

Fatorial e Princípio Fundamental da Contagem

A parte da Matemática que estuda o número de possibilidades de ocorrência de um determinado evento chama-se **Análise Combinatória**. Para bem compreendê-la, são necessários alguns conceitos que se seguem:

1 - Fatorial de um Número

Seja n um número inteiro e maior que 1. O fatorial de n (indica-se $n!$) é dado pela expressão:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Em que:

- n é um número natural e maior que 1;
- $n!$ (lê-se n fatorial ou fatorial de n).

Observação: Por definição, consideramos

- $0! = 1$ (fatorial de zero é igual a um).
- $1! = 1$ (fatorial de um é igual a um).

Exemplo:

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

2 - Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem diz que se um acontecimento é formado por duas etapas independentes e sucessivas uma da outra:

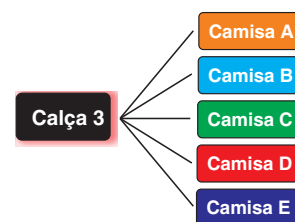
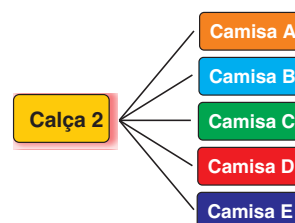
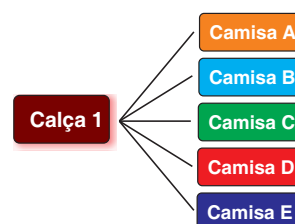
- A 1ª etapa pode ocorrer de n modos,
- Para cada um desses modos, a 2ª etapa pode ocorrer de m modos. Então, o número de possibilidades de ocorrência do acontecimento é $n \times m$.

Exemplo: Se uma pessoa dispõe de três calças diferentes e de cinco camisas, também distintas, de quantas maneiras é possível essa pessoa se vestir?

Podemos observar que o acontecimento “vestir-se” é composto por duas etapas:

- Etapla 1 - Vestir a calça \rightarrow 3 possibilidades ($n = 3$).
- Etapla 2 - Vestir a camisa \rightarrow 5 possibilidades ($m = 5$).

Vamos montar a árvore de possibilidades:



Temos, portanto, 15 modos diferentes. Poderíamos chegar a esse mesmo resultado, usando o **Princípio Fundamental da Contagem**, ou seja:

- Na 1ª etapa $n = 3$.
- Na 2ª etapa $m = 5$.

Total de possibilidades = $n \times m = 3 \times 5 = 15$. Nesse caso, utilizamos o princípio multiplicativo, porque a questão é “calça e camisa”.

Se a questão fosse “calça **ou** camisa”, deveríamos aplicar o princípio aditivo, ou seja:

$$\text{Total de possibilidades} = n + m = 3 + 5 = 8.$$

1. (G1 - ifal 2018) Em uma civilização antiga, o alfabeto tinha apenas três letras. Na linguagem dessa civilização, as palavras tinham de uma a quatro letras. Quantas palavras existiam na linguagem dessa civilização?

- a) 4. b) 12. c) 16. d) 40. e) 120.

2. (Ufrgs 2018) Tomando os algarismos ímpares para formar números com quatro algarismos distintos, a quantidade de números divisíveis por 5 que se pode obter é

- a) 12. b) 14. c) 22. d) 24. e) 26.

3. (Upe-ssa 1 2018) A prova final de Geografia de uma escola é composta de 10 itens com alternativas do tipo "verdadeiro ou falso". De quantas maneiras diferentes um estudante poderá responder esta prova, de forma que ele só assinale apenas uma alternativa em cada questão?

- a) 20 b) 64 c) 256 d) 512 e) 1024

4. (Ufrgs 2018) Tomando-se os números primos compreendidos entre 0 e 20, o número de frações do tipo

$\frac{a}{b}$, em que $a < b$, que pode ser formado é

- a) 21. b) 27. c) 28. d) 30. e) 36.

5. (Upe 2014) Na comemoração de suas Bodas de Ouro, Sr. Manuel e D. Joaquina resolveram registrar o encontro com seus familiares através de fotos. Uma delas sugerida pela família foi dos avós com seus 8 netos. Por sugestão do fotógrafo, na organização para a foto, todos os netos deveriam ficar entre os seus avós.

De quantos modos distintos Sr. Manuel e D. Joaquina podem posar para essa foto com os seus netos?

- a) 100
b) 800
c) 40 320
d) 80 640
e) 3 628 800

6. (Upf 2014) Alice não se recorda da senha que definiu no computador. Sabe apenas que é constituída por quatro letras seguidas, com pelo menos uma consoante.

