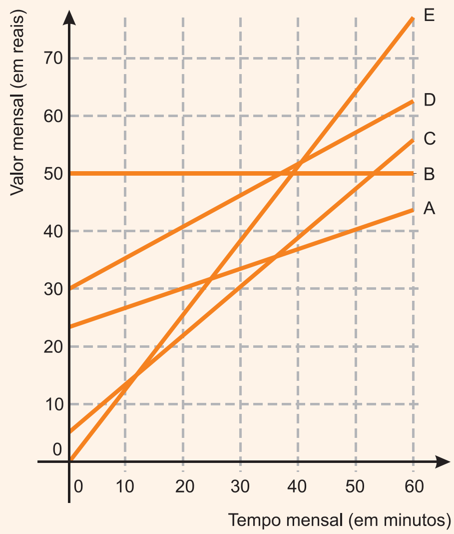
B Determine o valor inicial cobrado pela construtora para a construção do prédio da biblioteca.

C Qual será o custo total da obra, sabendo que a construção demorou 10 meses para ser finalizada?

T ENEM E VESTIBULARES

01| **ENEM** No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular.

Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

- **A** A
- **B** B
- **C** C
- **D** D
- **E** E

02| **ENEM** As curvas de oferta e de demanda de um produto representam, respectivamente, as quantidades que vendedores e consumidores estão dispostos a comercializar em função do preço do produto. Em alguns casos, essas curvas podem ser representadas por retas. Suponha que as quantidades de oferta e de demanda de um produto sejam, respectivamente, representadas pelas equações:

$QO = -20 + 4P$

$QD = 46 - 2P$

em que QO é quantidade de oferta, QD é a quantidade de demanda e P é o preço do produto.

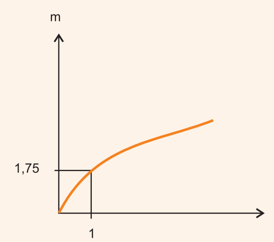
A partir dessas equações, de oferta e de demanda, os economistas encontram o preço de equilíbrio de mercado, ou seja, quando QO e QD se igualam.

Para a situação descrita, qual o valor do preço de equilíbrio?

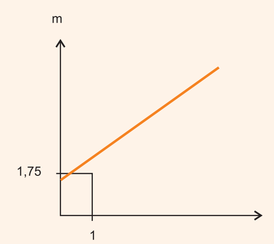
- **A** 5
- **B** 11
- **C** 13
- **D** 23
- **E** 33

03| **ENEM** As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma. Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é

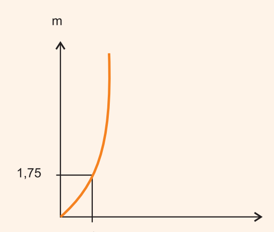
A



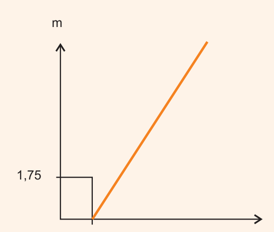
B



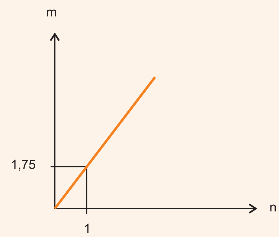
C



D



E



04| **ENEM** O prefeito de uma cidade deseja construir uma rodovia para dar acesso a outro município. Para isso, foi aberta uma licitação na qual concorreram duas empresas. A primeira cobrou R$ 100.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 350.000,00, enquanto a segunda cobrou R$ 120.000,00 por km construído (n), acrescidos de um valor fixo de R$ 150.000,00. As duas empresas apresentam o mesmo padrão de qualidade dos serviços prestados, mas apenas uma delas poderá ser contratada. Do ponto de vista econômico, qual equação possibilitaria encontrar a extensão da rodovia que tornaria indiferente para a prefeitura escolher qualquer uma das propostas apresentadas?

- **A** $100n + 350 = 120n + 150$
- **B** $100n + 150 = 120n + 350$
- **C** $100(n+350) = 120(n+150)$
- **D** $100(n + 350.000) = 120(n + 150.000)$
- **E** $350(n+100.000) = 150(n + 120.000)$

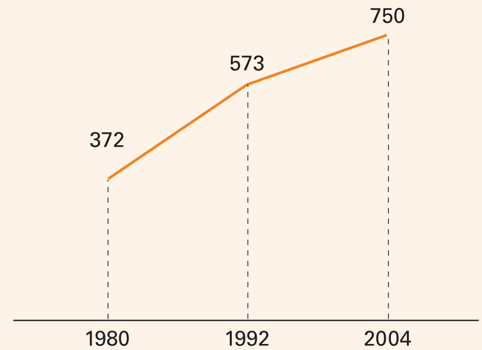
05| **ENEM** O saldo de contratações no mercado formal no setor varejista da região metropolitana de São Paulo registrou alta. Comparando as contratações deste setor no mês de fevereiro com as de janeiro deste ano, houve incremento de 4.300 vagas no setor, totalizando 880.605 trabalhadores com carteira assinada.

Disponível em: http://www.folha.uol.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Suponha que o incremento de trabalhadores no setor varejista seja sempre o mesmo nos seis primeiros meses do ano. Considerando-se que y e x representam, respectivamente, as quantidades de trabalhadores no setor varejista e os meses, janeiro sendo o primeiro, fevereiro, o segundo, e assim por diante, a expressão algébrica que relaciona essas quantidades nesses meses é

- **A** $y = 4300x$
- **B** $y = 884\ 905x$
- **C** $y = 872\ 005 + 4300\ x$
- **D** $y = 876\ 305 + 4300x$
- **E** $y = 880\ 605 + 4300x$

06| **ENEM** O gráfico mostra o número de favelas no município do Rio de Janeiro entre 1980 e 2004, considerando que a variação nesse número entre os anos considerados é linear.



Favela Tem Memória. Época. Nº 621, 12 abr. 2010 (adaptado)

Se o padrão na variação do período 2004/2010 se mantiver nos próximos 6 anos, e sabendo que o número de favelas em 2010 e 968, então o número de favelas em 2016 será

- **A** menor que 1150.
- **B** 218 unidades maior que em 2004.
- **C** maior que 1150 e menor que 1200.
- **D** 177 unidades maior que em 2010.
- **E** maior que 1200.

07| **ENEM** Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura a seguir. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.

O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

número de bolas (x)	nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br. Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

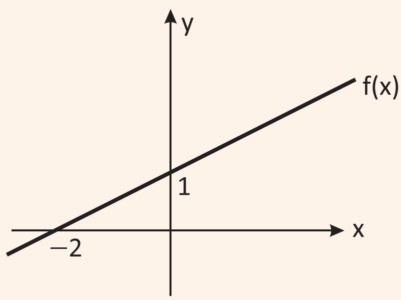
Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)?

- **A** $y = 30x$.
- **B** $y = 25x + 20,2$.
- **C** $y = 1,27x$.
- **D** $y = 0,7x$.
- **E** $y = 0,07x + 6$.

08| FGV Uma fábrica de panelas opera com um custo fixo mensal de R\$ 9 800,00 e um custo variável por panela de R\$ 45,00. Cada panela é vendida por R\$ 65,00. Seja x a quantidade que deve ser produzida e vendida mensalmente para que o lucro mensal seja igual a 20% da receita. A soma dos algarismos de x é:

A) 2
B) 3
C) 4
D) 5
E) 6

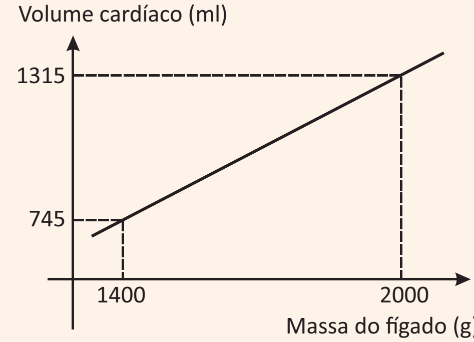
09| ESPCEX Na figura abaixo está representado o gráfico de uma função real do 1º grau f(x).



A expressão algébrica que define a função inversa de f(x) é

A) $y = \frac{x}{2} + 1$
B) $y = x + \frac{1}{2}$
C) $y = 2x - 2$
D) $y = -2x + 2$
E) $y = 2x + 2$

10| UEPA O treinamento físico, na dependência da qualidade e da quantidade de esforço realizado, provoca, ao longo do tempo, aumento do peso do fígado e do volume do coração. De acordo com especialistas, o fígado de uma pessoa treinada tem maior capacidade de armazenar glicogênio, substância utilizada no metabolismo energético durante esforços de longa duração. De acordo com dados experimentais realizados por Thörner e Dummler (1996), existe uma relação linear entre a massa hepática e o volume cardíaco de um indivíduo fisicamente treinado. Nesse sentido, essa relação linear pode ser expressa por $y = ax + b$, onde "y" representa o volume cardíaco em mililitros (ml) e "x" representa a massa do fígado em gramas (g). A partir da leitura do gráfico abaixo, afirma-se que a lei de formação linear que descreve a relação entre o volume cardíaco e a massa do fígado de uma pessoa treinada é:



(fonte: Cálculo Ciências Médicas e Biológicas, Editora Harbra ltda, São Paulo, 1988 – Texto Adaptado)

A) $y = 0{,}91x - 585$
B) $y = 0{,}92x + 585$
C) $y = -0{,}93x - 585$
D) $y = -0{,}94x + 585$
E) $y = 0{,}95x - 585$

11| FGV O gráfico de uma função polinomial do primeiro grau passa pelos pontos de coordenadas (x, y) dados abaixo.

x	0	m	6	7
y	5	8	14	k

Podemos concluir que o valor de k + m é:

A) 15,5
B) 16,5
C) 17,5
D) 18,5
E) 19,5

12| ENEM Em fevereiro, o governo da Cidade do México, metrópole com uma das maiores frotas de automóveis do mundo, passou a oferecer à população bicicletas como opção de transporte. Por uma anuidade de 24 dólares, os usuários têm direito a 30 minutos de uso livre por dia. O ciclista pode retirar em uma estação e devolver em qualquer outra e, se quiser estender a pedalada, paga 3 dólares por hora extra.

Revista Exame. 21 abr. 2010.

A expressão que relaciona o valor f pago pela utilização da bicicleta por um ano, quando se utilizam x horas extras nesse período é

A) $f(x) = 3x$
B) $f(x) = 24$
C) $f(x) = 27$
D) $f(x) = 3x + 24$
E) $f(x) = 24x + 3$

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Uma função f: IR → IR é chamada de função polinomial do 2º grau ou função quadrática se, e somente se, for expressa pela seguinte lei de formação.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ com } a \in IR^*, b \in IR \text{ e } c \in IR$$

Assim, são exemplos de funções polinomiais do 2º grau ou função quadrática:

- $f(x) = 2x^2 - 9x + 6$, com $a = 2$, $b = -9$ e $c = 6$
- $f(x) = -x^2 + 5$, com $a = -1$ e $b = 0$ e $c = 5$

OBSERVAÇÃO:

- Os coeficientes a e c são chamados de coeficiente dominante e termo independente, respectivamente.

RAÍZES OU ZEROS

De maneira geral, raízes ou zeros de uma função f(x) são os valores de x que tornam $f(x) = 0$. Assim, para uma função expressa por $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

- $f(x) = ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = -c$

  Dividindo todos os termos por $a \neq 0$, temos:

- $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

  Adicionando $\frac{b^2}{4a^2}$ em ambos os lados, temos:

- $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

  Como o 1º membro da equação é um trinômio quadrado perfeito, temos:

- $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$

  Isolando a variável x, temos:

- $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Fazendo $\Delta = b^2 - 4ac$, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Essa fórmula é conhecida como fórmula de *Bhaskara* em homenagem ao matemático indiano *Bhaskara Akaria.*

OBSERVAÇÃO:

Sendo Δ o discriminante da equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

- Para $\Delta > 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes reais e distintas.
- Para $\Delta = 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui duas raízes reais e iguais.
- Para $\Delta < 0$, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ não possui raízes reais.

SOMA E PRODUTO DAS RAÍZES

Chamando de x' e x" as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, temos que:

A soma dessas raízes é dada por $S = -\frac{b}{a}$, observe:

- $S = x' + x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$

  O produto dessas raízes é dado por $P = \dfrac{c}{a}$, observe:

- $P = x' \, . \, x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \, . \left(\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \dfrac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{(2a)^2}$

- $P = \dfrac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \dfrac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

FORMA FATORADA

A função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ também pode ser expressa na forma fatorada (forma de produto). Assim, sendo x' e x" suas raízes ou zeros, temos que:

Colocando $a \neq 0$ em evidência em $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

- $f(x) = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - \left(-\dfrac{b}{a}\right)x + \dfrac{c}{a}\right]$

  Utilizando a soma e o produto das raízes, temos:

- $f(x) = a[x^2 - (x' + x'')x + x'.x'']$

  Desenvolvendo, temos:

- $f(x) = a(x^2 - x'x - x''x + x'.x'')$

  Fatorando por agrupamento, temos:

- $f(x) = a[x(x - x') - x''(x - x')]$

  Finalizando, temos:

$$\boxed{f(x) = a(x - x').(x - x'')}$$

Essa é a forma fatorada de uma função polinomial do 2º grau ou função quadrática.

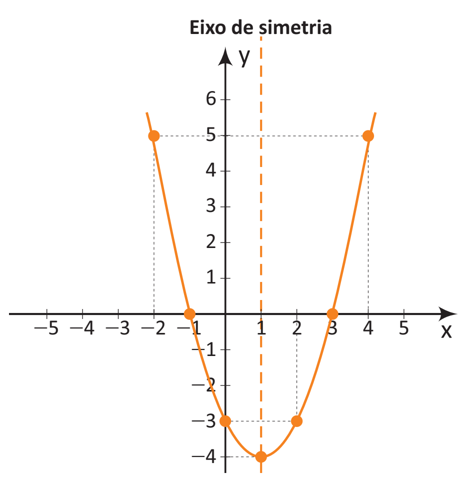
GRÁFICO CARTESIANO

O gráfico cartesiano de uma função polinomial do 2º grau é uma parábola cujo eixo de simetria (reta que divide a parábola em duas partes que se coincidem ao serem sobrepostas) é paralelo ou coincidente com o eixo das ordenadas.

Assim, para esboçar esse gráfico, pode-se montar uma tabela numérica escolhendo alguns valores arbitrários para x (no mínimo três) e calculando os correspondentes valores de y.

Para a função $f(x) = x^2 - 2x - 3$, temos que:

X	Y
−2	5
−1	0
0	−3
1	−4
2	−3
3	0
4	5

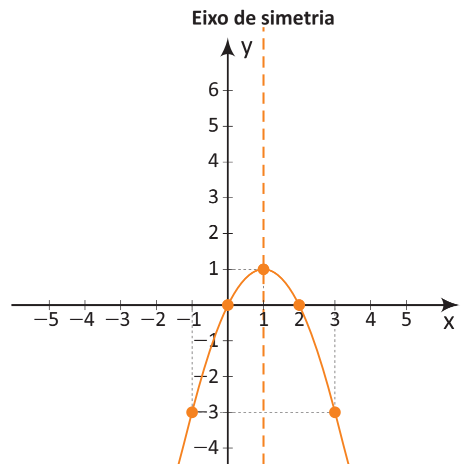


A partir desse gráfico, podemos concluir que:

- O termo independente ($c = -3$) é a ordenada do ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas.
- As raízes ($x' = -1$ e $x'' = 3$) são abscissas dos pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo das abscissas.
- O coeficiente dominante ($a = 1$) é positivo. Assim, o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para cima.
- A imagem da função f é $Im = \{y \in IR \mid y \geq -4\}$.