Se considerarmos o alfabeto como constituído por 23 letras, bem como que não há diferença para o uso de maiúsculas e minúsculas, quantos códigos dessa forma é possível compor?

- a) 23^4
b) $23^3 \cdot 18$
c) $23^3 \cdot 72$
d) $23^4 - 5^4$
e) $18^4 + 5^4$

7. (Cesgranrio 1992) No código Morse, as letras são . e -, e as palavras contêm de uma a quatro letras. O número de palavras distintas que podem ser formadas neste código é de:

- a) 16 b) 20 c) 24 d) 26 e) 30

8. (Unep 2014) DANOS DE ALIMENTOS ÁCIDOS

O esmalte dos dentes dissolve-se prontamente em contato com substâncias cujo pH (medida da acidez) seja menor do que 5,5. Uma vez dissolvido, o esmalte não é repostado, e as partes mais moles e internas do dente logo apodrecem. A acidez de vários alimentos e bebidas comuns é surpreendentemente alta; as substâncias listadas a seguir, por exemplo, podem causar danos aos seus dentes com contato prolongado.

(BREWER. 2013, p. 64).

COMIDA/BEBIDA	PH
SUCO DE LIMÃO/LIMA	1,8 – 2,4
CAFÉ PRETO	2,4 – 3,2
VINAGRE	2,4 – 3,4
REFRIGERANTES DE COLA	2,7
SUCO DE LARANJA	2,8 – 4,0
MAÇÃ	2,9 – 3,5
UVA	3,3 – 4,5
TOMATE	3,7 – 4,7
MAIONESE/MOLHO DE SALADA	3,8 – 4,0
CHÁ PRETO	4,0 – 4,2

Considere que em um laboratório foram verificadas, por um técnico, duas amostras de alimentos que constam na tabela e verificado, por ele, que o pH dessas substâncias era, respectivamente, 3,2 e 4,2.

Nessas condições, de posse dessa tabela, pode-se afirmar que o número de maneiras distintas que esse técnico tem para tentar identificar, de maneira correta, quais foram os dois alimentos examinados é igual a

- a) 9 b) 10 c) 12 d) 14 e) 15

9. (Ufjf 2012) Uma empresa escolherá um chefe para cada uma de suas repartições A e B. Cada chefe deve ser escolhido entre os funcionários das respectivas repartições e não devem ser ambos do mesmo sexo.

Abaixo é apresentado o quadro de funcionários das repartições A e B.

FUNCIONÁRIOS	REPARTIÇÕES	
	A	B
Mulheres	4	7
Homens	6	3

De quantas maneiras é possível ocupar esses dois cargos?

- a) 12. b) 24. c) 42. d) 54. e) 72.

10. (Uepa 2012) Um profissional de design de interiores precisa planejar as cores que serão utilizadas em quatro paredes de uma casa, para isso possui seis cores diferentes de tinta. O número de maneiras diferentes que esse profissional poderá utilizar as seis cores nas paredes, sabendo-se que somente utilizará uma cor em cada parede, é:

- a) 24 b) 30 c) 120 d) 360 e) 400

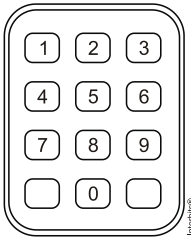
11. (Enem 2012) O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem ser associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de Sao Paulo. Disponível em: www.1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012. (adaptado)

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

- a) 14 b) 18 c) 20 d) 21 e) 23

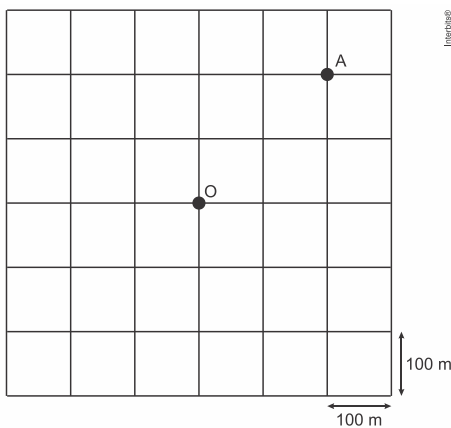
12. (G1 - ifpe 2012) Por questão de segurança os bancos instalaram ao lado da maçaneta da porta, que dá acesso à área por trás dos caixas, um teclado como o da figura abaixo.