Para a função $f(x) = -x^2 + 2x$, temos que:

X	Y
−1	−3
0	0
1	1
2	0
3	−3



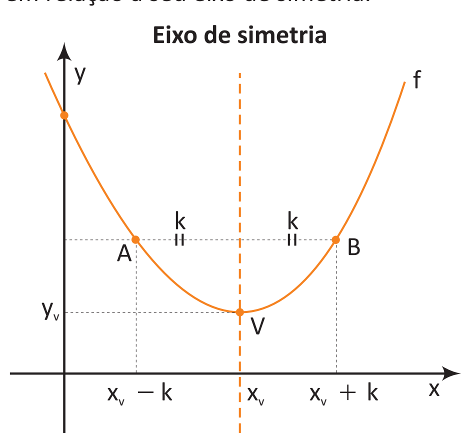
A partir desse gráfico, podemos concluir que:

- O termo independente ($c = 0$) é a ordenada do ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo das ordenadas.
- As raízes ($x' = 0$ e $x'' = 2$) são abscissas dos pontos de intersecção do gráfico de f com o eixo das abscissas.
- O coeficiente dominante ($a = -1$) é negativo. Assim, o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo.
- A imagem da função f é $Im = \{y \in IR \mid y \leq 1\}$.

COORDENADAS DO VÉRTICE

Sabe-se que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola cujo eixo de simetria é paralelo ou coincidente com o eixo das ordenadas.

Assim, para determinar as coordenadas do vértice da parábola que representa graficamente a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, deve-se tomar dois pontos A e B simétricos em relação a seu eixo de simetria.



De acordo com a ilustração, temos que:

- $x_A = x_v - k$ e $x_B = x_v + k$, para todo k real positivo.
- $f(x_A) = f(x_B) \Rightarrow f(x_v - k) = f(x_v + k)$.

Substituindo em $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos que:

- $a(x_v - k)^2 + b(x_v - k) + c = a(x_v + k)^2 + b(x_v + k) + c$

Desenvolvendo os quadrados e, em seguida, reduzindo os termos semelhantes, temos que:

- $-4abx_v = 2bk \Rightarrow x_v = -\dfrac{b}{2a}$

  Para se obter y_v, basta substituir x_v na função f. Assim, temos que:

- $y_v = f(x_v) = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c$
- $y_v = f(x_v) = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$
- $y_v = f(x_v) = \dfrac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$

  Portanto, o vértice da parábola é o ponto V dado por:

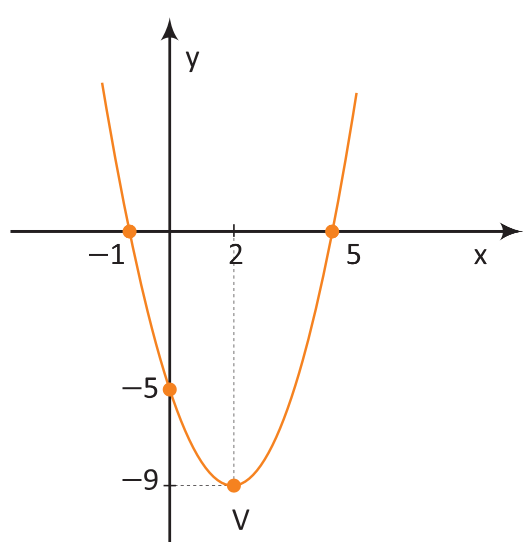
$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

OBSERVAÇÃO:

- Também pode-se esboçar o gráfico de uma função quadrática analisando sua concavidade e escolhendo alguns pontos convenientes. As intersecções da parábola com o eixo das abscissas (raízes reais quando houver), com o eixo das ordenadas (termo independente) e as coordenadas do vértice (ponto de ordenada máxima ou mínima).

Por exemplo:

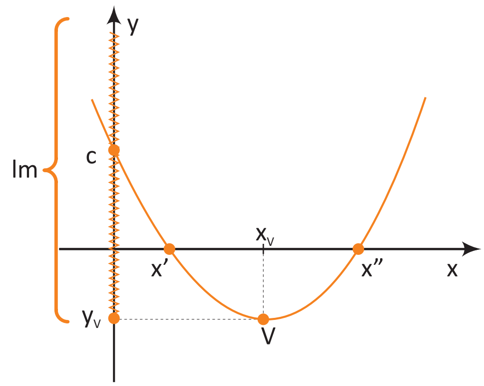
- Para a função $f(x) = x^2 - 4x - 5$, temos que:
- Termo independente: $c = -5$.
- Raízes: $x' = 5$ e $x'' = -1$
- $x_v = -\dfrac{-4}{2.1} = 2$
- $y_v = \dfrac{(-4)^2 - 4.1(-5)}{4.1} = -9$
- Assim, V(2,−9).



IMAGEM, CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO

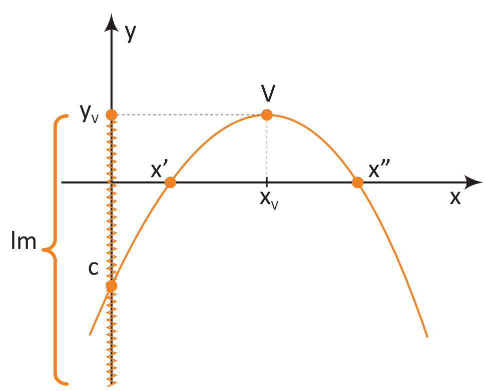
Sabe-se que o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima ($a > 0$) ou com a concavidade voltada para baixo ($a < 0$). Assim, deve-se considerar dois casos.

- Para $a > 0$, temos que:



Analisando tal gráfico, temos que:

- A função tem um valor mínimo dado por y_V, para $x = x_V$.
- A função é crescente para todo $x \geq x_V$.
- A função é decrescente para todo $x \leq x_V$.
- A imagem de f é dada por $Im = \{y \in IR \mid y \geq y_V\}$, pois y_V é o menor elemento do conjunto imagem.
- Para $a < 0$, temos que:



Analisando tal gráfico, temos que:

- A função tem um valor máximo dado por y_V, para $x = x_V$.
- A função é crescente para todo $x \leq x_V$.
- A função é decrescente para todo $x \geq x_V$.
- A imagem de f é dada por $Im = \{y \in IR \mid y \leq y_V\}$, pois y_V é o maior elemento do conjunto imagem.

OBSERVAÇÕES:

- Quando a parábola tem a concavidade voltada para cima, dizemos que a ordenada do vértice, dado por y_V, é o valor mínimo de f.
- Quando a parábola tem a concavidade voltada para baixo, dizemos que a ordenada do vértice, dado por y_V, é o valor máximo de f.
- A abscissa do vértice, dado por x_V, também pode ser determinado através da média aritmética das raízes, ou seja, $x_V = \dfrac{x' + x''}{2}$

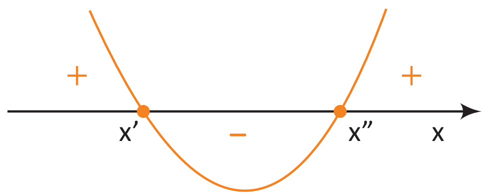
ESTUDO DO SINAL

Estudar o sinal de uma função f(x) significa determinar os valores de x para os quais f(x) é positivo, negativo ou zero.

Assim, para estudar o sinal de uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, deve-se inicialmente determinar suas raízes ou zeros e, em seguida, esboçar o seu gráfico levando-se em conta os sinais do discriminante (Δ) e do coeficiente dominante (a).

Para melhor compreensão, divide-se esse estudo em seis possíveis casos.

- **1º Caso:** $\Delta > 0$ e $a > 0$



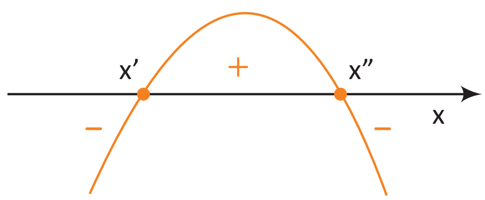
Assim, temos que:

Para $x = x'$ ou $x = x'' \Rightarrow f(x) = 0$.

Para $x < x'$ ou $x > x'' \Rightarrow f(x) > 0$.

Para $x' < x < x'' \Rightarrow f(x) < 0$.

- **2º Caso:** $\Delta > 0$ e $a < 0$



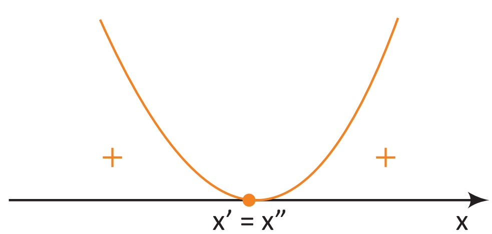
Assim, temos que:

Para $x = x'$ ou $x = x'' \Rightarrow f(x) = 0$.

Para $x < x'$ ou $x > x'' \Rightarrow f(x) < 0$.

Para $x' < x < x'' \Rightarrow f(x) > 0$.

- **3º Caso:** $\Delta = 0$ e $a > 0$

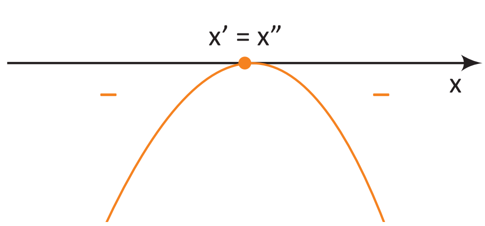


Assim, temos que:

Para $x = x' = x'' \Rightarrow f(x) = 0$.

Para $x \neq x' \Rightarrow f(x) > 0$.

- **4º Caso:** $\Delta = 0$ e $a < 0$.

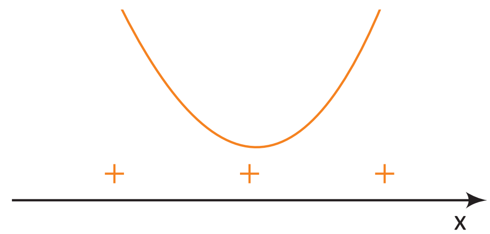


Assim, temos que:

Para x = x' = x" ⇒ f(x) = 0.

Para x ≠ x' ⇒ f(x) < 0.

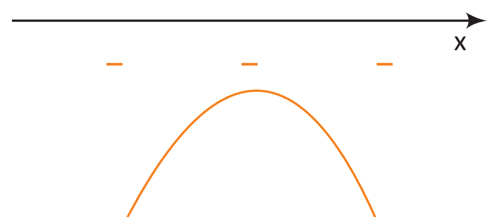
- **5º Caso:** $\Delta < 0$ e $a > 0$.



Assim, temos que:

Para $\forall$ x $\in$ IR, f(x) > 0.

- **6º Caso:** $\Delta < 0$ e $a < 0$.



Assim, temos que:

Para $\forall$ x $\in$ IR, f(x) < 0.

R EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01| Uma companhia aluga um ônibus de 40 lugares para que um grupo de alunos faça uma excursão ao Nordeste segundo as seguintes condições:

- Cada passageiro paga R$ 8,00 se todos os 40 lugares forem ocupados.
- Cada passageiro paga um adicional de R$ 2,00 por lugar não ocupado.

Nessas condições, determine:

A A lei matemática que fornece o valor P, em reais, recebido pela companhia de ônibus em função do número x de lugares não ocupados.

B O valor pago à companhia se 10 lugares não forem ocupados.

Resolução:

A *Sendo x o número de lugares não ocupados, cada um dos (40 – x) alunos que vão à excursão pagarão (8 + 2x) reais. Assim, o valor P, em função de x, recebido pela companhia é dado por:*

$$P(x) = (40 - x).(8 + 2x) \therefore P(x) = -2x^2 + 72x + 320$$

B $P(10) = -2.10^2 + 72.10 + 320 = 840$ *reais.*

02| Para quais valores reais de m a função quadrática $f(x) = x^2 - 3x - 2m$ tem duas raízes reais distintas?

Resolução:

Para que uma função quadrática tenha duas raízes reais e distintas, seu discriminante deve ser maior que zero, ou seja, $\Delta > 0$. Assim, temos que:

$$\Delta > 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4.1.(-2m) > 0 \Rightarrow 9 + 8m > 0 \Rightarrow m > -\frac{9}{8}$$

03| Determine o valor de m na equação polinomial dada por $x^2 + mx - 28 = 0$ para que a soma dos inversos de suas raízes seja igual a $\frac{8}{7}$.

Resolução:

Sendo x' e x" as raízes de $x^2 + mx - 28 = 0$, temos as seguintes relações:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{m}{1} \Rightarrow x' + x'' = -m$$

$$x'.x'' = \frac{c}{a} = \frac{-28}{1} \Rightarrow x'.x'' = -28$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{8}{7} \Rightarrow \frac{x' + x''}{x'.x''} = \frac{8}{7}$$

$$\frac{-m}{-28} = \frac{8}{7} \therefore m = 32$$

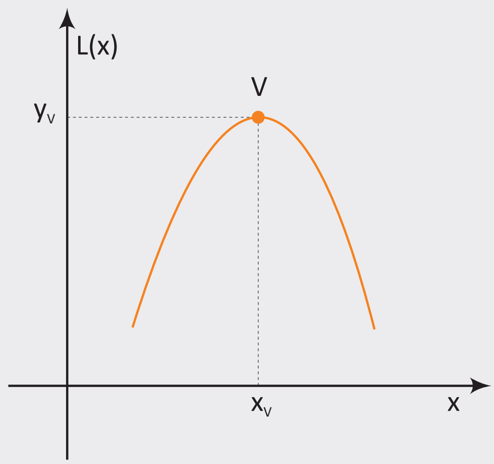
04| O lucro mensal, em reais, de uma confecção é dado pela função quadrática $L(x) = -10x^2 + 800x - 200$, sendo x o número de unidades produzidas e vendidas mensalmente de um produto P. Nessas condições, determine.

A O número de unidades produzidas e vendidas do produto P para se obter o maior lucro possível

B O maior lucro mensal possível na produção e venda do produto P.

Resolução:

Observe através do esboço do gráfico de L(x) que o valor de x que produz o lucro máximo é o x_v e que o lucro máximo é o y_v.



Assim, temos que:

A $x_v = -\dfrac{800}{2.(-10)} = 40$

Portanto, para se obter o lucro máximo, devem ser fabricadas e vendidas 40 unidades do produto P.

B $y_v = -\dfrac{800^2 - 4.(-10).(-200)}{4.(-10)} = 15.800$

Portanto, o lucro máximo na fabricação e venda do produto P é R$ 15.800,00.

05| Estude o sinal das seguintes funções quadráticas.

A $f(x) = x^2 - 3x - 10$

B $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

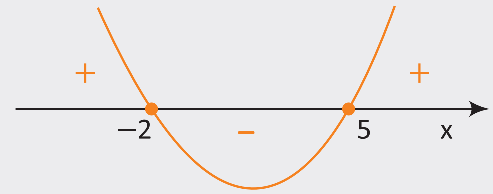
C $f(x) = x^2 - 2x + 3$

Resolução:

A $f(x) = x^2 - 3x + 10$

$x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow x' = 5 \text{ e } x'' = -2$

Como $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima. Logo, temos que:



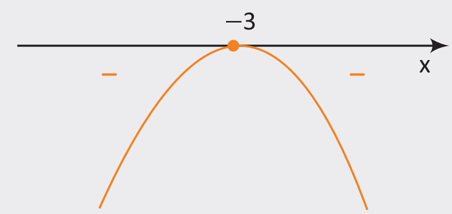
Portanto, temos que:

- *Para $x = -2$ ou $x = 5 \Rightarrow f(x) = 0$.*
- *Para $x < -2$ ou $x > 5 \Rightarrow f(x) > 0$.*
- *Para $-2 < x < 5 \Rightarrow f(x) < 0$.*

B $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

$-x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x' = x'' = -3$

Como $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo. Logo, temos que:



Portanto, temos que:

- *Para $x = -3 \Rightarrow f(x) = 0$.*
- *Para $x \neq -3 \Rightarrow f(x) < 0$.*

C $f(x) = x^2 - 2x + 3$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-2)^2 - 4.1.3 = -8 < 0$, *logo não existem raízes reais.*

Como $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima. Logo, temos que:

Portanto, temos que:

- *Para $\forall\, x \in IR$, $f(x) > 0$.*

F EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| O preço P, em reais, do ingresso de uma sessão do filme Brasileiros & Brasileiras relaciona-se com a quantidade x de pagantes através da lei $P = -0,3x + 90$. Nessas condições, responda os itens a seguir.