Para entrar nessa área, cada funcionário tem a sua própria senha. Suponha que esta senha seja composta por quatro dígitos distintos. Quantas senhas poderão ser criadas se forem usados apenas os números primos que aparecem no teclado?
a) 6 b) 24 c) 80 d) 120 e) 720

13. (Fgv 2012) Usando as letras do conjunto $\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$, quantas senhas de 4 letras podem ser formadas de modo que duas letras adjacentes, isto é, vizinhas, sejam necessariamente diferentes?
a) 7 290 b) 5 040 c) 10 000 d) 6 840 e) 11 220

14. (Enem (Libras) 2017) As ruas de uma cidade estão representadas por linhas horizontais e verticais na ilustração. Para um motorista trafegando nessa cidade, a menor distância entre dois pontos não pode ser calculada usando o segmento ligando esses pontos, mas sim pela contagem do menor número de quadras horizontais e verticais necessárias para sair de um ponto e chegar ao outro. Por exemplo, a menor distância entre o ponto de táxi localizado no ponto O e o cruzamento das ruas no ponto A, ambos ilustrados na figura, é de 400 metros.



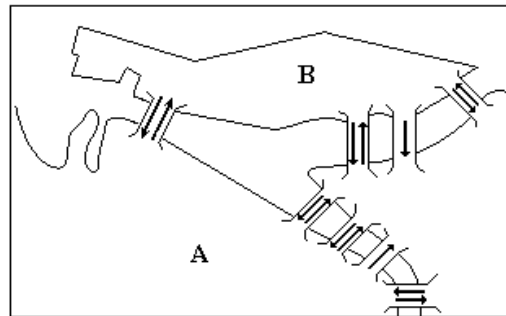
Um indivíduo solicita um táxi e informa ao taxista que está a 300 metros do ponto O, segundo a regra de deslocamentos citada, em uma determinada esquina. Entretanto, o motorista ouve apenas a informação da distância do cliente, pois a bateria de seu celular descarregou antes de ouvir a informação de qual era a esquina. Quantas são as possíveis localizações desse cliente?
a) 4 b) 8 c) 12 d) 16 e) 20

15. (Ucs 2012) Em uma prova, as seis primeiras questões eram do tipo C/E, em que o candidato devia optar entre *certo* ou *errado* para sua resposta. Nas outras quatro questões, o candidato devia escolher, entre três alternativas, a verdadeira. Quantas seqüências de respostas são possíveis na resolução da prova?
a) $(6 \cdot 2)^2$ b) $(6 \cdot 2) + (4 \cdot 3)$
c) $6^2 \cdot 4^3$ d) 10^{2+3} e) $2^6 \cdot 3^4$

16. (Ufsm 2005) Para efetuar suas compras, o usuário que necessita sacar dinheiro no caixa eletrônico deve realizar duas operações: digitar uma senha composta por 6 algarismos distintos e outra composta por 3 letras, escolhidas num alfabeto de 26 letras. Se essa pessoa esqueceu a senha, mas lembra que 8, 6 e 4 fazem parte dos três primeiros algarismos e que as letras são todas vogais distintas, sendo E a primeira delas, o número máximo de tentativas necessárias para acessar sua conta será
a) 210 b) 230 c) 2.520 d) 3.360 e) 15.120

17. (Cesgranrio 1993) As novas placas dos veículos são formadas por três letras seguidas por quatro algarismos, como por exemplo GYK 0447. O número de placas diferentes que podem ser construídas é, em milhões de placas, aproximadamente igual a:
a) 1 b) 25 c) 75 d) 100 e) 175

18. (Ufpe 1996) Na figura a seguir temos um esboço de parte do centro da cidade do Recife com suas pontes. As setas indicam o sentido do fluxo de tráfego de veículos. De quantas maneiras, utilizando apenas o esboço, poderá uma pessoa ir de carro do ponto A ao ponto B (marco zero) e retornar ao ponto de partida passando exatamente por três pontes distintas?



a) 8 b) 13 c) 17 d) 18 e) 20

19. (Fac. Albert Einstein - Medicin 2017) Um patrão tem 6 tarefas diferentes para serem distribuídas entre 3 empregados. Ele pode delegar todas elas a um só empregado, ou delegar apenas para alguns, ou ainda garantir que cada empregado receba pelo menos uma tarefa. O número de maneiras distintas de distribuir essas tarefas é
a) 639 b) 714 c) 729 d) 864

20. (Ufes 1996) Um "Shopping Center" possui 4 portas de entrada para o andar térreo, 5 escadas rolantes ligando o térreo ao primeiro pavimento e 3 elevadores que conduzem do primeiro para o segundo pavimento. De quantas maneiras diferentes uma pessoa, partindo de fora do "Shopping Center" pode atingir o segundo pavimento usando os acessos mencionados?
a) 12 b) 17 c) 19 d) 23 e) 60

21. (Pucsp 2017) Uma pessoa dispõe das seguintes cores de tinta: amarela, azul, verde, vermelha e branca, e irá utilizá-las para pintar um pote. Nesse pote serão pintadas a tampa, a lateral e uma lista na lateral, de modo que a tampa e a lateral poderão ter a mesma cor ou cores diferentes. O número de maneiras distintas de pintar esse pote é
a) 100 b) 80 c) 60 d) 40

22. (G1 - ifpe 2017) Um *pixel* é o menor elemento de uma imagem digital e, em casos de imagens coloridas, é composto por um conjunto de 3 pontos: vermelho, verde e azul. Cada um desses pontos é capaz de exibir 256 tonalidades distintas. Combinando tonalidades desses três pontos, quantas cores diferentes podem ser exibidas?
a) 3^{256} b) $3 \cdot 256$ c) 256^3 d) 256 e) $27 \cdot 256$

23. (Epcar (Afa) 2017) Um baralho é composto por 52 cartas divididas em 4 naipes distintos (copas, paus, ouros e espadas). Cada naipe é constituído por 13 cartas, das quais 9 são numeradas de 2 a 10, e as outras 4 são 1 valete (J), 1 dama (Q), 1 rei (K) e 1 ás (A).

Ao serem retiradas desse baralho duas cartas, uma a uma e sem reposição, a quantidade de sequências que se pode obter em que a primeira carta seja de ouros e a segunda não seja um ás é igual a

- a) 613 b) 614 c) 614 d) 615

24. (Famerp 2017) A escala de coma de Glasgow é utilizada como primeira avaliação do nível de consciência de pacientes com trauma craniano. Essa escala consiste em avaliar o paciente em três testes, que são: ocular (O), verbal (V) e motor (M). O especialista que avalia o paciente atribui de 1 a 4 pontos para O, de 1 a 5 pontos para V e de 1 a 6 pontos para M. Um trauma cranioencefálico é considerado grave se a pontuação total é de 3 a 8 pontos, moderado se é de 9 a 13 pontos, e leve se é de 14 a 15 pontos.

<http://misodor.com>. Adaptado.

Se um paciente foi avaliado na escala de Glasgow com classificação moderada de trauma, é correto afirmar que ele obteve, necessariamente, pontuação

- a) de 1 unidade inferior ao máximo em apenas um dos três testes.
b) de 2 unidades inferiores ao máximo em apenas um dos três testes.
c) maior do que 1 em pelo menos dois dos três testes.
d) máxima em pelo menos um dos três testes.
e) menor do que 3 em apenas um dos três testes.

25. (Fgv 2017) O total de números de cinco algarismos que possuem pelo menos dois dígitos consecutivos iguais em sua composição é igual a

- a) 6.581.
b) 9.590.
c) 18.621.
d) 27.930.
e) 30.951.

26. (Enem 2017) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que "L" e "D" representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LDDDDD
II	DDDDDD
III	LLDDDD
IV	DDDDD
V	LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes.

A opção que mais se adequa às condições da empresa é

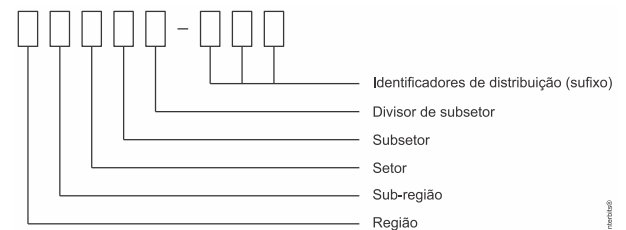
27. (Famema 2017) Uma pessoa dispõe de 5 blocos de papel colorido nas cores azul, amarelo, verde, branco e rosa, sendo cada um deles de uma única cor, e irá utilizar 3 folhas para anotações. O número total de maneiras possíveis de essa pessoa escolher essas 3 folhas, sendo pelo menos 2 delas de uma mesma cor, é

- a) 22. b) 12. c) 15. d) 18. e) 25.