A Qual a receita, em reais, para 40 pagantes?

B Qual a lei matemática que define a receita R de uma sessão, em reais, em função da quantidade x de pagantes?

02| Um objeto é abandonado do topo de um prédio caindo na vertical até alcançar o chão. Sua altura H, em metros, em relação ao chão, após t segundos de queda, é dada pela função $H(t) = -4t^2 + 500$. Nessas condições, determine:

A A altura do prédio.

B A altura que o objeto se encontra após 3 segundos.

C O tempo necessário para o objeto alcançar o chão.

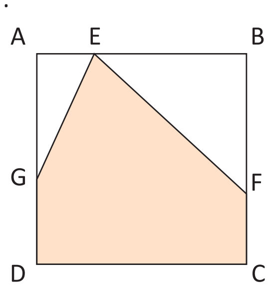
03| UNICAMP Durante um torneio paralímpico de arremesso de peso, um atleta teve seu arremesso filmado. Com base na gravação, descobriu-se a altura (y) do peso em função de sua distância horizontal (x), medida em relação ao ponto de lançamento. Alguns valores da distância e da altura são fornecidos na tabela abaixo. Seja $y(x) = ax^2 + bx + c$ a função que descreve a trajetória do peso.

Distância (m)	Altura (m)
1	2,0
2	2,7
3	3,2

A Determine os valores de a, b e c.

B Calcule a distância total alcançada pelo peso nesse arremesso.

04| Na figura a seguir, temos um quadrado ABCD de lado 6 cm. Desse quadrado são retirados os triângulos retângulos AEG e BEF.



Sendo $AE = x$ cm, $AG = 2x$ cm e $BF = 4$ cm, esboce o gráfico da área A do polígono CDGEF, em cm^2, em função da medida x, em cm, para $0 \leq x \leq 6$.

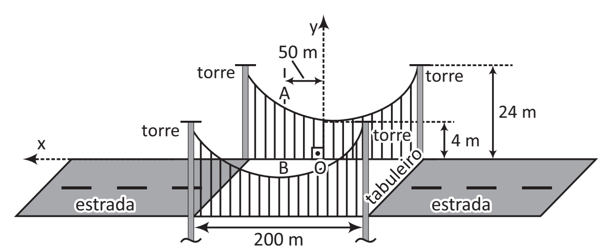
05| UFG Um homem-bala é lançado de um canhão e sua trajetória descreve uma parábola. Considerando que no instante do lançamento ($t = 0$) ele está a 2 metros do solo, 1 segundo após ele atinge a altura de 5 metros, e 2 segundos após o lançamento ele atinge o solo, pede-se:

A A equação h(t) da altura em relação ao tempo, descrita pela sua trajetória.

B O esboço do gráfico de h(t).

C Quais os instantes, após o lançamento, ele atinge $\frac{9}{2}$ metros?

06| UFMA Os cabos da ponte pênsil, indicada na figura abaixo, tomam a forma de arcos de parábola do segundo grau. As torres de suporte têm 24 m de altura e há um intervalo entre elas de 200 m. O ponto mais baixo de cada cabo fica a 4 m do leito da estrada. Considerando o plano horizontal do tabuleiro da ponte contendo o eixo dos x e o eixo de simetria da parábola como sendo o eixo dos y, perpendicular a x, determine o comprimento do elemento de sustentação BA, que liga verticalmente o cabo parabólico ao tabuleiro da ponte, situado a 50 m do eixo y.



07| UNB A trajetória de um projétil é dada pela função $f(x) = 10x - x^2$. Se a é a altura máxima atingida pelo projétil e b seu alcance máximo, encontre $\frac{ab}{5}$.

08| UFJF Um pesticida foi ministrado a uma população de insetos para testar sua eficiência. Ao proceder ao controle da variação em função do tempo, em semanas, concluiu-se que o tamanho da população é dado por:

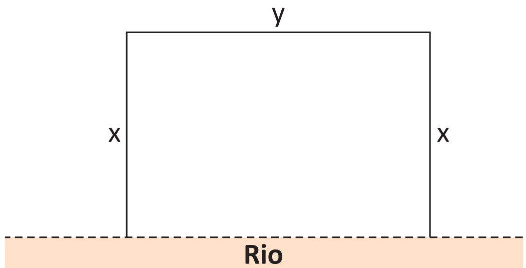
$$f(t) = -10t^2 + 20t + 100$$

A Determine o intervalo de tempo em que a população de insetos ainda cresce.

B Na ação do pesticida, existe algum momento em que a população de insetos é igual à população inicial? Quando?

C Entre quais semanas a população de insetos seria exterminada?

09| **UFG** Para a construção de uma pousada, deseja-se cercar três lados de um terreno situado às margens de um rio, de modo que ele fique com a forma retangular, conforme a figura abaixo.



Sabe-se que o metro linear da cerca paralela ao rio custa R$ 12,00, das cercas perpendiculares ao rio custam R$ 8,00 e que o proprietário irá gastar R$ 3.840,00 com a construção total da cerca. Nessas condições, construa o gráfico da função que representa a área do terreno, em função da dimensão *x*, e determine as dimensões do terreno para que a sua área seja máxima.

10| **FGV** Uma loja de departamentos compra cartuchos para uma determinada impressora jato de tinta a R$ 28,00 a unidade e prevê que, se cada cartucho for vendido a x reais, serão vendidos $200 - 2x$ cartuchos por mês.

A) Encontre uma fórmula que fornece o lucro mensal em função do preço de venda x de cada cartucho.

B) Estabeleça matematicamente o intervalo dos valores de x para os quais existe efetivamente lucro.

C) Para que o lucro seja máximo, qual deve ser o preço de venda x de cada cartucho?

D) Qual será o lucro máximo e quantos cartuchos serão vendidos mensalmente ao preço que maximiza esse lucro?

T ENEM E VESTIBULARES

01| **ENEM** Um professor, depois de corrigir as provas de sua turma, percebeu que várias questões estavam muito difíceis. Para compensar, decidiu utilizar uma função polinomial f, de grau menor que 3, para alterar as notas x da prova para notas $y = f(x)$, da seguinte maneira:

- A nota zero permanece zero.
- A nota 10 permanece 10.
- A nota 5 passa a ser 6.

A expressão da função $y = f(x)$ a ser utilizada pelo professor é:

A) $y = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{7}{5}x$

B) $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$

C) $y = \frac{1}{24}x^2 + \frac{7}{12}x$

D) $y = \frac{4}{5}x + 2$

E) $y = x$

02| **ENEM** A temperatura T de um forno (em graus centígrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento ($t = 0$) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$ com t em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39°.

Qual o tempo mínimo de espera, em minutos, após se desligar o forno, para que a porta possa ser aberta?

A) 19,0

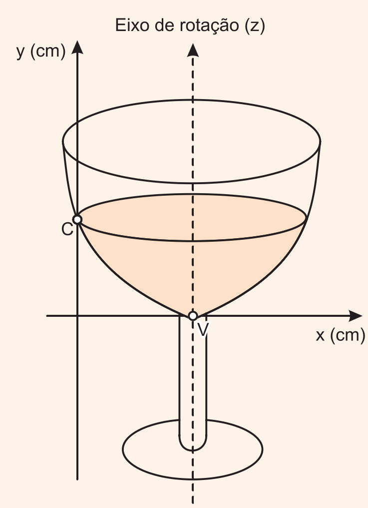
B) 19,8

C) 20,0

D) 38,0

E) 39,0

03| **ENEM** A parte interior de uma taça foi gerada pela rotação de uma parábola em torno de um eixo z, conforme mostra a figura.



A função real que expressa a parábola, no plano cartesiano da figura, é dada pela lei $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$ onde C é a medida da altura do líquido contido na taça, em centímetros. Sabe-se que o ponto V, na figura, representa o vértice da parábola, localizado sobre o eixo x.

Nessas condições, a altura do líquido contido na taça, em centímetros, é

A 1

B 2

C 4

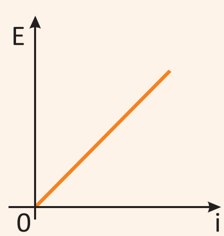
D 5

E 6

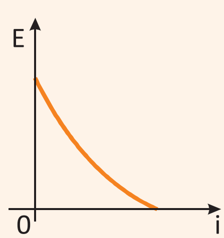
04| ENEM Existem no mercado chuveiros elétricos de diferentes potências, que representam consumos e custos diversos. A potência (P) de um chuveiro elétrico é dada pelo produto entre sua resistência elétrica (R) e o quadrado da corrente elétrica (i) que por ele circula. O consumo de energia elétrica (E), por sua vez, é diretamente proporcional à potência do aparelho.

Considerando as características apresentadas, qual dos gráficos a seguir representa a relação entre a energia consumida (E) por um chuveiro elétrico e a corrente elétrica (i) que circula por ele?

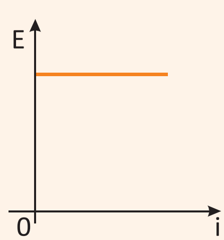
A



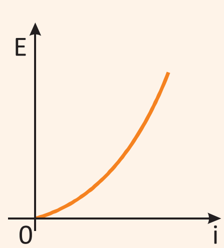
B



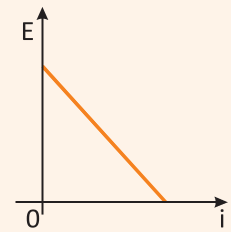
C



D



E



05| ENEM Um posto de combustível vende 10.000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10.200 litros.

Considerando x o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e V o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então a expressão que relaciona V e x é

A $V = 10.000 + 50x - x^2$.

B $V = 10.000 + 50x + x^2$.

C $V = 15.000 - 50x - x^2$.

D $V = 15.000 + 50x - x^2$.

E $V = 15.000 - 50x + x^2$.

06| ENEM Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

$R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, onde k é uma constante positiva característica do boato.

Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44.000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

A 11.000

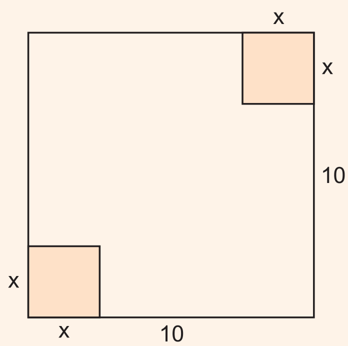
B 22.000

C 33.000

D 38.000

E 44.000

07| UEA A figura mostra um quadrado de lado igual a 10 m. A região assinalada é constituída de dois quadrados que não se intersecionam e cujos lados medem x metros. A área da região não assinalada pode ser obtida pela lei $A = 100 - 2x^2$.



Desse modo, quando x assumir o maior valor inteiro permitido, a área da região não assinalada será igual, em metros quadrados, a

- A) 84
- B) 36
- C) 48
- D) 68
- E) 64

08| PUC Sejam f e g funções reais dadas por $f(x) = 2 + x^2$ e $g(x) = 2 + x$.

Os valores de x tais que $f(x) = g(x)$ são:

- A) $x = 0$ ou $x = -1$
- B) $x = 0$ ou $x = 2$
- C) $x = 0$ ou $x = 1$
- D) $x = 2$ ou $x = -1$
- E) $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

09| UERN Uma artesã produz diversas peças de artesanato e as vende em uma feira no centro da cidade. Para um vaso, especialmente confeccionado em madeira, o lucro obtido em função da quantidade produzida e vendida x é representado por $f(x) = -x^2 + 50x$. Existe, porém, uma determinada quantidade em que o lucro obtido é o máximo possível e quantidades superiores produzidas e vendidas não geram mais lucro; ao contrário, começam a diminuí-lo, em função dos crescentes custos de produção. Para esse vaso, a quantidade máxima recomendada para sua produção e o lucro máximo que pode ser obtido são, respectivamente,

- A) 24 e R$480,00.
- B) 25 e R$625,00.
- C) 25 e R$650,00.
- D) 35 e R$735,00.

10| ULBRA Preocupados com o lucro da empresa VXY, os gestores contrataram um matemático para modelar o custo de produção de um dos seus produtos. O modelo criado pelo matemático segue a seguinte lei: $C = 15000 - 250n + n^2$, onde C representa o custo, em reais, para se produzirem n unidades do determinado produto. Quantas unidades deverão ser produzidas para se obter o custo mínimo?

- A) – 625
- B) 125
- C) 1245
- D) 625
- E) 315

11| UCS Uma dose de um medicamento foi administrada a um paciente por via intravenosa. Enquanto a dose estava sendo administrada, a quantidade do medicamento na corrente sanguínea crescia. Imediatamente após cessar essa administração, a quantidade do medicamento começou a decrescer.

Um modelo matemático simplificado para avaliar a quantidade q, em mg, do medicamento, na corrente sanguínea, t horas após iniciada a administração, é $q(t) = -t^2 + 7t + 60$.

Considerando esse modelo, a quantidade, em mg, do medicamento que havia na corrente sanguínea, ao ser iniciada a administração da dose e o tempo que durou a administração dessa dose, em horas, foram, respectivamente,

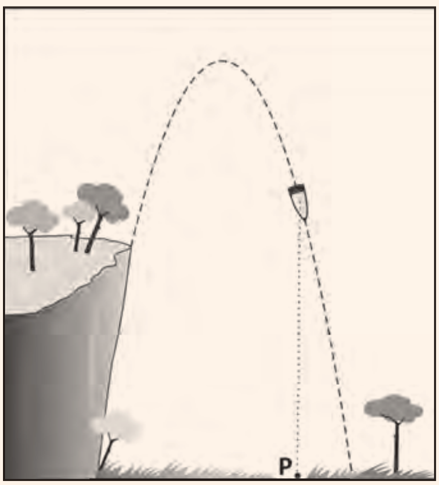
- A) 5 e 12.
- B) 0 e 12.
- C) 0 e 3,5.
- D) 60 e 12.
- E) 60 e 3,5.

12| ESPCEX Um fabricante de poltronas pode produzir cada peça ao custo de R$ 300,00. Se cada uma for vendida por x reais, este fabricante venderá por mês $(600 - x)$ unidades, em que $0 \leq x \leq 600$.

Assinale a alternativa que representa o número de unidades vendidas mensalmente que corresponde ao lucro máximo.

- A) 150
- B) 250
- C) 350
- D) 450
- E) 550

13| **FUVEST** A trajetória de um projétil, lançado da beira de um penhasco sobre um terreno plano e horizontal, é parte de uma parábola com eixo de simetria vertical, como ilustrado na figura abaixo. O ponto P sobre o terreno, pé da perpendicular traçada a partir do ponto ocupado pelo projétil, percorre 30 m desde o instante do lançamento até o instante em que o projétil atinge o solo. A altura máxima do projétil, de 200 m acima do terreno, é atingida no instante em que a distância percorrida por P, a partir do instante do lançamento, é de 10 m. Quantos metros acima do terreno estava o projétil quando foi lançado?



A) 60

B) 90

C) 120

D) 150

E) 180

14| **UFSM** A água é essencial para a vida e está presente na constituição de todos os alimentos. Em regiões com escassez de água, é comum a utilização de cisternas para a captação e armazenamento da água da chuva.