28. (Espm 2017) As placas de automóveis no Brasil são formadas por 3 letras do alfabeto completo (26 letras), seguidas por 4 algarismos do sistema decimal de numeração. A quantidade de placas em que as 3 letras e os 4 algarismos são consecutivos (por exemplo: ABC 0123, MNP 4567) é igual a:

- a) 168 b) 216 c) 184 d) 156 e) 244

29. (Enem (Libras) 2017) O Código de Endereçamento Postal (CEP) código numérico constituído por oito algarismos. Seu objetivo é orientar e acelerar o encaminhamento, o tratamento e a distribuição de objetos postados nos Correios. Ele está estruturado segundo o sistema métrico decimal, sendo que cada um dos algarismos que o compõe codifica região, sub-região, setor, subsetor, divisor de subsetor e identificadores de distribuição conforme apresenta a ilustração.



O Brasil encontra-se dividido em dez regiões postais para fins de codificação. Cada região foi dividida em dez sub-regiões. Cada uma dessas, por sua vez, foi dividida em dez setores. Cada setor, dividido em dez subsetores. Por fim, cada subsetor foi dividido em dez divisores de subsetor. Além disso, sabe-se que os três últimos algarismos após o hífen são denominados de sufixos e destinam-se à identificação individual de localidades, logradouros, códigos especiais e unidades dos Correios.

A faixa de sufixos utilizada para codificação dos logradouros brasileiros inicia em 000 e termina em 899.

Disponível em: www.correios.com.br Acesso em: 22 ago. 2017 (adaptado).

Quantos CEPs podem ser formados para a codificação de logradouros no Brasil?

- a) $5 \cdot 0 + 9 \cdot 10^2$
b) $10^5 + 9 \cdot 10^2$
c) $2 \cdot 9 \cdot 10^7$
d) $9 \cdot 10^2$
e) $9 \cdot 10^7$

30. (Uece 2017) Quantos números inteiros positivos pares, com três dígitos distintos, podemos formar com os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7?

- a) 24. b) 28. c) 32. d) 36.

31. (Upf 2017) As portas de acesso de todos os quartos de certo hotel são identificadas por meio de números ímpares formados com 3 elementos do conjunto $S = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Nessas condições, é **correto** afirmar que o número máximo de quartos desse hotel é:
a) 18 b) 27 c) 90 d) 108 e) 216

32. (Enem 2017) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.



JUNTOS NUM SÓ RITMO

Disponível em: www.pt.fifa.com.
Acesso em: 19 nov. 2013
(adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

a) 15 b) 30 c) 108 d) 360 e) 972

33. (Ueg 2015) Érika resolve passear com a cachorrinha Kika e, antes de sair do apartamento, escolhe colocar uma roupa e uma coleira na cachorrinha. Se Kika tem 7 roupas e 3 coleiras, todas distintas, de quantas maneiras Érika pode escolher uma roupa e uma coleira para passear com a Kika?
a) 10 b) 21 c) 35 d) 42

34. (Enem 2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido. Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre

distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada. O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há
a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

35. (Enem 2004) No Nordeste brasileiro, é comum encontrarmos peças de artesanato constituídas por garrafas preenchidas com areia de diferentes cores, formando desenhos. Um artesão deseja fazer peças com areia de cores cinza, azul, verde e amarela, mantendo o mesmo desenho, mas variando as cores da paisagem (casa, palmeira e fundo), conforme a figura.



O fundo pode ser representado nas cores azul ou cinza; a casa, nas cores azul, verde ou amarela; e a palmeira, nas cores cinza ou verde. Se o fundo não pode ter a mesma cor nem da casa nem da

palmeira, por uma questão de contraste, então o número de variações que podem ser obtidas para a paisagem é

a) 6. b) 7. c) 8. d) 9. e) 10.

36. (Fatec 2008) Para mostrar aos seus clientes alguns dos produtos que vende, um comerciante reservou um espaço em uma vitrine, para colocar exatamente 3 latas de refrigerante, lado a lado. Se ele vende 6 tipos diferentes de refrigerante, de quantas maneiras distintas pode expô-los na vitrine?
a) 144 b) 132 c) 120 d) 72 e) 20

Gabarito:

1: [E] 2: [D] 3: [E] 4: [C] 5: [D]
6: [D] 7: [E] 8: [C] 9: [D] 10: [D]
11: [C] 12: [B] 13: [A] 14: [C] 15: [E]
16: [E] 17: [E] 18: [C] 19: [C] 20: [E]
21: [A] 22: [C] 23: [A] 24: [C] 25: [E]
26: [E] 27: [E] 28: [A] 29: [E] 30: [A]
31: [D] 32: [E] 33: [B] 34: [A] 35: [B]
36: [C]