Ao esvaziar um tanque contendo água da chuva, a expressão

$$V(t) = -\frac{1}{43200}t^2 + 3$$

representa o volume (em m^3) de água presente no tanque no instante t (em minutos).

Qual é o tempo, em horas, necessário para que o tanque seja esvaziado?

A) 360

B) 180

C) 120

D) 6

E) 3

15| **ESPCEX** Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a

A) 4 lotes.

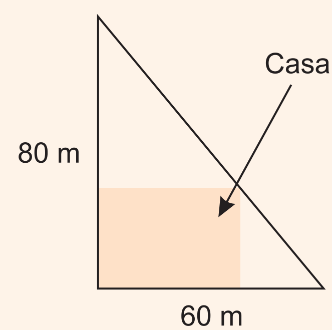
B) 5 lotes.

C) 6 lotes.

D) 7 lotes.

E) 8 lotes.

16| **UPE** Num terreno, na forma de triângulo retângulo, com catetos de medidas 60 metros e 80 metros, Sr. Pedro construiu uma casa retangular com a maior área possível, como na figura a seguir:



Qual é a medida da área do terreno destinado à construção da casa em metros quadrados?

A) 600

B) 800

C) 1 000

D) 1 200

E) 1 400

17| **ACAFE** O vazamento ocorrido em função de uma rachadura na estrutura da barragem de Campos Novos precisa ser estancado. Para consertá-la, os técnicos verificaram que o lago da barragem precisa ser esvaziado e estimaram que, quando da constatação da rachadura, a capacidade C de água no lago, em milhões de metros cúbicos, poderia ser calculada por $C(t) = -2t^2 - 12t + 110$ onde t é o tempo em horas.

Com base no texto, analise as afirmações:

I. A quantidade de água restante no lago, 4 horas depois de iniciado o vazamento, é de 30 milhões de metros cúbicos.

II. A capacidade desse lago, sabendo que estava completamente cheio no momento em que começou o vazamento, é de 110 milhões de metros cúbicos.

III. Os técnicos só poderão iniciar o conserto da rachadura quando o lago estiver vazio, isto é, 5 horas depois do início do vazamento.

IV. Depois de 3 horas de vazamento, o lago está com 50% de sua capacidade inicial.

Todas as afirmações corretas estão em:

A) I – II – III

B) I – III – IV

C) III – IV

D) I – II – III – IV

18| ENEM O proprietário de uma casa de espetáculos observou que, colocando o valor da entrada a R$10,00, sempre contava com 1.000 pessoas a cada apresentação, faturando R$10.000,00 com a venda dos ingressos. Entretanto, percebeu também que, a partir de R$10,00, a cada R$2,00 que ele aumentava no valor da entrada, recebia para os espetáculos 40 pessoas a menos.

Nessas condições, considerando P o número de pessoas presentes em um determinado dia e F o faturamento com a venda dos ingressos, a expressão que relaciona o faturamento em função do número de pessoas é dada por:

A) $F = \frac{-P^2}{20} + 60P$

B) $F = \frac{P^2}{20} - 60P$

C) $F = -P^2 + 1200P$

D) $F = \frac{-P^2}{20} + 60$

E) $F = -P^2 - 1220P$

19| FGV Uma única linha aérea oferece apenas um voo diário da cidade A para a cidade B. O número de passageiros y que comparecem diariamente para esse voo relaciona-se com o preço da passagem x, por meio de uma função polinomial do primeiro grau.

Quando o preço da passagem é R$ 200,00, comparecem 120 passageiros e, para cada aumento de R$ 10,00 no preço da passagem, há uma redução de 4 passageiros. Qual é o preço da passagem que maximiza a receita em cada voo?

A) R$ 220,00

B) R$ 230,00

C) R$ 240,00

D) R$ 250,00

E) R$ 260,00

20| ENEM Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variáveis. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a

A) 4

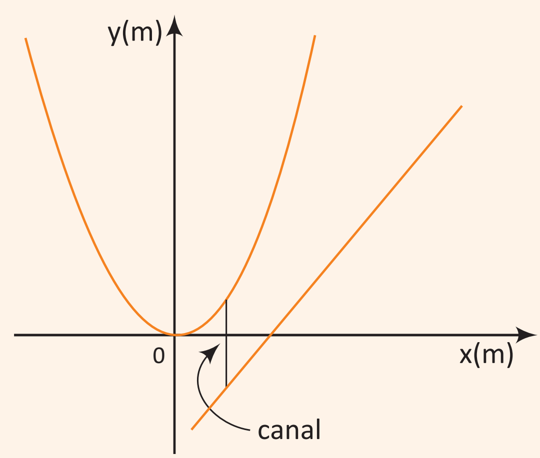
B) 6

C) 9

D) 10

E) 14

21| UNIFESP A figura representa, na escala 1:50, os trechos de dois rios: um descrito pela parábola $y = x^2$ e o outro pela reta $y = 2x - 5$.



De todos os possíveis canais retilíneos ligando os dois rios e construídos paralelamente ao eixo Oy, o de menor comprimento real, considerando a escala da figura, mede:

A) 200 m

B) 250 m

C) 300 m

D) 350 m

E) 400 m

FRENTE A

ANÁLISE COMBINATÓRIA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| 32
02| 56
03| 100
04| 96 e 90
05| 55
06| 21
07|
a) 126
b) 60
c) 121
08| 90
09|
a) 186
b) 20
10| 9
11|
a) 22
b) $\sum_{p=k}^{n}\binom{n}{p}$

ENEM E VESTIBULARES

01| A	**08|** D	**15|** A
02| A	**09|** B	**16|** C
03| B	**10|** A	**17|** D
04| A	**11|** C	**18|** B
05| C	**12|** D	**19|** A
06| C	**13|** B	**20|** B
07| D	**14|** B	

FRENTE A

PROBABILIDADE

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (P. 20)

01| $\frac{3}{25}$
02|
a) 120 b) $\frac{5}{18}$
03|
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{2}{5}$
04|
a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ c) $\frac{1}{2}$
05|
a) 87.500
b) $\frac{2}{7}$
06| 10%
07| 16
08| $\frac{4}{13}$
09|
a) $\frac{1}{512}$
b) $\frac{7}{8}$
10| $\frac{1}{5}$

ENEM E VESTIBULARES (P. 20)

01| C	**05|** D	**09|** D
02| C	**06|** E	**10|** D
03| C	**07|** A	
04| B	**08|** B	

FRENTE A

PROBABILIDADE

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO (P. 26)

01|
a) 11 b) $\frac{7}{25}$
02|
a) 8% b) 25%
03| 23
04|
a) 64
b) 120
c) $\frac{8}{19}$
05|
a) 51,2%
b) 38,4%
06|
a) $\frac{5}{12}$ e $\frac{2}{3}$
b) $\frac{7}{9}$
07|
a) 2%
b) 52%
08| 1 ou 9
09|
a) $\frac{3}{4}$
b) $\frac{9}{64}$
10| $\frac{7}{27}$

ENEM E VESTIBULARES (P. 27)

01| A	**06|** B	**11|** E
02| B	**07|** D	**12|** C
03| D	**08|** D	**13|** E
04| E	**09|** C	**14|** D
05| A	**10|** B	**15|** C

FRENTE A

ESTATÍSTICA

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01|
a) Entre 1.050 e 1.190 eleitores

b)

Idades	F	f(%)
19	5	20
20	7	28
21	8	32
22	3	12
23	2	8
Total	**25**	**100**

02| Aproximadamente 14 países
03|
a) 14.800
b) 2.880
04|
a) 56 c) 46
b) 44 d) 71
05|
a) 8,75
b) 9
06| 48 alunos obtiveram nota 5 e 12 alunos obtiveram nota 10.
07| 18 gols
08|
a) 198 cm
b) 18 cm^2 e $3\sqrt{2}$ cm
09|
a) 6
b) 7,5
b) 5 e 8

ENEM E VESTIBULARES

01| E	**09|** B	**17|** A
02| B	**10|** D	**18|** D
03| B	**11|** D	**19|** C
04| E	**12|** C	**20|** D
05| B	**13|** B	**21|** D
06| D	**14|** E	**22|** C
07| D	**15|** C	
08| C	**16|** A	

FRENTE B

PORCENTAGEM

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| R$1859,00
02| R$ 328,95
03| 38%
04| 3%
05| R$ 288,00.
06| R$ 2155,12
07| Devemos adicionar 60 Litros de leite com 3% de gordura e 20 Litros de leite com 4% de gordura.
08| 84,62
09| Aproximadamente 33,3%.
10|
a) p = 100x/(100 - x)
b) A porcentagem p tende a um valor infinito.

ENEM E VESTIBULARES

01| D	**08|** E	**15|** A
02| B	**09|** B	**16|** D
03| C	**10|** E	**17|** C
04| D	**11|** C	**18|** A
05| C	**12|** B	**19|** D
06| A	**13|** C	**20|** B
07| B	**14|** B	**21|** C

FRENTE B

JUROS SIMPLES

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| 4%
02| 80 meses
03| Aproximadamente 8,7%.
04| R$ 650,00
05| 100%
06| i = 6% a.m e p = 25%
07| 84%
08| R$ 17.102,00
09| 15%

ENEM E VESTIBULARES

01| C	**05|** B	**09|** B
02| C	**06|** A	**10|** A
03| D	**07|** A	**11|** E
04| A	**08|** A	**12|** D

FRENTE B

JUROS COMPOSTOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| R$1590,00
02| R$11.532,44
03| R$5720,00
04| 25.920.000,00
05| a) R$10 000,00 b) 50%
06| R$1.102,50
07| 10
08| 10%
09| R$9.600,00

ENEM E VESTIBULARES

01| C	**05|** C	**09|** C
02| C	**06|** D	**10|** D
03| D	**07|** B	**11|** C
04| A	**08|** C	**12|** C

FRENTE C

TRIGONOMETRIA NO CICLO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| a) $\frac{3\pi}{2}$
b) $\frac{\pi}{4}$
c) $\frac{8\pi}{9}$
02| $40° < \frac{4\pi}{9}$ rad $< 89° < \frac{7\pi}{12}$ rad $<$ π rad
03| 1h24min
04| 78,5cm
05| O comprimento da pista é de 240π m. A velocidade é de 60 π metros por minuto.

FRENTE C

O CICLO TRIGONOMÉTRICO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| a) $\frac{8\pi}{5}$
b) π
02| a) 158°
b) 247°

03| a) $\alpha = 110° + k.360°, k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha = 355° + k.360°, k \in \mathbb{Z}$

c) $\alpha = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

04| $\frac{\pi}{9}, -\frac{17\pi}{9}$

05| AN = $\frac{3\pi}{4}$; AP = $\frac{5\pi}{4}$

ENEM E VESTIBULARES

01| D	08| D	15| E
02| B	09| C	16| C
03| B	10| A	17| B
04| C	11| D	18| C
05| D	12| D	19| B
06| B	13| A	20| C
07| E	14| B	

FRENTE C

SENO, COSSENO E TANGENTE DE UM ARCO

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01| a) $-\frac{4}{3}$

b) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{2}+2}{2}$

02| a) -2 tg x

b) 1

c) -1

03| Não. A > B

04| O valor mínimo é – 3

05| 720

06| 5 segundos

ENEM E VESTIBULARES

01| B	08| C	15| B
02| A	09| C	16| E
03| D	10| B	17| B
04| A	11| C	18| E
05| A	12| A	19| A
06| A	13| D	20| D
07| A	14| A	21| C

FRENTE D

TEORIA DOS CONJUNTOS

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01|

a) E

b) E

c) C

d) C

e) C

02| 26

03| {3, 9, 21, 27, 33, 39, 51, 57, 63, 69}

04|

a) 3.150

b) 2.350

05| 204

06| 22

07|

a) 29

b) 5

c) 127

08|

a) 78

b) 87

c) 165

09|

a) 57

b) 37

10|

a) 150

b) 9%

ENEM E VESTIBULARES

01| C	08| B	15| B
02| D	09| E	16| C
03| A	10| B	17| C
04| C	11| E	18| E
05| E	12| B	19| B
06| C	13| C	20| C
07| E	14| E	

FRENTE D

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 1º GRAU

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01|

a) a = 1 e b = $\frac{3}{2}$

b) $-\frac{3}{2}$

02|

a) $m < \frac{4}{3}$

b) $m = \frac{4}{3}$

03| a = 5 e b = 2

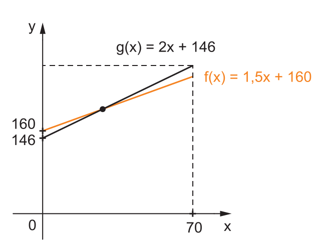
04|

a) $S = \{x \in IN \mid 0 \le n < 21\}$

b) R$ 270,00

05|

a)



b) Queremos calcular o valor de x para o qual se tem $f(x) = g(x)$ Logo, segue que

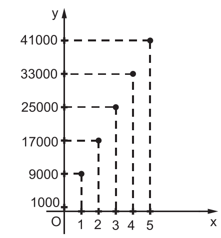
$1,5x + 160 = 2x + 146$

$x = 28$ km

06|

a) 1.000

b)



c) g(x) = 20. (8000x+1000) = 160000x + 20000

07| 30 horas

08|

a) x(t) = 0,5t + 6,3 (Portanto c = 0,5 e t = 6,3)

b) C_5 = 24,2 cm

09| 20 páginas

10|

a) $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, com $x \ge 0$

b) 2 milhões

c) R$ 7.000.000,00

ENEM E VESTIBULARES

01| C	05| C	09| C
02| B	06| C	10| E
03| E	07| E	11| C
04| A	08| D	12| D

FRENTE D

FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01|

a) R$ 3.120,00

b) $R(x) = -0,3x^2 + 90x$

02|

a) 500 m

b) 464 m

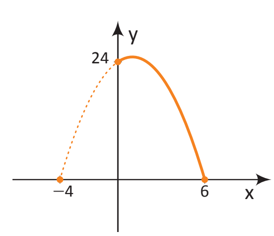
c) $5\sqrt{5}$ s

03|

a) a = $-0,1$, b = 1 e c = 1,1

b) 11 m

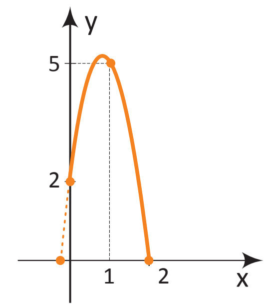
04|



05|

a) $h(t) - 4t^2 + 7t + 2$

b)



c) 0,5 s e 1,25 s

06| 9 m

07| 50

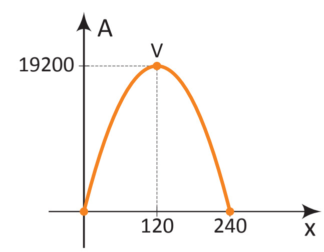
08|

a) Durante a 1ª semana

b) Sim, após 2 semanas

c) Entre a 4ª e a 5ª semanas

09|



x = 120 m e y = 160 m

10|

a) $L = -2x^2 + 200x$

b)]0, 100[

c) R$ 50,00

d) R$ 5.000,00 e 100 cartuchos

ENEM E VESTIBULARES

01| A	08| C	15| D
02| D	09| B	16| D
03| E	10| B	17| A
04| D	11| E	18| A
05| D	12| A	19| D
06| B	13| D	20| B
07| D	14| D	21| A

"Conte-me e eu esqueço.
Mostre-me e eu apenas me lembro.
Envolva-me e eu compreendo."

Confúcio

prepara enem

62 3877 3223 | 3877 3222

WWW.GRUPOPREPARAENEM.COM.BR

ISBN 978-85-88249-23-3

CLASSIS EDITORA